الدرس الأول: العزم والاتزان السكوني

"سندرس في هذه الوحدة الأجسام التي تدور حول محور ثابت"

*** محتويات الدرس:**

1 ⇐ العزم — 2 ⇐ عزم الازدواج

3 ⇐ الاتزان — 4 ⇐ مركز الكتلة.

[1] العـــزم: (I)

تعريـــف: "هو مقياس لمقدرة القوة على إحداث دوران للجسم"

رياضياً: "هو ناتج الضرب المتجهي لمتجه القوة ومتجه موقع نقطة تأثير القوة".

I: العزم $\Rightarrow N.m$

r: موقع نقطة تأثير القوة $\Rightarrow m$

$r\sin\theta$: ذراع القوة $\Rightarrow m$

θ: $(r), (F)$ الزاوية بين $\Rightarrow rad$

$$\vec{I} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\Rightarrow$$

$$\vec{I} = Fr\sin\theta$$

*** موقع نقطة تأثير القوة:**

هي المسافة بين محور الدوران ونقطة تأثير القوة، واتجاهه من محور الدوران إلى نقطة التأثير.

*** محور الدوران:**

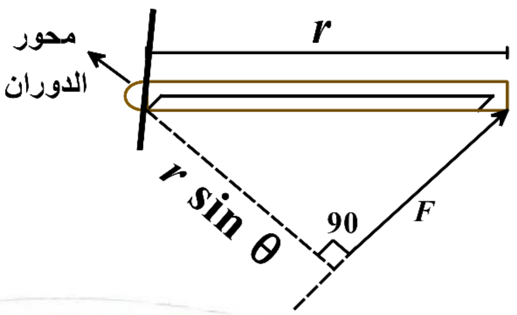
هو الخط العمودي على مستوى الدوران والذي يمر بالنقطة التي يدور حولها الجسم.

*** خط عمل القوة:**

هو الخط الذي يمثل القوة وامتداده.

*** ذراع القوة:**

البعد العمودي بين خط عمل القوة ومحور الدوران.



ملاحظات مهمة:

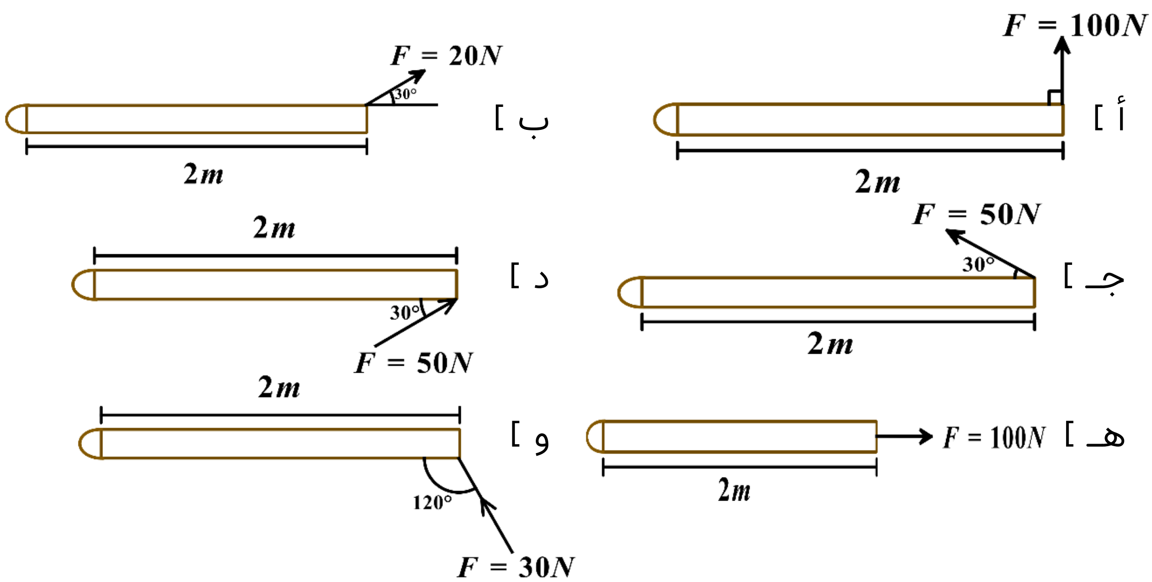
* عزم القوة التي يمر خط عملها بمحور الدوران يساوي (صفرا).

* إذا كانت القوة غير عمودية على (r)، فإن مركبتها العمودية هي التي تسبب دوران الجسم (العزم).

* $\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\theta} = \mathbf{sin}(\mathbf{180} - \boldsymbol{\theta}) \Rightarrow \mathbf{sin}(\text{الكبيرة}) = \mathbf{sin}(\text{الصغيرة})$

تدريب:

أوجد العزم للقوة (F) في كل من الأشكال التالية:



الحل:

أ]
$$T = Fr\sin\theta$$
$$= 100 \times 2 \times 1$$
$$= 200\ N.m$$

ب]
$$T = Fr\sin\theta$$
$$= 20 \times 2 \times \sin 30$$
$$= 20\ N.m$$

جـ]
$$T = Fr\sin\theta$$
$$= 50 \times 2 \times \sin 150$$
$$= 50\ N.m$$

د]
$$T = Fr\sin\theta$$
$$= 50 \times 2 \times \sin 30$$
$$= 50\ N.m$$

هـ]
$$T = Fr\sin\theta$$
$$= 100 \times 2 \times \sin 0 = 0$$

و]
$$T = Fr\sin\theta$$
$$= 30 \times 2 \times \sin 120$$

العزم المحصل:

لحساب العزم المحصل:

[1] تحسب عزم كل قوة على حدة.

[2] نجمع عزم القوى مع مراعاة إشارة كل عزم.

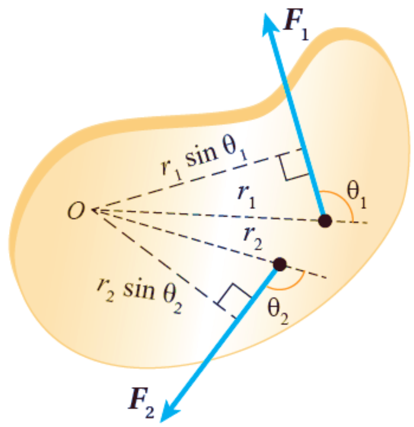
⇐ تحديد إشارة العزم للقوة:

*** إذا كانت القوة تسبب دوران للجسم:**

[1] مع عقارب الساعة ⇐ إشارة العزم تعوّض ⇐ سالب (−)

[2] عكس عقارب الساعة ⇐ إشارة العزم تعوّض ⇐ موجب (+)

$$\boxed{\sum \vec{T} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3}$$



جسم قابل للدوران حول محور
يمرُّ بالنقطة (O) عموديًّا على مستوى الصفحة،
ويؤثر فيه قوتان F_1 و F_2.

$$T_1 = F_1 r_1 \sin\theta_1$$

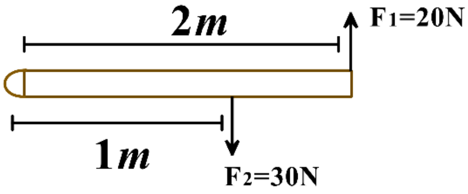
$$T_2 = F_2 r_2 \sin\theta_2$$

$$\sum T = F_1 r_1 \sin\theta - F_2 r_2 \sin\theta_2$$

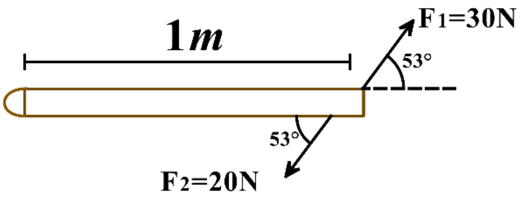
تدريب:

أحسب مقدار العزم المحصل في كل من الأشكال التالية:

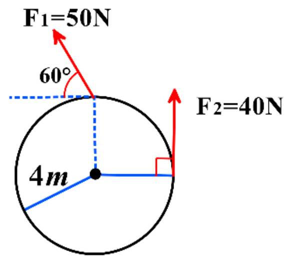
أ]



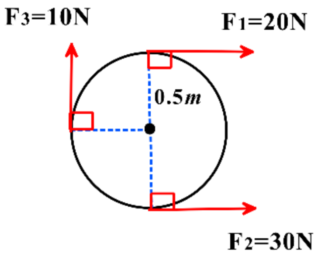
ب]



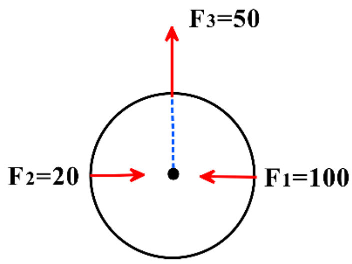
جـ]



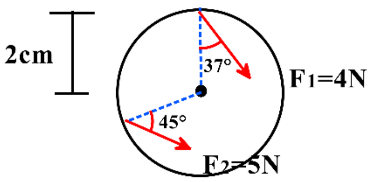
د]



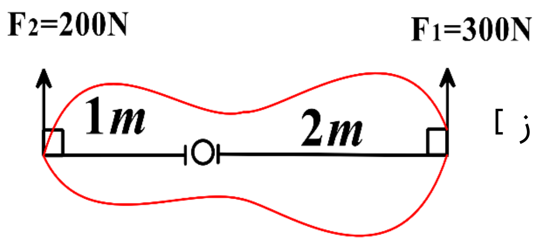
هـ]



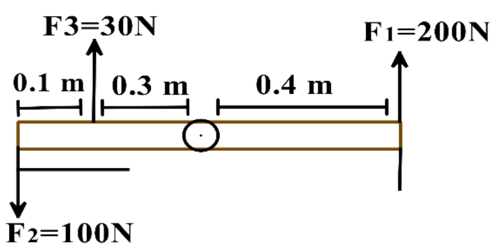
و]



ز]



ح]



الحـــل:

[أ] $\boldsymbol{\vec{T}_1 = F_1 r_1 \sin\theta_1}$

$= 20 \times 2 \times 1$

$= 40\ N.m$

$\vec{T}_2 = F_2 r_2 \sin\theta_2$

$= 30 \times 1 \times 1$

$= -30\ N.m$

$\sum \vec{T} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 40 - 30 = 10\ N.m$

[ب] $\boldsymbol{\vec{T}_1 = F_1 r_1 \sin\theta_1}$

$= 30 \times 1 \times \sin 53$

$= 24\ N.m$

$\vec{T}_2 = F_2 r_2 \sin\theta_2$

$= 20 \times 1 \times \sin 127$

$= -16\ N.m$

$\sum \vec{T} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2$

$= 24 - 16 = 8\ N.m$

[جـ] $\boldsymbol{\vec{T}_1 = F_1 r_1 \sin\theta_1}$

$= 50 \times 4 \times \sin 30$

$= 100\ N.m$

$\vec{T}_2 = F_2 r_2 \sin\theta_2$

$= 40 \times 4 \times \sin 90$

$= 160\ N.m$

$\sum \vec{T} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2$

$= 100 + 160 = 260\ N.m$

[د] $\boldsymbol{\vec{T}_1 = F_1 r_1 \sin\theta_1}$

$= 20 \times 0.5 \times \sin 90$

$= -10\ N.m$

$\vec{T}_2 = F_2 r_2 \sin\theta_2$

$= 30 \times 0.5 \times \sin 90$

$= 15\ N.m$

$\vec{T}_3 = \vec{F}_3 r_3 \sin\theta_3$

$= 10 \times 0.5 \times \sin 90$

$= -5\ N.m$

$\sum \vec{T} = -10 + 15 - 5 = 0$

[هـ] $\vec{T}_1 = F_1 r_1 \sin\theta$

$= 100 \times r \times 0 = 0$

$\vec{T}_2 = 20 \times r \times 0 = 0$

$\vec{T}_3 = 5 \times r \times 0 = 0$

$\sum \vec{T} = 0$

[و] $\vec{T}_1 = F_1 r_1 \sin\theta_1$

$= 4 \times 2 \times 10^{-2} \times \sin 143$

$= -4.8 \times 10^{-2} N.m$

$\vec{T}_2 = F_2 r_2 \sin\theta_2$

$= 5 \times 2 \times 10^{-2} \times \sin 135$

$= 7 \times 10^{-2}\ \ N.m$

$\sum \vec{T} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2$

$= -4.8 \times 10^{-2} + 7 \times 10^{-2}$

$= 2.2 \times 10^{-2}\ \ N.m$

[ز] $\vec{T}_1 = F_1 r_1 \sin\theta_1$

$= 300 \times 2 \times \sin 90$

$= 600\ N.m$

$\vec{T}_2 = F_2 r_2 \sin\theta_2$

$= 200 \times 1 \times 90$

$= -200\ \ N.m$

$\sum \vec{T} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2$

$= 600 + -200 = 400\ \ N.m$

[ح] $\vec{T}_1 = F_1 r_1 \sin\theta$

$= 200 \times 0.4 \times \sin 90$

$= 80\ N.m$

$\vec{T}_2 = T_2 r_2 \sin\theta_2$

$= 100 \times 0.4 \times \sin 90$

$= 40\ \ N.m$

$\vec{T}_3 = F_3 r_3 \sin\theta_3$

$= 50 \times 0.3 \times \sin 90$

$= -15\ N.m$

$\sum \vec{T} = 80 + 40 - 15 = 105\ \ N.m$

سؤال (1) متى يكون عزم القوة المؤثرة في جسم يساوي (صفرا)؟

جواب: عندما يمرّ خط عمل القوة بمحور الدوران.

سؤال (2) فسر؛ عند حساب العزم المحصّل المؤثر في جسم، فإنني أهمل القوى التي يمر خط عملها في محور الدوران؟

جواب: لأن طول ذراع القوة ($r \sin \theta$) التي يمر خط عملها في محور الدوران يساوي صفر، فإذا هي لا تحدث دوران في الجسم.

سؤال (3) إذا أردت أن أفتح باباً دوار، أحدد موقع نقطة تأثير القوّة، بحيث أدفع الباب بأقل مقدار في القوة، حدد بأي اتجاه أؤثر بهذه القوة في الباب.

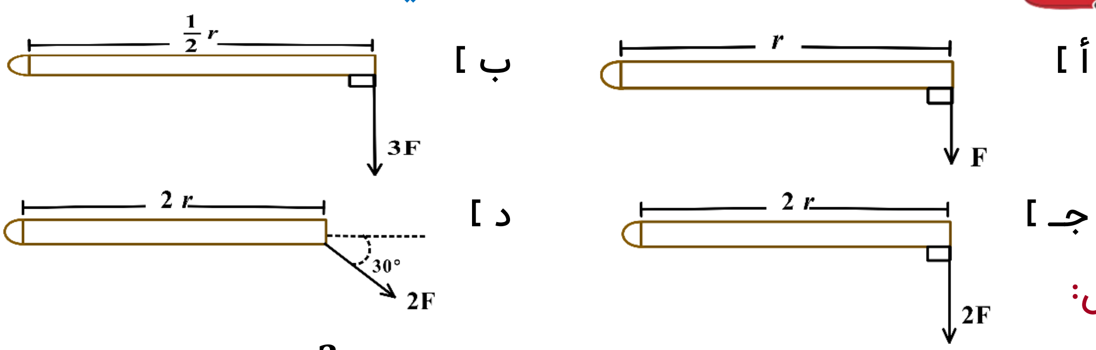
جواب: يكون موقع نقطة تأثير القوة أبعد ما يمكن عن محور الدوران ويكون اتجاه القوة عمودياً على مستوى الباب.

سؤال (4) نحتاج مفتاح شد لفك الصواميل لفك إطار السيارة اقترح طريقتين لفك الإطار بأقل قوة ممكنة.

جواب: (1) زيادة طول ذراع القوة عن طريق وصل مفتاح الشد بماسورة.

(2) جعل القوة المؤثر عمودية على ذراع مفتاح الشد.

سؤال (5) رتّب القوى التالية تنازلياً حسب العزم الذي تحدثه:



الحـــل:

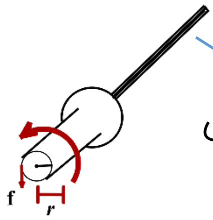
$$\vec{T}_{\text{أ}} = -Fr \ , \vec{T}_{\text{ب}} = -\frac{3}{2}\,Fr \ , \ \vec{T}_{\text{جـ}} = -4\,Fr \ , \ \vec{T}_{\text{د}} = 4\,Fr \sin 30 = -2\,Fr$$

$$\therefore \ \vec{T}_{\text{جـ}} > \vec{T}_{\text{د}} > \vec{T}_{\text{ب}} > \vec{T}_{\text{أ}}$$

سؤال (6) فسّر؛ لفك البراغي باستخدام مفك، فإنه يفضل استخدام مفك مقبضه سميك، عندما تكون البراغي مشدودة بإحكام.

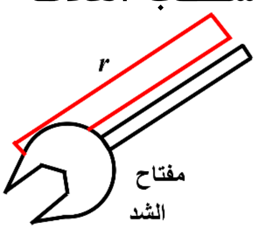
جواب: لأن زيادة سمك المقبض تعني زيادة طول ذراع القوة وحسب العلاقة $(T = Fr\sin\theta)$ يزداد العزم الذي يعمل على فك البراغي بثبات القوة.

ملاحظة: المفكك ⟸ يمثل محور الدوران ⟸ تأثير القوة



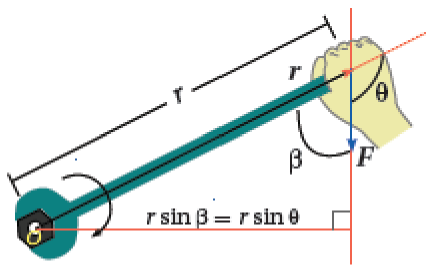
سؤال (7) فسّر؛ ذراع القوة لمفتاح الشد طويل؟

جواب: لكي نتمكن من التأثير على الصواميل بأكبر عزم ممكن حسب العلاقة $(T = Fr\sin\theta)$ كلما زاد طول ذراع القوة زاد العزم بثبات القوة.



مثال (1)

يستخدمُ زيد مفتاح شدٍّ طوله $(25.0\ cm)$ لشد صامولة في درّاجة حيث أثّر بقوة مقدارُها $(1.6 \times 10^2 N)$ في طرف مفتاح الشد في الاتجاه الموضح في الشكل، فإذا علمت أن مقدار الزاوية (β) يساوي (75^o)، أحسب مقدارَ العزم المؤثر في المفتاح وأُحدّد اتّجاهه.



الحل: $r = 25 \times 10^{-2}$ / $F = 1.6 \times 10^2$ / $\beta = 75$ / $T = ??!$

$\sin 75 = \sin 180 - 75$

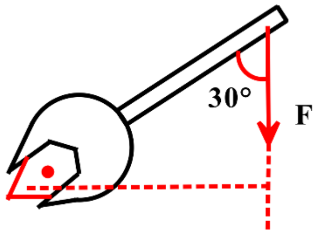
$= \sin 105$

* يدور الجسم مع عقارب الساعة إذا نعوّض العزم سالب

$$T = -F\,r\sin\theta$$
$$= -1.6 \times 10^2 \times 25 \times 10^{-2} \times \sin 105$$
$$= -38\ N.m$$

مثال (2)

عند التأثير على مفتاح شدّ بقوة مقدارها ($6000\ N$) بالاتجاه الموّضح في الشكل حدد موقع نقطة تأثير القوة المناسب لتوليد عزم مقداره ($-200\ N.m$).



الحل:

$F = 6 \times 10^3 \quad / \quad T = -2 \times 10^2 \quad / \quad \theta = 180 - 30 = 150$

$\sin 150 = \sin 30$

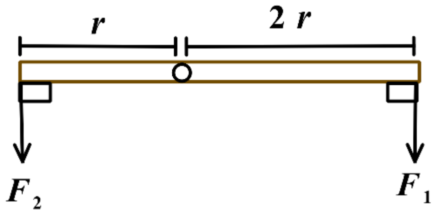
$T = F\ r \sin\theta$

$2 \times 10^2 = 6 \times 10^3 \times r \times \sin 150$

$r = \frac{2\times10^2}{3\times10^3} = \frac{2}{3} \times 10^{-1} m \approx 6.67\ cm$

مثال (3)

في الشكل إذا علمت أن ($F_1 = F_2$)، فإلى أي أتجاه سيدور الجسم.



الحل:

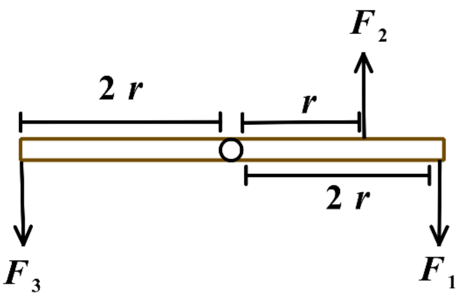
$T_1 = F_1 r \sin\theta = -F\ r2r$

$T_2 = F_2 r \sin\theta = F\ r$

سيدور مع عقارب الساعة لأن (F_1) عزمها أكبر.

مثال (4)

في الشكل المجاور إذا علمت أن ($F_1 = F_2 = F_3$) ففي أي اتجاه سيدور الجسم.



الحل:

$T_1 = F_1 r_1 \sin\theta = -2\ Fr$

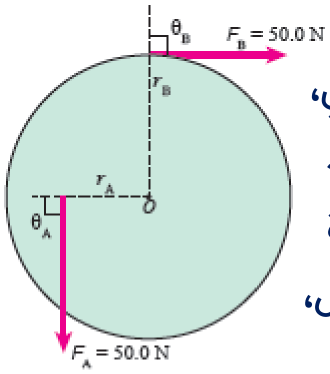
$T_2 = F_2 r_2 \sin\theta = Fr$

$T_3 = F_3 r_3 \sin\theta = \frac{3}{2} Fr$

$= \left(1 + \frac{3}{2} - 2\right) Fr = 0.5\ Fr$

∴ سيدور الجسم عكس عقارب الساعة لأن القوى التي تحدث دوران عكس عقارب الساعة عزمها أكبر.

مثال (5)



بكرة مُصمَتة نصف قطرها (rB) يمرّ في مركزها (O)محور دوران عمودي، على مستوى الصفحة؛ إذا علمتُ أن القوة (F_A) تؤثر في البكرة على بُعد $(r_A = 30.0\ cm)$ من محور الدوران، وتؤثر القوة (F_B) عند حافة البكرة حيث $(r_B = 50.0 cm)$ واعتمادًا على المعلومات المُثبتة في الشكل، أحسب مقدار العزم المحصل في البكرة:

الحل:

$$F_A = F_B = 50\ N / \ r_A = 30 \times 10^{-2} \ / \ r_B = 50 \times 10^{-2}$$

$$\theta_A = \theta_B = 90 \ / \ \Sigma T = ??$$

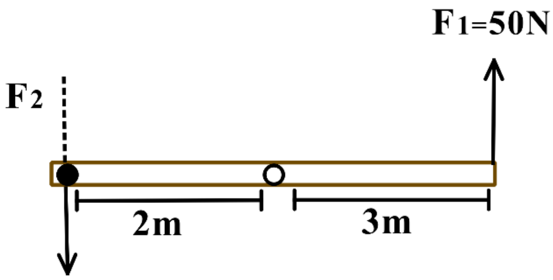
F_A: عزمها موجب

F_B: عزمها سالب

$$\Sigma T = T_1 + T_2$$
$$= F_A r_A \sin\theta_A - F_B r_B \sin\theta_B$$
$$= 50 \times 30 \times 10^{-2} - 50 \times 50 \times 10^{-2}$$
$$= -10\ N.m$$

* يعمل العزم على تدوير البكرة مع اتجاه عقارب الساعة.

مثال (6)



إذا كان مقدار العزم المحصل في الشكل $(100\ N.m)$ والجسم يدور مع عقارب الساعة، فأحسب مقدار واتجاه (F_2) إذا علمت أنها عمودية على متجه موقع نقطة تأثير القوة:

الحل:

$$\Sigma T = -100 \ / \ F_1 = 50 \ / \ r_1 = 3m \ / \ r_2 = 2m \ / \ F_2 = ??$$

$$\Sigma \vec{T} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 \Rightarrow \quad -100 = Fr\sin\theta + T_2$$
$$-100 = Fr\sin\theta + T_2$$
$$T_2 = -250\ N.m$$

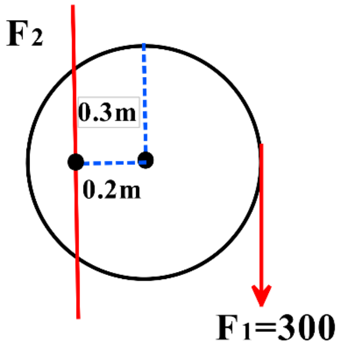
* مع عقارب الساعة

$$T = Fr\sin\theta$$

$$250 = F \times 2 \times 1 \implies F = 125\ N, \boxed{Y+} \searrow$$

لأن القوة تحدث دوران مع عقارب الساعة.

مثال (7)



إذا كان مقدار العزم المحصل في الشكل $(400\ N.m)$ والجسم يدور مع عقارب الساعة، احسب مقدار واتجاه (F_2) إذا علمت أنها عمودية على متجه موقع نقطة تأثير القوة:

الحل: $\Sigma T = -400 \ / \ F_1 = 300 \ / \ r_1 = 3 \times 10^{-1} \ / \ r_2 = 2 \times 10^{-1} \ / \ F_2 = ??$

$$\Sigma\vec{T} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 \Rightarrow \quad -400 = -F_1 r_1 \sin\theta + T_2$$

$$-400 = -90 + T_2$$

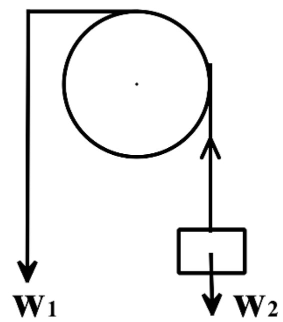
$$-310 = +T_2 \Rightarrow$$

(F_2) تؤثر بدوران مع عقارب الساعة ⇐

$$T_2 = F_2 r_2 \sin\theta_2$$

$$310 = F_2 \times 2 \times 10^{-1} \implies F_2 = 1550\ N, Y+$$

مثال (8)



3] عـزم الازدواج. $(Tcouple)$

الازدواج: هو تأثير قوتان متساويتين مقداراً ومتعاكسين اتجاهاً وخطا عملها غير متطابقين على جسم.

* **رياضياً:** هو ناتج ضرب مقدار احدى القوتين في البعد العمودي بينهما.

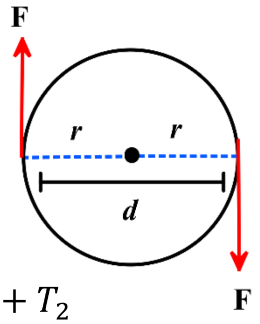
d: البعد العمودي بين خطي عمل القوتين

$d = 2\,r\sin\theta$

$Tcouple = 2\,Fr\sin\theta$

$Tcouple = Fd$

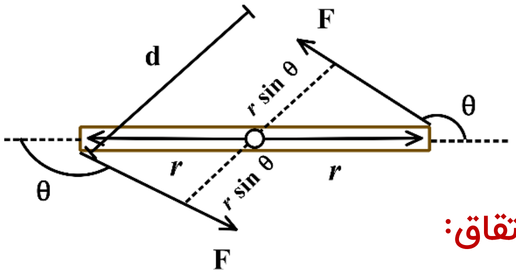
اشتقاق:



$$\Sigma T = T_1 + T_2$$
$$= -Fr + -Fr$$
$$= -2\,Fr = -\,Fd$$

<u>$Tcouple$</u>

اشتقاق:



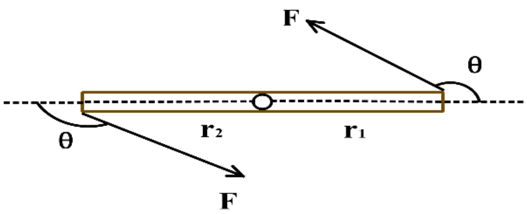
$$\Sigma T = T_1 + T_2$$
$$= Fr\sin\theta + Fr\sin\theta$$
$$= 2\,Fr\sin\theta + Fd$$

<u>$Tcouple$</u>

مثال (1)

مسطرة مترية قابلة للدوران حول محور ثابت يمر في منتصفها كما في الشكل، أثر فيها قوتان شكلتا ازدواجا، فإذا علمت أن مقدار كل قوة $(80\ N)$ ومقدار الزاوية (θ) يساوي (143^{o})، أحسب مقدار واتجاه عزم الازدواج.

الحل:



$F_1 = F_2 = 80 \;\; / \;\; r_1 = r_2 = 0.5\ m \;\; / \; \theta_1 = \theta_2 = 14?$

$\sin 143 = \sin 37$

$Tcouple = 2\,Fr\ \sin\theta$

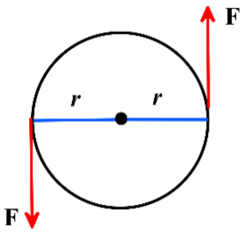
$= 2 \times 80 \times 0.5 \times \sin 143$

$= 80 \times 0.6 = 48\ N.m$

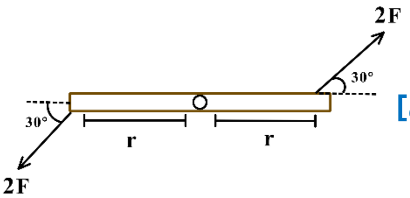
مثال (2)

في أي من الأشكال التالية يكون عزم الازدواج هو الأكبر:

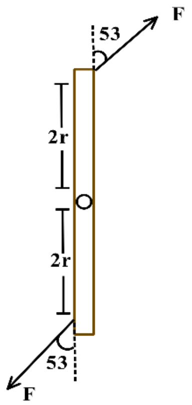
أ]



ب]



جـ]



أ) $Tcouple = 2\ Fr \sin\theta$

$= 2Fr$

ب) $Tcouple = 2\ Fr \sin\theta$

$= 2 \times 2r \sin 30$

$= 2\ Fr$

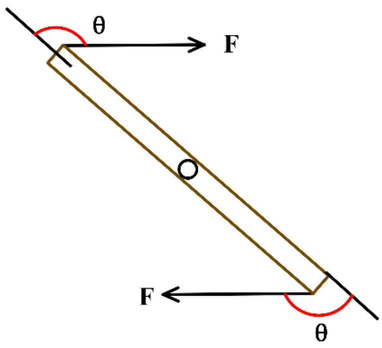
جـ) $Tcouple = 2\ Fr \sin\theta$

$= 2F \times 2r \sin\theta$

$= 3.2\ Fr$

$\therefore\ Tcouple$ للشكل (جـ) هو الأكبر

مثال (3)



قوتان متوازيتان متساويتان مقداراً ومتعاكستان، مقدار كل منهما $(100\ N)$، تؤثران عند طرفي قضيب فلزي طوله $(1.5\ m)$ قابل للدوران حول محور ثابت عند منتصفه، إذا كان العزم الكلي المؤثر فيه $(130\ N.m)$ باتجاه حركة عقارب الساعة أحسب مقدار الزاوية (θ) التي يصنعها خط عمل كل قوة مع متجه موقع نقطة التأثير.

الحــل: تشكل القوتين ازدواجاً.

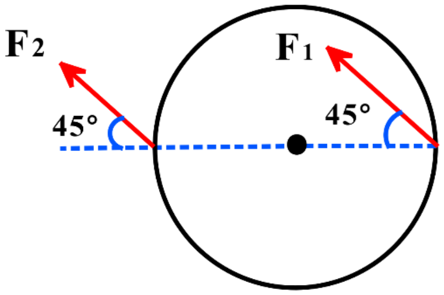
$$Tcouple = 2Fr\sin\theta \Longrightarrow 130 = 2 \times 100 \times 0.75 \sin\theta$$

$$\sin\theta = \frac{130}{150} = 0.86$$

$\therefore\ \theta = 60 \times$ أو $\theta = 120\ \checkmark$

لأن الزاوية منفرجة.

مثال (4)



قرص فلزي قابل للدوران حول محوره (0) تأثر بقوتين (F_2, F_1) كما في الشكل مقدار كل منهما $(20\ N)$، أجب عما يلي:

أ] هل تأثير هاتين القوتين يعتبر ازدواجاً؟ فسرا

ب] إذا قمت بعكس اتجاه (F_2) وأصبح العزم المحصل المؤثر على القرص $(140\ N.m)$ أحسب مقدار قطر القرص.

الحــل: $F_1 = F_2 = 20\ N\ /\ \theta_1 = \theta_2 = 45^o /$

أ] لا يمثلان ازدواجاً، لأنهما غير متعاكسين.

ب] إذا تم عكس اتجاه (F_2) يصبح عزم القوتين المحصل عزم ازدواج.

$$\therefore \boldsymbol{Tcouple = 2\ Fr \sin\theta}$$

$$\boldsymbol{140 = 2 \times 20 \times 0.7r \implies \frac{140}{28} = r \Rightarrow r = 5m}$$

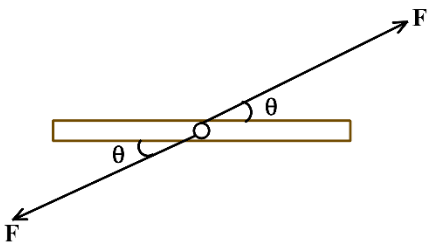
$$\boldsymbol{d = 2r = 10m}$$

مثال (5)

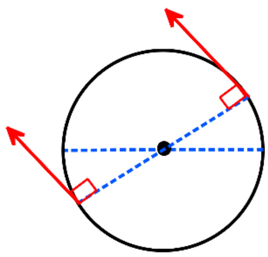
أي من القوى التالية عزمها المحصل يمثل عزم ازدواج: -

جواب: $\sum F_1 = \sum F_1 \quad / \quad \Delta t_1 = \Delta t_1 \quad / \quad m_1 > m_2$

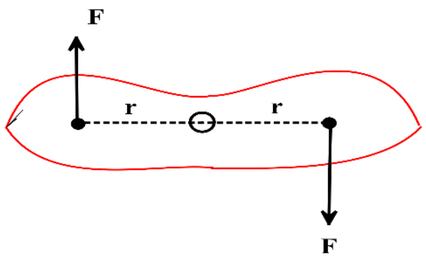
أ]



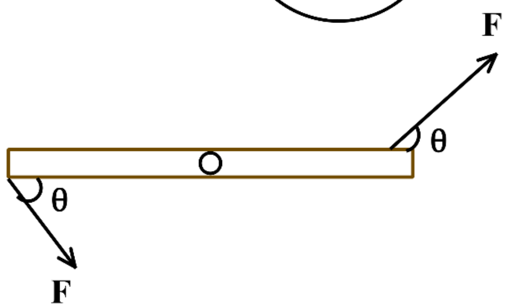
ب]



جـ]



د]



الشكل (ج) فقط، لأن القوتان متعاكستان، متساويان وخط عملهما غير متطابقان.

تمرينـــــــــات

تمرين (1): اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يلي:

1] يقاس عزم القوة بوحدة:

(أ) $N.m$ (ب) N/m (جـ) $N.m^2$ (د) N/m^2

2] متجه يمثل مقداره المسافة بين محور الدوران ونقطة تأثير القوة:

(أ) زراع القوة (ب) متجه موقع نقطة التأثير

(جـ) البعد العمودي. (د) خط عمل القوة

3] الخط العمودي الواصل بين محور الدوران وخط عمل القوة:

(أ) ذراع القوة (ب) متجه موقع نقطة التأثير

(جـ) البعد العمودي (د) خط عمل القوة

4] عند التأثير على جسم منتظم قابل للدوران حول مركزه بقوة (F) فإن أكبر قيمة للعزم يمكن الحصول عليها عندما:

(أ) تكون القوة أبعد ما يمكن عن محور الدوران

(ب) تكون القوة عمودية على موقع نقطة التأثير.

(جـ) تكون القوة تصنع زاوية (30) مع محور الدوران.

(د) (أ + ب).

5] عند التأثير على جسم منتظم قابل للدوران حول مركزه بقوة (F) فإنه يمكن الحصول على نصف القيمة العظمى للعزم عندما:

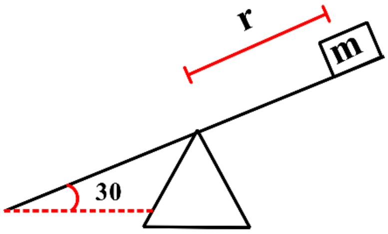
(أ) تكون القوة أبعد ما يمكن عن محور الدوران

(ب) تكون القوة عمودية على موقع نقطة التأثير.

(جـ) تكون القوة تصنع زاوية (30) مع محور الدوران.

(د) (أ + ب).

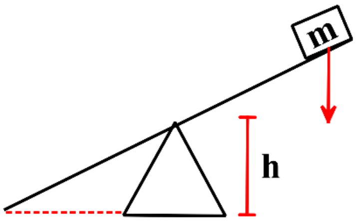
6] في الشكل المجاور يكون عزم وزن الكتلة (m)



(أ) $mr \sin 30$ (ب) $mr \sin 60$

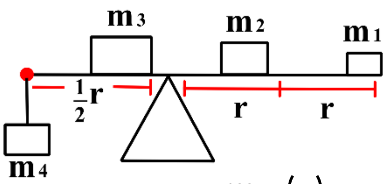
(جـ) $10\ mr \sin 30$ (د) $10\ mr \sin 60$

7] في الشكل المجاور، إذا قمنا بتقليل ارتفاع (h) نقطة الارتكاز فإن العزم الناتج عن وزن الكتلة (m):



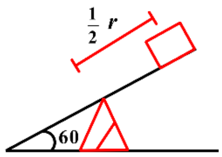
(أ) يقل (ب) يزداد (جـ) يبقى ثابت (د) يساوي صفر

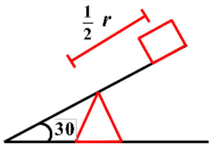
8] أي الكتل في الشكل يكون عزم وزنها أكبر إذا علمت أن كتلها متساوية:

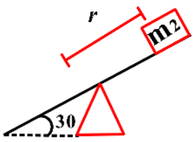


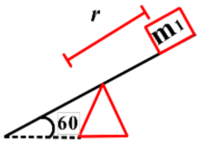
(أ) m_1 (ب) m_2 (جـ) m_3 (د) m_4

9] أي الكتل في الشكل يكون عزم وزنها أكبر إذا علمت أن لها نفس الكتلة:

(أ)


(ب)


(جـ)


(د)


10] عند التأثير بقوتين متساويتين مقداراً على جسم فإنهما تحدثان عزم إزدواج عندما:

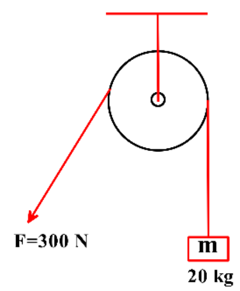
(أ) تكون متوازيتين وبنفس الاتجاه.

(ب) تكون متوازيتين وبعكس الاتجاه وخط عملها متطابق.

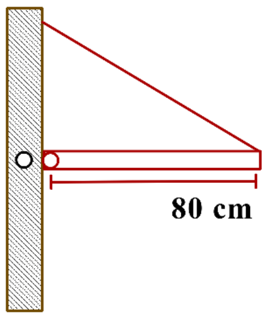
(جـ) تكون متوازيتين ومتعاكستين اتجاهاً وخط عملها غير متطابق.

(د) تكون غير متوازيتين ومتعاكستين اتجاهاً وخط عملها غير متطابق.

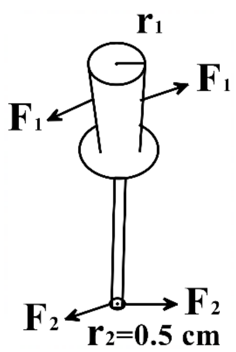
تمرين (2): علقت كتلة بواسطة حبل كما في الشكل فإذا قمنا بشد الحبل من الجهة الأخرى بقوة (300N) أحسب العزم المحصل المؤثر في البكرة، إذا علمت أن نصف قطرها (50 cm).



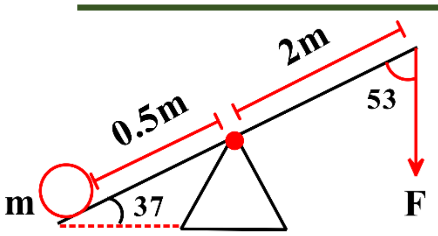
تمرين (3): ثبت رف على جدار بوضع افقي ومتزن كما في الشكل. وعند وضع كتلة مقدارها ($10\ kg$) على حافة الرف، انقطع حبل التثبيت وتحرك حركة دورانية حول المحور (0)، احسب مقدار العزم المحصل المؤثر في الرف.



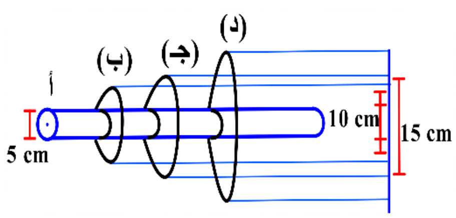
تمرين (4): في الشكل مفك لفك البراغي، نصف قطر مقبضه ($3\ cm$) أثرنا عليه من جهة المقبض بقوتين مماسيتين مقدار كل منهما ($100\ N$). أحسب مقدار القوة (F_2) التي ستؤثر في الطرف الأخرى على البرغي.



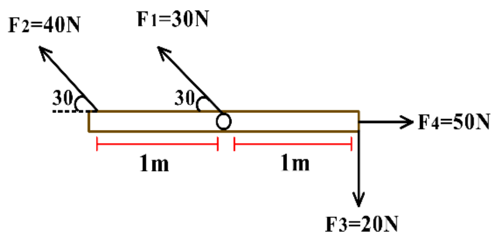
تمرين (5): استخدم قوة مقدارها ($1500\ N$) على طرف عتلة لرفع ثقل كتلته ($100\ kg$) كما في الشكل. أحسب العزم المحصل المؤثر في الكتلة.



تمرين (6): في الشكل أربع أسطوانات متداخلة وملتحمة معاً وقابلة للدوران حول نفس المحور؛ إذا أثرنا على الأسطوانة (أ) بقوة مماسية مقدارها ($100N$). أحسب مقدار القوة اللازم التأثير بها على كل من الأسطوانات (ب، جـ، د) على حدة لإيقاف دورانها.



تمرين (7): ساق منظمة طولها $(2m)$ ووزنها $(50\ N)$ تؤثر بها أربعة قوى. أحسب مقدار العزم المحصل المؤثر بها حول محور دورانها.



تمرين (8): لفك صامولة عجل سيارة نحتاج عزم مقداره $(50\ N.m)$ باستخدام مفتاح شد طوله $(30\ cm)$ عند التأثير على طرفه بقوة عمودية. أحسب:

(أ) مقدار القوة اللازمة لهذا العزم.

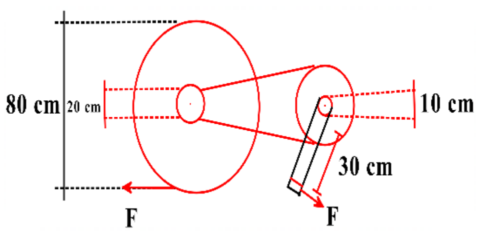
(ب) القوة اللازمة لإعطاء نفس العزم عندما تكون الزاوية بينهما وبين طول مفتاح الشد (30^o).

تمرين (9): لفك برغي باستخدام مفك نحتاج عزم مقداره $(20\ N.m)$ إذا كان نصف قطر مقبض المفك $(2.5\ \text{cm})$ أحسب:

(أ) أحسب أقل مقدار لقوتي الازدواج اللازم التأثير بهما على طرفي المقبض لفك البرغي.

(ب) مقدار قوتي الازدواج اللازم لفك البراغي إذا كانت الزاوية بين القوة وموقع نقطة التأثير (30^o).

تمرين (10): في الشكل جزء من دراجة هوائية، إذا قام الراكب بالتأثير بقوة مقدارها $(200\ N)$ على طرف إحدى البدالات، وبافتراض أن العزم الناتج يتم نقله كاملاً عن طريق (الجنزير) إلي مسننات الإطار وأن قوة الاحتكاك المؤثرة في طرف الإطار تساوي $(50\ N)$ أحسب:



دراجة هوائية

(أ) مقدار قوتي عزم الازدواج المؤثرة في المسننات.

(ب) العزم الكلي المؤثر في الإطار.

(4)

الاتـــزان

انتقالي	سكوني
سرعة الجسم	سرعة الجسم
(ثابتــه)	تساوي (صفر)

* القوة المحصلة المؤثرة في الجسم تساوي (صفر).

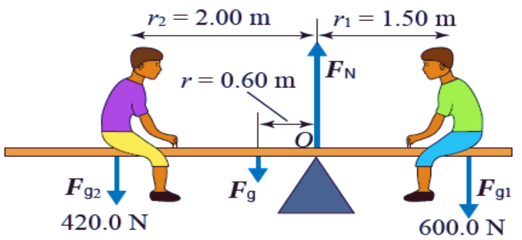
$(\Sigma F = 0)$

* العزم المحصل على الجسم يساوي (صفر).

$(\Sigma T = 0)$

مثال (1)

يجلس فادي (Fg_1) وصقر (Fg_2) على جانبي لعبه اتزان تتكون من لوح خشبي منتظم متماثل وزنه (Fg) يؤثر في منتصف، ويرتكز اللوح على نقطة تبعد (0.60) يمين منتصف اللوح الخشبي، إذا كان النظام في حالة اتزان سكوني، أحسب:



(أ) وزن اللوح الخشبي (Fg).

(ب) القوة (FN) التي تؤثر بها نقطة الارتكاز في اللوح.

الحل: $Fg_1 = 600 \,/\, Fg_2 = 420 \,/\, r = 0.6 \,/\, r_1 = 1.5 \,/\, r_2 = 2 \,/\, Fg = ? \,/\, FN = ?$

أ] القوى التي تحدث دوران $\Leftarrow (\mathbf{F_{g1}}, \boldsymbol{F_{g2}}, \boldsymbol{F_g})$

لأن النظام متزن $\Sigma T = 0$

$$Fg2r_2 + Fgr - Fg1r1 = 0$$

$$420 \times 2 + Fg \times 0.6 - 600 \times 1.5 = 0$$

$$Fg \times 0.6 = 60 \Rightarrow \boxed{Fg = 100\ N}$$

ب] لأن النظام متزن $\boldsymbol{\Sigma F = 0}$

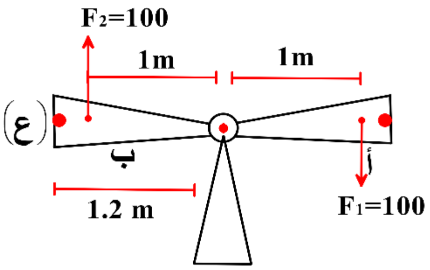
$$\Sigma Fy = may = 0$$

$$F_N - (Fg + Fg_1 + Fg_2) = 0$$

$$F_N = 100 + 600 + 420$$

$$= 1120\ N$$

مثال (2)



في الشكل دولاب يتحرك مع عقارب الساعة بتأثير قوة الرياح على كل من الطرفين، بافتراض أن قوة الرياح المحصلة كان تأثيرها على كل من النقطتين (أ) $(100.N)$ وعلى النقطة (ب) $(100\ N)$، وأن وزن الدولاب يأثر بالمنتصف عند نقطة الارتكاز بـ $(200N)$.

(1) أحسب وزن الثقل اللازم تعليقة عند النقطة (ع) ليتزن الدولاب.

(2) أحسب قوة رد فعل نقطة الارتكاز على الدولاب (FN).

الحل:

$F_1 = 100N \,/\, F_2 = 100N \,/\, Fg = 200 \,/\, r_1 = r_2 = 1m \,/\, r_3 = 1.2\,,\ /\, F_N = ??\,/\, F_3 = ??$

1] الدولاب متزن بعد إضافة الثقل

إذا ⇐

$$\Sigma T = 0$$

$$-F_1 r_1 - F_1 r_2 + F_3 r_2 = 0$$

$$F_3 r_3 = F_1 r_1 + F_2 r_2$$

$$F_3 \times 1.2 = 100 \times 1 + 100\ 1$$

$$F_3 = \frac{200}{1.2}\ N, -y$$

2]

$$\Sigma F = 0$$

$$-F_1 - Fg - F_3 + F_2 + F_N = 0$$

أو

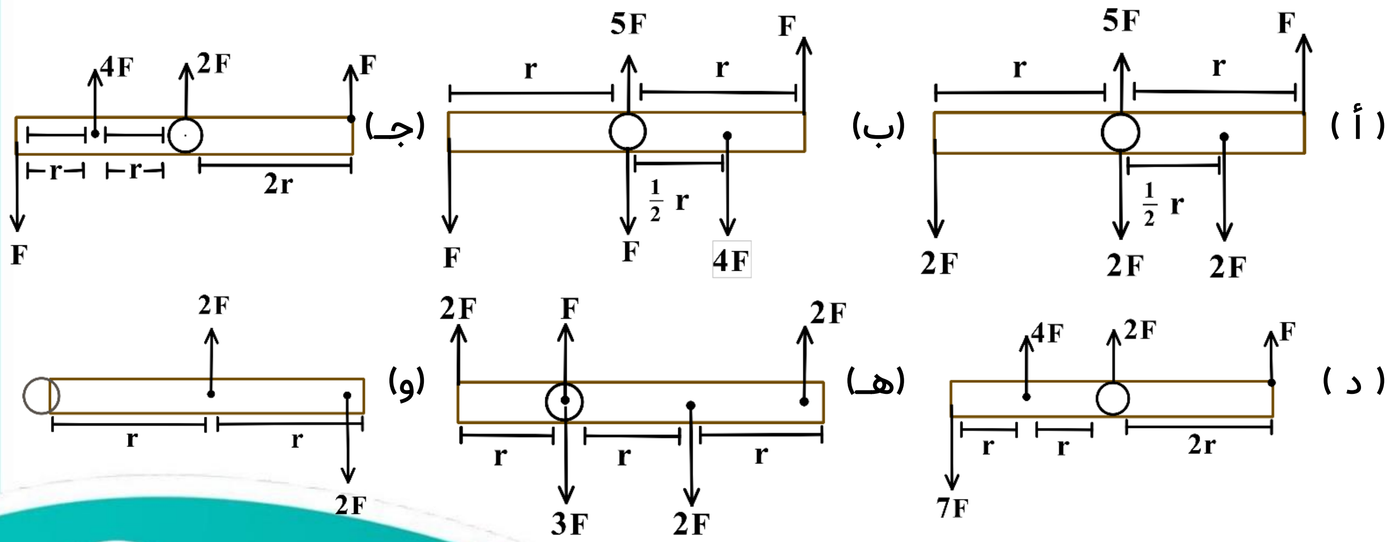
$$F_2 + F_N = F_1 + Fg + F_3$$

$$100 + F_N = 100 + 200 + \frac{200}{1.2}$$

$$F_N = \frac{440}{1.2} \cong 367N\,, y^+$$

مثال (3)

في أي في الأشكال التالية يكون الجسم متزن اتزان سكوني:



الحل:

أ] $\Sigma F = 5F + F - 2F - 2F - 2F$

$= 0$

$\Sigma T = Fr + 2Fr - 2F\frac{1}{2}r$

$= 2Fr$

∴ غير متزن اتزان سكوني لأنه غير متزن دورانياً.

ب] $\Sigma F = 5F + F - 4F - F - F$

$= 0$

$\Sigma T = Fr + Fr - 4F\frac{1}{2}r$

$= 0$

∴ متزن اتزان سكوني.

جـ] $\Sigma F = 4F + 2F + F - F$

$= 6F$

∴ غير متزن.

د] $\Sigma F = 4F + 2F + F - 7F$

$= 0$

$\Sigma T = F2r + 7F2r - 4Fr$

$= 12\,Fr$

∴ غير متزن.

هـ] $\Sigma F = 2F + F + 2F - 2F - 3F$

$= 0$

$\Sigma T = 2F2r - 2Fr - 2Fr$

$= 0$

∴ متزن.

و] $\Sigma F = 2F - 2F$

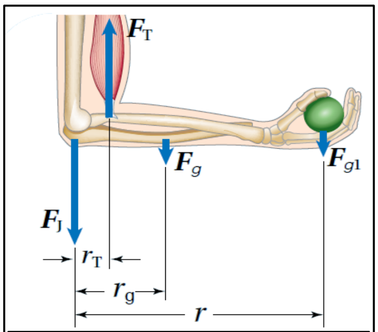
$= 0$

$\Sigma T = -2F2r + 2Fr$

$= -2Fr$

∴ غير متزن.

مثال (4)

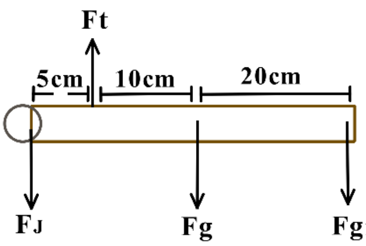


للأشكال المنتظمة يؤثر الوزن في منتصف الجسم.

يرفع شخص بيده ثقلاً وزنه $(40\ N)$ كما في الشكل، إذا علمت أن نقطة التقاء العضلة بالساعد تبعد $(r_t = 5cm)$ عن المرفق، ووزن عظم الساعد والأنسجة فيه $(30\ N)$ ويؤثر على بعد $(r_g = 15cm)$ من المرفق وبعد نقطة تأثير الثقل $(r = 35cm)$ عن المرفق، والساعد متزن أفقياً، أحسب ما يلي:

(أ) قوّة الشد في العضلة (F_T) المؤثرة في الساعد.

(ب) القوة التي يؤثر بها المرفق في الساعد (F_J).



الحل:

أ] $\Sigma T = 0 \Rightarrow F_T r_T = F_g r_g + F_{g1} r$

$\Rightarrow F_T \times 5 \times 10^{-2} = 30 \times 15\ 10^{-2} + 40 \times 35 \times 10^{-2}$

$F_T \times 5 = 1850$

$F_T = 370\ N$

ب] $\Sigma F = 0$

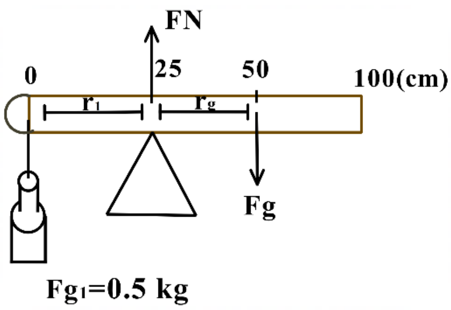
$F_J + F_g + F_{g1} = F_T$

$F_J + 30 + 40 = 370$

$F_J = 300\ N$

مثال (5)

مسطرة مترية منتظمة متماثلة ترتكز على نقطة عند التدريج $(25\ cm)$ عُلّق ثقل كتلته $(0.50\ kg)$ عند التدريج $(0\ cm)$، فاتزنت للمسطرة كما في الشكل، فأحسب



(أ) كتلة المسطرة.

(ب) قوة رد فعل نقطة الارتكاز (F_N).

الحل:

أ] $\Sigma T = 0$

$$-F_g r_g \sin\theta + F_{g1} r_1 \sin\theta_1 = 0$$

$$-F_g \times 25 \times 10^{-2} \times 1 + 5 \times 25 \times 10^{-2} \times 1 = 0$$

$$F_g \times 25 \times 10^{-2} = 125 \times 10^{-2}$$

$$F_g = 5N \Longrightarrow m = 0.5kg.$$

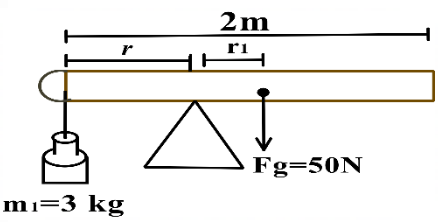
ب] $\Sigma T = 0$

$$F_N - F_y - F_{y1} = 0$$

$$F_N = 5 + 5$$

$$= 10\ N, +y$$

مثال (6)



قضيب فلزّي طوله $(2m)$ متجانس ومنتظم الشكل، عُلّق في أحد طرفيه ثقل كتلته $(3kg)$، وكتلة القضيب $(5kg)$، فأين يمكن وضع نقطة الارتكاز بالنسبة للقضيب ليتزن (أحسب طول (r) و(rg)).

الحل:

$$\Sigma T = 0$$

$$\Rightarrow -F_g r_g \sin\theta + F_{g1} r_1 \sin\theta = 0$$

$$F_{g1} r_1 = F_g\, r_g$$

$$30 \times r = 50 \times r_g$$

$\therefore \boxed{\frac{r}{r_g} = \frac{5}{3}} \Rightarrow$ أو $\Rightarrow r_g = \frac{3}{5} r$

لكن ⇐ طول القضيب يساوي $(2m)$ وطول كل من (r_g) و (r) هو نصف طول القضيب

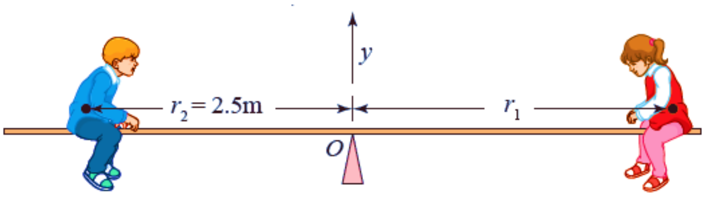
$$r_g + r = 1$$

$$\frac{3}{5} r + r = 1 \Rightarrow \frac{8}{5} r = 1 \Rightarrow r = \frac{5}{8} m$$

$$\Rightarrow r_g = \frac{3}{8} m$$

مثال (7)

لعبة اتزان تتكون من لوح خشبي منتظم متماثل وزنه $(150\ N)$ يرتكز من منتصفه عند النقطة (0)، تجلس نهى (F_{g1}) على أحد طرفي اللوح الخشبي على بعد (r_1) من نقطة الارتكاز، بينما يجلس شقيقها ماهر (F_{g2}) على الجهة المقابلة على بعد $(2.5\ m)$ من نقطة الارتكاز، إذا علمت أن وزن نهى $(250\ N)$ ووزن ماهر $(300\ N)$ والنظام في حالة اتزان سكوني، أحسب:

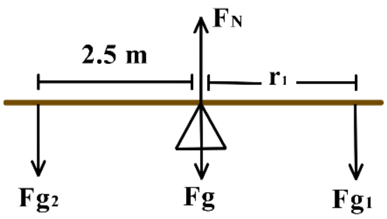


(أ) القوة (FN) التي تؤثر بها نقطة الارتكاز في اللوح.

(ب) بعد نهى عن نقطة الارتكاز كي يكون النظام متزن.

الحل:

أ]



$$\Sigma F = 0$$

$$F_N = F_{g2} + F_{g1} + F_g$$

$$= 300 + 250 + 150$$

$$= 700N\ , +y$$

ب] $\Sigma T = 0$

$$F_{g2} r_2 = F_{g1} r_1$$

$$300 \times 2.5 = 250 \times r_1$$

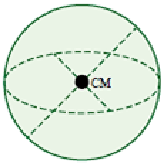
$$\boxed{r_1 = 3\text{m}}$$

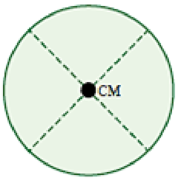
5] مركز الكتلة

تعريف: هي النقطة التي يمكن افتراض كتلة الجسم كاملة مركّزة فيهاً.

⇐ مركز الكتلة قد يقع داخل الجسم أو خارجه.

(1) جسم منتظم متماثل:



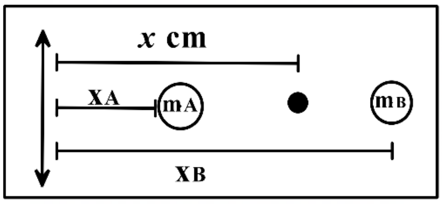


⇐ يقع مركز كتلته في مركزه الهندسي.

(2) جسم غير منتظم وغير متماثل:

⇐ يقع مركز كتلته عند نقطة تكون أقرب للجزء الذي كتلته أكبر.

* يقع مركز كتلته على الخط الواصل بينهما ويكون أقرب إلى الجسم الأكبر كتلة.



$$X_{CM} = \frac{m_A X_A + m_B X_B}{m_A + m_B}$$

* نظام يتكون من عدد (n) من الجسيمات على محور (x)

الكتلة الكلية للنظام :M

$$X_{cm} = \frac{\Sigma m_i X_i}{\Sigma m_i} = \frac{\Sigma m_i X_i}{M}$$

ملاحظة مهمة:

عند تعليق جسم من مركز كتلته ⇐ يكون الجسم متزن.

⇐ لأن العزم المحصل المؤثر فيه يساوي صفر.

سؤال (1) أين يقع مركز الكتلة لجسم متماثل ومنتظم:

جواب: يقع مركز كتلته في مركزه الهندسي.

سؤال (2) كيف يمكن تحديد مركز الكتلة لجسم غير منتظم الشكل عملياً؟

جواب: يجب تعليقه بشكل حُرّ من موقعين مختلفين على الأقل وفي كل مرة يتم رسم خط عمودي على الأرض من نقطة التثبيت فيكون مركز الكتلة في نقطة تقاطع هذه الخطوط.

سؤال (3) قارن بين موقع مركز الكتلة لجسم منتظم متماثل وجسم آخر غير منتظم:

جواب: لجسم منتظم ومتماثل يكون مركز كتلته في مركزه الهندسي، أما لجسم غير منتظم يكون مركز كتلته أقرب للجزء الأكبر كتلة فيه.

سؤال (4) فسر؛ عند تعليق جسم من مركز – كتلته فإنه لا يدور:

جواب: لأن العزم المحصل المؤثر فيه يساوي صفراً.

حيث أن وزن الجسم يؤثر في مركز الكتلة والذي هو نفسه محور الدوران إذاً يكون عزم الوزن يساوي صفر.

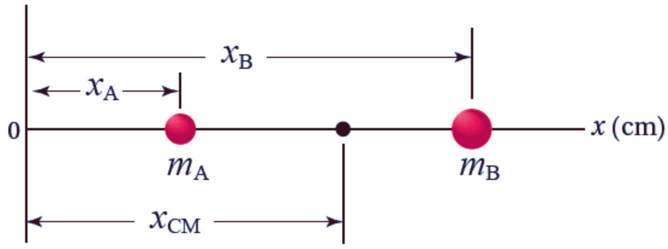
سؤال (5) إذا أثرت عدّة قوى في جسم بحيث تمر خطوط عملها في مركز الكتلة وكانت محصلة القوى تساوي صفر – فهل يكون الجسم متزن؟ فسر إجابتك.

جواب: نعم يكون متزن، لأن محصلة القوى عليه تساوي صفر والقوة جميعها عزمها يساوي صفر لأن خطوط عملها متطابقة فيتحقق شرطي الاتزان $\Sigma T = 0$

$$\Sigma F = 0$$

مثال (1)

نظام يتكون من كرتين $(m_A = 1kg)$ $(m_B = 3kg)$ إذا علمت أن $(X_A = 5cm)$ و $(X_B = 15m)$، حدد موقع مركز كتلة النظام.



الحل:

$$m_A = 1 \ / \ m_B = 3 \ / \ X_A = 5 \times 10^{-2} \ / \ X_B = 15 \times 10^{-2}$$

$$X_{cm} = \frac{m_A X_A + m_B X_B}{m_A + m_B} = \frac{1\times5\times10^{-2} + 3\times15\times10^{-2}}{1+3}$$

$$= \frac{50\times0^{-2}}{4} = 12.5 \times 10^{-2} m$$

لاحظ أن موقع مركز الكتلة أقرب إلى الكتلة الأكبر.

مثال (2)

في المثال السابق أعد إيجاد مركز الكتلة للنظام إذا كانت $(m_A = 4kg)$ و $(m_B = 4kg)$:

الحل:

$$X_{cm} = \frac{m_A X_A + m_B X_B}{m_A + m_B} = \frac{4\times5\times0^{-2} + 4\times15\times10^{-2}}{8}$$

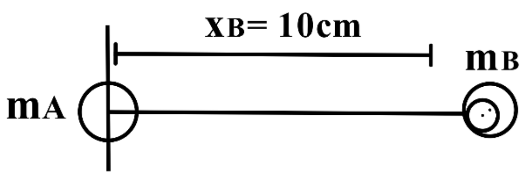
$$= \frac{80\times10^{-2}}{8} = 10 \times 10^{-2} m$$

لاحظ أن موقع مركز الكتلة يكون في المنتصف بين الكتلتين.

مثال (3)

هل يمكن حل المثال (1) بافتراض أن (m_A) تقع عند مركز المستوى الديكارتي، و"الحصول نفس النتيجة:

الحل:

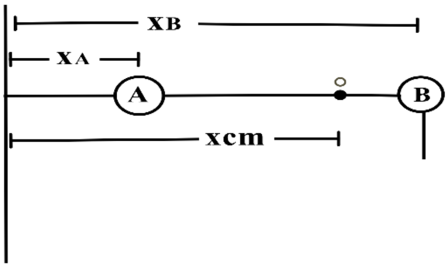


$$X_{cm} = \frac{m_A X_A + m_B X_B}{m_A + m_B} = \frac{1\times0 + 3\times10\times10^{-2}}{4}$$

$$= 7.5 \times 10^{-2} m$$

لاحظ أن موقع مركز الكتلة يبعد عن الكتلتين بنفس القيم في المثال (1).

مثال (4)



هل يمكن تحديد مركز الكتلة من خلال معرفتنا بأن العزم المحصل للأجسام حول مركز كتلتها يساوي صفر.

الحل: إذا اعتبرنا أن محور الدوران للنظام موضوع في مركز الكتلة (cm). فإن:

$$\Sigma T_{cm} = 0$$

$$\Rightarrow \mathrm{m_A}(X_{cm} - X_A) - m_B(X_B - X_{cm}) = 0$$

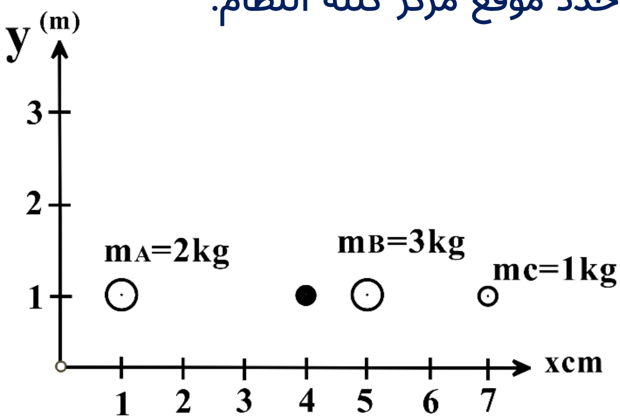
$$\Rightarrow \underline{\mathrm{m_A}\, X_{cm}} - m_A\, X_A - m_B\, X_B + \underline{m_B\, X_{cm}} = 0$$

$$\Rightarrow \mathrm{X_{cm}}(m_A + m_B) = m_A\, X_A + m_B X_B$$

$$\therefore \Rightarrow X_{cm} = \frac{m_A\, X_A + m_B X_B}{m_A + m_B}$$

مثال (5)

نظام يتكون من ثلاثة جسيمات، كما في الشكل، حدد موقع مركز كتلة النظام.



الحل:

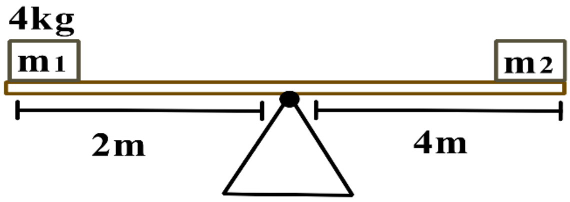
$$X_{cm} = \frac{m_A\, X_A + m_B\, X_B + m_C\, X_C}{m_A + m_B + m_C}$$

$$= \frac{2\times1 + 3\times5 + 1\times7}{2+3+1}$$

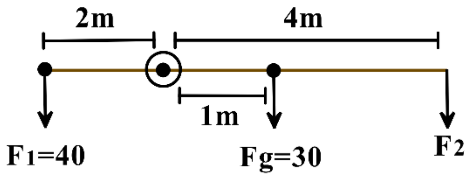
$$= \frac{24}{6} = 4m$$

مثال (6)

في الشكل إذا علمت أن كتلة اللوح الخشبي $(5\ kg)$ فأحسب مقدار (m_2) إذا علمت أن النظام في حالة اتزان سكوني.



الحل: يؤثر وزن اللوح في منتصفه



$$\Sigma T = 0$$

$$F_1 r_1 \sin\theta + -F_2 r_2 \sin\theta_2 - F_g \times r_g \sin\theta = 0$$

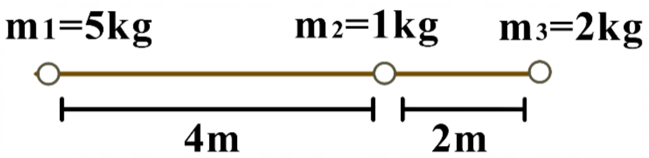
$$40 \times 2 + -4F_2 - 50 \times 1 = 0$$

$$4F_2 = 30 \Rightarrow F_2 = 7.5\ N$$

$$F_g = mg \Longrightarrow m_2 = 0.75\ kg.$$

مثال (7)

في الشكل المجاور، أين يمكن وضع نقطة الارتكاز ليكون النظام في حالة اتزان سكوني.
بإهمال كتلة القضيب الواصل بين الكتل.

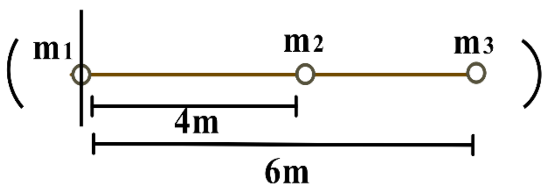


الحل:

ليزن النظام يجب تحقيق شرطين:

الشرط الأول: $\Sigma T = 0$ (أي يجب وضع نقطة الارتكاز في مركز الكتلة)...

نفترض موقع (m_1) هو نقطة الإسناد:



$$X_{cm} = \frac{m_1X_1+m_2X_2+m_3X_3}{m_1+m_2+m_3}$$

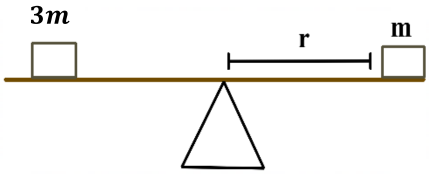
$$= \frac{5\times0+1\times4+2\times6}{8}$$

$$X_{cm} = \frac{16}{8} = \boxed{2m}$$

الشرط الثاني: بما أن لا يوجد قوى خارجة مؤثرة $\Sigma F = 0 \Leftarrow$

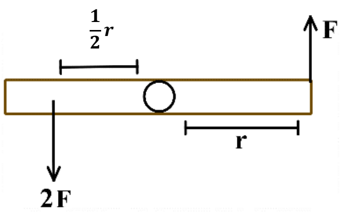
تمرينــــــــات

تمرين (1): اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يلي:



1] في الشكل المجاور لوح خشبي منتظم يرتكز في منتصفه على دعامة، ووضعت الكتلة (m) من بعد (r) في نقطة الارتكاز فإنه يجب وضع جسم آخر كتلته $(3m)$ ليزن النظام افقياً على بعد:

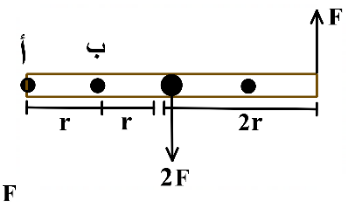
أ) r ب) $\frac{1}{2}r$ جـ) $\frac{1}{3}r$ د) $\frac{1}{4}r$



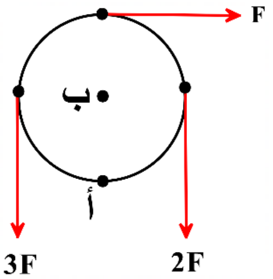
2] ليتزن النظام في الشكل فإنه يجب إضافة قوة عند محور الدوران، ومقدار هذه القوة واتجاهها:

أ) $+y\,,F$ ب) $-y\,,F$ جـ) $+y\,,2F$ د) $-y\,,2F$

3] ليتزن النظام بالشكل فإنه يلزم التأثير بقوة مقدارها $(2F)$ عند النقطة:

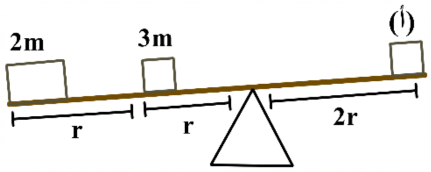


أ) $+y$, أ ب) $-y$, أ
جـ) $-y$, ب د) $+y$, ب



4] في الشكل ليتزن النظام، فإنه يجب التأثير بقوة مقدارها (F) عند النقطة.

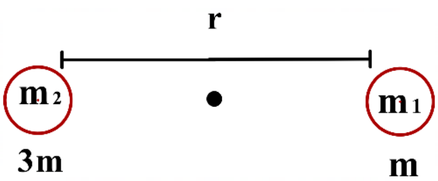
أ) $+x$, أ ب) $-x$, أ جـ) $+x$, ب د) $-x$, ب



5] في الشكل وبإهمال وزن اللوح، يكون النظام متزن عندما تكون الكتلة (أ) تساوي:

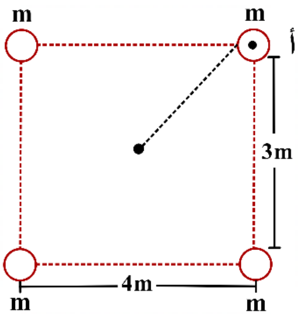
أ) $3m$ ب) $3.5\,m$
جـ) $4m$ د) $45\,m$

6] في الشكل، إذا أردنا أن يكون مركز الكتلة في منتصف المسافة بين الكتلتين، فإنه يجب إضافة كتلة مقدارها (m) تبعد عن (m_2) مسافة:



أ) $2r$ ب) r جـ) $\frac{3}{2}r$ د) $\frac{5}{2}r$

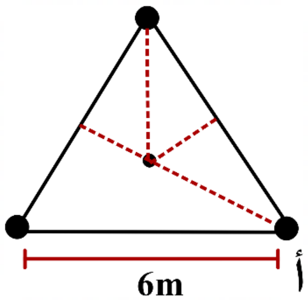
7] مركز الكتلة في النظام الموضح في الشكل يبعد عن النقطة (أ):



أ) $2m$ ب) $4m$

جـ) $2.5m$ د) $3.5m$

8] في الشكل تتوزع الكتل على رؤوس مثلث متساوي الأضلاع طول كل ضلع $(6m)$ فإن بعد مركز الكتلة عن النقطة (أ):

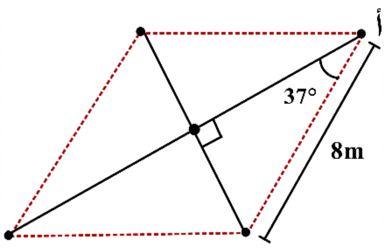


أ) $\sqrt{3}$ ب) $2\sqrt{3}$

جـ) $3\sqrt{3}$ د) $4\sqrt{3}$

(علماً أن $(\cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2})$)

9] في الشكل تتوزع كتلة جسم على شكل معين فإن بعد مركز كتلته عن (أ)

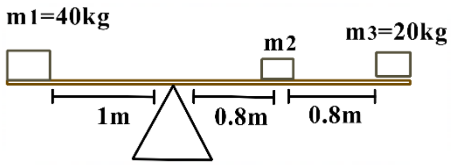


أ) $15\ m$ ب) $6m$

جـ) $8m -$ د) $6.4\ m$

(علماً أن $(\cos 37 = 0.8)$)

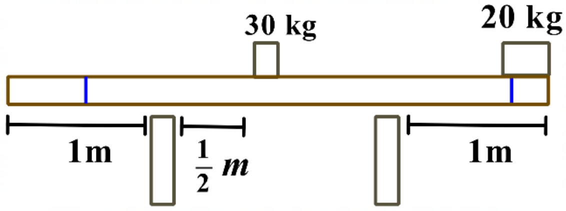
تمرين (2): ثلاثة كتل موضوعة على لوح خشبية منتظم كتلته (20kg) إذا كانت اللوح متزن فأحسب:



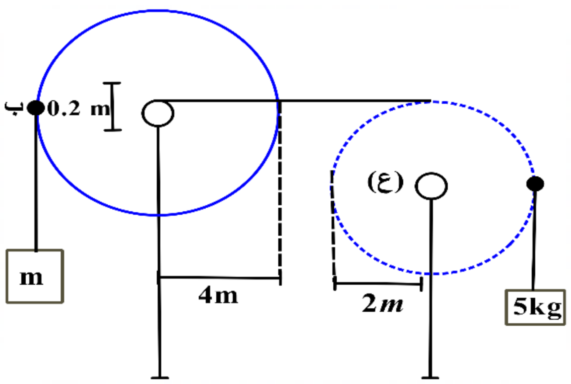
أ] مقدار الكتلة (m_2)

ب] قوة رد فعل نقطة الارتكاز (FN) على اللوح.

تمرين (3): في الشكل لوح خشبي متزن أفقياً على دعامتين (أ)، (ب). أحسب مقدار قوتي رد فعل الدعامتين على اللوح الخشبي إذا علمت أنه طوله ($4m$) وكتلته ($80kg$)



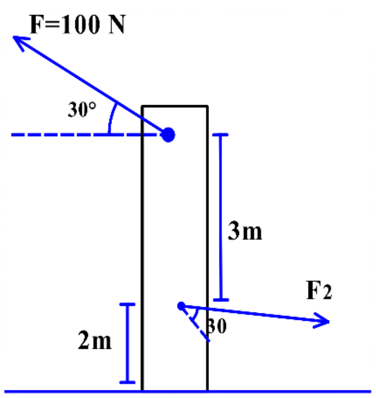
تمرين (4): نظام مكون من بكرتين كما في الشكل علق بالطرف (أ) كتلة مقدارها (5kg).



1] احسب مقدار الكتلة الواجب تعليقها بالطرف (ب) لتتزن البكرتين.

2] أحسب مقدار واتجاه قوة رد الفعل لنقطة الارتكاز (ع) على البكرة.

تمرين (5): إذا علمت أن القضيب بالشكل متزن فأحسب مقدار القوة (F)

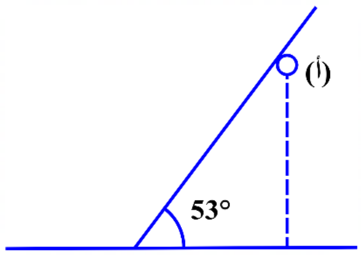


تمرين (6): سُلم كتلته $(40\ kg)$ يرتكز على مسمار تثبيت (أ) كما في الشكل، وطول السلم $(2m)$ وارتفاع المسار عن الأرض $(1.2\ m)$: فأحسب:

أ] قوة رد فعل مسمار التثبيت على السلم.

ب] قوة الاحتكاك بين قاعدة السلم والأرض.

جـ] قوة رد فعل الأرض على قاعدة السلم.

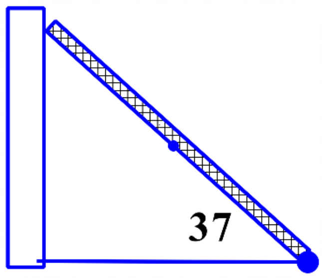


تمرين (7): سُلّم طوله $(2m)$ يرتكز على حائط كما في الشكل وكتلة السلم $(30\ kg)$ وقوة الاحتكاك بين قاعدة السلم والأرض $(600\ N)$ يقف عليه طفل كتلته $(40\ kg)$ أحسب:

أ] قوة رد فعل الحائط على السلم.

ب] قوة رد فعل الأرض على قاعدة السلم.

جـ] ارتفاع الطفل عن سطح الأرض.



جواب: أ] $600\ N$

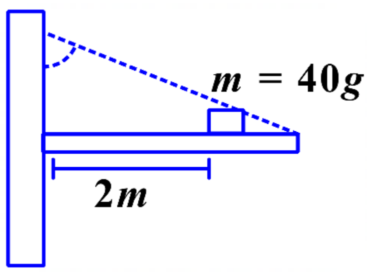
ب] $700\ N$

ج] $0.9\ m$

تمرين (8): قضيب منتظم طوله $(3m)$ ووزنة $(200\ N)$ علق بحائط من خلال مفصل وخيط خفيف كما في الشكل، ووضع عليه جسم كتلته $(3\ kg)$ على بعد $(2m)$ من المفصل، وكان القضيب في وضع اتزان أفقي.

أ] مقدار قوة الشد في الخيط.

ب] قوة رد الفعل على المفصلة.



جواب: أ] $300\ N$

ب] $\sqrt{350^2 + 258^2} N$

مراجعة الدرس

1] الفكرة الرئيسة: ما العزم؟ وما شرطا اتّزان جسم؟

2] أفسر: إذا أردت أن أفتح بابا دوارا؛ أحدد موقع نقطة تأثير القوة، بحيث أدفع الباب بأقل مقدار من القوة. أُحدد بأي اتجاه أؤثر بهذه القوة في الباب.

3] أوضحُ: المقصود بمركز كتلة جسم.

4] أفسر: أثرت قوى عدة في جسم، بحيث تمر خطوط عملها في مركز كتلته، وكانت القوة المحصلة المؤثرة فيه تساوي صفرًا. هل يكون الجسم متزنا أم لا؟ أفسر إجابتي.

5] أتوقعُ: توضع قطع رصاص على أطراف الأجزاء الفلزية من إطارات السيارات لمنعها من الاهتزاز في أثناء دورانها. أتوقع أين توجد مواقع مراكز كتل هذه الإطارات بعد وضع قطع الرصاص عليها.

6] أقارنُ: بين الاتزان السكوني والاتزان الانتقالي من حيث: القوة المُحصلة المؤثرة، السرعة الخطيّة، التسارُع الخطيّ.

7] أُحلل وأستنتج: رأت ذكرى أخاها يحاول فك إطار سيارته المثقوب باستخدام مفتاح شد لفك الصواميل التي تُثبت الإطار، لكنه لم يستطع فكها. أذكر طريقتين -على الأقل- يُمكن أن تقترحهما ذكرى على أخيها لمساعدته على فك الصواميل. أفسر إجابتي.

8] أُقارنُ: يوضح الشكل أدناه منظرا عُلويا لقوة مقدارُها (F) تؤثر في الباب نفسه عند مواقع مختلفة. أُرتب العزم الناتج عن هذه القوة حول محور الدوران (O) تصاعُديا.

9] التفكير الناقد: عند انطلاق سيارة بشكل مفاجئ ترتفع مقدمتها إلى أعلى. أفسّر ذلك.

إجابة أسئلة "مراجعة الدرس الأول"

1] العزم مقياس لمقدرة القوة على إحداث دوران، وهو كمية متجهة، رمزه (T)، ويُعرف رياضيا على أنه يساوي ناتج الضرب المتجهي لمتجه القوة (F) ومتجه موقع نقطة تأثير القوة (r) الذي يبدأ من نقطة على محور الدوران وينتهي عند نقطة تأثير القوة. وشرطا اتزان جسم أن تكون القوة المحصلة المؤثرة فيه تساوي صفرا $(\Sigma F = 0)$، وأن يكون العزم المحصل المؤثر فيه يساوي صفرًا $(\Sigma T = 0)$.

2] يكون موقع نقطة تأثير القوة أبعد ما يمكن عن محور الدوران، ويكون اتجاه القوة عموديًا على مستوى الباب.

3] يُعرف مركز الكتلة Centre of mass (CM) لجسم أنه؛ النقطة التي يُمكن افتراض كتلة الجسم كاملة مركزة فيها.

4] بما أن القوة المحصلة المؤثرة فيه تساوي صفراً فقد تحقق الشرط الأول للاتزان. وحيث أن خطوط عمل القوى تمر في نقطة واحدة فإن العزم المحصل لها يساوي صفرًا (الشرط الثاني للاتزان)، لذا يكون الجسم متزنا.

5] عند حدوث عدم تماثل في توزيع كتلة الاطار (حدوث تأكل في بعض أجزاء العجل مثلا)، لا ينطبق مركز كتلة الإطار الهندسي الذي يمر في محور الدوران، ما يسبب اهتزاز عجل السيارة خصوصا عند السرعات العالية.

ولضمان توزيع منتظم لكتلة الإطار بحيث ينطبق مركز كتلته مع مركزه الهندسي يتم إضافة قطع من الرصاص لاستعادة توزيع منتظم لكتلة العجل حول محور الدوران. هذا بدوره يؤدي إلى توقف الإطار عن الاهتزاز عند السرعات المرتفعة.

6]

	القوة المحصلة المؤثرة	السرعة الخطية	التسارع الخطي
الاتزان السكوني	تساوي صفراً	تساوي صفرا	يساوي صفرًا
الاتزان الحركي (الانتقالي)	تساوي صفرا	ثابتة مقداراً واتجاهًا	يساوي صفرًا

7] وصل ماسورة في طرف مفتاح الشد لزيادة طول ذراع القوة، فيزداد العزم المحصل المؤثر جعل القوة التي يؤثر بها أخيها في مفتاح الشد عمودية على المفتاح، فيزداد العزم المحصل المؤثر. زيادة مقدار القوة المؤثرة في مفتاح الشد، عن طريق الاستفادة من وزنه بالوقوف على طرف المفتاح بحذر.

8] عزم (ب) > عزم > (ج) > عزم (أ).

9] تؤثر قوة الاحتكاك السكوني بين إطارات السيارة وسطح الطريق بقوة إلى الإمام لتحريك السيارة، ويكون مركز كتلة السيارة عند نقطة في مستوى فوق مستوى سطح الطريق، لذا يود عزم محصل يعمل على تدوير السيارة بحيث ترتفع مقدمتها.

الدرس الثاني

ديناميكا الحركة الدورانية

[1] وصف الحركة الدورانية

* مثلما نوصف الحركة الانتقالية بالإزاحة والسرعة والتسارع نوصف كذلك الحركة الدورانية بالإزاحة الزاوية والسرعة الزاوية والتسارع الزاوي:

أ] الإزاحة الزاوية ($\Delta\theta$):

⇐ عندما يدور جسم بزاوية معينة فإن كل نقطة عليه تدور بالزاوية نفسها.

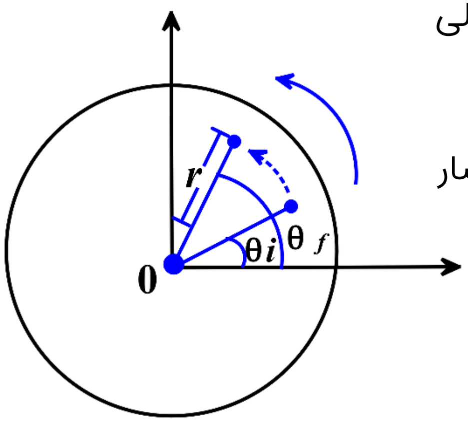
⇐ الموقع الزاوي (θ) لنقطة على جسم:

هو الزاوية (θ) التي يصنعها الخط الواصل بين النقطة ونقطة الأصل مع المحور ($+X$).

---

* **الإزاحة الزاوية:** هي التغير في الموقع الزاوي لأي نقطة على الجسم.

⇐ تساوي عددياً الزاوية التي يمسحها نصف قطر المسار الدائري الذي تدور به أي نقطة على الجسم.



θ_F: الموقع الزاوي النهائي لنقطة على الجسم

θ_i: الموقع الزاوي الابتدائي لنقطة على الجسم.

$$\Delta\theta = \theta_F - \theta_i$$

$\Delta\theta$
+ عند دوران الجسم عكس عقارب الساعة.
− عند دوران الجسم مع عقارب الساعة.

ب] السرعة الزاوية:

* السرعة الزاوية المتوسطة $(\overline{\omega})$:

هي نسبة الإزاحة الزاوية للجسم إلى الفترة الزمنية لهذه الإزاحة.

رياضياً ⇐ $[\overline{\omega}]: rad/s$ | $\overline{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$

---

* السرعة الزاوية اللحظية $(\overline{w})$:

⇐ عند ثبات السرعة الزاوية ⇐ $\omega = \overline{\omega}$

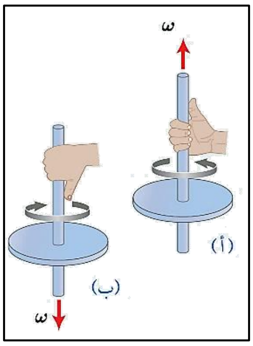
* ω
  - + عند دوران الجسم عكس عقارب الساعة.
  - − عند دوران الجسم مع عقارب الساعة.

---

* يتم تحديد اتجاه السرعة الزاوية باستخدام ⇐ قاعدة اليد اليمني.

بحيث: **الأصابع:** باتجاه دوران الجسم.

الإبهام: اتجاه السرعة الزاوية.



جـ] التسارع الزاوي:

* التسارع الزاوي المتوسط $(\overline{\propto})$

هو نسبة التغير في السرعة الزاويّة إلى الزمن اللازم لحدوث هذا التغيّر.

رياضياً $[\overline{\propto}]: rad/s^2$ | $\overline{\propto} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$

* التسارع الزاوي اللحظي $(\overline{\propto})$

هو التسارع الزاوي لجسم عند لحظة معينة.

⇐ عند ثبات التسارع الزاوي ⇐ $\propto = \overline{\propto}$

* كيف يمكن معرفة إذا ما كان الجسم يدور بتسارع أم تباطؤ:

الجواب:

إذا كانت اشارة السرعة والتسارع متماثلة ⟸ يتسارع.

إذا كانت اشارة السرعة والتسارع مختلفة ⟸ يتباطأ.

ملاحظة أينما وردت كلمة تسارع زاوي أو سرعة زاوية

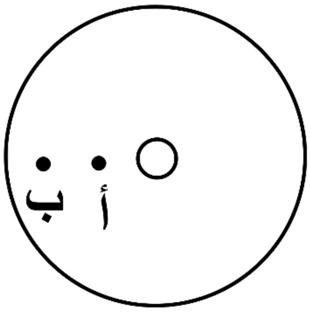
⟸ فالمقصود هو التسارع الزاوي اللحظي أو السرعة الزاوي اللحظية.

❖ **معادلات الحركة بتسارع زاوي ثابت:**

نستخدم المعادلة عندما لا يحتوي السؤال على

$\Delta\theta$	[1] $\omega_f = \omega_i + \propto t$
Δt	[2] $\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2 \propto \Delta\theta$
ω_f	[3] $\Delta\theta = \omega_i \Delta t + \frac{1}{2} \propto t^2$

سؤال (1) في الشكل المجاور إذا علمت أن الإطار يدور بسرعة زاوية مقدارها $(-10\ rad/s)$ فأجب عما يلي:



أ] حدد اتجاه دوران الإطار.

ب] حدد اتجاه سرعته الزاوية.

ج] أي النقطتين (أ) أو (ب) سرعتها ستكون أكبر.

د] إذا أصبح التسارع الزاوي للإطار عند لحظة معينة يساوي $(2\ rad/s)$ فأجب عما يلي:

[1] هل ستقل سرعة الإطارة أم تزداد.

[2] أحسب سرعة الإطار بعد مرور ثانيتين من بدء تسارعه ومع تحركه بنفس التسارع $(2rad/s)$.

جواب:

أ] بما أن أشاره السرعة سالبة إذا اتجاه الدوران مع عقارب الساعة.

ب] باستخدام قاعدة قبضة اليد المنى يكون اتجاه السرعة نحو $(-Z)$.

ج] سرعة كل من (أ) و (ب) متساوية لأنها تقع على جسم شكله ثابت وتقطعان الزاوية نفسها خلال الفترة الزمنية نفسها.

د] [1] بما أن إشارة السرعة مختلفة عن إشارة التسارع فإن يتباطأ

[2] $$\alpha = \bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \implies 2 = \frac{\omega_f - -10}{2}$$

$$\boxed{\omega_f = -6\ rad/s}$$

سؤال (2) عندما يدور جسم دورة كاملة حول مركز كتلته خلال $(1s)$ فاحسب مقدار سرعته الزاوية:

$$\omega = \bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi\ rad/s$$

مثال (1) الكتاب ص 54

يتسارع الجزء الدوار في جهاز فصل مكونات الدم من السكون إلى $(3 \times 10^3\ rad/s)$ خلال $(30)s$ بتسارع زاوي ثابت، احسب ما يأتي:

أ] التسارع الزاوية المتوسط.

ب] السرعة الزاوية بعد مرور $(20\ ,s)$ من بدء دورانه.

$\omega_i = 0 / \omega_f = 3\ \times 10^3\ /\ t = 20$

الحل: أ]

$\overline{\propto} = \propto$

$\overline{\propto} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_f - \omega_i}{t} = \frac{3\times10^3 - 0}{30}$

$= 1 \times 10^2\ rad/s^2$

ب]

$\overline{\propto} = \frac{\omega_f - \omega_i}{t} \Longrightarrow w_f = w_i + \overline{\propto}\ t$

$= 0 + 1 \times 10^2 \times 20$

$= 2 \times 10^3\ rad/s$

مثال (2)

سيارة تحركت من السكون وكان التسارع الزاوي لإطارتها $(2.5\ rad/s)$ حتى أصبحت سرعة الإطارات $(5\ rad/s)$ وبعدها استمرت بالحركة بهذه السرعة لمدة $(40\ s)$ أحسب مقدار الإزاحة الزاوية الكلية التي تقطعها الإطارات:

الحل:

$\propto = 2.5\ \ /\ \omega_i = 0\ /\ \ \omega_f = 5\ \ \ /\ \Delta t_2 = 40$

تنقسم الحركة إلى جزأين حركة سرعة ثابتة وحركة بتسارع ثابت.

$(1)\ \omega_f^2 = \omega_i^2 + 2 \propto \triangle x\ \ \triangle \theta_1 \Rightarrow 25 = 2 \times 2.5 \times \Delta\theta_1$

$\Rightarrow \Delta\theta = 5\ rad$

$(1)\ \overline{\omega} = \frac{\Delta\theta 2}{\Delta t} \Rightarrow 5 = \frac{\Delta\theta}{40} \Rightarrow \Delta\theta_2 = 200\ rad$

$\Rightarrow \Delta\theta_{tot} = \Delta\theta_1 + \Delta\theta_2 = 205\ rad$

مثال (3) الكتاب ص 54

يدور إطار سيارة بعكس اتجاه حركة عقارب الساعة، بسرعة زاوية ($2\ rad/s$) مدة زمنية (20.s) ثم يتسارع بعد ذلك بتسارع زاوي ثابت مقداره ($3.5\ rad/s^2$) مدة زمنية مقدارها ($10.s$) أحسب ما يأتي:

أ] الإزاحة الزاوية للإطار عند نهاية الفترة الزمنية لحركته بسرعة زاوية ثابتة.

ب] السرعة الزاوية للإطار عند نهاية الفترة الزمنية لحركته بتسارع زاوي ثابت.

الحل:

$$\omega_i = 2\ /\ \Delta t_i = 20\ /\ \propto = 3.5\ \ /\ \Delta t_2 = 10$$

أ] $\overline{\omega} = \omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t_1} \Longrightarrow$

$$2 = \frac{\Delta\theta}{20} \Longrightarrow \Delta\theta = 40\ rad$$

ب] $\omega_f = \omega_i + \propto t_2$

$$\omega_f = 2 + 3.5 \times 10$$

$$= 37\ rad/s$$

مثال (4)

أحسب السرعة الزاوية لكل من عقرب الثواني والدقائق والساعات في ساعة الحائط

الحل:

$$\omega\left(\text{ثواني}\right) = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{60} = \frac{\pi}{30}\ rad/s$$

$$\omega\left(\text{دقائق}\right) = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{60\times 60} = \frac{\pi}{1800}\ rad/s$$

$$\omega\left(\text{ساعات}\right) = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{12\times 3600} = \frac{\pi}{21600}\ rad/s$$

مثال (5) الكتاب ص 58

مثقب كهربائي يدور جزؤه الدوار من السكون بتسارع زاوي ثابت ويصبح مقدار سرعته الزاوية ($2.6 \times 10^3 rad/s$) بعد (4.0). أحسب مقدار التسارع الزاوي للجزء الدّوار من المثبت.

الحل:

$$\omega_i = 0 \,/ \omega_f = 2.6 \times 10^3 \,/\, \Delta t = 4 \,/ \propto = ??$$

$$\propto = \overline{\propto} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_f - \omega_i}{\Delta t} = \frac{2.6\times10^3 - 0}{4} = 6.5 \times 10^2 \, rad/s^2$$

مثال (6)

تدور الأرض حول نفسها مرة كل (24) ساعة فأحسب:

أ] متوسط سرعتها الزاوية؟

ب] الإزاحة الزاوية التي تقطعها خلال أسبوع؟

الحل:

$$\Delta t = 24h = 24 \times 3600 \, s \,/\, \Delta\theta = 360^o = 2\pi$$

أ] $$\overline{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{24\times36\times10^2} = \frac{\pi\times10^{-2}}{432} = rad/s$$

ب] $$\overline{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \Longrightarrow \frac{2\pi}{\cancel{24}\times\cancel{36}\times\cancel{10}^2} = \frac{\Delta\theta}{\cancel{7}\times\cancel{24}\times\cancel{36}\times\cancel{10}^{+2}}$$

$$\Delta\theta = 14\pi \, rad/s$$

* يمكن الإجابة عن السؤال مباشرة حيث أنها تقطع (2π) كل يوم إذا ستقطع (7 × 2π) خلال (7) أيام

مثال (7)

تدور عربة دولاب هوائي في مدينة الألعاب بعكس اتجاه حركة عقارب الساعة، فتمسح إزاحة زاوية مقدارها $(1.5\ rad)$ خلال $(3s)$ أحسب مقدار السرعة الزاوية للعربة

الحل:

$$\Delta\theta = 1.5\,rad \ \ / \ \ \Delta t = 3 \ \ / \ \ \omega = ??$$

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{1.5}{3} = 0.5\ \ rad/s$$

مثال (8)

مروحة سقف منزل بدأت حركتها من السكون وعندما أصبحت سرعتها الزاوية $(3\ rad/s)$ كانت قد قطعت إزاحة زاوية مقدارها $(5\ rad)$ فأحسب ما يلي:

أ] التسارع الزاوي للمروحة.

ب] الزمن الذي استغرقته المروحة لقطع هذه الإزاحة.

الحل:

$$\omega_i = 0 \ / \ \omega_f = 3\,rad/s \ \ / \ \ \Delta\theta = 5\,rad$$

أ] $$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2 \propto \Delta\theta \Longrightarrow 9 = 0 + 2 \times\propto\times 5 \Longrightarrow \propto = 0.9\,rad/s^2$$

ب] $$\omega_f = \omega_i + \propto t \Longrightarrow 3 = 0 + 0.9 \times t \Longrightarrow t = \frac{10}{3} = 3.\overline{3}$$

2] عزم القصور الذاتي والقانون الثاني لنيوتن في الحركة الدورانية

* **عزم القصور الذاتي:**

هو "مقياس لممانعة الجسم للتغير في حالته الحركية الدورانية".

أما الكتلة:

هي "مقياس لممانعة الجسم للتغير في حالته الحركية الانتقالية".

---

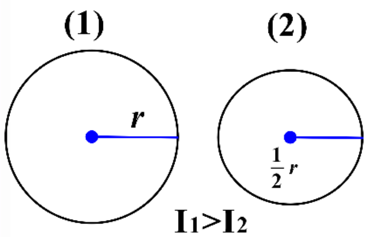
* عزم القصور الذاتي لجسيم نقطي كتلته (m) يبعد مسافة عمودية (r) عن محور دورانه.

$kg.m^2$	$[I] =$ عزم القصور الذاتي	$I = mr^2$
m	r: البعد العمودي بين الجسم ومحور دورانه	
kg	m: كتلة الجسم	

* العوامل التي يعتمد عليها عزم القصور الذاتي لجسم:

(1) البعد العمودي للكتلة عن محور الدوان (قطر الجسم).

⇐ كلما زاد قطر الجسم زادت عزم قصوره الذاتي.

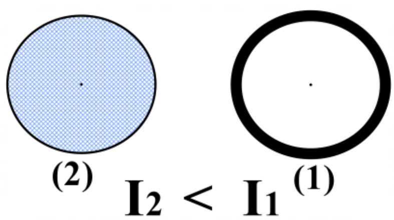


مثال: عزم القصور الذاتي لقرص دائري نصف قطره (r) أكبر من عزم القصور الذاتي لقرص دائري نصف قطره $(\frac{1}{2}r)$

(2) توزيع الكتلة حول محور الدوران:

⇐ كلما توزعت كتلة الجسم بعيداً عن محور دورانه فإن عزم القصور الذاتي له يكون أكبر.

مثال: عزم القصور الذاتي لحلقة دقيقة أكبر من عزم القصور لقرص دائري

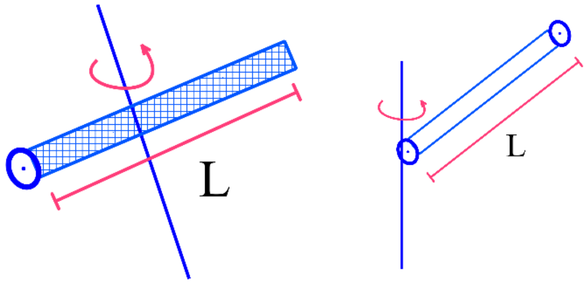


(3) موقع محور الدوران:

⟸ كلما كان موقع محور دوران الجسم أقرب إلى منتصفه قلّ عزم قصوره الذاتي.

مثال:

عزم القصور الذاتي لقضيب يدور حول محوره يمر في منتصفه أقل من عزم القصور لنفس القضيب عندما يكون محور دورانه عند أحد طرفيه.



(4) كتلة الجسم:

⟸ كلما زادت كتلة الجسم زاد عزم قصوره الذاتي.

سؤال (1) في كل مما يلي إذا علمت أن الأجسام جميعها متساوية في الكتلة، حدد أي الجسمين عزم القصور الذاتي أكبر:

أ] (حلقة دقيقة/ قرص دائري) لهما نفس القطر ومحور دورانهما في المركز.

جواب: حلقة دقيقة، لأن الكتلة ستكون موزعة بعيداً عن المحور.

ب] (كرة مجوفة / كرة مصمتة) لهما نفس القطر ومحور دورانهما في المركز.

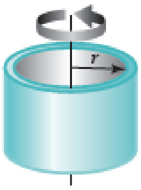
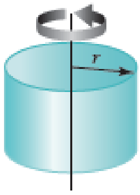
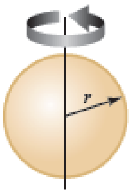
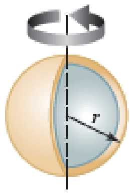
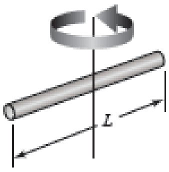
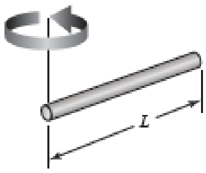
جواب: كرة مجوّفة، لأن الكتلة ستكون موزعة بعيداً عن محور الدوران.

جـ] (أسطوانة مصمتة/ قرص دائري) وقطر القرص أكبر من قطر الأسطوانة.

جواب: قرص دائري، لأن قطره أكبر.

د] (مفتاح شد ثنائي القضيب، مفتاح شد أحادي القضيب)

جواب: مفتاح شد أحادي القضيب، لأن محور الدوران بعيد عن منتصفه.

الجسم	موضع محور الدوران	الشكل	عزم القصور الذاتي
حلقةٌ رقيقةٌ أو أسطوانةٌ مجوّفة.	يمرّ بالمركز عموديًا على مستواها.		$I = mr^2$
أسطوانةٌ مُصمَتة منتظمةٌ أو قرصٌ دائري.	يمرُّ بالمركز عموديًا على مستواها.		$I = \frac{1}{2} mr^2$
كرةٌ مُصمَتة منتظمة.	يمرُّ بالمركز.		$I = \frac{2}{5} mr^2$
كرةٌ مجوّفة.	يمرُّ بالمركز.		$I = \frac{2}{3} mr^2$
قضيبٌ منتظم.	عموديٌّ على القضيب ويمرُّ بمنتصفه.		$I = \frac{1}{12} mL^2$
قضيبٌ منتظم.	عموديٌّ على القضيب ويمرُّ بطرفه.		$I = \frac{1}{3} mL^2$

* قانون نيوتن الثاني في الحركة الدورانية

تذكر أن ⟸ قانون نيوتن الثاني في الحركة الانتقالية يعطى بالعلاقة $\Sigma F = m\,\alpha$

وبما أن ⟸ القوة يقابلها العزم و الكتلة يقابلها عزم القصور الذاتي في الحركة الدورانية.

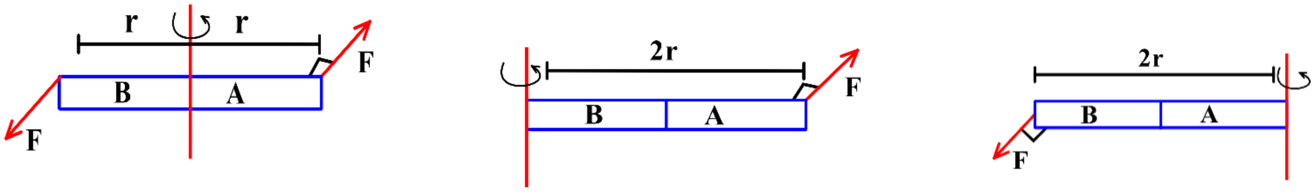
إذا ⟸ يمكن كتابة العلاقة التالية لتقابل قانون نيوتن الثاني في الحركة الانتقالية.

$$\Sigma T = I \propto$$

سؤال (2) أيهما أسهل، تدوير سلم حول محور عمودي عليه ماراً في مركز كتلته، أم تدويره حول محوره الهندسي.

جواب: حول محوره الهندسي، حيث يكون توزيع الكتلة في هذه الحالة أقرب إلى محور الدوران.

سؤال (3) في الشكل قضيب مكون جزأين الجزء (A) حديد والجزء (B) خشب ففي أي الحالات التالية يكون:



(1) (2) (3)

أ] عزم القصور الذاتي للقضيب أكبر ما يمكن.

ب] التسارع الزاوي للقضيب أكبر ما يمكن، إذا كانت القوة المؤثرة في الحالات الثالث في نفسها.

جواب: أ] في الشكل (2)، لأن توزيع الكتلة يكون أبعد ما يكون عن محور الدوران.

ب] حسب العلاقة $(\Sigma T = I \propto)$ وبما أن القوة المؤثرة هي نفسها وبحساب العزم المحصل في كل حالة:

$$\Sigma T_1 = Fr\sin\theta = 2Fr \ / \ \Sigma T_2 = 2Fr \ / \ \Sigma T_1 = -2\,Fr$$

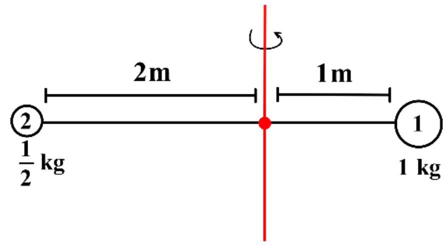
$\therefore$ العزم المحصل في الحالات الثلاث متساوي.

$\Leftarrow$ فيكون أكبر تسارع زاوي في الحالة التي يكون لها أقل عزم قصور ذاتي وهي الحالة (3) حيث توزيع الكتلة تكون الأقرب إلى محور الدوران.

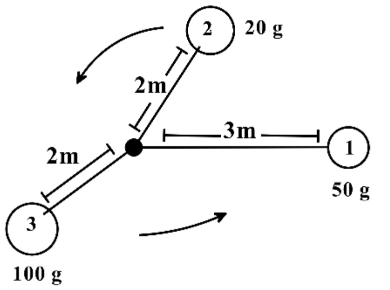
مثال (1)

أحسب عزم القصور الذاتي لكل من الأنظمة التالية بإهمال وزن القضبان.

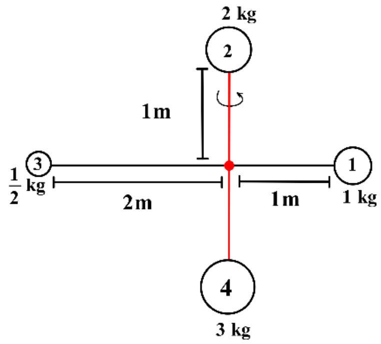
أ [



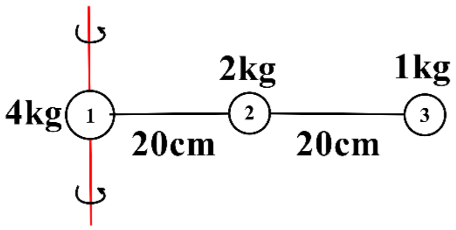
د [



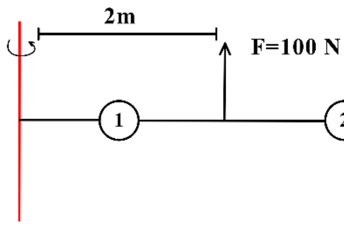
ب[



هـ[

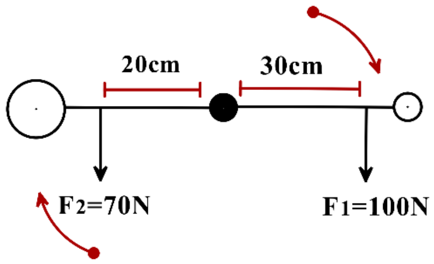


جـ[



وتسارعه $(2\ rad/s^2)$

و [



$\propto = -2\ rad/s^2$

الحل:

أ [

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$$

$$= 1 \times 1 + \frac{1}{2} \times 4 = 3\ kg.m^2$$

ب[عزم القصور لـ (2) و (4) يساوي (صفر)

لأن (r) تساوي (صفر)

$$I = m_1 r_1^2 + m_3 r_3^2$$

$$= 1 \times 1 + \frac{1}{2} \times 4 = 3\ kg.m^2$$

جـ[

$$\Sigma T = Fr \sin\theta$$
$$= 200 \times 2 \times 1$$
$$= 200\ N.m$$

$$\Sigma T = I \propto$$
$$200 = I \times 2$$
$$I = 100\ kg.m^2$$

د [

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2$$
$$= 0.05 \times 9 + 0.02 \times 4 + 0.1 \times 4$$
$$= 0.45 + 0.08 \times 0.4$$
$$= 0.93\ \text{kg/m}^2$$

هـ [

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$$
$$= 2 \times 4 \times 10^{-2} + 1 \times 16 \times 10^{-2}$$
$$= 24 \times 10^{-2}\ kg.m^2$$

جـ[

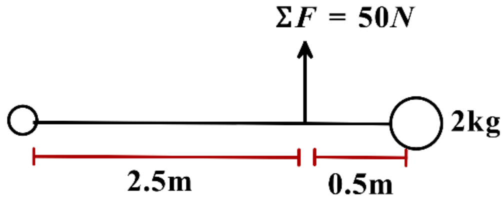
$$\Sigma T = F_1 r_1 \sin\theta_1 + F_2 r_2 \sin\theta_2$$
$$= -100 \times 3 \times 10^{-1} + 70 \times 2 \times 10^{-1}$$
$$= -30 + 14$$
$$= -16\ N.m$$

$$\Sigma T = I \propto$$
$$-16 = I \times -2$$
$$I = 8\ kg.m^2$$

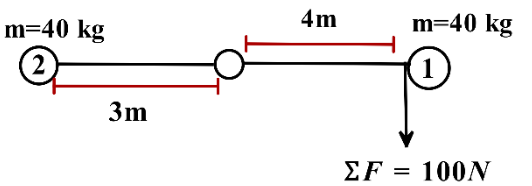
مثال (2)

أحسب مقدار التسارع الزاوي في كل من الحالات التالية:

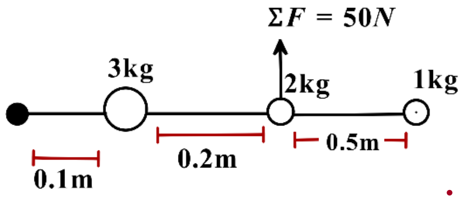
أ [



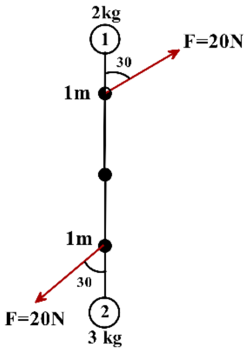
جـ [



ب[



د [



الحل:

أ [

$$\Sigma T = Fr\sin\theta$$
$$= 50 \times 2.5 \times 1$$
$$= 125\ N.m$$

$$\Sigma T = I \propto$$
$$125 = 18 \times \propto$$
$$\propto = \frac{125}{18}\ kg.m^2$$

ب[

$$I = m_1 r_1^2 + m_3 r_3 + m_2\, r_2^2$$
$$= 1 \times 0.64 + 2 \times 0.09 + 3 \times 0.01$$
$$= 0.64 + 0.18 + 0.03$$
$$= 0.85\ kg.m^2$$
$$T = Fr\sin\theta$$
$$= 40 \times 0.3 \times 1 = 12\ N.m$$
$$\Sigma T = I \propto$$
$$12 = 0.85 \propto$$
$$\propto = \frac{12}{0.85}\ rad/s^2$$

جـ [

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$$
$$= 40 \times 16 + 40 \times 9$$
$$= 640 + 360 = 1000\ kg.m^2$$
$$T = Fr\sin\theta = 100 \times 4$$
$$= 400\ N.m$$
$$\Sigma T = I \propto$$
$$400 = 1000 \times \propto$$
$$\propto = \frac{400}{1000} = \frac{4}{10} = 0.4\ rad/s^2$$

د [

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$$
$$= 2 \times 1 + 3 \times 1 = 5\ kg.m^2$$
$$T = 2r\sin\theta = 2\ Fr\sin 30$$
$$= 2 \times 20 \times 0.5 \times 0.5$$
$$= 10\ N.m$$
$$\propto = \frac{\Sigma T}{1} = \frac{10}{5} = 2\ rad/s^2$$

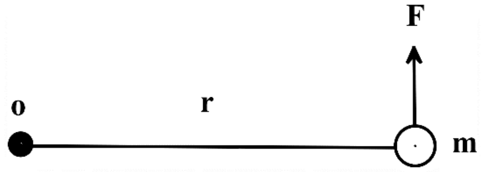
مثال (3)

كرة كتلتها ($3\ kg$) مثبته في نهاية قضيب فلزي خفيف طوله ($0.8\ m$) وتتحرك حول محور ثابت بتأثير قوة مماسية (F) كما في الشكل، إذا بدأت الكرة حركتها من السكون بتسارع زاوي ثابت بحيث أصبحت سرعتها الزاوية ($8\ \pi\ rad/s$) خلال (5_s) فأحسب مقدار كل مما يلي بإهمال كتلة القضيب:

أ] التسارع الزاوي للكرة.

ب] العزم المحّصل المؤثر في الكرة.

جـ] القوة المماسة (F) المؤثرة في الكرة.



$m = 3kg\ /\ r = 0.8\ m\ /\ \omega_i = 0\ /\ \omega_f = 8\ \pi\ rad/s\ /t = 5$

الحل:

أ] $\propto = \frac{\Delta w}{\Delta t} = \frac{\omega_f - \omega_i}{t}$

$= \frac{8\pi - 0}{5} \cong 5\ rad/s^2$

ب] $I = mr^2 = 3 \times\propto 0.64$

$= 1.92$

$\Sigma T = I \propto$

$= 5 \times 1.92 = 9.6\ N.m$

جـ] $\Sigma T = Fr\ \sin\theta$

لأن القوة تمثل مســاس للمســار إذا هي عمودية على (r)

$\Longrightarrow 9.6 = F \times 0.8 \times 1$

$F = 12\ N$

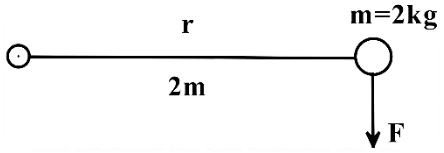
مثال (4)

في الشكل كرة تتحرك بسرعة زاوية ($5\ rad/s$) فتأثرت بقوة محصلة كما في الشكل مقدارها ($20\ N$) لمدة ($1min$) حتى توقفت تماماً. أحسب ما يلي:

أ] التسارع الزاوي للكرة.

ب] العزم المحّصل المؤثر في الكرة.

جـ] القوة (F) المؤثرة في الكرة.



$\omega_i = 5\ /\ \omega_f = 0\ /\ F = 20\ /\ \Delta t = 60\ s\ /\ m = 2\ kg\ /\ r = 2m$

الحل:

أ] $\propto = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_f - \omega_i}{\Delta t} = \frac{-5}{60}$

$= \frac{1}{12} rad/s^2$

ب] $I = mr^2 = 2 \times 4 = 8\ kg.m^1$

$\Sigma T = I \propto = 8 \times -\frac{1}{12} = \frac{-2}{3}\ N.m$

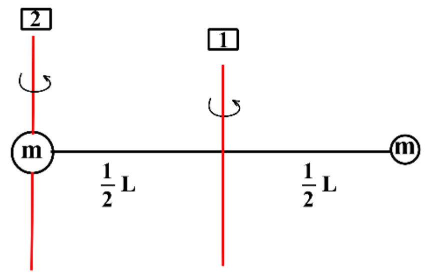
جـ] $F = \frac{\Sigma T}{r} = -\frac{\frac{-2}{3}}{2} = \frac{-1}{3} N$

مثال (5)

في الشكل كرتان كتلة كل منهما (m) متصلقان معاً عن طريق قضيب خفيف طوله (L)، أثبت أنه عند دوران النظام حول محور في منتصف المسافة بين الكتلتين وعمودي على القضيب يكون عزم القصور الذاتي للنظام $(\frac{mL^2}{2})$

وعندما يكون محور الدوران يمر في مركز احدى الكرتين عمودياً على القضيب يكون عزم القصور الذاتي (mL^2)

الحل:



(1) $I_1 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$

$m \times \frac{1}{4} L^2 + m \times \frac{1}{4} L^2$

$= \frac{mL^2}{2}$

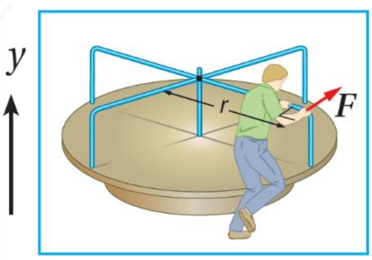
(2) $I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$

$= m \times 0 + m_2 L^2$

$= \boxed{mL^2}$ #

مثال (6)

لعبة قرص دوار كما في الشكل، تتكون قرص قابل للدوران حول مركزه، اثر شخص بقوة مماسية (F) ثابتة مقدارها $(250\ N)$ على حافة القرص الذي كتلته $(50\ Kg)$ ونصف قطره $(2m)$، وبإهمال قوى الاحتكاك وبافتراض أن القرص منتظم توزيع الكتلة، وبدأت اللعبة الدوران من السكون عكس عقارب الساعة، أحسب ما يلي:



أ] العزم المحصل. ب] التسارع الزاوي. جـ] السرعة الزاوية بعد $(2.0\ s)$.

د] التسارع الزاوي للعبة، عندما يجلس طفل كتلته $(20\ kg)$ على بعد $(1.5\ m)$ من محور الدوران، بافتراض أن الطفل جسيم نقطي.

الحل: $\Sigma F = 250\ N\ \ /\ m_{قرص} = 50\ /\ r = 2\ \ /\ \omega_i = 0\ /\ \Sigma T = ?\ /\ \propto = ??$

أ]
$$\Sigma T = Fr\sin\theta$$
$$= 250 \times 2 \times \sin 90$$
$$= 5 \times 10^2\ \ N.m$$

ب]
$$Idise = \frac{1}{2}mr^2$$
$$= \frac{1}{2} \times 50 \times 4$$
$$= 100\ kg.m^2$$
$$\Sigma T = I \propto$$
$$5 \times 10^2 = 10^2 \times \propto$$
$$\propto = 5\ rad/s^2$$

جـ]
$$\omega_f = \omega_i + \propto t = 0 + 5 \times 2$$
$$\omega_f = 10\ rad/s^2$$
$$= 640 + 360 = 1000\ kg.m^2$$

د]
$$I_{tot} = I_{disc} + I_0 = 10^2 + mr^2$$
$$= 10^2 + 20 \times (1.5)^2 = 145\ kg.m^2$$
$$\Rightarrow \Sigma T = I \propto \Rightarrow 5 \times 10^2 = 145 \times \propto$$
$$\propto = \frac{5 \times 10^2}{145}$$

مثال (7)

يقف شخص كتلته $(50\ kg)$ على طرف قرص دوّار، إذا علمت أنه كتلة القرص $(2 \times 10^2 kg)$ ونصف قطره $(4m)$ وسرعته الزاوية $(2\ rad/s)$ فأحسب ما يلي:

أ] عزم القصور الذاتي الكلي للنظام.

ب] إذا قام شخص يقف على الأرض بإيقاف القرص وذلك بالتأثير عليه بقوة مماسية (F) خلال $(4s)$ فأحسب مقدار هذه القوة.

جـ] أعد حل الفرع السابق إذا كان الشخص الأول يجلس على بعد $(2m)$ من محور الدوران.

الحل: $m_0 = 50\ /\ m_{disc} = 2 \times 10^2\ /r = 4m\ /\ \omega_i = 2\ rad/s\ /$

أ[

$$I_{Tor} = I_{Dise} + I_0$$

$$= \frac{1}{2}mr^2 + m_0r_0^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 10^2 \times 16 + 50 \times 16$$

$$= 16 \times 10^2 + 8 \times 10^2 = 24 \times 10^2 kg\ m^2$$

ب[

$$\omega_f = 0 \,/\, \Delta t = 4 \;/\; F = ??$$

$$T = Fr\sin\theta = I \propto$$

$$F \times 4 \times 1 = 24 \times 10^2 \times \propto$$

$$F = \frac{24 \times 10^2 \times \frac{1}{2}}{4} = 3 \times 10^2 N$$

$$\propto = \frac{\Delta w}{\Delta t}$$

$$= \frac{0-2}{4}$$

$$= -\frac{1}{2} m/s^2$$

جـ[

$$I = I_{Disc} + I_0$$

$$= 16 \times 10^2 + m_0r_0^2$$

$$= 16 \times 10^2 + 50 \times 4$$

$$= 18 \times 10^2 \;\; kg.m^2$$

$$Fr\sin\theta = I \propto$$

$$F \times 4 \times 1 = 18 \times 10^2 \times \frac{1}{2}$$

$$F = \frac{9 \times 10^2}{4} = 7.25 \times 10^2$$

لاحظ أن القوة اللازمة لإيقاف القرص والشخص قد قلت وذلك لأن عزم القصور الذاتي يقل عند اقتراب الشخص من محور الدوران.

مراجعة الدرس

1] **الفكرة الرئيسة:** ما الكميّات الفيزيائية اللازمة لوصف الحركة الدورانية لجسم؟ وما عزم القصور الذاتي؟

2] **أفسر:** تدور إطارات سيارة بسرعة زاوية ثابته تساوي ($5.0\ rad/s$). أجيبُ عما يأتي:

أ. هل التسارع الزاوي للإطارات موجب أم سالب أم صفر؟ أُفسر إجابتي.

ب. هل تدور أجزاء الإطار جميعها بمقدار السرعة الزاوية نفسه أم لا؟ أُفسر إجابتي.

3] **أفسر:** السرعة الزاويّة لجسمٍ عند لحظةٍ زمنيةٍ مُعيّنةٍ تساوي ($-3\ rad/s$)، وتسارعه الزاوي عند اللحظة نفسها ($2\ rad/s^2$). أجيب عما يأتي:

أ. هل يدور الجسم باتّجاه حركة عقارب الساعة أم بعكسه؟ أُفسّر إجابتي.

ب. هل يتزايد مقدار سرعته الزاويّة أم يتناقص أم يبقى ثابت؟ أُفسّر إجابتي.

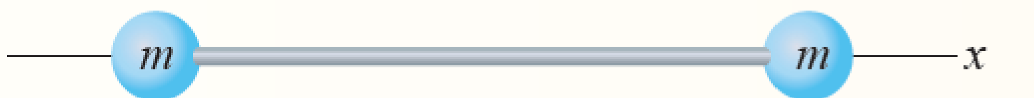
4] **أحلل وأستنتج:** يدور إطار دراجة بسرعة زاوية ثابتة حول محور ثابت. كيف يتغير مقدار السرعة الزاوية لأجزاء الإطار بالانتقال من داخله إلى حافته الخارجية؟

5] علام يعتمد عزم القصور الذاتي لجسم؟

6] **أحسب:** مثقب كهربائي يدور جزؤه الدوار من السكون بتسارع زاوي ثابت، ويُصبح مقدار سرعته الزاوية ($2.6 \times 10^3 rad/s$) بعد ($4.0\ s$) من بدء دورانه. أحسبُ مقدار التسارُع الزاوي للجزء الدوار من المثقب.

7] **أُفسر:** أيهما أسهل: تدوير قلم حول محور عمودي عليه مارا بمركز كتلته؛ أم تدويره حول محوره الهندسي؟ أُفسر إجابتي.

8] **أُقارنُ:** قضيب فلزي خفيف ورفيع طوله (L) مثبت في طرفيه كرتين متماثلتين مهملتي الأبعاد، كتلة كل منهما (m)، كما هو موضح في الشكل. في الحالة الأولى؛ دور النظام المكون من القضيب الفلزي والكرتين حول محور ثابت عمودي على مستوى الصفحة يمر بمنتصف القضيب الفلزي. وفي الحالة الثانية؛ دور النظام حول محور ثابت عمودي على مستوى الصفحة يمر بمركز إحدى الكرتين عند أحد طرفي القضيب الفلزي. بإهمال كتلة القضيب الفلزي مقارنة بكتلتي الكرتين، في أي الحالتين السابقتين يلزمني عزم محصل أكبر لبدء تدوير النظام؟ أُفسر إجابتي.



نظام الكرتين والقضيب الفلزي.

إجابة أسئلة "مراجعة الدرس الثاني"

1] من الكميات الفيزيائية اللازمة لوصف الحركة الدورانية: العزم، والإزاحة الزاوية، والسرعة الزاوية، والتسارع الزاوي.

عزم القصور الذاتي مقياس لممانعة الجسم لتغيير حالته الحركية الدورانية، رمزه (I).

2] أ. بما أن الإطارات تدور بسرعة زاوية ثابتة فإن تسارعها الزاوي يساوي صفراً.

ب. بما أن شكل الإطار ثابت فإن جميع أجزائه تدور بمقدار السرعة الزاوية نفسه.

3] أ. بما أن إشارة السرعة الزاوية سالبة فإن الجسم يدور باتجاه حركة عقارب الساعة.

ب. بما أن إشارتي السرعة الزاوية والتسارع الزاوي مختلفتان فإن الجسم يتباطأ.

4] لجميع أجزاء الإطار السرعة الزاوية نفسها.

5] يعتمد عزم القصور الذاتي لجسم على كيفية توزيع كتلته حول محور دورانه، وعلى موقع محور الدوران.

6]
$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_i}{t} = \frac{2.6\times10^3 - 0}{4.0}$$
$$= 6.5 \times 10^2 rad/s^2$$

7] تدوير القلم حول محوره الهندسي أسهل إذ يكون عزم القصور الذاتي له في هذه الحالة أصغر مقارنة بعزم القصور الذاتي عند تدويره حول محور عمودي عليه مارًا بمركز كتلته.

8] في الحالة الأولى، تبعد كل كرة مسافة ($r_1 = \frac{L}{2}$) عن محور الدوران، وكتلتا الكرتين متساويتان. أحسب عزم القصور الذاتي كما يأتي:

$$1 = m\, r_1^2 + m\, r_1^2 = 2m\, r_1^2 = \frac{ML^2}{2}$$

ألاحظ أن عزم القصور الذاتي يساوي ناتج جمع عزمي القصور الذاتي للكرتين حول محور الدوران نفسه.

في الحالة الثانية، يمر محور الدوران في إحدى الكرتين لذا لا تساهم هذه الكرة في عزم القصور، لأن $(r = 0)$، بينما تبعد الكرة الثانية مسافة مقدارها (L). وأحسب عزم القصور الذاتي في هذه الحالة كما يأتي:

كما يأتي:

$$1 = m\,r^2 + 0 = m\,r^2 = m\,L^2$$

يكون عزم القصور الذاتي أكبر عند تدوير القضيب حول أحد طرفيه، وفي هذه الحالة يلزم عزم محصل أكبر لبدء تدوير النظام.

تمرينـــــــــات

تمرين (1): اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يلي:

1] جسيم تحرّك من موقعه الزاوي $(\frac{\pi}{6})$ نحو الموقع الزاوي $(\frac{3\pi}{2})$ حول محور الدوران الذي يمثل نقطة الأصل سجلت إزاحته الزاوية بحيث كانت حركته عكس عقارب الساعة. فإن الإزاحة الزاوية تساوي:

أ) $\frac{4\pi}{3}$ ب) $\frac{2\pi}{3}$ جـ) $\frac{-4\pi}{3}$ د) $\frac{-2\pi}{3}$

2] جسيم تحرك من موقعه الزاوي $(\frac{\pi}{6})$ نحو الموقع الزاوي $(\frac{3\pi}{2})$ حول محور الدوران الذي يمثل نقطة الأصل، بحيث كانت حركته مع عقارب الساعة، فإن الإزاحة الزاوية التي قطعها:

أ) $\frac{4\pi}{3}$ ب) $\frac{2\pi}{3}$ جـ) $\frac{-4\pi}{3}$ د) $\frac{-2\pi}{3}$

3] جسيم يتحرك حركة دورانية حول محوره، إذا علمت أن الإزاحة الزاوية له $(50\ rad)$ خلال $(50\ s)$ فإن سرعته الزاوية واتجاه دورانه.

أ) $2.5\ rad/s$, مع عقارب الساعة
ب) $10\ rad/s$, مع عقارب الساعة
جـ) $2.5\ rad/s$, عكس عقارب الساعة
د) $10\ rad/s$, عكس عقارب الساعة

4] جسم يتحرك بسرعة زاوية $(-2\times10^2 rad/s)$ لمدة $(5s)$ فإن الإزاحة الزاوية له:

أ) $10^3 rad$ ب) $250\ rad$ جـ) $-1\times10^3\ rad$ د) $-250\ rad$

5] بدأ جسم دورانه من السكون وأصبحت سرعته الزاوية $(20\ rad/s)$ خلال $(4s)$ فإن تسارعه الزاوي بوحدة (rad/s^2)

أ) -5 ب) 5 جـ) 80 د) -80

6] عند دوران إطار حول مركزه، فإن مقدار سرعته الزاوية:

أ) يكون متساوياً لأجزائه جميعها　　ب) يقل بالابتعاد عن محور الدوران

جـ) يزداد بالابتعاد عن محور الدوران　　د) يساوي صفر

7] عند دوران إطار حول مركزه، فإن مقدار الإزاحة الزاوية

أ) يكون متساوياً لأجزائه جميعها　　ب) يقل بالابتعاد عن محور الدوران

جـ) يزداد بالابتعاد عن محور الدوران　　د) تساوي صفر

---

* يدور جسم بسرعة $(r\ rad/s)$ مع عقارب الساعة ثم بدأ يتسارع بتسارع زاوي $(-0.50\ rad/s^2)$ لمدة $(3s)$ فأجب عن الفقرات $(10, 9, 8)$

8] إن الجسم:

أ) يتسارع　　ب) يتباطئ　　جـ) تسارعه غير ثابت　　د) ثابت السرعة

9] إن السرعة الزاوية التي يصل لها الجسم عند نهاية الفترة الزمنية

أ) $0.5\ rad/s$　　ب) $-0.5\ rad/s$　　جـ) $3.5\ rad/s$　　د) $-3.5\ rad/s$

10] الإزاحة الزاوية التي يقطعها الجسم:

أ) 8.25　　ب) -8.25　　جـ) 16.25　　د) -16.25

11] كرتان متجانستان مصمتتان في مادة مختلفة لهما الكتلة نفسها طول قطر الأولى ضعف قطر الثانية فإن النسبة بين عزمي قصورها الذاتي $(I_1 : I_2)$.

أ) $(4:1)$　　ب) $(1:4)$　　جـ) $(8:1)$　　د) $(1:8)$

تمرين (2): تدور أسطوانة حول محورها الهندسي بسرعة زاوية $(200\, rad/s)$ عكس عقارب الساعة وتأثرت بعزم محصل لمدة $(20s)$ حتى توقفت تماماً فأحسب:

أ] التسارع الزاوي للأسطوانة.

ب] الإزاحة الزاوية التي قطعتها حتى توقفت.

تمرين (3): تدور كرتان عكس عقارب الساعة بحيث كانت سرعة الأولى ثلاثة أضعاف سرعته الثانية الزاوية وتأثرتا بعزم محصل، فاحتاجت الكرة الأولى للتوقف إلى ضعفي الزمن الذي استغرقته الكرة الثانية حتى تتوقف فأحسب:

أ] نسبة تسارع الأولى إلى تسارع الثانية.

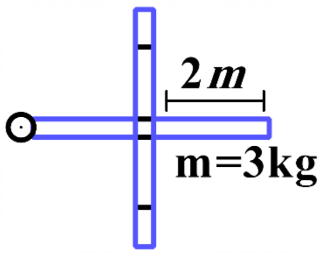
ب] نسبة العزم المحصل المؤثر على الأولى، إلى العزم المحصل المؤثر على الثانية.

تمرين (4): أثر عزم محصل مقداره $(25\, N.m)$ على أسطوانة تدور بسرعة $(2\, rad/s)$ يمر عقارب الساعة لمدة ربع ساعة فأصبحت سرعته الزاوية $(182\, rad/s)$ فأحسب عزم قصوره الذاتي.

تمرين (5): حلقة دقيقة كتلتها $(5\, kg)$ ونصف قطرها $(0.2\, m)$ بدأت حركتها الدورانية حول مركزها من السكون وخلال $(5s)$ أصبحت سرعتها $(40\, rad/s)$ مع عقارب الساعة، فأحسب مقدار العزم المحصل المؤثر عليها $(I = mr^2)$

تمرين (6): في الشكل قضيب طوله $(6m)$ مثبت من طرفه وكتلته $(20\, kg)$ إذا ترك ليدور حول المحور (0) بتأثير وزنه، فأصبحت تسرعه الزاوي أثناء السقوط $(I = \frac{1}{3}mL^2)$

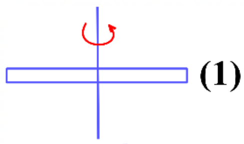
تمرين (7): في الشكل أربعة قضبان رفيعة متصلة معاً كما في الشكل وكتلة كل قضيب $(3kg)$ وطوله $(2m)$، وكانت مثالية لدوران حول المحور (y)، وبدأت حركتها في السكون:

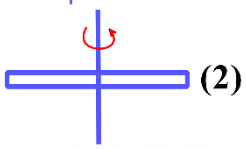


أ] أحسب عزم التصور الذاتي للنظام.

ب] العزم اللازم لتصبح سرعة النظام الزاوية $(2\ rad/s)$، خلال $(4s)$

تمرين (8): في الشكل قضبين قابلان للدوران حول محورهما المار في منتصفهما، وطول الأول نصف طول الثاني، وكتلة الأول ثلث كتلة الثاني فأحسب:





أ] النسبة بين عزم القصور الذاتي لكل منهما.

ب] إذا تأثرا بنفس العزم المحل فأحسب النسبة بين تسارعهما الزاوي.

جـ] إذا بدأ الحركة في السكون وتأثراً بنفس العزم المحصل فأحسب النسبة بين السرعة الزاوية النهائية لكل منهما.

الدرس الثالث
الزخم الزاويّ

*** محتويات الدرس:**

1 ⇐ الطاقة الحركية الدورانية.
2 ⇐ الزخم الزاويّ.
3 ⇐ الزخم الزاويّ والعزم.
4 ⇐ حفظ الزخم الزاويّ.

[1] الطاقة الحركية الدورانية:

أي جسم يدور حول محور ثابت فإنه يمتلك طاقة حركية دورانية.

رياضياً: J ⇐ الطاقة الحركية الدورانية: K_{ER}

$kg.m^2$ ⇐ عزم القصور الذاتي: I

rad/s ⇐ سرعة الجسم الزاوية: w

$$\boxed{K_{ER} = \frac{1}{2} I\, w^2}$$

تذكر ⇐ الطاقة الحركية كمية قياسية.

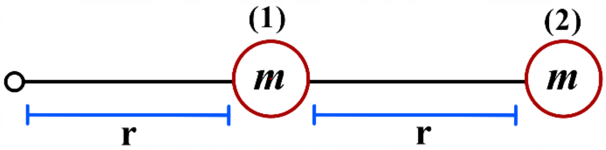
سؤال (1) إذا تغير موقع محور الدوران لجسم يتحرك حركة دورانية فهل تتغير طاقته الحركية الدورانية.

جواب: نعم يتغير طاقته الحركية الدورانية وذلك لأن عزم قصوره الذاتي يعتمد على موقع محور الدوران ومن العلاقة ($K_{ER} = \frac{1}{2} I\omega^2$) فإن الطاقة الحركية تتناسب طردياً مع عزم القصور الذاتي.

سؤال (2) أيهما يمتلك طاقة حركية دورانية أكبر قرص صلب أم حلقة دائرية إذا علمت أن لهما نفس الكتلة ونصف القطر ويتحركان بنفس السرعة الزاوية.

جواب: الحلقة الدائرية، لأن عزم قصورها الذاتي أكبر حيث تتوزع كتلتها بعيداً عن المحور.

سؤال (3) في الشكل المجاور كرتين كتلة كل منهما (m) متصلات معاً بقضيب مهمل الكتلة قابل للدوران حول المحور العمودي على الصفحة (0)؛ ويتحرك القضيب حركة دورانية عكس عقارب الساعة،



أجب عما يلي:-

أ] أي الكرتين سرعتها أكبر.

ب] أي الكرتين عزم قصورها الذاتي أكبر.

جـ] أي الكرتين تمتلك طاقة حركية أكبر.

جواب: أ] لكل من الكرتين السرعة الزاوية نفسها.

ب] عزم القصور الذاتي للكرة (2) أكبر $\Leftarrow$

$$I_1 = m\,r^2$$

$$I_2 = m(2r)^2 = 4\,m\,r^2$$

جـ] الكرة (2) تمتلك طاقة حركية دورانية أكبر.

$$\uparrow K_{ER} = \frac{1}{2} I \ \uparrow w^2$$

سؤال (4) كرة مجوّفة تدور حول مركزها الهندسي بسرعة ثابتة ماذا يحدث لطاقتها الحركية الدورانية في الحالات التالية:

أ] إذا زادت سرعتها للضعف.

ب] قلت سرعتها للربع.

جواب: أ] $\omega_2 = 2\omega_1$ ب] $\omega_2 = \frac{1}{4}\omega_1$

أ] تزداد طاقتها الحركية الدورانية أربعة أضعاف.

$$K_{ER_2} = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} I_1 (2\omega)^2 = 4\left(\frac{1}{2} I_1\, \omega_1^2\right) = 4\,K_{ER1}$$

ب] $$K_{ER_2} = \frac{1}{2} I_2\, \omega_2^2 = \frac{1}{2}\, I_2 \left(\frac{1}{4}\, w_1\right)^2 = \frac{1}{16} K_{ER_1}$$

مثال (1)

يتحرك جزيء أكسجين (O_2) حركة دورانية حول محور ثابت باتجاه محور (Z)، عمودي على منتصــف المســافة بين ذرتي الأكســجين المكونتين له، بســرعة زاوية ثابتة مقدارها $(4.6 \times 10^{12}\ rad/s)$ إذا علمت أن عزم القصــور الذاتي لجزيء الأكســجين حول محور دورانه يساوي $(1.95 \times 10^{46-})$ فأحسب مقدار الطاقة الحركية الدورانية للجزيء.

الحل:

$$\omega = 4.6 \times 10^{12} \ / \ I = 1.95 \times 10^{46-} \ / K_{ER} = ?$$

$$K_{ER} = \frac{1}{2} I\, \omega^2 = \frac{1}{2} \times 1.95 \times 10^{-46} \times (4.6 \times 10^{12})^2$$

$$= 2.06 \times 10^{-21}$$

مثال (2)

قضيب منظم طوله $(2m)$ وكتلته $(4kg)$ يتحرك حركة دورانية بسرعة زاوية $(2\ rad/s)$ حول محور ثابت عند طرفه، أحسب طاقته الحركية الدورانية إذا علمت أن عزم القصور الذاتي للقضيب $(\frac{1}{3} mL^2)$

الحل:

$$L = 2 \ / \ m = 4 \ / \ \omega = 2 \ / \ I = \frac{1}{3} mL^2$$

$$I = \frac{1}{3} mL^2 = \frac{1}{3} \times 4 \times 4 = \frac{16}{3} kg.m^2$$

$$KE_R = \frac{1}{2} I\, \omega^2 = \frac{1}{2} \times \frac{16}{3} \times 4 = \frac{32}{3} J$$

مثال (3)

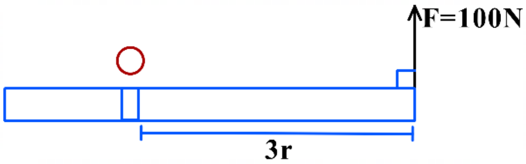
قرص منتظم كتلته $(2\ kg)$ ونصف قطره $(0.5\ m)$ يتحرك حركة دورانية بسرعة زاوية $(8\ rad/s)$ حول محور ثابت عند مركزه، أحسب طاقته الحركية الدورانية إذا علمت أن عزم قصوره الذاتي $(\frac{1}{2} mr^r)$

الحل:

$$I = \frac{1}{2} mr^2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 25 \times 10^{-2} = 25 \times 10^{-2}\ kg.m^2$$

$$K_{ER} = \frac{1}{2} I\, \omega^2 = \frac{1}{2} \times 25 \times 10^{-2} \times 64 = 8\ J$$

مثال (4)



قضيب قابل للدوران حول محور عمودي على الصفحة يمر بالنقطة (0) تأثر بقوة محصلة ($100\ N$) كما في الشكل، لمدة ($20\ s$) فتسارع من السكون يتسارع زاوي ثابت ($3\ rad/s$) فأحسب التغير في طاقته الحركية الدورانية.

الحل:

$F = 100N\ /\ \propto = 3\ /\ \Delta t = 20$

$K_{ER} = \frac{1}{2}\ \overset{?}{I}\ \overset{?}{\omega}^2$

$\therefore\ \Delta K_{Er} = \frac{1}{2} I\ \Delta\omega^2\ \dots\dots(1)$

$= \frac{1}{2} \times 100 \times (\omega_f - \omega_i)$

$= 50 \times 60 = 3000\ \text{J}$

$\Sigma T = Fr \sin\theta$

$\Sigma T = 100 \times 3 \times 1$

$\Sigma T = \boxed{300\ N.m}$

$\Sigma T = I\ \propto$

$300 = \text{I} \times 3$

$\boxed{I = 100\ kg.m^2}$

عوض في (1)

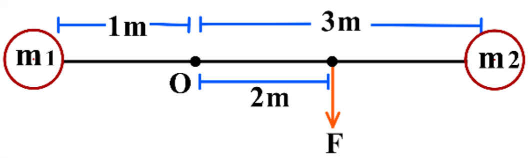
$\omega_f = \omega_i + \propto t$

$\omega_f = 0 + 3 \times 20$

$\boxed{\omega_f = 60\ rad/s}$

مثال (5)

نظام مكون من كرتين (m_1, m_2) كتلة كل منهما قابل للدوران حول المحور (O)، ويتحرك بسرعة زاوية ثابتة، وعند التأثير عليه بقوة عمودية ($200N$) كما في الشكل، توقفت الكرتين عن الحركة بعد ($1\ min$) فأحسب مقدار التغير في الطاقة الحركية الدورانية للنظام.



الحل:

$m_1 = 2\ / m_2 = 4\ /\ F = 200\ /\ \Delta t = 60s\ /\ \omega_f = 0$

$\Delta K_{Er} = \frac{1}{2} I\ \Delta\ \omega^2$

$\Delta K_{Er} = \frac{1}{2} \times 40 \times (0 - (600)^2)$

$= 20 \times -36 \times 10^4$

$= -72 \times 10^5\ \text{J}$

$\text{I} = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$

$= 4 \times 1^2 + 4 \times 9$

$\boxed{\text{I} = 40\ kg.m^2}$

$\Sigma T = Fr \sin\theta$

$= 200 \times 2 \times 1 = 400\ N.m$

$\Sigma T = I\ \propto$

$400 = 40 \times \propto \Rightarrow \propto = 10$

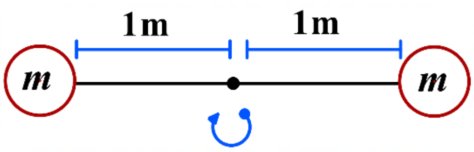
$\propto = -10$

$\omega_f - \omega_i = \propto t$

$\omega_f = \omega_i - 10 \times 60 \Rightarrow \omega_i = 600$

مثال (6)

في أثناء دوران النظام المكون من كرتين متصلتين معاً بسرعة زاوية مقدارها $(12\ rad/s)$ عمودياً على مستوى الورقة مع عقارب الساعة زاد طول القضيب الواصل بينهما للضعف خلال $(4s)$ وتباطئ النظام بمعدل $(2rad/s^2)$، إذا علمت أن مقدار كل من الكتلتين $t(3kg)$ فأحسب مقدار التغير في طاقة النظام الحركية الدورانية.



الحل: $\omega_i = -12\ /\ L_i = 2\ /L_f = 4\ /\ \Delta t = 4\ /\ \propto = -2\ /\ m_1 = m_2 = 3$

$\Delta K_{Er} = K_{EF} - K_{Ei}$

$K_{Er} = \frac{1}{2} \mathrm{I_f}\ \omega_f^2$

$= \frac{1}{2} \times 24 \times 15$

$= 192\ \mathrm{J}$

$K_{Ei} = \frac{1}{2} \times I_i\ \omega_i^2$

$= \frac{1}{2} \times 6 \times 144$

$= 432$

$\Delta K_E = -240\ \mathrm{J}$

$\mathrm{I_i} = \mathrm{m_1} r_1^2 + m_2 r_2^2$

$= 3 \times 1^2 + 3 \times 1^2$

$= 6kg.m^2$

$I_f = m_1 r_1^2 f + m_2 r_2^2$

$= 3 \times 4 + 3 \times 4$

$= 24\ kg.m^2$

$\omega_f = \omega_i + \propto t$

$\omega_f = -12 + 2 \times 4$

$\omega_f = -4\ rad/s$

[2] الزخم الزاوي (L):

هو ناتج ضرب عزم القصور الذاتي للجسم في سرعته الزاوية.

$$\boxed{L = Iw}$$

L: الزخم الزاوي : $kg\, m^2/s$

I: عزم القصور الذاتي : $kg.m^2$

w: السرعة الزاوية : rad/s

* اتجاه الزخم الزاوي باتجاه السرعة الزاوية ويحدد بقاعدة قبضة اليد اليمني.

حيث: الأصابع: اتجاه الدوران / الإبهام: اتجاه (L) و (ω)

سؤال (1) ماذا تعني بأن الزخم الزاوي لجسم ($2\ kg\ m^2$)؟

جواب: أي أن جسم عزم قصوره الذاتي ($2\ kg.m^2$) يدور بسرعة زاوية ($1\ rad/s$) عكس عقارب الساعة.

سؤال (2) ما العوامل التي يعتم عليها الزخم الزاوي للجسم.

جواب: (1) عزم القصور الذاتي للجسم (I) طردياً.

(2) السرعة الزاوية للجسم (ω) طردياً.

سؤال (3) جسم يدور حول محور ثابت بتأثير قوة محصلة، إذا توزعت كتلة الجسم بالقرب من محور الدوران بثبات سرعته الزاوية، ما يحدث لزخمه الزاوي:

جواب: حسب العلاقة ($\downarrow L = I\downarrow \omega$) يقل زخمه الزاوي.

سؤال (4) جسم جاسئ كتله (m) يدور حور محور ثابت إذا زادت سرعته الزاوية إلى ثلاثة أضعاف ما كانت عليه، فماذا يحدث لزخمه الزاوي؟

جواب: حسب العلاقة ($L = I\omega$) يزداد ثلاثة أضعاف ما كان عليه.

* يمكن استنتاج العلاقات التالية التي تربط الطاقة الحركية الدورانية بالزخم:

$$K_{ER} = \frac{1}{2} I\omega^2 \ / \ K_{ER} = \frac{1}{2} L\omega \ / \ K_{ER} = \frac{\frac{1}{2}L^2}{I}$$

* نســتخدم هذه العلاقات في الإجابة عن الأســئلة الموضــوعية أما الأســئلة المقالية والحســابية يفضــل اســتخدام العلاقات الرئيســة الواردة في الكتاب المدرســي $\left(K_{ER} = \frac{1}{2} I\omega^2 / L = I\omega\right)$

سؤال (5) إذا زادت الطاقة الحركية الدورانية لجسم ثلاثة أضعاف ما كانت عليه بثبات عزم قصوره الذاتي فما يحدث لزخمه الزاوي:

جواب:

$$\frac{KE_{R2}}{KE_{R1}} = \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}} \frac{L_2^2}{\cancel{I_2}} \Big/ \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}} \frac{L_1^2}{\cancel{I_1}} \Rightarrow \frac{3}{1} = \frac{L_2^2}{L_1^2}$$

$$\Rightarrow L_2 = \sqrt{3}\, L_1$$

أو

$$\frac{KE_{R2}}{KE_{R1}} = \frac{\frac{1}{2}\cancel{I_2}\,\omega_2^2}{\frac{1}{2}\cancel{I_1}\,\omega_1^2} \Rightarrow \frac{3}{1} = \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} \Rightarrow \omega_2 = \sqrt{3}\,\omega_1$$

$$\therefore \frac{L_2}{L_1} = \frac{\cancel{I_2}\,\omega}{\cancel{I_1}\,\omega_1} = \frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow \omega_2 = \sqrt{3}\,\omega_1$$

سؤال (6) أنبوب مجوّف وأسطوانة مصمته متماثلان في الأبعاد والكتلة ويدوران حول محورهما الهندسي بالسرعة الزاوية نفسهاً. فيأهما زخمه أكبر وأيهما طاقته الحركية أكبر.

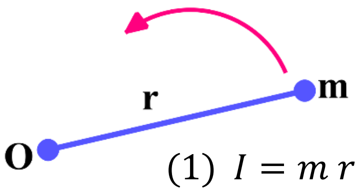
جواب: حسب العلاقة $(L = I\omega)$ يكون للأنبوب زخم زاوي أكبر لأن عزم قصوه الذاتي أكبر.

وحسب العلاقة $\left(K_{ER} = \frac{1}{2} I\omega^2\right)$ أيضاً تكون الطاقة الحركية الدورانية للأنبوب أكبر.

مثال (1) (الكتاب)

يتحرك جسـيم كتلته $(50\ g)$ حول محور ثابت (Z) في مسـار دائري نصـف قطره $(20\ cm)$ بسرعة زاوية $(5\ rad/s)$ بعكس اتجاه عقارب الساعة، أحسب مقدار الزخم الزاوي للجسم وطاقته الحركية.

الحل:



$$m = 50 \times 10^{-3}\ /\ r = 20 \times 10^{-2}\ /\ w = 5\ /\ I = mr^2$$

$$(1)\ \ I = m\,r^2 = 5 \times 10^{-2} \times 4 \times 10^{-2} = 20 \times 10^{-4}\ \ kg.m^2$$

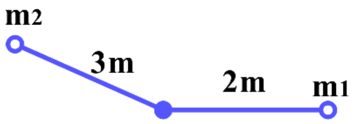
$$L = I\omega = 20 \times 10^{-4} \times 5 = 100 \times 10^{-4} = 10^{-2}\ \ kg.m^2$$

باتجاه $(Z+)$

$$(2)\ \ K_{ER} = \frac{1}{2} I\,\omega^2 = \frac{1}{2} \times 20 \times 10^{-4} \times 25 = 25 \times 10^{-3} J$$

مثال (2)

بدون جسيمان (m_1, m_2) حول محور ثابت بالسرعة الزاوية نفسها وكتلة كل منهما بالترتيب $(2kg\ , 1kg)$ كما في الشكل وكانت الطاقة الحركية للنظام الكون منهما $(34 \times 10^2 J)$ فأحسب الزخم الزاوي للنظام.



الحل:

$$m_1 = 2\ /\ m_2 = 1\ /\ K_{ER} = 34 \times 10^2 J$$

$$*\ I = m_1 r_1^2 + m_2 r_1^2 = 2 \times 4 + 1 \times 9 = 17\ kg.m^2$$

$$*\ K_{ER} = \frac{1}{2} I\,\omega^2 \Rightarrow 34 \times 10^2 = \frac{1}{2} \times 17 \times \omega^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{\omega^2} = \sqrt{4 \times 10^2} \Rightarrow \omega = 20\ rad/s$$

$$*\ L = I\omega = 17 \times 20 = 340\ \ kg.m^2$$

مثال (3)

حلقة دقيقة كتلتها $(2\ kg)$ تدور حول محورها الهندسي بزخم زاويّ $(800\ kg\ m^2/s)$ فأحسب ما يلي إذا علمت أن عزم قصورها الذاتي $(m\,r^2)$ ونصف قطرها $(20\ cm)$:

(أ) سرعتها الزاوية   (ب) طاقتها الحركية الدورانية.

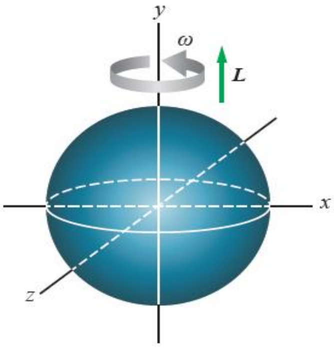
الحل:

أ] $I = m\,r^2$
$= 2 \times (2 \times 0^{-1})^2$
$= 8 \times 10^{-2} kg.m^2$

$L = I\omega$
$800 = 8 \times 10^{-2} \times \omega$
$\omega = 10^4\ rad\ /s^2$

$K_{ER} = \frac{1}{2}\ I\ \omega^2$
$= \frac{1}{2} \times 8 \times 10^{-2} \times 10^8$
$= 4 \times 10^6\ J$

مثال (4) كتاب



كرة مُصمته منظمه كتلتها ($5\ kg$) ونصف قطرها ($10\ cm$)، تتحرك حركة دورانية حول محور ثابت (y) يمر في مركزها، بسرعة زاوية ($20\ rad/s$) بعكس اتجاه عقارب الساعة عند النظر إليها من أعلى. أحسب مقدار الزخم الزاوي للكرة.

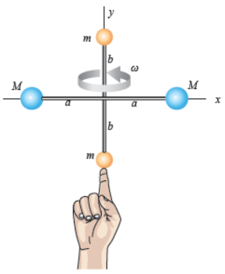
$$m = 5/\ r = 10 \times 10^{-2}\ /\ \omega = 20\ /\ I = \frac{2}{5} mr^2$$

الحل:

$$L = I\omega = \frac{2}{5} m\,r^2\omega = \frac{2}{5} \times 5 \times (10 \times 10^{-2})^2 \times 20$$
$$= 0.4\ kg.m^2/s\ , +y$$

* الزخم الزاوي للكره موجب، حيث يكون نحو ($+y$) عند النظر إليهما من أعلى، لأن الكرة تدور عكس عقارب الساعة كما يبدو للنظار.

مثال (5)



نظام يتكون من أربع كرات صغيرة كما في الشكل. متصلة معاً، ويدور النظام حول محور y بسرعة زاوية ($2\ rad/s$)، إذا علمت أن ($a = b = 20cm$) و ($m = 50\ g$) و ($M = 100g$) وأنصاف أقطار الكرات مهملة، أحسب:

أ] عزم القصور الذاتي للنظام.

ب] الطاقة الحركية الدورانية للنظام.

الحل: عزم القصور الذاتي للكرتين (m) يساوي صفر لأن ذراع القوة لهما يساوي صفر

أ] $I = m\,a^2 + m\,a^2 = 2m\,a^2 = 2 \times 100 \times 0^{-3} \times 4 \times 10^{-2}$
$= 8 \times 10^{-3}\ kg.m^2$

ب] $K_{ER} = \frac{1}{2}\ I\ \omega^2 \qquad = \frac{1}{2} \times 8 \times 10^{-3} \times 2^2 = 16 \times 10^{-3} J$

مثال (6)

يتحرك جسمان حركة دورانية بنفس الزخم الزاوي، إذا كان عزم القصور الذاتي للجسم الأول يساوي أربعة أضعاف عزم القصور الذاتي للجسم الثاني فأحسب النسبة:

1) بين السرعة الزاوية للأول إلى السرعة الزاوية للثاني.

2) بين الطاقة الحركية الدورانية للأول إلى الطاقة الحركية الموالية للثاني.

الحل:

[1

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{I_1\,\omega_1}{I_2\;\omega_2}$$

$$1 = 4\frac{\omega_1}{\omega_2}$$

$$\therefore \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{4} \Rightarrow (1:4)$$

[2

$$\frac{KE_{R1}}{KE_{R}2} = \frac{\frac{1}{2}I_1\omega_1^2}{\frac{1}{2}I_2\;\omega_2^2}$$

$$= 4 \times \frac{1}{16}$$

$$= \frac{1}{4}$$

مثال (7)

يتحرك جسمان حركة دورانية بنفس الطاقة الحركية الدورانية، وعزم القصور الذاتي للأول نصف العزم القصور الذاتي للثاني فما النسبة بين:

١) السرعة الزاوية للأول إلى السرعة الزاوية للثاني.

2) الزخم الزاوي للأول إلى الزخم الزاوي للثاني.

الحل:

$$KE_{R1} = KE_{R2} \quad / \quad I_1 = \frac{1}{2}\quad I_2 \quad / \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = ? \quad / \quad \frac{L_1}{L_2}\,?$$

[1

$$\frac{KE_{R1}}{KE_{R2}} = \frac{\frac{1}{2}I_1\omega_1^2}{\frac{1}{2}I_2\;\omega_2^2}$$

$$1 = \frac{1}{2} \times \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sqrt{2}}{1} \Rightarrow (\sqrt{2} : 1)$$

[2

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{I_1\,\omega_1}{I_2\;\omega_2}$$

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow (1 : \sqrt{2})$$

مثال (8)

إذا تحركت حلقتان حركة دورانية بحيث كانت سرعة الأولى ضعف سرعة الثانية، وقطر الأولى تساوي نصف قطر الثانية وكتلة الأولى ضعف كتلة الثانية، فأحسب النسبة بين زخم الأول إلى زخم الثانية وطاقة حركة الأولى إلى طاقة حركة الثانية.

الحل: $\omega_1 = 2\omega_2 \;/\; r_1 = \frac{1}{2} r_2 \;/\; m_1 = 2m2 \;/\; \frac{L_1}{L_2} ? \;/\; \frac{KE_{R1}}{KE_R 2}$

$$(1)\ \frac{L_1}{L_2} = \frac{I_1\ \omega_1}{I_2\ \omega_2} = \frac{\cancel{\text{ثابت}} \times m_1 r_1^2 \times 2}{\cancel{\text{ثابت}} \times m_2\ r_1^2 \times 1}$$

$$= \frac{2}{1} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{1} = 1 \qquad \Rightarrow (1:1)$$

$$(2)\ \frac{KE_{R1}}{KE_R 2} = \frac{\frac{1}{2} I_1 \omega_1^2}{\frac{1}{2} I_2\ \omega_2^2} = \frac{\cancel{\text{ثابت}} \times m_1 r_1^2 \times \omega_1^2}{\cancel{\text{ثابت}} \times m_2\ r_1^2 \times \omega_1^2}$$

$$= \frac{2}{1} \times \frac{1}{4} \times 4 = 1 \qquad \Rightarrow (2:1)$$

مثال (9)

جسام كتلته موزعة حول محور دورانه بانتظام يتحرك حركة دورانية بطاقة حركية $(2 \times 10^3 J)$، إذا ضاعفنا زخمه الزاوي إلى ثلاثة أضعاف ما كان عليه بثبات عزم قصوره، فكم تصبح طاقته الحركية.

الحل: $KE_{R1} = 2 \times 10^3 \;/\; L_2 = 3L_1 \;/\; I_2 = \ I_1 \;/\; KE_{R2} = ??$

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{I_2 \omega_2}{I_1\ \omega_1}$$

$$3 = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

$$\frac{KE_{R2}}{KE_R 1} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}}\ \cancel{I_2}\ \omega_2^2}{\cancel{\frac{1}{2}}\ \cancel{I_1}\ \omega_1^2} = \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}$$

$$\frac{KE_{R2}}{2 \times 10^3} = \frac{9}{1} \Rightarrow K_{ER2} = 18 \times 10^3 J$$

مثال (10)

أسطوانة مجّوفة نصف قطرها (r) وكتلتها $(2m)$ وتتحرك حول محورها الهندسي بسرعة زاوية $(2N)$، واسطوانة مجوّفة أخرى نصف قطرها $(2r)$ وكتلتها $(3m)$ وتتحرك بسرعة زاوية حول محورها الهندسي بسرعة (3ω). فأحسب النسبة:

١) بين زخم الأولى إلى زخم الثانية.

2) بين طاقة حركة الأولى إلى طاقة حركة الثانية.

الحل: $r_1 = 1r \,/\, m_1 = 2m \;/\; \omega_1 = 2\omega \;/\; r_2 = 2r \,/\, m_2 = 3m \;/\; \omega_2 = 3\omega$

$$1)\ \frac{L_1}{L_2} = \frac{I_1\ \ \omega_1}{I_2\ \omega_2} = \frac{\text{ثابت} \times m_1 r_1^2 \times \omega_1}{\text{ثبت}\ m_2 r^2 \times \omega_2}$$

$$= \frac{2 \times 1 \times 2}{3 \times 4 \times 3} = \frac{1}{9}$$

$$2)\ \frac{KE_{R1}}{KE_R 2} = \frac{\frac{1}{2} I_1 \omega_1^2}{\frac{1}{2} I_2\ \omega_2^2} = \frac{2}{3 \times 4} \times \frac{4}{9} = \frac{2}{27}$$

---

[3] الزخم الزاوي والعزم:

يمكن كتابة علاقة للعزم بدلالة الزخم الزاوي من خلال الصيغة العامة لقنون نيوتن الثاني

$$\Sigma T = \frac{dL}{dt}$$

وإذا كان التغير في الزخم يحدث خلال فترة زمنية (Δt):

المعدل الزمني للتغير في الزخم: $\frac{\Delta L}{\Delta T}$ | $\boxed{\Sigma T = \frac{\Delta L}{\Delta T}}$

* العزم المحصّل المؤثر في جسم يسبب التغير في زخمه الزاوي.

ملاحظة مهمة

$$\boxed{\Sigma T = \frac{\Delta L}{\Delta T}} \xRightarrow[\text{عزم القصور الذاتي}]{\text{في حال ثبات}} \Sigma T = \frac{I\,\Delta w}{\Delta t} \Longrightarrow \boxed{\Sigma T = I \propto}$$

نستخدم هذه العلاقة ($\Sigma T = I \propto$) فقط إذا كان

عزم القصور الذاتي للجسم ثابت

أي عندما يكون: ↓

(1) الجسم جاسئ ⟸ كتلة وشكله ثابت

(2) محور دورانه ثابت

⟸ أي توزيع الكتلة يبقى كما هو حول محور الدوران

سؤال (1) في حال زيادة قيمة القوة المحصلة المؤثرة على جسم جاسئ يدور حول محور ثابت بتأثير هذه القوة ماذا يحدث لكل مما يلي:

(أ) المعدل الزمني للتغير في زخمه الزاوي.

(ب) سرعته الزاوية.

(جـ) طاقته الحركية الدورانية.

جواب: [أ] يزداد حسب العلاقة ($\Sigma T = \frac{\Delta L}{\Delta T}$)

[ب] تزداد حسب العلاقة ($L = I\omega$)

[جـ] تزداد حسب العلاقة ($K_{ER} = \frac{1}{2}I\omega^2$)

سؤال (2) كيف يمكن إيقاف جسم يتحرك حركة دورانية بزخم زاوي معين باستعمال أقل عزم ممكن.

جواب: بزيادة زمن تأثير العزم.

سؤال (3) كيف يمكن زيادة الزخم الزاوي لجسم معين باستعمال أقل عزم محصّل:

جواب: بزيادة زمن التأثير بالعزم على الجسم.

سؤال (4) جسمان قابلان للدوران حول محور ثابت، أثر في كل منهما نفس العزم المحصل لنفس الفترة الزمنية، فإذا كان عزم القصور الذاتي للجسم الأول أكبر من الجسم الثاني فأي الجسمين:

(أ) له زخم زاويّ أكبر.

(ب) له سرعة نهائية زاوية أكبر.

(جـ) طاقة حركية دورانية أكبر.

جواب: [أ] $\Sigma T = \frac{\Delta L \checkmark}{\Delta T \checkmark}$ ✓ ⇐ لهما نفس التغير في الزخم الزاوي.

$\checkmark L = I\ \omega$

[ب] $\checkmark = \underset{(1)}{\uparrow}\ \underset{(1)}{\downarrow}$ ⇐ $\omega_2 > \omega_1$

$K_{Ep} = \frac{1}{2} I\ \omega^2$

[جـ] $\therefore \downarrow \Leftarrow \underset{(1)}{\uparrow}\ \underset{(1)}{\downarrow\downarrow}$ ⇐ $K_{E2} > K_{E1}$

مثال (1)

إذا تغير الزخم الزاوي لجســـم ما بمقدار $(30\ kg.m^2)$ خلال (5)s فأحســـب مقدار العزم المحصل المؤثر فيه:

الجواب:

$$\Delta L = 30\ /\ \Delta t = 5\ /\ \Sigma T = ??\ /$$

$$\Sigma T = \frac{\Delta L}{\Delta t} \Rightarrow \frac{30}{5} = 6\ N.m$$

مثال (2)

جسيم نقطي كتلته $(2\ kg)$ يدور حول محور ثابت ويبعد عنه $(3\ m)$ بدأ حركته من السكون تحت تأثير عزم محصل ثابت، فأصبحت سرعته الزاوية بعد $(3s)$ تساوي $(8\ rad/s)$ أحسب مقدار العزم المحصل المؤثر فيه:

الحل: $m = 2\ /\ r = 3\ /\ \omega_i = 0 / \Delta t = 3 /\ \omega_f = 8\ /\ \Sigma T = ??$

$$*\ I = m\ r^2 = 2 \times 9 = 18\ kg.m^2$$

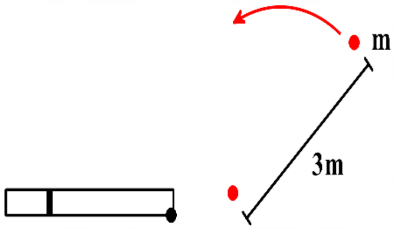
$$\Delta L = L_f - L_i = I\omega_f - I\omega_i$$

$$= 18 \times 8 = 144\ k.g\ m^2/s$$

$$\Sigma T = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{144}{3}\ \ N.m$$

مثال (3)

جسيم نقطي يتحرك حول محور ثابت كما في الشكل بسرعة زاويّة $(2\ rad/s)$ وكتلته $(4\ kg)$ فارتطم بحاجز في طريقه وتوقف عن الحركة بعد $(0.5s)$ من ارتطامه، أحسب مقدار القوة العمودية عليه خلال فترة توقفه.



الحل: $\omega_i = 2\ /\ \omega_f = 0\ \ /\ m = 4\ /\ \Delta t = 0.5\ /\ r = 3m$

$$I = m\,r^2 = 4 \times 9 = 36\ kg.m^2$$

$$\Sigma T = Fr\sin\theta$$

$$-144 = F \times 3 \times 1$$

$$F = \frac{-144}{3} = 48\ N$$

$$\Delta L = L_f - L_i$$

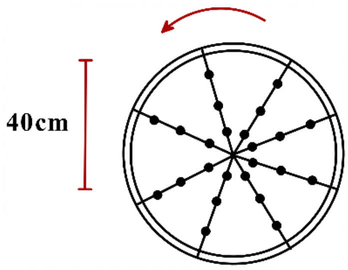
$$= 0 - I_i\,\omega_i$$

$$= -36 \times 2 = -72\ kg\ m^2/s$$

$$\Sigma J = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{-72}{0.5} = -144\ N.m$$

مثال (4)

إطار فلزي تتوزع على قضبان تصل بين حافته ومركزه كرات فلزية موزعة بانتظام كما في الشكل يتحرك الإطار بسرعة زاوية $(4\ rad/s)$ فبدأت الكرات الفلزية بالابتعاد عن المحور نحو حافة الإطار، فيزداد عزم القصور الذاتي للإطار والكرات بمعدل $(0.2\ kg\ m^2/s)$، فأحسب العزم المحصل اللازم التأثير به على الإطار ليبقى يدور بنفس سرعته:



الحل: $\omega_i = \omega_f = 4\ /\ \frac{\Delta I}{\Delta t} = 0.2\ /\ r = 40 \times 10^{-2}\ \ /\ \ \Sigma t = ??$

$$* \ \Sigma T = \frac{\Delta L}{\Delta T} = \frac{\Delta I\omega}{\Delta r} = \omega\,\frac{\Delta I}{\Delta t} = 4 \times 0.2 = 0.8\ \ N.m$$

عكس عقارب الساعة

* أما لحساب القوة المماسية اللازمة لذلك

$$\Sigma T = \Sigma Fr\sin\theta \Longrightarrow 0.8 = F \times 40 \times 10^{-2}$$

$$F = 2N$$

مثال (5)

أثر عزم محصل عكس عقارب الساعة على جسم ساكن قابل للدوران حول محور ثابت لمدة $(2s)$ حتى أصبحت سرعة الزاوية $(6\ rad/s)$ وطاقته الحركية الدورانية $(20\ j)$ فأحسب مقدار العزم المحصل المؤثر فيه.

الحل: $\omega_i = 0\ /\ \Delta t = 2s\ /\ \omega_f = 6\ /\ KE_R = 20\ /\ \Sigma T = ?$

$$K_{ER} = \frac{1}{2}\ I\ \omega^2$$

$$20 = \frac{1}{2} \times I \times 36$$

$$\boxed{\frac{40}{36} = I}$$

$$I = \frac{10}{9} kg.m^2$$

$$\Delta L = I\ (\omega_f - \omega_i)$$

$$= \frac{10}{9}(6-0)$$

$$= \frac{20}{3} kg.m^2/s$$

$$\Sigma T = \frac{\Delta L}{\Delta t}$$

$$\Sigma T = \frac{\frac{20}{3}}{2} = \frac{10}{3}\ N.m$$

مثال (6)

احسب الزمن اللازم لإيقاف كرة مصممته تتحرك حول مركزها بسرعة زاوية $(30\ rad/s)$ باستخدام قوة محصلة مماسية مقدارها $(100\ N)$، إذا علمت أن نصف قطرها $(10\ cm)$ وكتلتها $(0.5\ kg)$ وعزم قصورها الذاتي $(\frac{2}{5} m\, r^2)$.

الحل: $\omega_f = 0\ /\ \omega_i = 30\ /\ \Sigma F = 100\ /\ r = \cancel{10 \times 10^{-2}}\ /\ m = 0.5$

$$= 1 \times 10^{-1}$$

$$I = \frac{2}{5} m\, r^2 = \frac{2}{\cancel{5}} \times \cancel{5} \times 10^{-1} \times 1 \times 10^{-2} = 2 \times 10^{-3}\ kg.m^2$$

$$\Delta L = L_f - L_i = I\ \omega_f - I\ \omega_i = 0 - 2 \times 10^{-3} \times 30$$

$$= -6 \times 10^{-2}\ kg.m^2/s$$

$$\Sigma T = -Fr \sin\theta = 100 \times 1 \times 10^{-1} \times \sin 90 = -10\ N.m$$

$$\Sigma T = \frac{\Delta L}{\Delta t} \Rightarrow -10 = \frac{-6 \times 0^{-2}}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = 6 \times 10^{-3}$$

تمرينـــــــــات

تمرين (1): اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يلي:

1] وحدة قياس الزخم الزاوي $(kg\ m^2/s)$ تكافئ

أ) $\boldsymbol{N.s}$ ب) $N.m$ جـ) $\boldsymbol{N.m.s}$ د) $N.m/s$

2] إذا أردنا إيقاف جسم يتحرك بزخم زاوي معين بأقل عزم ممكن فإنه يجب:

أ) زيادة زمن تأثير العزم ب) تقليل زمن تأثير العزم

جـ) زيادة السرعة الزاوية د) تقليل سرعة الجسم

3] يتحرك قرص حول محوره بزخم زاوي $(20\ kg\ m^2/s)$ عكس عقارب الساعة، فإذا تحرك بنفس السرعة مع عقرب الساعة فإن زخمه.

أ) 20 ب) $\boldsymbol{-20}$ جـ) $\boldsymbol{10}$ د) $\boldsymbol{-10}$

4] جسم زخمه الزاوي $(8\ kg.m^2/s)$ وعزم قصوره الذاتي $(4kg\ m^2)$ فإن سرعته:

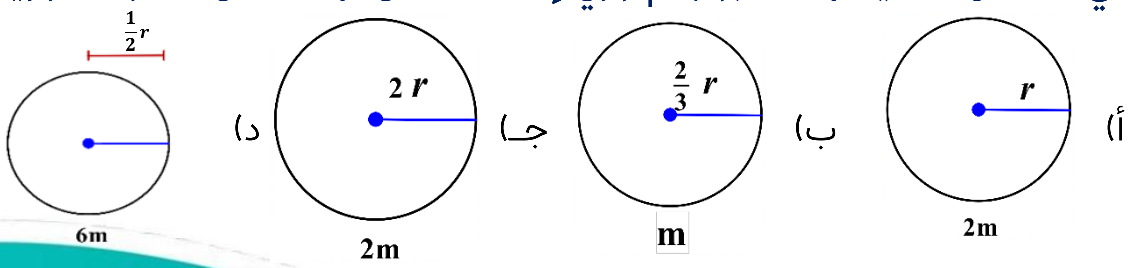
أ) $\boldsymbol{2\ rad/s}$ ب) $4\ rad/s$ جـ) $\boldsymbol{8\ rad/s}$ د) $\boldsymbol{1\ rad/s}$

5] حلقتان (B , A) قابلتان للدوران حول مركزيهما، أثر في كل منهما العزم المحصل نفسه للفترة الزمنية نفسها، إذا علمت أن كتلة (A) أكبر من كتلة (B) ولهما نفس القطر فإن.

أ) $L_A < L_B, KE_{RA} < KE_B$ ب) $L_A = L_B\ /\ KE_A < KE_B$

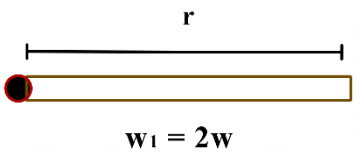
جـ) $L_A = L_B, KE_A < KE_B$ د) $L_A > L_B/\ KE_A > KE_B$

6] أي في الأشكال التالية لهما أكبر زخم زاوي إذا علمت أن لهما نفس السرعة الزاوية:

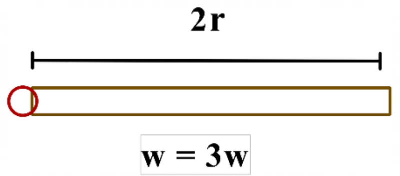


7] أي الأشكال التالية لها أكبر طاقة حركية دورانية:

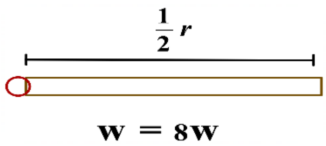
أ)



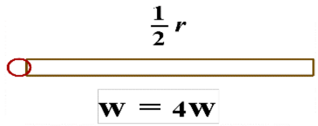
ب)



جـ)



د)



تمرين (2): تحرك كرتان حركة دورانية بنفس الطاقة الحركية الدورانية ولهما نفس نصف القطر إذا علمت أن كتلة الأول ضعف كتلة الثاني فما النسبة بين:

أ] سرعتهما الزاوية.　　　ب] زخمهما الزاويّ.

تمرين (3): اسطوانتان مجوفتان لهما نفس الكتلة نصف قطر الأولى ثلاثة أضعاف نصف قطر الثانية، وسرعة الأولى ضعف سرعة الثانية فأحسب النسبة بين.

أ] زخمها الزاوي.　　　ب] طاقتيهما الحركية.

تمرين (4): جسمان يتحركان حركة دورانية بحيث الطاقة الحركية للجسم الأول (8) أضعاف طاقة الثاني، والزخم الزاوي للأول ضعفي الزخم الزاوي للثاني، فإن النسبة بين:

أ] سرعتهما الزاوية.　　　ب] عزمي قصورهما الذاتي.

---

[4] حفظ الزخم الزاوي:

"الزخم الزاوي لنظام معزول يظل ثابت في المقدار والاتجاه"

أي أنه عندما يكون العزم المُحصل المؤثر على جسم يساوي صفر فإن زخمه الزاوي يبقي ثابت

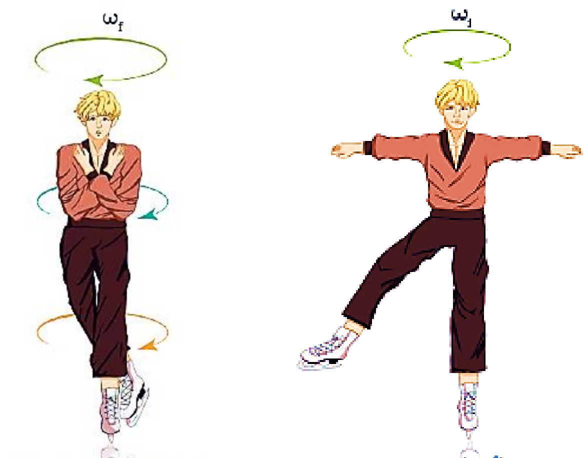
$$\Sigma T = 0 \Longrightarrow \boxed{L_f = Li}$$

$$\Longrightarrow I_f \omega_f = I_j \omega_j$$

⇐ تذكر أنه عند إعادة توزيع كتلة النظام حول محور دورانه فإن قصوره الذاتي يتغير.

⇐ مثال: عندما يدور متزلج على جليد حول نفسه بسرعة زاوية معينة كما في الشكل (1).

ثم يقوم بضم يديه فإن سرعته الزاوية تزداد، لأن الزخم الزاوي في هذه الحالة وبإهمال القوى الخارجية محفوظ.



(ب) متزلج يدور بسرعة زاوية ω_f.
(أ) متزلج يدور بسرعة زاوية ω_i.

$I_2 < I_1$: لأن الكتلة تتوزع بعيداً عن محور الدوران.

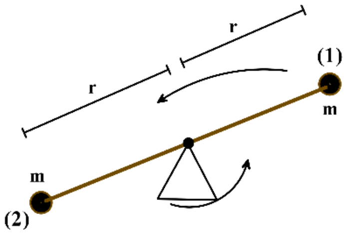
$\omega_2 < w_1$: لأن عزم القصور الذاتي للأول أكبر والزخم محفوظ.

$L = I\omega \;\Rightarrow\; \surd = \;\; \uparrow\downarrow$

سؤال (1) متى يكون الزخم الزاوي لجسم يدور محفوظاً؟

جواب: عندما يكون النظام معزول، أي أن العزم المحصل المؤثر فيه يساوي صفر.

سؤال (2) في أثناء دوران النظام المبيّن في الشكل بسرعة زاوية ثابتة، زاد طول الذراعين للضعف، فماذا يحدث لسرعته الزاوية، بإهمال تأثير القوى الخارجية.



جواب: بما أن النظام معزول، إذاً الزخم محفوظ.

$$L_f = L_j \Rightarrow I_f \omega_f = I_i\, \omega_i$$

$$(\cancel{m_1}\, r_1^2 f + \cancel{m_2} r_2^2 f)\omega_f = (\cancel{m_1} r_1 i + \cancel{m_2} r_2^2 i)\omega_i$$

$$(4r^2 + 4r^2)\omega_f = 2r^2\, \omega_i$$

$$8\, \omega_f = 2\, \omega_i \Rightarrow \omega_f = \frac{1}{4}\omega_i$$

سؤال (3) إذا كنت تركب على لوح تزلج وبسبب عوائق على الطريق بدأ اللوح بالميلان حول مركزه، ماذا ستفعل لمنع اللوح من الدوران وبالتي السقوط، هل ستقوم بضم نفسك نحو اللوح أم مد نفسك مبتعداً من اللوح.

جواب: سأقوم بمد نفسي مبتعداً عن اللوح، وذلك حتى أبعد توزيع الكتلة عن محور الدوران فيزداد عزم القصور الذاتي.

سؤال (4) إذا قفزت من لوح غطس وأردت الدوران بسرعة زاوية عالية حول مركز كتلتك ماذا تفعل؟

جواب: أقوم بضم قدمي ويدي نحو صدري ليقل عزم القصور الذاتي لجسمي وبالتالي تزداد السرعة الزاوية حيث أن الزخم الزاوي محفوظ.

ملاحظة: الطاقة الحركية الدورانية في هذه الحالة تزداد.

$$KE_R = \frac{1}{2} I\omega^2 \Rightarrow \therefore \uparrow = \cancel{\downarrow}\cancel{\uparrow}\uparrow$$

مثال (1) كتاب

ثلاثة أطفال كتلتهم $(32\ kg, 28\ kg, 20\ kg)$ يقفون عند حافة لعبة دوّارة على شكل قرص دائري منتظم كتلته $(100kg)$ ونصــــف قطره $(2m)$ ويدور بســــرعة زاوية $(2\ rad/s)$ حول محور ثابت في مركزه، تحرك الطفل الذي كتلته $(20\ kg)$ ووقف عند مركز القرص، أحســب مقدار السرعة الزاوية الجديدة للعبة الدوّارة.

الحل:

$$m = 100 / r = 2 / m_1 = 20\ /\ m_2 = 28\ /\ m_3 = 32 / \omega_i = 2\ /\ \omega_f = ??$$

$$I_i = \frac{1}{2}Mr^2 + (m_1 + m_2 + m_3)r^2 = \frac{1}{2} \times 100 \times 4 + (20 + 28 + 32) \times 4$$

$$= 520\ kg.m^2$$

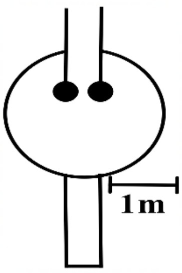
$$I_f = \frac{1}{2}Mr^2 + (m_2 + m_3)r^2 = \frac{1}{2} \times 100 \times 4 + (28 + 32) \times 4$$

$$= 440\ kg.m^2$$

$$I_f = L_i \Longrightarrow I_f\omega_f = I_i\omega_i$$

$$440 \times \omega_f = 520 \times 2 \Rightarrow \omega_f = \frac{1040}{440} \cong 2.4\ rad/s$$

مثال (2)



أطار فلزي يدور أفقياً حول مركزه وكتلته $(10kg)$ بسرعة زاوية $(3\ rad/s)$، وعند محور حكرتان فلزيتان كتلة كل منهما $(2\ kg)$ فتحركتا حتى وصلتا حافة الإطار بإهمال تأثير أي قوة خارجية، وبمعرفة أن عزم القصور الذاتي للإطار $(\frac{1}{2}Mr^2)$، أوجد سرعته النهائية.

الحل: $M = 10 / m_1 = m_2 = 2 / \omega_i = 3\ /\ \omega_f = ? /$

$$I_i = \frac{1}{2} M\, r^2 = \frac{1}{2} \times 10 \times 1 = 5\, kg.m^2$$

$$I_f = \frac{1}{2} M\, r^2 = (m_1 + m_2) r^2 = 5 + 4 \times 1$$

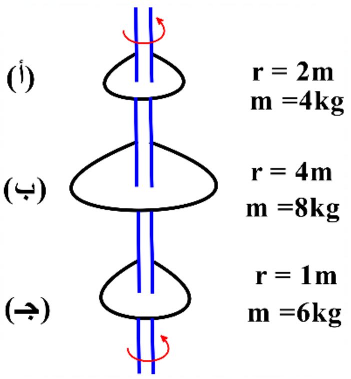
$$= 9\, kg.m^2$$

$$L_i = I_f \Longrightarrow I_i \omega_i = I_f \omega_f \Rightarrow 5 \times 3 = 9 \times \omega_f$$

$$\omega_f = \frac{5}{3} rad/s$$

مثال (3)

ثلاث حلقات فلزية متصلة معاً بقضيب مهمل الكتلة كما في الشكل وتدور حول المحور (y) بسرعة زاوية $(8\, rad/s)$ واثناء دورانها سقطت الحلقة (جـ) وانفصلت عن النظام، فأحسب سرعة الحلقتين (أ ، ب) بعد انفصال (جـ).



الحل:

$$\omega_i = 8 \ / \ \omega_f = ??$$

$$I_i = m_{أ} r_{أ}^2 + m_{ب} r_{ب}^2 + m_{جـ} r_{جـ}^2$$

$$= 4 \times 4 + 8 \times 16 + 6 \times 1$$

$$= 16 + 128 + 6 = 150\, kg.m^2$$

$$I_f = 16 + 128 = 144\, kg.m^2$$

$$l_f = l_i \Rightarrow I_i \omega_i = I_f \omega_f$$

$$150 \times 8 = 144 \times w_f$$

$$\omega_f = \frac{150 \times 8}{144} = \frac{50}{6} = 8.3\, rad/s$$

مثال (4)

تقف هناء على طرف القرص الدوّار للعبة الحصان الدوار إذا علمت أن كتلة القرص بمحتوياته $(2 \times 10^2 kg)$، نصف قطره $(4m)$ وسرعته الزاوية $(2\ rad/s)$ وكتلة هناء $(50\ kg)$ وبإفراض أن كتلة القرص موزعة بانتظام، والنظام معزول، فأحسب:

1] الزخم الزاوي الابتدائي للنظام.

2] السرعة الزاوية للعبة عندما تقف هناء على بعد $(2m)$ من محور الدوران.

الحل: $M = 2 \times 10^2\ /\ r = 4\ \ /\ \omega_i = 2\ /\ m = 50$

[1

$$I = \frac{1}{2}Mr^2 + mr^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 10^2 \times 16 + 50 \times 16$$

$$= 1600 + 800 = 2400\ kg.m^2$$

$$L = I\omega$$

$$= 24 \times 10^2 \times 2$$

$$= 48 \times 10^2\ \ kg.m^2/s$$

[2

$$\mathrm{I_f} = \frac{1}{2}Mr^2 + m\,r^2f \qquad = 1600 + 50 \times 4$$

$$= 1800\ kg.m^2$$

$$L_f - L_j \Rightarrow I_f\omega_f = I_i\ \omega_i$$

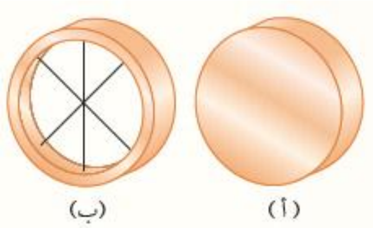
$$\cancel{1800} \times w_f = \cancel{2400} \times 2 \Rightarrow \omega_f = \frac{24}{9}$$

مراجعة الدرس

1] الفكرة الرئيسة: ما الزخم الزاوي؟ وعلام ينص قانون حفظ الزخم الزاوي؟ علام تعتمد الطاقة الحركية الدورانية لجسم يدور حول محور ثابت؟

2] أفسر: أنبوب مجوف وأسطوانة مصمتة، متماثلان في الكتلة والأبعاد، ويدور كل منهما حول محور تماثله بالسرعة الزاوية نفسها. هل لهما الطاقة الحركية الدورانية نفسها أم لا؟ أوضح إجابتي.

3] أحلل وأستنتج: يبيّنُ الشكل المجاور أسطوانتين إحداهما مصمتة والأخرى مجوفة، متماثلتين في الكتلة والأبعاد والسرعة الزاوية، وتدوران حول محور ثابت يمر في المركز الهندسي لكل منهما. مستعينا بالشكل المجاور؛ أجيب عن السؤالين الآتيين:



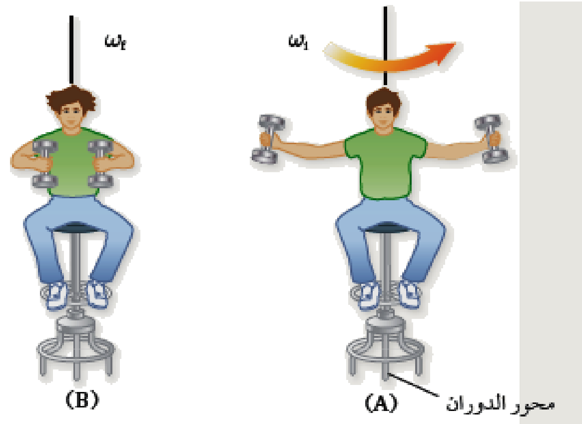
أ . أقارن بين مقداري الزخم الزاوي للأسطوانتين، هل هما متساويان أم لا؟ أفسّر إجابتي.

ب. أقارن بين مقداري الطاقة الحركية الدورانية للأسطوانتين، هل هما متساويان أم لا؟ أفسر إجابتي.

4] التفكير النقاد: يجلس طالب على كرسي قابل للدوران حول محور رأسي، ويمسك ثقل بكلّ يد. بداية؛ يدور الطالب والكرسي بسرعة زاوية (ω_i) ويداه ممدودتان، كما هو موضح في الشكل A. إذا طلب المعلم من الطالب ضم ذراعيه؛ كما في الشكل B؛ فماذا يحدث لكل من:

أ . عزمُ قصوره الذاتي؟

ب. سرعتهُ الزاويّة النهائية؟



إجابة أسئلة "مراجعة الدرس الثالث"

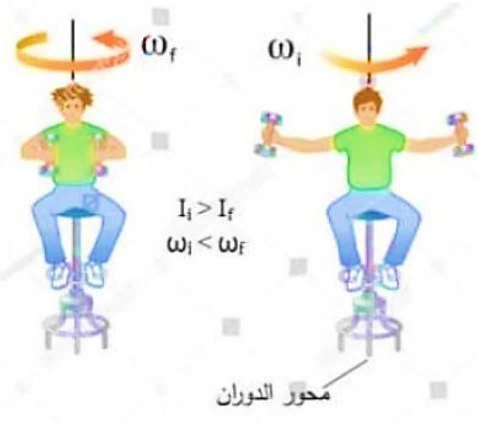
1] الزخم الزاوي يعرف بأنه يساوي ناتج ضرب عزم القصور الذاتي للجسم أو النظام في سرعته الزاوية، وهو كمية متجهة، رمزه (L). وينص قانون حفظ الزخم الزاوي على أن: "الزخم الزاي لنظام معزول يظل ثابتاً في المقدار والاتجاه، إذ يكون العزم المحصل المؤثر في النظام المعزول صفرا. وتعتمد الطاقة الحركية الدورانية لجسم يدور حول محور ثابت على عزم قصوره الذاتي وسرعته الزاوية.

2] الأنبوب المجوف يمتلك عزم قصور ذاتي أكبر، لأن كتلته موزعة على سطح الأنبوب بعيدا عن محور الدوران مقارنة بالأنبوب المسمط. والرجوع إلى العلاقة: $(KE_R = I\omega^2)$ فإن الطاقة الدورانية تتناسب طرديا مع عزم القصور الذاتي، بثوب السرعة الزاوي. فيكون للأسطوانة المجوفة طاقة حركية دورانية أكبر.

3] (أ) مقدار الزخم الزاوي للأسطوانة المجوفة أكبر منه للأسطوانة المصمتة؛ لأن الزخم الزاوي يعتمد على عزم القصور الذاتي والسرعة الزاوية، وهما تدوران بمقدار السرعة الزاوية نفسه، وعزم القصور الذاتي للأسطوانة المجوفة أكبر منه للأسطوانة المصمتة.

(ب) مقدار الطاقة الحركية الدورانية للأسطوانة المجوفة أكبر منه للأسطوانة المصمتة؛ لأن الطاقة الحركية الدورانية تعتمد على عزم القصور الذاتي ومربع مقدار السرعة الزاوية، وهما توران بمقدار السرعة الزاوية نفسه، وعزم القصور الذاتي للأسطوانة المجوفة أكبر منه للأسطوانة المصمتة.

4] (أ) يؤدي ضم الطالب لذراعيه إلى تقليل مقدار عزم القصور الذاتي له حول محور الدوران الرأسي من المقدار (I_i) إلى المقدار (I_f)، لأنه حرك جزء من كتلته وحرك الثقلين قريبا من محور الدوران.



ب) لا يوجد عزم محصل مؤثر في النظام الذي يتكون من الطالب والكرسي والثقلين، لذا يكون الزخم الزاوي محفوظاً لهذا النظام حول محور الدوران. ألاحظ أن عظم القصور الذاتي للطالب في الشكل (B) أقل منه في الشكل (A)، أي أن: $(I_i > I_f)$، لذا يجب أن يكون مقدار سرعته الزاوية النهائية (ω_f) في الشكل (B) أكبر مقارنة بمقدار سرعته الزاوية الابتدائية (ω_i)، بحسب قانون حفظ الزخم الزاوي، أي يزداد مقدار سرعته الزاوية، ويتغير من (w_i) على (w_f). ويمكن للطالب تقليل مقدار سرعته الزاوية عن طريق مد ذراعيه مرة أخرى على استقامتيهما، وتحريك الثقلين إلى الخارج.

مرجعة الوحدة

1. أضعُ دائرةً حول رمز الإجابة الصحيحة لكلّ جملة ممّا يأتي:

1. جسمان متماثلان A و B على سطح الأرض، الجسمُ A عند خط الاستواء، والجسم B عند قطبها الشمالي. أي مما يأتي يُعبر بشكل صحيح عن العلاقة بين سرعتي الجسمين الزاوية؟

أ. $\omega_A = \omega_B \neq 0$ ب. $\omega_A > \omega_B$ جـ. $\omega_A < \omega_B$ د. $\omega_A = \omega_B = 0$

2. وحدة قياس الزخم الزاوي حسب النظام الدولي للوحدات هي:

أ. $N.m/s$ ب. $Kg.m/s$ جـ. N/s د. $Kg.m^2/s$

3. وحدة قياس عزم القصور الذاتي حسب النظام الدولي للوحدات هي:

أ. $N.m/s$ ب. $Kg.m^2$ جـ. $Kg.m^2/s$ د. $Kg.m/s$

4. عند دوران إطار سيارة حول محور ثابت؛ فإن مقدار سرعته الزاوية:

أ. يكون متساويًا لأجزائه جميعها. ب. يزداد بالابتعاد عن محور الدوران.

جـ. يقل بالابتعاد عن محور الدوران. د. يساوي صفرًا.

5. عند دوران أسطوانة مصمتة متماثلة حول محور ثابت مدّة زمنية معينة فإن مقدار الإزاحة الزاوية:

أ. يكون متساويًا لأجزائها جميعها.

ب. لا يعتمد على زمن دوران الجسم، فهو يساوي $2\pi\ rad$ دائما.

جـ. يكون أكبر للجسيمات القريبة من محور الدوران.

د. يكون أكبر للجسيمات البعيدة من محور الدوران.

6. تستخدم سلمى مفك براغي لفك برغي من خزانتها ولم تتمكن من ذلك. يجب على سلمى استخدام مفك براغي يكون مقبضه:

أ. أطول من مقبض المفك المستخدم.

ب. أقصر من مقبض المفك المستخدم.

جـ. أكثر سمكا من سمك المقبض المستخدم.

د. أقل سمكا من سُمك المقبض المستخدم.

7. يستخدمُ خالد مفتاح شد لفك صامولة إطار سيارة ولم يتمكن من ذلك. يجب على خالد استخدام مفتاح شد يكون مقبضه:

أ. أطول من مقبض مفتاح الشد المستخدم.

ب. أقصر من مقبض مفتاح الشد المستخدم.

جـ أكثر سمكا من سمك مفتاح الشد المستخدم.

د. أقل سمكا من سمك مفتاح الشد المستخدم.

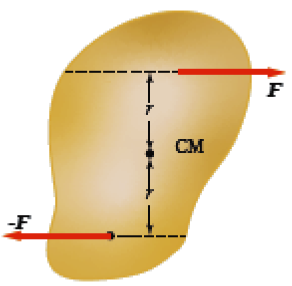
8. كسر مضرب بيسبول منتظم الكثافة في موقع مركز كتلته إلى جزأين؛ كما هو موضّح في الشكل. إن الجزء ذا الكتلة الأصغر هو:

أ. الجزء الموجود على اليمين.

ب. الجزء الموجود على اليسار.

ج. كلا الجزأين له الكتلة نفسُها.

د. لا يمكن تحديده.



9. الشكل المجاور يبين قوتين متساويتين مقدارًا ومتعاكستين اتجاهًا تؤثّران على بعد متساو من مركز كتلة جسم موجود على سطح أملس. أي الجمل الآتية تصف بشكل صحيح حالة الجسم الحركية عند اللحظة المبينة؟

أ. الجسم في حالة اتزان سكوني؛ حيث القوة المحصلة المؤثرة فيه تساوي صفرا.

ب. الجسم ليس في حالة اتزان سكوني، ويبدأ الدوران بعكس اتجاه حركة عقارب الساعة.

ج. الجسم في حالة اتزان سكوني، حيث العزم المحصل المؤثر فيه يساوي صفرا.

د. الجسم ليس في حالة اتزان سكوني، ويبدأ الدوران باتجاه حركة عقارب الساعة.

10. مسطرة مترية منتظمة متماثلة ترتَكز على نقطة عند التدريج $(25\ cm)$. علق ثقل كتلته $(0.50\ kg)$ عند التدرج $(0\ cm)$ للمسطرة، فاتزنت أفقيا، كما هو موضح في الشكل المجاور. إن مقدار كتلة المسطرة المترية يساوي:

أ. $0.25\ kg$ ب. $0.50\ kg$ جـ. $0.10\ kg$ د. $0.20\ kg$

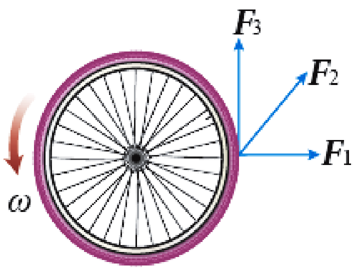
11. جسيمان نقطيان البعد بينهما (r). إذا علمت أن $(m_1 = 4m_2)$ فإن موقع مركز الكتلة يكون:

أ. في منتصف المسافة بين الجسيمين.

ب. بين الجسيمين، وأقرب إلى (m_1).

ج. بين الجسيمين، وأقرب إلى (m_2).

د. خارج الخط الواصل بين الجسيمين، وأقرب إلى (m_1).



12. تؤثر ثلاث قوى لها المقدار نفسه في إطار قابل للدوران حول محور ثابت عمودي على مستوى الصفحة مارا في مركزه. أي هذه القوى يكون عزمها هو الأكبر؟

أ. F_1 ب. F_2

جـ F_3 د. جميعها لها مقدار العزم نفسه.

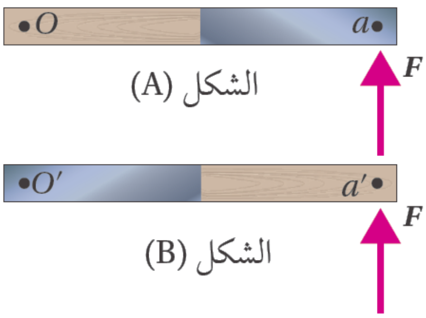
13. كرة مصمتة وكرة مجوفة، لهما الكتلة نفسها ونصف القطر نفسه، تدوران بمقدار السرعة الزاوية نفسه. أي الكرتين مقدار زخمها الزاوي أكبر؟

أ. الكرة المصمتة. ب. الكرة المجوفة.

جـ لهما مقدار الزخم الزاوي نفسه. د. لا يمكن معرفة ذلك.

* أقرأ الفقرة الآتية، ثم أُجيب عن السؤالين (14 و 15).

يوضح الشكل المجاور مسطرة مترية نصفُها خشب ونصفُها الآخر فولاذ. بداية؛ المسطرة قابلة للدوران حول محور عمودي عليها عند نهايتها الخشبية (النقطة O)، أنظرُ الشكل (A)، وأثرتُ فيها بقوة (F) عند نهايتها الفولاذية (النقطة a). بعد ذلك؛ جعلتُ المسطرة قابلةً للدوران حول محور عمودي عليها عند نهايتها الفولاذية (النقطة O')، أنظر الشكل (B)، واثرت فيها بالقوة (F) نفسها عند نهايتها الخشبية (النقطة a').



14. أي العلاقات الآتية صحيحة لعزمي القصور الذاتي للمسطرتين حول محوري دورانهما؟

أ. $I_A > I_B$ ب. $I_A < I_B$ جـ $I_A = I_B$ د. $I_A = I_B = 0$

15. أي العلاقات الآتية صحيحة حول مقداري التسارع الزاوي للمسطرتين حول محوري دورانهما؟

أ. $a_A > a_B$ ب. $a_A < a_B$ جـ $a_A = a_B$ د. $a_A = -a_B$

16. عندما تؤثر قوة في جسم؛ فإن عزمها يكون صفرا عندما:

أ . يتعامد متجه القوة مع متجه موقع نقطة تأثيرها.

ب. يتزايد مقدار السرعة الزاوية للجسم.

جـ يمر خط عمل القوة بمحور الدوران.

د. يتناقص مقدار السرعة الزاوية للجسم.

17. يجلس طفلان على طرفي لعبة $(see - saw)$ متزنة أفقيا. عند تحرك أحد الطفلين مقتربا من نقطة الارتكاز؛ فإن الطرفَ الذي يجلس عليه:

أ. يرتفع لأعلى. ب. ينخفض لأسفل.

جـ يبقى في وضعه الأُفقي ولا يتغير. د. قد يرتفع أو ينخفض حسب وزن الطفل.

2. أفسر ما يأتي:

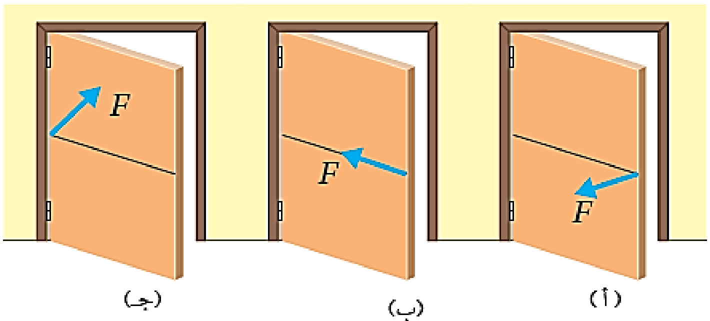
أ. عند حساب العزم المحصل المؤثر في جسم؛ فإنني أهمل القوى التي يمرّ خط عملها في محور الدوران.

ب. يعتمد عزم القصور الذاتي لجسم على موقع محور دورانه.

3. أُقارن بين كتلة جسم وعزم القصور الذاتي له.

4. التفكير الناقد: ذهبت عرين وفرح إلى مدينة الألعاب في عيد الفطر، وركبتا لعبة الحصان الدوار؛ حيث جلست عرين على حصان قرب الحافة الخارجية للصفيحة الدائرية المتحركة للعبة؛ بينما جلست فرح على حصان في منتصف المسافة بين عرين ومحور الدوران الثابت. عند دوران اللعبة بسرعة زاوية ثابتة، أي الفتاتين: عرين أم فرح مقدار سرعتها الزاويّة أكبر؟

5. أُحلل وأستنتج: يوضح الشكل قوة محصلة (F) ثابتة المقدار تؤثر في الباب نفسه في مواقع واتجاهات مختلفة لثلاث حالات. أُحدد الحالة/الحالات التي يفتح فيها الباب، والحالة/الحالات التي لا يفتح فيها، مفسّرًا إجابتي.



6. قطعة بوليسترين على شكل خارطة المملكة الأردنية الهاشمية. كيف أحدد مركز كتلتها عمليا؟

7. أُحلّل وأستنتج: يقفز غطاس عن لوح غطس متجها نحو سطح الماء في البركة. ولاحظت أنه بعد مغادرته لوح الغطس بدأ بالدوران، وضم قدميه وذراعيه نحو جسمه. أجيب عما يأتي:

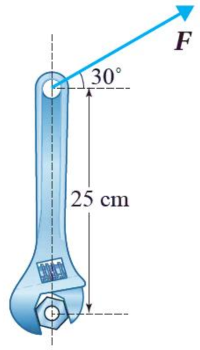
أ. لماذا ضم الغطاس قدميه وذراعيه نحو جسمه في أثناء أدائه لحركات الدوران؟

ب. ما الذي يحدث لزخمه الزاوي بعد ضم قدميه وذراعيه؟

ج. ما الذي يحدث لمقدار سرعته الزاوية بعد ضم قدميه وذراعيه؟

د. ما الذي يحدثُ لمقدار طاقته الحركية الدورانية بعد ضم قدميه وذراعيه؟

8. أستخدم الأرقام: تدور عربةٌ دولاب هوائي في مدينة الألعاب بعكس اتجاه حركة عقارب الساعة، فتمسح إزاحة زاوية مقدارُها $(1.5\ rad)$ خلال $(3.0\ s)$. أحسب مقدار السرعة الزاوية المتوسطة للعربة.

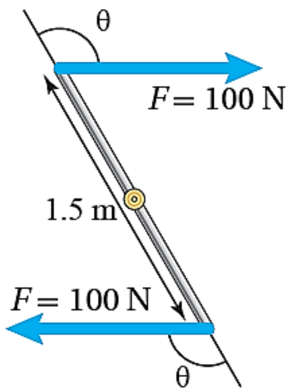


قوّةٌ تؤثّر في مفتاح شدّ.

9. أستخدم الأرقام: تستخدم فاتن مفتاح شد لشد صامولة؛ كما هو موضح في الشكل المجاور. أستعين بالشكل والبيانات المثبتة فيه للإجابة عما يأتي، علما أن مقدار العزم اللازم لفك الصامولة يساوي $(50.0\ N.m)$.

أ. أحسبُ مقدار القوة اللازم التأثير بها في طرف مفتاح الشد في الاتجاه الموضح في الشكل.

ب. أُحدد اتجاه دوران مفتاح الشد.



تؤثّر قوتان متساويتان مقدارًا ومتعاكستان اتّجاهًا في قضيبٍ فلزيّ.

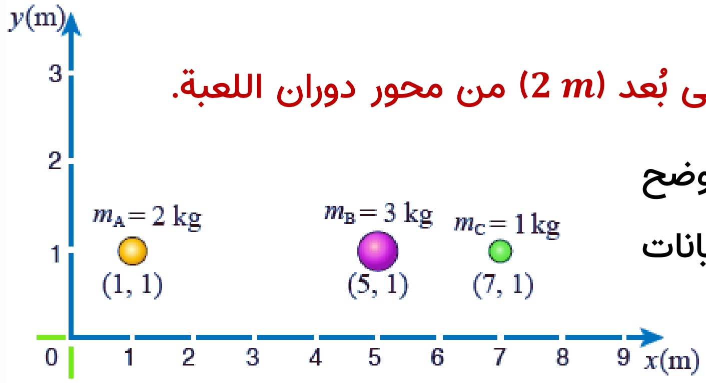
10. قوتان متوازيتان متساويتان مقدارا ومتعاكستان اتجاها، مقدار كل منهما $(100\ N)$، تؤثران عند طرفي قضيب فلزي طوله $(1.5\ m)$ قابل للدوران حول محور ثابت عند منتصفه عمودي على مستوى الصفحة، كما هو موضّح في الشكل. إذا كان العزم الكلي المؤثر في القضيب $(130\ N.m)$ اتجاه حركة عقارب الساعة؛ أحسب مقدار الزاوية (θ) التي يصنعها خط عمل كل قوة مع متجه موقع نقطة تأثيرها.

11. أستخدم الأرقام: تقف هناء على طرف القرص الدوار للعبة الحصان الدوار. إذا علمت أن كتلة قرص اللعبة بمحتوياته $(20 \times 10^2 kg)$ ونصف قطره $(4\ m)$، وسرعته الزاوية $(2\ rad/s)$، وكتلة هناء $(50\ kg)$، وبافتراض أن كتلة القرص موزعة بشكل منتظم، والنظام المكون من اللعبة معزول، أحسب مقدار ما يأتي:

أ. الزخم الزاوي الابتدائي للنظام.

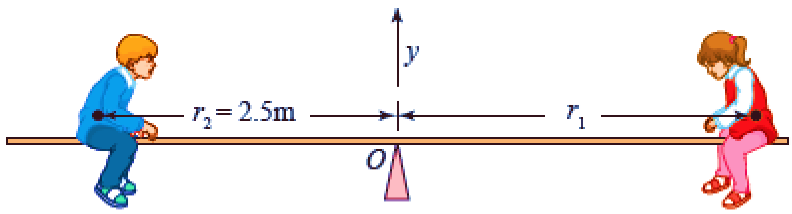
ب. السرعة الزاوية للعبة عندما تقف هناء على بُعد $(2\ m)$ من محور دوران اللعبة.

12. نظام يتكون من ثلاثة جسيمات؛ كما هو موضح في الشكل المجاور. أستعين بالشكل والبيانات المثبتة فيه لأُحدد موقع مركز كتلة النظام.



نظام مكون من ثلاثة جُسيمات على خط وّاحد.

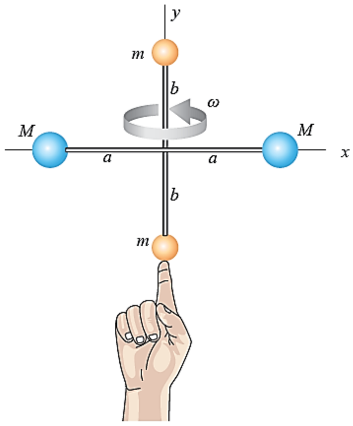
13. أُحلل وأستنتج: لعبة اتزان (see- saw) تتكون من لوح خشبي منتظم متماثل وزنه $(150\ N)$، يرتكز من منتصفه عند النقطة (O). تجلس نهى (F_{g1}) على أحد طرفي اللوح الخشبي على بعد (r_1) من نقطة الارتكاز؛ بينما يجلس شقيقها ماهر (F_{g2}) على الجهة المقابلة على بُعد (2.5 m) من نقطة الارتكاز. إذا علمت أن وزن نهى (205 N)، ووزن ماهر (300 N)، والنظام في حالة اتزان سكوني، واللوح الخشبي في وضع أُفقي كما هو موضح في الشكل؛ أحسب مقدار ما يأتي:



طفلان يجلسان على لعبة see – saw متزنة أفقيًا.

أ. القوة (F_N) التي تؤثر بها نقطة الارتكاز في اللوح الخشبي، وأُحدد اتجاهها.

ب. بُعد نهى عن نقطة الارتكاز كي يكون النظام في حالة اتزان سكوني.

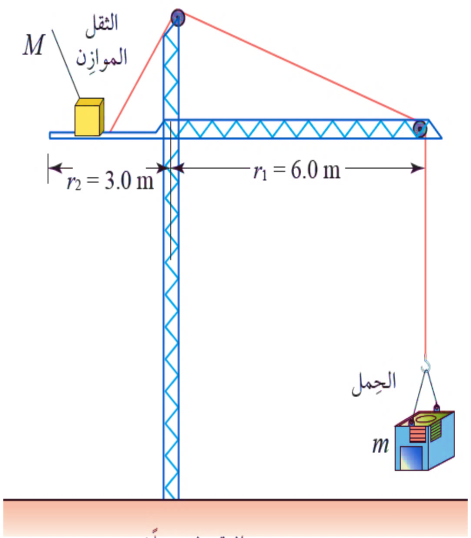


14. أُحلّل وأستنتج: نظام يتكون من أربع كرات صغيرة مثبتة في نهايات قضيبين مُهملي الكتلة. ويدور النظام حول محور كما هو موضح في الشكل المجاور بسرعة زاوية مقدارها $(2\ rad/s)$. إذا علمت أن $(a = b = 20\ cm)$، و$(m = 50\ g)$، و$(M = 100g)$، وأنصاف أقطار الكرات مهملة مقارنة بطولي القضيبين، بحيث يمكن عدها جسميات نقطية، أحسب مقدار ما يأتي:

أ. عزم القصور الذاتي للنظام. يدور النظام حول محور y.

ب. الطاقة الحركية الدورانية للنظام.

15. تُستخدم بعضُ أنواع الروافع لرفع الأثقال الكبيرة (الأحمال) إلى أعالي الأبراج والبنايات العالية. ويجب أن يكون العزم المُحصل المؤثر في هذه الرافعة صفرا، كي لا يوجد عزم مُحصل يعمل على إمالتها وسقوطها، لذا يوجد ثقل على الرافعة لتحقيق اتزانها، حيث يُحرك عادة هذا الثقل تلقائيا (بشكل أوتوماتيكي) عبر أجهزة استشعار ومحركات لموازنة الحمل بدقة. يبين الشكل المجاور رافعة في موقع بناء ترفع حمل مقداره $(3.0 \times 10^3 kg)$، ومقدار الثقل الموازن $(1.0 \times 10^4 kg)$. أستعين بالشكل والبيانات المثبتة فيه للإجابات عما يأتي مهملا كتلة الرافعة، علما أن الرافعة متزنة أُفقيا.



رافعة ترفع حِملًا.

أ. أُحدّد موقع الثقل الموازِن عندما يكون الحِمل مرفوعا عن الأرض وفي حالة اتزان سكوني.

ب. أُحدد مقدار أكبر كتلة يمكن أن تحملها الرافعة عندما يكون موقع الثقل الموازن عند طرفها.

إجابات الوحدة

.1	1. أ	2.د	3.ب	4. أ	5.أ	6. ج
	7.أ	8.ب	9. د	10. ب	11. ب	12. ج
	13. ب	14. أ	15. ب	16. ج	17. أ	

2. أ. لأن العزم الناتج عن كل من القوى المؤثرة في محور دوران جسم، والقوى التي يمر خط عملها في محور الدوران يساوي صفراً؛ لأن طول ذراع القوة يساوي صفراً.

ب. كلّما كانت كتلة الجسم (أو الجزء الأكبر من كتلته) أقرب إلى محور دورانه كان عزم قصوره الذاتي أقل.

3. الكتلة: تقيس ممانعة الجسم لتغيير حالته الحركية الانتقالية، وهي ثابتة لا تتغير.

عزم القصور الذاتي: يقيس ممانعة الجسم لتغيير حالته الحركية الدورانية، وهو يتغير بتغير محور الدوران.

4. مقدارا السرعة الزاوية لهما متساويان؛ إذ تقطع الفتاتان الزاوية نفسها خلال الفترة الزمنية نفسها.

5. الشكل (أ): يفتح الباب؛ لأن خط عمل القوة عمودي على محور الدوران، والبعد بين خط عمل القوة ومحور الدوران أكبر ما يمكن.

الشكل (ب): لا يفتح الباب؛ لأن خط عمل القوة يمر في محور الدوران وعزم القوة يساوي صفراً.

الشكل (جـ): لا يفتح الباب؛ لأن القوة تؤثر في محور الدوران، أي أن البُعد العمودي بين خط عمل القوة ومحور الدوران يساوي صفراً، فيكون عزمها صفراً.

6. أثقب ثقبين صغيرين متباعدين عند حافة قطعة البوليسترين، ثم أعلّقها بخيط من أحدهما رأسيًّا في الهواء، وعند توقّف قطعة البوليسترين عن التأرجح أرسم خطًّا عليها

على امتداد طول الخيط. ثم أعُلّق قطعة البوليسترين من الثقب الثاني وأُكرّر ما عملته سابقًا. يقع مركز الكتلة في منتصف المسافة بين سطحي قطعة البوليسترين تحت نقطة تقاطع هذين الخطين.

7. أ. لتقليل مقدار عزم قصوره الذاتي حيث يقل البعد بين كتلته ومحور دورانه، ممّا يُمكّنه من الدوران بسرعة زاوية أكبر.

ب. تؤثر قوة الجاذبية في مركز كتلته لذا لا ينشأ عنها عزم يؤثر في الغطّاس، ويكون العزم المحصّل المؤثر في الغطّاس صفراً فيبقى زخمه الزاوي محفوظًا أي لا يتغير زخمه الزاوي؛ فنقصان عزم القصور الذاتي يقابله زيادة في السرعة الزاوية.

ج. العزم المحصّل المؤثر في الغطّاس صفراً فيبقى رخمه الزاوي محفوظًا؛ أي لا يتغير زخمه الزاوي، ويؤدي نقصان عزم القصور الذاتي له إلى زيادة مقدار سرعته الزاوية.

د. بعد ضم قدميه وذراعيه يقل عزم قصوره الذاتي بينما يزداد مقدار سرعته الزاوية بالنسبة نفسها؛ فإذا قلّ مقدار عزم القصور الذاتي بمقدار النصف يتضاعف مقدار سرعته الزاوية مرّتان، وبما أن الطاقة الحركية الدورانية تتناسب طرديًّا مع مربّع مقدار السرعة الزاوية فإن مقدار طاقته الحركية الزاوية يزداد.

8. العربة تدور بعكس اتجاه حركة عقارب الساعة، فتكون الإزاحة الزاوية والسرعة الزاوية موجبتين.

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$= \frac{1.5}{3.0} = 0.5\, rad/s$$

9. أ.

$$F = \frac{\tau}{r \sin\theta}$$

$$= \frac{50.0}{0.25 \sin 60^{\circ}} = 230.9\, N \approx 231\, N$$

ب. سوف يدور مفتاح الشد باتجاه حركة عقارب الساعة، لذا يكون عزم القوة سالبًا.

10. القوتان متساويتان في المقدار ومتعاكستان في الاتجاه وخطّا عملهما غير متطابقين، لذا فإنهما تشكّلان ازدواجًا يعمل على تدوير القضيب باتجاه حركة عقارب الساعة. وأحسب مقدار الزاوية (θ) كما يأتي:

$$\tau_{couple} = 2F\,r\sin\theta$$

$$\sin\theta = \frac{\tau_{couple}}{2F\,r} = \frac{130}{2\times100\times0.75} = 0.866$$

$$\theta = \sin^{-1}(0.866) = 120^\circ \text{ or } 60^\circ$$

حيث $\sin 120^\circ = \sin 60^\circ = 0.866$، ولأن الزاوية منفرجة فيكون مقدارها(120°).

11. أ.

$$L_i = I_i\,\omega_i = \left(\frac{1}{2}M\,r^2 + m\,r^2\right)\omega_i$$

$$= \left(\frac{1}{2}\times 2\times 10^2\times(4)^2 + 50\times(4)^2\right)\times 2$$

$$= 4.8\times 10^3\ kg.m^2/s$$

ب. النظام معزول، فيكون العزم المحصّل المؤثر فيه صفراً، ويكون الزخم الزاوي محفوظًا، لذا فإن:

$$L_f = L_i$$

$$I_f\,\omega_f = 4.8\times 10^3$$

$$\omega_f = \frac{4.8\times10^3}{I_f} = \frac{4.8\times10^3}{\left(\frac{1}{2}M\,r^2 + m\left(\frac{r}{2}\right)^2\right)}$$

$$= \frac{4.8\times10^3}{\left(\frac{1}{2}\times2\times10^2\times(4)^2 + 50\times(2)^2\right)} = \frac{4.8\times10^3}{(1600+200)} = 2.67\ rad/s$$

12. أستخدم العلاقة الآتية لإيجاد الإحداثي (x_{CM}):

$$x_{CM} = \frac{m_A x_A + m_B x_B + m_C x_C}{m_A + m_B + m_C} = \frac{2\times1+3\times5+1\times7}{2+3+1} = 4\ m$$

13. أ. يتأثر اللوح الخشبي بأربع قوى، هي: وزن نهى (F_{g1})، ووزن ماهر (F_{g2})، ووزن اللوح (F_g) يؤثر في مركز كتلة اللوح وهو مركز الهندسي لأنه منتظم ومتماثل، والقوة العمودية (F_N) التي تؤثر بها نقطة الارتكاز في اللوح، كما هو موضح في مخطط الجسم الحر. وبما أنّ النظام متزن، ومقدار القوة العمودية غير معلوم فإنني أُطبّق الشرط الأول للاتزان، حيث القوة المحصلة المؤثرة فيه تساوي صفراً. وأُطبّق القانون الثاني لنيوتن في اتجاه محور y؛ لأنه لا توجد قوى تؤثر في اتجاه محور x.

$$\Sigma F_y = ma_y = 0$$

$$F_N - \left(F_g + F_{g1} + F_{g2}\right) = 0$$

$$F_N = F_g + F_{g1} + Fg_2$$

$$= 150 + 250 + 300$$

$$= 700\ N$$

ب. لإيجاد الموقع الذي يجب أن تجلس فيه نهى بحيث يكون النظام متزن أُطبّق الشرط الثاني للاتزان. إذا أخذت محوراً عمود يا على الصفحة عبر نقطة الارتكاز (O) (مركز كتلة اللوح) كمحور دوران لمعادلة العزم، فإن العزم الناتج عن كلّ من القوة العمودية (F_N) وقوة الجاذبية (F_g) يساوي صفراً. وأُلاحظ أن اللوح متزن أُفقيًّا لذا فإنّ $(\theta = 90)^o$.

$$\Sigma_\tau = 0$$

$$F_{g1}\, r_1 = F_{g2}\, r_2$$

$$250 \times r_1 = 300 \times 2.5$$

$$r_1 = \frac{750}{250}$$

$$= 3\ m$$

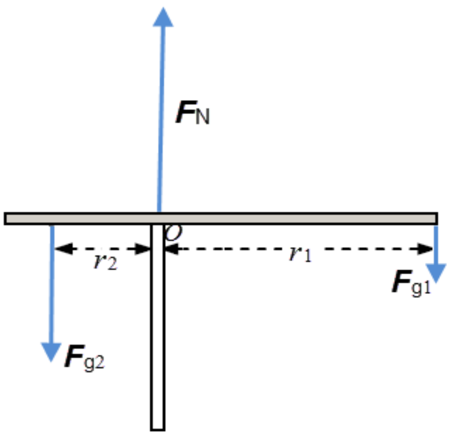
يجب أن تجلس نهى على بُعد ($3\ m$) يمين نقطة ارتكاز اللوح الخشبي كي يكون النظام متزنًا.

14. أ. أُلاحظ أن عزم القصور الذاتي للكرتين (m) يساوي صفراً؛ لأنهما تقعان على محور الدوران (y). وأحسب عزم القصور الذاتي في هذه الحالة كما يأتي:

$$I = M\,a^2 + M\,a^2 = 2M\,a^2$$
$$= 2 \times 100 \times 10^{-3} \times (20 \times 10^{-2})^2$$
$$= 8 \times 10^{-3}\ kg.m^2$$

ب. أحسب الطاقة الحركية الدورانية للنظام كما يأتي:

$$KE_R = \frac{1}{2} I\omega^2$$
$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 10^{-3} \times (2)^2 = 1.6 \times 10^{-2}\ J$$



15. أ. يتأثر ذراع الرافعة بثلاث قوى (كتلة الرافعة مهملة)، هي: وزن الحمل (F_{g1})، ووزن الثقل الموازن (F_{g2})، والقوة العمودية (F_N) المؤثرة في الرافعة عند نقطة الارتكاز (O)، كما هو موضح في الشكل. لإيجاد موقع الثقل الموا زن بحيث يكون النظام متزن أُطبّق الشرط الثاني للاتزان. إذا أخذت محوراً عموديا على الصفحة عبر نقطة الارتكاز (O) كمحور دوران لمعادلة العزم، فإن العزم الناتج عن القوة العمودية (F_N) المؤثرة في اللوح يساوي صفراً. وأُلاحظ أن ذراع الرافعة متزن أُفقيًّا لذا فإن $(\theta = 90)^o$.

$$\Sigma_\tau = 0$$
$$F_{g1}\,r_1 = F_{g2}\,r_2$$
$$3.0 \times 104 \times 6.0 = 1.0 \times 10^5 \times r_2$$
$$r_2 = \frac{18\times10^4}{1\times10^5}$$
$$= 1.8\ m$$

يجب أن يكون موقع الثقل الموزان على بُعد $(1.8\ m)$ يسار نقطة الارتكاز (O) كي يكون النظام متزنًا .

ب. موقع الثقل الموزان عند أبعد نقطة عن نقطة الارتكاز $(r_2 = 3.0\ m)$، ومقدار الثقل (m) هو المجهول. أُطبّق الشرط الثاني للاتزان حول المحور (O).

$$\Sigma_\tau = 0$$

$$F_{g1}\, r_1 = F_{g2}\, r_2$$

$$F_{g1} \times 6.0 = 1.0 \times 10^5 \times 3.0$$

$$F_{g1} = \frac{3.0 \times 105}{6.0}$$

$$= 5.0 \times 10^4\ N$$

$$m_2 = \frac{F_{g1}}{g} = \frac{5.0\times10^4}{10} = 5.0 \times 10^3\ kg$$

أسئلة تفكير

1] أضع دائرة حول الإجابة الصحيحة لكل جملة مما يأتي؟

1. يكون جسم واقع تحت تأثير عزم ازدواج عندما:

أ. يكون متزنا، أي تكون القوة المحصلة والعزم المحصل المؤثر ان فيه يساويان صفرا.

ب. تؤثر فيه قوتان لهما المقدار نفسه والاتجاه نفسه، وخطا عملهما متطابقان.

ج. تؤثر فيه قوتان لهما المقدار نفسه، متعاكستان في الاتجاه، وخطأ عملهما غير متطابقين.

د. تؤثر فيه قوتان لهما المقدار نفسه، والاتجاه نفسه، وخطأ عملهما غير متطابقين.

2. تستخدم رؤي مفكا طوله $(30.0\ cm)$، لفتح غطاء علبة بالتأثير في طرف المفك بقوة مقدارها $(80.0\ N)$ عمودياً عليه. إن مقدار العزم الذي تؤثر به رؤي بوحدة $N.m$ يساوي:

أ. 24　　ب. 2.67　　جـ 2400　　د.0

3. الزاوية التي يصنعها الخط الواصل بين الجسم ونقطة الأصل مع الخط المرجعي (محور $+x$) تسمى:

أ. الإزاحة الزاوية　　ب. الموقع الزاوي　　جـ السرعة الزاوية　　د. الزاوية الحرجة

4. البعد العمودي بين خط عمل القوة ومحور الدوران يسمى:

أ. الإزاحة الزاوية　　ب. الموقع الزاوي　　جـ العزم　　د. ذراع القوة

5. يجلس خالد $(60.0\ kg)$ وعاهد $(50.0\ kg)$ على طرفي لعبة see-saw متزنة أفقيا، تتكون من قضيب فلزي منتظم يرتكز عند نقطة في منتصفه. إذا كان بُعد خالد $(1.5\ m)$ عن نقطة الارتكاز، فإن بعد عاهد عن النقطة نفسها بوحدة m يساوي:

أ. 1.25　　ب. 1.8　　جـ 3.0　　د.2.0

6. السرعة الزاوية لجسم يتحرك حركة دورانية عند لحظة معينة تساوي $(-5\ rad/s)$، وتسارعه الزاوي عند اللحظة نفسها $(3\ rad/s^2)$. أصف حركة هذا الجسم بأنه:

أ. يدور باتجاه حركة عقارب الساعة بتسارع.

ب. يدور باتجاه حركة عقارب الساعة بتباطؤ.

جـ. يدور بعكس اتجاه حركة عقارب الساعة بتسارع.

د. يدور عكس اتجاه حركة عقارب الساعة بتباطؤ.

7. يدور إطار سيارة بعكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول محور دوران ثابت عمودي عليه ويمر في مركزه. أي الجمل الآتية صحيحة في ما يتعلق بحركة الإطار:

أ. تزداد السرعة الزاوية لأجزاء الإطار بالاقتراب من محور الدوران.

ب. تزداد السرعة الزاوية لأجزاء الإطار بالابتعاد عن محور الدوران.

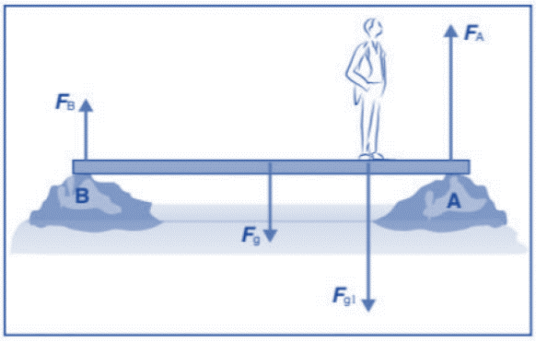
جـ. يكون لأجزاء الإطار جميعها السرعة الزاوية نفسها.

د. السرعة الزاوية لبعض أجزاء الإطار موجبة، ولأجزاء أخرى سالبة حسب بعدها عن محور الدوران.

2] أحسبُ: لتدوير مقبض صنبور الماء، أثرت فيه بقوتين مقدار كل منهما (3.0 N) باتجاهين متعاكسين، وعمودياً على طول المقبض. إذا علمت أن طول المقبض $(8.0\ cm)$، فما مقدار عزم الازدواج المؤثر في مقبض الصنبور.

3] أستخدم المتغيرات: في أثناء مسابقة يدور مُتزلج على الجليد حول نفسه بسرعة زاوية ابتدائية (ω_1). وفي نهاية العرض ضم المتزلج يديه نحو جسمه فأصبح مقدار عزم قصوره الذاتي النهائي مساوياً نصف مقدار عزم قصوره الذاتي الابتدائي. كم يصبح مقدار سرعته الزاوية النهائية مقارنة بمقدار سرعته الزاوية الابتدائية بإهمال تأثير عزم قوة احتكاك الزلاجات مع الجليد؟ أفسر إجابتي.

4] يوضح الشكل المجاور جسراً خشبياً منتظما متماثلاً طوله $(8.0\ m)$، ووزنه $(200\ N)$، يرتكز طرفيه على ضفتي نهر. إذا وقف شخص وزنه $(800\ N)$ على بُعد $(2\ m)$ من الطرف (A)، وكان اللوح متزنا؛ أحسب مقدار ما يأتي:



أ. القوة العمودية المؤثرة في الطرف (A) من الجسر.

ب. القوة العمودية المؤثرة في الطرف (B) من الجسر.

إجابة أسئلة التفكير

1]

1. ج	2. أ	3. ب	4. د
5. ب	6. ب	7. ج	

2]

$$t_{couple} = 2F\, r \sin\theta$$

$$= 2 \times 3.0 \times 4.0 \times 10^{-2} \sin 90^{o} = 0.24\ N.m$$

3] أفترض أن قوى الاحتكاك مع الجليد مهملة كما هو معُطى في السؤال، لذا يُمكن التعامل مع النظام على أنه معزول، ويكون الزخم الزاوي محفوظ، و $(I_f = \frac{1}{2} I)i$، لذا فإن:

$$L_i = L_f$$

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f$$

$$I_i\omega_i = \frac{1}{2} I_i\omega_f$$

$$\omega_f = 2\omega_i$$

بما أن الزخم الزاوي محفوظ فإن نقصان عزم القصور الذاتي يؤدي إلى زيادة مقدار السرعة الزاوية، حيث $(I\omega = constant)$.

4]

أ. تؤثر في الجسر أربع قوى: القوة العمودية المؤثرة في الطرف (A) من الجسر (F_A)، و(F_B) القوة العمودية المؤثرة في الطرف (B) من الجسر، و(F_{g1}) وزن الشخص، و(F_g) وزن الجسر يؤثر في منتصفه عند مركز كتلته كون الجسر منتظم متماثل. وبما أن النظام في

حالة اتزان سكوني، فإنني أطبق الشرط الثاني للاتزان حول محور عمودي على الصفحة عبر الطرف (B) للجسر؛ لأجد مقدار (F_A).

إن العزم الناتج عن القوة العمودية (F_B) يساوي صفرا، لأن محور الدوران يمر في نقطة تأثيرها. وألاحظ أن الجسر متزن أفقيا لذا فإن $(\theta = 90)$.

$$\Sigma \mathrm{t}_{(\mathrm{B})} = 0$$

$$F_A r - F_g r_{CM} - F_{g1} r_1 = 0$$

$$F_A \times 8.0 = 200 \times 4.0 + 800 \times 6.0$$

$$F_A = 700N$$

ب. النظام في حالة اتزان سكوني، لذا فإن القوة المحصلة المؤثرة فيه تساوي صفرا، وأطبق القانون الثاني لنيوتن على الجسر في اتجاه محور y لأجد مقدار القوة (F_B)؛ لأنه لا توجد قوى تؤثر في اتجاه محور x.

$$\Sigma \mathrm{F_y} = m a_y = 0$$

$$F_A + F_B - (F_g + F_{g1}) = 0$$

$$F_B = F_g + F_{g1} - F_A$$

$$F_B = 200 + 800 - 700 = 300N$$

المصطلحات

....

....

....

....

....

....

أفكار مهمــة

....

....

....

....

....

....

القوانيـــــن

☐ أسئلة لم أفهمها:

السؤال (رقم)	صفحة	السبب (بعد مراجعة الأستاذ)	سأتذكر (بعد مراجعتك لنفسك)

☐ أسئلة يجب مراجعتها عند دراسة الامتحان:

السؤال (رقم)	صفحة	مراجعة (1)	مراجعة (2)	مراجعة (3)
		اكتفيت	اكتفيت	اكتفيت
مثال: 1	1	✗	✓	