المرجع في الرياضيات

للصف الثاني ثانوي العلمي

كتاب الطالب

الفصل الأول

الوحدة الثانية (تطبيقات التفاضل)

يعتبر مرجعاً للطلاب ومعلمي المادة

الأستاذ: معتصم ابراهيم

0788586401

الوحدة الثانية: تطبيقات التفاضل

الدرس الأول: المعدلات المرتبطة

مسألة اليوم: (صفحة 74)

تستعمل المعادلة $S = \frac{\sqrt{hm}}{19}$ لحساب المساحة التقريبية لسطح جسم الإنسان، حيث h ثابت طوله بالسنتيميتر ، و S كتلته بالكيلو جرام .

يتبع خالد حمية غذائية تجعله غذائية تجعله يخسر من كتلته $2kg$ شهرياً ، ما معدل النقصان في مساحة سطح جسمه عندما تصبح كتلته $70kg$ ، علما بأن طوله $170cm$ ؟

$$\frac{dm}{dt} = -2kg/month$$

$$m = 70kg$$

$$h = 170cm$$

$$\frac{dS}{dt} = \text{المطلوب}$$

$$S = \frac{\sqrt{hm}}{19}$$

$$S = \frac{\sqrt{170m}}{19}$$

$$S = \frac{\sqrt{170}}{19}\sqrt{m}$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\sqrt{170}}{19} \times \frac{\frac{dm}{dt}}{2\sqrt{m}}$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\sqrt{170}}{38\sqrt{m}} \times \frac{dm}{dt}$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\sqrt{170}}{38\sqrt{70}} \times -2$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\sqrt{170}}{38\sqrt{70}} \times -2$$

$$\frac{dS}{dt}=\frac{-\sqrt{170}}{19\sqrt{70}}$$

$$\frac{dS}{dt}=\frac{-\sqrt{170}}{19\sqrt{70}}$$

$$\frac{dS}{dt}\approx-0.082\ cm^2/month$$

معدل تغير المساحة والحجم بالنسبة إلى الزمن

مثال 1: (صفحة 75)

عند سقوط قطرة ماء على مسطح مائي تتكون موجات دائرية متحدة المركز ، إذا كان نصف قطر إحدى الدوائر يزداد بمعدل $3cm/s$ ، فأجد كلا مما يأتي :

1) معدل تغير محيط الدائرة عندما يكون نصف قطرها $5cm$.

- نفرض نصف القطر r وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق $r=5cm$
- نفرض معدل تغير نصف القطر $\frac{dr}{dt}=3cm/s$ وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق
- نفرض محيط الدائرة C وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق
- نفرض معدل تغير محيط الدائرة $\frac{dC}{dt}$ وهو المطلوب

العلاقة الرئيسة في السؤال هي قانون محيط الدائرة:

$$C=2\pi r$$

$$\frac{dC}{dt}=2\pi\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dC}{dt}=2\pi(3)$$

$$\frac{dC}{dt}=6\pi\ cm/s$$

إذن يزداد محيط الدائرة بمعدل $6\pi\ cm/s$ عندما يكون نصف قطرها $5\ cm$.

2) معدل تغير مساحة الدائرة عندما يكون نصف قطرها $9cm$.

- نفرض نصف القطر $r = 9cm$ وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق

- نفرض معدل تغير مساحة الدائرة $\frac{dA}{dt}$ وهو المطلوب

العلاقة الرئيسة في السؤال هي قانون مساحة الدائرة:

$$A = \pi r^2$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi(9)(3)$$

$$\frac{dA}{dt} = 54\pi\ cm^2/s$$

أتحقق من فهمي: (صفحة 76)

تنفخ ماجدة بالوناً على شكل كرة ، فيزداد حجمه بمعدل $80\ cm^3/s$ ، أجد معدل زيادة نصف قطر البالون عندما يكون نصف القطر $6cm$.

- الشكل: كرة

- نفرض نصف القطر $r = 6cm$ وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق

- نفرض معدل تغير نصف القطر $\frac{dr}{dt}$ وهو المطلوب

- نفرض حجم الكرة V وهو متغير .

- نفرض معدل تغير حجم الكرة $\frac{dv}{dt} = 80\ cm^3/s$ وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق

العلاقة الرئيسة في السؤال هي قانون حجم الكرة =

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$80 = 4\pi(6)^2(\frac{dr}{dt})$$

$$80 = 144\pi(\frac{dr}{dt})$$

$$\frac{80}{144\pi} = \frac{144\pi}{144\pi}(\frac{dr}{dt})$$

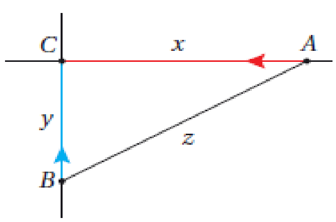
$$\frac{dr}{dt} = \frac{80}{144\pi}$$

$$\frac{dr}{dt} = 0.55\pi\ cm/s$$

معدل تغير المسافة بالنسبة إلى الزمن

مثال 2: (صفحة 77)

تتحرك السيارة A في اتجاه الغرب بسرعة 80Km/h وتتحرك السيارة B في اتجاه الشمال بسرعة 100Km/h وهما تتجهان نحو تقاطع مروري، أجد معدل تغير البعد بين السيارتين عندما تكون السيارة A والسيارة B على بعد 0.3Km و 0.4Km (على الترتيب) من التقاطع .



- الشكل: مثلث قائم الزاوية
- طول الضلع القائم الأول $x = 0.3\ km$ وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق
- التغير بطول الضلع $\frac{dx}{dt} = 80\ km/h$ وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق
- طول الضلع القائم الثاني $y = 0.4\ km$ وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق
- التغير بطول الضلع $\frac{dy}{dt} = 100\ km/h$ وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق
- المطلوب: التغير بطول الضلع الثالث $\frac{dz}{dt}$

العلاقة الرئيسة في السؤال هي قانون نظرية فيثاغورس للمثلث القائم الزاوية

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}}{2\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{2(0.3)(-80) + 2(0.4)(-100)}{2\sqrt{(0.3)^2 + (0.4)^2}}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{-48 - 80}{2\sqrt{0.25}}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{-128}{1}$$

$$\frac{dz}{dt} = -128\ Km/h$$

اذن تقترب السيارتان إحداهما من الاخر بمعدل 128km/h عندما تكون السيارة A والسيارة B على بعد 0.3km و 0.4km (على الترتيب) من التقاطع.

أتحقق من فهمي: (صفحة 78)

تحركت السيارة A والسيارة B في الوقت نفسه ومن النقطة نفسها بحيث اتجهت السيارة A نحو الشمال بسرعة 45Km/h ,واتجهت السيارة B نحو الشرق بسرعة 40km/h، أجد معدل تغير البعد بين السيارتين بعد ساعتين من انطلاقهما .

- الشكل: مثلث قائم الزاوية
- طول الضلع القائم الأول $x = 40 \times 2 = 80\ km$ وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق
- التغير بطول الضلع $\frac{dx}{dt} = 40\ km/h$ وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق
- طول الضلع القائم الثاني $y = 45 \times 2 = 90km$ وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق
- التغير بطول الضلع $\frac{dy}{dt} = 45\ km/h$ وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق
- المطلوب : التغير بطول الضلع الثالث $\frac{dz}{dt}$

العلاقة الرئيسة في السؤال هي قانون نظرية فيثاغورس للمثلث القائم الزاوية

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}}{2\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{(80)(40) + (90)(45)}{\sqrt{(80)^2 + (90)^2}}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{3200 + 4050}{\sqrt{6400 + 8100}}$$

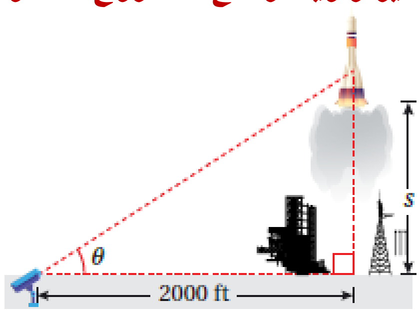
$$\frac{dz}{dt} = \frac{7250}{\sqrt{14500}}$$

$$\frac{dz}{dt} \approx 60.21\ Km/h$$

معدل تغير الزاوية بالنسبة إلى الزمن:

مثال 3 من الحياة: (صفحة 78)

رصدت كاميرا مثبتة عند مستوى سطح الأرض لحظة إطلاق صاروخ رأسياً إلى الأعلى ، وقد أعطي ارتفاعه بالاقتران : $s(t) = 50\ t^2$ ، حيث s الموقع بالأقدام ، و t الزمن بالثواني ، إذا كانت الكاميرا تبعد مسافة $2000\ ft$ عن منصة الإطلاق ، فأجد معدل تغير زاوية ارتفاع الصاروخ 10 ثوان من انطلاقه .



- الشكل: مثلث قائم الزاوية
- نفرض s موقع الصاروخ
- نفرض θ زاوية ارتفاع الصاروخ

المطلوب: أجد معدل تغير زاوية

العلاقة : $\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{s}{2000}$

نشتق اقتران الموقع لإيجاد السرعة:

$$s(t) = 50\ t^2$$

$$v(t) = \boxed{\frac{ds}{dt} = 100\ t}$$

- طول الضلع القائم الأول $x = 2000\ ft$ وهو ثابت يعوض بعد الاشتقاق

- طول الضلع القائم الثاني y وهو يمثل الاقتران $s(t) = 50\, t^2$
- المطلوب $\frac{d\theta}{dt}$

$$\tan\theta = \frac{s}{2000}$$

$$\sec^2\theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2000} \times \frac{ds}{dt}$$

$$\left[\frac{1}{\cos^2}\theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2000} \times \frac{ds}{dt}\right] \cos^2\theta$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\cos^2\theta}{2000} \times \frac{ds}{dt}$$

عدد المجاهيل في العلاقة 2 بالتالي نحتاج لعلاقة ثانوية لتقليل عدد المجاهيل.

$$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

ولكن الوتر غير موجود بالمعطيات لذلك، *نستعين بعلاقة ثانوية (نظرية فيثاغورس) لإيجاد طول الضلع الثالث (الوتر) .*

$$z = \sqrt{y^2 + x^2}$$

$$z = \sqrt{(50\, t^2)^2 + (2000)^2}$$

$$z = \sqrt{(50\, (10)^2)^2 + (2000)^2}$$

$$z = \sqrt{(5000)^2 + (2000)^2}$$

$$\boxed{z = \sqrt{(5000)^2 + (2000)^2} \quad \text{طول الوتر}}$$

$$\cos\theta = \frac{2000}{\sqrt{(5000)^2 + (2000)^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{(5)^2 + (2)^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{25+4}}$$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{29}}}$$

نعوض القيم في العلاقة الرئيسية لإيجاد المطلوب $\frac{d\theta}{dt}$:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\cos^2\theta}{2000} \times \frac{ds}{dt}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{(\frac{2}{\sqrt{29}})^2}{2000} \times 100\,t$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{(\frac{2}{\sqrt{29}})^2}{2000} \times 100\,(10)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\frac{4}{29}}{2}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2}{29}\ rad/s$$

إذن معدل تغير زاوية ارتفاع الصاروخ عندما $t = 10$ هو: $\frac{d\theta}{dt} = \frac{2}{29} rad/s$

اتحقق من فهمي : (صفحة 80)

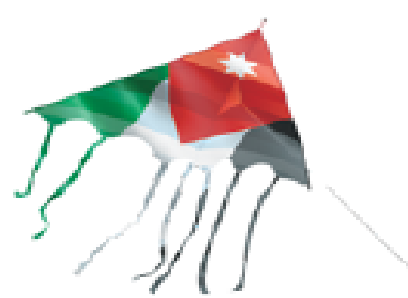
أمسك ولد ببكرة خيط طائرة ورقية تحلق على ارتفاع $50m$ فوق سطح الأرض ، وتتحرك أفقياً بسرعة $2m/s$. أجد معدل تغير الزاوية بين الخيط والمستوى الأفقي عندما يكون طول الخيط $100m$ ، علماً بأن ارتفاع يد الولد عن الأرض $1.5m$.

$x = ?$

$\frac{dx}{dt} = 2$

$y = 50 - 1.5 = 48.5$

$L = 100$



$$\frac{d\theta}{dt} = \text{المطلوب}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$\tan\theta = \frac{48.5}{x}$$

$$\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt} = -\frac{48.5}{x^2}\times\frac{dx}{dt}$$

$$\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt} = -\frac{48.5}{x^2}\times\frac{dx}{dt}$$

عدد المجاهيل في العلاقة 2 بالتالي نحتاج لعلاقة ثانوية لتقليل عدد المجاهيل.

$$\sec\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$$

$$\sec^2\theta = \frac{L^2}{x^2}$$

$$\frac{L^2}{x^2}\times\frac{d\theta}{dt} = -\frac{48.5}{x^2}\times\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{L^2}{x^2}\times\frac{d\theta}{dt} = -\frac{48.5}{x^2}\times\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{48.5}{x^2}\times\frac{dx}{dt}\times\frac{x^2}{L^2}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{48.5}{L^2}\times\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{48.5}{(100)^2}\times 2$$

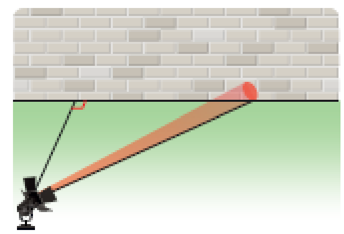
$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{48.5}{5000}$$

$$\boxed{\frac{d\theta}{dt} \approx -0.0097\ rad/s}$$

معدل التغير بالنسبة إلى الزمن والحركة الدائرية:

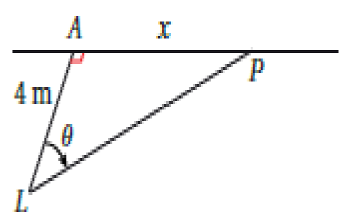
مثال 4: (صفحة 80)

يدور مصباح مثبت بالأرض حول نفسه 3 دورات في الدقيقة ، ويبعد مسافة $4m$ عن جدار مستقيم كما في الشكل المجاور، أجد سرعة تحرك بقعة ضوء المصباح على الجدار عندما تكون على بعد $8m$ من أقرب نقطة إلى المصباح على الجدار أثناء حركتها مبتعدة عن هذه النقطة .



المطلوب : $\frac{dx}{dt}$

- العلاقة الرئيسية هي $\tan\theta$



$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$\tan\theta = \frac{x}{4}$$

$$x = 4\tan\theta$$

$$\frac{dx}{dt} = 4\sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dt}$$

عدد المجاهيل في العلاقة 3 بالتالي نحتاج لعلاقات ثانوية لتقليل عدد المجاهيل.

- لإيجاد معدل تغير الزاوية $\frac{d\theta}{dt}$ **وهو يمثل السرعة الزاوية**

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\pi \times \frac{\text{عدد الدورات}}{\text{الزمن}}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\pi \times \frac{3}{1}$$

$$\boxed{\frac{d\theta}{dt} = 6\pi \ rad/min}$$

- لإيجاد $\sec^2\theta$ **نستخدم متطابقة فيثاغورس :** $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$\tan\theta = \frac{8}{4}$$

$$\tan\theta = 2$$

$$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$$

$$\sec^2\theta = 1 + (2)^2$$

$$\boxed{\sec^2\theta = 5}$$

بتعويض القيم $\boxed{\frac{d\theta}{dt} = 6\pi}$ و $\boxed{\sec^2\theta = 5}$ بالعلاقة الرئيسية التي تم اشتقاقها ، يتبقى مجهول واحد في المعادلة $\frac{dx}{dt}$ وهو المطلوب في السؤال .

$$\frac{dx}{dt} = 4\sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = 4\,(5)(6\pi)$$

$$\frac{dx}{dt} = 120\pi$$

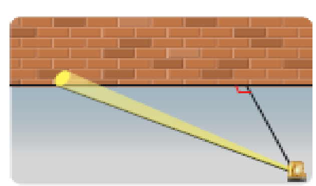
إذن تتحرك بقعة الضوء بسرعة $120\pi m/min$ عندما تكون على بعد $8m$ عن النقطة A أثناء حركتها مبتعدة عن هذه النقطة .

أتحقق من فهمي: (صفحة 82)

يدور مصباح مثبت بالأرض حول نفسه 4 دورات في الدقيقة ، ويبعد مسافة $3m$ عن جدار مستقيم كما في الشكل المجاور، أجد سرعة تحرك بقعة ضوء المصباح على الجدار عندما تكون على بعد $1m$ من أقرب نقطة إلى المصباح على الجدار أثناء حركتها مقتربة عن هذه النقطة .

المطلوب : $\frac{dx}{dt}$

- العلاقة الرئيسية هي $\tan\theta$



$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$\tan\theta = \frac{x}{3}$$

$x = 3\tan\theta$

$$\frac{dx}{dt} = 3\sec^2\theta \frac{d\theta}{dt}$$

عدد المجاهيل في العلاقة 3 بالتالي نحتاج لعلاقات ثانوية لتقليل عدد المجاهيل.

- لإيجاد معدل تغير الزاوية $\frac{d\theta}{dt}$ وهو يمثل السرعة الزاوية

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\pi \times \frac{\text{عدد الدورات}}{\text{الزمن}}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\pi \times \frac{4}{1}$$

$$\boxed{\frac{d\theta}{dt} = -8\pi \ \ rad/min}$$

- لإيجاد $\sec^2\theta$ نستخدم متطابقة فيثاغورس : $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$\tan\theta = \frac{1}{3}$$

$$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$$

$$\sec^2\theta = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\sec^2\theta = 1 + \frac{1}{9}$$

$$\boxed{\sec^2\theta = \frac{10}{9}}$$

بتعويض القيم $\boxed{\frac{d\theta}{dt} = -8\pi}$ و $\boxed{\sec^2\theta = \frac{10}{9}}$ بالعلاقة الرئيسية التي تم اشتقاقها ، يتبقى مجهول واحد في المعادلة $\frac{dx}{dt}$ وهو المطلوب في السؤال .

$$\frac{dx}{dt} = 3\sec^2\theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = 3\left(\frac{10}{9}\right)(-8\pi)$$

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{10}{3}\right)(-8\pi)$$

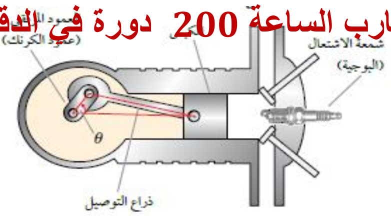
$$\frac{dx}{dt} = -\frac{80\pi}{3}$$

إذن تتحرك بقعة الضوء بسرعة $-\frac{80\pi}{3}\,m/min$ عندما تكون على بعد $1m$ عن النقطة A أثناء حركتها مقتربة عن هذه النقطة .

معدل التغير بالنسبة إلى الزمن وميكانيكا الحركة:

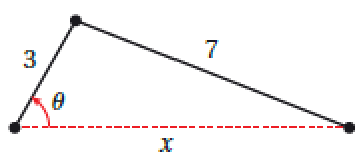
مثال 5: (صفحة 82)

يبين الشكل الآتي محرك سيارة يحتوي على ذراع توصيل طولها $7\ in$ ، وهي مثبتة بعمود مرفقي طوله $3\ in$. إذا دار العمود المرفقي عكس اتجاه دوران عقارب الساعة 200 دورة في الدقيقة ، فما سرعة المكبس عندما $\theta = \frac{\pi}{3}$ ؟



الشكل مثلث غير قائم الزاوية

- العلاقة الرئيسية: قانون جيوب التمام



$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\theta$$

$$7^2 = x^2 + 3^2 - 2(x)(3)\cos\theta$$

$$49 = x^2 + 9 - 6x\cos\theta$$

$$40 = x^2 - 6x\cos\theta$$

- ايجاد المشتقة للعلاقة الرئيسية

$$0 = 2x\frac{dx}{dt} - 6\left((x)\left(-\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\right) + (\cos\theta)\left(\frac{dx}{dt}\right)\right)$$

$$0 = 2x\frac{dx}{dt} + 6x\sin\theta\frac{d\theta}{dt} - 6\cos\theta\frac{dx}{dt}$$

$$6\cos\theta\frac{dx}{dt} - 2x\frac{dx}{dt} = 6x\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$(6\cos\theta - 2x)\frac{dx}{dt} = 6x\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{(6\cos\theta - 2x)}{(6\cos\theta - 2x)}\frac{dx}{dt} = \frac{6x\sin\theta\frac{d\theta}{dt}}{6\cos\theta - 2x}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{6x\sin\theta\frac{d\theta}{dt}}{6\cos\theta - 2x}$$

عدد المجاهيل في العلاقة 3 بالتالي نحتاج لعلاقات ثانوية لتقليل عدد المجاهيل.

- لإيجاد معدل تغير الزاوية $\frac{d\theta}{dt}$ وهو يمثل السرعة الزاوية

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\pi \times \frac{\text{عدد الدورات}}{\text{الزمن}}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\pi \times \frac{200}{1}$$

$$\boxed{\frac{d\theta}{dt} = 400\pi \ \ rad/min}$$

- لإيجاد x نستخدم العلاقة الرئيسية : $40 = x^2 - 6x\cos\frac{\pi}{3}$

$$40 = x^2 - 6x\cos\frac{\pi}{3}$$

$$40 = x^2 - 6x\frac{1}{2}$$

$$40 = x^2 - 3x$$

$$x^2 - 3x - 40 = 0$$

$$(x-8)(x+5) = 0$$

$$\boxed{x = 8}$$

$$x = -5$$

بما أن x يعبر عن مسافة ، نهمل القيمة السالبة ونختار $\boxed{x=8}$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{6x\sin\theta\frac{d\theta}{dt}}{6\cos\theta-2x}$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{6(8)\sin\frac{\pi}{3}(400\pi)}{6\cos\frac{\pi}{3}-2(8)}$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{48\times\frac{\sqrt{3}}{2}(400\pi)}{6\frac{\sqrt{3}}{2}-16}$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{24\times\sqrt{3}(400\pi)}{3\sqrt{3}-16}$$

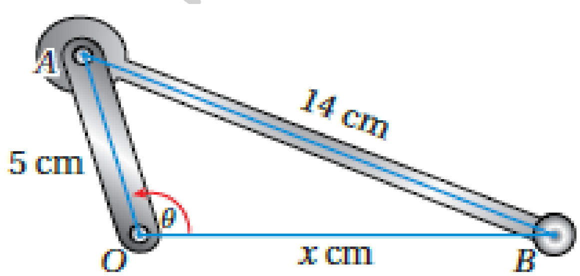
$$\frac{dx}{dt}=\frac{9600\pi\sqrt{3}}{-13}$$

$$\boxed{\frac{dx}{dt}\approx-4018}$$

أتحقق من فهمي: (صفحة 84)

في المخطط الاتي تمثل $\overline{AB}$ ذراع توصيل مكبس طولها $14\ cm$ في محرك سيارة، وتمثل $\overline{QA}$ عموداً مرفقياً طوله $5\ cm$، وهو مثبت بطرف ذراع التوصيل، ويدور حول النقطة O التي تبعد مسافة $x\ cm$ عن المكبس.

أجد سرعة دوران العمود المرفقي عندما يكون المكبس على بعد $11\ cm$ من النقطة O ، ويتحرك مقترباً منها بسرعة $120\ cm/s$ في تلك اللحظة .



من السؤال:

$x=11$

$\frac{dx}{dt}=-120cm/s$

المطلوب : $\frac{d\theta}{dt}$

الشكل مثلث غير قائم الزاوية

- العلاقة الرئيسية: قانون جيوب التمام

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\theta$$

$$14^2 = 11^2 + 5^2 - 2(11)(5)\cos\theta$$

$$196 = 121 + 25 - 110\cos\theta$$

$$-110\cos\theta = -50$$

$$\frac{110\cos\theta}{110} = \frac{-50}{110}$$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{-5}{11}}$$

- ايجاد المشتقة للعلاقة الرئيسية

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

$$\sin^2\theta = (1)^2 - \left(\frac{-5}{11}\right)^2$$

$$\sin^2\theta = 1 - \frac{25}{121}$$

$$\sin^2\theta = \frac{96}{121}$$

$$\sqrt{\sin^2\theta} = \sqrt{\frac{96}{121}}$$

$$\boxed{\sin\theta = \frac{\sqrt{96}}{11}}$$

- ايجاد المشتقة للعلاقة الرئيسية

$$0 = 2x\frac{dx}{dt} - 10\left((x)\left(-\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\right) + (\cos\theta)\left(\frac{dx}{dt}\right)\right)$$

$$0 = 2x\frac{dx}{dt} + 10x\sin\theta\frac{d\theta}{dt} - 10\cos\theta\frac{dx}{dt}$$

$$10\cos\theta\frac{dx}{dt} - 2x\frac{dx}{dt} = 10x\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$10\cos\theta\frac{dx}{dt} - 2x\frac{dx}{dt} = 10x\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{(10\cos\theta - 2x)\frac{dx}{dt}}{10x\sin\theta}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{(10\cos\theta - 2x)\frac{dx}{dt}}{10x\sin\theta}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\left(10\left(\frac{-5}{11}\right) - (2)(11)\right)(-120)}{(10)(11)\left(\frac{\sqrt{96}}{11}\right)}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\left(\left(\frac{-50}{11}\right) - 22\right)(-120)}{10\sqrt{96}}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\left(\left(\frac{-50}{11}\right) - \frac{242}{11}\right)(-120)}{10\sqrt{96}}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\left(-\frac{292}{11}\right)(-120)}{10\sqrt{96}}$$

$$\frac{d\theta}{dt} \approx \frac{3185.45}{97.97}$$

$$\frac{d\theta}{dt} \approx 32.5\ rad/s$$

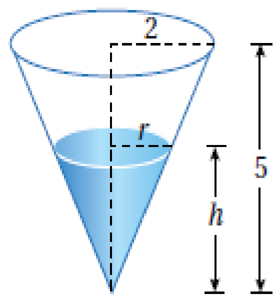
أذن يدور العمود المرفقي بسرعة $32.5\ rad/s$ تقريباً .

معدل تغير حجم السائل بالنسبة إلى الزمن:

مثال 6: (صفحة 85)

خزان ماء على شكل مخروط دائري قائم ، ارتفاعه $5m$ ، ونصف قطر قاعدته $2m$ ، ورأسه إلى الأسفل .

تسرب الماء من الخزان بمعدل $\frac{1}{12}m^3/min$. ما معدل تغير ارتفاع الماء في الخزان عندما يكون ارتفاعه $4m$ ؟



الشكل مخروط رأسه للأسفل

نصف قطر المخروط 2

نصف قطر سطح الماء r

ارتفاع المخروط 5

ارتفاع الماء في المخروط h وتساوي 4 وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق

حجم الماء في الخزان V

التغير في حجم الماء $\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{12}$

المطلوب : معدل تغير ارتفاع الماء في الخزان $\frac{dh}{dt}$

باستعمال تشابه المثلثات

$$\frac{r}{h} = \frac{2}{5}$$

$$r = \frac{2h}{5}$$

العلاقة الرئيسية هي حجم المخروط

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{2h}{5}\right)^2 h$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \frac{4h^2}{25} h$$

$$V=\frac{4\pi}{75}h^3$$

$$\frac{dV}{dt}=\left(\frac{4\pi}{75}\right)3h^2\frac{dh}{dt}$$

$$-\frac{1}{12}=\left(\frac{4\pi}{75}\right)3(4)^2\frac{dh}{dt}$$

$$-\frac{1}{12}=\frac{192\pi}{75}\frac{dh}{dt}$$

$$\left[-\frac{1}{12}=\frac{192\pi}{75}\frac{dh}{dt}\right]\quad\times\frac{75}{192\pi}$$

$$\frac{dh}{dt}=-\frac{75}{2304\pi}$$

$$\frac{dh}{dt}=-\frac{25}{768\pi}$$

إذن يتناقص ارتفاع الماء في الخزان بمعدل $\frac{25}{768\pi}m/min$ عندما يكون ارتفاع الماء $4m$.

أتحقق من فهمي: (صفحة 86)

خزان ماء على شكل مخروط دائري قائم ، ارتفاعه $10m$ ، ونصف قطر قاعدته $5m$ ،

صب الماء في الخزان بمعدل $\pi m^3/min$. ما معدل تغير ارتفاع الماء في الخزان عندما يكون ارتفاعه $8m$ ؟

الشكل مخروط رأسه للأسفل

نصف قطر المخروط 5

نصف قطر سطح الماء r

ارتفاع المخروط 10

ارتفاع الماء في المخروط h وتساوي 8 وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق

حجم الماء في الخزان V

التغير في حجم الماء $\pi = \frac{dV}{dt}$

المطلوب : معدل تغير ارتفاع الماء في الخزان $\frac{dh}{dt}$

باستعمال تشابه المثلثات

$$\frac{r}{h} = \frac{5}{10}$$

$$r = \frac{1}{2}h$$

المعادلة الرئيسية هي حجم المخروط

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2}h\right)^2 h$$

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{4}h^2\right)h$$

$$V = \frac{\pi}{12}h^3$$

$$\frac{dV}{dt} = \left(\frac{\pi}{12}\right)3h^2\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt}$$

$$\pi = \frac{\pi}{4}(8)^2\frac{dh}{dt}$$

$$\pi = 16\pi\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{\pi}{16\pi} = \frac{16\pi}{16\pi}\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{16}m/min$$

إذن يزداد ارتفاع الماء في الخزان بمعدل $\frac{1}{16}m/min$ عندما يكون ارتفاع الماء 8m .

أتدرب وأحل المسائل: (صفحة 86)

يزداد طول أحد أضلاع مستطيل بمعدل $2m/s$ ، ويقل طول ضلعه الآخر بمعدل $3m/s$ ، بحيث يحافظ المستطيل على شكله ، وفي لحظة معينة بلغ طول الضلع الأول $20cm$ ، وطول الضلع الثاني $50cm$.

1) ما معدل تغير مساحة المستطيل في تلك اللحظة؟

الشكل: مستطيل

القانون : مساحة المستطيل $A = xy$

$$\frac{dx}{dt} = 2\ cm/s$$

$$\frac{dy}{dt} = -3\ cm/s$$

$$x = 20\ cm/s$$

$$y = 50\ cm/s$$

$$A = xy$$

$$\frac{dA}{dt} = x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = 20(-3) + 50(2)$$

$$\frac{dA}{dt} = -60 + 100$$

$$\frac{dA}{dt} = 40\ cm^2/s$$

2) ما معدل تغير محيط المستطيل في تلك اللحظة؟

القانون : محيط المستطيل $C = 2x + 2y$

$$C = 2x + 2y$$

$$\frac{dC}{dt} = 2\frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dC}{dt} = 2(2) + 2(-3)$$

$$\frac{dC}{dt} = 4 + (-6)$$

$$\frac{dC}{dt} = -2\ cm/s$$

3) ما معدل تغير طول قطر المستطيل في تلك اللحظة؟

$$R^2 = x^2 + y^2$$

$$R = \sqrt{(20)^2 + (50)^2}$$

$$R = \sqrt{2900}$$

$$R = \sqrt{1000 \times 29}$$

$$R = 10\sqrt{29}$$

$$2R\frac{dR}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$2(10\sqrt{29})\frac{dR}{dt} = 2(20)(2) + 2(50)(-3)$$

$$2(10\sqrt{29})\frac{dR}{dt} = 80 + (-300)$$

$$\frac{2(10\sqrt{29})}{2(10\sqrt{29})}\frac{dR}{dt} = \frac{-220}{2(10\sqrt{29})}$$

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{11}{\sqrt{29}}\ cm/s$$

4) أي الكميات في المسألة متزايدة؟ أيهما متناقصة؟ أبرر إجابتي.

في اللحظة المذكورة تكون المساحة متزايدة (لأن معدل تغيرها موجب) ، بينما يتناقص كل من المحيط وطول القطر (لأن معدل نغير كل منهما سالب) .

مكعب طول ضلعه $10cm$ ، بدأ المكعب يتمدد ، فزاد طول ضلعه بمعدل $6cm/s$ ، وظل محافظاً على شكله :

5) أجد معدل تغير حجم المكعب بعد $4\ s$ من بدء تمدده .

الشكل: مكعب

القانون حجم المكعب : $V = x^3$

$x = 10\ cm$

$\frac{dx}{dt} = 6\ cm/s$

$t = 4\ s$

$\frac{dV}{dt} = \ ?$

$V = x^3$

$V = (10 + 6t)^3$

$\frac{dV}{dt} = 3(10 + 6t)^2(6)$

$\frac{dV}{dt} = 18(10 + 6(4))^2$

$\frac{dV}{dt} = 18(34)^2$

$\frac{dV}{dt} = 20808\ cm^3/s$

6) أجد معدل تغير مساحة سطح المكعب بعد $6s$ من بدء تمدده .

القانون مساحة المكعب : $V = 6x^2$

$V = 6(10 + 6t)^2$

$\frac{dV}{dt} = 12(10 + 6t)6$

$$\frac{dV}{dt} = 72(10 + 6(6))$$

$$\frac{dV}{dt} = 72(46)$$

$$\frac{dV}{dt} = 3312\ cm^2/s$$

وقود : خزان أسطواني الشكل، ارتفاعه $15m$ ، وقطر قاعدته $2m$ ملئ الخزان بالوقود بمعدل $500\ L/min$:

7) أجد معدل ارتفاع الوقود في الخزان عند أي لحظة.

الشكل: أسطواني

القانون : حجم الاسطوانة $V = \pi r^2 h$

ارتفاع الخزان $h = 15m$

قطر قاعدته $2r = 2m$

نصف قطر قاعدته $r = 1m$ ثابت يعوض قبل الاشتقاق

معدل التغير في الحجم $\frac{dV}{dt} = 500\ L/min$ وتساوي $\frac{dV}{dt} = 0.5\ m^3/min$

المطلوب : معدل ارتفاع الوقود في الخزان ?= $\frac{dh}{dt}$

$$V = \pi r^2 h$$

$$V = \pi(1)^2 h$$

$$V = \pi h$$

$$\frac{dV}{dt} = \pi \frac{dh}{dt}$$

$$0.5 = \pi \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{0.5}{\pi}$$

$$\frac{dh}{dt}=\frac{1}{2\pi}m/min$$

8) أجد معدل تغير المساحة الجانبية للوقود عند أي لحظة.

القانون : المساحة الجانبية للأسطوانة = محيط القاعدة × الارتفاع

المطلوب : معدل تغير المساحة الجانبية للوقود $\frac{dA}{dt}=?$

$$A=2\pi rh$$

$$A=2\pi(1)h$$

$$A=2\pi h$$

$$\frac{dA}{dt}=2\pi\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt}=2\pi\frac{1}{2\pi}$$

$$\frac{dA}{dt}=1\ m^2/min$$

9) علوم : يمثل الاقتران : $T(x)=\frac{200}{1+x^2}$ درجة الحرارة (بالسليسيوس) التي يشعر بها شخص على بعد x متراً من النار . إذا كان الشخص يبتعد عن النار بمعدل $2\ m/s$ ، فأجد سرعة تغير درجة الحرارة التي يشعر بها الشخص عندما يكون على بعد $5\ m$ من االنار .

العلاقة هي : $T(x)=\frac{200}{1+x^2}$

معدل التغير بالمسافة بين الشخص والنار $\frac{dx}{dt}=2\ m/s$

المسافة بين الشخص والنار عندما $x=5\ m$ متغير يعوض بعد الاشتقاق

المطلوب : سرعة تغير درجة الحرارة $\left.\frac{dT}{dt}\right|_{x=5}$

$$T(x) = \frac{200}{1+x^2}$$

$$T(x) = 200(1+x^2)^{-1}$$

$$\frac{dT}{dt} = -200(1+x^2)^{-2}(2x\frac{dx}{dt})$$

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{400x\frac{dx}{dt}}{(1+x^2)^2}$$

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{400(5)(2)}{(1+(5)^2)^2}$$

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{4000}{676}$$

$$\frac{dT}{dt} = -5.9\ C^{\circ}/s$$

أي أن درجة الحرارة التي يشعر بها ستقل بمعدل $5.9\ C^{\circ}/s$ تقريباً عندما يكون على بعد 5 أمتار من مصدر النار .

الآن : يسقط الرمل من حزام ناقل بمعدل $10\ m^3/min$ على قمة كومة مخروطية الشكل ، إذا كان ارتفاع الكومة يساوي دائماً ثلاثة أثمان طول قطر قاعدتها ، فأجد كلا مما يأتي :

10) سرعة تغير ارتفاع الكومة عندما يكون ارتفاعها $4\ m$.

الشكل مخروط رأسه للأعلى

معدل تغير حجم كومة الرمل $\frac{dV}{dt} = 10\ m^3/min$

ارتفاع كومة الرمل $(2r)$ $h = \frac{3}{8}$ وتساوي $h = \frac{3}{8}\ (2r)$

$$h = \frac{3}{8}\ (2r)$$

$$h = \frac{3}{4}\ r$$

$$r = \frac{4}{3}\ h$$

المطلوب : سرعة تغير ارتفاع الكومة ؟= $\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=4}$

العلاقة الرئيسية هي حجم المخروط

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$V=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{4}{3}\ h\right)^2\ h$$

$$V=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{4}{3}\ h\right)^2\ h$$

$$V=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{16}{9}\ h^2\right)h$$

$$V=\frac{16}{27}\ \pi h^3$$

$$\frac{dV}{dt}=(3)\frac{16}{27}\ \pi h^2\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt}=\frac{16}{9}\ \pi h^2\frac{dh}{dt}$$

$$10=\frac{16}{9}\ \pi(16)\frac{dh}{dt}$$

$$\left[10=\frac{256}{9}\ \pi\frac{dh}{dt}\right]\quad\times\frac{9}{256\pi}$$

$$\frac{dh}{dt}=\frac{90}{256\pi}$$

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=4}=\frac{45}{128\pi}\ m/min$$

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=4}=0.112\ \ m/min$$

إذن يزداد ارتفاع الكومة المخروطية عند تلك اللحظة بمعدل 0.112 متراً لكل ثانية تقريباً .

11) سرعة تغير طول نصف قطر قاعدة الكومة عندما يكون ارتفاعها $4\ m$.

$$r = \frac{4}{3}\ h$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{4}{3}\frac{dh}{dt}$$

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{h=4} = \frac{4}{3}\frac{dh}{dt}$$

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{h=4} = \frac{4}{3} \times \frac{45}{128\pi}$$

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{h=4} = \frac{15}{32\pi}\ m/min$$

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{h=4} = 0.149\ m/min$$

إذن يزداد نصف القطر عند تلك اللحظة بمعدل 0.149 متراً لكل ثانية تقريباً .

12) سرعة تغير مساحة قاعدة الكومة عندما يكون ارتفاعها $4\ m$.

المطلوب : سرعة تغير مساحة قاعدة الكومة ؟= $\left.\frac{dA}{dt}\right|_{h=4}$

$$h = \frac{3}{8}\ (2r)$$

$$A = \pi r^2$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r\frac{15}{32\pi}$$

عدد المجاهيل 2 نحتاج علاقة ثانوية لتقليل عدد المجاهيل:

$$h = \frac{3}{8}\ (2r)$$

$$4 = \frac{3}{8}\,(2r)$$

$$\left[4 = \frac{3}{4}\,r\right] \quad \times \frac{4}{3}$$

$$r = \frac{16}{3}$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi\left(\frac{16}{3}\right)\left(\frac{15}{32\pi}\right)$$

$$\frac{dA}{dt} = 5\ m^2/min$$

إذن تزداد مساحة قاعدة الكومة بمعدل $5\ m^2/min$ عندما يكون ارتفاعها 5 أمتار .

طيران: رصد مراقب الحركة الجوية في أحد المطارات طائرتين تحلقان على الارتفاع نفسه، وتقتربان من نقطة التقاء مسار حركتيهما في زاوية قائمة كما في الشكل المجاور . كانت الطائرة الأولى تسير بسرعة $450\ km/h$ ، في حين كانت الطائرة الثانية تسير بسرعة $600\ km/h$:

13) أجد معدل تغير المسافة بين الطائرتين في اللحظة التي تبعد فيها الطائرة الأولى مسافة $225\ km$ عن نقطة التقاء مسار حركة الطائرتين، في حين تبعد الطائرة الثانية مسافة $450\ km/h$ عن النقطة نفسها .

بعد الطائرة الأولى عن نقطة التقاء المسارين في لحظة ما هو $x = 225km$ وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق

معدل تغير (تقترب) المسافة بين الطائرة الأولى ونقطة الالتقاء $\frac{dx}{dt} = -450km/h$

بعد الطائرة الثانية عن نقطة التقاء المسارين في لحظة ما هو $y = 450km$ وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق

معدل تغير(تقترب) المسافة بين الطائرة الأولى ونقطة الالتقاء $\frac{dy}{dt} = -600km/h$

البعد بين الطائرتين هو $s = ?$

المطلوب : معدل تغير المسافة بين الطائرتين $\frac{ds}{dt} = ?$

العلاقة الرئيسة في السؤال هي نظرية فيثاغورس للمثلث القائم الزاوية

$$s = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{ds}{dt}=\frac{2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}}{2\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{ds}{dt}=\frac{x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{ds}{dt}=\frac{(225)(-450)+(450)(-600)}{\sqrt{(225)^2+(450)^2}}$$

$$\frac{ds}{dt}=\frac{-101250-270000}{\sqrt{50625+202500}}$$

$$\frac{ds}{dt}=\frac{-371250}{\sqrt{253125}}$$

$$\frac{ds}{dt}=\frac{-371250}{503.115}$$

$$\frac{ds}{dt}\approx -737.9\ Km/h$$

إذن في تلك اللحظة تقل المسافة بين الطائرتين بمعدل 737.9 كيلومتراً في الساعة .

14) هل يجب على مراقب الحركة الجوية توجيه إحدى الطائرتين لاتخاذ مسار مختلف؟ أبرر إجابتي.

يتم حساب الوقت الذي تحتاجه كل من الطائرتين للوصول لنقطة التقاء المسارين:

الزمن = $\frac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}}$

$$t_1=\frac{225}{450}$$

$$t_1=0.5\ h$$

$$t_2=\frac{450}{600}$$

$$t_2=0.75\ h$$

لن تصل الطائرتان لنقطة التقاء المسارين في وقت واحد بعد رصدهما من قبل المراقب الجوي، فإن اصطدامهما غير متوقع ولا يجب على مراقب الحركة الجوية اتخاذ أي إجراء بخصوص الطائرتين.

15) دراجات نارية : تحركت دراجتان في الوقت نفسه ، ومن النقطة نفسها ، على طريقين مستقيمين ، قياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{3} rad$. إذا كانت سرعة الدراجة الأولى $15km/h$، وسرعة الدراجة الثانية $20km/h$ ، فأجد سرعة ابتعاد كل منهما عن الأخرى بعد ساعتين من انطلاقهما .

المسافة المقطوعة للدراجة الأولى $x = 15t$ وهو ثابت يعوض قبل الاشتقاق.

المسافة المقطوعة للدراجة الثانية $y = 20t$ وهو ثابت يعوض قبل الاشتقاق.

سرعة الدراجة الأولى $\frac{dx}{dt} = 15km/h$ وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق

سرعة الدراجة الثانية $\frac{dy}{dt} = 20km/h$ وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق

الزاوية بينهما $\theta = \frac{\pi}{3} rad$

المطلوب : $\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=2} = ?$

الشكل مثلث غير قائم الزاوية

- العلاقة الرئيسية: قانون جيوب التمام

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\frac{\pi}{3}$$

$$z = \sqrt{(15t)^2 + (20t)^2 - 2(15t)(20t)\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$z = \sqrt{225t^2 + 400t^2 - (30t)(40t)}$$

$$z = \sqrt{225t^2 + 400t^2 - (1200t^2)}$$

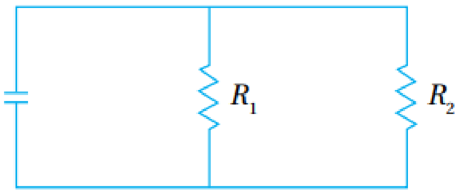
$$z = \sqrt{625t^2 - (1200t^2)}$$

$$z = 5\sqrt{23}t \ km/h$$

$$\frac{dz}{dt} = 5\sqrt{23} \ km/h$$

إذن بعد ساعتين من انطلاقهما تتباعد الدراجتان كل منهما عن الأخرى بسرعة $5\sqrt{23}$ كيلومتر كل ساعة.

16) كهرباء : تعطى المقاومة المكافئة R بالأوم للمقاومتين R_1 و R_2 الموصولتين على التوازي ، كما في الشكل المجاور ، بالعلاقة الآتية : $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$ ، إذا كانت R_1 و R_2 تزدادان بمعدل $0.3\Omega/s$ و $0.2\Omega/s$ على الترتيب ، فأجد معدل تغير R عندما $R_1=80$ و $R_2=100$



عندما $R_1=80$ و $R_2=100$ يكون :

معدل التغير في R_1 يساوي $\frac{dR_1}{dt}=0.3\Omega/s$

معدل التغير في R_2 يساوي $\frac{dR_2}{dt}=0.2\Omega/s$

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{80}+\frac{1}{100}$$

$$\frac{1}{R}=\frac{180}{8000}$$

$$\frac{1}{R}=\frac{90}{4000}$$

$$\frac{1}{R}=\frac{9}{400}$$

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$$

$$-\frac{\frac{dR}{dt}}{R^2}=-\frac{\frac{dR_1}{dt}}{{R_1}^2}-\frac{\frac{dR_2}{dt}}{{R_2}^2}$$

$$\frac{dR}{dt}=R^2\left(\frac{\frac{dR_1}{dt}}{{R_1}^2}+\frac{\frac{dR_2}{dt}}{{R_2}^2}\right)$$

$$\frac{dR}{dt}=\left(\frac{400}{9}\right)^2\left(\frac{0.3}{(80)^2}+\frac{0.2}{(100)^2}\right)$$

$$\frac{dR}{dt}=\left(\frac{160000}{81}\right)\left(\frac{0.3}{6400}+\frac{0.2}{10000}\right)$$

$$\frac{dR}{dt} = \left(\frac{160000}{81}\right)\left(\frac{3000}{64000000} + \frac{1280}{64000000}\right)$$

$$\frac{dR}{dt} = \left(\frac{160000}{81}\right)\left(\frac{4280}{64000000}\right)$$

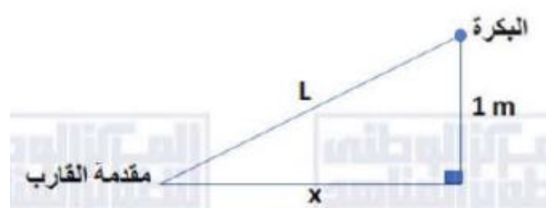
$$\frac{dR}{dt} = \left(\frac{16}{81}\right)\left(\frac{4280}{6400}\right)$$

$$\frac{dR}{dt} = \left(\frac{1}{81}\right)\left(\frac{4280}{400}\right)$$

$$\frac{dR}{dt} = \left(\frac{1}{81}\right)(10.70)$$

$$\frac{dR}{dt} \approx 0.132\ \Omega/\ s$$

17) قوارب : يسحب جمال قاربه إلى رصيف الاصطفاف باستعمال بكرة سحب ترتفع $1m$ عن مقدمة القارب ، إذا طوت البكره حبل السحب بسرعة $1m/s$ ، وكان القارب يبعد عن الرصيف مسافة $8m$ في لحظة ما ، فما سرعة اقتراب القارب من الرصيف عندئذ ؟



الشكل: مثلث قائم الزاوية

العلاقة الرئيسية: نظرية فيثاغورس

المسافة بين الرصيف والبكرة $y = 1m$ وهي ثابتة تعوض قبل الاشتقاق

المسافة بين الرصيف والقارب $x = 8m$ وهي متغيرة تعوض بعد الاشتقاق

معدل تغير المسافة بين القارب ورصيف الاصطفاف $\frac{dL}{dt} = -1m/s$

المطلوب : سرعة اقتراب القارب من الرصيف $\frac{dx}{dt} = ?$

$$L^2 = x^2 + y^2$$

$$L^2 = x^2 + (1)^2$$

$$L^2 = x^2 + 1$$

$$2L\frac{dL}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$$

$$2L\frac{dL}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{2x}{2x}\frac{dx}{dt} = \frac{2L}{2x}\frac{dL}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\frac{dL}{dt}$$

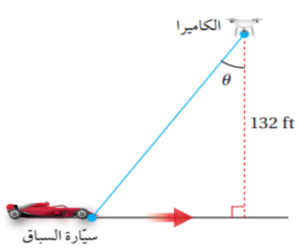
$$\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{8^2+1}}{8}\frac{dL}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{64+1}}{8}(-1)$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\sqrt{65}}{8}\ m/s$$

إذن في تلك اللحظة يقترب القارب من الرصيف بسرعة $\frac{\sqrt{65}}{8}\ m/s$

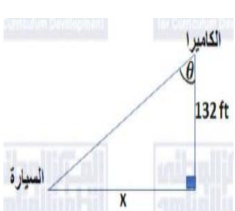
سباقات سيارات : ترتفع كاميرا عن الارض مسافة $132\ ft$ ، وترصد سيارة تتحرك على مضمار سباق ، وتبلغ سرعتها $264\ ft/s$ كما في الشكل المجاور :



18) أجد سرعة تغير الزاوية θ عندما تكون السيارة أسفل الكاميرا تماماً .

الشكل: مثلث قائم الزاوية

العلاقة الرئيسية : $\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$



المسافة بين الكاميرا والأرض $y = 132\ ft$ وهي ثابتة تعوض قبل الاشتقاق

المسافة بين السيارة والنقطة على الأرض $x = ?$ وهي متغيرة

معدل تغير المسافة بين السيارة والنقطة على الأرض (تقترب) $\frac{dx}{dt} = -264\ ft/s$

الزاوية $\theta = 0$ لأنه عندما تكون السيارة أسفل الكاميرا تماماً .

المطلوب : معدل تغير الزاوية θ ؟ $\frac{d\theta}{dt} =$

$$\tan\theta = \frac{x}{132}$$

$$\sec^2\theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{132}\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{132}\frac{dx}{dt} \times \cos^2 0$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{132}(-264) \times (1)$$

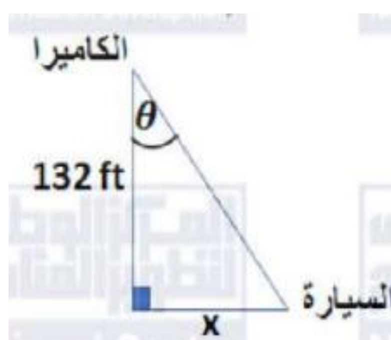
$$\frac{d\theta}{dt} = -2\ rad/s$$

19) أجد سرعة تغير الزاوية θ بعد نصف ثانية من مرور السيارة أسفل الكاميرا .

بعد نصف ثانية:

المسافة بين السيارة والنقطة على الأرض = السرعة × الزمن وتساوي $= 0.5 \times 264 = x$
132 وهي متغيرة .

معدل تغير المسافة بين السيارة والنقطة على الأرض (تبتعد) $\frac{dx}{dt} = 264\ ft/s$



$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\tan\theta = \frac{132}{132}$$

$$\tan\theta = 1$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\tan\theta = \frac{x}{132}$$

$$\sec^2\theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{132}\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{132}\frac{dx}{dt}\times\cos^2\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{132}(264)\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\frac{d\theta}{dt}=2\times\frac{1}{2}$$

$$\frac{d\theta}{dt}=1\ rad/s$$

يزداد قياس الزاوية θ بسرعة $1\ rad/s$ في تلك اللحظة .

20) فيزياء : يتحرك جسيم على منحنى الاقتران : $f(x)=2\sin\frac{\pi x}{2}$ ، وعند مروره بالنقطة $\left(\frac{1}{3},1\right)$ ، فإن الإحداثي x لموقعه يزداد بمعدل $\sqrt{10}$ وحدة طول لكل ثانية . أجد معدل تغير المسافة بين الجسيم ونقطة الأصل في هذه اللحظة.

العلاقة الرئيسية : المسافة بين نقطتين $L=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$

النقطة الأولى $\left(x,2\sin\frac{\pi x}{2}\right)$

النقطة الثانية (نقطة الأصل) $(0,0)$

$$\frac{dx}{dt}=\sqrt{10}$$

$$L=\sqrt{(x-0)^2+\left(2\sin\frac{\pi x}{2}-0\right)^2}$$

$$L=\sqrt{x^2+\left(2\sin\frac{\pi x}{2}\right)^2}$$

$$\frac{dL}{dt}=\frac{2x\frac{dx}{dt}+(2)(2)\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)\left(2\cos\frac{\pi x}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2\sqrt{x^2+(2\sin\frac{\pi x}{2})^2}}$$

$$\frac{dL}{dt}=\frac{2x\frac{dx}{dt}+4\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)\left(2\cos\frac{\pi x}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2\sqrt{x^2+(2\sin\frac{\pi x}{2})^2}}$$

$$\frac{dL}{dt}=\frac{(2)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\sqrt{10}\right)+4\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(2\sin\frac{\pi}{6}\right)^2}}$$

$$\frac{dL}{dt}=\frac{(2)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\sqrt{10}\right)+4\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+(2\frac{1}{2})^2}}$$

$$\frac{dL}{dt}=\frac{\frac{2}{3}\left(\sqrt{10}\right)+\left(\sqrt{3}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2\sqrt{\frac{1}{9}+1}}$$

$$\frac{dL}{dt}=\frac{\frac{2}{3}\left(\sqrt{10}\right)+\left(\sqrt{3}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)}{(2)\left(\frac{1}{3}+1\right)}$$

$$\frac{dL}{dt}=\frac{\frac{2}{3}\left(\sqrt{10}\right)+\left(\sqrt{3}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{2}{3}+2}$$

$$\frac{dL}{dt}=\frac{\frac{2}{3}\left(\sqrt{10}\right)+\left(\sqrt{3}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{8}{3}}$$

$$\frac{dL}{dt}=\left(\frac{2}{3}\left(\sqrt{10}\right)+\left(\sqrt{3}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\frac{3}{8}$$

$$\frac{dL}{dt}=\left(\frac{1}{4}\left(\sqrt{10}\right)+3\left(\sqrt{3}\right)\left(\frac{\pi}{16}\right)\right)$$

$$\frac{dL}{dt}=\frac{\frac{1}{3}\sqrt{10}+\left(2\frac{1}{2}\right)\left(2\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{9}+(2\frac{1}{2})^2}}$$

$$\frac{dL}{dt}=\frac{\frac{1}{3}\sqrt{10}+(1)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\right)}{\sqrt{\frac{1}{9}+1}}$$

$$\frac{dL}{dt}=\frac{\frac{1}{3}\sqrt{10}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\right)}{\frac{1}{3}+1}$$

$$\frac{dL}{dt}=\frac{\frac{1}{3}\sqrt{10}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\right)}{\frac{4}{3}}$$

$$\frac{dL}{dt}=\left(\frac{1}{3}\sqrt{10}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\right)\right)\times\frac{3}{4}$$

$$\frac{dL}{dt}=\left(\frac{\sqrt{10}}{3}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\right)\right)\times\frac{3}{4}$$

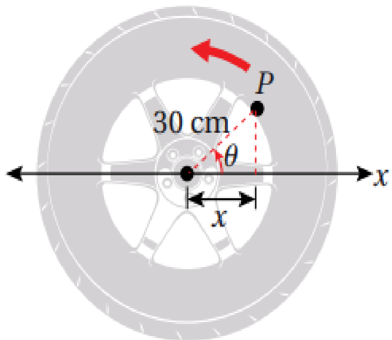
$$\frac{dL}{dt}=\left(\frac{\sqrt{10}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\right)\times\frac{3}{4}$$

$$\frac{dL}{dt}=\frac{\sqrt{10}}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{8}\pi$$

$$\frac{dL}{dt}=\frac{\sqrt{10}}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{8}\pi$$

سيارات : عجلة سيارة طول نصف قطرها الداخلي $30cm$ ، وهي تدور بمعدل 10 دورات في الثانية ، رسمت النقطة P على حافة العجلة كما في الشكل المجاور :

21) أجد $\frac{dx}{dt}$ بدلالة θ .



الشكل: دائرة بداخلها مثلث قائم الزاوية

عدد الدورات في الثانية 10

الضلع القائم الأول $x = ?$

الضلع القائم الثاني $y = ?$

الوتر نصف قطر الدائرة $r = 30cm$

العلاقة الرئيسية التي تربط بين المتغيرات والثوابت في المعطيات $\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

$$\cos\theta = \frac{x}{30}$$

$$x = 30\cos\theta$$

$$\frac{dx}{dt} = -30\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$

- لإيجاد معدل تغير الزاوية $\frac{d\theta}{dt}$ وهو يمثل السرعة الزاوية

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\pi \times \frac{\text{عدد الدورات}}{\text{الزمن}}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\pi \times \frac{10}{1}$$

$$\boxed{\frac{d\theta}{dt} = 20\pi \ rad/s}$$

$$\frac{dx}{dt} = -30\sin\theta\, 20\pi$$

$$\frac{dx}{dt} = -600\pi\sin\theta$$

22) أجد $\frac{dx}{dt}$ عندما $\theta = 45^\circ$

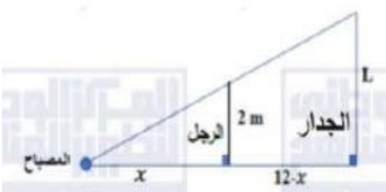
$$\frac{dx}{dt} = -600\pi \sin\theta$$

$$\frac{dx}{dt} = -600\pi \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{dx}{dt} = -600\pi \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{600\pi}{\sqrt{2}}\ cm/s$$

23) ضوء : مصباح مثبت بالأرض ، وهو يضيء على جدار يبعد عنه مسافة $12m$ ، إذا سار رجل طوله $2m$ من موقع المصباح إلى الجدار بسرعة $1.6m/s$ ، فأجد معدل تغير طول ظله على الجدار عندما يكون على بعد $4m$ من الجدار .



ليكن بعد الرجل عن المصباح أفقياً x وطول ظله على الجدار L

الشكل: مثلثين قائمين الزاوية

العلاقة: تشابه مثلثين

المثلث الصغير : طول الضلع القائم الأول (طول الرجل) $2m$ ، طول الضلع القائم الثاني(بعد الرجل $x = 12 - 4 = 8$ وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق .

المثلث الكبير : طول الضلع القائم الأول L ، طول الضلع القائم الثاني 12

معدل التغير في المسافة بين موقع المصباح إلى الجدار $\frac{dx}{dt} = 1.6m/s$

المطلوب : معدل تغير طول ظله على الجدار عندما يكون على بعد $4m$ من الجدار $\left.\frac{dL}{dt}\right|_{x=8} = ?$

$$\frac{L}{2} = \frac{12}{x}$$

$$\frac{L}{2} = \frac{12}{x}$$

$$xL = 24$$

$$L = \frac{24}{x}$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{-24\frac{dx}{dt}}{x^2}$$

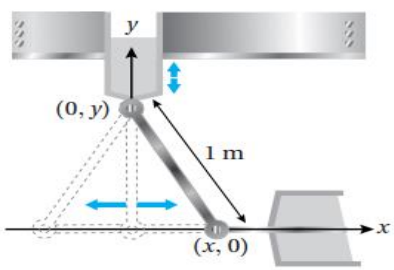
$$\frac{dL}{dt} = \frac{-24(1.6)}{8^2}$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{-38.4}{64}$$

$$\frac{dL}{dt} = -0.6\ m/s$$

إذن يتناقص طول ظل الرجل عند تلك اللحظة بمعدل 0.6 متر لكل ثانية .

هندسة ميكانيكية : يبين الشكل المجاور ذراعاً معدنية متحركة طولها $1m$ ، وإحداثيات نهايتيها $(x,0)$ و $(0,y)$ ، ويمثل الاقتران : $x(t) = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi t}{6}$ ، موقع طرف الذراع على المحور x ، حيث t الزمن بالثواني :



24) أجد أعلى نقطة على المحور y يصلها طرف الذراع .

يصل الطرف العلوي للذراع إلى أعلى نقطة عندما يكون وضع الذراع رأسياً ، وتكون النقطة المطلوبة هي $(0,1)$

25) أجد سرعة طرف الذراع الواقع على المحور y عندما يكون الطرف الأخر عند النقطة $(\frac{1}{4},0)$.

المطلوب : $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=\frac{1}{4}}$

$$\frac{1}{2}\sin\frac{\pi t}{6} = \frac{1}{4}$$

$$\sin\frac{\pi t}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cos^2 x = 1$$

$$\cos x = \mp\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$\cos x = \mp\sqrt{1-\frac{1}{4}}$$

$$\cos x = \mp\sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\cos x = \mp\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x(t) = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi t}{6}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\cos\frac{\pi t}{6}\times\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi t}{6}$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=\frac{1}{4}} = \frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi t}{6}$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=\frac{1}{4}} = \frac{\pi}{12}\left(\mp\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=\frac{1}{4}} = \left(\mp\frac{\sqrt{3}\pi}{24}\right)$$

من نظرية فيثاغورس :

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

$$2x\frac{dx}{dt} + 2\sqrt{1-x^2}\frac{dy}{dt} = 0$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{2x\frac{dx}{dt}}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{x\frac{dx}{dt}}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=\frac{1}{4}}=\frac{\left(\frac{1}{4}\right)\left(\mp\frac{\sqrt{3}\pi}{24}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}}$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=\frac{1}{4}}=\frac{\left(\mp\frac{\sqrt{3}\pi}{96}\right)}{\sqrt{\frac{15}{16}}}$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=\frac{1}{4}}=\frac{\left(\mp\frac{\sqrt{3}\pi}{96}\right)}{\frac{\sqrt{15}}{4}}$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=\frac{1}{4}}=\left(\mp\frac{\sqrt{3}\pi}{96}\right)\times\frac{4}{\sqrt{15}}$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=\frac{1}{4}}=\left(\mp\frac{\sqrt{3}\pi}{24}\right)\times\frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{3}}$$

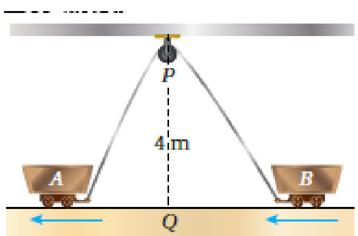
$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=\frac{1}{4}}=\left(\mp\frac{\pi}{24}\right)\times\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=\frac{1}{4}}=\mp\frac{\pi}{24\sqrt{5}}\ m/s$$

إذن يتحرك طرف الذراع الواقع على المحور y للأسفل أو للأعلى بمعدل $\frac{\pi}{24\sqrt{5}}\ m/s$ عندما $x=\frac{1}{4}$

مهارات التفكير العليا:

26) تبرير : ربطت العربتان A و B بحبل طوله $12m$ ، وهو يمر بالبكره P كما في الشكل المجاور. إذا كانت النقطة Q تقع على الأرض بين العربتين أسفل P مباشرة ، وتبعد عنها مسافة $4m$ ، وكانت العربة A تتحرك بعيداً عن النقطة Q بسرعة $0.5m/s$ ، فأجد سرعة اقتراب العربة B من النقطة Q في اللحظة التي تكون فيها العربة A على بعد $3m$ من النقطة Q ، مبرراً إجابتي .



الشكل: مثلثين قائمين الزاوية.

المثلث الأول : PQA

المثلث الثاني : PQB

المسافة بين QP تساوي 4 وهي ثابتة

المسافة بين QA تساوي $x = 3$ وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق .

المسافة بين QB تساوي $y = ?$ وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق .

معدل التغير في المسافة بين QA تساوي $\frac{dx}{dt} = 0.5m/s$ وهي متغيرة .

معدل التغير في المسافة بين QB تساوي $\frac{dy}{dt} = ?$ وهو المطلوب.

طول الحبل : $12m$

$$AP + BP = 12$$

$$\sqrt{x^2+16} + \sqrt{y^2+16} = 12$$

$$\sqrt{3^2+16} + \sqrt{y^2+16} = 12$$

$$\sqrt{9+16} + \sqrt{y^2+16} = 12$$

$$\sqrt{25} + \sqrt{y^2+16} = 12$$

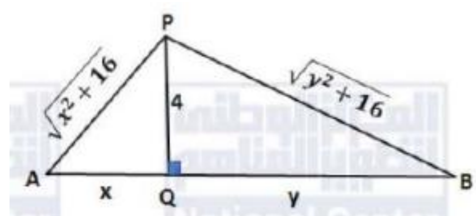
$$5 + \sqrt{y^2+16} = 12$$

$$\sqrt{y^2+16} = 7$$

$$y^2 + 16 = 49$$

$$y^2 = 33$$

$$y = \sqrt{33}$$



$$\sqrt{x^2+16}+\sqrt{y^2+16}=12$$

$$\frac{2x\frac{dx}{dt}}{2\sqrt{x^2+16}}+\frac{2y\frac{dy}{dt}}{2\sqrt{y^2+16}}=0$$

$$\frac{x\frac{dx}{dt}}{\sqrt{x^2+16}}+\frac{y\frac{dy}{dt}}{\sqrt{y^2+16}}=0$$

$$\frac{y\frac{dy}{dt}}{\sqrt{y^2+16}}=-\frac{x\frac{dx}{dt}}{\sqrt{x^2+16}}$$

$$\left[\frac{y\frac{dy}{dt}}{\sqrt{y^2+16}}=-\frac{x\frac{dx}{dt}}{\sqrt{x^2+16}}\right]\times\frac{\sqrt{y^2+16}}{y}$$

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{x\sqrt{y^2+16}}{y\sqrt{x^2+16}}\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{3\sqrt{\left(\sqrt{33}\right)^2+16}}{\sqrt{33}\sqrt{3^2+16}}\times 0.5$$

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{3\sqrt{33+16}}{\sqrt{33}\sqrt{9+16}}\times 0.5$$

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{3\sqrt{49}}{\sqrt{33}\sqrt{25}}\times 0.5$$

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{3\times 7}{\sqrt{33}\times 5}\times 0.5$$

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{21}{10\sqrt{33}}\ m/s$$

إذن تقترب العربة B من النقطة Q بسرعة مقدارها $\frac{21}{10\sqrt{33}}\ m/s$

27) تبرير : يركض عداء في مضمار دائري ، طول نصف قطره $100\ m$ ، بسرعة ثابتة مقدارها $7m/s$ ، ويقف صديقه على بعد $200\ m$ من مركز مضمار الركض . أجد معدل تغير المسافة بين العداء وصديقه عندما تكون المسافة بينهما $200\ m$.

الشكل: دائرة

طول نصف قطرها : $r = 100\ m$

مركز الدائرة C

العداء : A

صديقه: B

القوس الجزء من محيط الدائرة والذي يقع بين نصفي قطرين L

معدل التغير بالمسافة على القوس $\frac{dL}{dt} = 7m/s$

المسافة بين BC تساوي $200\ m$

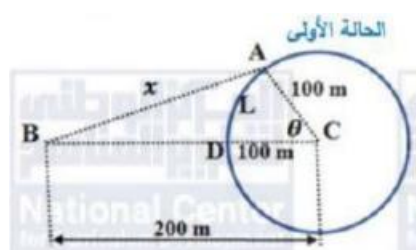
المسافة بين AB تساوي $x = 200$ وهي متغيرة .

الحالة الأولى:

المعطى (تكون L متناقصة) ويكون : $\frac{dL}{dt} = -7m/s$

المطلوب : التغير في المسافة بين AB ؟= $\frac{dx}{dt}$.

العلاقة: قانون طول القوس



$$L = r\theta$$

$$L = 100\theta$$

$$\frac{dL}{dt} = 100\frac{d\theta}{dt}$$

$$-7 = 100\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{7}{100}$$

$$\boxed{\frac{d\theta}{dt} = -0.07}$$

- العلاقة الرئيسية: قانون جيوب التمام

$$x^2 = (200)^2 + (100)^2 - 2(200)(100)\cos\theta$$

$$x^2 = 40000 + 10000 - 40000\cos\theta$$

$$x^2 = 50000 - 40000\cos\theta$$

$$40000\cos\theta = 50000 - x^2$$

$$\frac{40000}{40000}\cos\theta = \frac{50000 - x^2}{40000}$$

$$\cos\theta = \frac{50000 - x^2}{40000}$$

$$\cos\theta = \frac{50000 - (200)^2}{40000}$$

$$\cos\theta = \frac{50000 - 40000}{40000}$$

$$\cos\theta = \frac{10000}{40000}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{4}$$

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$$

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2}$$

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \frac{1}{16}}$$

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{15}{16}}$$

$$\boxed{\sin\theta = \frac{\sqrt{15}}{4}}$$

$$x^2 = 50000 - 40000\cos\theta$$

$$2x\frac{dx}{dt} = 40000\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{2x}{2x}\frac{dx}{dt} = \frac{40000\sin\theta}{2x}\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{20000\sin\theta}{x}\frac{d\theta}{dt}$$

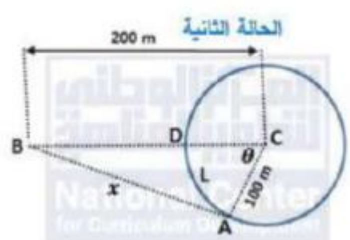
$$\frac{dx}{dt} = \frac{20000\frac{\sqrt{15}}{4}}{200}\times -0.07$$

$$\frac{dx}{dt} = 100\frac{\sqrt{15}}{4}\times -0.07$$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = -\frac{7\sqrt{15}}{4}\ m/s}$$

الحالة الثانية:

المعطى (تكون L متزايدة) ويكون : $\frac{dL}{dt} = 7m/s$



$$\frac{dx}{dt} = \frac{20000\frac{\sqrt{15}}{4}}{200}\times 0.07$$

$$\frac{dx}{dt} = 100\frac{\sqrt{15}}{4}\times 0.07$$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = \frac{7\sqrt{15}}{4}\ m/s}$$

إذن عندما تكون المسافة بين العداء وصديقه $200\ m$ ، فإنهما يقتربان من بعضهما أو يتباعدان عن بعضهما بسرعة مقدارها $\frac{7\sqrt{15}}{4}\ m/s$.

الدرس الثاني

القيم القصوى والتقعر

مسألة اليوم: (صفحة 90)

يمثل الاقتران $C(t) = 3.59 + 8(1.5e^{-0.4t-1} - e^{-0.6t})$ تركيز جرعة دواء في دم مريض بعد t ساعة من تناولها، حيث C مقيسة بوحدة $\mu g/ml$ ، أحدد الزمن الذي يكون فيه تركيز الدواء أكبر ما يمكن خلال أول 12 ساعة من تناول جرعة الدواء .

$$C(t) = 3.59 + 8(1.5e^{-0.4t-1} - e^{-0.6t})$$

المطلوب هو قيمة t التي يكون عندها الاقتران $C(t)$ قيمة عظمى مطلقة في $[0.12]$ لذا نجد القيم الحرجة:

$$\acute{C}(t) = 8(-0.6e^{-0.4t-1} + 0.6e^{-0.6t}) = 0$$

$$8(-0.6e^{-0.4t-1} + 0.6e^{-0.6t}) = 0$$

$$-0.6e^{-0.4t-1} + 0.6e^{-0.6t} = 0$$

$$0.6e^{-0.4t-1} = 0.6e^{-0.6t}$$

$$e^{-0.4t-1} = e^{-0.6t}$$

$$-0.4t - 1 = -0.6t$$

$$0.4t + 1 = 0.6t$$

$$0.2t = 1$$

$$0.2t = 1$$

$$t = 5$$

توجد قيمة حرجة وحيدة ضمن مجال الاقتران وهي $t = 5$

نقارن قيمة الاقتران عند النقطة الحرجة مع قيمتيه عند طرفي مجاله باستخدام الآلة الحاسبة.

$$C(0) = 3.59 + 8\left(1.5e^{-0.4(0)-1} - e^{-0.6(0)}\right) \approx 0.005$$

$$C(5) = 3.59 + 8\left(1.5e^{-0.4(5)-1} - e^{-0.6(5)}\right) \approx 3.79$$

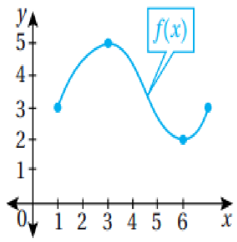
$$C(12) = 3.59 + 8\left(1.5e^{-0.4(12)-1} - e^{-0.6(12)}\right) \approx 3.62$$

وبما أن $C(5)$ هو أكبر هذه القيم فإن تركيز الدواء يكون أكبر ما يمكن بعد 5 ساعات من تناوله .

مثال1): (صفحة 92)

أجد القيم القصوى المحلية والقيم القصوى المطلقة (إن وجدت) للاقتران المعطى تمثيله البياني في كل مما يأتي:

1

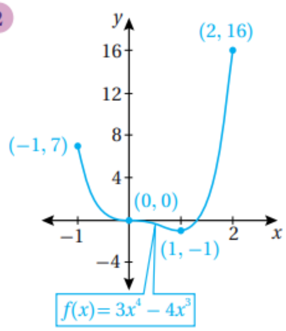


الأحظ من التمثيل البياني لمنحنى $f(x)$ وجود :

* قيمة عظمى محلية ومطلقة للاقتران f ، وهي : $f(3) = 5$.

* قيمة صغرى محلية ومطلقة للاقتران f ، وهي : $f(6) = 2$.

2

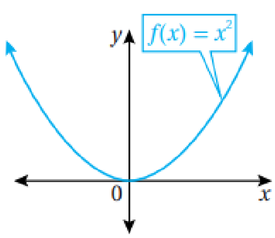


الأحظ من التمثيل البياني لمنحنى $f(x)$ وجود :

* قيمة صغرى محلية ومطلقة للاقتران f ، وهي : $f(1) = -1$.

* قيمة عظمى محلية ومطلقة للاقتران f ، وهي : $f(2) = 16$.
(ليست قيمة عظمى محلية، لأنها ليست داخلية، فهي طرف فترة).

3

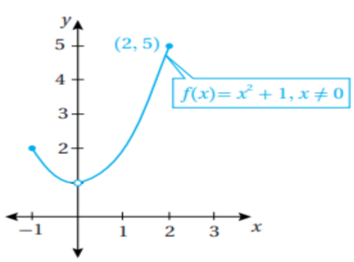


الأحظ من التمثيل البياني لمنحنى $f(x)$ وجود :

* قيمة صغرى محلية ومطلقة للاقتران f ، وهي : $f(0) = 0$.

* لا توجد قيمة عظمى (محلية ، أو مطلقة) للاقتران f .

4



الأحظ من التمثيل البياني لمنحنى $f(x)$ وجود :

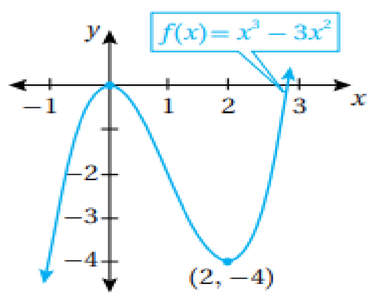
* قيمة عظمى مطلقة للاقتران f ، وهي : $f(2) = 5$.

* لا توجد قيمة صغرى (محلية ، أو مطلقة) للاقتران f .

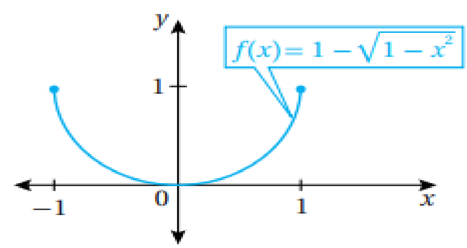
أتحقق من فهمي: (صفحة 93)

أجد القيم القصوى المحلية والقيم القصوى المطلقة (إن وجدت) للاقتران المعطى تمثيله البياني في كل مما يأتي :

a)



b)



a) ليس للاقتران f قيمة قصوى مطلقة .

للاقتران قيمة عظمى محلية عند $x = 0$ هي $f(0) = 0$

للاقتران قيمة صغرى محلية عند $x = 2$ هي $f(2) = -4$

b) للاقتران قيمة عظمى مطلقة عند $x = 1$ و $x = -1$ هي $f(\pm) = 1$

للاقتران قيمة صغرى محلية ومطلقة عند $x = 0$ هي $f(0) = 0$

مثال 2: (صفحة 95)

أجد القيمة العظمى المطلقة والقيمة الصغرى المطلقة (إن وجدت) لكل اقتران مما يأتي في الفترة المعطاة:

1) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2 \quad , [-2, 2]$

بما أن الاقتران f متصل على الفترة $[-2, 2]$ ، لإنه كثير حدود ، فإنه يمكنني إيجاد القيم القصوى المطلقة بإتباع الخطوات الآتية :

إيجاد القيم الحرجة للاقتران f المتصل على الفترة $(-2, 2)$.

1) الخطوة الاولى: إيجاد المشتقة:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$$

$$\acute{f}(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

2) الخطوة الثانية: مساواة المشتقة بالصفر:

$3x^2 - 6x - 9 = 0$

$3(x^2 - 2x - 3) = 0$

$3(x + 1)(x - 3) = 0$

$x + 1 = 0$

$\boxed{x = -1}$

$x - 3 = 0$

$\boxed{x = 3}$

بما أن $x = 3$ ليست ضمن مجال f ، فإنها تهمل ، وبما أنه لا توجد قيم تكون عندها f' غير موجودة ، فإنه توجد قيمة حرجة واحدة للإقتران f هي : $x = -1$.

3) الخطوة الثالثة: أجد قيم الاقتران f عند القيمة أو القيم الحرجة و عند طرفي الفترة .

$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 2$

$f(-1) = -1 - 3 + 9 + 2$

$\boxed{f(-1) = 7}$

$f(-2) = (-2)^3 - 3(-2)^2 - 9(-2) + 2$

$f(-2) = -8 - 12 + 18 + 2$

$\boxed{f(-2) = 0}$

$f(2) = (2)^3 - 3(2)^2 - 9(2) + 2$

$f(2) = 8 - 12 - 18 + 2$

$\boxed{f(2) = -20}$

4) الخطوة الرابعة: نقارن قيمته عند النقطة الحرجة مع قيمتيه عند طرفي المجال.

القيمة العظمى المطلقة للاقتران f في الفترة $(-2, 2)$ هي : $f(-1) = 7$ ، والقيمة الصغرى المطلقة له هي : $f(2) = -20$

2) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$, $[-1, 2]$

بما ان الاقتران f متصل على الفترة $[-1, 2]$ ، فإنه يمكنني إيجاد القيم القصوى المطلقة بإتباع الخطوات الآتية :

أيجاد القيم الحرجة للاقتران f المتصل على الفترة $(-1, 2)$

1) الخطوة الاولى: إيجاد المشتقة:

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3} x^{\frac{-1}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

الاحظ أنه لا توجد أصفار للمشتقة ، وأن المشتقة غير موجودة عندما $x = 0$ ، لأنها غير معرفة في هذه الحالة ، لذا توجد قيمة حرجة واحدة للاقتران f هي : $x = 0$ ، وقيمة الاقتران عندها هي :

$$\boxed{f(0) = 0}$$

2) الخطوة الثانية : أجد قيمتي الاقتران f عند طرفي الفترة .

$$f(-1) = (-1)^{\frac{2}{3}}$$

$$f(-1) = \sqrt[3]{(-1)^2}$$

$$f(-1) = \sqrt[3]{1}$$

$$\boxed{f(-1) = 1}$$

$$f(2) = (2)^{\frac{2}{3}}$$

$$f(2) = \sqrt[3]{(2)^2}$$

$$f(2) = \sqrt[3]{4}$$

$$\boxed{f(2) \approx 1.59}$$

3) الخطوة الثالثة: نقارن قيمته عند النقطة الحرجة مع قيمتيه عند طرفي المجال.

القيمة العظمى المطلقة للاقتران f في الفترة $(-1,2)$ هي : $f(2)=\sqrt[3]{4}$ ، والقيمة الصغرى المطلقة له هي : $f(0)=0$.

3) $f(x)=2\sin x-\cos 2x \quad ,[0,2\pi]$

بما أن الاقتران f متصل على الفترة $[0,2\pi]$ ، فإنه يمكنني إيجاد القيم القصوى المطلقة باتباع الخطوات الآتية :

أيجاد القيم الحرجة للاقتران f المتصل على الفترة $(0,2\pi)$

$f(x)=2\sin x-\cos 2x$

الخطوة الاولى: ايجاد المشتقة

$\acute{f}(x)=2\cos x+2\sin 2x$

الخطوة الثانية: مساواة المشتقة بالصفر

$2\cos x+2\sin 2x=0$

- ملاحظة: متطابقة ضعف الزاوية

$2\cos x+4\sin x\cos x=0$

- ملاحظة :بإخراج $2\cos x$ عامل مشترك

$2\cos x\,(1+2\sin x)=0$

$2\cos x=0$

$\boxed{\cos x=0}$

$\boxed{x=\frac{\pi}{2}\ ,\frac{3\pi}{2}}$

$1+2\sin x=0$

$\boxed{\sin x=-\frac{1}{2}}$

$\boxed{x=\frac{7\pi}{6}\ ,\frac{11\pi}{6}}$

3) الخطوة الثالثة: أجد قيم الاقتران f عند القيمة أو القيم الحرجة و عند طرفي الفترة .

$$f(0) = 2\sin(0) - \cos 2(0)$$

$$f(0) = 2(0) - (1)$$

$$\boxed{f(0) = -1}$$

$$f(2\pi) = 2\sin(2\pi) - \cos 2(2\pi)$$

$$f(2\pi) = 2(0) - (1)$$

$$\boxed{f(2\pi) = -1}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos 2\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2(1) - (-1)$$

$$\boxed{f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3}$$

$$f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 2\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) - \cos 2\left(\frac{7\pi}{6}\right)$$

$$f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 2\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{7\pi}{3}\right)$$

$$f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 2(-\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}$$

$$\boxed{f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{3}{2}}$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \cos 2\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2(-1) - (-1)$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2 + 1$$

$$\boxed{f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1}$$

$$f\left(\frac{11\pi}{6}\right)=2\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)-\cos 2\left(\frac{11\pi}{6}\right)$$

$$f\left(\frac{11\pi}{6}\right)=2\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)-\cos\left(\frac{11\pi}{3}\right)$$

$$f\left(\frac{11\pi}{6}\right)=2\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{11\pi}{6}\right)=(-1)-\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{f\left(\frac{11\pi}{6}\right)=-\frac{3}{2}}$$

4) الخطوة الرابعة: نقارن قيمه عند النقاط الحرجة مع قيمتيه عند طرفي المجال.

القيمة العظمى المطلقة للاقتران f في الفترة $(0,2\pi)$ هي : $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=3$.

القيمة الصغرى المطلقة له هي : $f\left(\frac{11\pi}{6}\right)=f\left(\frac{7\pi}{6}\right)=-\frac{3}{2}$

أتحقق من فهمي: (صفحة 99)

أجد القيمة العظمى المطلقة والقيمة الصغرى المطلقة (إن وجدت) لكل اقتران مما يأتي في الفترة المعطاة:

1) $f(x)=x^3-6x^2+5\ ,\ [-3,5]$

الخطوة الاولى: ايجاد المشتقة

$$\acute{f}(x)=3x^2-12x$$

الخطوة الثانية: مساواة المشتقة بالصفر

$$3x^2-12x=0$$

$$3x(x-4)=0$$

$$3x=0$$

$$\boxed{x=0}$$

$$x-4=0$$

$$\boxed{x=4}$$

قيم x الحرجة هي : $x = 0$ و $x = 4$

3) الخطوة الثالثة: أجد قيم الاقتران f عند القيمة أو القيم الحرجة و عند طرفي الفترة .

$$f(-3) = (-3)^3 - 6(-3)^2 + 5$$

$$f(-3) = -27 - 54 + 5$$

$$\boxed{f(-3) = -76}$$

$$f(4) = (4)^3 - 6(4)^2 + 5$$

$$f(4) = 64 - 96 + 5$$

$$\boxed{f(4) = -27}$$

$$f(0) = (0)^3 - 6(0)^2 + 5$$

$$\boxed{f(0) = 5}$$

4) الخطوة الرابعة: نقارن قيمه عند النقاط الحرجة مع قيمتيه عند طرفي المجال.

للاقتران قيمة صغرى مطلقة هي : $x = 3$ هي $f(-3) = -76$
وله قيمة عظمى محلية ومطلقة له هي : $x = 0$ هي $f(0) = 5$

2) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $[-8, 8]$

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$f'(x)$ لا تساوي صفرا لأي قيمة في $(-8, 8)$ ، وهي غير موجودة عند $x = 0$ وهذه هي القيمة الحرجة فقط .

$$f(-8) = \sqrt[3]{-8}$$

$$\boxed{f(-8) = -2}$$

$$f(8) = \sqrt[3]{8}$$

$\boxed{f(8) = 2}$

$f(0) = \sqrt[3]{0}$

$\boxed{f(0) = 0}$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند : $x = -8$ هي $f(-8) = -2$
وله قيمة عظمى مطلقة له عند : $x = 2$ هي $f(8) = 2$

3) $f(x) = \sin^2 x + \cos x \ \ , \ \ [0, 2\pi]$

الخطوة الاولى: ايجاد المشتقة

$\acute{f}(x) = 2\sin x \cos x - \sin x$

الخطوة الثانية: مساواة المشتقة بالصفر

$2\sin x \cos x - \sin x = 0$

$\sin x\,(2\cos x - 1) = 0$

$\sin x = 0$

$\boxed{x = \pi}$

$2\cos x - 1 = 0$

$2\cos x = 1$

$\cos x = \frac{1}{2}$

$\boxed{x = \frac{\pi}{3}}$ $\boxed{x = \frac{5\pi}{3}}$

3) الخطوة الثالثة: أجد قيم الاقتران f عند القيمة أو القيم الحرجة و عند طرفي الفترة .

$f(0) = \sin^2 0 + \cos 0$

$f(0) = 0 + 1$

$\boxed{f(0) = 1}$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin^2\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3}$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{4} + \frac{2}{4}$$

$$\boxed{f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{5}{4}}$$

$$f(\pi) = \sin^2\pi + \cos\pi$$

$$f(\pi) = 0 + (-1)$$

$$\boxed{f(\pi) = -1}$$

$$f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \sin^2\frac{5\pi}{3} + \cos\frac{5\pi}{3}$$

$$f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \sin^2\frac{5\pi}{3} + \cos\frac{5\pi}{3}$$

$$f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{3}{4} + \frac{2}{4}$$

$$\boxed{f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{5}{4}}$$

$$f(2\pi) = \sin^2 2\pi + \cos 2\pi$$

$$f(2\pi) = 0 + 1$$

$$\boxed{f(2\pi) = 1}$$

4) الخطوة الرابعة: نقارن قيمه عند النقاط الحرجة مع قيمتيه عند طرفي المجال.

للاقتران قيمة صغرى محلية ومطلقة هي : $x = \pi$ هي $f(\pi) = -1$

وله قيمة عظمى محلية ومطلقة له هي : $x = \frac{5\pi}{3}$ و $x = \frac{\pi}{3}$ هي $\frac{5}{4}$

ايجاد القيم القصوى المحلية:

مثال 3: (صفحة 101)

أجد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقتران : $f(x) = (x^2 - 3)e^x$.

بما أن الاقتران f متصل عند جميع الأعداد الحقيقية ، فإنه يمكنني إيجاد القيم القصوى المحلية وتحديد نوعها باستعمال اختبار المشتقة الأولى كما يأتي :

الخطوة الأولى : أجد القيم الحرجة للاقتران f .

$$f(x) = (x^2 - 3)e^x$$

$$\acute{f}(x) = (x^2 - 3)e^x + 2xe^x$$

$$\acute{f}(x) = (x^2 + 2x - 3)e^x$$

$$(x^2 + 2x - 3)e^x = 0$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \quad , \quad e^x = 0$$

$$(x - 1)(x + 3) = 0$$

$$x - 1 = 0$$

$$\boxed{x = 1}$$

$$x + 3 = 0$$

$$\boxed{x = -3}$$

بما أن $\acute{f} = 0$ عندما $x = 1, -3$ ، وعدم وجود قيم تكون عندها $\acute{f}$ غير موجودة ، فإن القيم الحرجة للاقتران f هي :

$$x = 1 \ , \quad x = -3$$

الخطوة الثانية: أبحث في إشارة المشتقة الأولى.

أختار بعض القيم التي هي أصغر من قيم x الحرجة وأكبر منها ، ثم أحدد إشارة المشتقة عند كل منها:

	$x < -3$	$-3 < x < 1$	$x > 1$
قِيَم الاختبار (x)	$x = -4$	$x = 0$	$x = 2$
إشارة $f'(x)$	$f'(-4) > 0$	$f'(0) < 0$	$f'(2) > 0$
تزايد الاقتران وتناقصه	مُتزايِد	مُتناقِص	مُتزايِد

الخطوة الثالثة: أجد القيم القصوى المحلية.

*** توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = -3$ وهي: $f(-3) = 6e^{-3}$.**

*** توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 1$ وهي: $f(1) = -2e$**

أتحقق من فهمي: (صفحة 102)

أجد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقتران: $f(x) = (x-1)e^x$

الخطوة الأولى : أجد القيم الحرجة للاقتران f .

$$f(x) = (x-1)e^x$$

$$f'(x) = (x-1)e^x + e^x$$

$$f'(x) = (xe^x - e^x) + e^x$$

$$f'(x) = xe^x - e^x + e^x$$

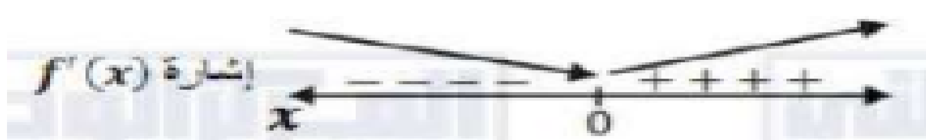
$$f'(x) = xe^x$$

$$xe^x = 0$$

$$\boxed{x = 0}$$

الخطوة الثانية: أبحث في إشارة المشتقة الأولى.

أختار بعض القيم التي هي أصغر من قيم x الحرجة وأكبر منها ، ثم أحدد إشارة المشتقة عند كل منها:



للاقتران قيمة حرجة وحيده وهي $x = 0$

$f(0) = (0-1)e^0$

$f(0) = -1$

الخطوة الثالثة: أجد القيم القصوى المحلية.

* توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 0$ وهي : $f(0) = -1$

مثال 4: (صفحة102)

أجد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقتران : $f(x) = (x^2-4)^{\frac{2}{3}}$

بما ان الاقتران f متصل عند جميع الأعداد الحقيقية فإنه يمكنني إيجاد القيم القصوى المحلية وتحديد نوعها باستعمال اختبار المشتقة الأولى كما يأتي :

الخطوة الأولى : أجد القيم الحرجة للاقتران f

$f(x) = (x^2-4)^{\frac{2}{3}}$

$\acute{f}(x) = \frac{2}{3}(x^2-4)^{\frac{-1}{3}}(2x)$

$\acute{f}(x) = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-4}}$

$\frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-4}} = 0$

$4x = 0$

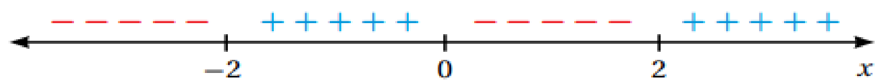
$\boxed{x = 0}$

بما أن $\acute{f} = 0$ عندما $x = 0$ ، و $\acute{f}$ غير موجودة عندما $x = \pm 2$ ، فإن القيم الحرجة للاقتران f هي :

$\boxed{x = -2}$, $\boxed{x = 0}$, $\boxed{x = 2}$

الخطوة الثانية: أبحث في إشارة المشتقة الأولى.

أختار بعض القيم التي هي أصغر من قيم x الحرجة وأكبر منها ، ثم أحدد إشارة المشتقة عند كل منها:



	$x < -2$	$-2 < x < 0$	$0 < x < 2$	$x > 2$
قِيَم الاختبار (x)	$x = -3$	$x = -1$	$x = 1$	$x = 3$
إشارة $f'(x)$	$f'(-3) < 0$	$f'(-1) > 0$	$f'(1) < 0$	$f'(3) > 0$
تزايد الاقتران وتناقصه	مُتناقِص ↘	مُتزايِد ↗	مُتناقِص ↘	مُتزايِد ↗

الخطوة الثالثة: إيجاد القيم القصوى المحلية

*** توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 0$ وهي: $f(0) = \sqrt[3]{16}$.**

*** توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = -2$ وهي: $f(-2) = 0$**

*** توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 2$ وهي: $f(2) = 0$**

أتحقق من فهمي: (صفحة 103)

أجد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقتران : $f(x) = \sqrt[3]{x-3}$

الخطوة الأولى : أجد القيم الحرجة للاقتران f

$$f(x) = \sqrt[3]{x-3}$$

$$f(x) = (x-3)^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x-3)^{-\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-3)^2}}$$

$f'(x)$ لا تساوي صفرا لأي عدد حقيقي x ، وهي غير موجودة عند $x = 3$ وهذه هي القيمة الحرجة فقط .

الخطوة الثانية: أبحث في إشارة المشتقة الأولى.

أختار بعض القيم التي هي أصغر من قيم x الحرجة وأكبر منها ، ثم أحدد إشارة المشتقة عند كل منها:

$$f'(4) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(4-3)^2}}$$

$f'(4) =$ موجبة

$$f'(2) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(2-3)^2}}$$

$f'(2) =$ موجبة

الخطوة الثالثة: إيجاد القيم القصوى المحلية

الاقتران f متزايد على f ولا يوجد له قيم قصوى محلية أو مطلقة ، النقطة $(3,0)$ نقطة حرجة لكنها ليست نقطة قيمة قصوى لعدم تغير إشارة المشتقة حولها .

التقعر:

مثال 5: (صفحة 106)

أجد فترات التقعر للأعلى وللأسفل ونقاط الانعطاف (إن وجدت) لمنحنى كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}$

الخطوة الأولى: أجد المشتقة الثانية للاقتران.

$$f(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}$$

$$f'(x) = -xe^{\frac{-x^2}{2}}$$

$$f''(x) = (-x)(-x)e^{\frac{-x^2}{2}} + e^{\frac{-x^2}{2}}(-1)$$

$$f''(x) = (x^2-1)e^{\frac{-x^2}{2}}$$

الخطوة الثانية : أجد قيم x **التي تكون عندها مشتقة الاقتران الثانية صفراً ، أو غير موجودة .**

لا توجد قيم تكون عندها المشتقة الثانية غير موجودة ، لذا اجد قيم x التي تكون عندها المشتقة الثانية صفراً .

$$(x^2 - 1) = 0$$

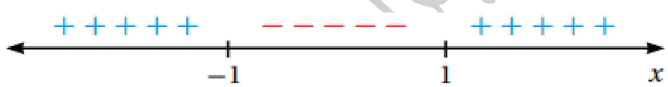
$$\boxed{x = \pm 1}$$

$$e^{\frac{-x^2}{2}} = 0$$

لا يوجد حل للمعادلة الثانية ، لأن $e^{\frac{-x^2}{2}} \neq 0$.

إذن قيم x *المطلوبة هي :* $x = \pm 1$

الخطوة الثالثة: أبحث في إشارة المشتقة الثانية.



	$x < -1$	$-1 < x < 1$	$x > 1$
قِيَم الاختبار (x)	$x = -2$	$x = 0$	$x = 2$
إشارة $f''(x)$	$f''(-2) > 0$	$f''(0) < 0$	$f''(2) > 0$
تقعُّر الاقتران	مُقعَّر للأعلى	مُقعَّر للأسفل	مُقعَّر للأعلى

الخطوة الرابعة: أجد فترات التقعر للأعلى وللأسفل.

* *منحنى الاقتران* f مقعر للأعلى على الفترة $(-\infty, -1)$ ، والفترة $(1, \infty)$.

* *منحنى الاقتران* f مقعر للأسفل على الفترة $(-1, 1)$.

الخطوة الخامسة: أجد نقاط الانعطاف.

توجد نقطتا انعطاف عندما $x = 1$ ، وعندما $x = -1$ ، وهما $(-1, e^{\frac{-1}{2}})$، و $(1, e^{\frac{-1}{2}})$، لأن الاقتران f متصل عند كلتا النقطتين ، وغير اتجاه تقعره عندهما .

2) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

أجد فترات التقعر للاقتران f ، وانتبه أن f غير معرف عندما $x = 0$.

الخطوة الأولى: أجد المشتقة الثانية للاقتران.

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

الخطوة الثانية : أجد قيم x التي تكون عندها مشتقة الاقتران الثانية صفراً ، أو غير موجودة .

لا توجد قيم تكون عندها المشتقة الثانية صفرا ، والمشتقة غير موجودة أيضا عندما $x = 0$ ، لأن f غير معرف عندها .

الخطوة الثالثة: أبحث في إشارة الاقتران.

− − − − − 0 + + + + + x

	$x < 0$	$x > 0$
قِيَم الاختبار (x)	$x = -1$	$x = 1$
إشارة $f''(x)$	$f''(-1) < 0$	$f''(1) > 0$
تقعُّر الاقتران	مُقعَّر للأسفل	مُقعَّر للأعلى

الخطوة الرابعة: أجد فترات التقعر للأعلى والأسفل.

*** منحنى الاقتران f مقعر للأعلى على الفترة $(0, \infty)$.**

*** منحنى الاقتران f مقعر للأسفل على الفترة $(-\infty, 0)$.**

الخطوة Aالخامسة: أجد نقاط الانعطاف.

لا يوجد نقاط انعطاف لمنحنى الاقتران.

أتحقق من فهمي: (صفحة 108)

أجد فترات التقعر للأعلى وللأسفل ونقاط الانعطاف (إن وجدت) لمنحنى كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = (x-2)^3(x-1)$

الخطوة الأولى: أجد المشتقة الثانية للاقتران.

$$f'(x) = (x-2)^3 + (x-1)3(x-2)^2$$

$$f''(x) = 3(x-2)^2 + (x-1)6(x-2) + 3(x-2)^2$$

$$f''(x) = (x-2)^2 + (x-1)2(x-2) + (x-2)^2$$

$$f''(x) = (x-2)((x-2) + (x-1)2 + (x-2))$$

الخطوة الثانية : أجد قيم x التي تكون عندها مشتقة الاقتران الثانية صفراً ، أو غير موجودة .

$$(x-2)\big((x-2) + (x-1)2 + (x-2)\big) = 0$$

$$x - 2 = 0$$

$$\boxed{x = 2}$$

$$x - 2 + 2x - 2 + x - 2 = 0$$

$$4x - 6 = 0$$

$$4x = 6$$

$$x = \frac{6}{4}$$

$$\boxed{x = \frac{3}{2}}$$

$$f(2) = (2-2)^3(2-1)$$

$$\boxed{f(2) = 0}$$

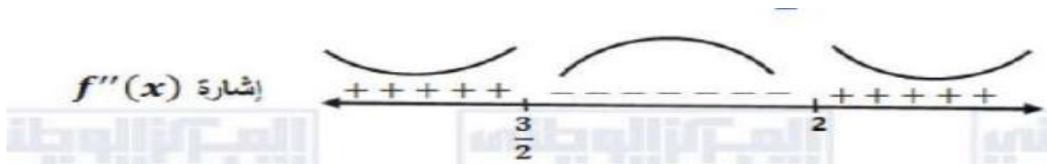
$$f\left(\frac{3}{2}\right) = (\frac{3}{2} - 2)^3(\frac{3}{2} - 1)$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = (\frac{-1}{2})^3(\frac{1}{2})$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{-1}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{16}}$$

الخطوة الثالثة: أبحث في إشارة الاقتران.



الخطوة الرابعة: أجد فترات التقعر للأعلى والأسفل.

*** منحنى الاقتران f مقعر للأعلى على الفترة $(-\infty, \frac{3}{2})$ و $(2, \infty)$**

*** منحنى الاقتران f مقعر للأسفل على الفترة $(\frac{3}{2}, 2)$.**

*** وله نقطتا انعطاف هما $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{16})$ و $(2, 0)$**

2) $f(x) = \frac{x}{x-1}$

$$f'(x) = \frac{(x-1) - x}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(x-1)^2(0) - (-1)2(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{2(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$$

$f''(x)$ لا تساوي صفرا لأي عدد حقيقي x ، وهي غير موجودة عند $x = 1$.

الخطوة الرابعة: أجد فترات التقعر للأعلى والأسفل.

* *منحنى الاقتران* $f(x)$ مقعر للأسفل على الفترة $(-\infty, 1)$.

* *منحنى الاقتران* $f(x)$ مقعر للأعلى على الفترة $(1, \infty)$

* ولا توجد له نقاط انعطاف مع المنحنى غير من اتجاه تقعره عند $x = 1$ *وذلك لأنها خارج مجال* $f(x)$

اختبار المشتقة الثانية:

مثال 6: (صفحة 109)

إذا كان : $f(x) = (x^2 - 4)^2$ ، فاستعمل اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم القصوى المحلية للاقتران f .

الخطوة الاولى: أجد مشتقة الأولى والقيم الحرجة للاقتران.

$$f(x) = (x^2 - 4)^2$$

$$f(x) = 2(x^2 - 4)(2x)$$

$$f'(x) = 4x(x^2 - 4)$$

$$4x(x^2 - 4) = 0$$

$$4x = 0$$

$$\boxed{x = 0}$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$\boxed{x = \pm 2}$$

إذن القيم الحرجة للاقتران $f(x)$ هي : $x = -2$, $x = 2$, $x = 0$

الخطوة الثانية: أجد مشتقة الاقتران الثانية.

$$f'(x) = 4x(x^2 - 4)$$

$$f'(x) = 4x^3 - 16x$$

$$f''(x) = 12x^2 - 16$$

الخطوة الثالثة: أعوض القيم الحرجة في المشتقة الثانية، لتصنيفها:

$f''(-2) = 12(-2)^2 - 16$

$f''(-2) = 48 - 16 = 32 \ > 0$

$f(-2) = (-2^2 - 4)^2$

$f(-2) = 0$

$f''(0) = 12(0)^2 - 16$

$f''(0) = 0 - 16 = -16 < 0$

$f(0) = (0^2 - 4)^2$

$f(0) = 16$

$f''(2) = 12(2)^2 - 16$

$f''(2) = 48 - 16 = 32 \ > 0$

$f(2) = (2^2 - 4)^2$

$f(2) = 0$

الاحظ أن:

* $f'(-2) = 0$، $f''(-2) > 0$

إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = -2$ ، وهي $f(-2) = 0$

* $f'(0) = 0$، $f''(0) < 0$

إذن توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 0$ ، وهي $f(0) = 16$

* $f'(2) = 0$، $f''(2) > 0$

إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 2$ ، وهي $f(2) = 0$

اتحقق من فهمي: (صفحة 110)

إذا كان : $f(x) = xe^x$ ، فاستعمل اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم القصوى المحلية للاقتران f.

الخطوة الاولى: أجد مشتقة الأولى والقيم الحرجة للاقتران.

$$f(x) = xe^x$$

$$f'(x) = xe^x + e^x$$

$$f'(x) = e^x(x+1)$$

$$e^x(x+1) = 0$$

$$x + 1 = 0$$

$$\boxed{x = -1}$$

إذن القيم الحرجة للاقتران $f(x)$ هي : $x = -1$

الخطوة الثانية: أجد مشتقة الاقتران الثانية.

$$f'(x) = xe^x + e^x$$

$$f''(x) = xe^x + e^x + e^x$$

$$f''(x) = e^x(x+1+1)$$

$$f''(x) = e^x(x+2)$$

$$f''(-1) = e^{-1}(-1+2)$$

$$f''(-1) = e^{-1}(1)$$

$$f''(-1) = e^{-1} > 0$$

$$f(-1) = -1e^{-1}$$

$$f(-1) = -e^{-1}$$

إذن توجد قيمة صغرى محلية للاقتران f عندما $x = -1$ ، وهي $f(-1) = -e^{-1}$

تطبيقات السرعة والتسارع:

مثال 7: (صفحة 111)

يمثل الاقتران : $s(t) = 3t^2 - 2t^3, t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار ، و t الزمن بالثواني :

1) ما الفترات الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه الموجب والاتجاه السالب؟

يمكن تحديد الفترات الزمنية لاتجاه حركة الجسم بدراسة إشارة السرعة المتجهة كما يأتي:

الخطوة الأولى : أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي (سرعة الجسم تساوي صفراً) .

$$s(t) = 3t^2 - 2t^3$$

$$v(t) = \acute{s}(t) = 6t - 6t^2$$

$$6t - 6t^2 = 0$$

$$6t(1 - t) = 0$$

$$6t = 0$$

$$\boxed{t = 0}$$

$$1 - t = 0$$

$$\boxed{t = 1}$$

الخطوة الثانية: أدرس إشارة السرعة المتجهة.

```
|++++++-------
|------------->
```

الخطوة الثالثة: أحدد فترات اتجاه الحركة

*** يتحرك الجسم في الاتجاه الموجب عندما $v(t) > 0$ ، أي في الفترة $(0, 1)$**

*** يتحرك الجسم في الاتجاه السالب عندما $v(t) < 0$ ، أي في الفترة $(1, \infty)$**

2) ما الفترات التي تتزايد فيها سرعة الجسم المتجهة؟ وما الفترات التي تتناقص فيها سرعة الجسم المتجهة؟

يمكن وصف سرعة الجسم المتجهة بدراسة إشارة التسارع كما يأتي:

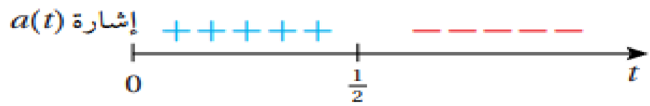
الخطوة الأولى : أجد قيم t التي يكون عندها تسارع الجسم صفراً .

$$a(t) = \acute{v}(t) = \acute{\acute{s}}(t) = 6 - 12t$$

$$6 - 12t = 0$$

$$\boxed{t = \frac{1}{2}}$$

الخطوة الثانية: أدرس إشارة التسارع.



الخطوة الثالثة: أحدد فترات تزايد السرعة وفترات تناقصها.

*** تكون سرعة الجسم المتجهة متزايدة عندما $a(t) > 0$ ، أي في الفترة $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.**

*** تكون سرعة الجسم المتجهة متناقصة عندما $a(t) < 0$ ، أي في الفترة $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$.**

أتحقق من فهمي: (صفحة 112)

يمثل الاقتران : $s(t) = t^3 - 3t + 3, t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار ، و t الزمن بالثواني :

1) ما الفترات الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه الموجب والاتجاه السالب؟

الخطوة الأولى : أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي (سرعة الجسم تساوي صفراً) .

$$s(t) = t^3 - 3t + 3$$

$$v(t) = \acute{s}(t) = 3t^2 - 3$$

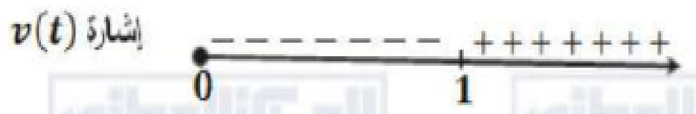
$$3t^2 - 3 = 0$$

$$3t^2 = 3$$

$t^2 = 1$

$\boxed{t = 1}$

الخطوة الثانية: أدرس إشارة السرعة المتجهة.



الخطوة الثالثة: أحدد فترات اتجاه الحركة

* يتحرك الجسم في الاتجاه السالب عندما $v(t) < 0$ ، أي في الفترة $(0, 1)$

* يتحرك الجسم في الاتجاه الموجب عندما $v(t) > 0$ ، أي في الفترة $(1, \infty)$

2) ما الفترات التي تتزايد فيها سرعة الجسم المتجهة؟ وما الفترات التي تتناقص فيها سرعة الجسم المتجهة؟

الخطوة الأولى : أجد قيم t التي يكون عندها تسارع الجسم صفراً .

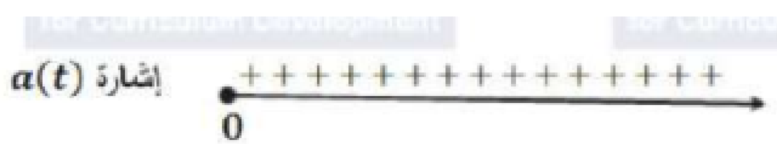
$s'(t) = 3t^2 - 3$

$a(t) = v'(t) = s''(t) = 6t$

$6t = 0$

$t = 0$

الخطوة الثالثة: أدرس إشارة التسارع.

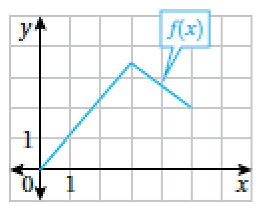


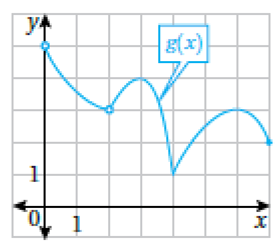
الخطوة الثالثة: أحدد فترات تزايد السرعة وفترات تناقصها.

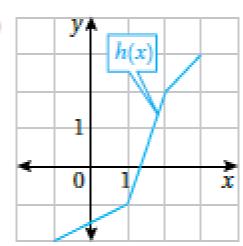
* تكون سرعة الجسم متزايدة في الفترة $(0, \infty)$ ولا تتناقص أبداً .

أتدرب وأحل المسائل: (صفحة 112)

أجد القيم الحرجة والقيم القصوى المحلية والمطلقة (إن وجدت) للاقتران الممثل بيانياً في كل مما يأتي:

1


2


3


1) قيم x الحرجة هي : $x = 3$ (المشتقة عندها غير موجودة)، ولا توجد قيم تكون عندها $\acute{f}(x) = 0$.

توجد قيمة صغرى مطلقة عند $x = 0$ هي $f(0) = 0$

توجد قيمة عظمى محلية ومطلقة عند $x = 3$ هي $f(3) = 3.5$

2) ألاحظ أن المشتقة تساوي صفراً عند $x = 3$ ، و $x = 6$ ، وأنها غير موجودة عند $x = 4$

إذن توجد 3 قيم حرجة هي $x = 3$ و $x = 4$ و $x = 6$

توجد قيمة صغرى محلية ومطلقة عند $x = 4$ هي $g(4) = 1$

توجد قيمة عظمى محلية عند $x = 3$ هي $g(3) = 4$ ، وعند $x = 6$ هي $g(6) = 3$

لا توجد قيمة عظمى مطلقة.

3) قيم x الحرجة هي : $x = 2$ و $x = 1$ (المشتقة عندها غير موجودة).

توجد قيمة صغرى مطلقة هي $h(-1) = -2$

توجد قيمة عظمى مطلقة هي $h(3) = 3$

لا توجد قيمة قصوى مطلقة.

أجد القيمة العظمى المطلقة والقيمة الصغرى المطلقة (إن وجدت) لكل اقتران مما يأتي في الفترة المعطاة:

4) $f(x) = 1 + 6x - 3x^2, \quad [0,4]$

$\acute{f}(x) = 6 - 6x$

$\acute{f}(x) = 0 \rightarrow 6 - 6x = 0$

$6x = 6$

$x = 1$

قيم x الحرجة هي $x = 1$

$f(0) = 1 + 6(0) - 3(0)^2$

$\boxed{f(0) = 1}$

$f(4) = 1 + 6(4) - 3(4)^2$

$f(4) = 1 + 24 - 48$

$\boxed{f(4) = -23}$

$f(1) = 1 + 6(1) - 3(1)^2$

$f(1) = 1 + 6 - 3$

$\boxed{f(1) = 4}$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = 4$ هي $f(4) = -23$

للاقتران قيمة عظمى محلية ومطلقة عند $x = 1$ هي $f(1) = 4$

5) $f(x) = (3 + x)^{\frac{2}{3}} - 5, \quad [-3,3]$

$\acute{f}(x) = \frac{2}{3}(3 + x)^{-\frac{1}{3}}$

$\acute{f}(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{3 + x}}$

$f'(x)$ لا تساوي صفراً لأي قيمة في الفترة $(-3,3)$ وهي غير موجودة عند $x=-3$ ولا توجد قيم حرجة في الفترة $(-3,3)$.

$$f(-3)=(3+(-3))^{\frac{2}{3}}-5$$

$$\boxed{f(-3)=-5}$$

$$f(3)=\sqrt[3]{(3+3)^2}-5$$

$$f(3)=\sqrt[3]{(6)^2}-5$$

$$f(3)=\sqrt[3]{36}-5$$

$$f(3)=3.3-5$$

$$\boxed{f(3)\approx-1.7}$$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x=-3$ هي $f(-3)=-5$

للاقتران قيمة عظمى محلية ومطلقة عند $x=3$ هي $f(3)=\sqrt[3]{36}-5\approx-1.7$

6) $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$, $[-2,2]$

$$f'(x)=\frac{(x^2+1)(2x)-(x^2)(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(2x^3+2x)-(2x^3)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x^3+2x-2x^3}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$$2x=0$$

$$x=0$$

قيم x الحرجة هي $x=0$

$$f(-2)=\frac{(-2)^2}{(-2)^2+1}$$

$$f(-2)=\frac{4}{4+1}$$

$$\boxed{f(-2)=\frac{4}{5}}$$

$$f(2)=\frac{(2)^2}{(2)^2+1}$$

$$f(2)=\frac{4}{4+1}$$

$$\boxed{f(2)=\frac{4}{5}}$$

$$f(0)=\frac{(0)^2}{(0)^2+1}$$

$$\boxed{f(0)=0}$$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x=0$ هي $f(0)=0$

للاقتران قيمة عظمى مطلقة عند $x=2$ و $x=-2$ هي $\frac{4}{5}$

7) $f(x)=\sqrt[3]{x}\,,\quad [8,64]$

$$f(x)=x^{\frac{1}{3}}$$

$$\acute{f}(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

$$\acute{f}(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}=0$$

$\acute{f}(x)$ موجودة ولا تساوي صفراً لأي قيم في الفترة $(8, 64)$

$f(8) = \sqrt[3]{8}$

$f(8) = 2$

$f(64) = \sqrt[3]{64}$

$f(64) = 4$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = 8$ هي $f(8) = 2$

للاقتران قيمة عظمى مطلقة عند $x = 64$ هي $f(64) = 4$

8) $f(x) = 2\cos x + \sin 2x$, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$\acute{f}(x) = -2\sin x + 2\cos 2x$

$\acute{f}(x) = -2\sin x + 2(1 - 2\sin^2 x)$

$-2\sin x + 2(1 - 2\sin^2 x) = 0$

$-\sin x + 1 - 2\sin^2 x = 0$

$\sin x - 1 + 2\sin^2 x = 0$

$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

$(2\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$

$2\sin x - 1 = 0$

$2\sin x = 1$

$\sin x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{\pi}{6}$

$\sin x + 1 = 0$

$\sin x = -1$

$$x = \frac{3\pi}{2}$$

القيمة الحرجة للاقتران في الفترة $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ هي $x = \frac{\pi}{6}$ فقط .

$$f(0) = 2\cos(0) + \sin 2(0)$$

$$f(0) = 2(1) + 0$$

$$\boxed{f(0) = 2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin 2\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\pi$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2(0) + (0)$$

$$\boxed{f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0}$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin 2\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = \frac{\pi}{2}$ هي $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

للاقتران قيمة عظمى محلية ومطلقة عند $x = \frac{\pi}{6}$ هي $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

9) $f(x)=\frac{e^x}{1+x^2}\ ,\quad [0,3]$

$$\acute{f}(x)=\frac{(1+x^2)e^x-2xe^x}{(1+x^2)^2}$$

$$\frac{(1+x^2)e^x-2xe^x}{(1+x^2)^2}=0$$

$$(1+x^2)e^x-2xe^x=0$$

$$e^x(x^2-2x+1)=0$$

$$e^x(x-1)^2=0$$

$$(x-1)=0$$

$$\boxed{x=1}$$

القيم الحرجة هي $x=1$

$$f(0)=\frac{e^0}{1+0^2}$$

$$f(0)=\frac{1}{1}$$

$$\boxed{f(0)=1}$$

$$f(1)=\frac{e^1}{1+1^2}$$

$$\boxed{f(1)=\frac{1}{2}e}$$

$$f(3)=\frac{e^3}{1+3^2}$$

$$\boxed{f(3)=\frac{1}{10}e^3}$$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x=0$ هي $f(0)=1$

للاقتران قيمة عظمى مطلقة عند $x=3$ هي $f(3)=\frac{1}{10}e^3\approx 2$

10) $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}, \quad \left[\frac{1}{2}, 4\right]$

$$\acute{f}(x) = \frac{(x^2)\left(\frac{1}{x}\right) - (\ln x)(2x)}{x^4}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{x - 2x\ln x}{x^4}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$$

$$1 - 2\ln x = 0$$

$$2\ln x = 1$$

$$\ln x = \frac{1}{2}$$

$$x = \sqrt{e}$$

القيم الحرجة هي $x = \sqrt{e}$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\ln x}{x^2}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\ln\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\ln\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 4\ln\frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \approx -2.8$$

$$f(\sqrt{e}) = \frac{\ln\sqrt{e}}{(\sqrt{e})^2}$$

$f(\sqrt{e}) = \frac{\ln\sqrt{e}}{e}$

$f(\sqrt{e}) = \frac{1}{2e}$

$\boxed{f(\sqrt{e}) \approx 0.18}$

$f(4) = \frac{\ln 4}{(4)^2}$

$f(4) = \frac{1.38}{16}$

$f(4) = \frac{1.38}{16}$

$\boxed{f(4) \approx 0.09}$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = \frac{1}{2}$ هي $f\left(\frac{1}{2}\right) \approx -2.8$

للاقتران قيمة عظمى مطلقة عند $x = \sqrt{e}$ هي $f(\sqrt{e}) \approx 0.18$

11) $f(x) = \cos x \ , \quad \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$

$f(x) = -\sin x$

$-\sin x = 0$

$x = 0$

$f(0) = \cos 0$

$f(0) = 1$

$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) \approx 0.87$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = 0$ هي $f(0) = 1$

للاقتران قيمة عظمى مطلقة عند $x = \frac{\pi}{3}$ هي $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

12) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}\ ,\quad [-2, 2]$

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$\frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} = 0$$

$$-x = 0$$

$$x = 0$$

$$f(-2) = \sqrt{4 - (-2)^2}$$

$$f(-2) = \sqrt{4 - 4}$$

$$\boxed{f(-2) = 0}$$

$$f(2) = \sqrt{4 - (2)^2}$$

$$f(2) = \sqrt{4 - 4}$$

$$\boxed{f(2) = 0}$$

$$f(0) = \sqrt{4 - (0)^2}$$

$$\boxed{f(0) = 2}$$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = 2$ و $x = -2$ هي 0

للاقتران قيمة عظمى محلية ومطلقة عند $x = 0$ هي $f(0) = 2$

أجد فترات التزايد وفترات التناقص لكل اقتران مما يأتي، ثم أجد القيم القصوى المحلية:

13) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 135$

$\acute{f}(x) = 3x^2 - 12x$

$3x^2 - 12x = 0$

$3x(x-4) = 0$

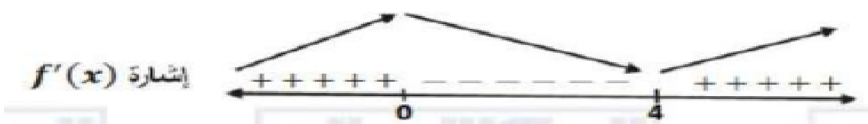
$3x = 0$

$x = 0$

$x - 4 = 0$

$x = 4$

القيم الحرجة هي $x = 4$ و $x = 0$



الاقتران f متزايد على $(4, \infty)$ و $(-\infty, 0)$

الاقتران f متناقص على $(0, 4)$

$f(0) = 0^3 - 6(0)^2 - 135$

$f(0) = -135$

$f(4) = 4^3 - 6(4)^2 - 135$

$f(4) = 64 - 96 - 135$

$f(4) = -167$

وله قيمة عظمى محلية عند $f(0) = -135$

وله قيمة صغرى محلية عند $f(4) = -167$

14) $f(x) = \frac{2x}{x^2+9}$

$$f'(x) = \frac{(x^2+9)(2) - (2x)(2x)}{(x^2+9)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 18 - 4x^2}{(x^2+9)^2}$$

$$f'(x) = \frac{18 - 2x^2}{(x^2+9)^2}$$

$$\frac{18 - 2x^2}{(x^2+9)^2} = 0$$

$$18 - 2x^2 = 0$$

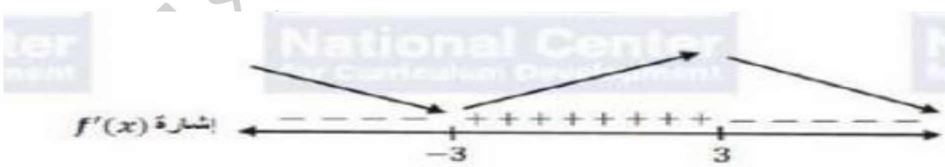
$$2x^2 = 18$$

$$x^2 = 9$$

$$\boxed{x = 3}$$

$$\boxed{x = -3}$$

القيم الحرجة هي $x = -3$ و $x = 3$



الاقتران f متزايد على $(-3, 3)$

الاقتران f متناقص على $(3, \infty)$ و $(-\infty, -3)$

$$f(3) = \frac{2(3)}{(3)^2 + 9}$$

$$f(3) = \frac{6}{9+9}$$

$$f(3) = \frac{6}{18}$$

$$f(3)=\frac{1}{3}$$

$$f(-3)=\frac{2(-3)}{(-3)^2+9}$$

$$f(-3)=\frac{-6}{9+9}$$

$$\boxed{f(-3)=\frac{-6}{18}}$$

$$\boxed{f(-3)=-\frac{1}{3}}$$

وله قيمة عظمى محلية عند $f(3)=\frac{1}{3}$

وله قيمة صغرى محلية عند $f(-3)=-\frac{1}{3}$

15) $f(x)=x^2\ln x$

$$f'(x)=(x^2)\left(\frac{1}{x}\right)+(\ln x)(2x)$$

$$f'(x)=x+2x\ln x$$

$$f'(x)=x(1+2\ln x)$$

$$x(1+2\ln x)=0$$

$$x=0$$

$$1+2\ln x=0$$

$$2\ln x=-1$$

$$\ln x=-\frac{1}{2}$$

$$\boxed{x=\frac{1}{\sqrt{e}}}$$

القيم الحرجة هي $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$

$$f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2 \ln\frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$f(x) = \frac{1}{e}\ln\frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$f(x) = \frac{1}{e}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$f(x) = -\frac{1}{2e}$$

الاقتران f متزايد على $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, \infty\right)$

الاقتران f متناقص على $\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$

وله قيمة صغرى محلية عند $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e}$

16) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$

$$f'(x) = \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$$

$$f'(x) = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$$

$$\frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} = 0$$

$$x - 1 = 0$$

$$\boxed{x = 1}$$

$$f(1) = \sqrt{(1)^2 - 2(1) + 2}$$

$$f(1) = \sqrt{1-2+2}$$

$$f(1) = \sqrt{1}$$

$$f(1) = 1$$

القيم الحرجة هي $x = 1$

الاقتران f متزايد على $(1, \infty)$

الاقتران f متناقص على $(-\infty, 1)$

وله قيمة صغرى محلية عند $f(1) = 1$

17) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x-3)$

$$f(x) = x^{\frac{5}{3}} - 3x^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}3x^{\frac{-1}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}3x^{\frac{-1}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - 2x^{-\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{5\sqrt[3]{x^2}}{3} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$$

$$f'(x) = \frac{5x}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{6}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$f'(x) = \frac{5x-6}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$\frac{5x-6}{3\sqrt[3]{x}}=0$$

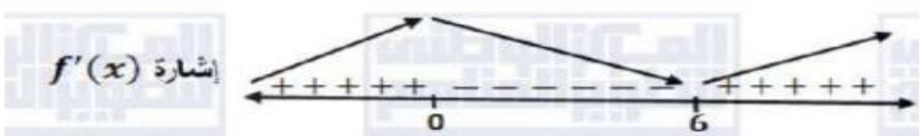
$$5x-6=0$$

$$5x=6$$

$$\boxed{x=\frac{6}{5}}$$

وكذلك $\acute{f}(x)$ غير موجودة عند $x=0$

القيم الحرجة هي $x=0$ و $x=\frac{6}{5}$



الاقتران f متزايد على $(-\infty,0)\,,\left(\frac{6}{5},\infty\right)$

الاقتران f متناقص على $\left(0,\frac{6}{5}\right)$

$$f\left(\frac{6}{5}\right)=\left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{6}{5}-3\right)$$

$$f\left(\frac{6}{5}\right)=\left(-\frac{9}{5}\right)\left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$f(0)=(0)^{\frac{2}{3}}(0-3)$$

$$f(0)=0$$

وله قيمة صغرى محلية عند $f\left(\frac{6}{5}\right)=\left(-\frac{9}{5}\right)\left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$

وله قيمة عظمى محلية عند $f(0)=0$

18) $f(x) = \sin^2 x + \sin x, \quad [0, 2\pi]$

$f'(x) = 2\sin x \cos x + \cos x$

$f'(x) = \cos x\,(2\sin x + 1)$

$\cos x\,(2\sin x + 1) = 0$

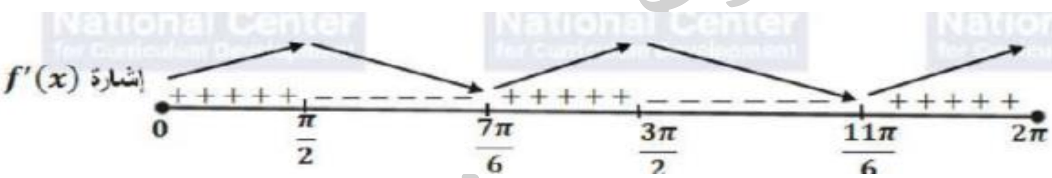
$\cos x = 0$

$\boxed{x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}}$

$2\sin x + 1 = 0$

$\sin x = -\frac{1}{2}$

$\boxed{x = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}}$



$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin^2\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + 1$

$\boxed{f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2}$

$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin^2\frac{3\pi}{2} + \sin\frac{3\pi}{2}$

$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1 + (-1)$

$\boxed{f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0}$

$f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \sin^2\frac{7\pi}{6} + \sin\frac{7\pi}{6}$

$$f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$$

$$\boxed{f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{1}{4}}$$

الاقتران f متزايد على $\left(\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right)$ ، $\left(\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right)$ ، $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

الاقتران f متناقص على $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}\right)$ ، $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}\right)$

وله قيمة صغرى محلية عند $f\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\frac{1}{4}$ ، $f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{1}{4}$

وله قيمتان عظميان محليتان عند $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$ ، $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$

19) $f(x) = x + \sin x, \quad [0, 2\pi]$

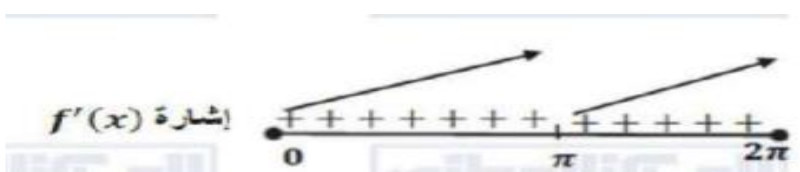
$f'(x) = 1 + \cos x$

$1 + \cos x = 0$

$\cos x = -1$

$\boxed{x = \pi}$

القيم الحرجة هي $x = \pi$



الاقتران f متزايد على $(2\pi, 0)$

ليس له قيم قصوى محلية

أجد فترات التقعر للأعلى وللأسفل ونقاط الانعطاف (إن وجدت) لمنحنى كل اقتران مما يأتي:

20) $f(x) = x^3 - 12x + 1$

$f'(x) = 3x^2 - 12$

$f''(x) = 6x$

$6x = 0$

$\boxed{x = 0}$

$f(0) = (0)x^3 - 12(0) + 1$

$f(0) = 1$

الاقتران f مقعر للأعلى في $(0, \infty)$

الاقتران f مقعر للأسفل في $(-\infty, 0)$

للاقتران f نقطة انعطاف هي $(0, 1)$

21) $f(x) = \sin x \quad , \quad [-\pi, \pi]$

$f'(x) = \cos x$

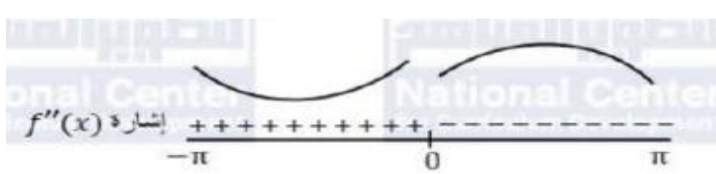
$f''(x) = -\sin x$

$-\sin x = 0$

$\sin x = 0$

$x = 0$

$x = \pi$



$f(0) = \sin 0$

$f(0) = 0$

الاقتران f مقعر للأعلى في $(-\pi, 0)$

الاقتران f مقعر للأسفل في $(0, \pi)$

للاقتران f نقطة انعطاف هي $(0, 0)$

22) $f(x) = \frac{3}{x^2+1}$

$$\acute{f}(x) = \frac{(x^2+1)(0) - (3)(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{-6x}{(x^2+1)^2}$$

$$\acute{\acute{f}}(x) = \frac{\left((x^2+1)^2(-6)\right) - \left((-6x)(2)(x^2+1)(2x)\right)}{(x^2+1)^4}$$

$$\acute{\acute{f}}(x) = \frac{(x^2+1)(-6) - (-6x)(2)(2x)}{(x^2+1)^3}$$

$$\acute{\acute{f}}(x) = \frac{(-6x^2-6) - (-24x^2)}{(x^2+1)^3}$$

$$\acute{\acute{f}}(x) = \frac{-6x^2 - 6 + 24x^2}{(x^2+1)^3}$$

$$\acute{\acute{f}}(x) = \frac{18x^2 - 6}{(x^2+1)^3}$$

$18x^2 - 6 = 0$

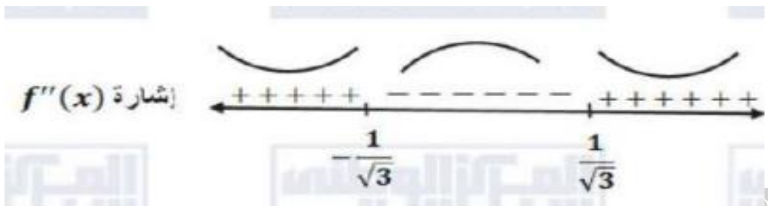
$18x^2 = 6$

$x^2 = \frac{6}{18}$

$x^2 = \frac{1}{3}$

$$\boxed{x = \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$\boxed{x = -\frac{1}{\sqrt{3}}}$$



$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3}{\frac{1}{3} + 1}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3}{\frac{4}{3}}$$

$$\boxed{f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{9}{4}}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3}{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3}{\frac{1}{3} + 1}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3}{\frac{4}{3}}$$

$$\boxed{f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{9}{4}}$$

الاقتران f مقعر للأعلى في $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)$ ، $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

الاقتران f مقعر للأسفل في $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

للاقتران f نقطتا انعطاف هي $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{9}{4}\right)$ ، $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{9}{4}\right)$

23) $f(x) = \ln(x^2 + 5)$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 5}$$

$$f''(x) = \frac{(x^2 + 5)(2) - (2x)(2x)}{(x^2 + 5)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(2x^2 + 10) - (4x^2)}{(x^2 + 5)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2x^2 + 10 - 4x^2}{(x^2 + 5)^2}$$

$$f''(x) = \frac{10 - 2x^2}{(x^2 + 5)^2}$$

$$\frac{10 - 2x^2}{(x^2 + 5)^2} = 0$$

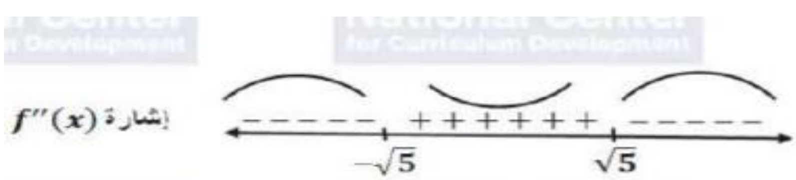
$$10 - 2x^2 = 0$$

$$2x^2 = 10$$

$$x^2 = 5$$

$$\boxed{x = \sqrt{5}}$$

$$\boxed{x = -\sqrt{5}}$$



$$f(\sqrt{5}) = \ln((\sqrt{5})^2 + 5)$$

$$f(\sqrt{5}) = \ln(5 + 5)$$

$$f(\sqrt{5}) = \ln 10$$

$$f(-\sqrt{5}) = \ln((-\sqrt{5})^2 + 5)$$

$$f(-\sqrt{5}) = \ln(5 + 5)$$

$$f(-\sqrt{5}) = \ln 10$$

الاقتران f مقعر للأعلى في $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$

الاقتران f مقعر للأسفل في $(\sqrt{5}, \infty)$ ، $(-\infty, -\sqrt{5})$

للاقتران f نقطتا انعطاف هي $(\sqrt{5}, \ln 10)$ ، $(-\sqrt{5}, \ln 10)$

24) $f(x) = \sqrt{x}\,(x + 3)$

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}}\,(x + 3)$$

$$f(x) = x^{\frac{3}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}} + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{4}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(x) = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$f''(x) = \frac{3}{4}\left(\frac{x}{x^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$$

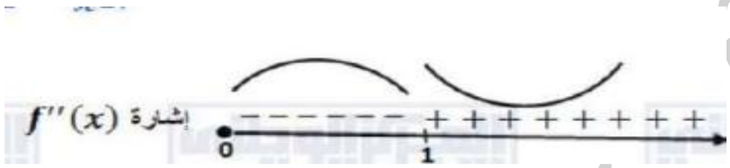
$$f''(x) = \frac{3}{4}\left(\frac{x-1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$f''(x) = \frac{3}{4}\left(\frac{x-1}{x\sqrt{x}}\right)$$

$$\frac{3}{4}\left(\frac{x-1}{x\sqrt{x}}\right) = 0$$

$$x - 1 = 0$$

$$\boxed{x = 1}$$



$$f(1) = \sqrt{1}\,(1+3)$$

$$f(1) = 1\,(4)$$

$$f(1) = 4$$

الاقتران f مقعر للأعلى في $(1, \infty)$

الاقتران f مقعر للأسفل في $(0, 1)$

للاقتران f نقطتا انعطاف هي $(1, 4)$

25) $f(x) = xe^x$

$$f'(x) = xe^x + e^x$$

$$f''(x) = xe^x + e^x + e^x$$

$$f''(x) = e^x(x + 1 + 1)$$

$$f''(x) = e^x(x + 2)$$

$$x + 2 = 0$$

$\boxed{x = -2}$

$f(-2) = -2e^{-2}$

الاقتران f مقعر للأعلى في $(-2, \infty)$

الاقتران f مقعر للأسفل في $(-\infty, -2)$

للاقتران f نقطتا انعطاف هي $(-2, -2e^{-2})$

أجد القيم القصوى المحلية لكل اقتران مما يأتي، مستعملاً اختبار المشتقة الثانية إن أمكن:

26) $f(x) = 6x - x^2$

$f'(x) = 6 - 2x$

$6 - 2x = 0$

$2x = 6$

$x = 3$

$f''(x) = -2$

$f''(3) = -2 < 0$

$f(3) = 6(3) - (3)^2$

$f(3) = 18 - 9$

$f(3) = 18 - 9$

$f(3) = 9$

للاقتران f قيمة عظمى محلية هي $f(3) = 9$

27) $f(x) = \cos x - x, \quad [0, 4\pi]$

$f'(x) = -\sin x - 1$

$-\sin x - 1 = 0$

$\sin x = -1 \rightarrow x = \dfrac{3\pi}{2}\ , x = \dfrac{7\pi}{2}$

$f''(x) = -\cos x$

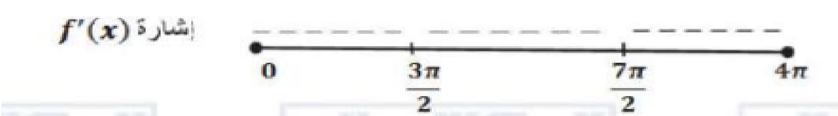
$f''\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = -\cos\dfrac{3\pi}{2}$

$f''\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = 0$

$f''\left(\dfrac{7\pi}{2}\right) = -\cos\dfrac{7\pi}{2}$

$f''\left(\dfrac{7\pi}{2}\right) = 0$

ويكون اختبار المشتقة الثانية قد فشل في تحديد نوع القيم $f\left(\frac{7\pi}{2}\right)$ ، $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ ، لذا نستخدم اختبار المشتقة الأولى والذي يعتمد على دراسة إشارتها :



نلاحظ أن $f'(x)$ لا تغير إشارتها أبداً ، إذن ليس للاقتران f قيم قصوى محلية .

28) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

$f'(x) = \dfrac{(x-1)(2x) - (x^2)}{(x-1)^2}$

$f'(x) = \dfrac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2}$

$f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$

$$\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=0$$

$$x^2-2x=0$$

$$x(x-2)=0$$

$$\boxed{x=0}$$

$$x-2=0$$

$$\boxed{x=2}$$

$$f''(x)=\frac{(x-1)^2(2x-2)-(x^2-2x)2(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$f''(x)=\frac{(x-1)(2x-2)-(x^2-2x)2}{(x-1)^3}$$

$$f''(x)=\frac{(2x^2-2x-2x+2)-(2x^2-4x)}{(x-1)^3}$$

$$f''(x)=\frac{2x^2-2x-2x+2-2x^2+4x}{(x-1)^3}$$

$$\boxed{f''(x)=\frac{2}{(x-1)^3}}$$

$$f''(0)=\frac{2}{(0-1)^3}$$

$$f''(0)=\frac{2}{-1}$$

$$\boxed{f''(0)=-2<0}$$

$$f(x)=\frac{x^2}{x-1}$$

$$f(0)=\frac{0^2}{0-1}$$

$$\boxed{f(0)=0}$$

$$f''(2) = \frac{2}{(2-1)^3}$$

$$f''(2) = \frac{2}{1}$$

$$\boxed{f''(2) = 2 > 0}$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

$$f(2) = \frac{2^2}{2-1}$$

$$f(2) = \frac{4}{1}$$

$$\boxed{f(2) = 4}$$

للاقتران f قيمة عظمى محلية هي $f(0) = 0$

للاقتران f قيمة صغرى محلية هي $f(2) = 4$

29) $f(x) = x \ln x$

$$f'(x) = (x)\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(1)$$

$$f'(x) = 1 + \ln x$$

$$1 + \ln x = 0$$

$$1 + \ln x = 0$$

$$\ln x = -1$$

$$\boxed{x = e^{-1}}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x}$$

$$f''(e^{-1}) = \frac{1}{e^{-1}}$$

$$f''(e^{-1}) = e > 0$$

$$f(e^{-1}) = e^{-1} \ln e^{-1}$$

$$f(e^{-1}) = \frac{1}{e}(-1)$$

$$f(e^{-1}) = -\frac{1}{e}$$

$$f(e^{-1}) = e^{-1}$$

للاقتران f قيمة صغرى محلية هي $f(e^{-1}) = e^{-1}$

30) $f(x) = \frac{x}{2^x}$

$$f'(x) = \frac{(2^x) - (x)(2^x \ln 2)}{2^{2x}}$$

$$f'(x) = \frac{1 - (x)(\ln 2)}{2^x}$$

$$f'(x) = 2^{-x}\big(1 - (x)(\ln 2)\big)$$

$$f'(x) = 2^{-x} - (x)(2^{-x}\ln 2)$$

$$f'(x) = 2^{-x}(1 - x \ln 2)$$

$$2^{-x}(1 - x\ln 2) = 0$$

$$1 - x \ln 2 = 0$$

$$x \ln 2 = 1$$

$$\boxed{x = \frac{1}{\ln 2}}$$

$$f'(x) = 2^{-x}(1 - x\ln 2)$$

$$f''(x) = 2^{-x}(-\ln 2) + (1 - x\ln 2)(-2^{-x}\ln 2)$$

$$f''(x) = (-2^{-x}\ln 2) + (1 - x\ln 2)(-2^{-x}\ln 2)$$

$$f''(x) = -2^{-x}\ln 2\,(1 + 1 - x\ln 2)$$

$$f''(x) = -2^{-x}\ln 2\,(2 - x\ln 2)$$

$$f''\left(\frac{1}{\ln 2}\right) = -2^{-\frac{1}{\ln 2}}\ln 2\left(2 - \frac{1}{\ln 2}\ln 2\right)$$

$$f''\left(\frac{1}{\ln 2}\right) = -2^{-\frac{1}{\ln 2}}\ln 2\,(1)$$

$$f''\left(\frac{1}{\ln 2}\right) = -2^{-\frac{1}{\ln 2}}\ln 2 < 0$$

$$f(x) = \frac{x}{2^x}$$

$$f\left(\frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{\frac{1}{\ln 2}}{2^{\frac{1}{\ln 2}}}$$

للاقتران f قيمة صغرى محلية هي $f\left(\frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{\frac{1}{\ln 2}}{2^{\frac{1}{\ln 2}}}$

31) $f(x) = x^{\frac{2}{3}} - 3$

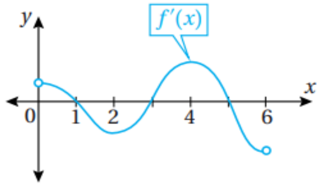
$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt[3]{x}}$$

$f'(x)$ لا تساوي صفراً أبداً ، لكنها غير موجودة عند $x = 0$ فلا يمكن تطبيق اختبار المشتقة الثانية لمعرفة القيم القصوى ، لذا نستخدم اختبار المشتقة الأولى بدراسة إشارتها :

للاقتران f قيمة صغرى محلية هي $f\left(\frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{\frac{1}{\ln 2}}{2^{\frac{1}{\ln 2}}}$

يبين الشكل المجاور منحنى المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$ المتصل على الفترة $[0, 6]$. استعمل التمثيل البياني لإيجاد كل مما يأتي:



32) قيم x التي يكون عندها للاقتران f قيم قصوى محلية ، مبيناً نوعها .

نلاحظ من الرسم المعطى أن $\acute{f}(x) = 0$ عند $x = 0$ ، $x = 3$ ، $x = 1$

وأن إشارة $f(x) = x^3$ على النحو الآتي :

للاقتران f قيمة عظمى محلية هي $x = 3$

للاقتران f قيمة صغرى محلية هي $x = 5$ ، $x = 1$

33) فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران f .

الاقتران f متزايد على $(3, 5)$ ، $(0, 1)$ ، ومتناقص على $(5, 6)$ ، $(1, 3)$.

34) إذا كان للاقتران: $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ قيمة عظمى محلية عندما $x = -3$ ، وقيمة صغرى محلية عند النقطة $(1, -14)$ ، فأجد قيمة كل من الثوابت: a و b و c .

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

الاقتران f كثير حدود فهو قابل للاشتقاق على R ، بما ان كل نقطة قيمة قصوى هي نقطة حرجة ، فإن $\acute{f}(1) = 0$ و $f(-3) = 0$

$$\acute{f}(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$\acute{f}(-3) = 3(-3)^2 + 2a(-3) + b = 0$$

$$27 - 6a + b = 0 \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$\acute{f}(1) = 3(1)^2 + 2a(1) + b = 0$$

$$3 + 2a + b = 0 \quad \dots\dots..(2)$$

النقطة $(1, -14)$ تقع على منحنى الاقتران ، لذا فإن $f(1) = -14$

$$f(1) = (1)^3 + a(1)^2 + b(1) + c = -14$$

$$f(1) = 1 + a + b + c = -14 \quad \dots\dots..(3)$$

بطرح المعادلتين (1) و (2) نجد أن :

$$27-6a+b=0 \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$\underline{(-)3+2a+b=0 \quad \dots\dots..(2)}$$

$$24-8a=0$$

$$8a=24$$

$$a=3$$

بتعويض قيمة $a=3$ في المعادلة (2) نجد أن :

$$3+2(3)+b=0$$

$$3+6+b=0$$

$$b=-9$$

ثم بتعويض قيمة كل من a و b في المعادلة (3) نجد أن :

$$1+3-9+c=-14$$

$$-5+c=-14$$

$$c=-9$$

35) إذا كان للاقتران : $f(x)=\sqrt{x+1}+\frac{b}{x}$ نقطة انعطاف عندما $x=3$ ، فأجد قيمة الثابت b.

$$f(x)=\sqrt{x+1}+\frac{b}{x}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{b}{x^2}$$

$$f'(x)=\frac{1(x+1)^{\frac{-1}{2}}}{2}-bx^{-2}$$

$$f''(x)=\frac{-1(x+1)^{\frac{-3}{2}}}{4}+2bx^{-3}$$

$$f''(x)=\frac{-1}{4(x+1)(x+1)^{\frac{1}{2}}}+\frac{2b}{x^3}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{4(x+1)\sqrt{x+1}} + \frac{2b}{x^3}$$

بما أنه يوجد نقطة انعطاف عند $x = 3$ فإما أن يكون $f''(3) = 0$ أو $f''(3)$ غير موجودة .

لكن بالنظر إلى قاعدة الاقتران f'' فإن $f''(x)$ غير موجودة عند $x = -1$ و $x = 0$

إذن $f''(3) = 0$ ، ومنه :

$$f''(3) = \frac{-1}{4(3+1)\sqrt{3+1}} + \frac{2b}{3^3}$$

$$f''(3) = \frac{-1}{4(4)\sqrt{4}} + \frac{2b}{27}$$

$$f''(3) = \frac{-1}{32} + \frac{2b}{27}$$

$$\frac{-1}{32} + \frac{2b}{27} = 0$$

$$\frac{2b}{27} = \frac{1}{32}$$

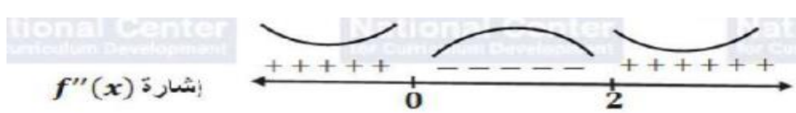
$$64b = 27$$

$$b = \frac{27}{64}$$

استعمل التمثيل البياني المجاور لمنحنى $f''(x)$ لإيجاد كل مما يأتي :

36) فترات التقعر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران f .

نلاحظ من الشكل أن $f''(x) = 0$ عند $x = 0$ و $x = 2$ وأن إشارة $f''(x)$ على النحو الآتي :



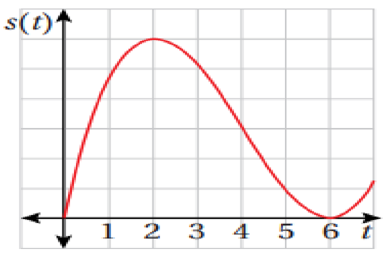
الاقتران f مقعر للأسفل في $(0, 2)$

الاقتران f مقعر للأعلى في $(2, \infty)$ ، $(-\infty, 0)$

37) الإحداثي x لنقاط انعطاف منحنى الاقتران f .

توجد نقطتا انعطاف عند $x = 0$ ، $x = 2$

يمثل الاقتران $s(t)$ المبين في الشكل المجاور موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار ، و t الزمن بالثواني :



38) أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون .

يكون الجسم في حالة سكون عندما $v(t) = 0$ أي $\acute{s}(t) = 0$

وهذا يحدث عندما يكون لمنحنى $s(t)$ مماس أفقي ، أي عند $t = 2$ و $t = 6$

39) ما الفترات الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه الموجب والاتجاه السالب؟

يتحرك الجسم في الاتجاه الموجب أو السالب تبعاً لإشارة $\acute{s}(t) = v(t)$ وهذه الإشارة ترتبط بكون منحنى $s(t)$ متزايداً أو متناقصاً :

يتحرك الجسم بالاتجاه الموجب في كل من الفترتين : $(6, 7)$ ، $(0, 2)$ لأن اقتران الموقع متزايد فيهما.

ويتحرك في الاتجاه السالب في الفترة $(2, 6)$ لأن اقتران الموقع متناقص فيها .

40) إذا كان تسارع الجسم صفراً عندما $t = 4$ ، فما الفترات التي تتزايد فيها سرعة الجسم ؟ وما الفترات التي تتناقص فيها سرعة الجسم؟

تتزايد $v(t)$ عندما $\acute{\acute{s}}(t) = \acute{v}(t)$ يكون موجباً . أي عندما يكون منحنى $s(t)$ مقعراً للأعلى ، أي في الفترة $(4, 7)$.

تتناقص $v(t)$ عندما $\acute{\acute{s}}(t) = \acute{v}(t)$ يكون سالباً . أي عندما يكون منحنى $s(t)$ مقعراً للأسفل ، أي في الفترة $(0, 4)$.

41) مكبرات صوت : يمثل الاقتران $f(x) = \frac{1500}{x^2-6x+10} - 150$ الربح الأسبوعي (بالدينار) لأحد المصانع من إنتاجه ، حيث x عدد مكبرات الصوت المبيعة . أجد عدد مكبرات الصوت الذي يحقق أكبر ربح ممكن.

$$f(x) = \frac{1500}{x^2-6x+10} - 150$$

$$\acute{f}(x) = \frac{-1500(2x+6)}{(x^2-6x+10)^2}$$

$$\frac{-1500(2x+6)}{(x^2-6x+10)^2} = 0$$

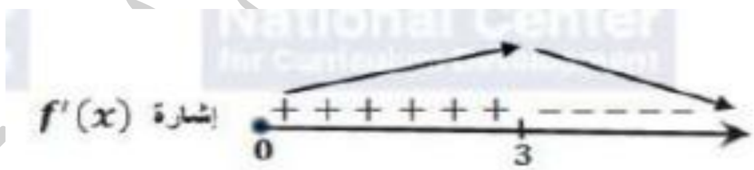
$$-1500(2x-6) = 0$$

$$2x-6 = 0$$

$$2x = 6$$

$$\boxed{x = 3}$$

القيمة الحرجة الوحيدة هي $x = 3$ لأن المقام لا يساوي صفراً .



بدراسة إشارة $\acute{f}(x)$ نلاحظ أن للاقتران f قيمة عظمى عندما $x = 3$ أي أن عدد مكبرات الصوت اللازم انتاجها وبيعها لتحقيق أكبر ربح أسبوعي ممكن هو 3

يمثل الاقتران $s(t) = t^3 - 2t^2 + t , t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار ، و t الزمن بالثواني :

42) ما الفترات الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه الموجب والاتجاه السالب؟

$$s(t) = t^3 - 2t^2 + t$$

$$v(t) = 3t^2 - 4t + 1$$

$$3t^2 - 4t + 1 = 0$$

$$3t^2 - 4t + 1 = 0$$

$$(3t-1)(t-1)=0$$

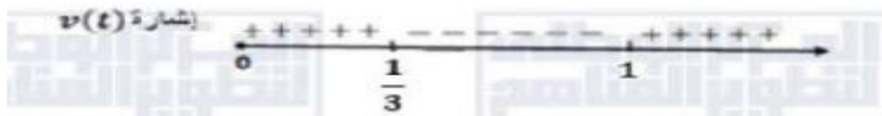
$$3t-1=0$$

$$3t=1$$

$$\boxed{t=\frac{1}{3}}$$

$$t-1=0$$

$$\boxed{t=1}$$



يتحرك الجسم بالاتجاه الموجب في كل من الفترتين $(1,\infty)$ ، $(0,\frac{1}{3})$

43) ما الفترات التي تتزايد فيها سرعة الجسم المتجهة؟ وما الفترات التي تتناقص فيها سرعة الجسم المتجهة؟

تتزايد $v(t)$ وتتناقص وفقاً للإشارة $a(t)=\acute{v}(t)$

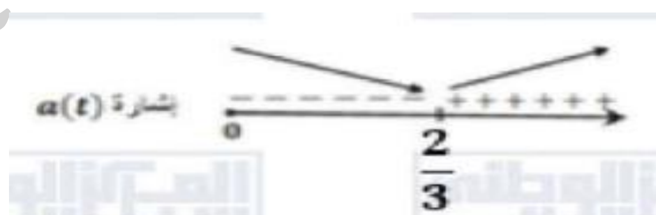
$$\acute{v}(t)=a(t)=\ 6t-4$$

$$6t-4=0$$

$$6t=4$$

$$t=\frac{4}{6}$$

$$t=\frac{2}{3}$$

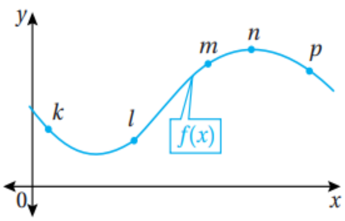


تتزايد سرعة الجسم في الفترة $(\frac{2}{3},\infty)$ وتتناقص على الفترة $(0,\frac{2}{3})$

مهارات التفكير العليا: صفحة 115

تبرير : يبين الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x)$. أحدد النقطة (النقاط) من بين مجموعة النقاط : $\{k, l, m, n, p\}$ على منحنى الاقتران التي تحقق كلا من الشروط الآتية ، مبررا ً إجابتي :

44) أن تكون إشارة كل من $f'(x)$ و $f''(x)$ موجبة .



تكون $f'(x) > 0$ و $f''(x) > 0$ عند النقاط التي يكون عندها الاقتران f متزايدا ً ومنحناه مقعرا ً للأعلى.

النقطة التي تحقق هذين الشرطين من بين النقاط المحددة على الرسم هي: l

45) أن تكون إشارة كل من $f'(x)$ و $f''(x)$ سالبة .

تكون $f'(x) < 0$ و $f''(x) < 0$ عند النقاط التي يكون عندها الاقتران f متناقصا ً ومنحناه مقعرا ً للأسفل.

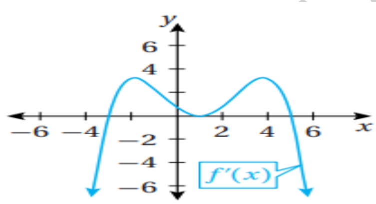
النقطة التي تحقق هذين الشرطين من بين النقاط المحددة على الرسم هي: p

46) أن تكون إشارة $f'(x)$ سالبة ، وإشارة $f''(x)$ موجبة .

تكون $f'(x) < 0$ ، و $f''(x) > 0$ عند النقاط التي يكون عندها الاقتران f متناقصا ً ومنحناه مقعرا ً للأعلى.

النقطة التي تحقق هذين الشرطين من بين النقاط المحددة على الرسم هي: k

تبرير: أستعمل التمثيل البياني المجاور لمنحنى $f'(x)$ لإيجاد كل مما يأتي ، مبررا ً إجابتي :



47) قيم x التي يكون عندها للاقتران f قيم قصوى محلية ، مبينا ً نوعها .

نلاحظ من الرسم $f'(x) = 0$ عند $x = 5$ ، $x = 1$ ، $x = -3$ وأن إشارة $f'(x)$ على النحو الآتي:

للاقتران f قيمة صغرى محلية عند $x = -3$

للاقتران f قيمة عظمى محلية عند $x = 5$

48) فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران f .

الاقتران f متزايد على $(-3, 5)$ ومتناقص على $(-\infty, -3)$ ، $(5, \infty)$

49) فترات التقعر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران f .

يكون منحنى f مقعراً للأعلى في الفترة (أو الفترات) التي يكون فيها $\acute{f}$ متزايداً حيث تكون في هذه الفترات مشتقة $\acute{f}$ أي $\acute{\acute{f}}$ موجبة ، يتضح من الرسم أن $\acute{f}$ متزايدة في الفترتين: $(1, 4)$ ، $(-\infty, -2)$ ، وعندما تكون $\acute{f}$ متناقصة في فترة ما تكون $\acute{\acute{f}}$ سالبة ويكون منحنى f مقعراً للأسفل ، ويتضح من الرسم أن $\acute{f}$ متناقصة في الفترتين : $(-2, 1)$، $(4, \infty)$

إذن منحنى f مقعر للأسفل في الفترتين $(-2, 1)$، $(4, \infty)$

ومقعر للأعلى في الفترتين $(1, 4)$، $(-\infty, -2)$

50) الإحداثي x لنقاط الانعطاف .

الاقتران f له ثلاث نقاط انعطاف عند على $x = 4$ ، $x = 1$ ، $x = -2$ لأن الاقتران $\acute{f}$ قيم قصوى عندها .

51) تحد : أستعمل التمثيل البياني المجاور لمنحنيي الاقترانين $h(x)$ ، $g(x)$ لتحديد الاقتران الذي يمثل مشتقة للآخر ، مبرراً إجابتي .

$h(x)$ هو مشتقة $g(x)$ أي $\acute{g}(x) = h(x)$ وليس العكس .

التبرير : بما أن أحدهما هو مشتقة الآخر (من المعطيات) ، يكفي ملاحظة الفترة $x < -2$ حيث g متزايد و h أكبر من الصفر ، وهذا ينسجم مع كون h هو مشتقة g

بينما في هذه الفترة نفسها h متناقض و g لا يحافظ على الإشارة السالبة ، وهذا يؤكد أن g ليس مشتقة h والنظر لباقي الفترات بالمنهجية نفسها يؤدي إلى ذات النتيجة .

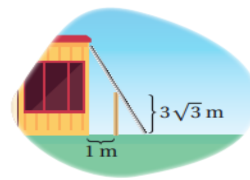
كذلك للاقتران g قيمة عظمى محلية عند $x = -2$ ، ونلاحظ أن $h(-2) = 0$ ، ما يؤكد أن $\acute{g}(x) = h(x)$.

الدرس الثالث

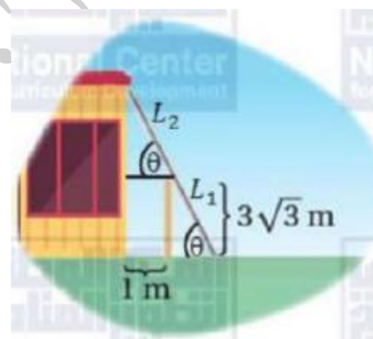
تطبيقات القيم القصوى

مسألة اليوم : (صفحة 116)

يحيط سياج ارتفاعه $3\sqrt{3}$ بمبنى، ويبعد عنه مسافة 1 كما في الشكل المجاور، أجد طول أقصر سلم قد يصل من الأرض إلى المبنى، ويمر فوق السياج ملامساً له.



ليكن θ قياس الزاوية بين السلم والأرض ، L طول السلم، كما في الشكل:



$$\sin\theta = \frac{3\sqrt{3}}{L_1} \quad , 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$L_1 = \frac{3\sqrt{3}}{\sin\theta}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{L_2} \quad , 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$L_2 = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$L = L_1 + L_2$$

$$L = \frac{3\sqrt{3}}{\sin\theta} + \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\frac{dL}{d\theta} = \frac{-3\sqrt{3}\cos\theta}{\sin^2\theta} + \frac{(-1)\,-\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

$$\frac{dL}{d\theta} = \frac{-3\sqrt{3}\cos\theta}{\sin^2\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

$$\frac{dL}{d\theta} = \frac{-3\sqrt{3}\cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta} + \frac{\sin^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

$$\frac{dL}{d\theta} = \frac{-3\sqrt{3}\cos^3\theta + \sin^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

$$\frac{-3\sqrt{3}\cos^3\theta + \sin^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta} = 0$$

$$-3\sqrt{3}\cos^3\theta + \sin^3\theta = 0$$

$$\frac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta} = \frac{3\sqrt{3}\cos^3\theta}{\cos^3\theta}$$

$$\tan^3\theta = 3\sqrt{3}$$

$$\sqrt[3]{\tan^3\theta} = \sqrt[3]{3\sqrt{3}}$$

$$\tan\theta = 3^{\frac{1}{3}}\,3^{\frac{1}{6}}$$

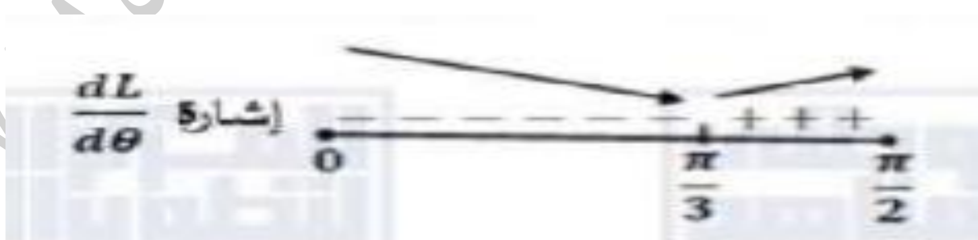
$$\tan\theta = 3^{\frac{3}{6}}$$

$$\tan\theta = 3^{\frac{1}{2}}$$

$$\tan\theta = \sqrt{3}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

$\theta = \frac{\pi}{3}$ قيمة حرجة وحيدة ، نستخدم اختبار المشتقة الأولى وندرس إشارة $\frac{dL}{d\theta}$:



للاقتران L قيمة صغرى محلية عندما $\theta = \frac{\pi}{3}$

$$L = \frac{3\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}}$$

$$L = \frac{3\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{1}{\frac{1}{2}}$$

$$L = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + 2$$

$$L = 6 + 2$$

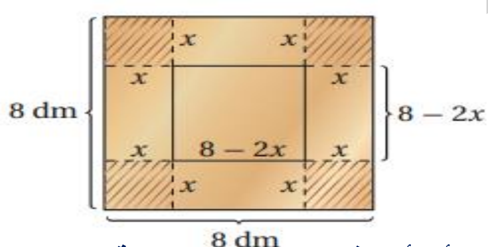
$$L = 8\ m$$

إذن أقل طول ممكن للسلم هو $8\ m$.

مثال 1: (صفحة 117)

صندوق على شكل متوازي مستطيلات ، صنع من قطعة كرتون رقيقة ، مربعة الشكل ، طولها $8dm$ وذلك بقطع 4 مربعات متطابقة من زواياها ، وطي الجوانب إلى الأعلى . أجد أبعاد الصندوق ليكون حجمه أكبر ما يمكن.

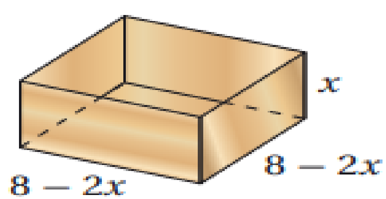
الخطوة الأولى: أرسم مخططاً.



الخطوة الثانية: أكتب الاقتران الذي أريد أن أجد قيمته القصوى بدلالة متغير واحد، ثم أحدد مجاله.

أجد حجم هذا الصندوق:

يبين الشكل المجاور أبعاد الصندوق بعد إزالة المربعات الأربعة الصغيرة وطي الجوانب.



$$V = l \times w \times h$$

$$V(x) = (8 - 2x) \times (8 - 2x) \times x$$

$$V(x) = 4x^3 - 32x^2 + 64x$$

إذن الاقتران الذي يمثل حجم الصندوق هو : $V(x) = 4x^3 - 32x^2 + 64x$ ، ومجاله هو : $0 \leq x \leq 4$

الخطوة الثالثة: أجد القيم الحرجة للاقتران وقيمته عند طرفي الفترة.

$V(x) = 4x^3 - 32x^2 + 64x$

$\acute{V}(x) = 12x^2 - 64x + 64$

$12x^2 - 64x + 64 = 0$

$3x^2 - 16x + 16 = 0$

$(3x - 4)(x - 4) = 0$

$3x - 4 = 0$

$\boxed{x = \frac{4}{3}}$

$x - 4 = 0$

$\boxed{x = 4}$

توجد قيمة حرجة واحدة في الفترة $(0,4)$ ، هي : $x = \frac{4}{3}$ ، وهذا يعني وجود 3 قيم يمكن المقارنة بينها بحسب نظرية القيم القصوى ، وهي : القيمة الحرجة ، وقيمتا طرفي الفترة .

$V(0) = 0 , V\left(\frac{4}{3}\right) = 4\left(\frac{4}{3}\right)^3 - 32\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 64\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1024}{27} \quad , V(4) = 0$

إذن أكبر حجم للصندوق هو عند قطع 4 مربعات متطابقة من زواياه ، طول كل منها $\frac{4}{3}dm$.

ومن ثم، فإن أبعاد الصندوق هي :

$l = 8 - 2\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{16}{3}dm \ , w = 8 - 2\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{16}{3}dm \ , h = \frac{4}{3}dm$

طريقة بديلة:

يمكنني استعمال اختبار المشتقة الثانية لتحديد نوع القيمة الحرجة عندما $x = \frac{4}{3}$.

$\acute{V}(x) = 12x^2 - 64x + 64$

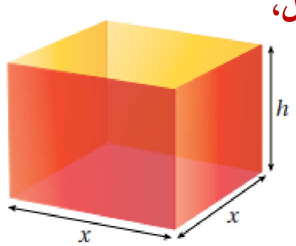
$\acute{\acute{V}}(x) = 24x - 64$

$\acute{\acute{V}}\left(\frac{4}{3}\right) = 24\left(\frac{4}{3}\right) - 64 = -32 < 0$

أتحقق من فهمي: (صفحة 118)

ترغب شركة في تصميم صندوق مفتوح من الأعلى، وقاعدته مربعة الشكل، ومساحة سطحه الكلية $1080cm^2$ كما في الشكل المجاور ،

أجد أبعاد الصندوق ليكون حجمه أكبر ما يمكن.



ليكن حجم الصندوق V ومساحة سطحه الكلية A

مساحة متوازي المستطيلات قاعدته مربعة مفتوح من الأعلى=(محيط القاعدة× الارتفاع)+مساحة القاعدة

$$A = 4xh + x^2$$

$$1080 = 4xh + x^2$$

$$4xh = 1080 - x^2$$

$$\frac{4xh}{4x} = \frac{1080 - x^2}{4x}$$

$$h = \frac{1080 - x^2}{4x}$$

حجم متوازي المستطيلات قاعدته مربعة مفتوح من الأعلى= مساحة القاعدة× الارتفاع

$$V = x^2 h$$

$$V(x) = x^2\left(\frac{1080 - x^2}{4x}\right)$$

$$V(x) = x\left(\frac{1080 - x^2}{4}\right)$$

$$V(x) = \frac{1080x - x^3}{4}$$

$$V(x) = \frac{1}{4}(1080x - x^3)$$

$$V'(x) = \frac{1}{4}(1080 - 3x^2)$$

$$V'(x) = \frac{1}{4}(1080 - 3x^2)$$

$$\acute{V}(x) = 0 \rightarrow \frac{1}{4}(1080 - 3x^2) = 0$$

$$\frac{1}{4}(1080 - 3x^2) = 0$$

$$1080 - 3x^2 = 0$$

$$3x^2 = 1080$$

$$x^2 = 360$$

$$\boxed{x = \sqrt{360}}$$

القيمة الحرجة هي $x = \sqrt{360}$

أجد حجم الصندوق عند القيمة الحرجة وعند طرفي المجال.

$$V(x) = \frac{1}{4}(1080x - x^3)$$

$$V(0) = 0$$

$$V(\sqrt{360}) = \frac{1}{4}\left(1080\sqrt{360} - \left(\sqrt{360}\right)^3\right)$$

$$V(\sqrt{360}) = \frac{1}{4}\left(1080\sqrt{360} - \left(\sqrt{360}\right)^3\right)$$

$$V(\sqrt{360}) = \frac{1}{4}(1080\sqrt{360} - 360\sqrt{360})$$

$$V(\sqrt{360}) = \frac{1}{4}(720\sqrt{360})$$

$$V(\sqrt{360}) = 180\sqrt{360}$$

$$V(\sqrt{360}) = 180\sqrt{36 \times 10}$$

$$V(\sqrt{360}) = 6 \times 180\sqrt{10}$$

$$V(\sqrt{360}) = 1080\sqrt{10}$$

$$h = \frac{1080 - \sqrt{360}^2}{4\sqrt{360}}$$

$$h=\frac{1080-360}{24\sqrt{10}}$$

$$h=\frac{720}{24\sqrt{10}}$$

$$h=\frac{30}{\sqrt{10}}$$

$$h=\frac{30\times\sqrt{10}}{\sqrt{10}\times\sqrt{10}}$$

$$h=\frac{30\sqrt{10}}{10}$$

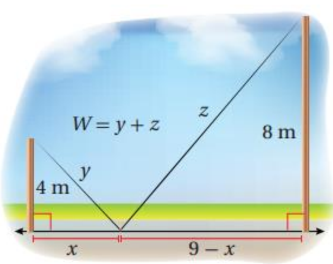
$$h=3\sqrt{10}$$

إذن يكون الحجم أكبر ما يمكن عندما $x=6\sqrt{10}cm$ ، وعندما يكون الارتفاع $h=3\sqrt{10}cm$

إيجاد أقل طول ممكن:

مثال 2: (صفحة 119)

عمودان طول أحدهما $8m$ ، وطول الآخر $4m$ ، والمسافة بينهما $9m$ ، وهما مثبتان بسلكين يصلان قمة كل عمود بوتد عند سطح الأرض كما في الشكل المجاور، أجد الموقع المناسب لتثبيت الوتد بين العمودين بحيث يكون طول السلك المستعمل أقل ما يمكن.



الخطوة الأولى: أرسم مخططاً.

الخطوة الثانية: أكتب الاقتران الذي أريد أن أجد قيمته القصوى بدلالة متغير واحد، ثم أحدد مجاله.

بما أن المسافة بين العمودين هي $9m$ ، فإن بعد الوتد عن أحدهما (الأصغر مثلاً) هو x ، وبعده عن العمود الآخر هو $9-x$.

اكتب الاقتران W بدلالة متغير واحد :

$$y^2=x^2+4^2$$

$$y=\sqrt{x^2+16}$$

$$z^2 = \sqrt{(9-x)^2 + 64}$$

$$W = y + z$$

$$W(x) = y\sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{(9-x)^2 + 64}$$

إذن الاقتران الذي يمثل طول السلك هو : $W(x) = y\sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{(9-x)^2 + 64}$

ومجاله هو : $0 \leq x \leq 9$

الخطوة 3: أجد القيم الحرجة للاقتران وقيمتيه عند طرفي الفترة:

$$W(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}} + \frac{-(9-x)}{\sqrt{(9-x)^2 + 64}}$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}} + \frac{-(9-x)}{\sqrt{(9-x)^2 + 64}} = 0$$

$$x\sqrt{(9-x)^2 + 64} = (9-x)\sqrt{x^2 + 16}$$

$$x^2((9-x)^2 + 64) = (9-x)^2(x^2 - 16)$$

$$x^2((9-x)^2 + 64x^2 = x^2(9-x)^2 + 16(9-x)^2$$

$$4x^2 = (9-x)^2$$

$$4x^2 = 81 - 18x + x^2$$

$$x^2 + 6x - 27 = 0$$

$$(x-3)(x+9) = 0$$

$$x - 3 = 0 \rightarrow \boxed{x = 3}$$

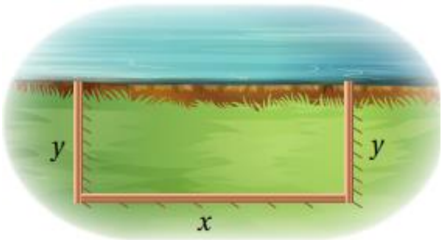
$$x + 9 = 0 \rightarrow \boxed{x = -9}$$

بما أن $x = -9$ خارج المجال ، فإنها تهمل .

بناء على ذلك ، توجد 3 قيم يمكن المقارنة بينها بحسب نظرية القيم القصوى ، وهي : القيمة الحرجة ، وقيمتا طرفي الفترة .

$$W(0) \approx 16 \quad , W(3) \approx 15 \quad , W(9) \approx 17.8$$

إذن يجب تثبيت الوتد على بعد $3m$ من العمود الأقصر ، ليكون طول السلك المستعمل لتثبيت العمودين أقل ما يمكن وهو $15m$.



أتحقق من فهمي: (صفحة 121)

خطط مزارع لتسييج حظيرة مستطيلة الشكل قرب نهر كما في الشكل المجاور ، وحدد مساحة الحظيرة بـ $245000m^2$ ، لتوفير كمية عشب كافية لأغنامه.

أجد أبعاد الحظيرة التي تجعل طول السياج أقل ما يمكن، علماً بأن الجزء المقابل للنهر لا يحتاج إلى تسييج.

ليكن طول السياج L ومساحة الحظيرة A

مساحة الحظيرة مستطيلة الشكل= الطول×العرض

$$A = xy$$

$$245000 = xy$$

$$y = \frac{245000}{x}$$

محيط الحظيرة مستطيلة الشكل من ثلاث جهات= الطول + (2 × العرض)

$$L = x + 2y$$

$$L(x) = x + 2\left(\frac{245000}{x}\right)$$

$$L(x) = x + \frac{490000}{x}$$

$$\acute{L}(x) = 1 - \frac{490000}{x^2}$$

$$1 - \frac{490000}{x^2} = 0$$

$$\frac{490000}{x^2} = 1$$

$$x^2 = 490000$$

$$\boxed{x = 700}$$

$$y = \frac{245000}{700}$$

$$\boxed{y = 350}$$

القيمة الحرجة هي $x = 700$

$$L''(x) = (2)\frac{490000}{x^3}$$

$$L''(x) = \frac{980000}{x^3}$$

$$L''(700) = \frac{980000}{(700)^3}$$

$$L''(700) = \frac{980000}{(700)^3} > 0$$

إذن يكون طول السياج أقل ما يمكن عندما $x = 700\ m$ و $y = 350\ m$

$$y = \frac{245000}{700}$$

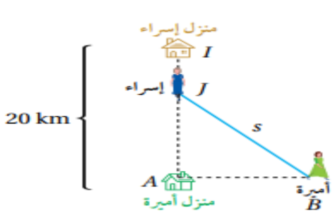
$$\boxed{y = 350}$$

إيجاد أقرب مسافة:

مثال 3: من الحياة: (صفحة 121)

تتدرب إسراء وأميرة يومياً استعداداً لسباق العدو (الماراثون) ، في أحد الأيام ، انطلقت إسراء من منزلها الذي يقع على بعد $20km$ شمال منزل أميرة الساعة $9:00am$ ، واتجهت جنوبا بسرعة $8km/h$. وفي الوقت نفسه ، انطلقت أميرة في اتجاه الشرق بسرعة $6km/h$. في أي ساعة تكون إسراء وأميرة أقرب ما يمكن إلى بعضهما ، علماً بأن كلا منهما ركضت مدة $2.5h$ ؟

الخطوة الأولى: أرسم مخططاً .



افترض أن اسراء بدأت الركض من النقطة I ،

ووصلت إلى النقطة J بعد t ساعة ، وأن أميرة انطلقت في الوقت نفسه

من النقطة A ، ووصلت إلى النقطة B بعد t ساعة ، وبذلك فإن بعد إسراء عن أميرة بعد t ساعة هو : $s = JB$.

باستعمال نظرية فيثاغورس، فإن:

$$s = JB = \sqrt{JA^2 + JB^2}$$

الخطوة الثانية: أكتب الاقتران الذي أريد أن أجد قيمته القصوى بدلالة متغير واحد ، ثم أحدد مجاله .

أكتب اقتران المسافة بين إسراء وأميرة بدلالة الزمن t :

$$JA = 20 - 8t$$

$$AB = 6t$$

$$s = JB = \sqrt{JA^2 + JB^2}$$

$$s(t) = \sqrt{(20 - 8t)^2 + (6t)^2}$$

$$s(t) = \sqrt{100t^2 - 320t + 400}$$

إذن الاقتران الذي يمثل المسافة بين إسراء وأميرة هو : $s(t) = \sqrt{100t^2 - 320t + 400}$
ومجاله هو : $0 \le t \le 2.5$.

الخطوة الثالثة: أجد القيم الحرجة للاقتران وقيمتيه عند طرفي الفترة:

$$\acute{s}(t) = \frac{100t - 160}{\sqrt{100t^2 - 320t + 400}}$$

$$\frac{100t - 160}{\sqrt{100t^2 - 320t + 400}} = 0$$

$$100t - 160 = 0$$

$$100t = 160$$

$$\boxed{t = 1.6}$$

توجد 3 قيم يمكن المقارنة بينها بحسب نظرية القيم القصوى ، وهي : القيمة الحرجة ، وقيمتا طرفي الفترة .

$$s(0) = 20 , \quad s(1.6) = 12 , \quad s(2.5) = 15$$

إذن تكون إسراء وأميرة أقرب ما يمكن إلى بعضهما بعد 1.6 ساعة من بدء كل منهما بالركض ، أي الساعة $10:36\ am$.

أتحقق من فهمي: (صفحة 123)

انطلق قطار من إحدى المحطات الساعة $10:00am$ ، وتحرك في اتجاه الجنوب بسرعة $60km/h$ ، وفي الوقت نفسه انطلق قطار آخر نحو الغرب بسرعة $45km/h$ ، ثم وصل إلى محطة انطلاق القطار الأول الساعة $11:00am$. في أي ساعة يكون القطاران أقرب ما يمكن إلى بعضهما؟

نفرض x بعد القطار الأول عن المحطة

نفرض y بعد القطار الثاني عن المحطة

نفرض D البعد بين القطارين.

بعد t ساعة من انطلاقها يكون : $x = 60t$ ويكون $\boxed{y = 45(1-t)}$ $y = 45 - 45t \rightarrow$

$$D(t) = \sqrt{(60t)^2 + (45(1-t)^2}$$

$$D(t) = \sqrt{(60t)^2 + (45(1-t))^2}$$

$$D(t) = \sqrt{3600t^2 + 2025(1-t)^2} \quad ,0 \le t \le 1$$

$$\acute{D}(t) = \frac{7200t + 4050(1-t)(-1)}{2\sqrt{3600t^2 + 2025(1-t)^2}}$$

$$\acute{D}(t) = \frac{7200t - (4050 - 4050t)}{2\sqrt{3600t^2 + 2025(1-t)^2}}$$

$$\acute{D}(t) = \frac{7200t - 4050 + 4050t}{2\sqrt{3600t^2 + 2025(1-t)^2}}$$

$$\acute{D}(t) = \frac{11250t - 4050}{2\sqrt{3600t^2 + 2025(1-t)^2}}$$

$$\frac{11250t - 4050}{2\sqrt{3600t^2 + 2025(1-t)^2}} = 0$$

$$11250t - 4050 = 0$$

$$11250t = 4050$$

$$t = \frac{9}{25}$$

القيمة الحرجة هي $t = \frac{9}{25}$

أجد المسافة D عند القيمة الحرجة وعند طرفي المجال .

$$D(t) = \sqrt{3600t^2 + 2025(1-t)^2}$$

$$D(0) = 0$$

$$D(1) = \sqrt{3600(1)^2 + 2025(1-1)^2}$$

$$D(1) = \sqrt{3600}$$

$$D(1) = 60$$

$$D\left(\frac{9}{25}\right) = \sqrt{3600\left(\frac{9}{25}\right)^2 + 2025(1-\frac{9}{25})^2}$$

$$D\left(\frac{9}{25}\right) = \sqrt{3600\left(\frac{9}{25}\right)^2 + 2025\left(\frac{16}{25}\right)^2}$$

$$D\left(\frac{9}{25}\right) = \sqrt{3600\left(\frac{81}{625}\right) + 2025\left(\frac{256}{625}\right)}$$

$$D\left(\frac{9}{25}\right) = \sqrt{466.56 + 829.44}$$

$$D\left(\frac{9}{25}\right) = \sqrt{1296}$$

$$D\left(\frac{9}{25}\right) = 36$$

إذن يكون القطاران أقرب ما يمكن إلى بعضهما عندما $t = \frac{9}{25}h$ أي بعد 21 دقيقة و 36 ثانية .

وتكون الساعة حينئذ $10:21:36$

تطبيقات اقتصادية:

مثال 4: من الحياة: (صفحة 124)

لاحظت إدارة أحد المسارح أن متوسط عدد الحضور لعرض ما هو 1000 شخص إذا كان سعر بيع التذكرة $26\,JD$ ، وأن عدد الحضور يزيد بمقدار 50 شخصاً مقابل كل دينار يخصم من سعر التذكرة . إذا كان متوسط ما ينفقه كل شخص $4\,JD$ على الخدمات داخل المسرح ، فما سعر بيع التذكرة الذي يحقق للمسرح أعلى إيراد ؟

الخطوة الأولى: أجد اقتران الإيراد.

أفترض أولاً أن x هو المبلغ الذي خصمته إدارة المسرح من سعر التذكرة الأصلي . وبما أن عدد الحضور يزيد بمقدار 50 شخصاً مقابل كل دينار يخصم ، فإن عدد الحضور يزيد بمقدار $50x$ مقابل كل x دينار :

$R(x) =$ (الإيراد من التذاكر) + (الايراد من إنفاق كل شخص)

$R(x) =$ (سعر التذكرة × عدد الأشخاص) + (4 × عدد الأشخاص)

$$= (1000 + 50x)(26 - x) + (1000 + 50x) \times 4$$

$$= 50x^2 + 500x + 30000$$

إذن الاقتران الذي يمثل الإيراد هو : $R(x) = 50x^2 + 500x + 30000$

الخطوة الثانية : أجد قيمة x التي يكون عندها الإيراد أعلى ما يمكن .

أجد الإيراد الحدي $R'(x)$ ، ثم أجد القيمة الحرجة للاقتران $R(x)$ عندما $R'(x) = 0$:

$$R'(x) = -100x + 500$$

$$100x + 500 = 0$$

$$\boxed{x = 5}$$

استعمل اختبار المشتقة الثانية لتحديد نوع القيمة الحرجة عندما $x = 5$:

$$R''(x) = -100$$

$$R''(5) = -100 < 0$$

ألاحظ أنه توجد قيمة عظمى مطلقة عندما $x = 5$.

إذن ، يحقق المسرح أعلى إيراد إذا خفض سعر التذكرة بمقدار $5\,JD$ ، أي إذا أصبح سعرها $21\,JD$.

أتحقق من فهمي: (صفحة 125)

يبيع متجر 200 شاشة تلفاز شهرياً بسعر $350\ JD$ للشاشة الواحدة ، وقد أشار مسح للسوق أعده خبير التسويق في المتجر إلى أن عدد الشاشات المبيعة شهرياً يزيد بمقدار 20 شاشة عند كل خصم مقداره $10\ JD$ من سعر الشاشة الواحدة ، أجد سعر بيع الشاشة الواحدة الذي يحقق للمتجر أعلى إيراد ممكن .

ليكن سعر بيع الشاشة الواحدة بعد الخصم هو x دينار .

أي أن مقدار الخصم من سعر بيع الشاشة الواحدة هو $(350 - x)$ دينار.

وبالتالي تحصل زيادة في عدد الشاشات المبيعة مقدارها:

$$\frac{20}{10}(350 - x)$$

$$= 700 - 2x$$

إذن عدد الشاشات المبيعة سيكون:

$$= 200 + 700 - 2x$$

$$= 900 - 2x$$

(سعر بيع الشاشة الواحدة بعد الخصم) + (عدد الشاشات المبيعة) = الايراد

$$R(x) = (900 - 2x)x$$

$$R(x) = 900x - 2x^2$$

$$R'(x) = 900 - 4x$$

$$900 - 4x = 0$$

$$4x = 900$$

$$x = 225$$

القيمة الحرجة هي $x = 225$

$$R''(x) = -4 < 0$$

نلاحظ أن اقتران الإيراد له قيمة عظمى عندما $x = 225$

إذن يحقق المتجر أعلى إيراد ممكن عندما يكون سعر بيع الشاشة الواحدة هو 225 ديناراً .

حل أخر :

نفرض أنه تم إجراء خصم x مرة ، فسيكون سعر بيع الشاشة $(350 - 10x)$ ، وسيكون غدد الشاشات المبيعه $(200 + 20x)$

وليكن الإيراد $R(x)$ فإن :

$$R(x) = (350 - 10x)(200 + 20x)\ ,0 \le x \le 35$$

$$R(x) = 70000 + 5000x - 200x^2$$

$$\acute{R}(x) = 5000 - 400x$$

$$5000 - 400x = 0$$

$$400x = 5000$$

$$x = 12.5$$

قيمة x الحرجة هي 12.5 ولإيجاد السعر الذي يحقق أعلى إيراد نقارن قيمة الإيراد عند القيمة الحرجة مع قيمتيه عند طرفي المجال .

$$R(x) = 70000 + 5000x - 200x^2$$

$$R(0) = 70000$$

$$R(12.5) = 70000 + 5000(12.5) - 200(12.5)^2$$

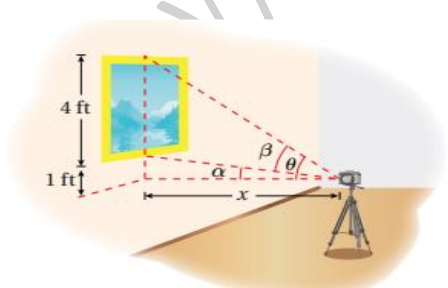
$$R(12.5) = 70000 + 62500 - 31250$$

$$R(12.5) = 101250$$

إذن يكون الإيراد اعلى ما يمكن عندما $x = 12.5$

ويكون سعر بيع الشاشة $(350 - 10(12.5) = 225)$ أي 225 ديناراً .

إيجاد أكبر زاوية:



مثال 5: من الحياة :(صفحة 125)

يريد مصور التقاط صورة للوحة ارتفاعها $4\ ft$ ،

وهي معلقة في معرض فني، إذا كانت عدسة الكاميرا

تقع أسفل الحافة السفلية للوحة بمقدار $1\ ft$ ، كما يظهر في الشكل المجاور ، فأجد بعد الكاميرا اللازم عن اللوحة لتكون زاوية تصوير عدستها (β) أكبر ما يمكن .

الخطوة الأولى: اكتب الاقتران الذي أريد أن أجد قيمته القصوى بدلالة متغير واحد.

يظهر من الشكل أن ظل الزاوية β التي يراد إيجاد أكبر قيمة لها يعطى بالمعادلة الآتية :

$$\tan\beta = \tan(\theta - \alpha)$$

اكتب ظل الزاوية β بدلالة المتغير x الذي يمثل بعد العدسة عن اللوحة :

$$\tan\beta = \tan(\theta - \alpha)$$

$$= \frac{\tan\theta - \tan\alpha}{1 + \tan\theta\tan\alpha}$$

$$= \frac{\frac{5}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{x^2+5}{x^2}}$$

$$= \frac{4x}{x^2+5}$$

اذن $\tan\beta = \frac{4x}{x^2+5}$.

الخطوة الثانية: أجد القيم الحرجة، محدداً نوعها.

$$\sec^2\beta \times \frac{d\beta}{dx} = \frac{(x^2+5)(4) - (4x)(2x)}{(x^2+5)^2}$$

$$\sec^2\beta \times \frac{d\beta}{dx} = \frac{20 - 4x^2}{(x^2+5)^2}$$

$$\frac{20 - 4x^2}{(x^2+5)^2} = 0$$

$$20 - 4x^2 = 0$$

$$x = \sqrt{5}$$

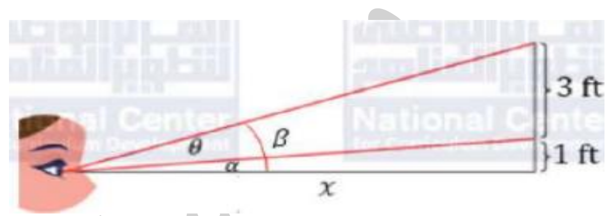
الاحظ من اختبار المشتقة الأولى وجود قيمة عظمى مطلقة عندما $x = \sqrt{5}$

إذن يجب أن يكون بعد الكاميرا عن اللوحة $\sqrt{5}\,ft$ ، لكي تكون زاوية تصوير عدستها أكبر ما يمكن .

أتحقق من فهمي: (صفحة 126)

نظرت ساره إلى لوحة معلقة على حائط في منزلها، ارتفاعها 3 ft متراً ، وارتفاع حافتها السفلية 1 ft متراً فوق عينها كما في الشكل المجاور. كم قدماً يجب أن تبتعد ساره عن الجدار لتكون زاوية نظرها θ أكبر ما يمكن ؟

نسمى الأبعاد وقياسات الزوايا كما في الشكل:



$$\tan\theta = \tan(\beta-\alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$$

$$\tan\theta = \tan(\beta-\alpha) = \frac{\frac{4}{x}-\frac{1}{x}}{1+\frac{4}{x}\times\frac{1}{x}}$$

$$\tan\theta = \tan(\beta-\alpha) = \frac{\frac{3}{x}}{1+\frac{4}{x^2}}$$

$$\tan\theta = \tan(\beta-\alpha) = \frac{\frac{3}{x}}{\frac{x^2+4}{x^2}}$$

$$\tan\theta = \tan(\beta-\alpha) = \frac{3}{x}\times\frac{x^2}{x^2+4}$$

$$\tan\theta = \tan(\beta-\alpha) = \frac{3x^2}{x^3+4x}$$

$$\tan\theta = \frac{3x}{x^2+4}$$

$$\tan\theta = \frac{3x}{x^2+4}$$

$$\sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dx} = \frac{(x^2+4)(3)-(3x)(2x)}{(x^2+4)^2}$$

$$\sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dx} = \frac{(3x^2+12)-(6x^2)}{(x^2+4)^2}$$

$$\sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dx}=\frac{3x^2+12-6x^2}{(x^2+4)^2}$$

$$\frac{1}{\cos^2\theta}\,\frac{d\theta}{dx}=\frac{-3x^2+12}{(x^2+4)^2}$$

$$\frac{d\theta}{dx}=\frac{-3x^2+12}{(x^2+4)^2}\cos^2\theta$$

$$-3x^2+12=0$$

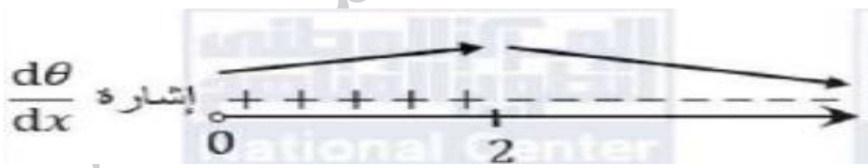
$$3x^2=12$$

$$x^2=4$$

$$x=2$$

لكن $\cos^2\theta \neq 0$ لأن $\theta < \frac{\pi}{2}$

نستخدم اختبار المشتقة الأولى ، وندرس إشارة $\frac{d\theta}{dx}$



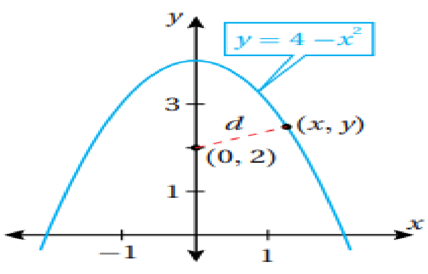
إذن يجب أن تبتعد سارة عن الجدار مسافة 2 ft لتكون زاوية نظرها θ أكبر ما يمكن .

تطبيقات في المستوى الإحداثي:

مثال 6: (صفحة 127)

أجد النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران : $f(x)=4-x^2$ ، التي هي أقرب ما يمكن إلى النقطة $(0,2)$.

الخطوة الأولى: ارسم مخططا.



افترض أن النقطة الواقعة على منحنى الاقتران $f(x)$ هي (x,y) ، وأن d هي المسافة بينها وبين النقطة $(0,2)$.باستعمال قانون المسافة بين نقطتين ، فإن الاقتران الذي يمثل المسافة d يكتب كما يأتي :

$$d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2}$$

الخطوة الثانية: اكتب الاقتران الذي أريد أن أجد قيمته القصوى بدلالة متغير واحد .

بما أن النقطة (x,y) تقع على منحنى الاقتران $f(x)$ ، فإن $y = f(x) = 4 - x^2$

اكتب الاقتران d بدلالة متغير واحد :

$$d = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$$

$$d(x) = \sqrt{x^2 + (2-x^2)^2}$$

إذن الاقتران الذي يمثل المسافة بين النقطتين هو : $d(x) = \sqrt{x^2 + (2-x^2)^2}$.

الخطوة الثانية: أجد القيم الحرجة، محدداً نوعها.

$$\acute{d}(x) = \frac{x - 2x(2-x^2)}{\sqrt{x^2 + (2-x^2)^2}}$$

$$\frac{x - 2x(2-x^2)}{\sqrt{x^2 + (2-x^2)^2}} = 0$$

$$x - 2x(2-x^2) = 0$$

$$x - 4x + 2x^3 = 0$$

$$-3x + 2x^3 = 0$$

$$x(-3 + 2x^2) = 0$$

$$\boxed{x = 0}$$

$$-3 + 2x^2 = 0$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

استعمل اختبار المشتقة الأولى لتحديد نوع كل قيمة حرجة:

توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 0$ ، وتوجد قيمة صغرى محلية ومطلقة عندما $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$ ، و $x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$

إذن أقرب نقطتين إلى النقطة $(0, 2)$ هما : $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{2}\right)$ ، $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{2}\right)$.

أتحقق من فهمي: (صفحة 128)

أجد النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران : $f(x) = \sqrt{8x}$ ، والتي هي أقرب ما يمكن إلى النقطة $(4, 2)$.

لتكن النقطة $(0, 2)$ على منحنى $f(x) = \sqrt{8x}$ ، ولتكن المسافة بينها وبين النقطة $(4, 2)$ هي L حيث :

$$L = \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2}$$

$$L = \sqrt{(x-4)^2 + (\sqrt{8x}-2)^2}$$

$$L = \sqrt{(x-4)^2 + (\sqrt{8x}-2)^2}$$

$$\frac{dL}{dx} = \frac{2(x-4) + 2(\sqrt{8x}-2)\left(\frac{8}{2\sqrt{8x}}\right)}{2\sqrt{(x-4)^2 + (\sqrt{8x}-2)^2}}$$

$$\frac{dL}{dx} = \frac{(x-4) + (\sqrt{8x}-2)\left(\frac{4}{\sqrt{8x}}\right)}{\sqrt{(x-4)^2 + (\sqrt{8x}-2)^2}}$$

$$\frac{dL}{dx} = \frac{(x-4) + (4 - \frac{8}{\sqrt{8x}})}{\sqrt{(x-4)^2 + (\sqrt{8x}-2)^2}}$$

$$\frac{dL}{dx}=\frac{x-\frac{8}{\sqrt{8x}}}{\sqrt{(x-4)^2+(\sqrt{8x}-2)^2}}$$

$$\frac{x-\frac{8}{\sqrt{8x}}}{\sqrt{(x-4)^2+\left(\sqrt{8x}-2\right)^2}}=0$$

$$x-\frac{8}{\sqrt{8x}}=0$$

$$x=\frac{8}{\sqrt{8x}}$$

$$x\sqrt{8x}=8$$

$$x\sqrt{8x}=8$$

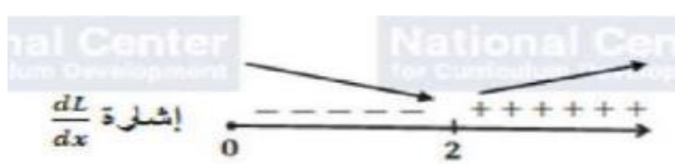
$$x^2\times 8x=64$$

$$8x^3=64$$

$$x^3=8$$

$$x=2$$

نستخدم إشارة المشتقة الأولى وندرس إشارة $\frac{dL}{dx}$



$$f(x)=\sqrt{8x}$$

$$f(2)=\sqrt{8(2)}$$

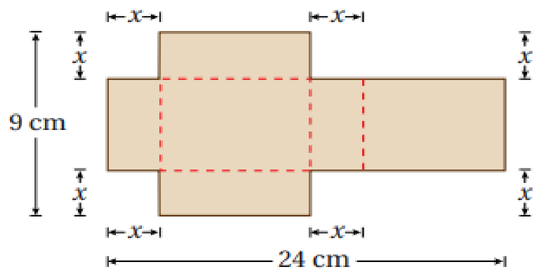
$$f(2)=\sqrt{16}$$

$$f(2)=4$$

إذن أقرب نقطة من نقاط المنحنى x للنقطة $(4,2)$ هي : $(2,4)$

أتدرب وأحل المسائل: (صفحة 128)

قطعة كرتون طولها $24cm$، وعرضها $9cm$ ، أزيل منها مربعان متطابقان ومستطيلان متطابقان كما في الشكل المجاور، بحيث أمكن طيها، وتكوين صندوق له غطاء منها:



1) أكتب الاقتران $V(x)$ الذي يمثل حجم الصندوق .

$$V(x) = (12 - x)(9 - 2x)x$$

$$V(x) = (12 - x)(9x - 2x^2)$$

$$V(x) = 108x - 24x^3 - 9x^2 + 2x^3$$

$$V(x) = 2x^3 - 33x^2 + 108x$$

2) أحدد مجال الاقتران V .

حتى يتشكل لدينا صندوق، يجب أن تكون أبعاده كلها موجبة وذلك بتحقيق الشروط الثلاثة الآتية معاً :

$$x > 0 \quad \rightarrow \quad x > 0$$

$$12 - x > 0 \rightarrow x < -12$$

$$9 - 2x > 0 \rightarrow x < \frac{9}{2}$$

أي أن مجال الاقتران $V(x)$ هو $\left(0, \frac{9}{2}\right)$

3) أجد أبعاد الصندوق بحيث يكون حجمه أكبر ما يمكن.

$$V(x) = 2x^3 - 33x^2 + 108x$$

$$\acute{V}(x) = 6x^2 - 66x + 108$$

$$\acute{V}(x) = 6x^2 - 66x + 108$$

$6x^2 - 66x + 108 = 0$

$x^2 - 11x + 18 = 0$

$(x-9)(x-2) = 0$

$x - 9 = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{x = 9}$

$x - 2 = 0 \ \rightarrow \boxed{x = 2}$

القيمة 9 خارج المجال ، إذن تهمل ، فتكون القيمة الحرجة الوحيدة ضمن المجال هي $x = 2$.

$\acute{V}(x) = 12x - 66$

$\acute{\acute{V}}(2) = 12(2) - 66$

$\acute{\acute{V}}(2) = 24 - 66$

$\acute{\acute{V}}(2) = -42 < 0$

وعليه يكون حجم الصندوق أكبر ما يمكن عندما تكون أبعاده : $2\ m , 5\ m , 10\ m$

ويكون حجمه عندئذ $V(2) = 100\ m^3$

4) أجد النقطة الواقعة على منحنى العلاقة : $4x^2 + y^2 = 4$ ، والتي هي أقرب ما يمكن إلى النقطة $(0,1)$.

لتكن النقطة (x, y) على منحنى العلاقة $4x^2 + y^2 = 4$ ، ولتكن المسافة بينها وبين النقطة $(0,1)$ هي L حيث :

$4x^2 + y^2 = 4$

$4x^2 = 4 - y^2$

$x^2 = \dfrac{4 - y^2}{4}$

$x = \pm\sqrt{\dfrac{4 - y^2}{4}}$

$L = \sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2}$

$$L = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$$

$$L = \sqrt{\frac{4-y^2}{4} + y^2 - 2y + 1}$$

$$L = \sqrt{1 - \frac{y^2}{4} + y^2 - 2y + 1}$$

$$L = \sqrt{\frac{3}{4}y^2 - 2y + 2}$$

$$\frac{dL}{dy} = \frac{(2)\frac{3}{4}y - 2}{2\sqrt{\frac{3}{4}y^2 - 2y + 2}}$$

$$\frac{dL}{dy} = \frac{\frac{3}{4}y - 1}{\sqrt{\frac{3}{4}y^2 - 2y + 2}} = 0$$

$$\frac{3}{4}y - 1 = 0$$

$$\frac{3}{4}y = 1$$

$$y = \frac{4}{3}$$

إذن توجد قيمة حرجة وحيدة ضمن مجال $L(y)$ وهي $y = \frac{4}{3}$

وبمقارنة $L(\frac{4}{3})$ ، مع $L(-2)$ و $L(2)$ نجد أن $L\left(\frac{4}{3}\right)$ قيمة صغرى مطلقة لأن :

$$L(2) = \sqrt{\frac{3}{4}(2)^2 - 2(2) + 2}$$

$$L(2) = \sqrt{3 - 4 + 2}$$

$$L(2) = \sqrt{1}$$

$L(2) = 1$

$L(-2) = \sqrt{\frac{3}{4}(-2)^2 - 2(-2) + 2}$

$L(-2) = \sqrt{3 + 4 + 2}$

$L(-2) = \sqrt{9}$

$L(-2) = 3$

$L(\frac{4}{3}) = \sqrt{\frac{3}{4}(\frac{4}{3})^2 - 2(\frac{4}{3}) + 2}$

$L\left(\frac{4}{3}\right) = \sqrt{\frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{4}{3}\right) + 2}$

$L\left(\frac{4}{3}\right) = \sqrt{\frac{3}{4}\left(\frac{16}{9}\right) - 2\left(\frac{4}{3}\right) + 2}$

$L\left(\frac{4}{3}\right) = \sqrt{\frac{4}{3} - \frac{8}{3} + \frac{6}{3}}$

$L\left(\frac{4}{3}\right) = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$L\left(\frac{4}{3}\right) \approx 0.82$

تكون L قيمة صغرى محلية ومطلقة عندما $y = \frac{4}{3}$ ، وتكون x

$x = \pm\sqrt{\frac{4 - \left(\frac{4}{3}\right)^2}{4}}$

$$x = \pm\sqrt{\frac{4 - \left(\frac{16}{9}\right)}{4}}$$

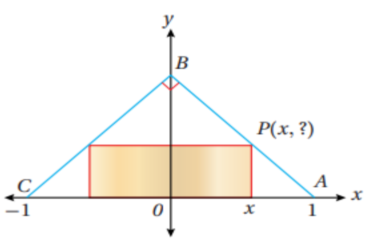
$$x = \pm\sqrt{\frac{\frac{20}{9}}{4}}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{20}{36}}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{5}{9}}$$

$$x = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$$

إذن أقرب نقطتين من نقاط المنحنى إلى النقطة $(0,1)$ هما : $\left(\frac{\sqrt{5}}{3},\frac{4}{3}\right)$ و $\left(-\frac{\sqrt{5}}{3},\frac{4}{3}\right)$



يبين الشكل المجاور مستطيلاً مرسوماً داخل مثلث قائم الزاوية.

وهو متطابق الضلعين ، وطول قاعدته 2 وحدة طول :

5) أجد الإحداثي y للنقطة P بدلالة x .

المثلث قائم ومتطابق الضلعين ، إذن قياس كل زاوية من زوايا قاعدته $\frac{\pi}{4}$

ميل المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ هو $\tan\frac{3\pi}{4} = -1$ وهو يمر بالنقطة $A(1,0)$

معادلة $\overleftrightarrow{AB}$ هي : $y - 0 = -1(x-1) \to y = 1 - x$

إذن الإحداثي y للنقطة P هو $1 - x$

6) أكتب مساحة المستطيل بدلالة x .

مساحة المستطيل = طوله × عرضه

$$A = 2xy = 2x(1-x) = 2x - 2x^2 \ \ ,0 < x < 1$$

7) أجد أكبر مساحة ممكنة للمستطيل.

$$A = 2x - 2x^2$$

$$\acute{A}(x) = 2 - 4x$$

$$\acute{A}(x) = 2 - 4x$$

$$2 - 4x = 0$$

$$2 = 4x$$

$$x = \frac{2}{4}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$A(0) = A(1) = 0 \, , A\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

للاقتران A قيمة عظمى مطلقة هي : $A\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ ، إذن أكبر مساحة ممكنة للمستطيل هي $\frac{1}{2}$ وحدة مربعة .

8) أجد أبعاد المستطيل التي تجعل مساحته أكبر ما يمكن.

الأبعاد التي تجعل مساحة المستطيل أكبر ما يمكن هي : $2x = 1$ ، والعرض : $y = 1 - x = \frac{1}{2}$

يمثل الاقتران $p = 150 - 0.5x$ سعر البدلة الرجالية الذي حددته إحدى الشركات ، حيث x عدد البدلات المبيعه . ويمثل الاقتران $C(x) = 4000 + 0.25x^2$ تكلفة انتاج x بدلة .

9) أجد اقتران الإيراد.

$$R(x) = xp(x)$$

$$R(x) = 150x - 0.5x^2$$

10) أجد اقتران الربح.

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

$$P(x) = 150x - 0.5x^2 - 4000 - 0.25x^2$$

$$\acute{P}(x) = 150x - 0.75x^2 - 4000$$

11) أجد عدد البدلات اللازم بيعها لتحقيق أكبر ربح ممكن، ثم أجد أكبر ربح ممكن.

$$P'(x) = 150x - 1.5x$$

$$P'(x) = 0 \rightarrow 150 - 1.5x = 0 \rightarrow x = 100$$

$$P''(x) = -1.5$$

$$P''(100) = -1.5 < 0$$

إذن لتحقيق أكبر ربح ممكن يلزم بيع 100 بدله ، وتكون قيمة الربح :

$$P(100) = 15000 - 7500 - 4000 = 100\, JD$$

12) أجد سعر البدلة الواحدة الذي يحقق أعلى ربح ممكن.

$$P(100) = 150 - 0.5(100) = 100\, JD$$

13) تنتج مزرعة للتفاح 30 صندوقاً من الشجرة الواحدة تقريباً عند زراعة 20 شجرة في كل فدان من الأرض. ويقل إنتاج الشجرة الواحدة بمقدار صندوق عند زراعة شجرة إضافية في كل فدان بسبب قرب الأشجار الشديد بعضها من بعض. ما عدد الأشجار التي يجب زراعتها في كل فدان لتحقيق أكبر إنتاج ممكن؟

ليكن عدد الأشجار التي ستزرع في الفدان هو x شجرة حيث $x \geq 20$

إذن عدد الأشجار الزائدة على العشرين شجرة هو: $x - 20$

سينقص عدد الصناديق التي تنتجها كل شجرة بمقدار $x - 20$ صندوق

ويكون عدد الصناديق التي تنتجها كل شجرة : $30 - (x - 20) = 50$

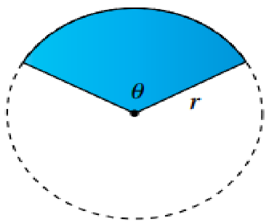
سيكون اقتران الانتاج الكلي من الفدان : (عدد الاشجار× عدد الصناديق من كل شجرة)

$$N(x) = x(50 - x) = 50x - x^2$$

$$N'(x) = 50 - 2x$$

$$N'(x) = 0 \rightarrow 50 - 2x = 0 \rightarrow x = 25$$

إذن يتحقق أكبر إنتاج عندما يتم زراعة 25



لدى مزارع P متراً طولياً من سياج ، يرغب في استعماله كاملاً لتسييج حقل رعي على شكل قطاع دائري، زاويته θ بالراديان ، في دائرة نصف قطرها r متراً كما في الشكل المجاور :

14) أثبت أن طول السياج اللازم إحاطة الحقل به هو : $P = r(\theta + 2)$.

ليكن P طول قوس القطاع الدائري المظلل ، إذن :

$$P = r + r + L = 2r + r\theta = r(2 + \theta)$$

15) أثبت أن مساحة القطاع هي : $A = \frac{1}{2}Pr - r^2$.

لتكن L مساحة القطاع الدائري المظلل ، إذن :

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta$$

وبما أن $P = r(2 + \theta)$ فإن $\theta = \frac{P-2r}{r} = \frac{P}{r} - 2$

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta$$

$$= \frac{1}{2}r^2\left(\frac{P}{r} - 2\right)$$

$$= \frac{1}{2}Pr - r^2$$

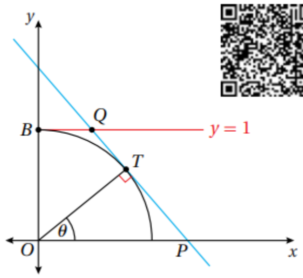
16) أجد نصف قطر القطاع بدلالة P الذي تكون عنده مساحة الحقل أكبر ما يمكن .

$$\acute{A}(r) = \frac{1}{2}P - 2r$$

$$\acute{A}(r) = 0 \rightarrow \frac{1}{2}P - 2r = 0 \rightarrow r = \frac{1}{4}P$$

$$\acute{\acute{A}}(r) = -2 \rightarrow \acute{\acute{A}}\left(\frac{1}{4}P\right) = -2 < 0$$

تكون مساحة الحقل أكبر ما يمكن عندما $r = \frac{1}{4}P$



تقع النقطة T على دائرة الوحدة التي معادلتها : $x^2 + y^2 = 1$ ، حيث تصنع القطعة المستقيمة OT الزاوية θ مع محور x الموجب و : $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ كما في الشكل المجاور :

17) أثبت أن معادلة المستقيم PT هي :

$$x\cos\theta + y\sin\theta = 1$$

$$\sin\theta = \frac{y}{1}, 1 \cos\theta = \frac{x}{1} \rightarrow T(\cos\theta, \sin\theta)$$

ميل OT يساوي $\tan\theta$ لأن زاوية ميله θ، ومنه فإن ميل TP يساوي $\frac{-\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{-1}{\tan\theta}$ لأنه يعامد OT

معادلة TP :

$$y - \sin\theta = \frac{-\cos\theta}{\sin\theta}(x - \cos\theta)$$

$$y\sin\theta - \sin^2\theta = -\cos\theta\,(x - \cos\theta)$$

$$y\sin\theta - \sin^2\theta = -x\cos\theta + \cos^2\theta$$

$$y\sin\theta + x\cos\theta = 1$$

18) أثبت أن مساحة شبه المنحرف $OBQP$ تعطى بالاقتران الآتي :

$$A = \frac{2 - \sin\theta}{2\cos\theta}$$

لإيجاد OP نضع $y = 1$ في معادلة المستقيم TP فنجد أن :

$$A = \frac{1}{2}(OP + BQ)(OB)$$

$$0 + x\cos\theta = 1$$

$$x = \frac{1}{\cos\theta} = OP$$

لإيجاد BQ نضع $y = 1$ في معادلة المستقيم TP فنجد أن :

$$\sin\theta + x\cos\theta = 1$$

$$x = \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} = BQ$$

ومنه تكون مساحة شبه المنحرف هي:

$$A(\theta) = \frac{1}{2}(OP + BQ)(OB)$$

$$A(\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos\theta} + \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}\right)(1)$$

$$A(\theta) = \frac{2-\sin\theta}{2\cos\theta}$$

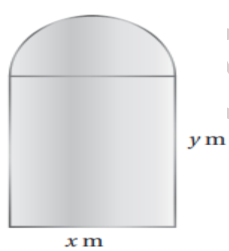
19) أجد قياس الزاوية θ الذي تكون عنده مساحة شبه المنحرف أقل ما يمكن .

$$\acute{A}(\theta) = \frac{(2\cos\theta)\,(-\cos\theta) - (2-\sin\theta)\,-(-2\sin\theta)}{4\cos^2\theta}$$

$$\acute{A}(\theta) = \frac{2\sin\theta - 1}{2\cos^2\theta}$$

$$\acute{A}(\theta) = 0 \to 2\sin\theta = \frac{1}{2} \to \theta = \frac{\pi}{6}$$

تكون مساحة شبه المنحرف أقل ما يمكن عندما $\theta = \frac{\pi}{6}$



20) يبين الشكل المجاور نافذة مكونة من جزأين،

أحدهما علوي على شكل نصف دائرة قطرها xm ،

والآخر سفلي على شكل مستطيل عرضه xmوارتفاعه ym .

صنع الجزء العلوي من زجاج ملون يسمح بمرور 1 وحدات من ضوء لكل متر مربع ، وصنع الجزء السفلي من زجاج شفاف يسمح بمرور 3 وحدات ضوء لكل متر مربع ، أجد قيمة كل من x و y التي تجعل كمية الضوء المار خلال النافذة أكبر ما يمكن ، علماً بأن $10m$ من المعدن الرقيق استعمل في تشكيل إطار النافذة كاملاً ، بما في ذلك القطعة الفاصلة بين الجزأين .

لتكن كمية الضوء المارة خلال النافذة كاملة Q

$$Q = 3xy + \frac{1}{2}\times\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

$$Q = 3xy + \frac{1}{8}\pi x^2$$

محيط النافذة بالإضافة إلى القطعة الفاصلة بين الجزأين هو L

$$Q = 2x + 2y + \pi\frac{x}{2} = 10 \to y = 5 - \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)x$$

ومنه فإن كمية الضوء تصبح:

$$Q(x) = 3x\left(5 - \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)x\right) + \frac{1}{8}\pi x^2 \quad ,0 \leq x \leq \frac{120}{24 + 5\pi}$$

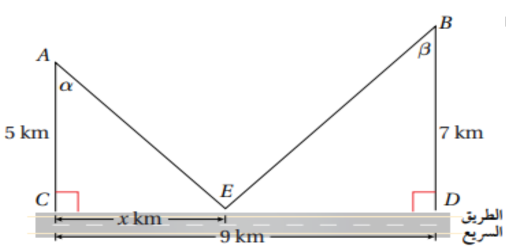
$$Q(x) = 15x - \left(3 + \frac{5\pi}{8}\right)x^2$$

$$\acute{Q}(x) = 15 - \left(6 + \frac{5\pi}{4}\right)x$$

$$\acute{Q}(x) = 0 \to x = \frac{60}{24 + 5\pi}$$

إذن تكون كمية الضوء المار خلال أكبر ما يمكن عندما:

$$x = \frac{60}{24 + 5\pi} \;,\; \frac{60 + 10\pi}{24 + 5\pi}$$



يمارس يوسف هواية ركوب الدراجات، وفي أحد الأيام، انطلق على دراجته من البيت عند النقطة A إلى المدرسة عند النقطة B ، ماراً بالنقطة E الواقعة على حافة الطريق السريع كما في الشكل المجاور:

21) إذا كان الاقتران L يمثل المسافة التي يقطعها يوسف من البيت إلى المدرسة ، فأكتب L بدلالة x.

$$L = AE + EB$$

$$L = \sqrt{x^2 + 25} + \sqrt{(9 - x)^2 + 49} \quad ,0 \leq x \leq 9$$

22- أثبت أنه إذا كان : $\frac{dL}{dx} = 0$ ، فإن : $\sin\alpha = \sin\beta$.

$$\frac{dL}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+25}} + \frac{-(9-x)}{\sqrt{(9-x)^2+49}}$$

$$\frac{dL}{dx} = 0 \rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+25}} = \frac{9-x}{\sqrt{(9-x)^2+49}} \rightarrow \sin\alpha = \sin\beta$$

23) أجد قيمة x التي تجعل المسافة التي يقطعها يوسف أقل ما يمكن .

من الفرع السابق ، بما ان $\sin\alpha = \sin\beta$ والزاويتان α و β حادتان ، إذن $\alpha = \beta$

ومنه فإن $tan\,\alpha = tan\,\beta$ أي :

$$\frac{x}{5} = \frac{9-x}{7}$$

$$7x = 45 - 5x$$

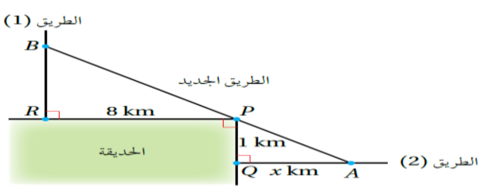
$$12x = 45$$

$$x = \frac{45}{4}$$

$$x = 3.75$$

إذن قيمة x التي تجعل المسافة التي يقطعها يوسف أقل ما يمكن هي $3.75\ km$

24) يبين الشكل المجاور مدخلين لحديقة عامة عند النقطة R والنقطة Q ، ويمكن الوصول إلى هذين المدخلين من طريقين عموديين على ضلعي الحديقة،



أرادت البلدية إنشاء طريق جديد يصل بين الطريقين القديمين ، ويمر بالنقطة P التي تمثل زاوية الحديقة ، فاختارت النقطة A والنقطة B على الطريقين القديمين ليكون طول الطريق الجديد أقصر ما يمكن ، علماً بأن النقطة A تقع على بعد xkm من النقطة Q . أجد قيمة x التي تجعل طول الطريق الجديد أقصر ما يمكن .

ليكن L طول AB ، النقاط A و B و P على استقامة واحدة ، إذن المثلثان القائمان PRB و AQP متشابهان ، ينتج عن ذلك : $\frac{BR}{1} = \frac{8}{x} \rightarrow BR = \frac{8}{x}$

$$L = AB + PB$$

$$L = \sqrt{1+x^2} + \sqrt{64 + \left(\frac{8}{x}\right)^2}$$

$$L = \sqrt{1+x^2} + \sqrt{\frac{64x^2 + 64}{x^2}}$$

$$L = \sqrt{1+x^2} + \frac{8}{x}\sqrt{1+x^2}$$

$$L = \sqrt{1+x^2}\left(1 + \frac{8}{x}\right) \quad , x > 0$$

$$\frac{dL}{dx} = \left(\sqrt{1+x^2}\right)\left(-\frac{8}{x^2}\right) + \left(1 + \frac{8}{x}\right)\left(\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$\frac{dL}{dx} = \left(\sqrt{1+x^2}\right)\left(-\frac{8}{x^2}\right) + \left(1 + \frac{8}{x}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$\frac{dL}{dx} = \left(-\frac{8\sqrt{1+x^2}}{x^2}\right) + \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{8}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$\frac{dL}{dx} = -\frac{8\sqrt{1+x^2}}{x^2} + \frac{8+x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$-\frac{8\sqrt{1+x^2}}{x^2} + \frac{8+x}{\sqrt{1+x^2}} = 0$$

$$\frac{8+x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{8\sqrt{1+x^2}}{x^2}$$

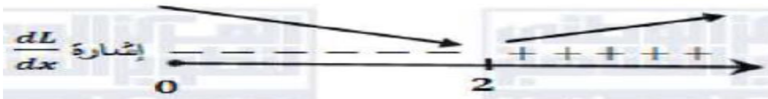
$$8x^2 + x^3 = 8(1+x^2)$$

$$8x^2 + x^3 = 8 + 8x^2$$

$x^3 = 8$

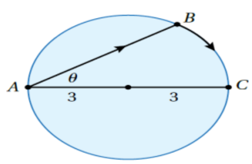
$x = 2$

إذن قيمة x التي تجعل طول الطريق الجديد أقصر ما يمكن هي : $x = 2km$



مهارات التفكير العليا: صفحة 131

25) تبرير : يقف رجل عند النقطة A على شاطىء بحيرة دائرية نصف قطرها $3km$ ، وهو يريد الوصول إلى النقطة C المقابلة تماماً للنقطة A ، على الجانب الآخر من البحيرة في أقصر وقت ممكن كما في الشكل المجاور . يمكن للرجل أن يجدف بزورق من النقطة A إلى النقطة B بسرعة $3km/h$ ، ثم يركض حول حافة البحيرة بسرعة $6km/h$ ،



أحدد موقع النقطة B ليصل الرجل من النقطة A إلى النقطة C في أقل وقت ممكن؟ أبرر إجابتي.

المثلث ABC قائم الزاوية في B لأن الزاوية ABC محيطية على قطر، ومنه فإن : $\cos \theta = \frac{x}{6}$

قياس الزاوية COB يساوي 2θ لانها مركزية مشتركة مع المحيطية CAB بالقوس نفسه .

ليكن الزمن الكلي الذي يحتاجه الرجل للوصول إلى النقطة C هو T

$$T = T_{A\to B} + T_{B\to C}$$

$$T = \frac{x}{3} + \frac{L}{6}$$

$$T = \frac{6\cos\theta}{3} + \frac{3(2\theta)}{6}$$

$$T = 2\cos\theta + \theta \qquad ,0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{dT}{d\theta} = 2(-\sin\theta) + 1$$

$$\frac{dT}{d\theta} = -2\sin\theta + 1$$

$$1 - 2\sin\theta = 0$$

$$1 - 2\sin\theta = 0$$

$$2\sin\theta = 1$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}$$

نقارن الزمن عند النقطة الحرجة مع الزمن عند طرفي المجال وهما $0, \frac{\pi}{2}$

$$T(0) = 2\cos(0) + (0)$$

$$T(0) = 2(1)$$

$$\boxed{T(0) = 2\ h}$$

$$T(\frac{\pi}{6}) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + (\frac{\pi}{6})$$

$$T(\frac{\pi}{6}) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (\frac{\pi}{6})$$

$$T(\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3} + (\frac{\pi}{6})$$

$$\boxed{T\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2.25\ h}$$

$$T(\frac{\pi}{2}) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + (\frac{\pi}{2})$$

$$T(\frac{\pi}{6}) = 2(0) + (\frac{\pi}{2})$$

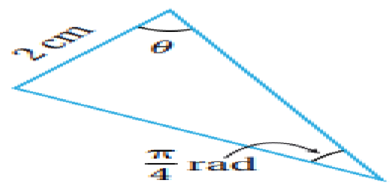
$$T(\frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{T\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1.57\ h}$$

إذن القيمة الصغرى للزمن تكون عندما $\theta = \frac{\pi}{2}$ ، أي عندما تنطبق B على A ويقطع الرجل القوس $\widehat{AB}$ كاملاً راكضاً على اليابسة دون تجديف في الماء .

تحد : يبين الشكل المجاور مثلثاً ، قياس إحدى زواياه $\frac{\pi}{4} = rad$ ، ومقابلها ضلع طوله $2cm$:

26) أثبت أن مساحة المثلث A تعطى بالاقتران : $A = \sin 2\theta - \cos 2\theta + 1$.



ليكن طول الضلع الاخر من ضلعي الزاوية θ هو x ، فيكون قياس الزاوية المقابلة له هو

$$\pi - \theta - \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{3\pi}{4} - \theta$$

ولتكن مساحة هذا المثلث A فإن :

$$A = \frac{1}{2} \times 2 \times x \times \sin\theta$$

وبتطبيق قانون الجيوب على هذا المثلث ينتج:

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{2}{\frac{3\pi}{4} - \theta}$$

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{2}{\frac{3\pi}{4} - \theta}$$

$$\frac{2}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{x}{\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \theta\right)}$$

$$x = 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \theta\right)$$

$$x = 2\sqrt{2}\left(\sin\frac{3\pi}{4}\cos\theta - \cos\frac{3\pi}{4}\sin\theta\right)$$

$$x = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\right)$$

$$x = 2(\cos\theta + \sin\theta)$$

$$A = \frac{1}{2} \times 2 \times 2(\cos\theta + \sin\theta) \times \sin\theta$$

$$A = 2(\cos\theta + \sin\theta) \times \sin\theta$$

$$A = (2\cos\theta + 2\sin\theta) \times \sin\theta$$

$A = 2\cos\theta\sin\theta + 2\sin^2\theta$

$A = 2\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta + 1 - \cos^2\theta$

$A = 2\cos\theta\sin\theta - (\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 1$

$A = \sin 2\theta - \cos 2\theta + 1$

إذن مساحة المثلث المعطى هي : $A = \sin 2\theta - \cos 2\theta + 1$

27)أجد مجال الاقتران في السؤال السابق.

المجال هو الفترة التي تكون فيها مساحة المثلث عدداً حقيقياً موجباً ، وهو الفترة $\left(0, \frac{3\pi}{4}\right)$ التي طرفاها جذري اقتران المساحة لأن المساحة عند هذين الحدين تكون صفراً وعند أي عدد بينهما تكون عدداً موجباً ، فإذا كانت $\theta = \frac{\pi}{6}$ ، وتكون مساحة المثلث :

$A = \sin\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{3} + 1$

$A = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + 1$

$A \approx 0.37 + 1$

$A \approx 1.37 \ > 0$

28) أثبت أن أكبر مساحة ممكنة للمثلث هي : $(1+\sqrt{2})cm^2$.

$A = \sin 2\theta - \cos 2\theta + 1$

$\acute{A} = 2\cos 2\theta + 2\sin 2\theta$

$2\cos 2\theta + 2\sin 2\theta = 0$

$2\sin 2\theta = -2\cos 2\theta$

$\frac{2\sin 2\theta}{2\cos 2\theta} = \frac{-2\cos 2\theta}{2\cos 2\theta}$

$\tan 2\theta = -1$

$2\theta = \frac{3\pi}{4}$

$\left[2\theta = \frac{3\pi}{4}\right] \times \frac{1}{2}$

$\theta = \frac{3\pi}{8}$

توجد قيمة حرجة وحيدة ضمن الاقتران هي : $\theta = \frac{3\pi}{8}$

لذلك نقارن قيمة الاقتران عند النقطة الحرجة مع قيمته عند طرفي المجال.

$$A = \sin 2\theta - \cos 2\theta + 1$$

$$A(0) = \sin 2(0) - \cos 2(0) + 1$$

$$A(0) = \sin 0 - \cos 0 + 1$$

$$A(0) = 0 - 1 + 1$$

$$\boxed{A(0) = 0}$$

$$A(\frac{3\pi}{8}) = \sin 2(\frac{3\pi}{8}) - \cos 2(\frac{3\pi}{8}) + 1$$

$$A(\frac{3\pi}{8}) = \sin(\frac{3\pi}{4}) - \cos(\frac{3\pi}{4}) + 1$$

$$A(\frac{3\pi}{8}) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 1$$

$$A(\frac{3\pi}{8}) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + 1$$

$$A(\frac{3\pi}{8}) = \frac{2}{\sqrt{2}} + 1$$

$$A(\frac{3\pi}{8}) = \sqrt{2} + 1$$

$$\boxed{A(\frac{3\pi}{8}) \approx 2.41}$$

$$A(\frac{3\pi}{4}) = \sin 2(\frac{3\pi}{4}) - \cos 2(\frac{3\pi}{4}) + 1$$

$$A(\frac{3\pi}{4}) = \sin(\frac{3\pi}{2}) - \cos(\frac{3\pi}{2}) + 1$$

$$A(\frac{3\pi}{4}) = -1 - 0 + 1$$

$$\boxed{A(\frac{3\pi}{4}) = 0}$$

إذن أكبر قيمة ممكنة (العظمى المطلقة) لمساحة المثلث هي : $A(\frac{3\pi}{8}) = \left(1 + \sqrt{2}\right) cm^2$

اختبار نهاية الوحدة: (صفحة 132)

اختار رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

1) مثلث قائم الزاوية ، ساقاه x و y ، ووتره z إذا كان $\frac{dz}{dt} = 1$: وكان $\frac{dx}{dt} = 3\frac{dy}{dt}$ فإن $\frac{dx}{dt}$ عندما $x = 4$ و$y = 3$ هي :

$$z^2 = x^2 + y^2$$

$$z^2 = (4)^2 + (3)^2$$

$$z^2 = 16 + 9$$

$$z^2 = 25$$

$$z = 5$$

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$2(5)(1) = 2(4)(3)\frac{dy}{dt} + 2(3)\frac{dy}{dt}$$

$$10 = 24\frac{dy}{dt} + 6\frac{dy}{dt}$$

$$10 = 30\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{dx}{dt} = 3\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = 3\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = 1$$

a) $\frac{1}{3}$ b) $\boxed{1}$ c) 2 d) 5

2) القيمة العظمى المطلقة للاقتران : $f(x) = 4x - x^2 + 6$ في الفترة $[0,4]$ هي :

$f(x) = 4x - x^2 + 6$

$f'(x) = 4 - 2x$

$4 - 2x = 0$

$2x = 4$

$x = 2$

$f(2) = 4(2) - (2)^2 + 6$

$f(2) = 8 - 4 + 6$

$\boxed{f(2) = 10}$

$f(0) = 4(0) - (0)^2 + 6$

$f(0) = 0 - 0 + 6$

$\boxed{f(0) = 6}$

$f(4) = 4(4) - (4)^2 + 6$

$f(4) = 16 - 16 + 6$

$\boxed{f(4) = 6}$

a) 6 *b)* 2 *c)* $\boxed{10}$ *d)* 12

3) الإحداثي x لنقطة انعطاف الاقتران : $f(x) = x^5 - 5x^4 + 3x + 7$ هو :

$f(x) = x^5 - 5x^4 + 3x + 7$

$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 3$

$f''(x) = 20x^3 - 60x^2$

$20x^3 - 60x^2 = 0$

$x^3 - 3x^2 = 0$

$x^2(x - 3) = 0$

$x-3=0$

$x=3$

a) 0 *b)* 1 *c)* $\boxed{3}$ *d)* -1

4) قيمة x التي تكون عندها قيمة عظمى محلية للاقتران $f(x)=(x-2)(x-3)^2$ هي :

$f(x)=(x-2)(x-3)^2$

$f'(x)=(x-2)2(x-3)(1)+(x-3)^2(1)$

$f'(x)=(x-2)(2x-6)+(x-3)^2$

$f'(x)=(2x^2-6x-4x+12)+(x^2-6x+9)$

$f'(x)=2x^2-6x-4x+12+x^2-6x+9$

$f'(x)=3x^2-16x+21$

$3x^2-16x+21=0$

$(3x-7)(x-3)=0$

$3x-7=0$

$3x=7$

$\boxed{x=\frac{7}{3}}$

$x-3=0$

$\boxed{x=3}$

$f\left(\frac{7}{3}\right)=\left(\frac{7}{3}-2\right)\left(\frac{7}{3}-3\right)^2$

$f\left(\frac{7}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)^2$

$f\left(\frac{7}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{9}\right)$

$\boxed{f\left(\frac{7}{3}\right)=\frac{4}{27}}$

$f(3) = (3-2)(3-3)^2$

$f(3) = (3-2)(3-3)^2$

$\boxed{f(3) = 0}$

a) 3 *b)* $-\frac{7}{3}$ *c)* $\frac{5}{3}$ *d)* $\boxed{\frac{7}{3}}$

5) إذا كانت $[1,25]$ هي مجال الاقتران المتصل f ، الذي مداه $[3,30]$ وكان : $\acute{f}(x) = x < 0$ لجميع قيم 1 بين 25 و $f(25)$ تساوي :

مجال الاقتران $[1,25]$

مدى الاقتران $[3,30]$

المشتقة سالبة لجميع الأعداد الحقيقية $\acute{f}(x) = x < 0$

إذن الاقتران متناقص

$f(25) = 3$

$f(1) = 30$

a) 1 *b)* $\boxed{3}$ *c)* 25 *d)* 30

6)القيمة العظمى (بالوحدات المربعة) لمساحة مثلث قائم الزاوية، طول وتره 10 وحدات هي :

الشكل: مثلث

العلاقة: مساحة مثلث قائم الزاوية $A = \frac{1}{2}xy$

طول وتره $z = 10$

$$10^2 = x^2 + y^2$$

$$y = \sqrt{100 - x^2}$$

$$A = \frac{1}{2}xy$$

$$A = \frac{1}{2}x\sqrt{100 - x^2}$$

$$\acute{A} = \frac{1}{2}\left((x)\left(\frac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}}\right) + \left(\sqrt{100 - x^2}\right)(1)\right)$$

$$\acute{A} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{-x^2}{\sqrt{100 - x^2}}\right) + \left(\sqrt{100 - x^2}\right)\right)$$

$$\acute{A} = \frac{1}{2}\left(\frac{-x^2}{\sqrt{100 - x^2}} + \sqrt{100 - x^2}\right)$$

$$\acute{A} = \frac{1}{2}\left(\frac{-x^2}{\sqrt{100 - x^2}} + \frac{100 - x^2}{\sqrt{100 - x^2}}\right)$$

$$\acute{A} = \frac{1}{2}\left(\frac{-2x^2 + 100}{\sqrt{100 - x^2}}\right)$$

$$\acute{A} = \frac{-2x^2 + 100}{2\sqrt{100 - x^2}} = 0$$

$$2x^2 = 100$$

$$x^2 = 50$$

$$x = \sqrt{50}$$

$$y = \sqrt{100 - \left(\sqrt{50}\right)^2}$$

$$y = \sqrt{100 - 50}$$

$$y = \sqrt{50}$$

$$A = \frac{1}{2} \times \sqrt{50} \times \sqrt{50}$$

$$A = \frac{1}{2} \times 50$$

$$A = 25$$

a) 24 *b)* $\boxed{25}$ *c)* 48 *d)* 50

7) إذا زاد حجم مكعب $24cm^3/min$، وزادت مساحة سطحه بمعدل $12cm^2/min$ ، فإن طول ضلعه في تلك اللحظة هو :

الشكل: مكعب

العلاقة: حجم المكعب وتساوي $V = (x)^3$

العلاقة: المساحة السطحية للمكعب $A = 6x^2$

معدل التغير في حجم المكعب $\frac{dV}{dt} = 24cm^3/min$.

معدل التغير في مساحة سطح المكعب $\frac{dA}{dt} = 12cm^2/min$.

طول الضلع $x = ?$

حجم المكعب = $(\text{طول الضلع})^3$

$$V = (x)^3$$

$$\frac{dV}{dt} = 3x^2 \frac{dx}{dt}$$

$$12 = 3x^2 \frac{dx}{dt}$$

عدد المجاهيل في المشتقة 2، لذلك نحتاج علاقة ثانوية لتقليل عدد المجاهيل.

نستفيد من العلاقة الثانوية وهي مساحة المكعب

$$A = 6x^2$$

$$\frac{dA}{dt} = 12x \frac{dx}{dt}$$

$12 = 12x\frac{dx}{dt}$

$x\frac{dx}{dt} = 1$

$\boxed{\frac{dx}{dt} = \frac{1}{x}}$

$24 = 3x^2\frac{1}{x}$

$24 = 3x$

$\boxed{x = 8\ cm}$

a) $2\ cm$ b) $2\sqrt{2}cm$ c) $4\ cm$ d) $\boxed{8\ cm}$

8) عدد النقاط الحرجة للاقتران : $f(x) = (x-2)^5(x+3)^4$ هو :

$\acute{f}(x) = (x-2)^5 4(x+3)^3(1) + (x+3)^4 5(x-2)^4(1)$

$\acute{f}(x) = (x-2)^5 4(x+3)^3 + (x+3)^4 5(x-2)^4$

$\acute{f}(x) = (x-2)^4(x+3)^3(4(x-2) + 5(x+3))$

$\acute{f}(x) = (x-2)^4(x+3)^3((4x-8) + (5x+15))$

$\acute{f}(x) = (x-2)^4(x+3)^3(4x-8+5x+15)$

$\acute{f}(x) = (x-2)^4(x+3)^3(9x+7)$

$\acute{f}(x) = 0 \rightarrow (x-2)^4(x+3)^3(9x+7) = 0$

$(x-2)^4 = 0$

$x - 2 = 0$

$\boxed{x = 2}$

$(x+3)^3 = 0$

$x + 3 = 0$

$\boxed{x = -3}$

$(9x + 7) = 0$

$9x = -7$

$\boxed{x = -\frac{7}{9}}$

a) 1 *b)* 2 *c)* $\boxed{3}$ *d)* 5

أجد القيمة العظمى المطلقة والقيمة الصغرى المطلقة (إن وجدت) لكل اقتران مما يأتي في الفترة المعطاة:

9) $f(x) = 3x^2 - 2x^3, \ [-5, 1]$

$\acute{f}(x) = 6x - 6x^2$

$6x - 6x^2 = 0$

$6x(1 - x) = 0$

$6x = 0$

$x = 0$

$x = 1$

مجموعة قيم x الحرجة ضمن الفترة $(-5, 1)$ هي : $x = 0$

نقارن قيم الاقتران عند النقطة الحرجة مع قيمتيه عند طرفي الفترة:

$f(0) = 3(0)^2 - 2(0)^3$

$f(0) = 0$

$f(1) = 3(1)^2 - 2(1)^3$

$f(1) = 3 - 2$

$f(1) = 1$

$f(-5) = 3(-5)^2 - 2(-5)^3$

$f(-5) = 75 + 250$

$f(-5)=325$

إذن لهذا الاقتران قيمة عظمى مطلقة هي $f(-5)=325$ وقيمة صغرى مطلقة هي $f(0)=0$

10) $f(x)=\frac{x}{x+3},\ [-1,6]$

$$\acute{f}(x)=\frac{(x+3)(1)-(x)(1)}{(x+3)^2}$$

$$\acute{f}(x)=\frac{(x+3-x)}{(x+3)^2}$$

$$\acute{f}(x)=\frac{3}{(x+3)^2}$$

$\acute{f}(x)>0$ لجميع قيم x ولذا فإن $f(x)$ متصل ومتزايد على مجاله .

ولا يوجد له قيم حرجة ضمن $(-1,6)$ ، قيمة القصوى تكون عند طرفي مجاله .

$$f(-1)=\frac{-1}{-1+3}$$

$$f(-1)=-\frac{1}{2}$$

$$f(6)=\frac{6}{6+3}$$

$$f(6)=\frac{6}{9}$$

$$f(6)=\frac{2}{3}$$

إذن لهذا الاقتران قيمة عظمى مطلقة هي $f(6)=\frac{2}{3}$ وقيمة صغرى مطلقة هي $f(-1)=-\frac{1}{2}$

11) $f(x)=xe^{\frac{x}{2}},\ [-3,1]$

$$\acute{f}(x)=(x)\left(\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)+\left(e^{\frac{x}{2}}\right)(1)$$

$$\acute{f}(x)=\frac{1}{2}xe^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{2}}$$

$$\acute{f}(x) = e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$$

$$\frac{1}{2}x + 1 = 0$$

$$\frac{1}{2}x = -1$$

$$x = -2$$

للاقتران قيمة حرجة وحيده وهي $x = -2$

نقارن قيمته عند النقطة الحرجة مع قيمتيه عند طرفي المجال.

$$f(-3) = -3e^{\frac{-3}{2}}$$

$$f(-3) = \frac{-3}{\sqrt{e^3}}$$

$$f(-3) = \frac{-3}{4.48}$$

$$\boxed{f(-3) \approx -0.669}$$

$$f(-2) = -2e^{\frac{-2}{2}}$$

$$f(-2) = -2e^{-1}$$

$$f(-2) = \frac{-2}{e}$$

$$\boxed{f(-2) \approx -0.735}$$

$$f(1) = e^{\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{f(1) \approx 1.648}$$

إذن لهذا الاقتران قيمة عظمى مطلقة هي $f(1) = 1.648$ وقيمة صغرى مطلقة هي $f(-2) = -0.735$

12) $f(x) = 3\cos x\,,\ [0, 2\pi]$

$\acute{f}(x) = -3\sin x$

$\acute{f}(x) = 0 \to -3\sin x = 0$

$-3\sin x = 0$

$\sin x = 0 \ \to \ \boxed{x = \pi}\ ,\boxed{x = 2\pi}$

للاقتران قيمة حرجة وحيده وهي $x = \pi$

نقارن قيمته عند النقطة الحرجة مع قيمتيه عند طرفي المجال.

$f(0) = 3\cos 0$

$f(0) = 3(1)$

$\boxed{f(0) = 3}$

$f(\pi) = 3\cos \pi$

$f(\pi) = 3(-1)$

$\boxed{f(\pi) = -3}$

$f(2\pi) = 3\cos 2\pi$

$f(2\pi) = 3(1)$

$\boxed{f(2\pi) = 3}$

إذن لهذا الاقتران قيمة عظمى مطلقة هي 3 $f(2\pi) = f(\pi) = 3$

وقيمة صغرى مطلقة هي 3- $f(\pi) = -3$

أجد فترات التزايد وفترات التناقص لكل اقتران مما يأتي، ثم أجد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) لكل اقتران:

13) $f(x) = x^5 + x^3$

$\acute{f}(x) = 5x^4 + 3x^2$

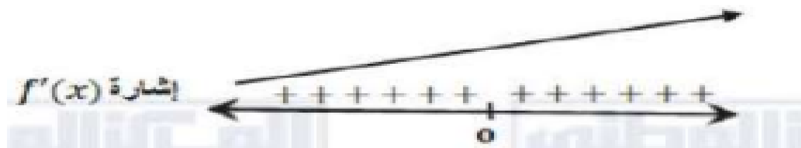
$\acute{f}(x) = 0 \rightarrow 5x^4 + 3x^2 = 0$

$x^2(5x^2 + 3) = 0$

$5x^2 + 3 \neq 0$

$x^2 = 0$

$\boxed{x = 0}$



الاقتران f متزايد على f وليس له قيم قصوى محلية ولا مطلقة .

14) $f(x) = x^4 e^{-x}$

$\acute{f}(x) = (x^4)(-e^{-x}) + (e^{-x})(4x^3)$

$\acute{f}(x) = -x^4 e^{-x} + 4x^3 e^{-x}$

$\acute{f}(x) = e^{-x} x^3 (4 - x)$

$\acute{f}(x) = 0 \rightarrow \; e^{-x} x^3 (4 - x) = 0$

$e^{-x} x^3 = 0$

$\boxed{x = 0}$

$4 - x = 0$

$\boxed{x = 4}$

$f(4) = 4^4 e^{-4}$

$f(4) = \dfrac{256}{e^4}$

$f(0) = 0^4 e^{-0}$

$f(0) = 0$

الاقتران f متزايد على $(0,4)$ ومتناقص على $(-\infty,0)$ و $(4,\infty)$

إذن لهذا الاقتران قيمة عظمى مطلقة هي $f(4) = \frac{256}{e^4}$ وقيمة صغرى مطلقة هي $f(0) = 0$

15) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \ln x$

$\acute{f}(x) = 3\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{x}$

$\acute{f}(x) = x^2 - \frac{1}{x}$

$\acute{f}(x) = 0 \rightarrow x^2 - \frac{1}{x} = 0$

$x^2 = \frac{1}{x}$

$x^3 = 1$

$\boxed{x = 1}$

$f(1) = \frac{1^3}{3} - \ln 1$

$f(1) = \frac{1}{3} - 0$

$f(1) = \frac{1}{3}$

الاقتران f متزايد على $(1,\infty)$ ومتناقص على $(0,1)$

وله قيمه صغرى محلية ومطلقة هي $f(1)=\frac{1}{3}$

أجد فترات التقعر للأعلى وفترات التقعر للأسفل ونقاط الانعطاف (إن وجدت) لمنحنى كل اقتران مما يأتي:

16) $f(x)=x^3-3x^2-9x+4$

$f'(x)=3x^2-6x-9$

$f''(x)=6x-6$

$f''(x)=0 \rightarrow 6x-6=0$

$6x=6$

$\boxed{x=1}$

$f(1)=1^3-3(1)^2-9(1)+4$

$f(1)=1-3-9+4$

$\boxed{f(1)=7}$

الاقتران مقعر للأعلى في $(1,\infty)$ ومقعر للأسفل $(-\infty,1)$

وله نقطة انعطاف هي : $(1,-7)$

17) $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$

$$f'(x)=\frac{(x^2+1)(2x)-(x^2)(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(x^2+1)^2(2) - (2x)(2)(x^2+1)(2x)}{(x^2+1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{(x^2+1)(2) - (2x)(2)(2x)}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(x) = \frac{2x^2 + 2 - 8x^2}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(x) = \frac{2 - 6x^2}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow \frac{2 - 6x^2}{(x^2+1)^3} = 0$$

$$2 - 6x^2 = 0$$

$$6x^2 = 2$$

$$x^2 = \frac{2}{6}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{1}{3}\right)+1}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{4}$$

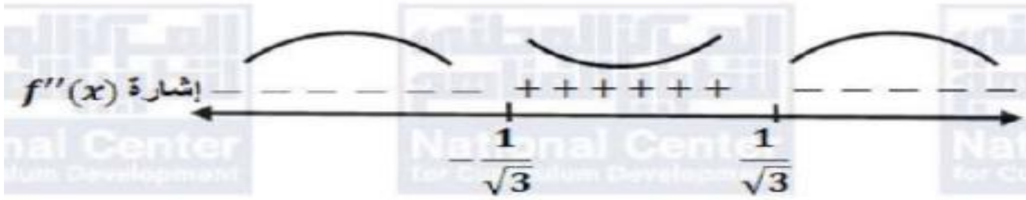
$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2}}{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2}+1}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{1}{3}\right)+1}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{4}$$



الاقتران مقعر للأعلى في $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ومقعر للأسفل $\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ و $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\infty\right)$

وله نقطة انعطاف هي : $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{4}\right)$ $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{4}\right)$

18) $f(x)=(3-x^2)^2$

$f'(x)=2(3-x^2)(-2x)$

$f'(x)=(-4x)(3-x^2)$

$f'(x)=4x^3-12x$

$f''(x)=12x^2-12$

$f''(x)=0 \rightarrow 12x^2-12=0$

$12x^2=12$

$x^2=1$

$\boxed{x=1}$

$\boxed{x=-1}$

$f(1)=(3-1^2)^2$

$f(1)=(3-1)^2$

$f(1)=(2)^2$

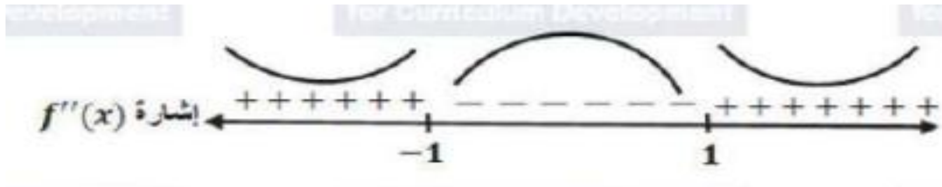
$\boxed{f(1)=4}$

$f(-1)=(3-(-1)^2)^2$

$f(1)=(3-1)^2$

$\boldsymbol{f(-1) = (2)^2}$

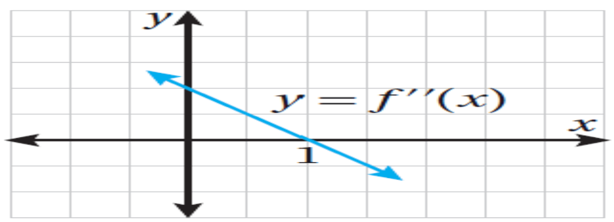
$\boxed{\boldsymbol{f(-1) = 4}}$



الاقتران مقعر للأسفل في $(-1, 1)$ ومقعر للأعلى $(-\infty, -1)$ و $(1, \infty)$

وله نقطة انعطاف هي : $(1, 4)$ $(-1, 4)$

استعمل التمثيل البياني المجاور لمنحنى $\acute{f}(x)$ لإيجاد كل مما يأتي :



19) فترات التقعر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران f .

نلاحظ من الشكل أن إشارة الاقتران $\acute{f}(x)$ كالاتي :

إذن منحنى f مقعر للأعلى في الفترة $(-\infty, 1)$ ومقعر للأسفل في الفترة $(1, \infty)$

20) الإحداثي x لنقاط انعطاف منحنى الاقتران f .

للاقتران f نقطة انعطاف عند $x = 1$

يمثل الاقتران : $s(x) = 5.00 - 0.002x$ سعر منتج (بالدينار) في إحدى الشركات ، حيث x عدد القطع من المنتج ، ويمثل الاقتران : $C(x) = 3.00 - 1.10x$ تكلفة إنتاج x قطعة (بالدينار) من المنتج :

21) أجد اقتران الإيراد.

سعر المنتج الواحد هو : $s(x) = 5.00 - 0.002x$

عدد القطع هي : x

الايراد = عدد القطع × سعر المنتج الواحد

$$R(x) = x \times s(x)$$

$$R(x) = x \times 5.00 - 0.002x$$

$$R(x) = 5x - 0.002x^2$$ اقتران الايراد

22) أجد اقتران الربح.

الربح = الايراد الكلي – التكلفة الكلية

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

$$P(x) = 5x - 0.002x^2 - 3.00 - 1.10x$$

$$P(x) = 3.9x - 0.002x^2 - 3.00$$

23) أجد عدد القطع اللازم بيعها من المنتج لتحقيق أكبر ربح ممكن، ثم أجد أكبر ربح ممكن.

$$P(x) = 3.9x - 0.002x^2 - 3.00$$

$$\acute{P}(x) = 3.9 - 0.004x$$

$$\acute{P}(x) = 0 \rightarrow 3.9 - 0.004x = 0$$

$$3.9 = 0.004x$$

$$x = \frac{3.9}{0.004}$$

$$x = 975$$

$$\acute{\acute{P}}(x) = -0.004 < 0$$

إذن أكبر ربح ممكن يتحقق عند انتاج وبيع 975 قطعة

$$P(975) = 3.9(975) - 0.002(975)^2 - 3.00$$

$$P(975) = 3802.25 - 1901.25 - 3.00$$

$$P(975) = 1898.25\,JD$$ أكبر ربح يساوي

24) أجد سعر المنتج الذي يحقق أكبر ربح ممكن.

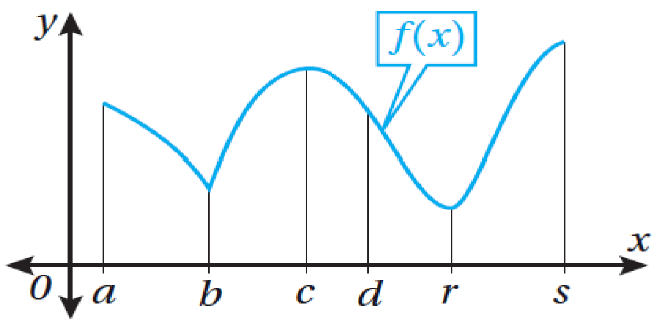
$s(x) = 5.00 - 0.002x$

$s(975) = 5.00 - 0.002(975)$

$s(975) = 5.00 - 1.95$

$s(975) = 3.05\ JD$

25) يبين الشكل التالي منحنى الاقتران $f(x)$. أي النقاط الواقعة على المنحنى تمثل نقطة صغرى أو نقطة عظمى محلية؟ أيهما تمثل قيمة صغرى أو قيمة عظمى مطلقة؟ أبرر إجابتي.



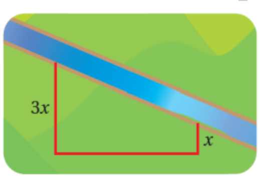
نقطة قيمة صغرى محلية $(b, f(b))$

نقطة قيمة عظمى محلية $(c, f(c))$

نقطة قيمة صغرى محلية ومطلقة $(r, f(r))$

نقطة قيمة عظمى مطلقة $(s, f(s))$

26) لدى مزارع $400\ m$ من السياج ، وهو يريد تسييج حقله الذي يأخذ شكل شبه منحرف ، ويوجد على حافة النهر كما في الشكل التالي ، إذا كان طول أحد الضلعين المتوازيين يساوي 3 أمثال طول الضلع الأخر ، فأجد أكبر مساحه يمكن للمزارع أن يحيطها بهذا السياج ، علماً بأن الجزء المقابل للنهر لا يحتاج إلى تسييج .



طول الضلع المتوازي الأول $x = 3$

طول الضلع المتوازي الثاني $z = 3x$

طول الضلع الثالث $y = 3x$

محيط الحقل المراد تسييجه $P = 400\ m$

العلاقة الرئيسية قانون مساحة شبه المنحرف

مساحة شبه المنحرف تساوي نصف مجموع ضلعيه المتوازيين × الارتفاع المحصور بينهما

$$A = \frac{1}{2}(x + z)y$$

$$A = \frac{1}{2}(x + 3x)y$$

$$A = \frac{1}{2}(4x)y$$

نستفيد من علاقة ثانوية لتقليل عدد المجاهيل قبل الاشتقاق وهو قانون محيط شبه المنحرف لإيجاد قيمة y بدلالة x . ليتم تعويضه في قانون العلاقة الرئيسة.

محيط شبه المنحرف يساوي مجموع أطوال أضلاعه ويساوي

$$P = x + z + y$$

$$400 = x + 3x + y$$

$$400 = 4x + y$$

$$y = 400 - 4x$$

يتم تعويض قيمة y في العلاقة الرئيسية

$$A = \frac{1}{2}(4x)(400 - 4x)$$

$$A(x) = (2x)(400 - 4x)$$

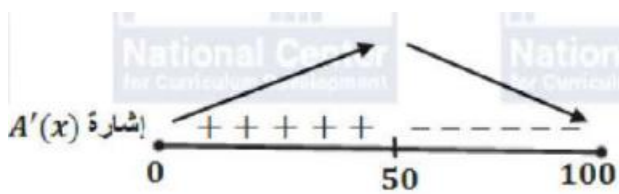
$$A(x) = 800x - 8x^2$$

$$\acute{A}(x) = 800 - 16x$$

$$800 - 16x = 0$$

$$16x = 800$$

$$x = 50$$



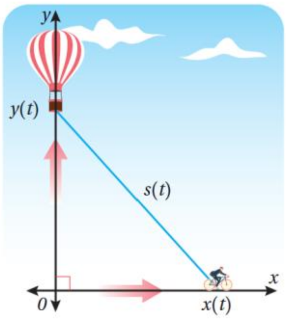
إذن أكبر مساحة ممكنة هي : $A(50)$

$$A(50) = 800(50) - 8(50)^2$$

$$A(50) = 40000 - 20000$$

$$A(50) = 20000\ m^2$$

27) يرتفع بالون رأسياً فوق مستوى طريق مستقيم بمعدل $1\ ft/s$ ، وفي اللحظة التي كان فيها البالون على ارتفاع $65\ ft$ فوق سطح الأرض ، مرت أسفله دراجة تتحرك بسرعة $17\ ft/s$ كما في الشكل التالي ، أجد سرعة تغير المسافة بين البالون والدراجة بعد 3 ثوان من هذه اللحظة .



الشكل: مثلث قائم الزاوية

المسافة بين سطح الأرض والبالون بعد t ثانية $y = 65 + t$.

المسافة التي قطعتها الدراجة خلال t ثانية $x = 17t$.

معدل سرعة البالون $\frac{dy}{dt} = 1\ ft$.

معدل سرعة البالون $\frac{dx}{dt} = 17\ ft$.

المطلوب : $\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=3}$.

العلاقة الرئيسة التي تربط المتغيرات هي فيثاغورس

$$s^2 = x^2 + y^2$$

$$s^2 = (17t)^2 + (65 + t)^2$$

$$s = \sqrt{(17t)^2 + (65 + t)^2}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2(17t)(17) + 2(65 + t)(1)}{2\sqrt{(17t)^2 + (65 + t)^2}}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{(17t)(17) + (65 + t)}{\sqrt{(17t)^2 + (65 + t)^2}}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{289t + 65 + t}{\sqrt{(17t)^2 + (65 + t)^2}}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{290t + 65}{\sqrt{(17t)^2 + (65 + t)^2}}$$

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=3} = \frac{290(3) + 65}{\sqrt{(17(3))^2 + (65 + 3)^2}}$$

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=3} = \frac{870+65}{\sqrt{(51)^2+(68)^2}}$$

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=3} = \frac{935}{\sqrt{2601+4624}}$$

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=3} = \frac{935}{\sqrt{7225}}$$

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=3} = \frac{935}{85}$$

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=3} = 11\ ft/s$$

إذن تتزايد المسافة بين البالون والدراجة بمعدل 11 قدماً في الثانية وذلك بعد مرور 3 ثواني من لحظة مرور الدراجة تحت البالون .