سلسلة

النصيحة في الرياضيات

تطبيقات التفاضل 4

تطبيقات القيم القصوى

الأستاذ

ثامر قدورة

0787488070

أمثلة

أوراق عمل

امتحانات

مراجعات

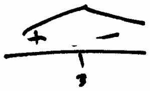
2022

تطبيقات القيم القصوى 1

الفكرة التفاضلية

س إذا كان $f(x) = 6x - x^2$ ، جد قيمة x التي تجعل f أكبر ما يمكن

الحل $\boxed{f'(x) = 6 - 2x} = 0 \Rightarrow x = 3$



$\Rightarrow$ f أكبر ما يمكن عند $x = 3$

س إذا كان $f(x,y) = 6x - y$ و $y = x^2$ ، جد قيمة $\overset{x}{y}$ التي تجعل f أكبر ما يمكن

$\boxed{f(x) = 6x - x^2}$

$\Rightarrow f'(x) = 6 - 2x = 0 \Rightarrow x = 3$

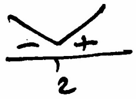
$\Rightarrow$ f أكبر ما يمكن عند $x = 3$

$\Rightarrow y = (3)^2 = 9$

س إذا كان $f(x,y) = y + x$ ، جد قيم x و y اللتان تجعلان f أقل ما يمكن ، علماً أن $y^2 - 3y - x = 0$

الحل $x = y^2 - 3y \Longrightarrow f(y) = y + y^2 - 3y$

$\Rightarrow \boxed{f(y) = y^2 - 2y} \longrightarrow \boxed{f'(y) = 2y - 2} = 0 \Rightarrow y = 2$



f أقل ما يمكن عند $\boxed{y = 2}$

$\Rightarrow x = (2)^2 - 3(2) \Rightarrow \boxed{x = -2}$

التمارين

إذا كان $f(x,y) = xy$ ، وكان $e^{-x} - y = 0$ ، فجد قيمة x و y اللتان تجعلان قيمة f أكبر ما يمكن

الحل $y = e^{-x} \Rightarrow f(x) = x \cdot e^{-x} \Rightarrow \boxed{f(x) = xe^{-x}}$

$\Rightarrow f'(x) = xe^{-x} \cdot -1 + e^{-x} \cdot 1 \Rightarrow \boxed{f'(x) = e^{-x}(-x+1)}$

$f' = 0 \Rightarrow e^{x}(-x+1) = 0 \Rightarrow x = 1$

f أكبر ما يمكن عند $\boxed{x = 1} \longleftarrow \boxed{y = e^{-1}}$

عددين

س) جد العددين الذين مجموعهما 20 ، ومجموع مربعيهما أقل ما يمكن

الحل $f = x^2 + y^2$ $\quad x + y = 20 \Rightarrow y = 20 - x$

$$f(x) = x^2 + (20-x)^2 = x^2 + 400 - 40x + x^2 = 2x^2 - 40x + 400$$

$$\boxed{f'(x) = 4x - 40} = 0 \Rightarrow x = 10 \qquad \underset{10}{- - \mid + +}$$

المجموع أقل ما يمكن $\boxed{\text{عند } x=10}$ و

$\Rightarrow y = 20 - 10 \Rightarrow \boxed{y = 10}$

س) اذا كان مجموع عدد مع ثلاث أمثال عدد آخر يساوي 60 فجد العددين بحيث يكون حاصل ضربهما أكبر ما يمكن

$x + 3y = 60$ ، $f = xy$

$\Rightarrow x = 60 - 3y$ $\qquad \Longrightarrow f(y) = (60-3y)\,y = 60y - 3y^2$

$$\boxed{f'(y) = 60 - 6y} = 0 \Rightarrow y = 10 \qquad \underset{10}{+ \mid -}$$

أكبر ما يمكن عندما $x = 10$

$y = 60 - 3(10) = 30$

س) جد أصغر مجموع ممكن لعددين موجبين حاصل ضربهما 4

الحل $f = x + y$ $\quad$ و $xy = 9 \Rightarrow y = \frac{9}{x}$

$$\Rightarrow f = x + \frac{9}{x} \Longrightarrow f'(x) = 1 - \frac{9}{x^2} = \frac{x^2 - 9}{x^2} \rightarrow = 0 \Rightarrow x = \pm 3$$

$$\frac{x^2-9}{x^2} \longrightarrow x = 0$$

$\Longrightarrow \underset{0 \qquad 3}{(\; - \mid +}$ $\Longrightarrow$ f اقل ما يمكن عند $x = 3$

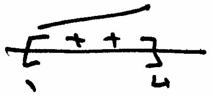
(العدد موجب بالسؤال)

$\Longrightarrow y = \frac{9}{3} = 3$

المجموع ⟵ $3 + 3$ ⟵ $\boxed{\text{أصغر مجموع } = 6}$

س جد عدد ينتمي إلى الفترة $[1, 4]$ ، بحيث يكون مجموعه مع مكعبه أكبر ما يمكن

الحل $f(x) = x + x^3 \Rightarrow f'(x) = 1 + 3x^2 = 0 \Rightarrow x =$ ؟



أكبر ما يمكن عند $x = 4$

التمارين

① جد العددين الذين مجموعهما 20 ، وحاصل ضربهما أكبر ما يمكن

② لدينا عددان x و y ، بحيث أن العلاقة بينهما $y^2 - 3y - x = 0$
جد العددين بحيث يكون مجموعهما أقل ما يمكن

③ جد العدد الذي ينتمي للفترة $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ ، الذي يجعل ناتج جمع العدد مع مقلوبه أكبر ما يمكن

①حل $x + y = 20$ و $f = x \cdot y$

$y = 20 - x \Rightarrow f = x(20 - x) \Rightarrow \boxed{f(x) = 20x - x^2}$

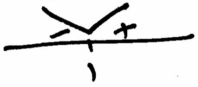
$\boxed{f'(x) = 20 - 2x} = 0 \Rightarrow x = 10$

أكبر ما يمكن عند $x = 10$
و $y = 20 - 10 = 10$

②حل $f = x + y$ $\quad x = y^2 - 3y$

$\Rightarrow f = y^2 - 3y + y \Rightarrow \boxed{f(y) = y^2 - 2y}$

$\boxed{f'(y) = 2y - 2} = 0 \Rightarrow y = 1$



أقل ما يمكن عند $y = 1$

$\Rightarrow x = (1)^2 - 3(1) = -2$

③ط $\boxed{f(x) = x + \frac{1}{x}} \Longrightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \Longrightarrow \boxed{f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}}$

$f' = 0 \Longrightarrow x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$

f' غ.م $\Rightarrow x^2 = 0 \Longrightarrow x =$ صفر

عظمى $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{5}{2}\ (= \frac{15}{6})$

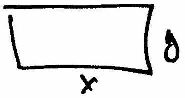
$f(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2} + \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{13}{6}$

!! عظمى مطلقة $f(\frac{1}{2}) = \frac{15}{6}$

$\Longrightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}}$ عند أكبر ما يمكن

قطعة ارض

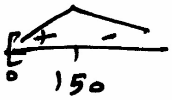
س قطعة ارض مستطيلة الشكل محيطها 600 m . جد بعدي قطعة الارض لتكون مساحتها أكبر ما يمكن



$2x+2y=600 \Rightarrow y=300-x$

$A=xy \Rightarrow A=x(300-x)=300x-x^2$

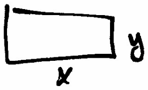
$\boxed{A(x)=300-2x}=0 \Rightarrow x=150$



$x=150$ أكبر ما يمكن

$\Rightarrow y=300-150=150$

س يراد تسييج قطعة ارض مستطيلة بسياج طوله 800m ، جد أكبر مساحة ممكنة لهذه القطعة



$2x+2y=800 \rightarrow y=400-x$

$f=xy \Rightarrow f=x(400-x)=400x-x^2$

$\boxed{A'=400-2x}=0 \Rightarrow x=200$

$\Rightarrow$

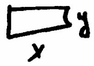
$x=200 \leftarrow$ أكبر ما يمكن

$\Rightarrow y=200$

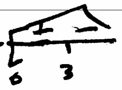
$\Rightarrow A=200.200=40,000\ m^2$

س مستطيل محيطه 12 m . جد قطره عندما تكون مساحته أكبر ما يمكن

الحل

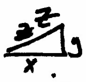


$f(x)=6x-x^2$



$\Rightarrow x=3$
$y=3$

$\Rightarrow$

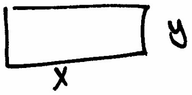


$z=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}$

تمرين

① قطعة ارض مستطيلة الشكل مساحتها $900\ m^2$. جد بعدي قطعة الارض ليكون محيطها أقل ما يمكن

الحل



المساحة = 900

$xy = 900$

$\Rightarrow \boxed{y = \frac{900}{x}}$

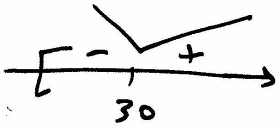
المحيط $= 2x + 2y$

$P = 2x + 2\left(\frac{900}{x}\right)$

$\boxed{P = 2x + \frac{1800}{x}}$

$P'(x) = 2 - \frac{1800}{x^2} \Rightarrow \boxed{P'(x) = \frac{2x^2 - 1800}{x^2}} \xrightarrow{f' = 0} x = \pm 30$

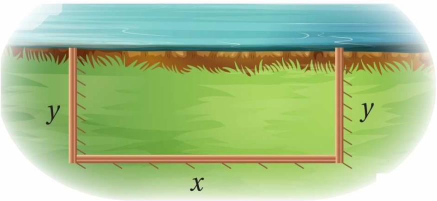
$\xrightarrow[f' \text{ غ.م}]{} x = 0$



$\Rightarrow x = 30$ أقل ما يمكن

$y = \frac{900}{30} = 30$

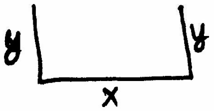
② تحدي



خطَّط مُزارِع لتسييج حظيرة مستطيلة الشكل قرب نهر كما في الشكل المجاور، وحدَّد مساحة الحظيرة بـ $800\ m^2$ ؛ لتوفير كمية عشب كافية لأغنامه.

أجد أبعاد الحظيرة التي تجعل طول السياج أقل ما يُمكِن، علمًا بأنَّ الجزء المُقابِل للنهر لا يحتاج إلى تسييج.

الحل



$\Rightarrow l = 2y + x$

المساحة $= 800$

$xy = 800$

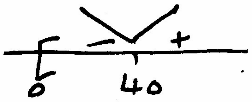
$y = \frac{800}{x}$

$l(x) = 2\left(\frac{800}{x}\right) + x$

$\Rightarrow \boxed{l(x) = \frac{1600}{x} + x} \Rightarrow l'(x) = -\frac{1600}{x^2} + 1 \Rightarrow \boxed{l'(x) = \frac{x^2 - 1600}{x^2}}$

$l' = 0 \Rightarrow x^2 - 1600 = 0 \Rightarrow x = \pm 40$

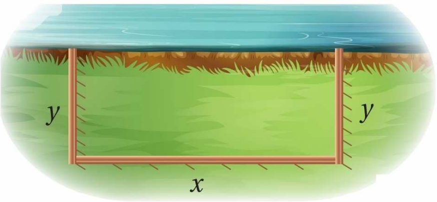
l' غ.م $\Rightarrow x = 0$



$\boxed{\begin{array}{c} x = 40 \\ y = \frac{800}{40} = 20 \end{array}}$

تحديات قطعة الأرض

تحدي ①



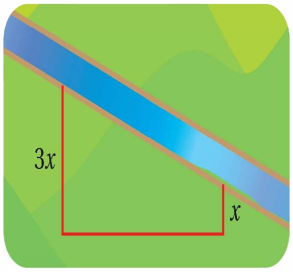
خطَّط مُزارِع لتسييج حظيرة مستطيلة الشكل قرب نهر كما في الشكل المجاور، وحدَّد مساحة الحظيرة بـ 800 m^2؛ لتوفير كمية عشب كافية لأغنامه.

أجد أبعاد الحظيرة التي تجعل طول السياج أقل ما يُمكِن، علمًا بأنَّ الجزء المُقابِل للنهر لا يحتاج إلى تسييج.

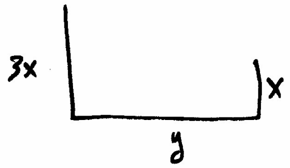
الجواب : 40,20 متر

تحدي ②

من الكتاب



لدى مزارع 400 m من السياج وهو يريد تسييج حقله الذي يأخذ شكل شبه منحرف، ويوجد على حافة النهر كما في الشكل التالي. إذا كان طول أحد الضلعين المتوازيين يساوي 3 أمثال طول الضلع الآخر. جد أكبر مساحة يمكن للمزارع أن يحيط بها هذا السياج. علماً أن الجزء المقابل للنهر لا يحتاج إلى تسييج



$3x + y + x = 400 \Rightarrow y = 400 - 4x$

$A = \frac{1}{2}(x + 3x)\, y = 2xy = 2x(400 - 4x)$

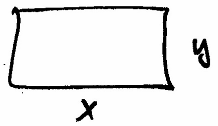
$\boxed{A(x) = 800x - 8x^2}$

$\boxed{A'(x) = 800 - 16x} = 0 \quad x = 50$

أكبر ما يمكن $x = 50 \longleftarrow$

$A = 800(50) - 8(50)^2 \Rightarrow \boxed{A = 20,000}$

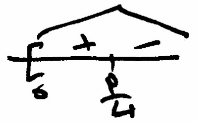
تحدي ③ يراد تسييج قطعة أرض مستطيلة الشكل بسياج طول P متر . جد أبعاد قطعة الأرض (بدلالة P) لتكون مساحتها أكبر ما يمكن



$\Rightarrow 2x+2y=P \Rightarrow \boxed{y=\frac{P}{2}-x}$

$A = xy = x\left(\frac{P}{2}-x\right) = \frac{Px}{2}-x^2$

$\boxed{A'(x)=\frac{P}{2}-2x} = 0 \Rightarrow x=\frac{P}{4}$



$\Rightarrow x=\frac{P}{4}$ أكبر ما يمكن عند

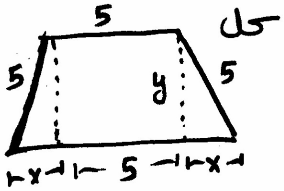
$y=\frac{P}{2}-\frac{P}{4}=\frac{P}{4}$

$\Longrightarrow \frac{P}{4}, \frac{P}{4}$ الابعاد

تمرين

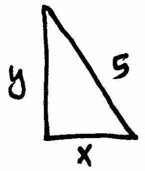
تحدي دولي

شبه منحرف فيه ثلاث أضلاع متساوية طول كل منها 5 cm . أوجد طول الضلع الرابع لتكون مساحة شبه المنحرف أكبر ما يمكن



الحل $A = \frac{1}{2}\left((5+2x)+(5)\right) y$

$$A = \frac{1}{2}(10+2x)\, y$$
$$= (5+x)\, y$$



$y = \sqrt{25-x^2}$

$$\Rightarrow \boxed{A = (5+x)\sqrt{25-x2}}$$

المجال
[0 , 5]

$$A' = (5+x)\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{25-x^2}} + \sqrt{25-x2}\cdot 1 = \frac{-x^2-5x}{\sqrt{25-x2}} + \sqrt{25-x^2}$$

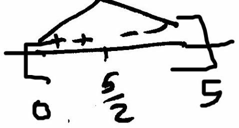
$$A' = \frac{-x^2-5x+(25-x^2)}{\sqrt{25-x^2}}$$ توحيد مقامات

$$\boxed{A' = \frac{-2x^2-5x+25}{\sqrt{25-x2}}}$$

$f'=0 \Rightarrow 2x^2+5x-25=0$

$(2x-5)(x+5)$

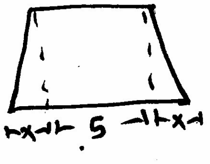
$\Rightarrow \boxed{x = \frac{5}{2}}$



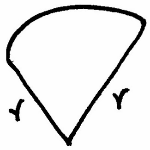
المساحة أكبر ما يمكن عند $x = \frac{5}{2}$

$\Leftarrow$ طول الضلع الرابع

$$\frac{5}{2}+5+\frac{5}{2}$$
$$\boxed{=10}$$

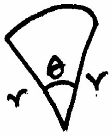


القطاع الدائري



س لدى مزارع سياج طوله 400m ، يرغب في استعماله كاملاً لتسييج حقل على شكل قطاع دائري . جد أكبر مساحة ممكنة لهذا القطاع

الحل



طول القوس

$$\text{المحيط} = r + r + \overset{\uparrow}{r\theta} = 400$$

$$2r + r\theta = 400$$

$$\Rightarrow \cancel{r=}\ \theta = \frac{400-2r}{r} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{400}{r} - 2}$$

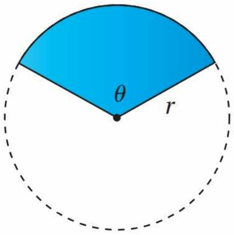
$$A = \frac{1}{2} r^2 \theta = \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{400}{r} - 2\right)$$

$$\boxed{A = 200r - r^2} \longrightarrow \boxed{A' = 200 - 2r} > 0 \Rightarrow r = 100$$

$A'' = -2 < 0 \Rightarrow$ عظمى

أكبر مساحة عند $r = 100$

$$\Rightarrow A = 200(100) - (100)^2 = 10000$$



لدى مُزارِع P مترًا طوليًّا من سياج، يرغب في استعماله كاملًا لتسييج حقل رَعْي على شكل قطاع دائري، زاويته θ بالراديان، في دائرة نصف قُطْرها r مترًا كما في الشكل المجاور:

16 أُثبِت أنَّ طول السياج اللازم إحاطة الحقل به هو: $P = r(\theta + 2)$.

17 أُثبِت أنَّ مساحة القطاع هي: $A = \frac{1}{2}Pr - r^2$.

18 أجد نصف قُطْر القطاع بدلالة P الذي تكون عنده مساحة الحقل أكبر ما يُمكِن.

حل ① $P = r + r + r\theta \Rightarrow P = 2r + r\theta \Rightarrow P = r(\theta + 2)$

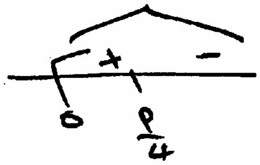
حل ② $A = \frac{1}{2}r^2\theta$ لكن $r\theta = P - 2r$

$\Rightarrow \theta = \frac{P}{r} - 2$

$\Rightarrow A = \frac{1}{2}r^2\left(\frac{P}{r} - 2\right)$

$\Rightarrow \boxed{A = \frac{Pr}{2} - r^2}$ (P ثابت)

حل ③ $\boxed{A' = \frac{P}{2} - 2r} = 0 \Rightarrow r = \frac{P}{4}$



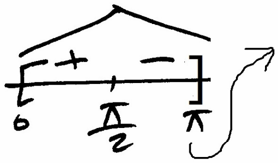
المساحة أكبر ما يمكن عند $r = \frac{P}{2}$

تمارين

① مثلث طولا ضلعين فيه 5 cm & 7 cm ، والزاوية المحصورة بين الضلعين هي θ ، جد قيمة θ التي تجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن

الحل $A=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 7\cdot \sin\theta \Rightarrow \boxed{A=\frac{35}{2}\sin\theta}$

$\boxed{A'(\theta)=\frac{35}{2}\cos\theta}=0 \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2} , \frac{3\pi}{2}$

$\Rightarrow$ 

زوايا المثلث
محصورة
بين صفر وباي

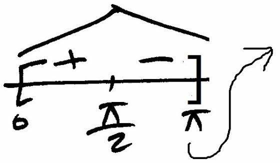
$\Rightarrow$ المساحة أكبر ما يمكن عندما $\theta=\frac{\pi}{2}$

كتاب التمارين

② إذا كانت a cm و b cm هما طولي ضلعين ثابتين في مثلث، وكانت الزاوية بينهما θ . فأجد قيمة θ التي تجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن

الحل $A=\frac{1}{2}ab\sin\theta$ (a & b ثوابت)

$\boxed{A'=\frac{1}{2}ab\cos\theta}=0 \Rightarrow \cos\theta=0 \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2} , \frac{3\pi}{2}$

$\Rightarrow$ 

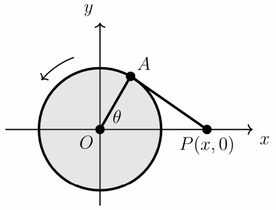
زوايا المثلث
محصورة
بين صفر وباي

المساحة أكبر ما يمكن
$\boxed{\theta=\frac{\pi}{2}}$

أسئلة مهمة على

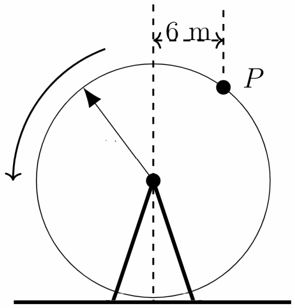
المعدلات المرتبطة بالزمن

للأستاذ ثامر قدورة



الشكل المجاور يبين عجل نصف قطره 30cm متصل بالذراع AP الذي طوله 70cm ، رأس الذراع P يتحرك للأمام والخلف على محور x عند دوران العجل بسرعة 10 دورات في الدقيقة

جد سرعة النقطة P عندما $\theta = \frac{\pi}{3}$



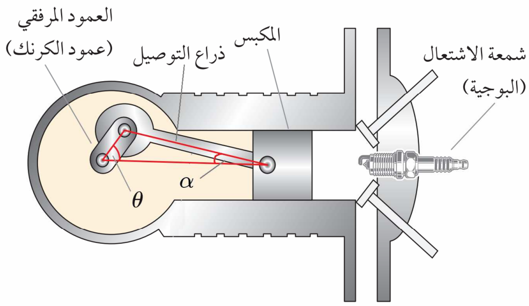
عجلة دوارة في مدينة العاب طول نصف قطرها 10m ، تدور دورة واحدة في الدقيقة ، احسب سرعة تغير ارتفاع الراكب عندما يصبح عند النقطة P المبينة في الشكل

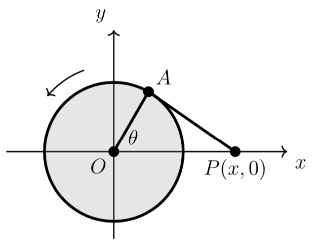
يركض عداء في مضمار دائري نصف قطره 100m، بسرعة ثابتة مقدارها 7m/s ، ويقف عداء اخر على بعد 50m من مركز مضمار الركض. جد معدل تغير المسافة بين العدائين عندما تكون المسافة بينهما $50\sqrt{3}$ m

(جد جميع الحلول الممكنة)

تحدي

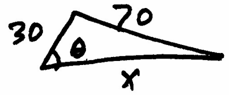
يبين الشكل الآتي محرك سيارة يحتوي على ذراع توصيل طولها 6 in، وهي مثبتة بعمود مرفقي طوله 3 in إذا دار العمود المرفقي عكس اتجاه دوران عقارب الساعة 200 دورة في الدقيقة، فجد $\frac{d\alpha}{dt}$ عندما $\theta = \frac{\pi}{3}$





الشكل المجاور يبين عجل نصف قطره 30cm متصل بالذراع AP الذي طوله 70cm ، رأس الذراع P يتحرك للأمام والخلف على محور x عند دوران العجل بسرعة 10 دورات في الدقيقة

جد سرعة النقطة P عندما $\theta = \frac{\pi}{3}$



$\frac{d\theta}{dt} = \frac{10 \cdot 2\pi}{1} = 20\pi$

$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{\theta=\frac{\pi}{3}} = ?$

$70^2 = 30^2 + x^2 - 2\cdot 30 \cdot x \cos\theta$

$x^2 - 60x\cos\theta - 4000 = 0$

$2x\frac{dx}{dt} + 60x\sin\theta\frac{d\theta}{dt} - 60\cos\theta\frac{dx}{dt} = 0$

$\theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow x^2 - 30x - 4000 = 0$

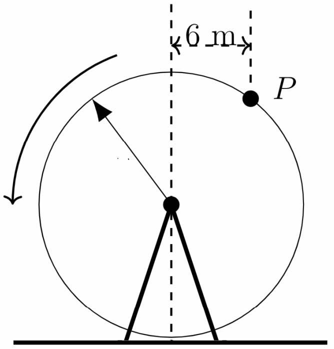
$(x-80)(x+50) = 0$

$\Rightarrow x = 80$

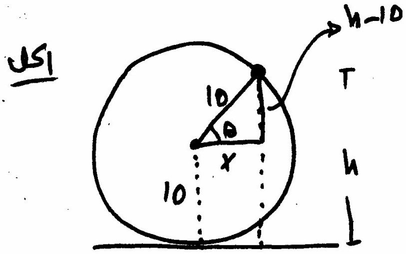
$\Rightarrow 2(80)\frac{dx}{dt} + 60(80)\frac{\sqrt{3}}{2}(20\pi) - 30\frac{dx}{dt} = 0$

$130\frac{dx}{dt} = -48000\sqrt{3}\pi \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{4800\sqrt{3}\pi}{13}$

عجلة دوارة في مدينة العاب طول نصف قطرها 10m ، تدور دورة واحدة في الدقيقة ، احسب سرعة تغير ارتفاع الراكب عندما يصبح عند النقطة P المبينة في الشكل



الحل

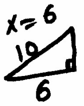


$$\frac{d\theta}{dt} = 2\pi$$

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{x=6} = ?$$

$$\frac{h-10}{10} = \sin\theta$$

$$\frac{1}{10}\frac{dh}{dt} = \cos\theta \frac{d\theta}{dt}$$



$\Rightarrow \cos\theta = \frac{6}{10}$

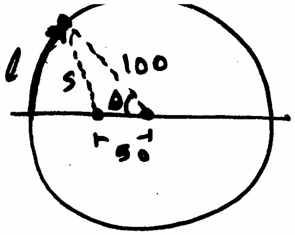
$$\Rightarrow \frac{1}{10}\frac{dh}{dt} = +\frac{8}{10}(2\pi)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dh}{dt} = 12\pi}$$

يركض عداء في مضمار دائري نصف قطره 100m، بسرعة ثابتة مقدارها 7m/s ، ويقف عداء اخر على بعد 50m من مركز مضمار الركض. جد معدل تغير المسافة بين العدائين عندما تكون المسافة بينهما $50\sqrt{3}$ m

(جد جميع الحلول الممكنة)

الحل



$$\frac{dl}{dt} = 7$$

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{s=50\sqrt{3}} = ?$$

$\frac{dl}{dt}$ $\quad l = 100\,\theta$

$$\frac{dl}{dt} = 100\,\frac{d\theta}{dt}$$

$$7 = 100\,\frac{d\theta}{dt}$$

$$\boxed{\frac{d\theta}{dt} = \frac{7}{100}}$$

$$s^2 = (50)^2 + 100^2 - 2(100)\cdot(50)\cos\theta$$

$$s^2 = 12500 - 10000\cos\theta$$

$$2s\,\frac{ds}{dt} = 10000\sin\theta\,\frac{d\theta}{dt}$$

$$s = 50\sqrt{3}$$

$$(50\sqrt{3})^2 = 12500 - 10000\cos\theta$$

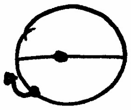
$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

$$2(50\sqrt{3})\,\frac{ds}{dt} = 10\,000\,\sin\frac{\pi}{3}\cdot\frac{7}{100}$$

$$\frac{ds}{dt} = 10000\,\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{2}\,\frac{7}{100}\,\frac{1}{100\cancel{\sqrt{3}}} \Longrightarrow \boxed{\frac{ds}{dt} = 3.5}$$

حالة ②

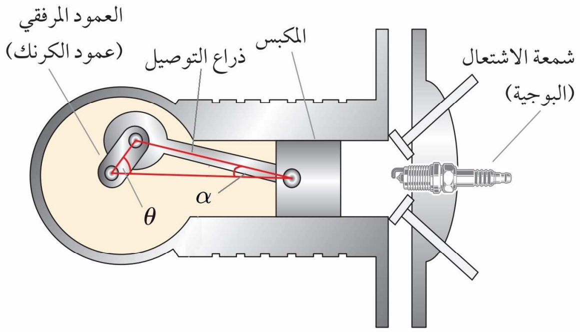


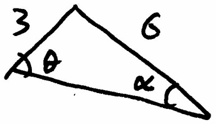
$$\frac{dl}{dt} = -7$$

$$\Longrightarrow \frac{ds}{dt} = -3.5$$

تحدي

يبين الشكل الآتي محرك سيارة يحتوي على ذراع توصيل طولها 6 in، وهي مثبتة بعمود مرفقي طوله3 in إذا دار العمود المرفقي عكس اتجاه دوران عقارب الساعة 200 دورة في الدقيقة، فجد $\frac{d\alpha}{dt}$ عندما $\theta = \frac{\pi}{3}$





قانون الجيوب

$$\frac{d\theta}{dt} = \cancel{400\pi}\ \frac{200\cdot 2\pi}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = 400\pi$$

$$\left.\frac{d\alpha}{dt}\right|_{\theta=\frac{\pi}{3}} = ?$$

$$\frac{\sin\alpha}{3} = \frac{\sin\theta}{6}$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{2}\sin\theta$$

$$\cos\alpha\,\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{2}\cos\theta\,\frac{d\theta}{dt}$$

$$\cos\alpha\,\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)(400\pi)$$

$$\boxed{\cos\alpha\,\frac{d\alpha}{dt} = 100\pi}$$

حساب $\cos\alpha$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{3} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{6} \Rightarrow \boxed{\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}}$$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 = 1 \Rightarrow \boxed{\cos\alpha = \frac{\sqrt{13}}{4}}$$

$$\frac{\sqrt{13}}{4}\,\frac{d\alpha}{dt} = 100\pi$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{d\alpha}{dt} = \frac{400\pi}{\sqrt{13}}}$$

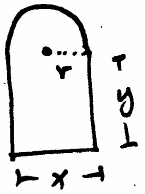
تطبيقات القيم القصوى 2

النافذة

س

حالكولس

نافذة محيطها 6m على شكل مستطيل يعلوه نصف دائرة . جد نصف قطر الدائرة لتكون مساحة النافذة أكبر ما يمكن



الحل $A = xy + \frac{1}{2}\pi r^2$

المحيط $= \boxed{2y + x + \pi r = 6}$ $\boxed{x = 2r}$

$$y = 3 - \frac{x}{2} - \frac{\pi r}{2} \Rightarrow \boxed{y = 3 - r - \frac{\pi r}{2}}$$

$$A = (2r)(3 - r - \frac{\pi r}{2}) + \frac{1}{2}\pi r^2$$

$$A = 6r - 2r^2 - \pi r^2 + \frac{1}{2}\pi r^2$$

$$A = 6r - 2r^2 - \frac{\pi}{2} r^2$$

$$\boxed{A'(r) = 6 - 4r - \pi r} = 0 \Rightarrow r = \frac{6}{\pi + 4}$$

$A'' = -4 - \pi < 0 \Rightarrow$ عظمى

المساحة أكبر ما يمكن عندما $r = \frac{6}{\pi + 4}$

ص

اكتابي

يُبيِّن الشكل المجاور نافذة مُكوَّنة من جزأين؛ أحدهما علوي على شكل نصف دائرة قُطْرها x m، والآخر سفلي على شكل مستطيل عرضه x m وارتفاعه y m.

صُنِع الجزء العلوي من زجاج مُلوَّن يسمح بمرور 1 وحدة ضوء لكل متر مربع، وصُنِع الجزء السفلي من زجاج شفّاف يسمح بمرور 3 وحدات ضوء لكل متر مربع. أجد قيمة كلٍّ من x وy التي تجعل كمية الضوء المارِّ خلال النافذة أكبر ما يُمكِن، علمًا بأنَّ 10 m من المعدن الرقيق استُعمِل في تشكيل إطار النافذة كاملًا، بما في ذلك القطعة الفاصلة بين الجزأين.

الحل

$$Q = 1 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\pi r^2\right) + 3 \cdot (xy)$$

$$2x + 2y + \pi r = 10 \qquad x = 2r \downarrow \quad \boxed{r = \frac{x}{2}}$$

$$y = \overset{5}{\cancel{10}} - \frac{\pi r}{2} - x$$

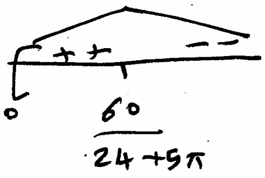
$$\boxed{y = 5 - \frac{\pi x}{4} - x}$$

$$\Rightarrow \quad Q(x) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 3x\left(5 - \frac{\pi x}{4} - x\right)$$

$$\boxed{Q(x) = \frac{\pi}{8}x^2 + 15x - \frac{3\pi}{4}x^2 - 3x^2} \Rightarrow \boxed{Q(x) = 15x - 3x^2 - \frac{5\pi}{8}x^2}$$

$$\boxed{Q'(x) = 15 - 6x - \frac{5\pi}{4}x} = 0 \Longrightarrow x = \frac{15}{6 + \frac{5\pi}{4}}$$

$$\boxed{x = \frac{60}{24 + 5\pi}} \Longrightarrow$$



$$\boxed{y = \frac{60 + 10\pi}{24 + 5\pi}}$$

ملاحظة: إذا كانت التكلفة لكل متر مربع (السعر) هي p فإن التكلفة هي (المساحة كاملة)

$$C = pA$$

مثال تكلفة الدهان هي 3 دنانير لكل متر مربع
⇐ تكلفة دهان حائط $10m^2$ هي

$$C = 10 \cdot 3 = 30$$

تمرين نافذة محيطها $6m$ مكونة من جزأين. أحدهما علوي على شكل نصف دائرة، والآخر سفلي على شكل مستطيل. صنع الجزء العلوي من زجاج ملون سعره ديناران لكل متر مربع والجزء السفلي من زجاج شفاف سعره دينار لكل متر مربع. جد نصف القطر الذي يجعل تكلفة النافذة أكبر ما يمكن

الحل

$$C = \overset{\text{السعر لكل متر مربع}}{2} \cdot \overset{\text{المساحة}}{\left(\tfrac{1}{2}\pi r^2\right)} + \overset{\text{السعر لكل متر مربع}}{1} \cdot \overset{\text{المساحة}}{(xy)}$$

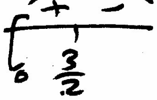
$$2y + x + \pi r = 6 \quad \& \quad \boxed{x = 2r}$$

$$2y + (2r) + \pi r = 6$$

$$\boxed{y = 3 - r - \frac{\pi r}{2}}$$

$$C = \pi r^2 + (2r)\left(3 - r - \frac{\pi r}{2}\right) \Rightarrow C = \cancel{\pi r^2} + 6r - 2r^2 - \cancel{\pi r^2}$$

$$\boxed{C = 6r - 2r^2} \Rightarrow \boxed{C' = 6 - 4r} = 0 \Rightarrow r = \frac{3}{2}$$

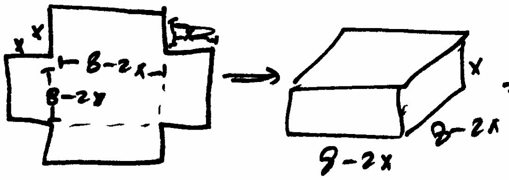


أكبر تكلفة عند $r = \frac{3}{2}$

صناعة صندوق

س صندوق على شكل متوازي مستطيلات، صُنِع من قطعة كرتون رقيقة، مربعة الشكل، طولها 8 dm، وذلك بقطع 4 مربعات متطابقة من زواياها، وطَيِّ الجوانب إلى الأعلى. أجد أبعاد الصندوق ليكون حجمه أكبر ما يُمكِن.

الحل



$\Rightarrow V = (8-2x)(8-2x)\,x$

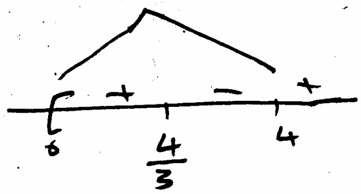
$V = 4x^3 - 32x^2 + 64x$

$\boxed{V' = 12x^2 - 64x + 64}$

$3x^2 - 16x + 16 = 0$

$(3x-4)(x-4) = 0$

$x = \frac{4}{3} \,,\, 4$



$\Rightarrow x = \frac{4}{3}$ أكبر حجم

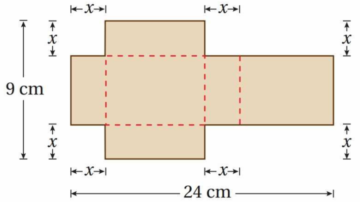
$\Rightarrow$ الطول $8-2x = 8-2(\frac{4}{3}) = \cancel{\frac{8}{3}}\ \frac{16}{3}$

العرض $8-2x = \cancel{\frac{16}{3}}\ 8-2(\frac{4}{3}) = \frac{16}{3}$

الارتفاع $= \frac{4}{3}$

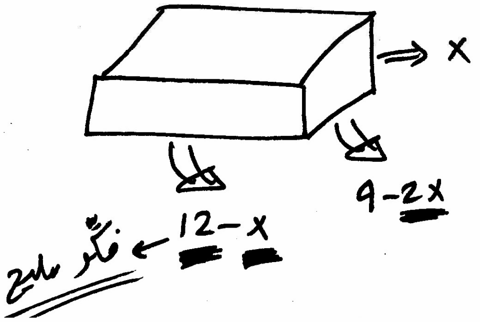
تمرين

قطعة كرتون طولها 24 cm، وعرضها 9 cm، أُزيل منها مربعان متطابقان ومستطيلان متطابقان كما في الشكل المجاور، بحيث أمكن طيُّها، وتكوين صندوق له غطاء منها:



1. أكتب الاقتران $V(x)$ الذي يُمثِّل حجم الصندوق.
2. أُحدِّد مجال الاقتران V.
3. أجد أبعاد الصندوق بحيث يكون حجمه أكبر ما يُمكِن.

الحل



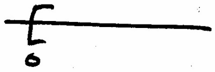
$$V = x(12-x)(9-2x)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{V = 2x^3 - 33x^2 + 108x}$$

المجال

$x > 0 \Rightarrow$



$9 - 2x > 0 \Rightarrow x < \frac{9}{2}$

$12 - x > 0 \Rightarrow x < 12$

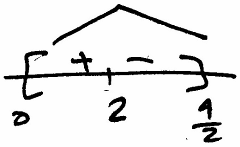
$\Rightarrow \left[0, \frac{9}{2}\right]$

$$V'(x) = 6x^2 - 66x + 108 = 0$$

$$x^2 - 11x - 18 = 0$$

$$(x-9)(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow x = 2, 9$$



$\Rightarrow \boxed{x = 2}$ الارتفاع

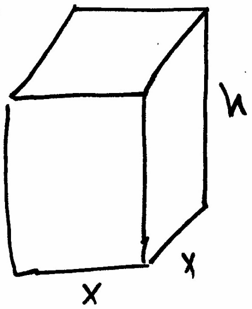
$\Rightarrow$ الطول $12 - x = 12 - 2 = 10$

العرض $9 - 2x = 9 - 2(2) = 5$

حمانه صندوق

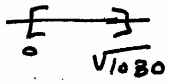
ترغب شركة في تصميم صندوق مفتوح من الأعلى، وقاعدته مربعة الشكل، ومساحة سطحه الكلية $1080\ \text{cm}^2$ ~~كما في الشكل المجاور~~. أجد أبعاد الصندوق ليكون حجمه أكبر ما يُمكِن.

اكل



المساحة $= x^2 + 4xh = 1080$

$h = \dfrac{1080 - x^2}{4x} \xrightarrow{\text{المجال}}$

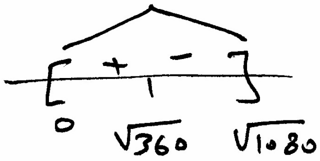


$V = x \cdot x \cdot h = x^2 \dfrac{1080 - x^2}{4}$

$V = \frac{1}{4}(1080x - x^3)$

$\boxed{V'(x) = \frac{1}{4}(1080 - 3x^2)} = 0$

$x = \sqrt{360}$



القاعدة: $\sqrt{360}$ ، $\sqrt{360}$

الارتفاع $= \dfrac{1080 - 360}{4\sqrt{360}} = \dfrac{720}{4\sqrt{360}}$

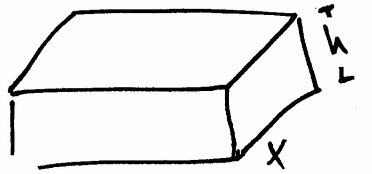
$= \dfrac{180}{\sqrt{360}} =$

تمرين

سنوات 2021 تكميلي

يراد صنع صندوق من الصفيح مفتوح من الاعلى حجمه $32\ m^3$ على شكل متوازي مستطيلات قاعدته مستطيلة الشكل أحد بعديها مثلي الآخر . لماذا كانت تكلفة المتر المربع الواحد من القاعدة 9 دنانير ، ومن الجوانب 3 دنانير . ما أبعاد الصندوق التي تجعل تكلفة تصنيعه أقل ما يمكن

الحل



تكلفة القاعدة لكل متر مربع

تكلفة الجوانب لكل متر مربع

$$C = 9(2x \cdot x) + 3(2xh + 2 \cdot 2xh)$$

$$\boxed{C = 18x^2 + 18xh}$$

الحجم $= 32$

$$2x \cdot x \cdot h = 32$$

$$2x^2h = 32 \Rightarrow \boxed{h = \frac{16}{x^2}}$$

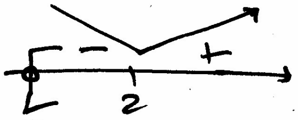
$$C = 18x^2 + 18x \cdot \frac{16}{x^2}$$

$$\boxed{C = 18\left(x^2 + \frac{16}{x}\right)} \Longrightarrow C' = 18\left(2x - \frac{16}{x^2}\right)$$

$$C' = 18\left(\frac{2x^3-16}{x^2}\right)$$

$$2x^3-16 \xrightarrow{=0} \Rightarrow x = 2$$

$$x^2 \xrightarrow{=0} \Rightarrow x = 0$$



أقل تكلفة :

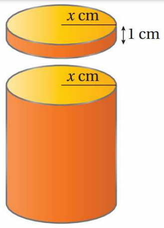
الطول $2x = 4$

العرض $x = 2$

الارتفاع $h = \frac{16}{(2)^2} = 4$

علبة

علبة بسكويت أسطوانية الشكل، لها غطاء مُحكَم يتداخل مع العلبة بمقدار **1 cm** كما في الشـــكل المجاور. إذا كان نصف قُطْر العلبة والغطـــاء **x cm**، وصُنِعت العلبة والغطاء من صفيحة رقيقة مُلائِمة للأغذية، مســـاحتها $80\pi\ \text{cm}^2$ مـــن دون أيِّ هدر في المواد في أثناء عملية التصنيع، فأُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا:



26 أجد قيمة x التي تجعل حجم العلبة المغلقة أكبر ما يُمكِن.

27 أجد أكبر حجم مُمكِن للعلبة.

28 أجد النسبة المئوية للجزء الذي استُعمِل من الصفيحة لصنع الغطاء عندما كان الحجم أكبر ما يُمكِن.

$$A = \pi x^2 + 2\pi x h + 2\pi x(1) + \pi x^2 = 80\pi$$

$$\boxed{h = \frac{40}{x} - x - 1}$$

$$V = \pi x^2 h = \pi x^2\left(\frac{40}{x} - x - 1\right)$$

$$\boxed{V = \pi(40x - x^3 - x^2)}$$

$$V' = \pi(40 - 3x^2 - 2x) = 0$$

$$3x^2 + 2x - 40 = 0$$

$$(3x-10)(x+4) = 0 \Longrightarrow x = \frac{10}{3}$$

$$V'' = \pi(-6x-2)$$

$$V''\left(\frac{10}{3}\right) = -22\pi < 0 \Longrightarrow$$ عظمى

① $\boxed{x = \frac{10}{3}}$ أكبر حجم عند

② $V = \pi\left(40 \cdot \frac{10}{3} - \left(\frac{10}{3}\right)^3 - \left(\frac{10}{3}\right)^2\right) = \frac{2300}{27}\pi$

③ $A_{\text{غطاء}} = \pi\left(\frac{10}{3}\right)^2 + 2\pi\left(\frac{10}{3}\right)(1) = \frac{160\pi}{9}$

$\text{النسبة} = \frac{A_{\text{غطاء}}}{A_{\text{علبة}}} 100\% = \frac{\frac{160\pi}{9}}{80\pi} \cdot 100\% = \frac{200}{9}\% \ (\approx 22\%)$

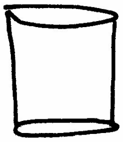
$\boxed{\text{تمرين}}$

كالكولس

علبة دهان أسطوانية الشكل حجمها $22\ in^3$ ، جد أبعاد العلبة كي تحتاج أقل كمية ممكنة من الصفيح لتصنيعها

مساعدة: أقل كمية من الصفيح ← أقل مساحة

انتبه: لم يقل مفتوحة من الاعلى !

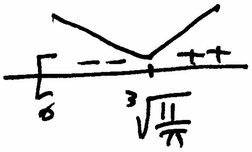


$$V = \pi r^2 h = 22 \Rightarrow \boxed{h = \frac{22}{\pi r^2}}$$

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h \Rightarrow A = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{22}{\pi r^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{A = 2\pi r^2 + \frac{44}{r}} \Rightarrow A' = 4\pi r - \frac{44}{r^2}$$

$$\boxed{A' = \frac{4\pi r^3 - 44}{r^2}} \begin{array}{l} \xrightarrow{=0} r = \sqrt[3]{\frac{11}{\pi}} \\ \xrightarrow{=0} r = 0 \end{array}$$



$$\boxed{r = \sqrt[3]{\frac{11}{\pi}}} \Longleftarrow \text{أقل كمية}$$

$$h = \frac{22}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{11}{\pi}}\right)^2} = \frac{22}{\frac{\pi}{\pi^{2/3}}\sqrt[3]{11}} = \frac{22}{\pi^{1/3}\sqrt[3]{11}}$$

$$\boxed{h = \frac{22}{\sqrt[3]{121\pi}}}$$

امتحان تدريبي

كالكولس

① إذا كان $y=\ln(\sec^2\theta)$ ، فإن $\frac{dy}{d\theta}$ تساوي

a) $\tan^2\theta$　b) $2\sec\theta$　c) $2\tan\theta$　d) $\sec^2\theta$

كالكولس

② إذا كان $y=\sqrt{2}x^{-\sqrt{2}}$ ، فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي

a) $\frac{-1}{2x^{\sqrt{2}+1}}$　b) $\frac{-2}{x^{1+\sqrt{2}}}$　c) $\frac{-2\ln 2}{x^{\sqrt{2}}}$　d) 0

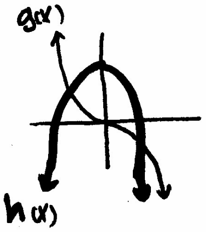
كالكولس

③ إذا كان $f(1)=-3$ ، $f'(1)=\frac{1}{5}$ ، جد $\frac{d}{dx}\left(\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)f^2(x)\right)$
عند $x=1$

a) 0　b) $\frac{-3}{5}$　c) $\frac{2}{5}$　d) $\frac{-6}{5}$

كالكولس

④ الشكل المجاور يمثل منحنى الاقترانين $g(x)$ و $h(x)$
بالاعتماد عليه اختر العبارة الصحيحة



a) $g(x)=h'(x)$　b) $h(x)=g'(x)$
c) $g(x)=h''(x)$　d) $h(x)=g''(x)$

⑤ الكتاب يمثل الاقتران $s(t)=\ln(t^2-2t+1.9)$ موقع جسيم يتحرك في خط مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، t الزمن بالثواني؟ متى يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي؟

a) $t=1$　b) $t=2$　c) $t=3$　d) none

ثامر ⑤ إذا كان $f(t) = 2^{\frac{1}{t}}$ ، فإن $f'(2)$ تساوي

a) $-\frac{\sqrt{2}\ln 2}{2}$　b) $-\frac{\sqrt{2}\ln 2}{4}$　c) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$　d) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

سنوات 2006 ⑥ إذا كان لمنحنى $f(x) = \sin x + ax^2$ نقطة انعطاف عندما $x = \frac{\pi}{6}$ ، فما قيمة الثابت a

a) 1　b) $\frac{1}{2}$　c) 0　d) $\frac{1}{4}$

ثامر ابحث في قابلية الاقتران $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^4}$ للاشتقاق عند $x = 1$

كالكولس جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يلي

ⓑ $y = (\ln x)^{\frac{1}{\ln x}}$

كالكولس جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يلي

ⓐ $y = \left(\frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}\right)^2$

ⓑ $y = (\ln x)^{\frac{1}{\ln x}}$

كالكولس جد $\frac{ds}{du}$ عند $u = 2$ ، حيث $s = t^2 + 5t$ ، $t = (u^2 + 3u)^{\frac{1}{3}}$

كالكولس إذا كان $x^2 - y^2 = 1$ ، فأثبت أن $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-1}{y^3}$

ثاس جد مساحة المثلث المكون من المحورين الاحداثيين ،
ومماس العلاقة $\begin{pmatrix} y=\sqrt{t} \\ x=9-t \end{pmatrix}$ عند نقطة تقاطعها مع المحور y

كالكولس يتحرك جسيم في الربع الاول على منحنى الاقتران $y=x^{3/2}$
بحيث أن بعده عن نقطة الاصل يزداد بمعدل 11 وحدة في الثانية
جد $\frac{dx}{dt}$ عندما $x=3$

سنوات 2016 إذا كان $f(x)=x^{\frac{1}{3}}(x-2)^{\frac{1}{3}}$ ، حيث $x\in[-1,5]$
فجد كلاً مما يلي :
① الفترة (الفترات) التي يكون فيها الاقتران $f(x)$ متزايد
② الفترة (الفترات) التي يكون فيها الاقتران $f(x)$ متناقص
③ القيم القصوى المحلية للاقتران $f(x)$

سنوات 2009 اسطوانة دائرية قائمة ، مجموع محيط قاعدتها وارتفاعها يساوي 66 cm . احسب ارتفاع الاسطوانة الذي يجعل حجمها أكبر ما يمكن

الحل

① حل $y = 2\ln\sec\theta \Longrightarrow \frac{dy}{d\theta} = 2\,\frac{\sec\theta\tan\theta}{\sec\theta} = 2\tan\theta\ \boxed{c}$

② حل $\frac{dy}{dx} = -\sqrt{2}\sqrt{2}\,x^{-\sqrt{2}-1} = \frac{-2}{x^{\sqrt{2}+1}} \Longrightarrow \boxed{b}$

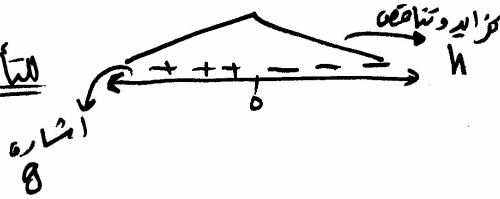
③ حل $\frac{d}{dx}\left(\sin\frac{\pi x}{2}\ f^2_{(x)}\right) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cdot 2f_{(x)}f'_{(x)} + f^2_{(x)}\cdot\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{2}$

عند $x=1 \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot 2\cdot f_{(1)}\cdot f'_{(1)} + 0$

$$= 1\cdot 2\cdot -3\cdot\frac{1}{5} = \frac{-6}{5} \Longrightarrow \boxed{d}$$

④ حل $h'(0) = 0 = g(0) \Longrightarrow h'(x) = g(x) \Longrightarrow \boxed{a}$

التأكد



$h \Longrightarrow g = h'$ ✓

⑤ حل $s(t) = s(0) \Longrightarrow \ln(t^2 - 2t + 1.4) = \ln(0 + 1.4)$

$$\Longrightarrow t^2 - 2t + 1.4 = 1.4 \Longrightarrow t(t-2) = 0$$

$$\Longrightarrow t = 0\ ,\ \boxed{t=2} \Longrightarrow \boxed{b}$$

⑥ حل $f'(x) = 2^{\frac{1}{t}}\cdot\frac{-1}{t^2}\cdot\ln 2$

$$f'(2) = 2^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{-1}{2^2}\cdot\ln 2 = \frac{-\sqrt{2}\ln 2}{4} \Longrightarrow \boxed{b}$$

⑦ حل $\longrightarrow$ d

⑦ حل $f'(x) = \cos x + 2ax$

$f''(x) = -\sin x + 2a$

$f''(\frac{\pi}{6}) = 0 \Rightarrow -\sin\frac{\pi}{6} + 2a = 0 \Rightarrow 2a = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{4}}\ \boxed{d}$

8

$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{(1+h-1)^4} - \sqrt[3]{0}}{h}$

$= \lim_{h \to \infty} \frac{h^{4/3}}{h} = \lim_{h \to \infty} h^{1/3} = (0)^{+1/3} = 0 \Longrightarrow$ قابل للاشتقاق

(9a) حل $\frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}\right) \cdot \frac{(2\sqrt{x}+1)\frac{2}{2\sqrt{x}} - 2\sqrt{x} \cdot \frac{2}{2\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x}+1)^2}$

$= \frac{4\sqrt{x}}{(2\sqrt{x}+1)} \frac{\cancel{2} + \frac{1}{\sqrt{x}} \cancel{-2}}{(2\sqrt{x}+1)^2}$

$= \frac{4}{(2\sqrt{x}+1)^3}$

(9b) حل $y = (\ln x)^{\frac{1}{\ln x}} \Longrightarrow \ln y = \ln(\ln x)^{\frac{1}{\ln x}} = \frac{\ln(\ln x)}{\ln x}$

$\frac{y'}{y} = \frac{\ln x \ \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} - \ln(\ln x) \cdot \frac{1}{x}}{(\ln y)^2} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\ln(\ln x)}{(\ln x)^2}$

$y' = y \cdot \left(\frac{1 - \ln(\ln x)}{x(\ln x)^2}\right)$

$\boxed{y' = (\ln x)^{\frac{1}{\ln x}} \left(\frac{1 - \ln(\ln x)}{x(\ln x)^2}\right)}$

10

$$\frac{ds}{du} = \frac{ds}{dt}\cdot\frac{dt}{du} = (2t+5)\cdot\frac{1}{3}(u^2+3u)^{-\frac{2}{3}}\cdot(2u+3)$$

$$= \left(2(u^2+3u)^{\frac{1}{3}}+5\right)\frac{1}{3}\,\frac{2u+3}{(u^2+3u)^{2/3}}$$

$$u=2 \Longrightarrow \frac{ds}{du} = \left(2\sqrt[3]{10}+5\right)\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{\sqrt[3]{(10)^2}}$$

$$\boxed{\left.\frac{ds}{du}\right|_{u=2} = \frac{14\sqrt[3]{10}+35}{3\sqrt[3]{100}}}$$

11

$$2x-2yy'=0 \Longrightarrow y'=\frac{x}{y}$$

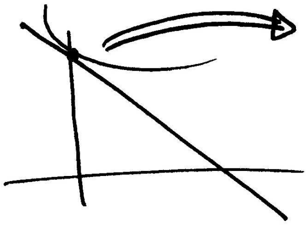
$$y''=\frac{y\cdot 1-xy'}{y^2}=\frac{y-x\cdot\frac{x}{y}}{y^2}=\frac{\frac{y^2-x^2}{y}}{y^2}$$

$$=\frac{y^2-x^2}{y^3}=-\frac{(x^2-y^2)}{y^3}$$

السؤال يقول
$x^2-y^2=1$

$$\boxed{y''=\frac{-1}{y^3}}$$

12



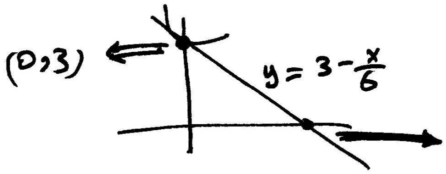
$$x=0 \Rightarrow 9-t=0 \Rightarrow \boxed{t=9}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{t}}}{-1}=\frac{-1}{2\sqrt{t}}$$

$$m=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=9}=\frac{-1}{2\sqrt{9}}=\frac{-1}{6}$$

$$x_1=0$$
$$y_1=\sqrt{9}=3$$

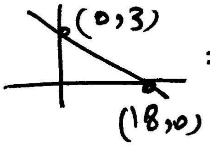
معادلة المماس $y-y_1=m(x-x_1) \Rightarrow y-3=\frac{-1}{6}(x-0)$



$$\boxed{y=3-\frac{x}{6}}$$

$$y=0 \Rightarrow 3-\frac{x}{6}=0 \Rightarrow x=18$$

$\Rightarrow$

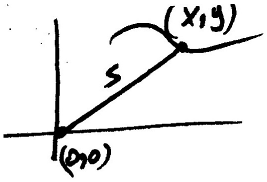


$$\Rightarrow A=\frac{1}{2}\,\Delta x\ \ \Delta y$$

$$=\frac{1}{2}(18-0)(3-0)$$

$$\boxed{A=27}$$

13



$\frac{ds}{dt} = 11$

$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=3} = ?$

$$s = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$$

$$s = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$s = \sqrt{x^2 + (x^{3/2})^2}$$

$$s = \sqrt{x^2 + x^3}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2x\frac{dx}{dt} + 3x^2\frac{dx}{dt}}{2\sqrt{x^2+x^3}}$$

$$11 = \frac{2(3)\frac{dx}{dt} + 3(3)^2\frac{dx}{dt}}{2\sqrt{3^2+3^3}}$$

$$11 = \frac{33}{12}\frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dx}{dt} = 4}$$

14

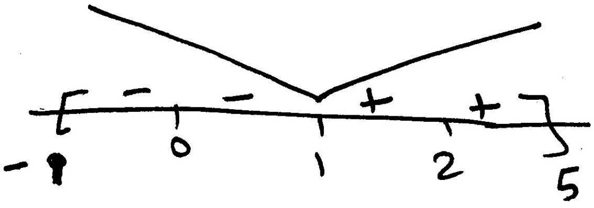
$$f(x) = \left(x \cdot (x-2)\right)^{\frac{1}{3}} = (x^2-2x)^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x^2-2x)^{-2/3} \cdot 2x-2$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{2x-2}{3\sqrt[3]{(x^2-2x)^2}}}$$

$\xrightarrow{f'=0}$ $2x-2=0 \Rightarrow x=1$

$\xrightarrow[\text{غ م}]{f'}$ $3\sqrt[3]{(x^2-2x)} = 0 \Rightarrow x = 0 , 2$



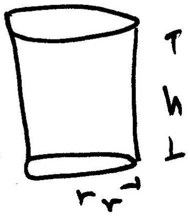
① تزايد (1 ، 5) ~~تناقص~~

② تناقص (-1 ، 1)

③ صغرى محلية عند x=1 وهي f(1)=-1

15

15



$2\pi r + h = 66 \Rightarrow \boxed{h = 66 - 2\pi r}$

$V = \pi r^2 h = \pi r^2(66 - 2\pi r)$

$V = 66\pi r^2 - 2\pi^2 r^3$

$\boxed{V'(r) = 132\pi r - 6\pi^2 r^2}$

$V'(r) = 0 \Rightarrow 132\pi r - 6\pi^2 r^2 = 0$

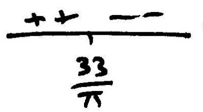
$r(132\pi - 6\pi^2 r) = 0$

$r = 0$

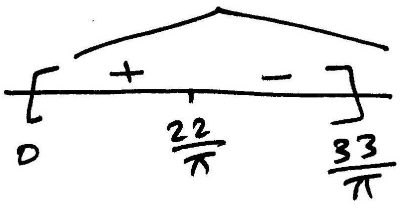
$r = \frac{132\pi}{6\pi^2} = \frac{22}{\pi}$

المجال $r > 0$

$h > 0 \Rightarrow 66 - 2\pi r > 0 \Rightarrow$



$\Rightarrow \left[0, \frac{33}{\pi}\right]$



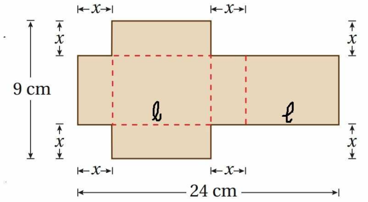
$\Rightarrow$ أكبر حجم عند $r = \frac{22}{\pi}$

$\Rightarrow h = 66 - 2\pi\left(\frac{22}{\pi}\right)$

$\boxed{h = 22}$

تطبيقات القيم القصوى 3

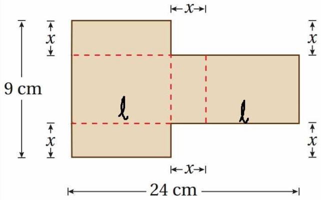
من أمثلتكم : الصندوق



س أكتب قانون حجم الصندوق الناتج من طي الورقة التالية

الحل $x+l+x+l=24 \Rightarrow 2l+2x=24 \Rightarrow l=12-x$

$V=(12-x)(9-2x)(x)$



س عند طي الورقة المبينة في الشكل ينتج لدينا صندوق مفتوح من أحد جوانبه .
أكتب قانون حجم الصندوق

الحل $l+x+l=24 \Rightarrow 2l+x=24 \Rightarrow l=12-\frac{x}{2}$

$V=(12-\frac{x}{2})(9-2x)(x)$

س ماهو المجال ؟ (في السؤال السابق)

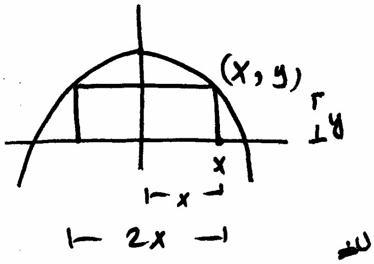
المجال: $x>0 \Longrightarrow \underset{0}{[}\,+++$

$9-2x>0 \Longrightarrow +++\underset{\frac{9}{2}}{]} \Longrightarrow \underset{0}{[}\;\underset{\frac{9}{2}}{]}\;\underset{24}{]}$

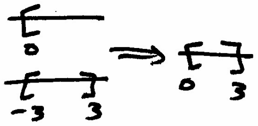
$12-\frac{x}{2}>0 \Longrightarrow +++\underset{24}{]} \Longrightarrow \underset{0}{[}\;\underset{\frac{9}{2}}{]} \Longrightarrow [0,\frac{9}{2}]$

المستطيل الديكارتي

$\boxed{\text{س}}$ جد أكبر مساحة ممكنة لمستطيل يمكن رسمه فوق محور X بحيث تكون احدى قاعدتيه على محور X . ورأساه الآخران على منحنى الاقتران $f(x) = 9 - x^2$



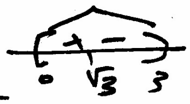
الطول : $2x$
العرض : $y = 4 - x^2$



$A = 2x(9 - x2)$

$\boxed{A = 18x - 2x3} \Rightarrow A' = 18 - 6x^2 = 0$

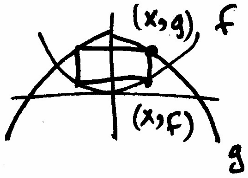
$\Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$



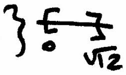
$x = \sqrt{3}$ أكبر ما يمكن عند ⟸

$\Rightarrow A = 18\sqrt{3} - 2(\sqrt{3})^3 = 12\sqrt{3}$

$\boxed{\text{س}}$ جد أكبر مساحة ممكنة لمستطيل يمكن حصره .بين $f(x) = 2x^2$ و $g(x) = 36 - x2$

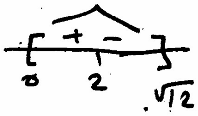


الطول : $2x$
العرض : $g - f = (36 - x^2) - x^2 = 36 - 3x^2$ }



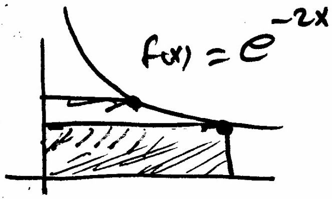
$A = 2x(36 - 3x^2) = 72x - 6x3$

$\boxed{A' = 72 - 18x^2} = 0 \Rightarrow x = -2, 2$



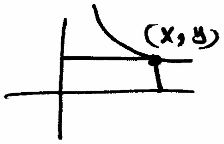
عظمى عند $x = 2$ ⟸

$A = 2(2)(36 - 3(2)^2) = 96$



س جد أبعاد المستطيل المبين في الشكل التي تجعل مساحته أكبر ما يمكن

الحل



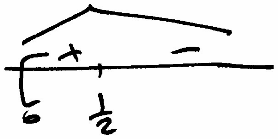
الطول : $x - 0 \longrightarrow \overset{0}{\vdash\!\longrightarrow} \Rightarrow [0, \infty)$

العرض $y - 0 = e^{-x} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\boxed{A = x\,e^{-2x}}$$

$$A' = x\,e^{\cancel{-2x}}\cdot -2 + e^{\cancel{-2x}}\cdot 1 = e^{-x}(1-2x) = 0$$

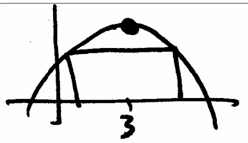
$$x = \frac{1}{2}$$



الطول : $\frac{1}{2}$

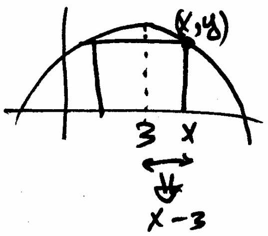
العرض : e^{-1}

*



س جد أبعاد أكبر مستطيل يمكن حصره بين منحنى $f(x) = 7 - x^2 + 6x$ & محور الـ x

الحل



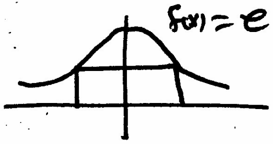
$\Longrightarrow$ الطول : $2(x-3)$ $\quad \overset{}{\underset{3}{[}}\!\longrightarrow$

العرض : $y - 0 = 7 - x^2 + 6x$ $\quad \underset{-1}{[}\!\longleftrightarrow\!\underset{7}{]} \Rightarrow [3, 7]$

$$A = (2x-6)(7-x^2+6x)$$

تمارين

① جد أكبر مساحة ممكنة لمستطيل يمكن حصره بين محور الـ x ومنحنى الاقتران $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$



الحل ①

$\Longrightarrow$ الطول : $2(x-0)$

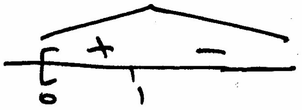
العرض : $y - 0 = e^{-\frac{x^2}{2}} \xrightarrow{[0,\infty)} \mathbb{R} \Rightarrow [0,\infty)$

$$\boxed{A = 2x\,e^{-\frac{x^2}{2}}}$$

$$A' = 2x\,e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot -x + e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot 2$$

$$\boxed{A' = e^{-\frac{x^2}{2}}\left(-2x^2+2\right)} = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

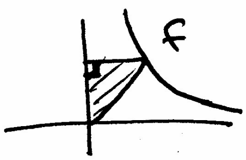
$\Longrightarrow$



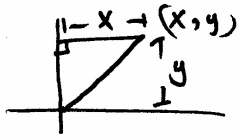
$A = 2(1)\,e^{-\frac{(1)^2}{2}} \longleftarrow$ أكبر مساحة عند $x=1$

$$\boxed{A = \frac{2}{\sqrt{e}}}$$

② جد أكبر مساحة ممكنة للمثلث **القائم** المبين في الشكل، حيث $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$



الحل



القاعدة : $x \Longrightarrow [0,\infty)$

الارتفاع : $y = \frac{1}{x^2+1}$ $\xrightarrow{=0}$ ؟؟ , $\xrightarrow{=0}$ ؟؟ $\Rightarrow \overset{+++}{\longleftrightarrow} \Rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow [0,\infty)$

$$A = \frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{x^2+1} = \frac{x}{2x^2+2} \Longrightarrow A' = \dots = \frac{2-2x^2}{(2x^2+2)^2}$$

$2-2x^2 \xrightarrow{=0} x=1$ ، $(2x^2+2)^2 \xrightarrow{=0}$ ؟؟

$\Longrightarrow$

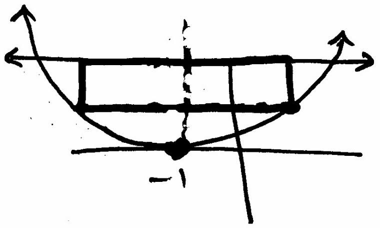
$\Longrightarrow x=1 \longrightarrow A = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$

③ يقع المستطيل abcd في المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x)=(x+1)^2$ والمستقيم $y=4$

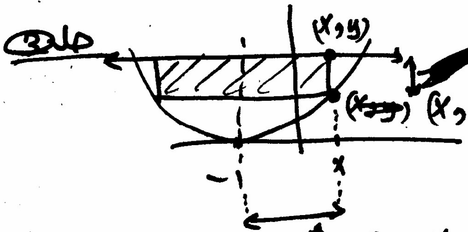
أثبت أن قانون مساحة المستطيل يعطى بالاقتران

$$A(x)=(2x+2)(3-x^2-2x)$$

وبس (شفتوا ما أحسني)



حل ③



العرض $= y - f$

$= 4-(x+1)^2$

$= 4-(x^2+2x+1)$

$= \boxed{3-x^2-2x}$

$x - -1 = x+1$

$\Rightarrow$ الطول $2(x+1) = \boxed{2x+2}$

$A =$ الطول . العرض $= \boxed{(2x+2)(3-x^2-2x)}$

تحدي من الكتاب

س

يُبيِّن الشكل المجاور مستطيلًا مرســومًا داخل مثلث قائم الزاوية.

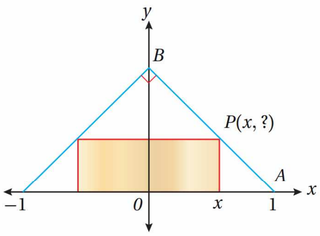
وهو متطابق الضلعين، وطول قاعدته 2 وحدة طول:

5 أجد الإحداثي y للنقطة P بدلالة x.

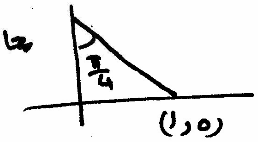
6 أكتب مساحة المستطيل بدلالة x.

7 أجد أكبر مساحة مُمكِنة للمستطيل.

8 أجد أبعاد المستطيل التي تجعل مساحته أكبر ما يُمكِن.



الحل أولاً معادلة



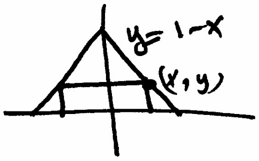
$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y-0=m(x-1)$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4} \Rightarrow m=\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$
$$m=-1$$

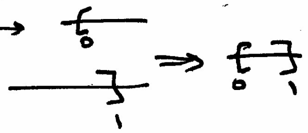
$$\Rightarrow y=-(x-1) \Rightarrow \boxed{y=1-x}$$

$\Rightarrow$



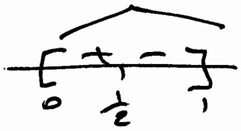
الطول : $2x$ ⟶

العرض : $y=1-x$



$$A=2x(1-x)$$
$$\boxed{A=2x-2x^2}$$

$$A'=2-4x=0 \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{2}}$$

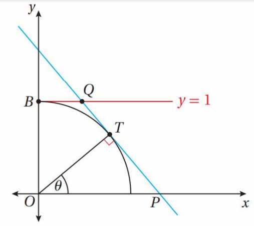


الطول : $2\left(\frac{1}{2}\right)=1$

العرض : $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$A=$ الطول . العرض $=(1)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

تحدي شبه المنحرف



تقع النقطة T على دائرة الوحدة التي معادلتها: $x^2 + y^2 = 1$، عند الزاوية θ من المحور x الموجب، حيث: $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ كما في الشكل المجاور:

⑲ أُثبِت أنَّ معادلة المستقيم PT هي:

$$x\cos\theta + y\sin\theta = 1$$

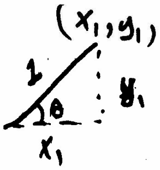
⑳ أُثبِت أنَّ مساحة شبه المُنحرِف $OBQP$ تعطى بالاقتران الآتي:

$$A = \frac{2 - \sin\theta}{2\cos\theta}$$

㉑ أجد قياس الزاوية θ الذي تكون عنده مساحة شبه المُنحرِف أقل ما يُمكِن.

الحل

معادلة مماس $2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = \frac{-x}{y}$???



$$\Rightarrow \frac{y_1}{1} = \sin\theta \quad\Longrightarrow\quad \boxed{m = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$$

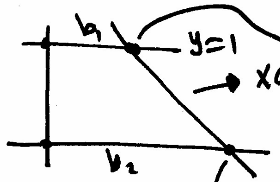
$$\frac{x_1}{\cancel{1}} = \cos\theta$$

معادلة مماس $\Rightarrow y - y_1 = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}(x - x_1)$

$$y - \sin\theta = \frac{-\cos\theta}{\sin\theta}(x - \cos\theta)$$

$$\Rightarrow \text{--} \Rightarrow \boxed{x\cos\theta + y\sin\theta = 1}$$

$\Rightarrow$



$y = 0$

$$x\cos\theta + 1\cdot\sin\theta = 1$$

$$x = \frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta} = b_1$$

$$x\cos\theta + 0 = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{\cos\theta} = b_2$$

$$A = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h = \frac{1}{2}\left(\frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta}\right)(1)$$

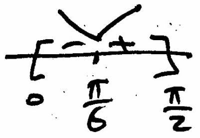
$$\boxed{A = \frac{2 - \sin\theta}{2\cos\theta}}$$

$$A' = \frac{2\cos\theta(-\cos\theta) - (2-\sin\theta)(-2\sin\theta}{(2\cos\theta)^2}$$

$$= \frac{-2\cos^2\theta + 4\sin\theta - 2\sin^2\theta}{(2\cos\theta)^2} = \frac{2\sin\theta - 2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}{4\cos^2\theta}$$

$$\boxed{A' = \frac{4\sin\theta - 2}{4\cos^2\theta}} \xrightarrow{=0} \sin\theta = \frac{1}{2} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\xrightarrow{=0} \theta = \frac{\pi}{2}$$

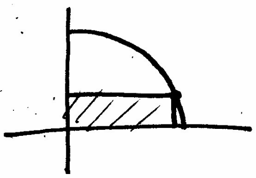


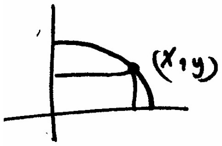
⟸ أقل ما يمكن عند $\theta = \frac{\pi}{6}$

$$\boxed{\text{تمرين}}$$

تحدي

جد أكبر مساحة ممكنة لمستطيل محصور بين المحورين الاحداثيين الموجبين ودائرة الوحدة $x^2+y^2=1$ ، كما في الشكل المجاور



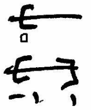


الطول : x

العرض y : $x^2+y^2=1 \Rightarrow y^2=1-x2 \Rightarrow y=\sqrt{1-x^2}$

$\Rightarrow$ الطول : x

العرض : $\sqrt{1-x^2}$

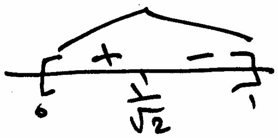


$\Rightarrow$ [0 , 1]

$$A=xy=x\sqrt{1-x^2}$$

$$A'=x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-x2}\cdot1=\frac{-x2}{\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-x^2}$$

$$A'=\frac{-x^2+(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\Rightarrow\boxed{A'=\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}}\rightarrow x=\frac{1}{\sqrt{2}}$$



$\Rightarrow$ أكبر مساحة عند $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$

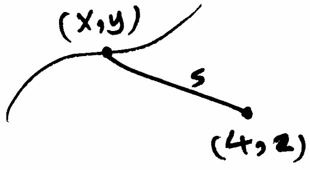
$$A=\frac{1}{\sqrt2}\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt2}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt2}\sqrt{\frac{2-1}{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt2}\cdot\frac{1}{\sqrt2}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

أقرب نقطة

س) جد النقطة على منحنى $f(x) = \sqrt{8x}$ ، التي تكون أقرب ما يمكن إلى النقطة $(4,2)$

الحل



$$s = \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2}$$

$\sqrt{8x} \to x \in [0,\infty)$

$$s = \sqrt{(x-4)^2 + (\sqrt{8x}-2)^2}$$

$$s' = \frac{2(x-4) + \cancel{2}(\sqrt{8x}-2)\cdot\frac{8}{\cancel{2}\sqrt{8x}}}{2\sqrt{\quad}}$$

$$s' = 2x - 8 + \sqrt{8x}\,\frac{8}{\cancel{8}\sqrt{8x}} - \frac{16}{\sqrt{8x}} \Big/ \cancel{2}\; 2\sqrt{\quad}$$

$$= \frac{2x - \cancel{8} + \cancel{8} - \frac{16}{\sqrt{8x}}}{2\sqrt{\quad}} \Rightarrow s' = \frac{\frac{2x\sqrt{8x} - 16}{\sqrt{8x}}}{2\sqrt{\quad}}$$

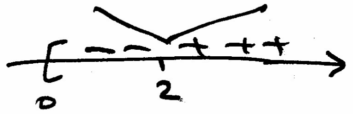
$$\boxed{s' = \frac{x\sqrt{8x} - 8}{\sqrt{8x}\sqrt{(x-4)^2 + (\sqrt{8x}-2)^2}}}$$

$\to s' = 0 \Rightarrow x\sqrt{8x} = 8$

$x^2(8x) = 64$

$\Rightarrow \boxed{x = 2}$

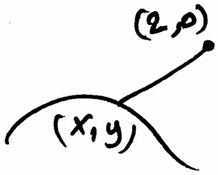
$\to s'$ غ م $\Rightarrow x = 0$



$\Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = f(2) = 4 \Rightarrow \boxed{(2,4)}$

$\boxed{\text{تحويش}}$

كالكولس/ جد النقطة على منحنى $x^2+y^2=1$ ، التي تكون أقرب ما يمكن من النقطة $(2,0)$



$$s=\sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2}$$

$$=\sqrt{(x-2)^2+\left(\pm\sqrt{1-x^2}-0\right)^2}$$

$$=\sqrt{x^2-4x+4+1-x^2}$$

$$\boxed{s=\sqrt{5-4x}}$$

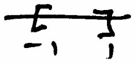
$y^2+x^2=1$

$y^2=1-x^2$

$y=\pm\sqrt{1-x^2}$

$\Swarrow$

المجال



$$s'=\frac{-4}{2\sqrt{5-4x}} \qquad \begin{matrix} \longrightarrow =0 \Rightarrow x= ؟؟ \\ \longrightarrow =0 \quad x=\frac{5}{4} \end{matrix} \qquad \Longrightarrow$$

أقرب ما يمكن عند $x=1$

$\Rightarrow (1)^2+y^2=1$

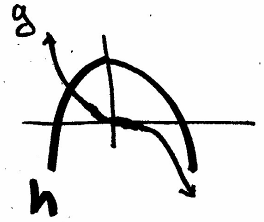
$y=0$

$\Swarrow$

النقطة $(1,0)$

من أسئلتكم المنحنيات

كالكولس



أي مما يلي يمثل مشتقة الآخر

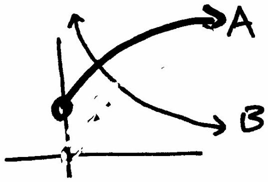
الحل $\boxed{\text{جرب } g} \Longrightarrow g'(0) = 0 \neq h(0)$ ✗

$\rightarrow g'$ $\overset{g}{\overleftrightarrow{\;- - - -\;}}$ $\Longrightarrow g' \neq h$

$\boxed{\text{جرب } h}$ $h'(0) = 0 = g(0)$

$h' \rightarrow$ $\overset{h}{\overleftrightarrow{+ + + \;\underset{0}{|}\; - - - -}}$ $\Longrightarrow \boxed{h' = g}$ ←

كالكولس

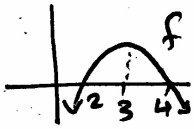


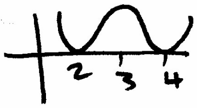
أي مما يلي يمثل مشتقة الآخر

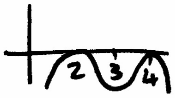
الحل $\boxed{\text{جرب } B} \rightarrow B'$ $\overset{B}{\overleftrightarrow{\;- - - -\;}}$ $\Longrightarrow B' \neq A$

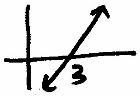
$\boxed{\text{جرب } A} \rightarrow A'$ $\overset{A}{\overleftrightarrow{+ + + + + +}}$ $\Longrightarrow \boxed{A' = B}$

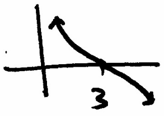
س الشكل المجاور يمثل منحنى f
أي من الأشكال التالية يمثل منحنى f'



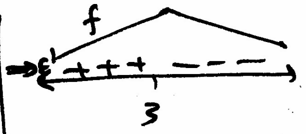
a)


b)


c)


d)


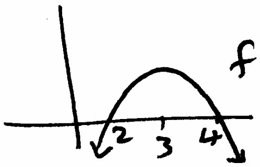
الحل $f'(3) = 0 \Rightarrow$ a ✗
b ✗
c ?
d ?

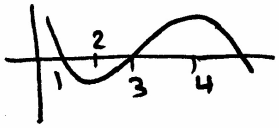


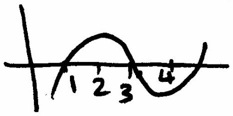
$\Rightarrow \boxed{d}$

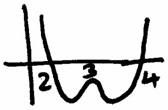
تمرين سنوات 2005

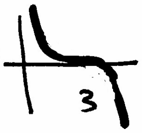
الشكل المجاور يمثل منحنى $f'(x)$
أي من الأشكال التالية يعد
تمثيلاً تقريبياً لمنحنى f

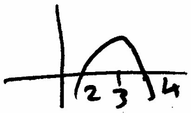


a)


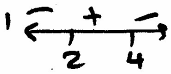
b)


c)


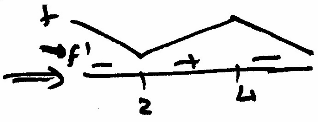
d)


الحل f'


$\Rightarrow f' = 0 \Rightarrow x = 2 , 4$

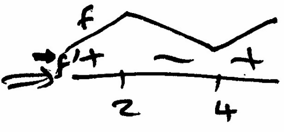


a) $f'(2) = 0$
$f'(4) = 0$ ✓ $\Rightarrow$



✓ $\Rightarrow \boxed{a}$

b) $f'(2) = 0$
$f'(4) = 0$ ✓ $\Rightarrow$



✗

c) $f'(2.5) = 0$
$f'(3) = 0$
$f'(3.5) = 0$ ✗

d) $f'(3) = 0$ ✗

$\boxed{a}$

تطبيقات القيم القصوى 4

المجال

$\boxed{س}$ إذا كان x ، y يمثلان أطوال ، فجد المجال في الحالات التالية

① $y=3-x$ ② $x=5-y$ ③ $y=x-3$

الحل ①

$x>0$ $\quad \underset{0}{[}\ +$

$y>0$

$3-x>0$ $\quad +\ \underset{3}{]}$

$\Longrightarrow x\in[0,3]$

الحل ②

$y>0$ $\quad \underset{0}{[}\ +$

$x>0$

$\rightarrow 5-y>0$ $\quad +\ \underset{5}{]}$

$\rightarrow y\in[0,5]$

الحل ③

$x>0 \Longrightarrow$ $\quad \underset{0}{[}\ +$

$y>0$

$x-3>0$ $\quad \underset{3}{[}\ +$

$\Longrightarrow x\in[3,\infty)$

$\boxed{س}$ إذا كان X ، y يمثلان أطوال ، فجد المجال في كل مما يلي

① $y=\dfrac{3}{x-2}$ ② $y=\dfrac{x}{5-x}$ ③ $x=\dfrac{(y+2)}{y-3}$

الحل ①

$x>0$ $\quad \underset{0}{[}\ +$

$\dfrac{3}{x-2}>0$ $\quad \underset{2}{[}\ +++$

$\Longrightarrow [2,\infty)$

الحل ②

$x>0$ $\quad \underset{0}{[}\ +$

$\dfrac{x}{5-x}>0$ $\quad \underset{0}{[}\ +\ \underset{5}{]}$

$\Longrightarrow [0,5]$

③

$y>0$ $\quad \underset{0}{[}\ +$

$\dfrac{(y+2)}{y-3}>0$ $\quad +\ \underset{-2}{]}\ -\ \underset{3}{[}\ +$

$\Longrightarrow [3,\infty)$

$\boxed{س}$ إذا كان x, y, z أطوال ، جد المجال في كل مما يلي

① $y=5-x$

$z=x-1$

الحل

$x>0$ $\quad \underset{0}{[}$

$5-x>0$ $\quad \underset{5}{]}$

$x-1>0$ $\quad \underset{1}{[}$

$\Longrightarrow [1,5]$

② $y=5-x$

$z=\dfrac{3}{x}-1$

الحل

$x>0$ $\quad \underset{0}{[}$

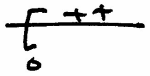
$5-x>0 \rightarrow$ $\quad \underset{5}{]}$

$\dfrac{3-x}{x}>0$ $\quad \underset{0}{[}\ +\ \underset{3}{]}$

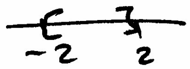
$\rightarrow [0,3]$

س) إذا كانت x طول ، فجد المجال علماً أن $f(x)=\sqrt{4-x^2}$

الحل $x \geq 0$



مجال الجذر



المجال $\longleftarrow$ $[0,2]$

تمارين

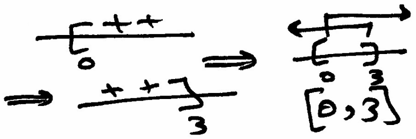
① إذا علمت أن y,x أطوال فجد المجال علماً أن $y+x=3$

② إذا علمت أن r نصف قطر ، فجد المجال علماً أن $f(r)=\ln(1-r)$

③ إذا علمت أن θ زاوية موجبة ، وأن نصف القطر r يعطى بالعلاقة $r=\frac{1}{2+\theta}$ ، فجد مجال θ

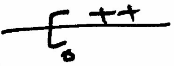
حل ① $y=3-x \Longrightarrow x\geq 0 \Longrightarrow$

$y\geq 0 \Rightarrow 3-x\geq 0 \Longrightarrow$



$\Longrightarrow [0,3]$

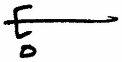
حل ② $r\geq 0$



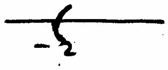
$\ln(1-r)$ مجال ln $1-r>0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow [0,1)$

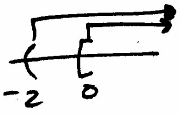
حل ③ $\theta\geq 0 \Longrightarrow$



$\frac{1}{2+\theta}\geq 0 \Longrightarrow$



$\Longrightarrow$



$\Rightarrow [0,\infty)$

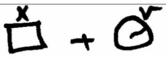
سلك و شكلين

كتاب التمارين

سلك يبلغ طوله 24cm ، ويراد قصه إلى قطعتين لصنع دائرة ومربع .

① حدد مكان القص بحيث يكون مجموع مساحتي الدائرة والمربع أصغر ما يمكن

② = = = = = = = = = = أكبر =



$4x + 2\pi r = 24$

$$\boxed{x = 6 - \frac{\pi}{2} r}$$

$x > 0$

$6 - \frac{\pi}{2} r > 0 \Rightarrow \cancel{r} \Rightarrow \left[0, \frac{12}{\pi}\right]$

$\Rightarrow r < \frac{12}{\pi}$

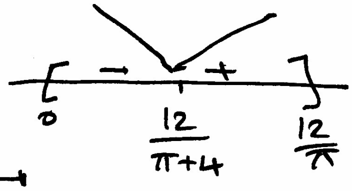
أقل $A = x^2 + \pi r^2$

$A = \left(6 - \frac{\pi}{2} r\right)^2 + \pi r^2$

$A'(r) = 2\left(6 - \frac{\pi}{2} r\right)\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 2\pi r$

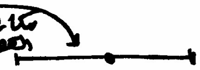
$$\boxed{A'(r) = -6\pi + \frac{\pi^2}{2} r + 2\pi r} = 0$$

$\Rightarrow r = \frac{6\pi}{\frac{\pi^2}{2} + 2\pi} \Longrightarrow r = \frac{12}{\pi + 4}$



$r = \frac{12}{\pi + 4}$ أقل مساحتين عندما $\Leftarrow$

$\Longrightarrow$ محيط الدائرة $2\pi r = \frac{24\pi}{\pi + 4} \Longrightarrow$

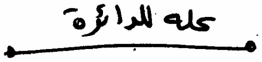


أكبر مساحتين $\Rightarrow A(0) = 36$

$A\left(\frac{12}{\pi}\right) = \frac{144}{\pi} \approx 46$

$\Longrightarrow r = \frac{12}{\pi} \Longrightarrow$ محيط الدائرة $= 2\pi r$

$= 2\pi \cdot \frac{12}{\pi} = 24$

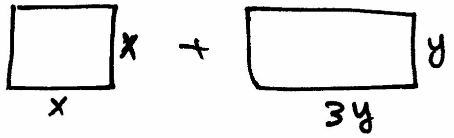


التمارين

① وزاري

سلك طوله 28cm . قطع إلى جزئين ثم ثني الجزء الأول ليكون مربع ، وثني الجزء الثاني ليكون مستطيل طوله يساوي ثلاثة أمثال عرضه . أوجد طول كل من الجزئين إذا كان مجموع مساحتي المربع والمستطيل أقل ما يمكن

الحل



$\Longrightarrow 4x + 8y = 28$

$\boxed{x = 7 - 2y}$

$y > 0$

$7 - 2y > 0$

$[0, \frac{7}{2}]$

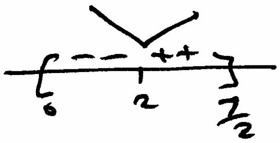
$4\ \cancel{x}\ \cancel{+}$

$A = x^2 + 3y \cdot y \Longrightarrow \cancel{A=}\ .$

$A = (7-2y)^2 + 3y^2$

$A'(y) = 2(7-2y)(-2) + 6y$

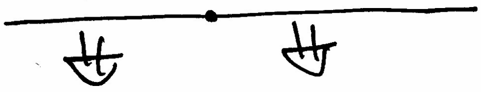
$\boxed{A'(y) = -28 + 14y} = 0 \Longrightarrow \boxed{y = 2}$



$x = 7 - 2(2)$

$\boxed{x = 3}$

$4x = 12 \quad 8y = 16$



الجزء الاول
12

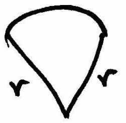
الجزء الثاني
16

② **مراجعة** دوري 2005

قطاع دائري محيطه 28cm ، أثبت أن مساحته تكون في قيمتها العظمى عندما تكون زاويته المركزية تساوي 2 rad

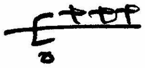
الحل

طريقة ①



$r + r + r\theta = 28 \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{28}{r} - 2}$

$r > 0$

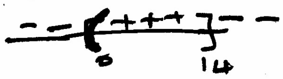


$\frac{28}{r} - 2 > 0$

$\Rightarrow \frac{28-2r}{r} > 0$

أصفار البسط $r = 14$

أصفار المقام $r = 0$



$\Rightarrow$ المجال $(0, 14]$

$A = \frac{1}{2} r^2 \theta = \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{28}{r} - 2\right)$

$\boxed{A = 14r - r^2}$

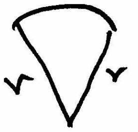
$\boxed{A'(r) = 14 - 2r} = 0 \Rightarrow r = 7$

أكبر مساحة عند
$r = 7$

$\rightarrow \theta = \frac{28}{7} - 2 \Longrightarrow \boxed{\theta = 2 \text{ rad}}$

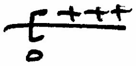
وهو المطلوب

طريقة ②



$r+r+r\theta=28 \Rightarrow \boxed{r=\frac{28}{2+\theta}}$

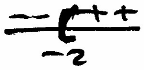
$\theta>0 \Rightarrow$



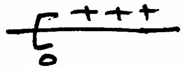
$r>0 \Rightarrow \frac{28}{2+\theta}>0$

صفر المقام

$\theta=-2$



$\Rightarrow$



$$A=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}\left(\frac{28}{2+\theta}\right)^2\theta$$

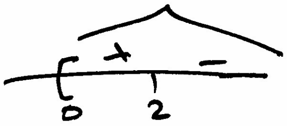
$$\boxed{A=\frac{392\,\theta}{(2+\theta)^2}}$$

$$A'(\theta)=\frac{(2+\theta)^2\,392-392\,\theta\cdot2(2+\theta)}{(2+\theta)^3}$$

عامل مشترك

$$=\frac{392\cancel{(2+\theta)}\big((2+\theta)-2\theta\big)}{(2+\theta)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$\boxed{A'(\theta)=\frac{392\,(2-\theta)}{(2+\theta)^3}}\begin{array}{l}\rightarrow \theta=2\\ \rightarrow \theta=-2\end{array}$$

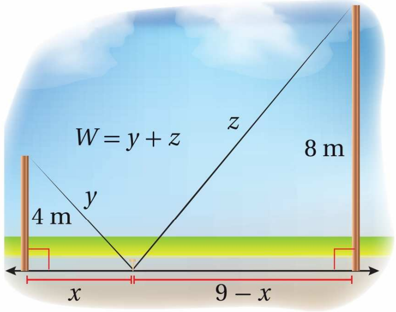


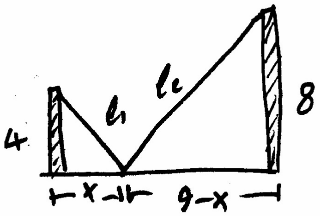
$\Rightarrow \boxed{\theta=2}$ أكبر مساحة

تحدي الوتد والراجة

س من الكتاب

عمودان طول أحدهما **8 m**، وطول الآخر **4 m**، والمسافة بينهما **9 m**، وهما مُثبَّتان بسلكين يصلان قِمَّة كل عمود بوتد عند سطح الأرض كما في الشكل المجاور. أجد الموقع المناسب لتثبيت الوتد بين العمودين بحيث يكون طول السلك المُستعمَل أقل ما يُمكِن.





$x \in [0,9]$

$$l = l_1 + l_2$$

$$= \sqrt{x^2+16} + \sqrt{(9-x)^2+64}$$

$$l'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+16}} + \frac{-2(9-x)}{2\sqrt{(9-x)^2+64}}$$

$$l'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+16}} + \frac{x-9}{\sqrt{(9-x)^2+64}} = \frac{x\sqrt{(9-x)^2+64} + (x-9)\sqrt{x^2+16}}{\sqrt{x^2+16}\,\sqrt{(9-x)^2+64}}$$

$$\rightarrow l' = 0 \Rightarrow x\sqrt{(9-x)^2+64} = -(x-9)\sqrt{x^2+16}$$

ربع الطرفين

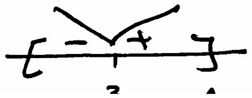
$$x^2((9-x)^2+64) = (x-9)^2(x^2+16)$$

$$x^2\cancel{(9-x)^2} + 64x^2 = \cancel{x^2(x-9)^2} + 16(x-9)^2$$

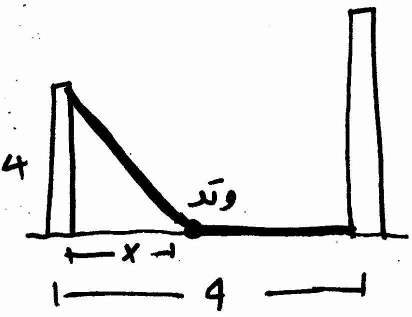
$$4x^2 = (x-9)^2 \longrightarrow 2x = x-9 \longrightarrow x = -9$$

$$\longrightarrow 2x = -(x-9) \longrightarrow \boxed{x = 3}$$

أقصر سلك عند $\underline{x=3}$



تمارين



① في المثال السابق لماذا أردنا تثبيت قمة العمود القصير بقاعدة العمود الطويل بواسطة سلك يمر بوتد يقع على الأرض بين العمودين (كما في الشكل المجاور) . فجد موقع الوتد بحيث يكون طول السلك أقل ما يمكن

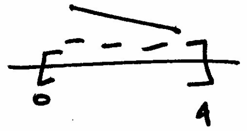
$l = \sqrt{x^2+16} + (4 - x)$ $\qquad x \in [0 , 4]$

$$\frac{dl}{dx} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+16}} \ast -1 \Rightarrow \boxed{\frac{dl}{dx} = \frac{x - \sqrt{x^2+16}}{\sqrt{x^2+16}}}$$

$$l' = 0 \Rightarrow x = \sqrt{x^2+16} \xrightarrow{\text{تربيع}} x^2+16 = x^2 \Rightarrow 16 = 0$$

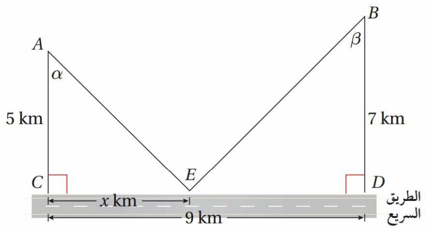
$$\Rightarrow x = 1?$$

$\Rightarrow$



$\Rightarrow$ أقل مسافة عند $x = 4$

② من الكتاب



يُمارِس يوسف هواية ركوب الدرّاجات. وفي أحد الأيام، انطلق على درّاجته من البيت عند النقطة A إلى المدرسة عند النقطة B، مارًّا بالنقطة E الواقعة على حافة الطريق السريع كما في الشكل المجاور:

23 إذا كان الاقتران L يُمثِّل المسافة التي يقطعها يوسف من البيت إلى المدرسة، فأكتب L بدلالة x.

24 أُثبِت أنَّه إذا كان: $\frac{dL}{dx} = 0$، فإنَّ: $\sin\alpha = \sin\beta$.

25 أجد قيمة x التي تجعل المسافة التي يقطعها يوسف أقل ما يُمكِن.

حل

$$l = \sqrt{x^2+25} + \sqrt{(9-x)^2+49} \qquad x \in [0, 9]$$

$$\frac{dl}{dx} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+25}} + \frac{-2(9-x)}{2\sqrt{(9-x)^2+49}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+25}} + \frac{x-9}{\sqrt{(9-x)^2+49}} \cancel{=0}$$

$$\frac{dl}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+25}} + \frac{x-9}{\sqrt{(9-x)^2+49}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+25}} = \frac{9-x}{\sqrt{(9-x)^2+49}} \Longrightarrow \boxed{\sin\alpha = \sin\beta}$$

$$\left(\begin{array}{l} \sin\alpha = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+25}} \\ \sin\beta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{9-x}{\sqrt{(9-x)^2+49}} \end{array} \right)$$

$$\frac{dl}{dx} = \frac{x\sqrt{(9-x)^2+49} + (x-9)\sqrt{x^2+25}}{\sqrt{x^2+25}\,\sqrt{(9-x)^2+49}} = 0$$

$$\Rightarrow x\sqrt{(9-x)^2+49} = -(x-9)\sqrt{x^2+25}$$

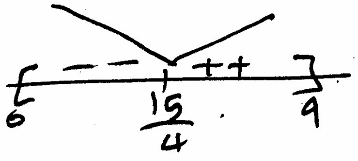
ربّع الطرفين

$$x^2\left((9-x)^2+49\right) = (x-9)^2(x^2+25)$$

$$\cancel{x^2(x-9)^2} + 49x^2 = \cancel{x^2(x-9)^2} + 25(x-9)^2$$

$$\Rightarrow 7x = 5(x-9) \Rightarrow 2x = -45 \Rightarrow x = \frac{-45}{2} \text{ ✗}$$

$$7x = -5(x-9) \Rightarrow 12x = 45 \Rightarrow x = \frac{45}{12} = \boxed{\frac{15}{4}}$$



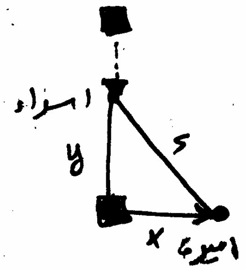
$\Rightarrow$ اقل مسافة عند $x = \frac{15}{4}$

أميرة وإسراء

س من الكتاب

تتدرَّب إسراء وأميرة يوميًّا استعدادًا لسباق العَدْوِ (المارثون). في أحد الأيام، انطلقت إسراء من منزلها الذي يقع على بُعْد **20 km** شمال منزل أميرة الساعة **9:00 a.m.**، واتَّجَهت جنوبًا بسرعة **8 km/h**. وفي الوقت نفسه، انطلقت أميرة في اتجاه الشرق بسرعة **6 km/h**.

في أيِّ ساعة تكون إسراء وأميرة أقرب ما يُمكِن إلى بعضهما، علمًا بأنَّ كُلًّا منهما ركضت مدَّة **2.5 h**؟



$x = x_0 + x't = 0 + 6t \Rightarrow x = 6t$

$y = y_0 + y't = 20 - 8t \rightarrow y = 20 - 8t$

$x > 0 \Rightarrow t > 0$

$y > 0 \Rightarrow 20 - 8t > 0$

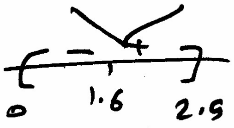
$\Rightarrow$ المجال $[0, 2.5]$

$s = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(6t)^2 + (20-8t)^2}$

$s(t) = \sqrt{100t^2 - 320t + 400}$

$s' = \dfrac{200t - 320}{2\sqrt{\quad}}$ $= 0 \rightarrow \boxed{t = 1.6}$

$2\sqrt{\quad} = 0 \quad t = ؟؟$



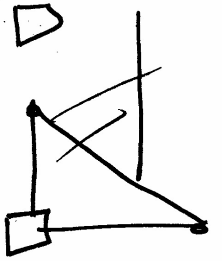
أقل مسافة عند

$t = 1.6 \Longrightarrow$ الساعة

$9:00 + 1:36$

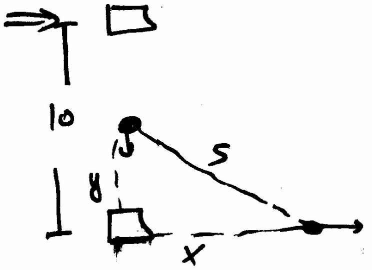
$= 10:36$ am

س) انطلقت اسراء من منزلها الذي يقع شمال منزل أسيرة الساعة التاسعة صباحاً . واتجهت للجنوب بسرعة 10 km/h . وفي الوقت نفسه انطلقت أسيرة في اتجاه الشرق بسرعة 10 km/h ، في أي ساعة تكون اميرة واسراء اقرب ما يمكن إلى بعضهما .
علماً أن اسراء وصلت إلى منزل أسيرة الساعة 10:00 صباحاً ثم توقفتا عن المسير.



أولاً نحسب المسافة بين بيت أميرة واسراء

المسافة = [illegible] = 10 . 1 = 10



$x = 10t$

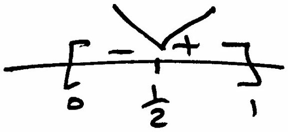
$y = 10 - 10t$

$$s = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(10t)^2 + (10-10t)^2} \qquad t \in [0, 1]$$

$$= \sqrt{200t^2 - 200t + 100}$$

$$\boxed{s' = \frac{400t - 200}{2\sqrt{\quad}}} \overset{=0}{\longrightarrow} t = \frac{1}{2}$$

$\longrightarrow s?$



اقرب مسافة عند $t = \frac{1}{2}$

$\Longrightarrow$ $\boxed{9:30}$ عند

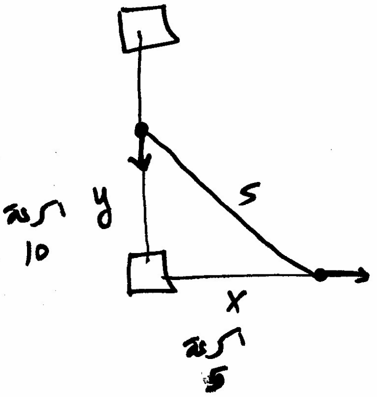
تمرين

① انطلقت اسراء من منزلها الذي يقع على مسافة 20km شمال منزل اميرة واتجهت جنوباً بسرعة 10 km/s . وفي الوقت نفسه انطلقت اميرة شرقاً لتقطع مسافة 10 km خلال ساعتين . ثم توقفتا عن المشي . جد أقل مسافة بينهما

الحل

أولاً نحسب سرعة أميرة

$$5 = \frac{10}{2} = \frac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}} = \text{السرعة}$$



$$x = 5t$$

$$y = 20 - 10t$$

$$t \in [0, 2]$$

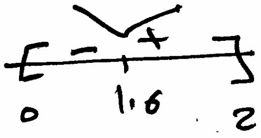
$$s = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(5t)^2 + (20-10t)^2}$$

$$= \sqrt{25t^2 + 400 - 400t + 100t^2}$$

$$s = \sqrt{125t^2 - 400t + 400}$$

$$s' = \frac{250t - 400}{2\sqrt{}} \xrightarrow{=0} t = \frac{400}{250} = \frac{40}{25} = \frac{8}{5} = 1.6$$

أقل مسافة عند $t = 1.6$



$$s(1.6) = \sqrt{(5(1.6))^2 + (20 - 10(1.6))^2}$$

$$= \sqrt{8^2 + 4^2} \Rightarrow \sqrt{80}$$

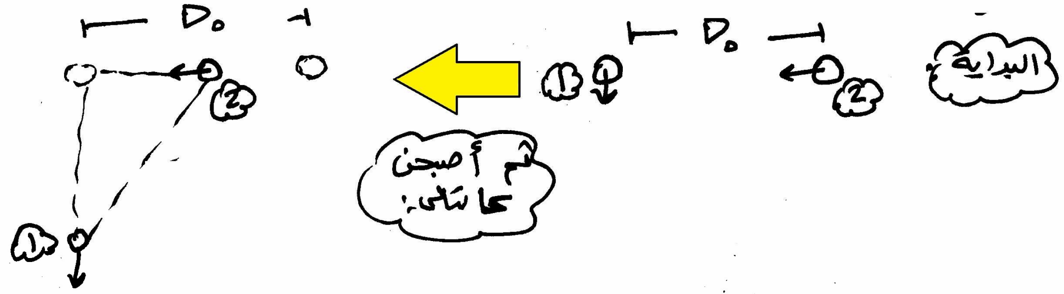
$$=$$

أقل مسافة = $\sqrt{80}$

② تحدي الكتاب

انطلق قطار من إحدى المحطّات الساعة 10:00 a.m.، وتحرَّك في اتجاه الجنوب بسرعة 60 km/h، حيث المحطَّة التالية. وفي الوقت نفسه، انطلق قطار آخر نحو الغرب بسرعة 45 km/h، ثم وصل إلى محطَّة انطلاق القطار الأوَّل الساعة 11:00 a.m.. في أيِّ ساعة يكون القطاران أقرب ما يُمكِن إلى بعضهما؟

الحل: أصعب في السؤال عليك تتخيل أنه القطارين كانا في بداية الحركة في الأماكن التالية

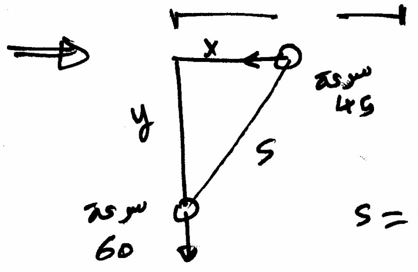


لحساب D_0 للقطار الاول: المسافة = السرعة × الزمن

$= 1 \times 45$

$= 45$

45



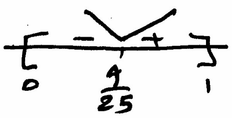
$y = 60t$

$x = 45 - 45t$

$s = \sqrt{(60t)^2 + (45-45t)^2}$

$\ldots\ldots \Rightarrow \boxed{s'(t) = \frac{11250t - 4050}{2\sqrt{\quad}}} = 0$

$\Rightarrow t = \frac{4050}{11250} = \frac{4}{25}$

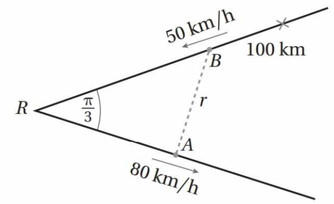


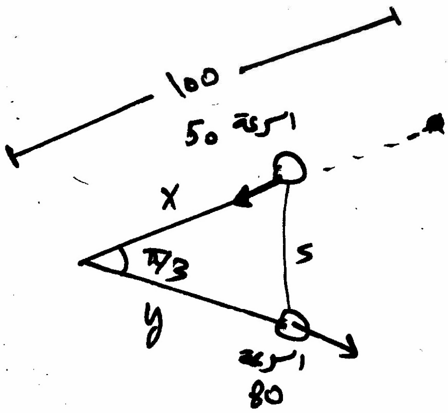
$\Rightarrow t = \frac{4}{25}(60) \approx 21$

$\Rightarrow \boxed{\text{الساعة } 10:21}$

③ كتاب التمارين

يلتقي طريقان مستقيمان عند النقطة R بزاوية قياسها $\frac{\pi}{3}$. إذا انطلقت السيّارة A من النقطة R على أحد الطريقين بسرعة 80 km/h، وفي الوقت نفسه انطلقت السيّارة B بسرعة 50 km/h على الطريق الآخر في اتجاه النقطة R من نقطة تبعد عنها مسافة 100 km، فأجد أقصر مسافة مُمكِنة بين السيّارتين.





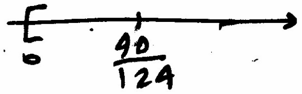
$X = 100 - 50t$

$y = 80t$

$$s = \sqrt{(100-50t)^2 + (80t)^2 - 2(100-50t)(80t)} \cdot \cos\frac{\pi}{3}$$

$$s = \sqrt{12900t^2 - 18000t + 10000} \qquad t \in [0, \infty)$$

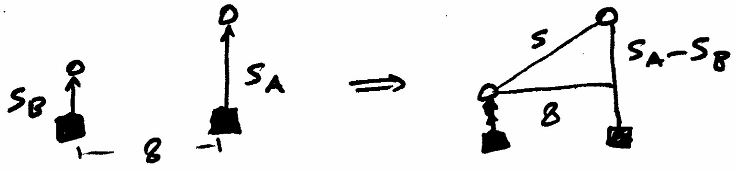
$$s' = \frac{-18000 + 25800t}{2\sqrt{}} = 0 \Rightarrow t = \cdot\cdot = \frac{90}{129}$$



$$\Rightarrow \boxed{s\left(\frac{90}{129}\right) = \sqrt{12900\left(\frac{20}{129}\right)^2 - 18000\left(\frac{20}{129}\right) + 10000}}$$

مبدأ الجمع والطرح

س) يقع الجسم A على مسافة 8 m شرق الجسم B . انطلق الجسمان شمالاً . حيث أن بعد كل منهما عن نقطة الانطلاق يعطى بالعلاقة
$S_B = t$ ، $S_A = t^2$.
متى يصبحان أقرب ما يمكن من بعضهما بعد انطلاقهما



$$\Rightarrow S = \sqrt{(S_A - S_B)^2 + 8^2} = \sqrt{(t^2 - t)^2 + 64}$$

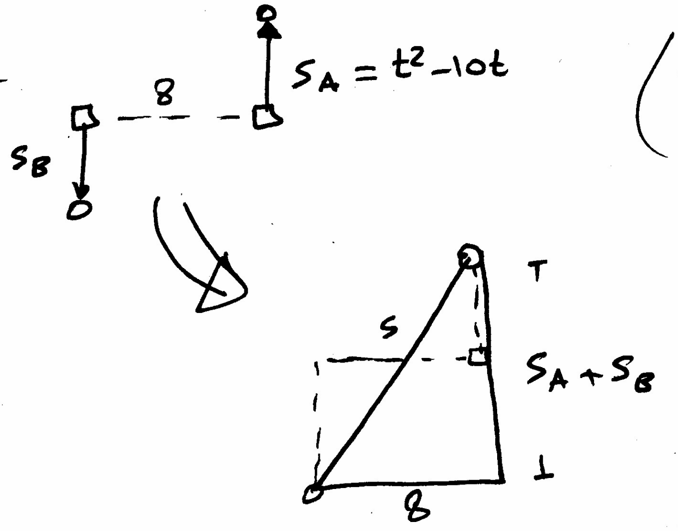
$$S' = \frac{2(t^2 - t) \cdot (2t - 1)}{2\sqrt{}} = 0 \Rightarrow t = 0, \tfrac{1}{2}, 1$$

⟸ يصبحان أقرب ما يمكن من بعضهما
بعد انطلاقهما عند $t = 1$

(أهمل $t=0$)

س يقع الجسم A على مسافة 8 m شرق الجسم B . انطلق الجسمان شمالاً . حيث أن بعد كل منهما عن نقطة الانطلاق يعطى بالعلاقة $s_A = t^2$ و $s_B = t$.
متى يصبحان أقرب ما يمكن من بعضهما بعد انطلاقهما

الحل

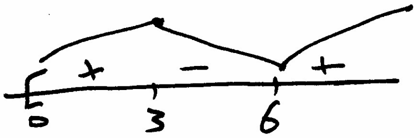


$S_B = \text{سرعة} \cdot \text{زمن}$
$= 4t$

$$s = \sqrt{(S_A + S_B)^2 + 8^2} = \sqrt{(t^2 - 10t + 4t)^2 + 64}$$

$$= \sqrt{(t^2 - 6t)^2 + 64}$$

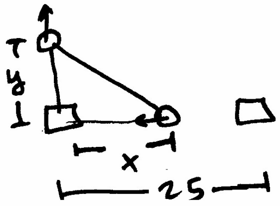
$$s' = \frac{2(t^2-6t)(2t-6)}{2\sqrt{\ }} \overset{=0}{\longrightarrow} t = 0 , 6 , 3$$



$\boxed{t=6} \Longleftarrow$

تمرين

يقف سائق دراجة على مسافة 25m شرق سيارة. في اللحظة نفسها انطلقت الدراجة للغرب بسرعة 3m/s ، وانطلقت السيارة للشمال بسرعة 4m/s . جد أقل مسافة بينهما



$\boxed{y = 4t}$ ؟؟

على كيفك

$y = y_0 + \frac{dy}{dt}t = 0 + 4t$

أو $y =$ الزمن السرعة $= 4t$

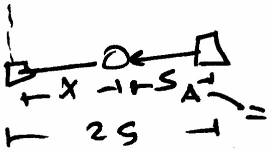
$\boxed{x = 25 - 3t}$

على كيفك

$x = x_0 + \frac{dy}{dt}t = 25 - 3t$

أو

مبدأ الطرح



$s_A =$ الزمن السرعة ~~4t~~ $3t$

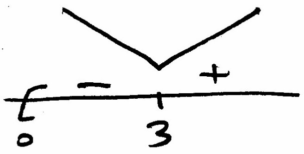
$\Rightarrow x = 25 - s_A$

$x = 25 - 3t$

$$s = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(25-3t)^2+(4t)^2}$$

$$s = \sqrt{(25-3t)^2 + 16t^2}$$

$$s' = \frac{2(25-3t)(-3)+32t}{2\sqrt{}} \xrightarrow{=0} = \frac{50t-150}{2\sqrt{}} \xrightarrow{=0} \boxed{t=3}$$



أقرب ما يمكن عند $t=3$ $\Longrightarrow$

$$S(3) = \sqrt{(25-9)^2+16(9)}$$

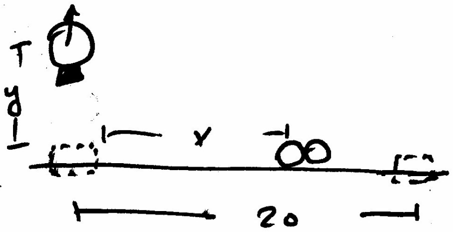
$$= \sqrt{16^2+16(9)}$$

$$= \sqrt{400} = 20\text{ m}$$

تطبيقات القيم القصوى 5

تحديات ربط الأفكار

س) منطاد راسي على الارض . تقف دراجة على شرقه بمسافة 20km في الساعة الثامنة صباحاً انطلقت الدراجة باتجاه المنطاد بسرعة 8 km/h ، وانطلق المنطاد إلى الاعلى بسرعة 6km/h في أي ساعة يكون المنطاد و الدراجة أقرب ما يمكن من بعضهما

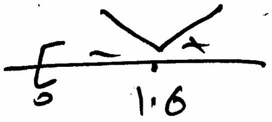


$$x = x_0 + \frac{dx}{dt} t = 20 - 8t$$

$$y = y_0 + \frac{dy}{dt} t = 6t$$

$$s = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(20-8t)^2 + (6t)^2} = \sqrt{100t^2 - 320t + 400}$$

$$\boxed{s' = \frac{200t - 320}{2\sqrt{}}} \xrightarrow{=0} t = 1.6 \qquad \xrightarrow{} ??$$

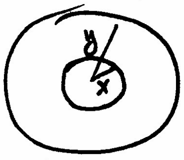


$$t = 1.6 = \text{ساعة} + \frac{6}{10}(60) = 1:36$$

$$\Longrightarrow \text{الساعة} \quad 9:36$$

س دولي

دائرتان لهما نفس المركز a ، ونصف قطر الصغرى 9cm ونصف قطر الكبرى 15cm . فإذا أخذ نصف قطر الصغرى يتزايد بمعدل ثابت مقداره 5cm/s . بينما أخذ نصف قطر الكبرى يتزايد بمعدل ثابت مقداره 4cm/s . جد جد أكبر مساحة ممكنة بين الدائرتين بحيث لا يتعدى نصف قطر الصغرى عن نصف قطر الكبرى ؟



$$x = x_0 + \frac{dx}{dt}t = 9 + 5t$$
$$y = y_0 + \frac{dy}{dt}t = 15 + 4t$$

المجال

$9 + 5t \leq 15 + 4t$

$t \leq 6$

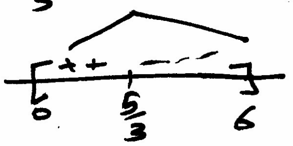
$\Rightarrow [0, 6]$

$$A = \pi(15+4t)^2 - \pi(9+5t)^2$$

$$\boxed{A' = 8\pi(15+4t) - 10\pi(9+5t)} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{A' = \pi(30-18t)} = 0 \Rightarrow t = \frac{5}{3}$$

أكبر مساحة عند $t = \frac{5}{3}$



$$A = \dots = 169\pi$$

تمرين

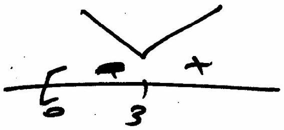
① دولي

جسم يسير في خط مستقيم وفق العلاقة
$s = t^4 - 12t^3 + 8t^2 - 6t + 5$
حيث t الزمن بالثواني . s المسافة بالأمتار . جد أقل تسارع ممكن لهذا الجسم

الحل $v = 4t^3 - 36t^2 + 16t - 6$

$\boxed{a = 12t^2 - 72t + 16}$

$\boxed{a' = 24t - 72} = 0 \Longrightarrow t = 3$



أقل تسارع عند $t = 3$

$\Longrightarrow a(3) = \ldots = \boxed{-92}$

② سنوات 2018

طريق سخني يمثّل في المستوى الاحداثي بالاقتران
$f(x) = \sqrt{2x - 1}$
والنقطة $(3,0)$ تمثل موقع مستشفى
جد احداثيات النقطة $a(x,y)$ الواقعة على الطريق التي يمكن أن يبنى فيها صيدلية وتكون أقرب ما يمكن إلى المستشفى

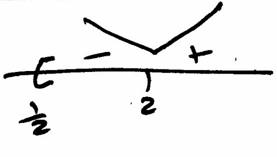
الحل $2x - 1 \geq 0 \Longrightarrow$ المجال $[\frac{1}{2}, \infty)$

$s = \sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (\sqrt{2x-1} - 0)^2}$

$s = \sqrt{x^2 - 6x + 9 + 2x - 1} \Longrightarrow \boxed{s = \sqrt{x^2 - 4x + 8}}$

$\boxed{s' = \frac{2x - 4}{2\sqrt{x^2 - 4x + 8}}} \xrightarrow{=0} x = 2$

$\xrightarrow{=0} x = S?$

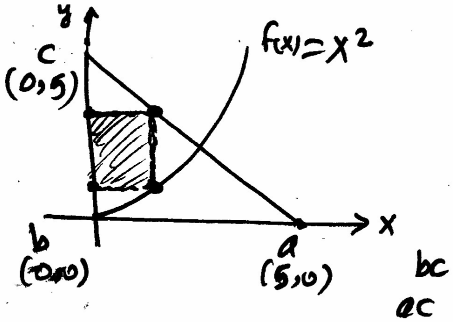


أقل مسافة عند $x = 2 \Longleftarrow$

$y = f(2) = \sqrt{2(2) - 1} = \sqrt{3}$

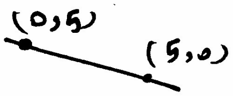
$(2, \sqrt{3})$

③ سنوات 2017



abc مثلث قائم الزاوية
احداثيات رؤوسه
a(5,0) b(0,0) c(0,5)
رسم داخل مستطيل ينطبق
رأسان من رؤوسه على الضلع bc
وأحد رأسيه الآخرين على الضلع ac
والرأس الآخر على منحنى الاقتران $f(x)=x^2$
كما في الشكل ، جد أكبر مساحة ممكنة للمستطيل المظلل

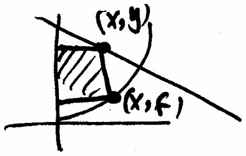
معادلة المستقيم اكل $y - y_1 = m(x - x_1)$



$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0-5}{5-0} = -1$$

$$y - 0 = -1(x-5)$$

$$\boxed{y = 5 - x}$$



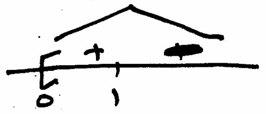
$$A = (x-0)(y-f)$$

$$A = x(5-x-x^2)$$

$$\boxed{A = 5x - x^2 - x^3}$$

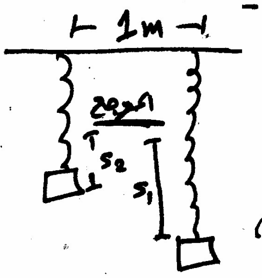
$$\boxed{A' = 5-2x-3x^2} = 0 \Rightarrow 3x^2+2x-5=0$$

$$\Rightarrow (3x+5)(x-1)=0 \Rightarrow \boxed{x=1}$$



$$\Rightarrow \boxed{x=1} \Rightarrow A = 5(1)-(1)^2-(1)^3 \Rightarrow \boxed{A=3}$$

زنبركين



س) يبين الشكل المجاور كتلتين معلقتين جنبا إلى جنب في زنبركين المسافة الأفقية بينهما 1m . ويمثل الاقترانان $s_1 = 2\sin t$
$s_2 = \sin 2t$
موقعي الكتلتين ، حيث s_1 ، s_2 الموقعان بالأمتار، t الزمن بالثواني .

① جد قيمة t التي يكون عندها الكتلتان على الارتفاع نفسه $t > 0$

② جد قيمة t التي تكون عندها المسافة بين الكتلتين أكبر ما يمكن $0 \le t \le 2\pi$

الحل

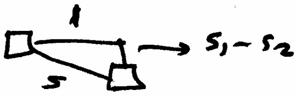
① $s_1 = s_2 \Rightarrow 2\sin t = \sin 2t \Longrightarrow 2\sin t - 2\sin t\cos t = 0$

$2\sin t(1 - \cos t) = 0 \Longrightarrow \sin t = 0 \longrightarrow t = \cancel{0}, \pi, 2\pi, \ldots$

$\cos t = 1 \longrightarrow t = \cancel{0}, 2\pi, \ldots$

$\Longrightarrow \boxed{t = n\pi \quad , \quad n \text{ عدد صحيح موجب}}$

② $s = \sqrt{(s_1 - s_2)^2 + (1)^2}$



$s = \sqrt{(2\sin t - \sin 2t)^2 + 1}$

$$s' = \frac{2(2\sin t - \sin 2t)(2\cos t - 2\cos 2t)}{2\sqrt{}}$$

$s' = 0 \Rightarrow 2\sin t - \sin 2t = 0 \Longrightarrow t = \ldots \Rightarrow t = 0, \pi, 2\pi$

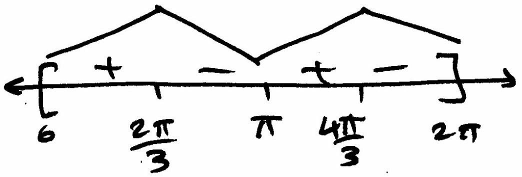
$2\cos t - 2\cos 2t = 0 \Rightarrow \cos t - (\cos^2 t - \sin^2 t) = 0$

$\cos t - \cos^2 t + (1 - \cos^2 t) = 0 \Rightarrow 2\cos^2 t + \cos t + 1 = 0$

$\Rightarrow (2\cos t + 1)(\cos t - 1) = 0 \Rightarrow \cos t = 1 \Longrightarrow t = 0, 2\pi$

$\cos t = -\frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

$\Rightarrow$



$$s\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{\left(2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2 + 1} = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 1} = \frac{\sqrt{27}}{2}$$

$$s\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt{\left(2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 1} = \frac{\sqrt{27}}{2}$$

$\leftarrow$ أكبر مسافة عندما

$$t = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

<u>ملاحظة</u> : لو كانت المسافة الافقية بين الكتلتين صفر
فإن قانون s يصبح

$$s = |s_1 - s_2|$$

أو $s = \sqrt{(s_1 - s_2)^2 + 0} \Longrightarrow$ نفس الحل السابق

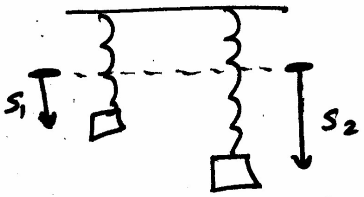
س

يبين الشكل المجاور كتلتين معلقتين جنباً إلى جنب .

$s_1 = \sin t$

$s_2 = \cos t$

حيث $t \in [0, \pi]$



① جد قيمة t التي تكون فيها الكتلتان في الموقع نفسه

② جد قيمة t التي تكون فيها المسافة الرأسية بين الكتلتين أكبر ما يمكن

الحل

① $s_2 = s_1 \Rightarrow \cos t = \sin t \xrightarrow{\div \cos t} 1 = \tan t$

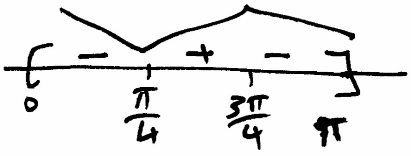
$$\boxed{t = \frac{\pi}{4}}$$

② $s = |s_2 - s_1| = \sqrt{(s_2 - s_1)^2} = \sqrt{(\cos t - \sin t)^2}$

$$s' = \frac{2(\cos t - \sin t)(-\sin t - \cos t)}{2\sqrt{(\cos t - \sin t)^2}} \xrightarrow{=0}$$

$s' = 0 \Rightarrow \cos t - \sin t = 0 \xrightarrow{\div \cos t} 1 - \tan t = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$

$-\sin t - \cos t = 0 \xrightarrow{\div \cos t} -\tan t - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{3\pi}{4}$



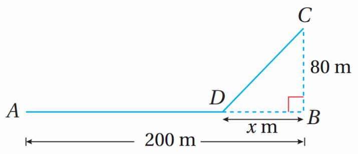
$\Rightarrow$

أكبر مسافة عند

$t = \frac{3\pi}{4}$

أقل زمن

س



يمتدُّ مسار للركض شــرقًا من النقطة *A* إلى النقطة *B* مسافة 200 m، وتقع النقطة *C* على بُعْد 80 m شمال النقطة *B*.

انطلق راكب على درّاجة من النقطة *A* إلى النقطة *D* بسرعة 10 m/s، حيث تقع النقطة *D* على بُعْد *x* مترًا غرب النقطة *B*، ثم ســار في طريق مستقيم وَعِر من النقطة *D* إلى النقطة *C* بسرعة 6 m/s:

29 أجد اقترانًا بدلالة *x* يُمثِّل الزمن الذي سيستغرقه راكب الدرّاجة في الانتقال من النقطة *A* إلى النقطة *C*.

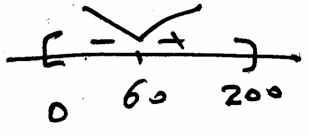
30 بافتــراض أنَّ *x* قيمة مُتغيِّرة، أجد قيمة *x* التي يكون عندهــا الزمن اللازم للانتقال من النقطة *A* إلى النقطة *C* أقل ما يُمكِن.

$$t = t_1 + t_2 = \frac{200-x}{10} + \frac{\sqrt{x^2+80^2}}{6} \qquad x \in [0,200]$$

$$t'(x) = \frac{-1}{10} + \frac{1}{6}\,\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+6400}} = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2+6400} = \frac{5}{3}x$$

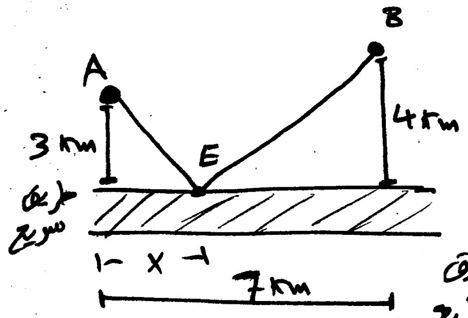
$$\Rightarrow x^2+6400 = \frac{25}{9}x^2 \Rightarrow 9x^2 + 9(6400) = 25x^2$$

$$16x^2 = 9\cdot 6400 \Rightarrow 4x = 3\cdot 80 \Rightarrow \boxed{x=60}$$



$\Rightarrow$ أقل ما يمكن عند $x=60$

تمرين



تبعد النقطة A عن الطريق السريع 3 km ، وتبعد النقطة B عن الطريق السريع 4 km

انطلق شخص من النقطة A إلى النقطة E الواقعة على الطريق السريع بسرعة 8 km/hr . ثم تابع مسيرة من النقطة E إلى النقطة B بسرعة 6 km/h .

جد أقل زمن يلزم لهذه الرحلة

(مساعدة: الحل الوحيد للمعادلة

$$4(7-x)\sqrt{x^2+9} = 3x\sqrt{(7-x)^2+16}$$

ضمن الفترة $[0,7]$ هو $x=4$)

الحل $t = t_{AE} + t_{EB} = \dfrac{\sqrt{x^2+9}}{8} + \dfrac{\sqrt{(7-x)^2+16}}{6}$

$x \in [0,7]$

$$\boxed{t'(x) = \frac{1}{8}\,\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+9}} + \frac{1}{6}\,\frac{\cancel{2}(7-x)(-1)}{\cancel{2}\sqrt{(7-x)^2+16}}} = 0$$

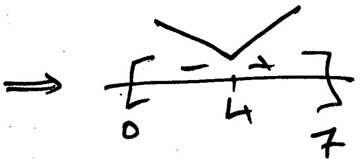
$$\frac{1}{8}\,\frac{x}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{(7-x)}{6\sqrt{(7-x)^2+16}}$$

$$\Rightarrow 8(7-x)\sqrt{x^2+9} = 6x\sqrt{(7-x)^2+16}$$

$$\Rightarrow 4(7-x)\sqrt{x^2+9} = 3x\sqrt{(7-x)^2+16}$$

$\Rightarrow \boxed{x=4}$ (من المساعدة الموجودة في السؤال)

$\Rightarrow$



$\Rightarrow \boxed{x=4}$ أقل زمن عند

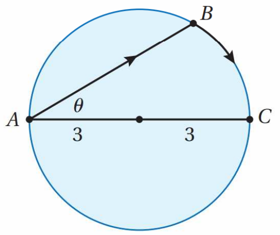
$$\Rightarrow t(4) = \frac{\sqrt{4^2+9}}{8} + \frac{\sqrt{(7-4)^2+16}}{6}$$

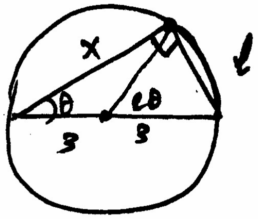
$$= \frac{5}{8} + \frac{5}{6} = \frac{30+40}{48} = \frac{70}{48} \Rightarrow \boxed{t = \frac{35}{24}}$$

تحدي أقل زمن

مهارات تفكير عليا

تبرير: يقف رجل عند النقطة A على شاطئ بحيرة دائرية نصف قُطْرها 3 km، وهو يريد الوصول إلى النقطة C المقابلة تمامًا للنقطة A، على الجانب الآخر من البحيرة، في أقصر وقت مُمكِن كما في الشكل المجاور. يُمكِن للرجل أنْ يَجدِف بزورق من النقطة A إلى النقطة B بسرعة 3 km/h، ثم يركض حول حافة البحيرة بسرعة 6 km/h. أُحدِّد موقع النقطة B ليصل الرجل من النقطة A إلى النقطة C في أقل وقت مُمكِن؟ أُبرِّر إجابتي.





$$t = \frac{x}{3} + \frac{\ell}{6}$$

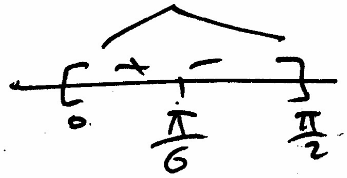
$$= \frac{6\cos\theta}{3} + \frac{3(2\theta)}{6}$$

$$t = 2\cos\theta + \theta \qquad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$t' = -2\sin\theta + 1 = 0$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}$$



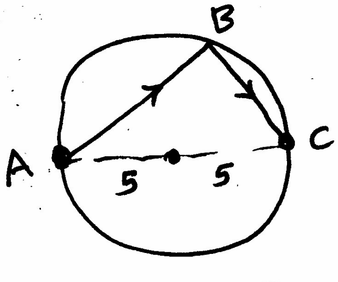
$$t(0) = 2$$

$$t(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} \times 1.5 \Longrightarrow$$

اقل زمن عند $t = \frac{\pi}{2}$

(السير كله على اليابسة)

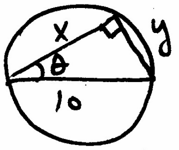
تمرين



يقف رجل عند النقطة A على شاطيء بحيرة دائرية نصف قطرها 5 km . وهو يريد الوصول للنقطة C المقابلة تماماً للنقطة A ، في أطول وقت ممكن . إذا علمت أنه بإمكانه التجديف من A إلى B بسرعة 4 km/h ثم التجديف من النقطة B إلى C بسرعة 3 km/h فحدد موقع النقطة B ليصل الرجل في أطول وقت .

الحل

طريقة ①



$$t=\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=\frac{10\cos\theta}{4}+10\frac{\sin\theta}{3}$$

$$\boxed{t'=-\frac{10}{4}\sin\theta+\frac{10}{3}\cos\theta}=0$$

$$\Rightarrow\boxed{\tan\theta=\frac{4}{3}}$$

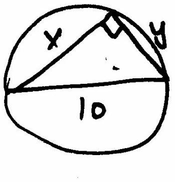
بدها آلة حاسبة

$\theta=??$

??? $\Rightarrow$ جرب اشي ثاني

الحل

طريقة ②

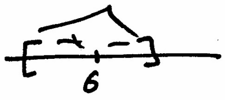


$$t=\frac{x}{4}+\frac{y}{3}\longrightarrow\boxed{t=\frac{x}{4}+\frac{\sqrt{100-x^2}}{3}}\quad t\in[0,10]$$

$$t'=\frac{1}{4}-\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\,3\sqrt{10-x^2}}$$

$$\boxed{t'=\frac{3\sqrt{100-x^2}-4x}{12\sqrt{100-x^2}}}\xrightarrow{=0}\;\ldots\; x=6$$

$$\longrightarrow x=10$$



$x=6 \Longleftarrow$

امتحان

① سنوات 2012

صندوق على شكل متوازي مستطيلات ، قاعدته على شكل مستطيل
طوله مثلي عرضه ، إذا كان مجموع ارتفاع الصندوق ومحيط
قاعدته 72 cm . فجد أبعاده التي تجعل حجمه أكبر ما يمكن

② سنوات 2013

انطلق قاربان من نفس النقطة في اتجاهين مختلفين قياس
الزاوية بينهما 120° ، إذا كانت سرعة الاول 8 km/h
وسرعة الثاني 6 km/h . جد معدل تغير المسافة بينهما بعد
مرور نصف ساعة على انطلاقهما

③ سنوات 2010

جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $g(x) = x^2 - 4x + 3$
بحيث يكون المماس عند نقطة التماس عمودياً على المستقيم
$6y - 3x - 5 = 0$

④ سنوات 2015

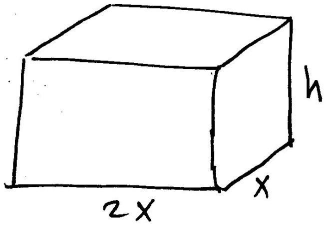
إذا كان $f(x) = (ax - b)^{\frac{2}{3}} + 5b$ ، حيث $a \neq 0$
وكان للاقتران $f(x)$ قيمة قصوى عند النقطة $(4,10)$
فجد قيمة كل من الثابتين a & b

⑤ سنوات 2007

إذا كان الاقتران f متصلاً على الفترة $[0,2]$ ، وكان
$f'(x) = \sin \pi x + \cos \pi x$.
فجد الفترة (الفترات) التي يكون فيها منحنى الاقتران f
مقعراً للأعلى

① سنوات 2012

صندوق على شكل متوازي مستطيلات ، قاعدته على شكل مستطيل طوله مثلي عرضه ، إذا كان مجموع ارتفاع الصندوق ومحيط قاعدته 72cm . فجد أبعاده التي تجعل حجمه أكبر ما يمكن



$$\overset{\text{ارتفاع}}{h} + \overset{\text{محيط}}{(2x + x + 2x + x)} = 72$$

$$h + 6x = 72 \Rightarrow \boxed{h = 72 - 6x}$$

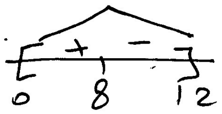
$$V = 2x \cdot x \cdot h = 2x^2(72 - 6x)$$

$$\boxed{V = 144x^2 - 12x^3}$$

$72 - 6x > 0$

$x \in [0 , 12]$

$$\boxed{V' = 288x - 36x^2} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ x = 8 \end{matrix} \Rightarrow$$

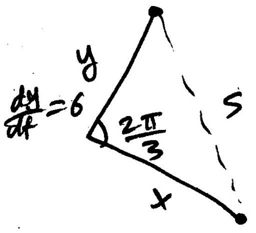


الابعاد ⟸

الطول	العرض	الارتفاع
$2(8) = \boxed{16}$	$\boxed{8}$	$72 - 6(8)$ $\boxed{24}$

② سنوات 2013

انطلق قاربان من نفس النقطة في اتجاهين مختلفين قياس الزاوية بينهما 120° ، إذا كانت سرعة الاول 8 km/h وسرعة الثاني 6 km/h . جد معدل تغير المسافة بينهما بعد مرور نصف ساعة على انطلاقهما



$$x = x_0 + \frac{dx}{dt}t \Rightarrow x = 0 + 8\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x=4}$$

$$y = y_0 + \frac{dy}{dt}t \Rightarrow y = 0 + 6\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{y=3}$$

$\frac{dx}{dt} = 8$

$$s = \sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\frac{2\pi}{3}}$$

$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=\frac{1}{2}}$

$$s = \sqrt{x^2+y^2+xy}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}+x\frac{dy}{dt}+y\frac{dx}{dt}}{2\sqrt{x^2+y^2+xy}}$$

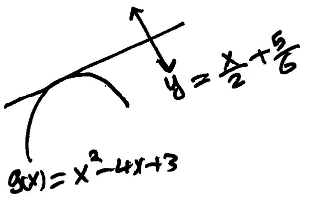
$$\frac{ds}{dt} = \frac{(2)(4)(8)+2(3)(6)+(4)(6)+(3)(8)}{2\sqrt{4^2+3^2+4(3)}} = \frac{148}{2\sqrt{37}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{ds}{dt} = \frac{72}{\sqrt{37}}}$$

③ سؤال 2010

جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $g(x) = x^2 - 4x + 3$ بحيث يكون المماس عند نقطة التماس عمودياً على المستقيم $6y - 3x - 5 = 0$

<u>الحل</u>



<u>تعامد</u> $g' \cdot y' = -1$

$(2x-4) \cdot \frac{1}{2} = -1$

$2x - 4 = -2$

$2x = 2 \Rightarrow \boxed{x=1}$

$\boxed{x=1}$

$y = g(1) = 1 - 4 + 3 \Rightarrow \boxed{y=0}$

$m = f'(1) = 2(1) - 4 \Rightarrow \boxed{m=-2}$

$\Rightarrow y - 0 = -2(x-1)$

$\boxed{y = -2x + 2}$

④ سؤال 2015

إذا كان $f(x) = (ax-b)^{\frac{2}{3}} + 5b$ ، حيث $a \neq 0$ وكان للاقتران $f(x)$ قيمة قصوى عند النقطة $(4,10)$ فجد قيمة كل من الثابتين a & b

$f'(x) = \frac{2}{3}(ax-b)^{-\frac{1}{3}} \cdot a = \frac{2a}{\sqrt[3]{ax-b}}$

قصوى $\Rightarrow f'(4) = \frac{2a}{\sqrt[3]{4a-b}}$ $\xrightarrow{=0} \Rightarrow a = 0$ تهمل

$\xrightarrow[f' \text{ غ م}]{=0} \boxed{4a - b = 0}$ ———— ①

النقطة $(4,10) \Rightarrow f(4) = 10 \Rightarrow (4a-b)^{2/3} + 5b = 10$

$(0)^{2/3} + 5b = 10$

معادلة ①

$\Rightarrow \boxed{b=2}$

$\Rightarrow 4a - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}}$

٢٩ ع٢

⑤ السؤال 2007

إذا كان الاقتران f متصلاً على الفترة $[0,2]$ ، وكان

$f'(x) = \sin \pi x + \cos \pi x$.

جد الفترة (الفترات) التي يكون فيها منحنى الاقتران f مقعراً للأعلى

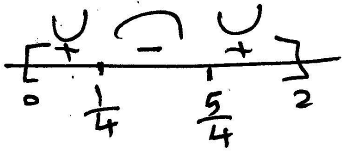
الحل

$\boxed{f''(x) = \pi \cos \pi x - \pi \sin \pi x} = 0$

$x \in [0,2]$

$\div \pi \cos \pi x \longrightarrow 1 - \tan \pi x = 1 \Longrightarrow \boxed{\tan(\pi x) = 1}$ $\pi x \in [0, 2\pi]$

$\Longrightarrow \pi x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \Longrightarrow \boxed{x = \frac{1}{4}, \frac{5}{4}}$



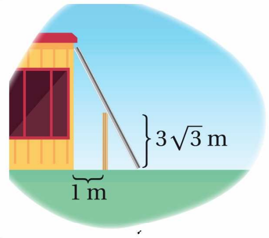
مقعر للاعلى

$(0, \frac{1}{4}) , (\frac{5}{4}, 2)$

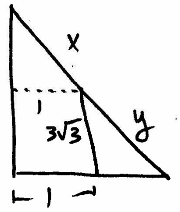
تطبيقات القيم القصوى 6

تحدي السلم

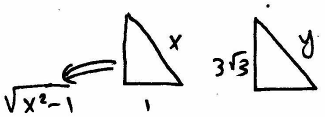
يحيط سياج ارتفاعه $3\sqrt{3}$ m بمبنى، ويبعد عنه مسافة 1 m كما في الشكل المجاور. أجد طول أقصر سُلَّم قد يصل من الأرض إلى المبنى، ويمرُّ فوق السياج مُلامِسًا له.



طريقة ①

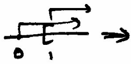


$\ell = x + y$



$\frac{y}{x} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{x^2-1}} \Longrightarrow y = \frac{3\sqrt{3}\,x}{\sqrt{x^2-1}}$

$\ell = x + \frac{3\sqrt{3}\,x}{\sqrt{x^2-1}}$



$\to [1,\infty)$

$\ell' = 1 + 3\sqrt{3}\ \frac{\sqrt{x^2-1} - x\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2-1}}}{(\sqrt{x^2-1})^2}$

$\ell' = 1 + 3\sqrt{3}\ \frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{(x^2-1)^3}} = 1 - \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$

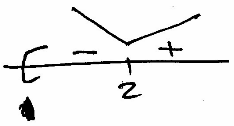
$\boxed{\ell' = \frac{\sqrt{(x^2-1)^3} - 3\sqrt{3}}{(\sqrt{x^2-1})^3}}$ $= 0$

$\sqrt{(x^2-1)^3} = 3\sqrt{3}$

$(x^2-1)^3 = 27$

$x^2-1 = 3$

$x = \pm 2 \Longrightarrow x = 2$

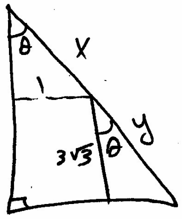


$\boxed{x=2}$ اقصر سلم

$y = \frac{3\sqrt{3}\cdot 2}{\sqrt{2^2-1}} \Longrightarrow \boxed{y=6} \Longrightarrow \ell = 2+6$

$\boxed{\ell = 8}$

طريقة ②



$$l = x + y$$

$$\sin\theta = \frac{1}{x} \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{\sin\theta}}$$

$$\cos\theta = \frac{3\sqrt{3}}{y} \Rightarrow \boxed{y = \frac{3\sqrt{3}}{\cos\theta}}$$

$$\boxed{l = \csc\theta + 3\sqrt{3}\sec\theta} \quad \theta \in [0, \tfrac{\pi}{2}]$$

$$l' = -\csc\theta\cot\theta + 3\sqrt{3}\sec\theta\tan\theta = 0$$

$$-\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} + 3\sqrt{3}\,\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} = 0$$

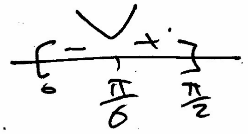
$$\frac{-\cos^3\theta + 3\sqrt{3}\sin^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta} = 0 \xrightarrow{=0} -\cos^3\theta + 3\sqrt{3}\sin^3\theta$$

$$\Rightarrow -1 + 3\sqrt{3}\tan^3\theta = 0$$

$$\sin^2\theta\cos^2\theta \searrow {=0} \quad \theta = 0, \tfrac{\pi}{2}$$

$$\tan\theta = \frac{+1}{\sqrt{3}}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}$$



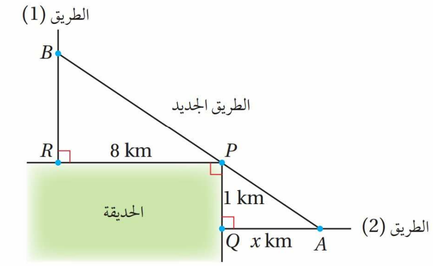
$\Longleftarrow$ أقصر سلم عند $\theta = \frac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow l = \csc\frac{\pi}{6} + 3\sqrt{3}\sec\frac{\pi}{6}$$

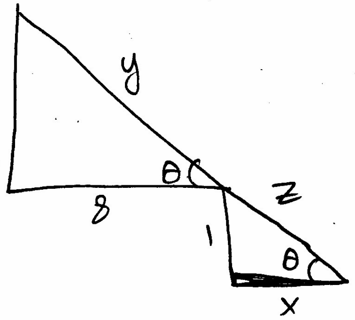
$$= 2 + 3\sqrt{3}\,\frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{l = 8}$$

تمرين

يُبيِّن الشـــكل المجاور مدخلين لحديقة عامة عند النقطة R والنقطة Q، ويُمكِن الوصول إلى هذين المدخلين مـــن طريقين عموديين على ضلعي الحديقة. أرادت البلدية إنشـــاء طريق جديد يصل بين الطريقين القديمين، ويمرُّ بالنقطة P التي تُمثِّل زاوية الحديقـــة، فاختارت النقطـــة A والنقطة B على الطريقين ليكون طول الطريق الجديد أقصر مـــا يُمكِن، علمًا بأنَّ النقطة A تقع على بُعْد x km من النقطة Q. أجد قيمة x التي تجعل طول الطريق الجديد أقصر مـــا يُمكِن



طريقة ①



$$l = y + z$$

$$\frac{8}{y} = \cos\theta \Rightarrow \boxed{y = 8\sec\theta}$$

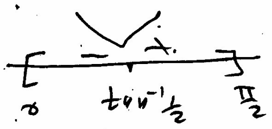
$$\cancel{z}\,\frac{1}{z} = \sin\theta \Rightarrow \boxed{z = \csc\theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{l = 8\sec\theta + \csc\theta}$$

$$l' = 8\sec\theta\tan\theta - \csc\theta\cot\theta = \frac{8\sin\theta}{\cos^2\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta^2} = \overset{l'=}{\boxed{\frac{8\sin^3\theta - \cos^3\theta}{\cos^2\theta\sin^2\theta}}}$$

$$l' = 0 \Longrightarrow 8\sin^3\theta - \cos^3\theta = 0 \xrightarrow{\div\cos^3\theta} 8\tan^3\theta - 1 = 0 \Longrightarrow \boxed{\tan\theta = \frac{1}{2}}$$

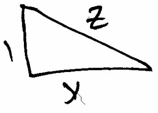
$$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{1}{2}$$



⇐ أقل ما يمكن عند

$\theta = \tan^{-1}\frac{1}{2}$

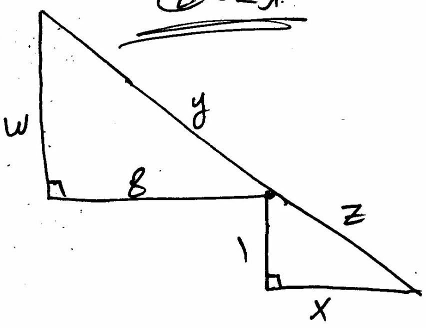
$\Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{2}$



$\frac{1}{x} = \frac{1}{2}$

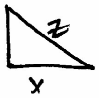
$\Rightarrow \boxed{x = 2}$

② طريقة



$\ell = y + z$

$z = \sqrt{x^2 + (1)^2}$,



$\frac{w}{1} = \frac{8}{x}$ تشابه مثلثات

$y = \sqrt{w^2 + 8^2} = \sqrt{\left(\frac{8}{x}\right)^2 + 8^2}$

$$\Rightarrow \ell = \sqrt{\left(\frac{8}{x}\right)^2 + 8^2} + \sqrt{x^2 + 1^2}$$

$$\ell = \sqrt{\frac{8^2 + 8^2 x^2}{x^2}} + \sqrt{x^2 + 1^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{8}{x}\right)^2 (1 + x^2)} + \sqrt{x^2 + 1}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{8}{x}\right)^2}\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + x^2} = \frac{8}{x}\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + x^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ell = \sqrt{1 + x^2}\left(\frac{8}{x} + 1\right)}$$

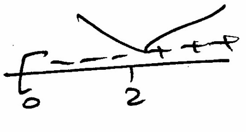
$$\ell' = \sqrt{1 + x^2}\left(-\frac{8}{x^2}\right) + \left(\frac{8}{x} + 1\right)\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1 + x^2}}$$

$$\boxed{\ell' = \frac{-8\sqrt{1 + x^2}}{x^2} + \frac{8 + x}{\sqrt{1 + x^2}}} = 0 \Rightarrow \frac{8\sqrt{1 + x^2}}{x^2} = \frac{8 + x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

ضرب تبادلي $\Rightarrow 8\sqrt{1 + x^2}\sqrt{1 + x^2} = x^2(8 + x)$

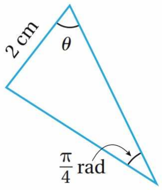
$$\Rightarrow 8 + 8x^2 = 8x^2 + x^3 \Rightarrow x^3 = 2 = x = 2$$

$\boxed{x = 2} \Longleftarrow$



المثلث العجيب

تحدٍّ: يُبيِّن الشكل المجاور مثلثًا، قياس إحدى زواياه $\frac{\pi}{4}$ **rad** ، ومُقابِلها ضلع طوله **2 cm**:



33 أُثبِت أنَّ مساحة المثلث A تعطى بالاقتران: $A = \sin 2\theta - \cos 2\theta + 1$.

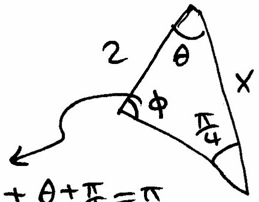
34 أجد مجال الاقتران في السؤال السابق.

35 أُثبِت أنَّ أكبر مساحة مُمكِنة للمثلث هي: $(1+\sqrt{2})\ \text{cm}^2$.

الحل

$$A = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x \cdot \sin\theta$$

$$= x \sin\theta$$



$$\phi + \theta + \frac{\pi}{4} = \pi$$

$$\phi = \frac{3\pi}{4} - \theta$$

$$\frac{x}{\sin(\frac{3\pi}{4} - \theta)} = \frac{2}{\sin\frac{\pi}{4}}$$

$$x = \frac{2}{\sin\frac{\pi}{4}} \sin(\frac{3\pi}{4} - \theta)$$

$$\boxed{x = 2\sqrt{2}\sin(\frac{3\pi}{4} - \theta)}$$

$$\Rightarrow A = 2\sqrt{2}\sin(\frac{3\pi}{4} - \theta) \cdot \sin\theta$$

$$= 2\sqrt{2}\sin\theta\left(\sin\frac{3\pi}{4}\cos\theta - \cos\frac{3\pi}{4}\sin\theta\right)$$

$$= 2\sqrt{2}\sin\theta\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\right)$$

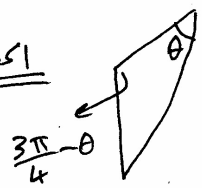
$$= 2\sin\theta\cos\theta + 2\sin^2\theta$$

$$= 2\sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta + \sin^2\theta$$

$$= 2\sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta + 1 - \cos^2\theta$$

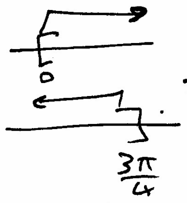
$$= 2\sin\theta\cos\theta - (\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 1 = \sin 2\theta - \cos 2\theta + 1$$

المجال

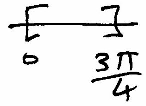


$\theta \geq 0 \Longrightarrow$

$\frac{3\pi}{4}-\theta \geq 0 \Longrightarrow$



$\Longrightarrow$



أكبر مساحة $A = \sin 2\theta - \cos 2\theta + 1$

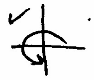
$\boxed{A' = 2\cos 2\theta + 2\sin 2\theta} = 0$

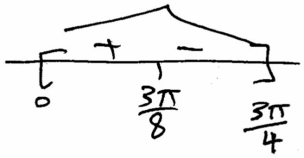
$\theta \in [0, \frac{3\pi}{4}]$

$\div 2\cos 2\theta \Longrightarrow 1 + \tan 2\theta = 0 \Longrightarrow \tan 2\theta = -1 \quad \Rightarrow 2\theta \in [0, \frac{3\pi}{2}]$

$2\theta = \frac{3\pi}{4}$

$\theta = \frac{3\pi}{8}$





أكبر مساحة عند $\frac{3\pi}{8}$

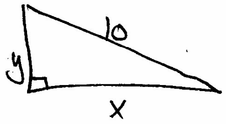
$\Longrightarrow A = \sin 2\frac{3\pi}{8} - \cos 2\frac{3\pi}{8} + 1$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 = \frac{2}{\sqrt{2}} + 1 \Longrightarrow \boxed{A = \sqrt{2} + 1}$

تمرين

من الكتاب، جد القيمة العظمى لمساحة مثلث قائم الزاوية طول وتره 10 cm

طريقة ①



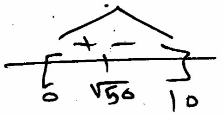
$$A = \frac{1}{2}\, x\, y = \frac{1}{2}\, x \overset{\text{فيثاغورس}}{\sqrt{100 - x^2}} \qquad x \in [0, 10]$$

$$A' = \frac{1}{2} x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{100-x^2}} + \sqrt{100-x^2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$A' = \frac{-x^2}{2\sqrt{100-x^2}} + \frac{\sqrt{100-x^2}}{2} = \frac{-x^2 + 100 - x^2}{2\sqrt{100-x^2}}$$

$$\boxed{A' = \frac{100 - 2x^2}{2\sqrt{100-x^2}}} \xrightarrow{=0} x = \sqrt{50}$$

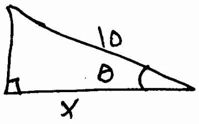
$$\longrightarrow x = 10$$



⟸ أكبر ما يمكن عند $x = \sqrt{50}$

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{50}\sqrt{100 - (\sqrt{50})^2} \Rightarrow \boxed{A = 25}$$

طريقة ②



$$A = \frac{1}{2} x \cdot 10 \cdot \sin\theta$$

$$\frac{x}{10} = \cos\theta$$

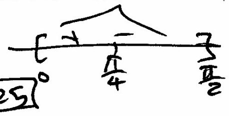
$$x = 10\cos\theta$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2}(10 \cdot \cos\theta)(10\sin\theta) \qquad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\Rightarrow \boxed{A = 50\sin\theta\cos\theta} \qquad A' = 50\sin\theta(-\sin\theta) + \cos\theta(50\cos\theta)$$

$$\boxed{A' = 50(\cos^2\theta - \sin^2\theta)} = 0$$

$$\xrightarrow{\div\cos^2\theta} 1 - \tan^2\theta \Rightarrow \tan\theta = \pm 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

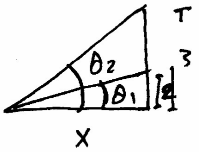


$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow A = 50 \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{A = 25}$$

زاوية النظر

س نظرت سارة إلى اللوحة المعلقة على حائط منزلها، ارتفاعها 1m ، وارتفاع حافتها السفلية 2m فوق عينها كما في الشكل المجاور ، كم متر يجب أن تبعد سارة عن الجدار لتكون زاوية نظرها θ أكبر ما يمكن

الحل



$$\theta = \theta_2 - \theta_1$$

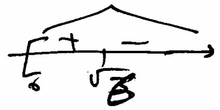
$$\tan\theta = \tan(\theta_2 - \theta_1)$$

$$\tan\theta = \frac{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}{1 + \tan\theta_2 \tan\theta_1}$$

$$\tan\theta = \frac{\frac{3}{x} - \frac{2}{x}}{1 + \frac{3}{x}\cdot\frac{2}{x}} = \frac{\frac{\cancel{2}1}{x}}{\frac{x^2+6}{x^2}} = \frac{\cancel{2}x}{x^2+6}$$

$$\boxed{\tan\theta = \frac{2x}{x^2+6}} \xrightarrow[x \text{ لـ}]{\text{اشتق بالنسبة}} \sec^2\theta \, \frac{d\theta}{dx} = \frac{(x^2+6)(2) - 2x(2x)}{(x^2+6)^2}$$

$$\cancel{d\theta} \quad \theta' = \cos^2\theta \cdot \frac{\overset{12-2x^2}{\cancel{6-4x^2}}}{(x^2+3)} \Rightarrow x = \sqrt{3}$$

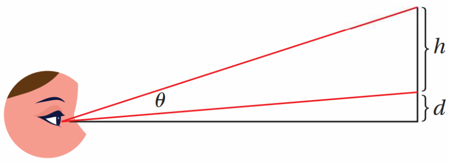


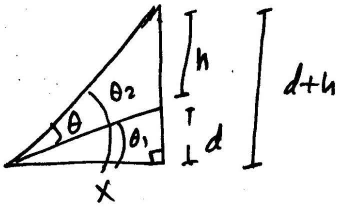
$$\therefore \boxed{x = \sqrt{6}}$$

من الكتاب

نظرت سـارة إلى لوحة مُعلَّقة على حائط في منزلها، ارتفاعها h مترًا، وارتفاع حافتها السفلية d مترًا فوق عينها كما في الشكل المجاور.

كم مترًا يجب أنْ تبتعد سـارة عن الجدار لتكون زاوية نظرها θ أكبر ما يُمكِن؟





$$\theta = \theta_2 - \theta_1$$

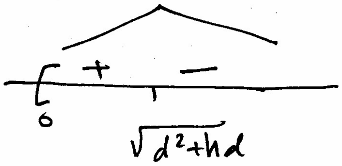
$$\tan\theta = \tan(\theta_2 - \theta_1)$$

$$\tan\theta = \frac{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}{1 + \tan\theta_2 \tan\theta_1}$$

$$\Rightarrow \neq \tan\theta = \frac{\frac{d+h}{x} - \frac{d}{x}}{1 + \frac{d+h}{x}\frac{d}{x}} = \frac{\frac{h}{x}}{\frac{x^2 + d^2 + hd}{x^2}}$$

$$\boxed{\tan\theta = \frac{h\ x}{x^2 + d^2 + hd}} \Rightarrow \sec^2\theta \cdot \theta' = \frac{(x^2 + d^2 + hd)h - hx(2x)}{(x^2 + d^2 + hd)^2}$$

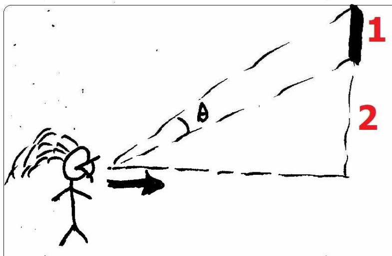
$$\theta' = \cos^2\theta \cdot \frac{hd^2 + h^2d - x^2h}{(x^2 + d^2 + hd)^2} \xrightarrow{=0} \Rightarrow x = \sqrt{d^2 + hd}$$



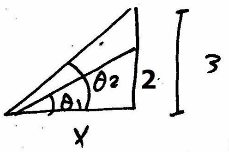
$$\Rightarrow \boxed{x = \sqrt{d^2 + hd}}$$

تمرين

① معدلات مرتبطة بالزمن



تقترب سارة من لوحة معلقة على حائط منزلها . ارتفاعها 1 m ، وارتفاع حافتها السفلية 2 m فوق عين سارة . كما في الشكل . إذا علمت أن سرعة اقتراب سارة من الحائط هي 5 m/s ، فجد معدل تغير زاوية النظر (θ) مع الزمن عندما تصبح سارة على بعد 3 m من اللوحة



$\frac{dx}{dt} = -5$

$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{x=3} = ?$

$\theta = \theta_2 - \theta_1 \Longrightarrow \tan\theta = \tan(\theta_2 - \theta_1)$

$\Rightarrow \tan\theta = \frac{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}{1 + \tan\theta_2 \cdot \tan\theta_1} = \frac{\frac{3}{x} - \frac{2}{x}}{1 + \frac{3}{x}\frac{2}{x}}$

$\cdots \Longrightarrow \boxed{\tan\theta = \frac{x}{x^2+6}}$

$\sec^2\theta \, \frac{d\theta}{dt} = \frac{(x^2+6)(\frac{dx}{dt}) - x(2x\frac{dx}{dt})}{(x^2+6)^2}$

$\frac{26}{25}\frac{d\theta}{dt} = \frac{(15)((-5)) - (3)(6(-5))}{(9+6)^2}$

$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\cancel{25}}{26} \cdot \frac{-75+90}{\underset{9}{\cancel{225}}} = \frac{\overset{5}{\cancel{15}}}{26 * \underset{3}{\cancel{9}}}$

$\frac{d\theta}{dt} = \frac{5}{78}$

$x = 3$

$\tan\theta = \frac{(3)}{3^2+6} = \frac{1}{5}$

$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

$= 1 + (\frac{1}{5})^2$

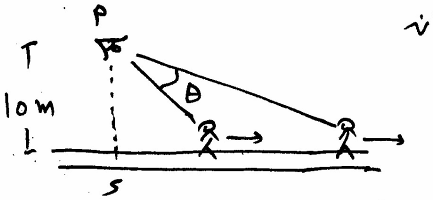
$= \frac{26}{25}$

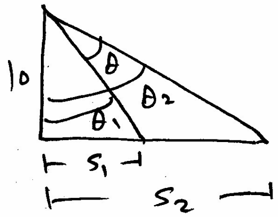
② كالكولس

تحدي قوي

يجلس مشاهد عند النقطة P على ارتفاع 10 m من مضمار ركض مستقيم . بدأ عداءان بالركض من النقطة S باتجاه اليمين الاول بسرعة 2 m/s . والثاني بسرعة 6 m/s

متى تكون زاوية النظر (θ) أكبر ما يمكن ؟





$$s_1 = s_{1_0} + \frac{ds}{dt} t = 0 + 2t = 2t$$

$$s_2 = s_{2_0} + \frac{ds}{dt} t = 0 + 6t = 6t$$

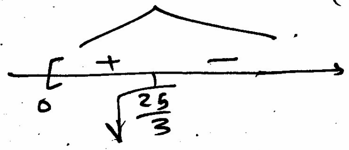
$$\Longrightarrow \boxed{s_1 = 2t} \qquad \boxed{s_2 = 6t}$$

$$\theta = \theta_2 - \theta_1 \Longrightarrow \tan\theta = \tan(\theta_2 - \theta_1)$$

$$\tan\theta = \frac{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}{1 + \tan\theta_2 \tan\theta_1} = \frac{\frac{s_2}{10} - \frac{s_1}{10}}{1 + \frac{s_2}{10}\frac{s_1}{10}} = \frac{\frac{6t}{10} - \frac{2t}{10}}{1 + \frac{12t^2}{100}}$$

$$\tan\theta = \frac{4t}{\cancel{10}} \cdot \frac{\cancel{100}}{100 + 12t^2} = \frac{40t}{4(25 + 3t^2)} \Rightarrow \boxed{\frac{10t}{3t^2 + 25} = \tan\theta}$$

$$\sec^2\theta \, \theta' = \frac{(3t^2+25)(10) - (10t)(6t)}{(3t^2+25)^2} = \frac{250\cancel{t} - 30t^2}{(3t^2+25)^2} \overset{=0}{—} \quad t = \sqrt{\frac{25}{3}}$$

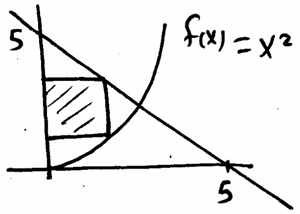


$\Longrightarrow$ زاوية النظر اكبر ما يمكن عند $t = \sqrt{\frac{25}{3}}$

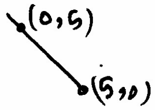
المساحات الديكارتية

س

جد أكبر مساحة ممكنة لاكبر مستطيل يمكن حصره بين المنحنيين



الحل



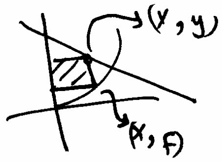
$y-0=\frac{5-0}{0-5}(x-5)$

$\Rightarrow \boxed{y=5-x}$

$A=(x)(y-f)$

$A=x(5-x-x^2)$

$\boxed{A=5x-x^2-x3}$



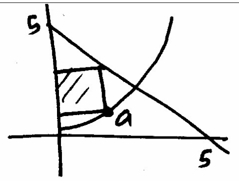
$\Rightarrow \boxed{A'=5-2x-3x^2}=0 \Rightarrow 3x^2+2x-5 \Rightarrow (3x+5)(x-1)$

$\Rightarrow x=1$

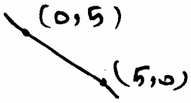
$\Rightarrow A=5(1)-(1)^2-(1)^3=5$

س

اذا كانت النقطة a تتحرك بحيث أن الاحداثي x يزداد بمعدل 2 cm/s جد معدل تغير مساحة المستطيل عند $x=\frac{1}{2}$



الحل



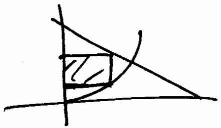
$\Rightarrow y-0=\frac{5-0}{0-5}(x-5)$

$\Rightarrow \boxed{y=5-x}$

$A=x(y-f)$

$A=x(5-x-x2$

$\boxed{A=5x-x^2-x^3}$



$\frac{dx}{dt}=2$

$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{x=\frac{1}{2}}=?$

$A=5x-x2-x3$

$\frac{dA}{dt}=5\frac{dx}{dt}-2x\frac{dx}{dt}-3x^2\frac{dx}{dt}$

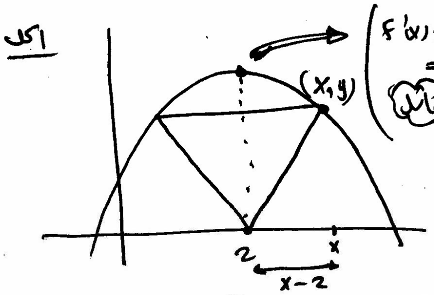
$=5(2)-2(\frac{1}{2})(2)-3(\frac{1}{2})^2(2)=\frac{13}{2}$

تمارين

① دولي

جد مساحة أكبر مثلث متساوي الساقين مرسوم فوق محور x بحيث يقع رأسه في النقطة $(2,0)$ ، والرأسان الآخران على منحنى الاقتران $f(x)=8+4x-x^2$ ، (قاعدة المثلث توازي المحور x)

الحل



$$\left(f'(x)=4-2x=0 \Rightarrow x=2 \right)$$

محور التماثل

ملاحظة

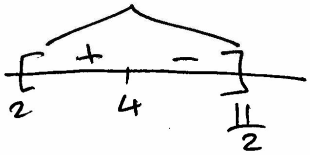
$$\left(\text{المجال} \quad x-2\geq 0 \Rightarrow [2,\infty) \quad 8+4x-x^2\geq 0 \Rightarrow [-\tfrac{3}{2}, \tfrac{11}{2}] \Rightarrow [2,\tfrac{11}{2}] \right)$$

$$A=\frac{1}{2}2(x-2)(y) = (x-2)(8+4x-x^2)$$

$$A=(\cancel{8x}+4x^2-x^3-16-\cancel{8x}+2x^2)$$

$$\boxed{A=(6x^2-x^3-16)}$$

$$\boxed{A'=12x-3x^2} \overset{=0}{\Rightarrow} 3x^2-12x=0 \Rightarrow 3x(x-4)=0 \Rightarrow x=0,4$$

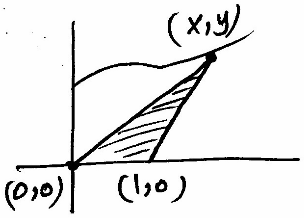


$\Rightarrow$ أكبر مساحة عند $x=4$

$$A=6(4)^2-4^3-16 \Rightarrow \boxed{A=16}$$

دوسي

تتحرك نقطة مادية على منحنى الاقتران $f(x)=\sqrt{x^2+9}$ فإذا كان معدل تزايد الاحداثي x للنقطة المتحركة يساوي 5 وحدات/ثانية . فأوجد معدل تغير مساحة المثلث الذي رؤوسه نقطة الأصل (0,0) والنقطة الثابتة (1,0) والنقطة المتحركة (x,y) في اللحظة التي يكون فيها الاحداثي x للنقطة المتحركة يساوي 4 وحدات



$$\frac{dx}{dt}=5$$

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{x=4}=?$$

$$A=\frac{1}{2}(1-0)(y)$$

$$A=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+9}$$

$$\frac{dA}{dt}=\frac{1}{2}\,\frac{2x\frac{dx}{dt}}{\cancel{2}\sqrt{x^2+9}}$$

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{x=4}=\frac{1}{2}\,\frac{(4)(5)}{\sqrt{4^2+9}}=\frac{2\cdot\cancel{5}}{\cancel{5}}$$

$$\Longrightarrow\boxed{\left.\frac{dA}{dt}\right|_{x=4}=2}$$

تطبيقات القيم القصوى 7

الايراد ببساطة

x : عدد القطع

R : الايراد

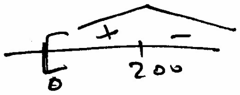
P : السعو السعر

(R' : الايراد الحدي)

س) إذا كان الايراد لبيع x قطعة من منتج معين هو $R(x) = xe^{-\frac{x}{200}}$ بآلاف الدنانير
فما عدد القطع التي يمكن بيعها لتحقيق أعلى ايراد ممكن

الحل $R'(x) = xe^{-\frac{x}{200}} \cdot -\frac{1}{200} + e^{-\frac{x}{200}} = e^{-\frac{x}{200}}\left(1 - \frac{x}{200}\right)$

$R' = 0 \Rightarrow 1 - \frac{x}{200} = 0 \Rightarrow x = 200$



⟸ أعلى ايراد عند بيع 200 قطعة

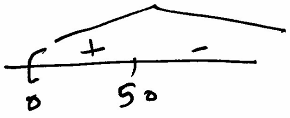
س) إذا كان سعر بيع x قلم يعطى بالاقتران $P(x) = 1 - \frac{x}{100}$)
فجد أكبر ايراد ممكن حيث P السعر بالدينار

مهم
العدد . السعر = الايراد
$R(x) = x P(x)$

الحل $R(x) = x\,P(x) = x\left(1 - \frac{x}{100}\right)$

$R(x) = x - \frac{x^2}{100}$

$\boxed{R'(x) = 1 - \frac{2x}{100}} = 0 \Rightarrow x = 50$



$\Rightarrow R(50) = 50 - \frac{50^2}{100} = 25$

س) إذا كان سعر بيع x قلم يعطى بالاقتران $P(x) = 1 - \frac{x}{100}$ ، حيث
P السعر بالدينار ، فإن سعر بيع القلم لتحقيق أكبر ايراد هو

a) 50 دينار b) $\frac{1}{2}$ دينار c) 25 دينار d) 2 دينار

الحل نفس الحل السابق $\rightarrow P(50) = 1 - \frac{50}{100} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \boxed{b}$

س | إذا كان سعر بيع برميل النفط يعطى بالاقتران

$$P(x) = 100 + \sin\left(\frac{\pi x}{100}\right)$$

حيث P السعر بالدولار ، x العدد بالآلاف ، فإن الإيراد الحدي من بيع 250 ألف برميل هو : ...

a)100 b) 25 c)101 d)none

الحل $R(x) =$ العدد . السعر $= x\left(100+\sin\frac{\pi x}{100}\right)$

$$R(x) = 100x + x\sin\left(\frac{\pi x}{100}\right)$$

$$R'(x) = 100 + x\cos\left(\frac{\pi x}{100}\right)\frac{\pi}{100} + \sin\left(\frac{\pi x}{100}\right)\cdot 1$$

$$R'(250) = 100 + 250\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{100} + \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)$$

$$\boxed{R'(250) = 101} \Longrightarrow \boxed{c}$$

التمارين

① إذا كان الإيراد من بيع x قطعة من منتج معين يعطى بالاقتران

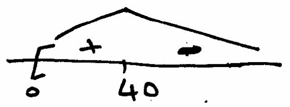
$$R(x) = 1000 + 60x^2 - x^3$$

جد ① الإيراد الحدي من بيع 10 قطع

② عدد القطع المبيعة لتحقيق أعلى ايراد

الحل ① $R'(x) = 120x - 3x^2 \longrightarrow R'(10) = 120(10) - 3(10)^2 = 400$

② $\boxed{R'(x) = 120x - 3x^2} > 0 \Longrightarrow x = 0, 40$



أعلى ايراد عند بيع 40 قطعة

② إذا كان سعر بيع منتج معين يعطى بالعلاقة $P(x) = \frac{10000}{x^2+100}$

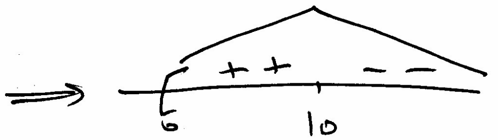
فاحسب : ① عدد القطع التي يجب بيعها لتحقيق أعلى ايراد

② سعر القطعة المناسب للحصول على اعلى ايراد

الايراد = السعر . العدد = $x \cdot \frac{10000}{x^2+100} \Rightarrow \boxed{R(x) = 10000\frac{x}{x^2+100}}$

$R'(x) = \ldots = 10000\frac{100-x^2}{(100+x^2)^2}$ $=0 \Rightarrow x = \pm 10$

$=0 \Rightarrow x = \{\ \}$



① عدد القطع = 10

② السعر = $P(10) = \frac{10000}{10^2+100} = 50$ دينار

الايراد والخصم

س يبيع تاجر 200 تنكة زيت شهرياً بسعر 90 دينار ، ولاحظ أن عدد التنكات المبيعة شهرياً يزداد بمعدل 20 تنكة عند خصم 5 دنانير من سعر التنكة . فما السعر المناسب لتحقيق أعلى ايراد

x: عدد العشرينات

$R(x) =$ (العدد) x (السعر) $= (200 + 20x)(90 - 5x)$

$$\boxed{R(x) = 18000 - 100x^2 + 800x}$$

$R'(x) = -200x + 800 = 0 \Longrightarrow \boxed{x = 4}$

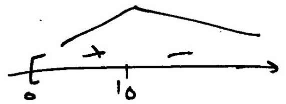
السعر $= 90 - 5(4) = 70$ دينار

س١ لاحظت دراسة لسوق الهواتف أن متوسط بيع هاتف ثامرفون هو 1000 هاتف ، إذا كان سعر بيع الهاتف 120JD . وأن عدد الهواتف المبيعه يزداد بمعدل 10 هواتف مقابل كل كل دينار يخصم من سعر الهاتف . إذا أردنا تحقيق أعلى ايراد فما هو: ① السعر المناسب ② عدد الهواتف المبيعة

الحل $R(x) =$ السعر . العدد $= (1000 + 10x)(120 - x)$

$R(x) = 120000 - 10x^2 + 200x$

$R'(x) = -20x + 200 \xRightarrow{=0} x = 10$



$x = 10 \longrightarrow$ السعر $120 - 10 = 110$ دينار

العدد $1000 + 10(10) = 1100$ جهاز

س من الكتاب

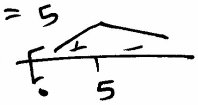
يبيع متجر 200 شاشة تلفاز شهريًّا بسعر JD 350 للشاشة الواحدة. وقد أشار مسح للسوق أَعَدَّهُ خبير التسويق في المتجر إلى أنَّ عدد الشاشات المَبيعة شهريًّا يزيد بمقدار 20 شاشة عند كل خصم مقداره JD 10 من سعر الشاشة الواحدة. أجد سعر بيع الشاشة الواحدة الذي يُحقِّق للمتجر أعلى إيراد مُمكِن.

الحل الانتاج = العدد · الانتاج لكل شجرة

$= (20 + x)(30 - x)$

$f(x) = 600 - x^2 + 10x \longrightarrow \boxed{f'(x) = -2x + 10} = 0$

$f' \Rightarrow x = 5$



أكبر انتاج عند زراعة $\Longleftarrow$

$\underline{25}$ شجرة $\Longleftarrow 20+5$

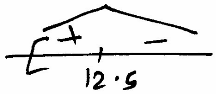
تمارين

① من الكتاب ص 128

الحل $R(x) =$ السعر · العدد $= (200+20x)(350-10x)$

$R(x) = 70\,000 + 5000x - 200x^2$

$R'(x) = 5000 - 400x = 0 \Longrightarrow \boxed{x = 12.5}$



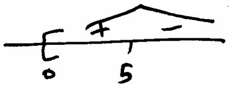
السعر $= 350 - 10(12.5) = 225$ دينار

② ينتج كل عامل في مصنع ١٠٠ قطعة في الساعة إذا عمل ١٠ ساعات في اليوم . لاحظت إدارة المصنع أن انتاج العامل يقل بمعدل 5 قطع في الساعة لكل ساعة عمل اضافيه في اليوم ← فما عدد ساعات العمل التي يمكن أن يسمح بها المصنع للحصول على أقصى انتاج

الانتاج = عدد الساعات الانتاج لكل ساعة

$$f(x) = (10 + 1x)(100 - 5x) = 1000 - 5x^2 + 50x$$

$$\boxed{f(x) = -10x + 50} = 0 \Rightarrow x = 5$$



$\Rightarrow$ عدد الساعات

$= 10 + 1(5)$

$= 15$ ساعة

تحدي الإيراد

لاحظت إدارة أحد المسارح أنَّ مُتوسِّط عدد الحضور لعرض ما هو **1000** شخص إذا كان سعر بيع التذكرة **26 JD** ، وأنَّ عدد الحضور يزيد بمقدار **50** شخصًا مُقابِل كل دينار يُخصَم من سعر التذكرة. إذا كان مُتوسِّط ما يُنفِقه كل شخص **4 JD** على الخدمات داخل المسرح، فما سعر بيع التذكرة الذي يُحقِّق للمسرح أعلى إيراد؟

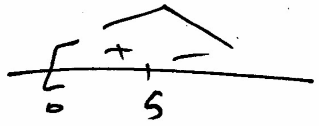
$R(x) =$ ايراد الانفاق + ايراد التذاكر

= (انفاق الشخص × عدد الاشخاص) + (سعر التذكر × عدد الاشخاص)

$= (1000+50x)(26-x) + (1000+50x)(4)$

$\boxed{R(x) = -50x^2 + 500x + 30000}$

$R'(x) = -100x + 500 = 0 \Rightarrow x = 5$



إذن أعلى ربح عند سعر التذكرة $26 - 5$

$= \underline{\underline{21}}$

الربح

الربح يساوي الايراد ناقص التكلفة

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

س وجد مصنع أثاث أن التكلفة الكلية بالدينار لانتاج غرف نوم عددها x تقدر بالاقتران $C(x) = x^3 - 3x^2 - 8x + 500$

فإذا بيعت كل غرفة نوم ب 2800 دينار .

فما هو عدد الغرف التي يجب أن ينتجها المصنع ليحقق أكبر ربح

الحل $\overset{\text{الايراد}}{R(x)} = \overset{\text{العدد}}{(X)}\overset{\text{السعر}}{(2800)} \Longrightarrow \boxed{R(x) = 2800X}$

$$\overset{\text{الربح}}{P(x)} = \overset{\text{الايراد}}{R(x)} - \overset{\text{الربح}}{\cancel{P(x)}}\, C(x)$$

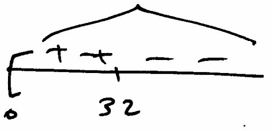
$$P(x) = 2800x - (x^3 - 3x^2 - 8x + 500)$$

$$P(x) = 2880x - x^3 + 3x^2 - 500$$

$$\boxed{P'(x) = 2880 - 3x^2 + 6x} = 0 \Longrightarrow x^2 - 2x - 960 = 0$$

$$(x - 32)(x + 30) = 0$$

$$x = 32$$



عدد القطع 32 قطعة

س ما هو اربح الحدي في السؤال السابق عند بيع 10 قطع

الحل $R'(10) = 2880 - 3(10)^2 + 6(10) = 2640$

تمارين

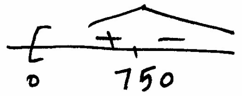
① يبيع مصنع للالعاب x قطعه من انتاجه اسبوعياً بسعر القطعه $(200 - 0.1x)$ قلساً . إذا كانت تكلفة x من القطع $(50x + 2000)$ فلس . فما عدد القطع التي يجب أن يبيعها المصنع أسبوعياً حتى يكون ربحه أكبر ما يمكن

الحل $R(x) = \overset{\text{العدد}}{x}\,\overset{\text{السعر}}{(200 - 0.1x)} = 200x - 0.1x^2$

2/1 $P(x) = R(x) - C(x) = (200x - 0.1x^2) - (50x + 2000)$

$$\longrightarrow \boxed{P(x) = 150x - 0.1x^2 - 2000}$$

$$P' = 150 - 0.2x = 0 \implies x = \frac{150}{0.2} = \frac{1500}{2} = 750$$



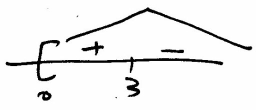
$\implies$ يجب ان ينتج 750 قطعة لتحقيق أكبر ربح

② من الكتاب يمثل الاقتران $f(x) = \frac{1500}{x^2 - 6x + 10} - 150$ الربح الاسبوعي (بالدينار) لاحد المصانع . حيث x عدد مكبرات الصوت المبيعة ، جد عدد مكبرات الصوت الذي يحقق أكبر ربح ممكن

الحل المجال $x \geq 0$ & $\mathbb{R} - \{\text{اصفار المقام}\} = \mathbb{R}$ (لا يوجد اصفار مقام)

$\implies$ المجال $[0, \infty)$

$$f'(x) = \frac{-1500(2x - 6)}{(x^2 - 6x + 10)^2} \qquad -1500(2x-6) \xrightarrow{=0} x = 3 \qquad (x^2-6x+10)^2 \xrightarrow{=0} x = \emptyset \qquad \longrightarrow$$



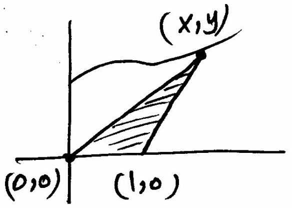
$\Leftarrow$ يجب بيع 3 مكبرات صوت لتحقيق أكبر ربح

نهاية الوحدة الثانية

معدلات

دولي

تتحرك نقطة مادية على منحنى الاقتران $f(x)=\sqrt{x^2+9}$ فإذا كان معدل تزايد الاحداثي x للنقطة المتحركة يساوي 5 وحدات/ثانية . فأوجد معدل تغير مساحة المثلث الذي رؤوسه نقطة الاصل (0,0) والنقطة الثابتة (1,0) و النقطة المتحركة (x,y) في اللحظة التي يكون فيها الاحداثي x للنقطة المتحركة يساوي 4 وحدات



$$\frac{dx}{dt}=5$$

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{x=4}=?$$

$$A=\frac{1}{2}(1-0)(y)$$

$$A=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+9}$$

$$\frac{dA}{dt}=\frac{1}{2}\,\frac{\cancel{2}x\,\frac{dx}{dt}}{\cancel{2}\sqrt{x^2+9}}$$

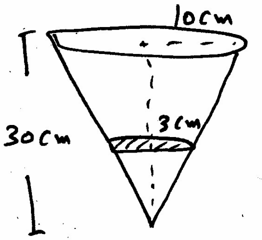
$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{x=4}=\frac{1}{2}\,\frac{(4)(5)}{\sqrt{4^2+9}}=\frac{2\cdot\cancel{5}}{\cancel{5}}$$

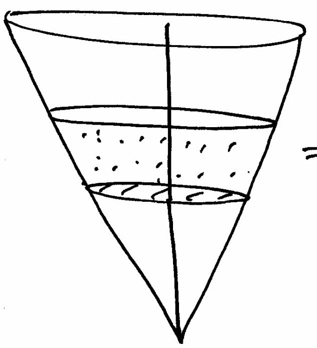
$$\Longrightarrow \boxed{\left.\frac{dA}{dt}\right|_{x=4}=2}$$

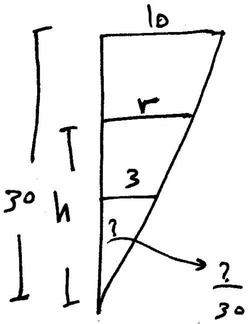
تحدي فخم

سنوات 2006 س

يمثل الشكل المجاور ، إناء على شكل مخروط دائري قائم ، طول نصف قطر قاعدته 10cm ، وارتفاعه 30cm . أغلق جزء منه بقرص معدني دائري رقيق نصف قطره 3cm ، يوازي قاعدة المخروط يمنع وصول أي مادة للجزء السفلي من الإناء . فإذا صب سائل في هذا الإناء بمعدل ثابت قدره $5\pi\ cm^3/s$ جد سرعة ارتفاع السائل في الإناء عندما يكون حجم السائل في الإناء $37\pi\ cm^3$







$$\frac{r}{h} = \frac{10}{30}$$

$$r = \frac{1}{3}h$$

$$\frac{?}{30} = \frac{10}{3} \Rightarrow ? = 9$$

$$\frac{dV}{dt} = 5\pi$$

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{V=37\pi} = ?$$

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h - \frac{\pi}{3}(3)^2(9)$$

$$V = \frac{\pi}{3}\left(\frac{h}{3}\right)^2 h - \frac{\pi}{3}(3)^2(9)$$

$$\Longrightarrow \boxed{V = \frac{\pi}{\cancel{9}\,27} h^3 - 27\pi}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{9} h^2 \frac{dh}{dt}$$

$$5\pi = \frac{\pi}{9}(12)^2 \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = = \frac{5\cdot \overset{1}{\cancel{9}}\,\overset{}{3}}{\underset{4}{\cancel{12}}\cdot\underset{4}{\cancel{12}}} = \frac{5}{16}$$

$$37\pi = \frac{\pi}{27} h^3 - 27\pi$$

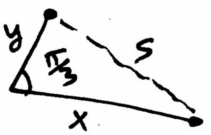
$$\frac{\pi}{27} h^3 = 64\pi$$

$$h^3 = 27\cdot 64 \Rightarrow \boxed{h = 12}$$

س الكتاب

درّاجات نارية: تحرَّكت درّاجتان في الوقت نفسه، ومن النقطة نفسها، على طريقين مستقيمين، قياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{3}$ rad. إذا كانت سرعة الدرّاجة الأولى 15 km/h، وسرعة الدرّاجة الثانية 20 km/h، فأجد سرعة ابتعاد كلٍّ منهما عن الأُخرى بعد ساعتين من انطلاقهما.

الحل



$\frac{dx}{dt} = 15$

$\frac{dy}{dt} = 20$

$\frac{ds}{dt}\Big|_{t=2} = ?$

$s = \sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\frac{\pi}{3}}$

$= \sqrt{x^2+y^2-xy}$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} - x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}}{2\sqrt{x^2+y^2-xy}}$$

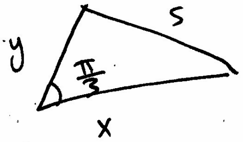
$\frac{ds}{dt} = \dots\dots =$

المسافة = سرعة × زمن

$x = 15 \cdot 2 = 30$

$y = 20 \cdot 2 = 40$

طريقة جديدة



$\frac{dx}{dt} = 15$

$\frac{dy}{dt} = 20$

$\frac{ds}{dt}\Big|_{t=2}$

$x = 0 + 15t = 15t$

$y = 0 + 20t = 20t$

$s = \sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\frac{\pi}{3}} = \sqrt{(15t)^2+(20t)^2-2(15t)(20t)\frac{1}{2}}$

$= \sqrt{225t^2+400t^2-300t^2} = \sqrt{325t^2}$

$s = \sqrt{325}\,t$

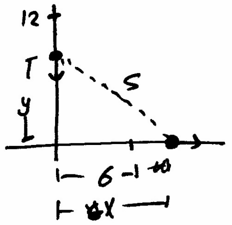
$\boxed{\frac{ds}{dt} = \sqrt{325}}$

تمارين

سنوات 2012

بدأت نقطة مادية الحركة من النقطة $a(6,0)$ على محور الـ x مبتعدة عن نقطة الاصل بسرعة 3 cm/s . وفي اللحظة نفسها بدأت نقطة أخرى الحركة من النقطة $b(0,12)$ على محور الـ y مقتربة من نقطة الاصل بسرعة 2 cm/s . جد معدل تغير المسافة بين النقطتين المتحركتين عندما تكون النقطة المتحركة على محور الـ y على بعد 8cm من نقطة الاصل

الحل



$$x = x_0 + \frac{dx}{dt} t = 6 + 3t \Rightarrow \boxed{x = 6+3t}$$

$$y = y_0 + \frac{dy}{dt} t = 12 - 2t \Rightarrow \boxed{y = 12-2t}$$

$$y = 8$$

$$\Rightarrow 12 - 2t = 8 \Rightarrow \boxed{t=2}$$

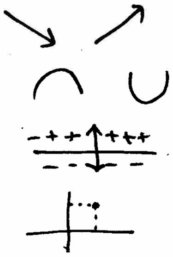
$$s = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(6+3t)^2 + (12-2t)^2}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2(6+3t)\cdot 3 + 2(12-2t)(-2)}{2\sqrt{(6+3t) + (12-2t)^2}}$$

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=2} = \frac{2(6+3(2))\cdot 3 + 2(12-2(2))(-2)}{2\sqrt{(6+3(2))^2 + (12-2(2))^2}}$$

$$= \frac{72 - 32}{2\sqrt{12^2 + 8^2}} \Longrightarrow \boxed{\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=2} = \frac{20}{\sqrt{208}}}$$

ر٣



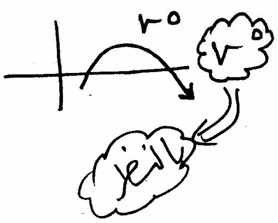
تزايد ر٥

تقعر ر٥

اشارة ر٥

قيم ر٥

(قيم ر٥′ ≡ ميل المماس)



س الشكل المجاور يمثل منحنى $f(x)$ بالاعتماد عليه ، جد

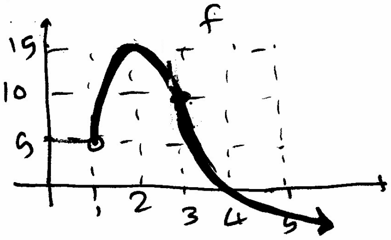
① فترة تزايد f

② فترة تقعر f للاعلى

③ فترة $f(x) > 0$

④ قيمة $f(2)$ & $f(4)$

⑤ قيم x ~~حيث~~ $f(x) = 0$



الحل ① تزايد $(1, 2)$

② تقعر للاعلى $(3, \infty)$

③ $f(x) > 0 \Longleftarrow (1, 4)$

④ $f(2) = 15$ ، $f(4) = 0$

⑤ $x = 4$

س الشكل المجاور يمثل منحنى $f'(x)$ بالاعتماد عليه جد :

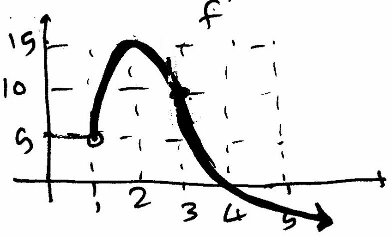
① فترة تزايد f'

② فترة تقعر f' للاعلى

③ فترة $f'(x) > 0$

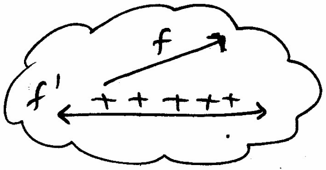
④ قيمة $f'(2)$ & $f'(4)$

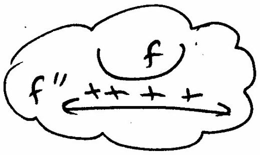
⑤ قيم x حيث $f'(x) = 0$



الحل ① $(1, 2)$ ② $(3, \infty)$ ③ $(1, 4)$ ④ $f(2) = 15$ ، $f'(4) = 0$ ⑤ $x = 4$

روابط





f' تزايد
f تقعر ≡

س اعلء الفراغ : (بكلمة اشارة تزايد تقعر)

① تزايد f = ---- f'

② تقعر f = ---- f''

③ تزايد f' = ---- f

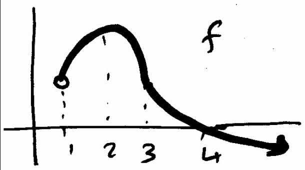
④ تقعر f = ---- f'

⑤ تزايد f' = ---- f''

الحل ① اشارة ② اشارة ③ تقعر ④ تزايد ⑤ اشارة

س بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى f

جد



① فترة تزايد f

② فترة تقعر f للاعلى

③ فترة تزايد f'

④ فترة $f>0$

⑤ فترة $f'>0$

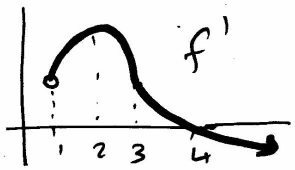
⑥ فترة $f''>0$

الحل ① $(1,2)$ ② $(3,\infty)$ ③ $(3,\infty)$

④ $(1,4)$ ⑤ $(1,2)$ ⑥ $(3,\infty)$

س بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى f'

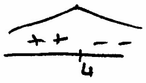
جد



① فترة تزايد f

② فترة تقعر f للاعلى

③ فترة $f''<0$



الحل ① تزايد f ≡ اشارة f' ⇐ $(1,4)$

② تقعر f ≡ تزايد f' ⇐ $(1,2)$

③ $f''<0$ ⇐ تناقص f' ⇐ $(2,\infty)$

س) بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل f'

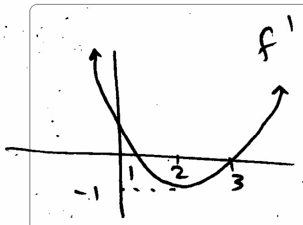
① جد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى لـ f

② جد فترات التقعر للأعلى وللأسفل ونقاط انعطاف f

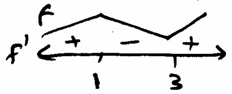
③ جد قيم x حيث $f'=0$

④ جد قيم x حيث $f''=0$

⑤ جد $f'(3)$ و $f'(2)$ و $f''(2)$



الحل ①



⟸ تزايد $(-\infty,1)$ $(3,\infty)$

تناقص $(1,3)$

عظمى محلية عند $x=1$ وهي $f(1)$

صغرى محلية عند $x=3$ وهي $f(3)$

② تقعر f ≡ تزايد f' ⟸ مقعر للأعلى $(2,\infty)$

للأسفل $(-\infty,2)$

انعطاف عند $x=2$ ⟸ $(2,f(2))$

③ $x=1,3$

④ $x=2$

⑤ $f'(3)=0$ و $f'(2)=-1$ و $f''(2)=0$

س) الشكل المجاور يمثل منحنى f'' ، بالاعتماد عليه جد

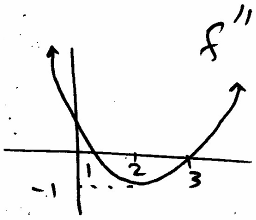
① فترات التقعر ونقاط الانعطاف لـ f

② فترة $f''(x)>0$

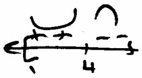
③ فترة تزايد f'

④ إذا كانت $f'(5)=0$ ، فإن $f(5)$ هي:

a) قيمة عظمى محلية b) قيمة صغرى محلية c) نقطة انعطاف d) none



الحل ①



للأعلى $(1,4)$

للأسفل $(4,\infty)$

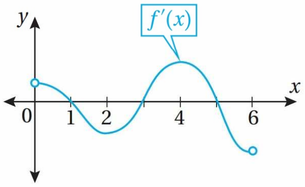
② $(1,4)$

③ $(1,4)$

⑤ $f'(5)=0$ ، $f''(5)<0$ ⟸ عظمى محلية $\boxed{a}$

تمارين

① من الكتاب

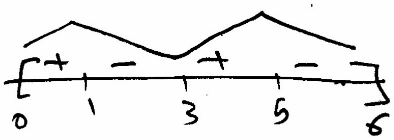


يُبيِّن الشكل المجاور منحنى المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$ المتصل على الفترة $[0, 6]$. أستعمل التمثيل البياني لإيجاد كلٍّ ممّا يأتي:

32 قِيَم x التي يكون عندها للاقتران f قِيَم قصوى محلية، مُبيِّنًا نوعها.

33 فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران f.

$f'=0 \Longrightarrow x=1, 3, 5 \Longrightarrow$



عظمى محلية عند $x=1$ وهي $f(1)$.

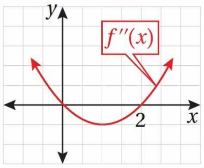
صغرى محلية عند $x=3$ وهي $f(3)$

عظمى محلية عند $x=5$ وهي $f(5)$

تزايد $(0,1)$ $(3,5)$

تناقص $(1,3)$ $(5,6)$

② من الكتاب

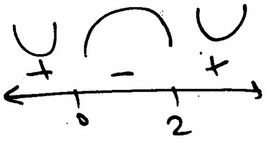


أستعمل التمثيل البياني المجاور لمنحنى $f''(x)$ لإيجاد كلٍّ ممّا يأتي:

36 فترات التقعُّر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران f.

37 الإحداثي x لنقاط انعطاف منحنى الاقتران f.

$f''=0 \Longrightarrow x=0, 2 \Longrightarrow$



للأعلى $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

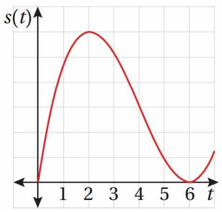
للأسفل $(0, 2)$

انعطاف عند $x=0, 2$

③ من الكتاب

تحدي

يُمثِّل الاقتران $s(t)$ المُبيَّن منحناه في الشكل المجاور موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:



(39) أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون.

(40) ما الفترات الزمنية التي يتحرَّك فيها الجسم في الاتجاه الموجب والاتجاه السالب؟

(41) إذا كان تسارع الجسم صفرًا عندما $t = 4$، فما الفترات التي تتزايد فيها سرعة الجسم المتجهة؟ وما الفترات التي تتناقص فيها سرعة الجسم المتجهة؟

الحل

① $V=0 \Rightarrow S'=0 \Rightarrow t=2 , 6$

② $V \pm \Rightarrow S' \pm \Rightarrow$ S تزايد $\Rightarrow$ S تتزايد $(0,2)$ ، $(6,7) \Rightarrow$ $+S'$ لليمين ⟸

S متناقص $(2,6) \Rightarrow$ سالب لليسار ⟸

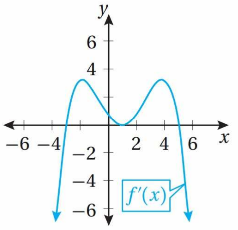
③ V تزايد $\Rightarrow$ S' تزايد $\Rightarrow$ S تقعر

$\Rightarrow$ تقعر للاعلى $(4,7) \Rightarrow$ السرعة تزداد

تقعر للاسفل $(0,4) \Rightarrow$ السرعة تتناقص

④ منهـ الكتاب

مهارات تفكير عليا



تبرير: أستعمل التمثيل البياني المجاور لمنحنى $f'(x)$ لإيجاد كلٍّ ممّا يأتي، مُبرِّرًا إجابتي:

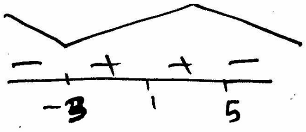
(48) قِيَم x التي يكون عندها للاقتران f قِيَم قصوى محلية، مُبيِّنًا نوعها.

(49) فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران f.

(50) فترات التقعُّر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران f.

(51) الإحداثي x لنقاط الانعطاف.

اكل ① ② $f' = 0 \Longrightarrow$



صغرى محلية عند $x = -3$

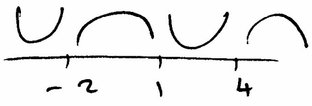
عظمى محلية عند $x = 5$

تزايد $(-3, 5)$

تناقص $(-\infty, -3)$ ، $(5, \infty)$

③ ④ f تقعر $\equiv$ f' تزايد $\Longrightarrow$ f' متزايد $(-\infty, -2)$ ∪ $(1, 4)$ $\Longrightarrow$ f مقعر للاعلى $(-\infty, -2)$ $(1, 4)$

f' متناقص $(-2, 1)$ $(4, \infty)$ $\Longrightarrow$ f مقعر للاسفل $(-2, 1)$ $(4, \infty)$

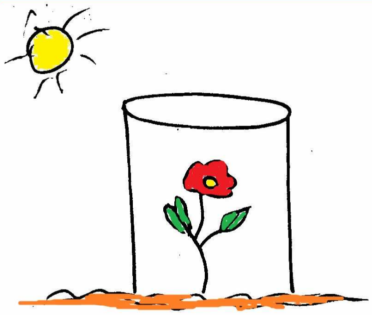


$\Longrightarrow$ انعطاف عند

$x = -2, 1, 4$

الوردة

تطبيقات القصوى



س وردة مغطاة بوعاء زجاجي اسطواني الشكل.
إذا علمت أن القاعدة العلوية تنفذ وحدتين
ضوء لكل dm^2 وأن الجوانب تنفذ ثلاث وحدات
لكل dm^2 . وأن حجم الوعاء هو $18\pi dm^3$.
جد ابعاد الوعاء لتكون كمية الضوء أقل ما يمكن

الحل

$$Q = (2).(\pi r^2) + 3(2\pi r h)$$

$$Q = 2\pi r^2 + 6\pi r h$$

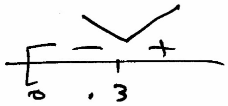
$$Q = 2\pi r^2 + 6\pi r \frac{18}{r^2}$$

$$V = \pi r^2 h = 18\pi$$

$$h = \frac{18}{r^2}$$

$$\boxed{Q = \pi\left(2r^2 + \frac{108}{r}\right)} \Longrightarrow Q' = \pi\left(4r - \frac{108}{r^2}\right)$$

$$\boxed{Q' = \pi\left(\frac{4r^3 - 108}{r^2}\right)} \longrightarrow = 0 \quad r^3 = 27 \Rightarrow \boxed{r = 3}$$



$$\Rightarrow h = \frac{18}{3^2} \longrightarrow \boxed{h = 2}$$

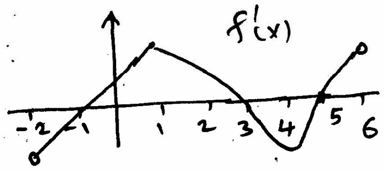
امتحان تطبيقات التفاضل

وقت الامتحان : 50 دقيقة

العلامة من : 50

1 سنوات 2006

(4 علامات)



الشكل المجاور يمثل منحنى المشتقة الاولى للاقتران f في الفترة (-2,6). ما مجموعة قيم x التي يكون عندها لمنحنى f(x) مماس أفقي

a) {1,4}

b) {-2,-1,3,5,6}

c) {-1,3,5}

d) {-2,1,4,6}

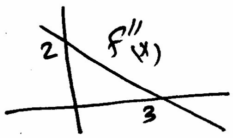
2 سنوات 2001

(8 علامات)

قذف جسم رأسياً للأعلى بحيث أن ارتفاعه من نقطة القذف بالأمتار بعد t ثانية يعطى وفق الاقتران $s(t)=v_1t-5t^2$ ، (حيث v_1 ثابت) فإذا علمت أن أقصى (أعلى) ارتفاع وصل إليه الجسم هو 20 m فما قيمة v_1 .

3 سنوات 2000

(4 علامات)

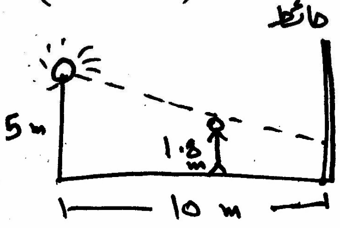


يمثل الشكل المجاور منحنى $f''(x)$ ، فما احداثيات نقطة انعطاف f(x)

a) (3,0) b) (0,2) c) (3,f(3)) d) (0,f(0))

4 سنوات 2005

(12 علامة)



يقع مصباح كهربائي على بعد 10 m من حائط رأسي وعلى ارتفاع 5 m من سطح ممر أفقي يجاور الحائط. سار رجل طوله 1.8 m على هذا الممر بسرعة $\frac{1}{2}$ m/s مبتعداً عن المصباح. جد سرعة تحرك ظل رأس الرجل على الحائط عندما يكون الرجل على بعد 1.5 m عن الحائط

الصفحة الأولى

5 سنوات 2014

(8 علامات)

إذا كان $f(x)=\sqrt[3]{x^2+2x}$ ، حيث $x\in\mathbb{R}$.
فجد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقتران f
وبين نوعها

6 سنوات 2012

(4 علامات)

إذا كان $f(x)=8x-4(m-3)x^2$ ، فإن قيمة الثابت m
التي تجعل منحنى $f(x)$ مقعراً للاسفل هي:

a) $(3,\infty)$ b) $(-3,\infty)$ c) $(-\infty,3)$ d) $(-3,3)$

7 سنوات 2006

(10 علامات)

وجد تاجر أنه إذا كان سعر الوحدة من سلعة معينة ديناراً واحداً فإن بإمكانه بيع 400 وحدة من هذه السلعة ، ولكن هذا العدد ينقص بمعدل 20 وحدة لكل زيادة قدرها 10 قروش في السعر، جد سعر الوحدة الذي يجعل قيمة المبيعات أكبر ما يمكن

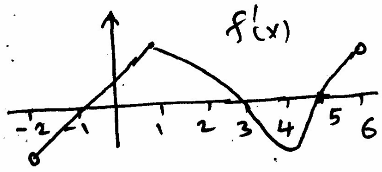
انتهى الامتحان ... مع تمنياتي لكم بالتوفيق

مدرس المادة : ثامر قدورة

الاجابات

سنوات 2006

(4 علامات)



الشكل المجاور يمثل منحنى المشتقة الاولى للاقتران f في الفترة (6 ,2-) . ما مجموعة قيم x التي يكون عندها لمنحنى f(x) مماس أفقي

a) $\{1, 4\}$ b) $\{-2, -1, 3, 5, 6\}$

c) $\{-1, 3, 5\}$ d) $\{-2, 1, 4, 6\}$

الحل $f'(x) = 0 \Longrightarrow x = \{-1, 3, 5\} \Longrightarrow \boxed{c}$

سنوات 2001

(8 علامات)

قذف جسم رأسياً للاعلى بحيث أن ارتفاعه من نقطة القذف بالامتار بعد t ثانية يعطى وفق الاقتران $s(t) = V_1 t - 5t^2$ ، (حيث V_1 ثابت) فإذا علمت أن أقصى (أعلى) ارتفاع وصل اليه الجسم هو 20 m فما قيمة V_1 .

الحل ~~Vt~~ $\boxed{s'(t) = V_1 - 10t} = 0 \Rightarrow \boxed{t = \frac{V_1}{10}}$

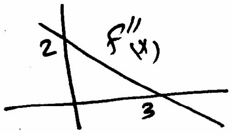
$$s\left(\frac{V_1}{10}\right) = 20 \Rightarrow V_1\left(\frac{V_1}{10}\right) - 5\left(\frac{V_1}{10}\right)^2 = 20$$

$$\Rightarrow \frac{V_1^2}{10} - \frac{5V_1^2}{100} = 20 \Rightarrow \frac{10V_1^2 - 5V_1^2}{100} = 20$$

$$\Rightarrow \frac{5V_1^2}{100} = 20 \Rightarrow V_1^2 = 400 \Longrightarrow \boxed{V_1 = 20}$$

سنوات 2000

(4 علامات)



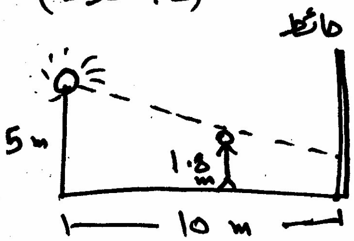
يمثل الشكل المجاور منحنى $f''(x)$ ، فما احداثيات نقطة انعطاف f(x)

a) (3,0) b) (0,2) c) (3,f(3)) d) (0,f(0))

الحل $f'' = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow \underset{3}{\overset{\cup \quad \cap}{\overset{+ \quad -}{\longleftrightarrow}}} \Rightarrow (3, f(3)) \Longrightarrow \boxed{c}$

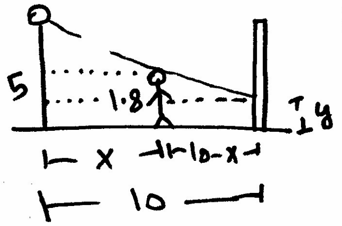
(12 علامة)

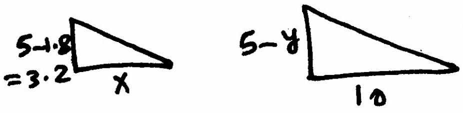
سنوات 2005



يقع مصباح كهربائي على بعد 10 m من حائط رأسي وعلى ارتفاع 5 m من سطح ممر أفقي يحاذي الحائط. سار رجل طوله 1.8 m على هذا الممر بسرعة $\frac{1}{2}$ m/s مبتعداً عن المصباح. جد سرعة تحرك ظل رأس الرجل على الحائط عندما يكون الرجل على بعد 1.5 m عن الحائط

طريقة ①





$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=8.5} = ?$$

البعد عن الحائط = 1.5

$10 - x = 1.5$

$x = 8.5$

$$\cancel{5} \quad \frac{5-y}{3.2} = \frac{10}{x}$$

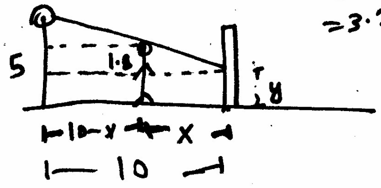
$$5 - y = \frac{32}{x}$$

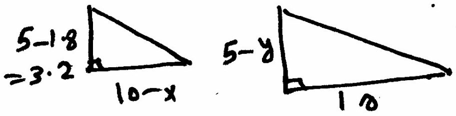
$$y = 5 - \frac{32}{x}$$

$$\frac{dy}{dt} = +\frac{32}{x^2}\,\frac{dx}{dt}$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=8.5} = \frac{32}{(8.5)^2}\,\frac{1}{2} \Longrightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{16}{(8.5)^2}}$$

② طريقة





$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2}$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=1.5} = ?$$

$$\frac{5-y}{3.2} = \frac{10}{10-x}$$

$$5-y = \frac{32}{10-x}$$

$$y = 5 - \frac{32}{10-x}$$

$$\frac{dy}{dt} = - \frac{+32}{(10-x)^2} \frac{dx}{dt}$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=1.5} = \frac{-32}{(10-1.5)^2} \cdot -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = \frac{16}{(8.5)^2}}$$

③ طريقة - - -

④ طريقة - -

⑤ طريقة . —

⋮

سنوات 2014

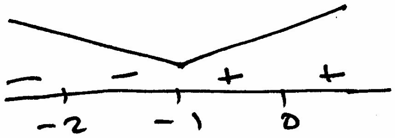
(8 علامات)

إذا كان $f(x)=\sqrt[3]{x^2+2x}$ ، حيث $x\in\mathbb{R}$.
جد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقتران f
وبين نوعها

الحل $f(x)=(x^2+2x)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}(x^2+2x)^{-\frac{2}{3}}(2x+2)$

$$\boxed{f'(x)=\frac{2x+2}{3(x^2+2x)^{\frac{2}{3}}}} \xrightarrow{f'=0} x=-1$$

$$\xrightarrow[\text{غ.م}]{f'} x^2+2x=0 \Rightarrow x=0,-2$$



صغرى محلية عند $x=-1$ و هي $f(-1)=\sqrt[3]{(-1)^2+2(-1)}$
$=-1$

سنوات 2012

(4 علامات)

إذا كان $f(x)=8x-4(m-3)x^2$ ، فإن قيمة الثابت m
التي تجعل منحنى f(x) مقعراً للأسفل هي:

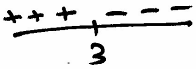
a) $(3,\infty)$ b) $(-3,\infty)$ c) $(-\infty,3)$ d) $(-3,3)$

الحل $f'(x)=8-8(m-3)x$

$$\boxed{f''(x)=-8(m-3)} \xrightarrow{\text{مقعر للاسفل}} -8(m-3)<0$$

سالب ⇐

$...<0$ ⇐



$\Rightarrow (3,\infty) \Rightarrow \boxed{a}$

سنوات 2006

(١٥ علامات)

وجد تاجر أنه إذا كان سعر الوحدة من سلعة معينة ديناراً واحداً فإن بإمكانه بيع 400 وحدة من هذه السلعة ، ولكن هذا العدد ينقص بمعدل 20 وحدة لكل زيادة قدرها ١٥ قروش في السعر. جد سعر الوحدة الذي يجعل قيمة المبيعات أكبر ما يمكن

الحل $\overset{\text{الايراد}}{R(x)} = \overset{\text{العدد}}{\overset{\cancel{\text{السعر}}}{(400-20x)}} \cdot \overset{\text{السعر}}{(1+0.1x)}$

دينار

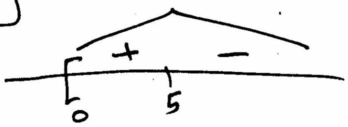
١٥ قروش $= 0.1$ دينار

$= 400 + 40x - 20x - 2x^2$

$$\boxed{R(x) = 400 + 20x - 2x^2}$$

$$\boxed{R'(x) = 20 - 4x} = 0$$

$\Rightarrow x = 5$



$\Longrightarrow$ السعر $(1 + 0.1(5)) = \boxed{1.5 \text{ دينار}}$

ملاحظة :

- إذا حولت كل شي إلى دينار ⇐ علامة كاملة
- إذا حولت كل شي إلى قروش ⇐ علامة كاملة
- إذا نسيت تحول تخسر علامة واحدة

نهاية الوحدة الثانية