مراجعة مكثفة في التفاضل

السؤال الأول: اذا كانت $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ أجد

$f'(0)$ باستعمال تعريف المشتقة الاولى

الحل:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(0+h)^{\frac{1}{2}} - (0)^{\frac{1}{2}}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} h^{\frac{-1}{2}} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{0} = \infty$$

$f'(0)$ غير موجودة

اذا $f(x)$ غير قابل للاشتقاق عندما $x = 0$

السؤال الثاني: اذا كانت $f(x) = (x-3)^{\frac{1}{3}}$ أجد

$f'(3)$ باستعمال تعريف المشتقة الاولى

الحل:

$$f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(3+h-3)^{\frac{1}{3}} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^{\frac{1}{3}}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{0} = \infty$$

$f'(3)$ غير موجودة

$f(x)$ غير قابل للاشتقاق عندما $x = 3$

السؤال الثالث : ابحث قابلية الاشتقاق للاقتران

$f(x) = |x-2|$ عندما $x = 2$

الحل:

اعادة تعريف $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$$\overset{\text{- -}}{\longleftarrow} \; 2 \; \overset{\text{+ +}}{\longrightarrow}$$

نجد المشتقة من اليمين واليسار

$$f_+'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

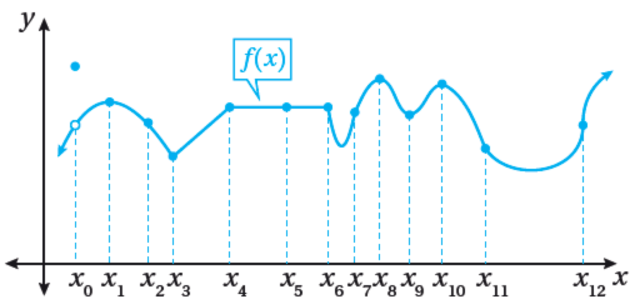
$$= \lim_{h\to 0} \frac{2+h-2-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$$

$$f_-'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{-(2+h)+2-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h} = -1$$

$f_+'(2) \neq f_-'(2)$ $\quad$ $f'(2)$ غير موجودة

السؤال الرابع : حدد قيم x للنقاط التي لا يكون عندها

كل اقتران مما يأتي قابلا للاشتقاق مبررا اجابتي



الحل:

عند x_0 لأن غير متصل

عند x_3, x_4, x_6 رؤوس حادة

عند x_{12} مماس رأسي

السؤال الخامس : أجد مشتقة كل مما يأتي:

1) $f(x)=\sqrt{2x^5+8}$

$$f'(x)=\frac{10x^4}{2\sqrt{2x^5+8}}$$

2) $f(x)=\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}$

$$f'(x)=\frac{1}{3}\left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{-2}{3}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

3) $f(x)=e^{x^5+7x^{\frac{3}{5}}}$

$$f'(x)=\left(5x^4+\frac{21}{5}x^{\frac{-2}{5}}\right)e^{x^5+7x^{\frac{3}{5}}}$$

4) $f(x)=5^{3x}$

$$f(x)=\ln 5\times 5^{3x}\times 3=(3\ln 5)5^{3x}$$

5) $f(x)=\ln\left(7x^3+\sqrt{x}\right)$

$$f'(x)=\frac{21x^2+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{7x^3+\sqrt{x}}$$

6) $f(x)=\log_6 \tan x$

$$f'(x)=\frac{\sec^2 x}{\ln 6\tan x}$$

7) $f(x)=(\cos x)^5$

$$f'(x)=5(\cos x)^4(-\sin x)$$

8) $y=\sqrt[3]{x}\left(\sqrt{x}+3\right)$

$$y'=\left(\sqrt[3]{x}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)+\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}\right)$$

9) $f(x)=\ln x\cos x$

$$f'(x)=-\ln x\sin x+(\cos x)\left(\frac{1}{x}\right)$$

10) $f(x)=\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{-1}{2}}\left(\frac{(x)(1)-(x+1)(1)}{x^2}\right)$$

11) $f(x)=\frac{\sin x+\cos x}{e^x}$

$$f'(x)=\frac{e^x(\cos x-\sin x)-(\sin x+\cos x)e^x}{\left(e^x\right)^2}$$

١٢) $f(x)=\frac{1}{e^x+\sqrt{x}}$

$$f'(x)=\frac{-\left(e^x+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(e^x+\sqrt{x}\right)^2}$$

١٣) $f(t)=\frac{1}{t-\frac{1}{t}}$

$$f(t)=\frac{1}{t-t^{-1}}\Rightarrow f'(t)=\frac{-\left(1+t^{-2}\right)}{\left(t-t^{-1}\right)^2}$$

14) $f(x)=3x-5\cos(\pi x)^2$

$$f'(x)=3-5\left(-\sin(\pi x)^2\right)(2\pi x)\pi$$

$$=3+10\pi x^2\times\sin(\pi x)^2$$

15) $f(x)=\log_3(1+x\ln x)$

$$f'(x)=\frac{x\left(\frac{1}{x}\right)+\ln x(1)}{\ln 3(1+x\ln x)}$$

16) $f(x)=e^{\sin 2x}+\sin\left(e^{2x}\right)$

$$f'(x)=e^{\sin 2x}(\cos 2x)(2)+\cos e^{2x}\times e^{2x}(2)$$

17) $f(x)=\tan^4(\sec(\cos x))$

$$f'(x)=4\tan^3(\sec(\cos x))\sec^2(\sec(\cos x))$$
$$\times\sec(\cos x)\tan x(\cos x)x-\sin x$$

السؤال 6

اذا كانت $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ اثبت أن

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}$$

الحل:

$$f'(x)=\frac{\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}(1)-(x)\left(\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)^{\frac{-1}{2}}(2x)\right)}{\left(\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}-x^2\left(x^2+1\right)^{\frac{-1}{2}}}{\left(x^2+1\right)}$$

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$f'(x)=\frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+1}\left(x^2+1\right)}$$

$$f'(x)=\frac{1}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}$$

السؤال ٧:

اذا كانت $y=\frac{x+1}{x-1}$ حيث $x\neq 1$

اثبت أن $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

السؤال 8:

اذا كان $f(x),g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق عندما $x=0$ وكان

$$f(0)=5,\ f'(0)=-3$$

$g(0)=-1,\ g'(0)=2$ فأجد كلا مما يأتي:

1) $(fg)'(0)$

$$(fg)'(0)=f(0)g'(0)+g(0)f'(0)$$

$$=5(2)+(-1)(-3)=10+3=13$$

2) $\left(\frac{f}{g}\right)'(0)$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(0)=\frac{g(0)f'(0)-f(0)g'(0)}{(g(0))^2}$$

$$= \frac{-1(-3)-5(2)}{(1)^2} = \frac{3-10}{1} = -7$$

3) $(7f - 2fg)'(0)$

$$= 7f'(0) - 2(fg)'$$

$$= 7(-3) - 2(13) = -21 - 26 = -47$$

السؤال 9: اذا كان $f(x) = 9\ln x + \frac{1}{2x^2}$ فأثبت أن $f'(x) = \frac{(3x-1)(3x+1)}{x^3}$

الحل:

$$f'(x) = 9\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{-4x}{(2x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{9}{x} - \frac{4x}{4x^4}$$

$$f'(x) = \frac{9}{x} - \frac{1}{x^3} = \frac{9x^2-1}{x^3}$$

$$f'(x) = \frac{(3x-1)(3x+1)}{x^3}$$

السؤال10: اذا كان $f(x) = 9\ln x + \frac{1}{2x^2}$ فأثبت أن $f'(x) = \frac{(3x-1)(3x+1)}{x^3}$

الحل:

$$f'(x) = 9\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{-4x}{(2x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{9}{x} - \frac{4x}{4x^4}$$

$$f'(x) = \frac{9}{x} - \frac{1}{x^3} = \frac{9x^2-1}{x^3}$$

$$f'(x) = \frac{(3x-1)(3x+1)}{x^3}$$

السؤال 11: اذا كان $A(x) = f(g(x))$ وكان

$f(-2) = 8,\ f'(-2) = 4,\ f'(5) = 3$

$g(5) = -2,\ g'(5) = 6$ ، فأجد $A'(5)$

الحل:

$$A'(5) = f'(g(5))\,g'(5)$$

$$= f'(-2)\times 6 = 4\times 6 = 24$$

السؤال 12:

اذا كـــــــــــــان $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \le 2 \\ mx+b & , x > 2 \end{cases}$

فأجـد قيمـة كـلا مـن m و b اللتـين تجعـلان f قـابلا للاشتقاق عند جميع قيم x الحقيقية، مبرراً إجابتي

السؤال13: احدد قيمة (قيم) x التي لا يكون عندها كل اقتران مما يأتي قابلا للاشتقاق

1) $f(x) = \frac{x-8}{x^2-4x-5}$

غير قابل للاشتقاق عند $x = 5, -1$

2) $f(x) = \sqrt[3]{3x-6} + 5$

الحل

$$f(x) = (3x-6)^{\frac{1}{3}} + 5$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(3x-6)^{\frac{-2}{3}} \times 3 = \frac{1}{(3x-6)^{\frac{7}{3}}}$$

$$3x-6=0 \Rightarrow 3x=6 \Rightarrow x=2$$

غير قابل للاشتقاق عند $x=2$

3) $f(x)=\left|x^2-9\right|$

الحل:

$$f'\left(-3^-\right)\neq f'\left(-3^+\right)$$

$f'(x)$ غير موجودة عند $x=3,-3$

السؤال 14:

اذا كان $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$ فأجيب عن السؤالين الآتيين

1) أثبت أن $f''(x)=\dfrac{6\ln x-5}{x^4}$

الحل:

$$f'(x)=\frac{x^2\left(\frac{1}{x}\right)-\ln x(2x)}{x^4}$$

$$=\frac{x-2x\ln x}{x^4}=\frac{x(1-2\ln x)}{x^4}$$

$$=\frac{1-2\ln x}{x^3}$$

$$f''(x)=\frac{x^3\left(\frac{-2}{x}\right)-(1-2\ln x)3x^2}{x^6}$$

$$=\frac{-2x^2-(1-2\ln x)3x^2}{x^6}$$

$$=\frac{x^2(-2-3+6\ln x)}{x^6}=\frac{6\ln x-5}{x^4}$$

2) اثبت ان المقدار :

$$x^4 f''(x)+4x^3 f'(x)+2x^2 f(x)+1=0$$

الحل:

$$x^4\left(\frac{6\ln x-5}{x^4}\right)+4x^3\left(\frac{1-2\ln x}{x^3}\right)+2x^2\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)+1$$

$$=6\ln x-5+4-8\ln x+2\ln x+1$$

$$=8\ln x-8\ln x-5+5=0$$

السؤال 15:

اذا كـــان الاقتـــران $y=e^{2x}+e^{-2x}$ فأثبـــت أن $f''(x)=4f(x)$

الحل:

$$f'(x)=2e^{2x}-2e^{-2x}$$

$$f''(x)=4e^{2x}+4e^{-2x}$$

$$=4\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)=4f(x)$$

السؤال 16:

اذا كان الاقتران $f(x)=\sin 4x+\cos 4x$ فأثبت أن $f''(x)+16f(x)=0$

الحل:

$$f(x)=\sin 4x+\cos 4x$$

$$f'(x)=4\cos 4x-4\sin 4x$$

$$f''(x)=-16\sin 4x-16\cos 4x$$

$$=-16(\sin 4x+\cos 4x)$$

$$=-16f(x)$$

$$f''(x)+16f(x)=-16f(x)+16f(x)=0$$

السؤال 17:

اذا كان الاقتران $f(x)=3\sin x-\sin^3 x$

أثبت أن $f'(x)=3\cos^3 x$

الحل:

$$f'(x)=3\cos x-3\sin^2 x\cos x$$

$$=3\cos x\left(1-\sin^2 x\right)$$

$$=3\cos x\left(\cos^2 x\right)$$

$$f'(x)=3\cos^3 x$$

السؤال 18:

اذا كــان $g(x)=\sqrt{5x-1},\ f'(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

أجد $\left(fg(x)\right)'$ عندما $x=1$

الحل:

$$g'(x)=\frac{5}{2\sqrt{5x-1}}$$

$$\left(fg(x)\right)'=f'\left(g(x)\right)g'(x)$$

$$=f'\left(g(1)\right)g'(1)$$

$$=f'(2)\times\frac{5}{4}=\frac{2}{5}\times\frac{5}{4}=\frac{1}{2}$$

السؤال 19:

اذا كانت $u=x^2+3$, $y=u^3+2u+5$

أجد $\dfrac{dy}{dx}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\left(3u^2+2\right)(2x)$$

$$\frac{dy}{dx}=3\left(\left(x^2+3\right)^2+2\right)(2x)$$

السؤال 20:

اذا كانت $x=\sin 3t$, $y=\cos 3t$

أجد $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-3\sin 3t}{3\cos 3t}=-\tan 3t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-3\sec^2 3t\times\frac{1}{3\cos 3t}\Rightarrow\frac{d^2y}{dx^2}=-\sec^3 3t$$

السؤال 21:

$$x=e^{-t},\ y=t^3+t+1,\quad t=0$$

أجد $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2+1}{-e^{-t}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-e^{-t}(6t)-\left(3t^2+1\right)\left(-e^{-t}\right)}{\left(-e^{-t}\right)^2}$$

$$=\frac{-e^{-t}(6t)-\left(3t^2+1\right)\left(-e^{-t}\right)}{\left(-e^{-t}\right)^2}\times\frac{1}{-e^{-t}}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=\frac{0-(0+1)(-1)}{(-1)^2}\times\frac{1}{-1}=-1$$

السؤال 22 احسب $\frac{d^2y}{dx^2}$ للاقتران $x=\tan y$

$$1=\sec^2 y\,\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sec^2 y}=\cos^2 y$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2\cos y(-\sin y)\frac{dy}{dx}$$

$$=-2\sin y\cos y\left(\cos^2 y\right)$$

$$=-2\sin y\cos^3 y$$

السؤال٢٣: احسب $\frac{dy}{dx}$ للعلاقة $y=x^{\sin x}$

$$\ln y=\ln x^{\sin x}$$

$$\ln y=\sin x\ln x$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\sin x\left(\frac{1}{x}\right)+\ln x\cos x$$

$$\frac{dy}{dx}=y\left(\frac{\sin x}{x}+\cos x\ln x\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=x^{\sin x}\left(\frac{\sin x}{x}+\cos x\ln x\right)$$

السؤال٢٤:

اذا كان $f'(3)=5$, $y=f(x^3+2x)$ ، جد $\frac{dy}{dx}$ عندما $x=1$

الحل :

$$\frac{dy}{dx}=f'(x^3+2x)(3x^2+2)$$

$$\frac{dy}{dx}=f'(3)\times 5=5\times 5=25$$

السؤال٢٥:

اذا كـــــان $3-\sin y=x+y$ ، اثبـــــت ان :

$$y''=\frac{\sin y}{(1+\cos y)^3}$$

الحل :

$$-\cos y\ y'=1+y'$$

$$1=y'(1+\cos y)\Rightarrow y'=\frac{-1}{1+\cos y}$$

$$y''=\frac{-1\times\sin y\ y'}{(1+\cos y)^2}=\frac{\sin y}{(1+\cos y)^3}$$

السؤال٢٦: اذا كان

$g(x)=3x^2$, $f(x)=x^3+2x$ ، جد $(f'og)'(1)$

الحل :

$$f(x)=x^3+2x$$

$$f'(x)=3x^2+2\Rightarrow f''(x)=6x$$

$$f''(g(1))\times g'(1)=f''(3)\times 6=108$$

السؤال٢٧:

اذا كـــــان $y=(\sin x+\cos x)^4$ ، اثبـــــت ان :

$$y''+4y=12\cos^2 2x$$

الحل :

$$y'=4(\sin x+\cos x)^3(\cos x-\sin x)$$

$$y''=4(\sin x+\cos x)^3(-\sin x-\cos x)+(\cos x-\sin x)(12(\sin x+\cos x)^2(\cos x-\sin x))$$

$$y''=-4(\sin x+\cos x)^4+12((\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x))$$

$$y'' = -4y + 12(\cos^2 x - \sin^2 x)^2$$
$$y'' = -4y + 12\cos^2 2x$$
$$y'' + 4y = 12\cos^2 2x$$

السؤال٢٨:

اذا كـان $x = \cos n \quad , y = \sin n$ ، اثبـت ان : $\frac{d^2y}{dx^2}$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dn}}{\frac{dx}{dn}} = \frac{\cos n}{-\sin n} = -\cot x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\csc^2 n \times \frac{1}{-\sin n} = -\csc^3 n$$

السؤال٢٩:

اذا كان $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & , x < 2 \\ ax^3 + 9bx - 12 & , x > 2 \end{cases}$ وكان $f'(2)$ موجودة ، جد الثوابت a, b

الحل :

$$a = -1, \ b = 1$$

السؤال٣٠:

اذا كان $y = \tan^2 x + \frac{1}{2}\tan^4 x$ ، اثبت ان :

الحل :

$$y' = 2\tan x \sec^2 x + 2\tan^3 x \sec^2 x$$
$$y' = 2\tan x \sec^2 x (1 + 2\tan^2 x)$$
$$y' = 2\tan x \sec^2 x (\sec^2 x)$$
$$y' = 2\tan x \sec^4 x$$

السؤال٣١:

اذا كـــــان $f(x) = x^3 + ax^2$ ، وكــــان $\lim_{x \to 0} \frac{f'(\frac{1}{3}+h) - f'(\frac{1}{3})}{h} = 8$ ، جد (a)

الحل :

$$f''(\frac{1}{3}) = 8$$

$$f'(x) = 3x^2 + ax$$
$$f''(x) = 6x + a = 8$$
$$f''(x) = 6(\frac{1}{3}) + a = 8$$
$$a = 6$$

مثـال٣٢: يمكن نمذجة الكمية A (بالغرام) المتبقية من عينة كتلتها الابتدائية $20g$ من عنصر البلوتونيوم بعـــد t يومـــا باســـتعمال الاقتـــران: $A(t) = 20\left(\frac{1}{2}\right)^{t/140}$ أجـد معـدل تحلـل عنصـر البلوتونيوم عندما $t = 2$

الحل:

$$A'(t) = 20\left(\ln\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{140}} \times \frac{1}{140}$$

$$A'(2) = 20\left(\ln\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{140}} \times \frac{1}{140}$$

مثـال٣٣:

يمثـل الاقتـران: $s(t) = t^2 - 7t + 8, t \geq 0$ موقـع جسم يتحرك على خط مستقيم حيث s الموقع بالامتار و t الزمن بالثواني

1) اجد سرعة الجسم المتجهة وتسارعه عندما $t = 4$

الحل:

$$s(t) = t^2 - 7t + 8$$

$$v(t) = 2t - 7$$

$v(4) = 2(4) - 7 = 1$

$a(t) = 2 \Rightarrow a(4) = 2$

2) أجد قيم t التي يكون عنجها الجسم في حالة سكون لحظي

الحل:

$v(t) = 2t - 7 = 0$

$2t = 7 \Rightarrow t = \frac{7}{2} = 3.5$

3) في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t = 2$

الحل:

$v(2) = 2(2) - 7 = -3 < 0$

الحركة بعكس الاتجاه الاصلي (لليسار)

4) متى يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي

الحل:

$s(0) = 8$

$s(t) = t^2 - 7t + 8 = 8$

$t = 0 \ , 7$

نختار $t = 7$

مثال 34:

يمثل الاقتران: $s(t) = 4 - \sin t, t \geq 0$ موقع جسيم يتحرك في مسار مستقيم حيث s الموقع بالامتار و t الزمن بالثواني:

1) أجد سرعة الجسيم المتجهة وتسارعه بعد t ثانية

الحل:

$v(t) = s'(t) = -\cos t$

$a(t) = v'(t) = \sin t$

2) أجد موقع الجسيم عندما كان في حالة سكون أول مرة بعد انطلاقه

الحل:

سكون يعني $v(t) = 0$

$v = -\cos t = 0$

$t = \frac{\pi}{2}$

$s\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 - \sin\frac{\pi}{2} = 4 - 1 = 3$

3) أجد موقع الجسيم عندما يصل إلى أقصى سرعة متجهة مبررا إجابتي.

الحل:

$\sin t = 0 \Rightarrow s(t) = 4 - 0 = 4$

$\sin t = 1 \Rightarrow s(t) = 4 - 1 = 3$

$\sin t = -1 \Rightarrow s(t) = 4 - -1 = 5$

مثال35: أجد معادلة المماس لكل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

1) $f(x) = x + \cos 2x \quad , x = 0$

الحل:

$f(0) = 0 + \cos 0 = 1 \qquad \therefore (0,1)$

$f'(x) = 1 + (-2\sin 2x(2))$

$f'(0) = 1 + 0 = 1$

$y - 1 = 1(x - 0) \Rightarrow y = x + 1$

2) $f(x) = 2^x \quad , x = 0$

الحل:

$f(0) = 2^0 = 1 \qquad \therefore (0,1)$

$f'(x) = \ln 2 \times 2^x$

$$f\,'(0)=\ln 2\times 2^0=\ln 2$$

$$y-1=\ln 2(x-0)$$

$$y=(\ln 2)x+1$$

3) $f(x)=\sqrt{x+1}\sin\dfrac{\pi x}{2}\quad ,x=3$

الحل:

$$f(3)=2\sin\frac{3\pi}{2}=2(-1)=-2$$

$$\therefore (3,-2)$$

$$f\,'(x)=\sqrt{x+1}\left(\cos\frac{\pi x}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin\frac{\pi x}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)$$

$$f\,'(3)=2\left(\cos\frac{3\pi}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin\frac{3\pi}{2}\left(\frac{1}{2\times 2}\right)$$

$$=0+(-1)\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{-1}{4}$$

$$y+2=\frac{-1}{4}(x-3)$$

$$y=\frac{-1}{4}x+\frac{3}{4}-2\Rightarrow y=\frac{-1}{4}x-\frac{5}{4}$$

مـثال٣٦: إذا كـان الاقتران: $y=e^{\sin x}$ فأجد ميل مماس منحنى الاقتران عند النقطة $(0,1)$

الحل:

$$f\,'(x)=(\cos x)e^{\sin x}$$

$$f\,'(0)=(\cos 0)e^{\sin 0}=1\times 1=1$$

مثال37: أجد معادلة المماس لمنحنى كل علاقة مما يأتي عند النقطة المعطاة:

1) $x^2+xy+y^2=13\quad ,(-4,3)$

$$2x+x\frac{dy}{dx}+y+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2x-y}{x+2y}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(-4,3)}=\frac{8-3}{-4+6}=\frac{5}{2}$$

$$y-3=\frac{5}{2}(x+4)$$

2) $x+y-1=\ln(x^2+y^2)\quad ,(1,0)$

$$1+\frac{dy}{dx}=\frac{2x+2y\dfrac{dy}{dx}}{x^2+y^2}$$

$$1+\frac{dy}{dx}=\frac{2+0}{1}$$

$$1+\frac{dy}{dx}=2\Rightarrow\frac{dy}{dx}=1$$

$$y-0=1(x-1)\Rightarrow y=x-1$$

مثال ٣٨: اذا كان الاقتران: $y=e^x-ax$ حيث a عدد حقيقي فأجد معادلة المماس عند نقطة تقاطع الاقتران مع المحور y مبررا إجابتي

الحل: يقطع المنحنى محور y عندما $x=0$

$$y=e^0-0=1\qquad\therefore (0,1)$$

$$y'=e^x-a$$

$$y'(0)=1-a$$

$$y-1=(1-a)(x-0)$$

مثال٣٩: إذا كان الاقتران: $y = ke^x$ حيث $k > 0$ وكان منحناه يقطع المحور y عند النقطة p أجد نقطة تقاطع مماس منحنى الاقتران عند النقطة p مع المحور x

الحل:

يقطع المحور y عندما $x = 0$

$$y = ke^0 = k \qquad \therefore (k,0)$$

$$y' = ke^x$$

$$y'(0) = ke^0 = k$$

$$y - k = k(x - 0)$$

$$y - k = kx$$

يقطع المحور x عندما $y = 0$

$$-k = kx \Rightarrow x = -1 \qquad \therefore (-1,0)$$

مثال٤٠: أجد إحداثيي النقطة (النقاط) التي يكون عندها لمنحنى الاقتران مماس أفقي:

$$f(x) = \frac{2x-1}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2(2) - (2x-1)(2x)}{x^4}$$

$$= \frac{2x^2 - 4x^2 + 2x}{x^4}$$

$$= \frac{2x - 2x^2}{x^4} = 0$$

$$2x - 2x^2 = 0$$

$2x(1-x) = 0 \Rightarrow x = 0$ ليس في المجال

$$x = 1$$

$$f(1) = \frac{2-1}{1} = 1 \qquad \therefore (1,1)$$

مثال٤١ : أجد معادلة المماس لمنحنى المعادلة وسيطية مما يأتي عند النقطة المحددة بقيمة t المعطاة:

$$x = \sec^2 t - 1 \ , \ y = \tan t \ , \ t = -\frac{\pi}{4}$$

$$x\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2 - 1 = 1$$

$$y\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

$$\therefore (1,-1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sec^2 x}{2\sec x(\sec x \tan x)}$$

$$= \frac{1}{2\tan x} = \frac{1}{2\tan\frac{-\pi}{4}} = \frac{1}{2(-1)} = \frac{-1}{2}$$

$$y + 1 = \frac{-1}{2}(x-1)$$

$$y = \frac{-1}{2}x + \frac{1}{2} - 1 \Rightarrow y = \frac{-1}{2}x - \frac{1}{2}$$

مثال٤٣: يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية: $x = a\cos t \ , \ y = b\sin t$ حيث ____________: $0 \le t \le 2\pi$ أجد المقطع y لمماس المنحنى عندما $t = \frac{\pi}{4}$ بدلالة a و b

الحل:

$$x\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{a}{\sqrt{2}} \quad , \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{b}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{b\cos t}{-a\sin t}$$

عند $\frac{\pi}{4}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{b}{\sqrt{2}}}{\frac{-a}{\sqrt{2}}}=\frac{-b}{a}=m$$

$$y-\frac{b}{\sqrt{2}}=\frac{-b}{a}\left(x-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$

يقطع محور y عند $x=0$

$$y-\frac{b}{\sqrt{2}}=\frac{-b}{a}\left(0-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$

$$y-\frac{b}{\sqrt{2}}=\frac{-b}{a}\times\frac{-a}{\sqrt{2}}=\frac{b}{\sqrt{2}}$$

$$y=\frac{b}{\sqrt{2}}+\frac{b}{\sqrt{2}}=\frac{2b}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}b$$

مـــــثال٤٤: أجـــد النقطـــة علـــى منحنـــى $(y-4)^2=x+2$ التـي يكـون المماس عنـدها موازي للمستقيم $3x+6y=-2$

الحل:

ميل المستقيم = ميل المنحنى $m_1=m_2$

ميل المنحنى m_1

$$2(y-4)\frac{dy}{dx}=1$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2(y-4)}$$

ميل المستقيم m_2

$$3+6\frac{dy}{dx}=0$$

$$6\frac{dy}{dx}=-3\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{-3}{6}=\frac{-1}{2}$$

ميل المستقيم = ميل المنحنى

$$m_1=m_2$$

$$\frac{-1}{2}=\frac{1}{2(y-4)}$$

$$-y+4=1\Rightarrow y=3$$

$$1=x+2\Rightarrow x=-1$$

النقطة $(-1,3)$

مـــــثال45: أجـــد النقطـــة علـــى منحنـــى $\sqrt{x}+\sqrt{y}=6$ التي يكون المماس عندها عموديا للمستقيم $3x=5+6y$

الحل:

عمودي/ يعامد $\frac{-1}{m_1}=m_2$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}=m_1$$

ميل المستقيم

$$3-6\frac{dy}{dx}=0\Rightarrow -6\frac{dy}{dx}=-3$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=m_2$$

$$\frac{-1}{m_1}=m_2$$

$$-2=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

$$-2\sqrt{x}=-\sqrt{y}\Rightarrow \sqrt{y}=2\sqrt{x}$$

بالتعويض في المعادلة الأساسية في السؤال:

$$\sqrt{x}+2\sqrt{x}=6$$

$$3\sqrt{x}=6\Rightarrow \sqrt{x}=2\Rightarrow x=4$$

بالتعويض $2+\sqrt{y}=6$

$$\sqrt{y}=4\Rightarrow y=16$$

النقطة $(4,16)$

مـــثال46: أجد إحداثيي نقطة على المنحنى: $x+y^2=1$ بحيث يكون عندها مماس المنحنى موازيا للمستقيم: $x+2y=0$

الحل:

ميل المماس

$$x+y^2=1$$

$$1+2y\frac{dy}{dx}=0\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-1}{2y}=m_1$$

ميل المستقيم

$$x+2y=0$$

$$1+2\frac{dy}{dx}=0\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-1}{2}=m_2$$

المماس يوازي المستقيم

$$\frac{-1}{2y}=\frac{-1}{2}\Rightarrow y=1$$

$$x+1=1\Rightarrow x=0 \qquad \therefore (0,1)$$

مـــثال47: إذا كان الاقتران: $y=\ln(ax+b)$ حيث a و b ثابتان موجبان وكان ميل المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة P هو 1 فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعا:

1) أثبت أن الإحداثي x للنقطة P أقل من 1

الحل:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a}{ax+b}=1$$

$$ax+b=a$$

$$b=a-ax$$

$$b=a(1-x)$$

بما أن $a>0$

$$1-x>0\Rightarrow 1>x$$

$$\Rightarrow x<1$$

2) أجد إحداثيي النقطة التي يكون عندها ميل المماس $\frac{1}{2}$ علما بأن P هي النقطة $(0,2)$ ثم أبرر إجابتي

الحل:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(0,2)}=\frac{b}{a}=1\Rightarrow a=b$$

$y|_{(0,2)} = \ln(0+b)$

$= \ln b = 2 \Rightarrow b = e^2$

فتكون $a = e^2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{ax+b} = \frac{e^2}{e^2 x + e^2}$

$= \frac{e^2}{e^2(x+1)} = \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow x = 1$

$y = \ln(ax+b)$

$= \ln(e^2 + e^2) = \ln 2e^2$

$\therefore (1, \ln 2e^2)$

مــثال48: اذا كانـت $y = 2t\ ,\ x = t^2$ أثبـت أن مسـاحة المثـلث المكـون مـن العمـودي علـى الممـاس والمحورين الإحداثيين هي $\frac{1}{2}|t|(2+t^2)^2$

الحل:

يقطع محور x عند $y = 0$

$0 - 2t = -t(x - t^2)$

$2 = x - t^2$

$x = t^2 + 2$

القاعدة $= t^2 + 2$

يقطع محور y عند $x = 0$

$y - 2t = -t(0 - t^2)$

$y - 2t = t^3$

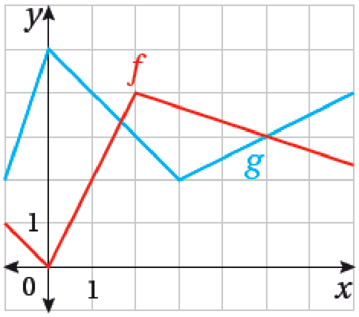
$y = t^3 + 2t = t(t^2 + 2)$

الارتفاع $= |t|(t^2+2)$

المساحة $= \frac{1}{2}$ القاعدة $\times$ الارتفاع

$= \frac{1}{2}(t^2+2) \times |t|(t^2+2) = \frac{1}{2}|t|(t^2+2)^2$

مــثال49: يبين الشكل المجاور منحنيي الاقترانين $f(x)$ و $g(x)$ إذا كـــان: $h(x) = f(g(x))$ وكان: $p(x) = g(f(x))$ فأجد كلا مما يأتي:



1) $h'(1)$

$h'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$

من الشكل $g(1) = 4$

لايجاد $g'(1)$

$(0,5)(1,4)$

$m = \frac{5-4}{0-1} = -1 \Rightarrow g'(1) = -1$

لايجاد $f'(4)$

$(2,4)(5,3)$

$m = \frac{4-3}{2-5} = \frac{1}{-3} = \frac{-1}{3} \Rightarrow f'(4) = \frac{-1}{3}$

$h'(1) = f'(4)\, g'(1)$

$h'(1) = f'(4) \times -1 = \frac{-1}{3} \times -1 = \frac{1}{3}$

2) $p'(1)$

$$p'(1) = g'(f(1))\, f'(1)$$

من الشكل $f(1) = 2$

لايجاد $f'(1)$

$(0,0)(2,4)$

$$m = \frac{0-4}{0-2} = 2 \Rightarrow f'(1) = 2$$

لايجاد $g'(2)$

$(0,5)(3,2)$

$$m = \frac{5-2}{0-3} = -1 \Rightarrow g'(2) = -1$$

$$p'(1) = g'(2) \times 2 = -1 \times 2 = -2$$

مــثال50: أجد معادلتي مماسي منحنى العلاقة: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ اللذين يمران بالنقطة $(4,0)$

الحل:

نفرض نقطة التماس (x, y)

$(4,0)$

ميل المماس $= \frac{y-0}{x-4}$

$$\frac{2x}{4} + \frac{2yy'}{9} = 0$$

$$\frac{2yy'}{9} = \frac{-x}{2} \Rightarrow y' = \frac{-9x}{4y}$$

$$\frac{y}{x-4} = \frac{-9x}{4y} \Rightarrow 4y^2 = -9x^2 + 36x$$

$$4y^2 + 9x^2 = 36x \qquad \div 36$$

$$\frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{4} = x \Rightarrow x = 1$$

نجد y

$$\frac{1}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\frac{y^2}{9} = \frac{3}{4} \Rightarrow y^2 = \frac{27}{4} \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{27}}{2}$$

$$\left(1, \frac{\sqrt{27}}{2}\right)\left(1, \frac{-\sqrt{27}}{2}\right)$$

عندما $\left(1, \frac{\sqrt{27}}{2}\right)$

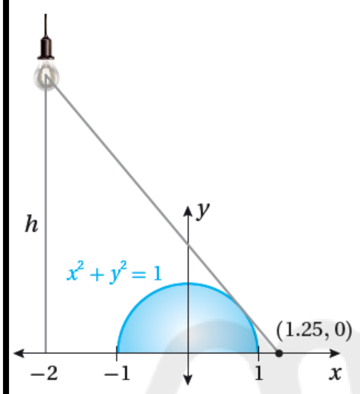
$$y' = \frac{-9}{2\sqrt{27}} = m$$

$$y - \frac{\sqrt{27}}{2} = \frac{-9}{2\sqrt{27}}(x-1)$$

عندما $\left(1, \frac{-\sqrt{27}}{2}\right)$ $\quad y' = \frac{9}{2\sqrt{27}} = m$

$$y + \frac{\sqrt{27}}{2} = \frac{9}{2\sqrt{27}}(x-1)$$

مــثال51: يبين الشكل المجاور مصباحا على ارتفاع h وحدة من المحور x إذا وقعت النقطة $(1.25, 0)$ في نهاية الشعاع الصادر من المصباح، الذي يمس منحنى العلاقة: $x^2 + y^2 = 1$ أجد ارتفاع المصباح h



الحل:

نفرض نقطة التماس (x, y)

$$y-\frac{3}{5}=\frac{8}{3}+\frac{16}{15}\Rightarrow y=\frac{65}{15}$$

مثال٥٢: إذا كان مماس منحنى الاقتران: $y=x^{\sqrt{x}}$ عند النقطة $(4,16)$ يقطع المحور x في النقطة B ، والمحور y في النقطة C ، فأجد مساحة ΔOBC حيث O نقطة الأصل

الحل:

$$y=x^{\sqrt{x}}$$

$$\ln y=\sqrt{x}\ln x$$

$$\frac{y'}{y}=\sqrt{x}\times\frac{1}{x}+\ln x\times\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y'=y\left(\frac{1}{x}+\ln x\times\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$=16\left(\frac{1}{2}+\ln 4\times\frac{1}{4}\right)=8+4\ln 4$$

$$y-16=(8+4\ln 4)(x-4)$$

يقطع محور x عندما $y=0$

$$-16=4(2+\ln 4)(x-4)$$

$$-16=4(2+\ln 4)x-16(2+\ln 4)$$

$$x=\frac{16(2+\ln 4)-16}{2(2+\ln 4)}$$

يقطع محور y عندما $x=0$

$$y-16=-16(2+\ln 4)$$

$$y=16-16(2+\ln 4)$$

$$A=\frac{1}{2}\left(\frac{16(2+\ln 4)-16}{2(2+\ln 4)}\right)(16-16(2+2\ln 4))$$

$$m=\frac{y-0}{x-1.25}$$

نجد ميل المماس من المستقيم $2x+2x\frac{dy}{dx}=0$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2x}{2y}=\frac{-x}{y}$$

$$\frac{-x}{y}=\frac{y-0}{x-1.25}$$

$$y^2=-x^2+1.25x$$

$$y^2=-x^2+1.25x$$

$$y^2+x^2=1.25x$$

$$1.25x=1\Rightarrow x=\frac{1}{1.25}=\frac{1}{\frac{5}{4}}=\frac{4}{5}$$

نجد y

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2+y^2=1$$

$$y^2=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}\Rightarrow y=\frac{3}{5}\quad\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x}{y}=\frac{\frac{-4}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{-4}{3}=m$$

$$y-\frac{3}{5}=-\frac{4}{3}\left(x-\frac{4}{5}\right)$$

عند $x=-2$

$$y-\frac{3}{5}=-\frac{4}{3}\left(-2-\frac{4}{5}\right)$$