



التكامل

الوحدة
الأولى

الإدارة المعلوماتية ، الأدبي

المستوى الرابع

الأستاذ : عماد مسك

٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

التحدي

* التكامل غير المحدود وقواعده :-

$$u(s) = s^2 + s^3 \Rightarrow u'(s) = 2s + 3s^2$$

التكامل هو العملية العكسية للإشتقاق وتعني إيجاد الاقتران $u(s)$ الذي مشتقته تساوي $s^2 + s^3$ وتكتب $[s^2 + s^3] u(s)$ تعني أن التكامل بدلالة المتغير s

$$* [s^2 + s^3] u(s) = s^2 + s^3 + A$$

حيث (A) عدد ثابت ، وتعني ثابت التكامل غير المحدود .

+ قواعد التكامل غير المحدود :-

$$① [s^p] u(s) = s^p + A \quad \text{حيث } p: \text{ عدد ثابت}$$

$$\text{مثل :-} [s^0] u(s) = s^0 + A \quad [s^{-1}] u(s) = s^{-1} + A$$

$$[s^{\frac{1}{2}}] u(s) = s^{\frac{1}{2}} + A \quad [s^{-\frac{1}{3}}] u(s) = s^{-\frac{1}{3}} + A$$

$$② [s^{\frac{n}{1+n}}] u(s) = s^{\frac{n}{1+n}} + A \quad \text{حيث } n: \text{ نصيف (1) للأشهر ونقسم على الأشهر الجديد}$$

وتسمى بقاعدة التكامل الأساسية .

$$\text{مثل :-} [s^{\frac{1+2}{1+3}}] u(s) = s^{\frac{1+2}{1+3}} + A = s^{\frac{3}{4}} + A$$

$$[s^{\frac{1+8}{1+8}}] u(s) = s^{\frac{1+8}{1+8}} + A = s^1 + A$$

$$[s^{\frac{1+3-}{1+3-}}] u(s) = s^{\frac{1+3-}{1+3-}} + A = s^{\frac{1}{2}} + A$$

$$[s^{\frac{1+\frac{5}{0}}{1+\frac{5}{0}}} u(s) = s^{\frac{1+\frac{5}{0}}{1+\frac{5}{0}}} + A = s^{\frac{1+\frac{5}{0}}{1+\frac{5}{0}}} + A$$

$$[s^{\frac{1+\frac{1}{\frac{1}{2}}}} u(s) = s^{\frac{1+\frac{1}{\frac{1}{2}}}} + A = s^{\frac{1+\frac{1}{\frac{1}{2}}}} + A$$

(1)

$$us(u) \circ [P = us(u) \circ P] \quad (3)$$

$$A + \frac{3}{4} = A + \frac{0}{4} = A + \frac{1+0}{4} = us^c u \circ 3 = us^c u \circ 3 \quad \text{مثال}$$

$$A + \frac{7}{8} = A + \frac{0}{8} = us^o u \circ 7 = us^o u \circ 7$$

$$A + \frac{6}{5} = A + \frac{0}{5} = us^x u \circ 6 = us^x u \circ 6$$

$$A + \frac{3}{4} = us^c u \circ 3 = us^c u \circ 3$$

$$(توزيع، التفاضل) \quad us(u) \Delta \pm us(u) \circ [= us(u) \Delta \pm (u) \circ [\quad (4)$$

$$us u \circ 7 + us^3 u \circ 2 = us u \circ 7 + u \circ 2 \quad \text{مثال}$$

$$A + \frac{u \circ 7}{c} + \frac{u \circ 2}{c} =$$

$$A + u \circ 3 + u \circ =$$

$$A + u \circ 7 - \frac{u \circ 4}{c} + \frac{u \circ 0}{3} = us 7 - u \circ 4 + u \circ 0 \quad *$$

$$us 2 + u \circ 15 - u \circ 9 = us^c (2 - u \circ 4) \quad *$$

$$A + u \circ 2 + \frac{u \circ 15}{5} - \frac{u \circ 9}{3} =$$

$$A + u \circ 2 + u \circ 7 - u \circ 3 =$$

$$A + u \circ 0 + \frac{u \circ}{c} = us 0 + u \circ = us \left(\frac{u \circ}{u \circ} + \frac{u \circ}{u \circ} \right) u \circ \quad *$$

$$A + \frac{u \circ}{c} = A + \frac{u \circ}{c} = us^3 u \circ 4 = us \frac{u \circ}{u \circ} \quad *$$

$$\begin{aligned}
 \text{وس} \left[\frac{2}{\text{وس}} + \frac{\text{وس}^8}{\text{وس}} + \frac{\text{وس}^6}{\text{وس}} \right] &= \text{وس} \frac{2 - \text{وس}^8 + \text{وس}^6}{\text{وس}} * \\
 \text{وس} \left[\frac{2}{\text{وس}} - 8 + \text{وس}^6 \right] &= \\
 \text{وس} \frac{2 - \text{وس}^8 - \text{وس}^8 + \text{وس}^6}{1 -} &= \\
 \text{أ} + \frac{2}{\text{وس}} + \text{وس}^8 + \text{وس}^3 &=
 \end{aligned}$$

⑤ * إذا كان $\text{وس} = \text{لواسا}$ فإنه $\text{وس} = \frac{1}{\text{وس}}$ لذلك فإنه -

$$\text{أ} + \frac{1}{\text{وس}} = \text{وس}$$

* إذا كان $\text{وس} = \text{ه}$ فإنه $\text{وس} = \text{ه}$ لذلك فإن -

$$\text{أ} + \text{ه} = \text{وس}$$

مثال - * $\text{أ} + \text{ه} + \frac{\text{وس}}{\text{وس}} = \text{وس} \left(\frac{\text{وس}}{\text{وس}} + \frac{1}{\text{وس}} \right)$

* $\text{أ} + \text{ه}^3 + \frac{\text{وس}}{\text{وس}} = \text{وس} \left(\text{ه}^3 + \frac{1}{\text{وس}} \right)$

* $\text{وس} \left[\frac{\text{وس}}{\text{وس}} + 0 \right] = \text{وس} \left[\frac{\text{وس}}{\text{وس}} + \frac{\text{وس} \cdot 0}{\text{وس}} \right] = \text{وس} \frac{\text{وس} + \text{وس} \cdot 0}{\text{وس}}$

$\text{أ} + \frac{\text{وس}}{\text{ه}} + \text{وس} \cdot 0 =$

* $\text{أ} + \text{ه}^4 + \frac{\text{وس}}{\text{ه}} = \text{وس} \left(\text{ه}^4 + \frac{\text{وس}}{\text{ه}} \right)$

ملاحظة - $\text{أ} + \text{ه}^4 \frac{1}{\text{ه}} = \text{وس} \left[\text{ه}^4 + \frac{\text{وس}}{\text{ه}} \right]$

مثال - $\text{أ} + \text{ه}^3 \frac{1}{\text{ه}} = \text{وس} \left[\text{ه}^3 + \frac{\text{وس}}{\text{ه}} \right]$

$\text{أ} + 1 + \text{وس} \frac{\text{وس}}{\text{ه}} = \text{وس} \left[1 + \text{وس} \frac{\text{وس}}{\text{ه}} \right]$

٦) تكامل الاقترانات الماثريّة :-

$$* \int A + \sin p \sin \frac{1}{p} - \sin p \sin A \ll \int A + \sin \sin = \sin \sin$$

$$* \int A + \sin p \sin \frac{1}{p} = \sin p \sin A \ll \int A + \sin \sin = \sin \sin$$

$$* \int A + \sin p \sin \frac{1}{p} = \sin p \sin A \ll \int A + \sin \sin = \sin \sin$$

مثال :- أوجد كلاً من التكاملات التالية :-

$$٢) \int A + \sin p \sin \frac{1}{p} - \sin p \sin A = \sin p \sin A + \sin p \sin A$$

$$٣) \int A + \sin p \sin \frac{1}{p} = \sin p \sin A + \sin p \sin A$$

$$٤) \int A + \sin p \sin \frac{1}{p} = \sin p \sin A + \sin p \sin A$$

$$٥) \int A + \sin p \sin \frac{1}{p} - \sin p \sin A = \sin p \sin A + \sin p \sin A$$

$$A + \sin p \sin \frac{1}{p} - \sin p \sin A =$$

مثال :- أوجد $\sin p$ إذا كانت $\sin p = \sin p$

$$٢) \sin p + \frac{1}{p} = \sin p$$

$$\text{الحل :- } ٢) \sin p + \frac{1}{p} = \sin p \Rightarrow \sin p = \sin p$$

$$٣) \sin p + \frac{1}{p} = \sin p \Rightarrow \sin p = \sin p$$

* مثال ٢: - جرد ٢: (٢) $\left[\frac{9 - 5u}{3 - u} \right] = u \left[\frac{u + 4 + 5u}{3 + u} \right] = u \left[\frac{6u + 4}{3 + u} \right]$ (٣) $\left[\frac{u + 4 + 5u}{3 + u} \right] = u \left[\frac{6u + 4}{3 + u} \right]$ (٤) $\left[\frac{1 - 3u}{5 - u} \right]$

حل ٢: (٤) $\left[\frac{9 - 5u}{3 - u} \right] = u \left[\frac{(3 + u)(\cancel{3 - u})}{\cancel{3 - u}} \right] = u \left[\frac{9 - 5u}{3 - u} \right]$
 $A + u + 3 + \frac{5u}{3} =$

(٥) $\left[\frac{u + 4 + 5u}{3 + u} \right] = u \left[\frac{(3 + u)u}{3 + u} \right] = u \left[\frac{u + 4 + 5u}{3 + u} \right]$
 $A + \frac{5u}{3} = u \left[\frac{u + 4 + 5u}{3 + u} \right]$

(٦) $\left[\frac{1 - 3u}{5 - u} \right] = u \left[\frac{(5 - u)(\cancel{5 - u})}{\cancel{5 - u}} \right] = u \left[\frac{1 - 3u}{5 - u} \right]$
 $A + u + 5 + \frac{3u}{5} =$

* ملاحظة ٢: $\left[\frac{A + (u)u}{u} \right] = u \left[\frac{A + (u)u}{u} \right]$

* مثال ٣: - إذا كان $\left[\frac{A + (u)u}{u} \right] = u \left[\frac{A + (u)u}{u} \right]$ في (١) $\left[\frac{A + (u)u}{u} \right] = u \left[\frac{A + (u)u}{u} \right]$

الحل ٣: - $\left[\frac{A + (u)u}{u} \right] = u \left[\frac{A + (u)u}{u} \right]$ أي $u = (u)u$ $0 + 5u + 3 =$

$u + 5 + 3 = (u)u$

$u = 0 + 5 + 1 = 0 + (1)5 + (1)1 = (1)u$

$u = 5 + 3 = (1)5 + (1)3 = (1)u$

* مثال ٤: - إذا كان $\left[\frac{A + (u)u}{u} \right] = u \left[\frac{A + (u)u}{u} \right]$ في (٤) $\left[\frac{A + (u)u}{u} \right] = u \left[\frac{A + (u)u}{u} \right]$

الحل ٤: - $\left[\frac{A + (u)u}{u} \right] = u \left[\frac{A + (u)u}{u} \right]$

$0 - u + 6 = (u)u$

$19 = 0 - (4)6 = (4)u$

(٥)

* مثال ٥:- إذا كان $\left[\frac{c-s}{1-s} = s \right]$ جد $\frac{s}{s}$

الحل ٥:- بما أن s هو $\left[\frac{c-s}{1-s} = s \right]$ $\Leftrightarrow \frac{s}{s} = \frac{c-s}{1-s}$

* مثال ٦:- s (س) = $\left[\frac{c+s}{3+s} = s \right]$ جد s (١)

الحل ٦:- s (س) = $\frac{c+s}{3+s} \Leftrightarrow \frac{c}{3+(1)} = \frac{c+1}{3+(1)} = s$ (١) $\Rightarrow \frac{c}{8} = s$

* مثال ٧:- إذا كانت $s = 6s^2 + 4s + 1$ وكان $v = 1$ جد s (٣)

الحل ٧:- s (س) = $\left[\frac{c+s}{3+s} = s \right]$

$$\left[\frac{c+s}{3+s} = s \right] = 6s^2 + 4s + 1$$

$$A + \frac{c}{3} + \frac{c}{c} = A + \frac{c}{3} + \frac{c}{c} = 6s^2 + 4s + 1$$

لدينا A نستفيد $s = 1$ $v = 1$

$$A + 1 = v \Leftrightarrow A + 1(1) + 1(1) = v$$

$$\boxed{A = 1} \Leftrightarrow$$

$$s = 1 = \frac{c}{3} + \frac{c}{c} + \frac{c}{c}$$

$$1 = \frac{c}{3} + \frac{c}{c} + \frac{c}{c} = \frac{c}{3} + 1 + 1 = \frac{c}{3} + 2 \Leftrightarrow \frac{c}{3} = -1 \Rightarrow c = -3$$

* سؤال ٨:- إذا كانت $s = 6s^2 + 4s + 1$ وكان $s = 1$ جد s (٣)

الحل ٨:- الجواب (٣٦)

مثال ٥:- إذا كان ميل المماس الممّكن، الاقتران $(س، ص)$ عند النقطة $(س، ص)$ يساوي $٣س + ٥$ وكان $س$ يمر بالنقطة $(١، ٢)$ نجد قاعدة الاقتران $(س، ص)$.

الحل ٥:- ميل المماس = $ص'(س) = ٣س + ٥$

$$ص(س) = [ص'(س)س + ص(١)] = [٣س + ٥ + ٣(١) + ٥] = ٣س + ٨$$

لإيجاد $ص$ نستفيد من أنه $ص$ يمر بالنقطة $(١، ٢)$ $\Leftrightarrow$ أي أن $ص(١) = ٢$

$$٢ = ٣(١) + ٥ + ٨ \Leftrightarrow ٢ = ١٦ + ٨ \Leftrightarrow ٨ = ٨$$

$$\therefore [ص(س) = ٣س + ٨]$$

* مثال ٦:- ليحرك جسم بسرعة $ص = ٢س + ٥$ ، جرد المسافة المقطوعة بعد مرور ٤ ثواني علماً بأن $ص(١) = ٣$

$$\text{الحل ٦:-} \quad ص(١) = ٣ \Rightarrow [ص(١) = ٢(١) + ٥] = ٧$$

$$\Leftrightarrow ٣ = ٧ + ٥ \Leftrightarrow ٣ = ١٢$$

$$\therefore ٣ + ٢س + ٥ = ١٢$$

$$٣ = ١٢ - ٥ - ٢ = ١٧ - ٢ = ١٥$$

* سؤال ٦:- ليحرك جسم بحيث أنه سرعته $ص = ٣س + ٨$ ، جرد المسافة المقطوعة بعد ١٥ ثانية علماً بأن $ص(١) = ١٥$

الإجابة ١٦

ملاحظة:-
 مشتقة المسافة = السرعة
 مشتقة السرعة = التسارع
 التسارع = السرعة
 التسارع = السرعة

مثال ٥:- يتحرك جسم بحيث أن تسارعه $a = 3 + 2t$ ، بد سرعة الجسم بعد ٥ ثواني علماً بأن $x(0) = 2$.

الحل ٥:- $x = \int (3 + 2t) dt = \frac{3}{1}t + \frac{2}{2}t^2 = 3t + t^2$

$2 = x(0) = 3(0) + (0)^2 \Rightarrow 2 = 0 + 0 \Rightarrow 2 = 0$
 $\boxed{2 = 0} \Rightarrow$

$\therefore 2 + 3t + t^2 = x$

$7 = x(5) = 3(5) + (5)^2 = 15 + 25 = 40$

مثال ٦:- يتحرك جسم بحيث أن تسارعه $a = 6t + 2$ ، بد المسافة المقطوعة بعد مرور ٣ ثواني علماً بأن $x(0) = 2$ ، فن $(0) = 0$.

الحل ٦:- $x = \int (6t + 2) dt = \frac{6}{2}t^2 + \frac{2}{1}t = 3t^2 + 2t$

$2 = x(0) = 3(0)^2 + 2(0) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow 2 = 0$
 $\boxed{2 = 0} \Rightarrow$

$\therefore 2 + 3t^2 + 2t = x$

$x = \int (6t + 2) dt = \frac{6}{2}t^2 + \frac{2}{1}t = 3t^2 + 2t$

$0 = x(0) = 3(0)^2 + 2(0) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow 0 = 0$
 $\boxed{0 = 0} \Rightarrow$

$\therefore 0 + 3t^2 + 2t = x$

$0 + 3(3)^2 + 2(3) = x(3) = 27 + 6 = 33$
 $33 =$

الابتداء

الاستاذ عماد مسك
 ٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

* النكاح المأجل - المحدود -

$$\int_p^b \text{م (ب) - م (پ)} = \text{م (س)}$$

مثال - إذا كان م (س) = ٥ م (ب) = ٤ م (پ) = ١٠ نجد $\int_p^b \text{م (س)}$

الحل - $\int_p^b \text{م (س)} = \text{م (ب) - م (پ)} = ٤ - ١٠ = -٦$

مثال - إذا كان م (پ) = ٢ م (ب) = ١٧ نجد م (ب)

الحل - $\int_p^b \text{م (س)} = \text{م (ب) - م (پ)}$

$$١٧ = \text{م (ب) - م (پ)} = ٢ \Rightarrow \text{م (ب)} = ١٩$$

$$\boxed{\text{م (ب)} = ١٩}$$

* قاعدة - $\int_p^b \text{م (س)} = \text{م (ب) - م (پ)}$ حيث م ثابت

مثال - نجد $\int_2^3 \text{م (س)}$ م (س) = ٢ م (ب) = ٢ م (پ) = ٢

$$\int_2^3 \text{م (س)} = \text{م (ب) - م (پ)} = ٢ - ٢ = ٠$$

$$\int_2^3 \text{م (س)} = \text{م (ب) - م (پ)} = ٢ - ٢ = ٠$$

مثال - إذا كان م (ب) = ١٨ نجد م (ب)

الحل - $\int_p^b \text{م (س)} = \text{م (ب) - م (پ)} = ١٨ \Rightarrow \text{م (ب)} = ١٨$

مثال - إذا كان م (ب) = ٢ نجد م (ب)

الحل - $\int_p^b \text{م (س)} = \text{م (ب) - م (پ)} = ٢ \Rightarrow \text{م (ب)} = ٢$

مثال ٥ - إذا كان $\int_p^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$ فما قيمة p ؟؟

الحل :- $\int_p^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = (p-1) \Rightarrow 1 = p-1$

$$\boxed{0 = p} \Leftrightarrow p \neq 0 \Leftrightarrow$$

* قاعدة :- $\int_p^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{x} \Big|_p^{\infty} = \frac{1}{\infty} - \frac{1}{p} = 0 - \frac{1}{p} = -\frac{1}{p}$

مثال ٥ - جد التكاملات التالية :-

(١) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{x} \Big|_1^{\infty} = \frac{1}{\infty} - \frac{1}{1} = 0 - 1 = -1$

(٢) $\int_{-1}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{x} \Big|_{-1}^{\infty} = \frac{1}{\infty} - \frac{1}{-1} = 0 + 1 = 1$

(٣) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{-2x^2} \Big|_1^{\infty} = \frac{1}{-2 \cdot \infty^2} - \frac{1}{-2 \cdot 1^2} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \left(\frac{1}{x} \right)' - \frac{1}{x^2} =$$

$$3 = 0 + 3 =$$

(٤) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{x} \Big|_1^{\infty} = \frac{1}{\infty} - \frac{1}{1} = 0 - 1 = -1$

(٥) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{x} \Big|_1^{\infty} = \frac{1}{\infty} - \frac{1}{1} = 0 - 1 = -1$

(٦) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{x} \Big|_1^{\infty} = \frac{1}{\infty} - \frac{1}{1} = 0 - 1 = -1$

$$(4) \int_1^2 \frac{3}{x^2} dx = 3 \int_1^2 x^{-2} dx = 3 \left[-x^{-1} \right]_1^2 = 3 \left[-\frac{1}{2} - \left(-1 \right) \right] = 3 \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2}$$

مثال ٥ - إذا كان $u = (x)^2$ ، $du = 2x dx$ ، $x = \sqrt{u}$ ، $dx = \frac{1}{2\sqrt{u}} du$

الحل - $\int_1^2 \frac{3}{x^2} dx = 3 \int_1^2 x^{-2} dx = 3 \left[-x^{-1} \right]_1^2 = 3 \left[-\frac{1}{2} - \left(-1 \right) \right] = 3 \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2}$

مثال ٦ - إذا كان $u = (x)^2$ ، $du = 2x dx$ ، $x = \sqrt{u}$ ، $dx = \frac{1}{2\sqrt{u}} du$

الحل - $\int_1^2 \frac{3}{x^2} dx = 3 \int_1^2 x^{-2} dx = 3 \left[-x^{-1} \right]_1^2 = 3 \left[-\frac{1}{2} - \left(-1 \right) \right] = 3 \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2}$

مثال ٧ - إذا كانت $u = (x)^2$ ، $du = 2x dx$ ، $x = \sqrt{u}$ ، $dx = \frac{1}{2\sqrt{u}} du$

الحل - $\int_1^2 \frac{3}{x^2} dx = 3 \int_1^2 x^{-2} dx = 3 \left[-x^{-1} \right]_1^2 = 3 \left[-\frac{1}{2} - \left(-1 \right) \right] = 3 \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2}$

$\int_1^2 \frac{3}{x^2} dx = 3 \int_1^2 x^{-2} dx = 3 \left[-x^{-1} \right]_1^2 = 3 \left[-\frac{1}{2} - \left(-1 \right) \right] = 3 \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2}$

$\left(\frac{3}{2} \right) - \left(\frac{3}{2} \right) = 0$

$\left(\frac{3}{2} \right) - \left(\frac{3}{2} \right) = 0$

$3 - 3 = 0$

$3 = 3$

(11)

* خواص التكامل المحدود :-

$$(1) \int_p^p f(x) dx = 0$$

مثال :- $\int_1^2 (x^2 + \frac{1}{x}) dx = 0$

$$\int_1^2 (x^2 + \frac{1}{x}) dx = 0$$

$$(2) \int_p^p f(x) dx = 0$$

مثال :- إذا كان $\int_1^2 f(x) dx = 17$ فإنه $\int_2^1 f(x) dx = -17$

مثال :- إذا كان $\int_1^2 f(x) dx = 4$ فإنه $\int_2^1 f(x) dx = -4$

$$(3) \int_p^p f(x) dx = 0$$

مثال :- إذا كان $\int_1^2 f(x) dx = 12$ نجد ما يلي :-

$$\int_1^2 0 \cdot f(x) dx = 12 \times 0 = 0$$

$$\int_1^2 \frac{1}{2} \cdot f(x) dx = 12 \times \frac{1}{2} = 6$$

$$\int_1^2 2 \cdot f(x) dx = 12 - 2 = 10$$

مثال :- أوجد التكاملات التالية :-

$$\int_1^2 (x^2 - \frac{1}{x}) dx = \int_1^2 x^2 dx - \int_1^2 \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 - \ln x \Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \ln 2 - \frac{1}{3} + \ln 1 = \frac{7}{3} - \ln 2$$

$$18 = 9 + 16 =$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

$$18 = (2)12 = (17-9)12 =$$

$$\frac{\lambda}{c} + \frac{\lambda}{\Sigma} = \int_c^{\Sigma} \frac{\lambda}{u} = \int_c^{\Sigma} \frac{1 - \lambda}{1 - u} = \sigma s \left(\frac{1 - \lambda}{1 - u} \right) \Big|_c^{\Sigma} = \sigma s \frac{1 - \lambda}{1 - \Sigma} \Big|_c^{\Sigma}$$

$$r = \Sigma + r_- =$$

$$\sigma s (u) \Big|_p^{\Sigma} + \sigma s (u) \Big|_p^{\Sigma} = \sigma s \left((u) \Big|_p^{\Sigma} + (u) \Big|_p^{\Sigma} \right) \Big|_p^{\Sigma}$$

$$\int_c^{\Sigma} \sigma - \frac{\sigma c}{c} + \frac{\sigma \Sigma}{\Sigma} = \sigma s \left(1 - \sigma c + \sigma \Sigma \right) \Big|_c^{\Sigma} \quad \text{مثال ٥-٢}$$

$$\left((c-) - (c-) + (c-) \frac{\Sigma}{\Sigma} \right) - \left((c-) - (c-) + (c-) \frac{\Sigma}{\Sigma} \right) = \int_c^{\Sigma} \sigma - \sigma c + \sigma \Sigma =$$

$$\left((c-) - (c-) + (c-) \frac{\Sigma}{\Sigma} \right) - \left((c-) - (c-) + (c-) \frac{\Sigma}{\Sigma} \right) =$$

$$\frac{1 \Sigma}{\Sigma} = \frac{1 \Sigma}{\Sigma} + \Sigma = \left((c-) - (c-) + (c-) \frac{\Sigma}{\Sigma} \right) - \left((c-) - (c-) + (c-) \frac{\Sigma}{\Sigma} \right) =$$

$$\int_c^{\Sigma} \sigma - \frac{1 \Sigma}{\Sigma} + \frac{\sigma \Sigma}{\Sigma} = \sigma s \left(\sigma - \frac{1 \Sigma}{\Sigma} + \sigma \Sigma \right) \Big|_c^{\Sigma} = \sigma s \left(\sigma + \sigma \Sigma \right) \Big|_c^{\Sigma}$$

$$\left((c-) - (c-) + (c-) \frac{\Sigma}{\Sigma} \right) - \left((c-) - (c-) + (c-) \frac{\Sigma}{\Sigma} \right) = \int_c^{\Sigma} \sigma - \sigma c + \sigma \Sigma =$$

$$7 \Sigma = (1 + 0) - (0 + 1) =$$

$$p \text{ مثال ٥-٣ إذا كان } \sigma s = \sigma s (v + \sigma c) \Big|_p^{\Sigma}$$

$$\sigma s = (v + 1) - (p v + \sigma p) = \int_p^{\Sigma} \sigma - v + \sigma = \sigma s \left(v + \sigma c \right) \Big|_p^{\Sigma}$$

$$= (0 - p)(1 + p) \Leftarrow \cdot = 1 - p v + \sigma p \Leftarrow \sigma s = 1 - p v + \sigma p \Leftarrow$$

$$\boxed{0 = p} \text{ و } \sigma$$

$$= 1 + p \Leftarrow$$

$$\boxed{1 - = p}$$

مثال ٥:- إذا كان $\int_1^0 f(x) dx = 1$ ، $\int_1^0 f(x) dx = -1$ أو $\int_0^1 f(x) dx = 1$.

$$\int_1^0 f(x) dx = - \int_0^1 f(x) dx = -1$$

$$\int_1^0 f(x) dx = - \int_0^1 f(x) dx = -1$$

$$\int_1^0 f(x) dx = - \int_0^1 f(x) dx = -1$$

$$\int_1^0 f(x) dx = - \int_0^1 f(x) dx = -1$$

مثال ٦:- إذا كان $\int_1^0 f(x) dx = 1$ ، فجد $\int_0^1 f(x) dx$.

$$\int_1^0 f(x) dx = - \int_0^1 f(x) dx = 1$$

$$\int_0^1 f(x) dx = -1$$

$$\int_1^0 f(x) dx = - \int_0^1 f(x) dx = 1$$

* خاصية الإضافة :-

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

مثال ٧:- إذا كان $\int_1^0 f(x) dx = 1$ ، $\int_1^0 f(x) dx = -1$ ، فجد $\int_0^1 f(x) dx$.

$$\int_1^0 f(x) dx = - \int_0^1 f(x) dx = 1$$

$$\int_0^1 f(x) dx = -1$$

مثال ٢٠ - إذا كان $\int_1^2 f(x) dx = 10$ ، $\int_1^3 f(x) dx = 11$ فجد $\int_2^3 f(x) dx$

الحل ٢٠ - $\int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx = \int_1^3 f(x) dx$

$$2 - = 11 + 10 - =$$

$$12 - = 3 \times 2 - = \int_2^3 f(x) dx$$

مثال ٢١ - إذا كان $\int_1^3 f(x) dx = 10$ ، $\int_1^2 f(x) dx = 7$ فجد $\int_2^3 f(x) dx$

الحل ٢١ - $\int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx = \int_1^3 f(x) dx$

$$(7 + 0 + 1) - (7 + 10 + 9) =$$

$$18 = 7 - 10 - 9 + 26 =$$

الاستاذ علاء مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

سؤال ٢٢ - أوجد كلًا من التكاملات التالية :-

(١) $\int_1^2 \frac{x^2 - 2}{x - 1} dx$ - الإجابة (١٤)

(٢) إذا كان $\int_1^2 f(x) dx = \frac{1}{3}$ فجد $\int_1^3 f(x) dx$ - الإجابة $2 = A$

(٣) إذا كان $\int_1^2 f(x) dx = 10$ فجد $\int_1^3 f(x) dx$ - الإجابة ٢٠

(٤) $\int_1^2 f(x) dx = 10$ ، $\int_1^3 f(x) dx = 11$ فجد $\int_2^3 f(x) dx$ - الإجابة ١٢

(٥) $\int_1^2 f(x) dx = 10$ ، $\int_1^3 f(x) dx = 11$ فجد $\int_2^3 f(x) dx$ - الإجابة ١٢

(٦) $\int_1^2 f(x) dx = 10$ ، $\int_1^3 f(x) dx = 11$ فجد $\int_2^3 f(x) dx$ - الإجابة ١٢

سوال :- اذا كان $\{ \sigma^0, \sigma^1, \sigma^2 \} = (\sigma)^n$

$$\left. \begin{array}{l} 3 > \sigma \geq 1, \sigma^2 > \sigma \\ 0 > \sigma \geq 3, 0 + \sigma^2 \end{array} \right\}$$

و $s(\sigma)^0 \int_1 \sigma$

و $s(0 + \sigma^2) \int_3 + s(\sigma^2 \sigma^3) \int_1 = s(\sigma)^0 \int_1$ - و σ^2

$$0 \int_3 \sigma + \sigma^2 + 1 \int_1 \sigma =$$

$$\left(\binom{3}{0} \sigma - \binom{3}{1} \sigma - (\binom{0}{0} \sigma + \binom{0}{0} \sigma) \right) + \left(\binom{3}{1} - \binom{3}{3} \right) =$$

$$((3) - 0) + (1 - 1) =$$

$$(0) + 1 =$$

$$1 =$$

الاستاذ: علاء مسعود
0795153669

* التكامل بالتعويض :-

تستخدم طريقة التكامل بالتعويض عند وجود تكامل على الصورة $\int P(x) \cdot Q(x) \cdot R(x) \cdot S(x)$ بحيث يكون $P(x)$ مشتقة ذلك المقدار الموجود في $Q(x)$ أو $R(x)$ أو $S(x)$.

نفرض المقدار $u =$ وتكون $du =$ مشتقة ذلك المقدار

مثال ١ - جـ $\int (x^3 + 5x^2 + 6x + 7) \cdot (x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 7x) \cdot (x^5 + 5x^4 + 6x^3 + 7x^2) \cdot (x^6 + 5x^5 + 6x^4 + 7x^3)$

الحل :- نفرض $u = x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 7x$ $\Rightarrow \frac{du}{dx} = 4x^3 + 15x^2 + 12x + 7$

$\frac{du}{dx} = 4x^3 + 15x^2 + 12x + 7$

$\int (x^3 + 5x^2 + 6x + 7) \cdot (x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 7x) \cdot (x^5 + 5x^4 + 6x^3 + 7x^2) \cdot (x^6 + 5x^5 + 6x^4 + 7x^3)$

بإعادة ما فرضنا $= \int \frac{(x^3 + 5x^2 + 6x + 7)}{4x^3 + 15x^2 + 12x + 7} \cdot du$

ب) $\int \frac{x^3}{x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 7x} \cdot du$

الحل :- نفرض $u = x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 7x$ $\Rightarrow \frac{du}{dx} = 4x^3 + 15x^2 + 12x + 7$

$\int \frac{x^3}{x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 7x} \cdot du = \int \frac{1}{4x^3 + 15x^2 + 12x + 7} \cdot du$

$\int \frac{1}{4x^3 + 15x^2 + 12x + 7} \cdot du = \int \frac{1}{4x^3 + 15x^2 + 12x + 7} \cdot du$

سؤال ٢ - جـ التكاملات التالية :-

أ) $\int (x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 7x) \cdot (x^5 + 5x^4 + 6x^3 + 7x^2) \cdot (x^6 + 5x^5 + 6x^4 + 7x^3)$

مثال ٤ - جبر التكاملات التالية :-

$$(4) \int_0^1 s(1+s^2) ds$$

الحل :- نفرض $u = 1+s^2 \Rightarrow \frac{du}{ds} = 2s \Rightarrow \frac{du}{2} = s ds$

نقوم بتغيير الحدود :- عندما $s = 0 \Rightarrow u = 1 + (0)^2 = 1$
وعندما $s = 1 \Rightarrow u = 1 + (1)^2 = 2$

$$\int_0^1 s(1+s^2) ds = \int_1^2 \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \left[u \right]_1^2 = \frac{1}{2} (2 - 1) = \frac{1}{2}$$

$$(5) \int_0^1 s(1+s^2)^2 ds = \int_1^2 \frac{1}{3} u^2 du = \frac{1}{3} \left[\frac{u^3}{3} \right]_1^2 = \frac{1}{9} (8 - 1) = \frac{7}{9}$$

الحل :- نفرض $u = 1+s^2 \Rightarrow \frac{du}{ds} = 2s \Rightarrow \frac{du}{2} = s ds$

عندما $s = 0 \Rightarrow u = 1$
عندما $s = 1 \Rightarrow u = 2$

$$\int_0^1 s(1+s^2)^2 ds = \int_1^2 \frac{1}{3} u^2 du = \frac{1}{3} \left[\frac{u^3}{3} \right]_1^2 = \frac{1}{9} (8 - 1) = \frac{7}{9}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+s^2)^2} ds = \int_1^2 \frac{1}{u^2} \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{u} \right]_1^2 = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{1}{4}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+s^2)^2} ds = \frac{1}{4}$$

* سؤال :- أوجد كلا من التكاملات التالية :-

$$(1) \int_0^1 s(1+s^2) ds$$

$$(2) \int_0^1 \frac{s}{1+s^2} ds$$

$$4s^2(1-s^2)^2 \gamma_1 \in$$
$$1 = \omega \Leftarrow 1 = \omega \text{ line}$$

$$2 = \omega \Leftarrow 2 = \omega$$

$$\frac{1 \cdot c_p}{10} = \frac{1 \cdot c_p}{0} \times \frac{1}{10} = \left(\frac{1}{0} - \frac{1 \cdot c_p}{0} \right) \frac{1}{10} = \left(\frac{0(1)}{0} - \frac{0(2)}{0} \right) \frac{1}{10} =$$

$$\cos^{\frac{1}{2}}(1 + \cos) \wedge \gamma_1 = \cos \frac{\wedge}{1 + \cos \sqrt{\gamma_1}} \quad (c)$$

فرضین من $c = 1 + s \Leftrightarrow \frac{s}{s} = c \Leftrightarrow s = cs \Leftrightarrow \frac{s}{c} = s$ ————— اگر الجابیه ۱۶

سوال ۳- جزء ۴ $\int s(s+c)^s ds$ ————— الجابیه $\frac{s}{7} + \frac{(s+c)^7}{7} - \frac{(s+c)^8}{8}$

$\frac{0}{\infty} = 0$ ————— $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{0}{1+x^2} = 0$ ✓

$\frac{1}{3}$ الجوابه - - - - - $\frac{1}{1+0.03}$

ମନୋରଞ୍ଜନ ଓ ଶିକ୍ଷା

اگرچه فرض کنیم $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

مثال :- جد $\int_0^{\pi} \cos (x + \frac{\pi}{4}) dx$ کا

الحل :- نفرض $u = \frac{u^2}{u^2} \leftarrow$ $u^2 = u^2 \leftarrow u^2 = u^2 \leftarrow u^2 = u^2$

$$P_1 + \frac{C}{1+r} \frac{1}{1+r} = \frac{C}{1+r} \left[\frac{1}{1+r} + \frac{1}{1+r} + \frac{1}{1+r} + \dots \right] = \frac{C}{1+r} \left[\frac{1}{1+r} \right] \left[1 + 1 + 1 + \dots \right] = \frac{C}{1+r} \left[\frac{1}{1+r} \right] \left[\frac{1}{1-r} \right] = \frac{C}{(1+r)^2} \left[\frac{1}{1-r} \right]$$

$$u_s (1 + u^3 + u^5) \text{ لہذا } (1 + u^5) \text{ ب. ۛ}$$

الحل: نفرض $u = 1 + \sigma^2 + \sigma^4 = \frac{u^2}{u} \Leftrightarrow u + \sigma^2 = \frac{u^2}{u} \Leftrightarrow u^2 = u + \sigma^2$

$$\text{CPS up lip. } \gamma_{\frac{1}{w}} = \frac{\text{CPS up lip. } 1 + \cancel{v}}{(1 + \cancel{v})^r} \ll$$

$$A + (1 + 0.05 + 0.05) \frac{1}{r} = A + 0.1 \frac{1}{r} =$$

(۴) جہاں سے

مثال:- نفرت = ص = جاس $\Leftarrow \frac{ص}{جاس} = جاس \Leftarrow \frac{ص}{جاس} = ص$

$$p + \frac{u \cdot \dot{p}}{0} = p + \frac{0 \cdot \dot{p}}{0} = u \cdot \dot{p} = \frac{u \cdot \dot{p}}{1} \leftarrow$$

$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 + q \phi \right) = -q \nabla \cdot \mathbf{A}$

اگر - نفوذ $\psi = \psi + \psi = \psi \leftarrow \frac{\psi}{\psi} \leftarrow 1 + \psi = \frac{\psi}{\psi} \leftarrow \psi = \psi \leftarrow \frac{\psi}{1 + \psi}$

$$P_i + \frac{v_p}{c} = v_{ps} \left[\frac{1}{\gamma} \right] = \frac{v_{ps}}{(0+0)} \Rightarrow$$

$$A + \text{url.} \frac{1}{c} =$$

$$\textcircled{\text{ب}} \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$$

عندما $x=1$ $y=1$
 عندما $x=\infty$ $y=0$

الحل:- نفرض $y = \frac{1}{x^2}$ $\Rightarrow y = x^{-2}$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^{\infty} = 0 - (-1) = 1$$

سؤال:- أوجد $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx$ الإجابة: $\frac{1}{2}$

مثال:- إذا عرفت أن $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$ ، فاحسب $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx$

الحل:- نفرض $y = \frac{1}{x^2}$ $\Rightarrow y = x^{-2}$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$
 عندما $x=1$ $y=1$
 عندما $x=\infty$ $y=0$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx = \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_1^{\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

مثال:- إذا كان ميل المماس لمنحنى $y = \frac{1}{1+x^2}$ وكانت $y(0) = 1$ ، فاحسب $y(1)$

الحل:- $y(0) = 1$ $\Rightarrow y = \frac{1}{1+x^2}$

الحل:- نفرض $y = \frac{1}{1+x^2}$ $\Rightarrow y = (1+x^2)^{-1}$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$
الإجابة: $\frac{1}{2}$

مثال:- إذا كان $y(0) = 1$ ، فاحسب $\int_0^1 y dx$

الحل:- نفرض $y = \frac{1}{1+x^2}$ $\Rightarrow y = (1+x^2)^{-1}$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$
 عندما $x=0$ $y=1$
 عندما $x=1$ $y=\frac{1}{2}$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \left[\arctan x \right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

مثال ٥ - إذا كانت سرعة جسم $v = c(1 + n^2)$ وكانت
 فن $n = 1$ نجد المسافة المقطوعة بعد مرور ثانية واحدة .

الحل ٥ - فن $n = 1$ $\Rightarrow v = c(1 + 1^2) = 2c$

نقصد $v = 2c \Rightarrow c = \frac{v}{2} = \frac{2c}{2} = c$

$\Rightarrow \frac{v}{2} = c \Rightarrow v = 2c$

$x + \frac{v}{2} = x + \frac{2c}{2} = x + c$

$x + (1 + n^2) =$

لكن فن $n = 1$

$x + 1 = 1 \Rightarrow x + (1 + 1^2) = 1 \Rightarrow$

$\boxed{x = 1} \Rightarrow$

$\therefore x + (1 + n^2) = 1$ فن $n = 1$

وبعد مرور ثانية واحدة

$x + 1 = 1 \Rightarrow x + (1 + 1^2) = 1$ فن $n = 1$

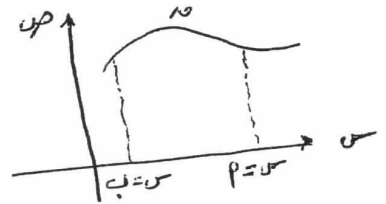
$x + 1 =$

$x + 1 =$

(1)

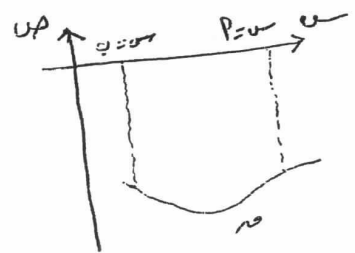
* المساحة :- هي أحد تطبيقات التكامل
 (١) إذا كان $y = f(x)$ واقفاً فوق محور السينات فإن $\int_a^b f(x) dx$ يكون موجباً

ويكون $\int_a^b f(x) dx = \text{المساحة المحصورة}$



(٢) إذا كان $y = f(x)$ واقفاً تحت محور السينات فإن $\int_a^b f(x) dx$ يكون سالباً

ويكون $|\int_a^b f(x) dx| = \text{المساحة}$

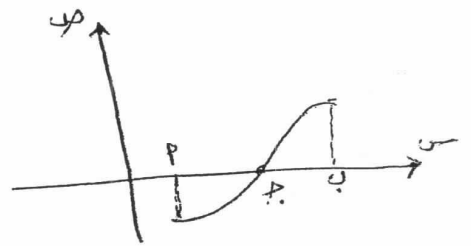


(٣) إذا كان $y = f(x)$ يعطى محور السينات في $[a, b]$ فإننا نقوم بتجزئة التكامل جزأين :

$$\text{حيث : } \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

$$\text{فتكون المساحة الكلية} = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$



مثال :- أوجد المساحة المحصورة بين $y = x^2 - 4$ و $y = x$ و $x = -2$ و $x = 4$

الحل :- لمعرفة نقاط تقاطع $y = x^2 - 4$ مع $y = x$ نضع $y = x^2 - 4 = x$ حيث

$$x^2 - 4 = x \Rightarrow x^2 - x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\Rightarrow \int_{-2}^4 (x^2 - 4 - x) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 4x - \frac{x^2}{2} \right]_{-2}^4 = \left(\frac{64}{3} - 16 - 8 \right) - \left(-\frac{8}{3} + 8 - 2 \right) = \frac{64}{3} - 24 - 8 + \frac{8}{3} - 6 + 2 = \frac{64+8}{3} - 30 = \frac{72}{3} - 30 = 24 - 30 = -6$$

$$= (16 + 8) - (8 + 24) = 24 - 32 = -8$$

مثال ٥ - أوجد المساحة المحصورة بين $x = 3 + \sqrt{3}$ ومحور السينات والمستقيمين $x = 1$ ، $x = 6$

الحل - نجد نقاط التقاطع مع محور السينات

$x = 0 \Rightarrow 3 + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \sqrt{3} = -3 \Rightarrow$ لا يوجد لها حل أي أنه من لا يقطع محور السينات

$$\begin{aligned} \Rightarrow M &= \int_1^6 (3 + \sqrt{3})^2 dx = \int_1^6 \left(9 + 6\sqrt{3} + 3 \right) dx = \int_1^6 (12 + 6\sqrt{3}) dx \\ &= \left(12x + 6\sqrt{3}x \right) \Big|_1^6 = (72 + 36\sqrt{3}) - (12 + 6\sqrt{3}) = 60 + 30\sqrt{3} \end{aligned}$$

مثال ٦ - أوجد المساحة المحصورة بين $x = 1 + \sqrt{3}$ ومحوري السينات والمعادن والمستقيم $x = 3$

الحل - $x = 0 \Rightarrow 1 + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \sqrt{3} = -1 \Rightarrow$ لا يوجد لها حل أي أنه من (م) لا يقطع محور السينات

$$\Rightarrow M = \int_1^3 (1 + \sqrt{3})^2 dx = \int_1^3 (1 + 2\sqrt{3} + 3) dx = \int_1^3 (4 + 2\sqrt{3}) dx$$

مثال ٧ - أوجد المساحة المحصورة بين $x = 16 - \sqrt{3}$ ومحور السينات والمستقيمين $x = 0$ ، $x = 3$

الحل - $x = 16 - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \sqrt{3} = 16 \Rightarrow$ لا يوجد لها حل أي أنه من (م) لا يقطع محور السينات

$$\Rightarrow M = \int_0^3 (16 - \sqrt{3})^2 dx = \int_0^3 (256 - 32\sqrt{3} + 3) dx = \int_0^3 (259 - 32\sqrt{3}) dx$$

$$= 259 \cdot 3 - 32\sqrt{3} \cdot 3 = 777 - 96\sqrt{3}$$

$$\therefore M = \left| \int_0^3 (259 - 32\sqrt{3}) dx \right| = 777 - 96\sqrt{3}$$

مثال: أوجد المساحة المحصورة بين $y = (x-2)^2 - 6$ ومحور السينات حيث $x \in [1, 7]$

الحل: $y = (x-2)^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \Leftrightarrow x = 0$
لذلك نقوم بتجزئة التكامل:

$$A = \int_1^4 ((x-2)^2 - 6) dx = \left[\frac{(x-2)^3}{3} - 6x \right]_1^4 = \frac{1}{3} - 24 - \left(\frac{(-1)^3}{3} - 6 \right) = \frac{1}{3} - 24 - \left(-\frac{1}{3} - 6 \right) = \frac{1}{3} - 24 + \frac{1}{3} + 6 = -\frac{16}{3}$$

$$A = \int_4^7 ((x-2)^2 - 6) dx = \left[\frac{(x-2)^3}{3} - 6x \right]_4^7 = \frac{1}{3} - 42 - \left(\frac{8}{3} - 24 \right) = \frac{1}{3} - 42 - \frac{8}{3} + 24 = -\frac{37}{3}$$

$$A = -\frac{16}{3} - \frac{37}{3} = -\frac{53}{3}$$

مثال: أوجد المساحة المحصورة بين $y = (x-3)^2 - 6$ ومحور السينات

الحل: نقاط تقاطعه مع محور السينات $y = (x-3)^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ أو $x = 5$

$$A = \int_1^5 ((x-3)^2 - 6) dx = \left[\frac{(x-3)^3}{3} - 6x \right]_1^5 = \frac{8}{3} - 30 - \left(\frac{(-2)^3}{3} - 6 \right) = \frac{8}{3} - 30 - \left(-\frac{8}{3} - 6 \right) = \frac{8}{3} - 30 + \frac{8}{3} + 6 = -\frac{16}{3}$$

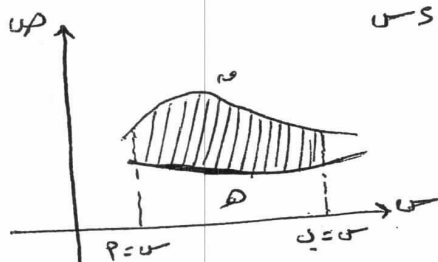
* سؤال: أوجد المساحة المحصورة بين $y = (x-4)^2 - 9$ ومحور السينات

* سؤال: أوجد المساحة المحصورة بين $y = (x-5)^2 - 4$ ومحور السينات

* إيجاد المساحة عندما تطلب المساحة بين منحنين:

نقوم بإيجاد نقاط التقاطع بين المنحنين بوضع $y = 0$

$$A = \int_p^q (f(x) - g(x)) dx$$



الاستاذ صلاح مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

سؤال :- أوجد المساحة المحصورة بين $y = (x)$ ، $y = x - 8$ ، $y = x^2$
الحل :- لإيجاد نقاط التقاطع نضع $x = 8$

$$x - 8 = x^2 \Rightarrow x^2 - x + 8 = 0 \Rightarrow x = 8 \Rightarrow y = 64$$

$$x^2 = x - 8 \Rightarrow x^2 - x + 8 = 0 \Rightarrow x = 8 \Rightarrow y = 64$$

$$x^2 = x - 8 \Rightarrow x^2 - x + 8 = 0 \Rightarrow x = 8 \Rightarrow y = 64$$

$$\frac{1}{3} \int_{-8}^8 (x^3 - x^2 + 8x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + 4x^2 \right]_{-8}^8 = \left(\frac{4096}{4} - \frac{512}{3} + 256 \right) - \left(-\frac{4096}{4} + \frac{512}{3} - 256 \right) = \frac{76}{3}$$

سؤال :- أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران $y = (x)$ ، $y = x - 1$ ، $y = x^2$

الحل :- $x - 1 = x^2 \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1$

$$x^2 = x - 1 \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1$$

$$\frac{1}{3} \int_{-1}^1 (x^3 - x^2 + x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^1 = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{3}$$

سؤال :- أوجد المساحة المحصورة بين $y = x$ ، $y = 9$ ، $y = x^2$

الحل :- $x = 9 \Rightarrow y = 81$

$$x^2 = 9 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = 9$$

$$\frac{1}{3} \int_{-3}^3 (x^3 - x^2 + 9x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{9x^2}{2} \right]_{-3}^3 = \left(\frac{81}{4} - \frac{27}{3} + \frac{243}{2} \right) - \left(-\frac{81}{4} + \frac{27}{3} - \frac{243}{2} \right) = 36$$

سؤال :- أوجد المساحة المحصورة بين $y = x^2 + 4x$ ، $y = x$ ، $y = 0$

الاجابة $\boxed{\frac{16}{3}}$

سؤال :- أوجد المساحة المحصورة بين $y = x^2 + 6x$ ، $y = x$ ، $y = 0$

الاجابة $\boxed{\frac{12}{3}}$

مثال ٥: أوجد المساحة المحصورة بين $y = \sin x$ ، $y = \cos x$ من $x = 0$ إلى $x = \frac{\pi}{2}$

الحل ٥: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx = 0$ $\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx = 0$
 $\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx = 0$

$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx = 0$ $\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx = 0$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx = 0$ $\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx = 0$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx = 0$ $\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx = 0$

$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx = 0$ $\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx = 0$

مثال ٦: اوجد المساحة المحصورة بين $y = \sin x$ و $y = \cos x$ في الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$ باستخدام:

(١) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx = 0$

(٢) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx = 0$ لأن $\sin x \geq \cos x$ في الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$

(٣) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx = 0$ $\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx = 0$

(٤) المساحة الكلية المحصورة بين $y = \sin x$ و $y = \cos x$ في الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$

المساحة الكلية = $0 + 0 = 0$

مثال ٧: اوجد المساحة المحصورة بين $y = \sin x$ و $y = \cos x$ في الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$

إذا كانت المساحة بين $y = \sin x$ و $y = \cos x$ في الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$ وكانت:

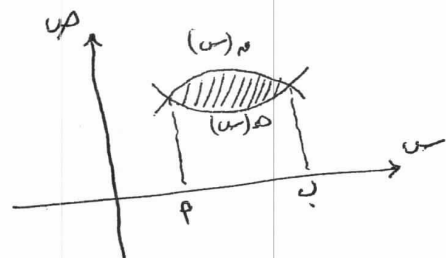
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx = 0$ $\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx = 0$

الحل ٧: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx = 0$ $\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx = 0$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx = 0$ $\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx = 0$

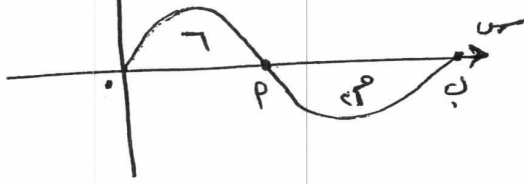
$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx = 0$ $\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx = 0$

(٧)



* مثال: صفداً على الشكل التالي:

إذا كان $\int_0^2 f(x) dx = -2$ نجد:



$$\textcircled{1} \int_0^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx = \int_0^4 f(x) dx$$

$$-2 = -2 - 6 = 10$$

$$\textcircled{2} \text{ المساحة } = \int_0^2 f(x) dx = 10$$

$$\textcircled{3} \int_2^4 f(x) dx = - \int_4^2 f(x) dx = 10$$

$$\textcircled{4} \int_0^4 f(x) dx = 6 - 4 = 2$$

⑤ المساحة المحصورة بين $f(x)$ ومحور السين في $[0, 4]$

$$16 = 10 + 6 = 10 + 6 = 16$$

الابداع

الاستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

* تطبيقات اقتصادية على التكامل :-

* د (س) = $\int (س) دس$ أي أنه اليراد التكلي باوي تكامل اليراد الحدي

* مثال :- اذا كان اليراد الحدي هو د (س) = $س^3 + س^2 + س + 3$ فجد اليراد التكلي ؟

الحل :- د (س) = $\int (س^3 + س^2 + س + 3) دس = \frac{س^4}{4} + \frac{س^3}{3} + \frac{س^2}{2} + 3س + ج$

د يكون د (0) = 0 $\Leftrightarrow \boxed{ج = 0}$

$\Leftrightarrow$ د (س) = $\frac{س^4}{4} + \frac{س^3}{3} + \frac{س^2}{2} + 3س$

* سؤال :- ~~جد~~ اليراد التكلي لليراد الحدي د (س) حيث :-

(م) د (س) = $س^4 + س^3 - 5س - 10$ (ن) د (س) = $س^4 - 5س - 10$

* مثال :- اذا كان اليراد الحدي هو د (س) = $س^4 + س^3 + س^2 + س + 1$ فجد اليراد التكلي الناتج عن بيع 10 قطع .

الحل :- د (س) = $\int (س^4 + س^3 + س^2 + س + 1) دس = \frac{س^5}{5} + \frac{س^4}{4} + \frac{س^3}{3} + \frac{س^2}{2} + س + ج$

د (1) = $1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$

* مثال :- اذا كان اليراد الحدي هو د (س) = $س^3 - 3س - 10$ فجد اليراد التكلي الناتج عن بيع 10 قطعة ؟

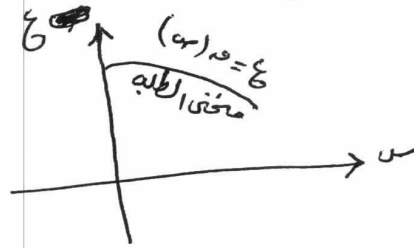
الحل :- د (س) = $\int (س^3 - 3س - 10) دس = \frac{س^4}{4} - \frac{3س^2}{2} - 10س + ج$

د (10) = $\frac{10^4}{4} - \frac{3 \cdot 10^2}{2} - 10 \cdot 10 = 2250$

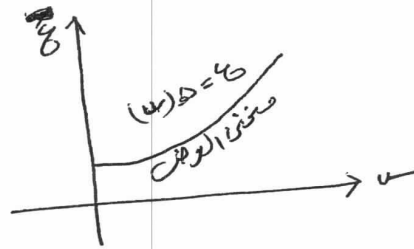
$2250 = 2250 - 200 = 2050$

* فائض المستهلك وفائض المنتج :-

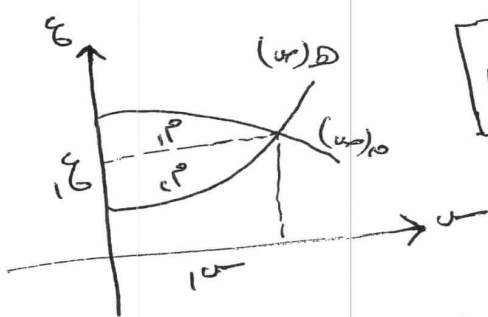
كلما زاد السعر قل الطلب ويسمى الاختلاف $= P - C$ (السعر - الطلب) حيث P عدد وحدات الطلب.



وإذا كانت Q تمثل عدد الوحدات التي ترغب الشركة في إنتاجها وسعرها P فإما الاختلاف $= P - C$ يسمى اقتران (السعر - العرض) والذي يكون عنده $P = C$ يسمى سعر التوازن وتسمى Q كمية التوازن بين العرض والطلب.



ومن خلال الشكل التالي تمثل المنطقة ABC التوفير الكلي للمستهلك ويعطى برمز F_n .



$$F_n = \int_0^Q (P - C) dQ = \int_0^Q P dQ - \int_0^Q C dQ$$

وتمثل المنطقة ABC المكسب الكلي للمنتج ويعرف هذا المكسب بفائض المنتج ويعطى بالرمز F_p .

$$F_p = \int_0^Q (C - P) dQ = \int_0^Q C dQ - \int_0^Q P dQ$$

طريقك إلى النجاح

* مثال ٥- إذا كان $ع = ٣$ (ب) $٣ - ٣ = ٠$ يحل اقتداء السعر الطلب وأنه السهولة
عند $ع = ٦$ نجد فائض المستهلك .

الحل ٥- نجد $ع = ٦$ عند $ع = ٦$ وذلك بوضع $٣ - ٣ = ٠$

$$\Leftarrow ٣ - ٣ = ٠ \Leftarrow ٦ = ٣ \Leftarrow ٦ = ٣ \Leftarrow ٦ = ٣ \Leftarrow ٦ = ٣$$

$$\Leftarrow \text{فك} = \left[٣(٣) - ٣(٣) - ٣(٣) \right] = ١٣ - ٣(٣) - ٣(٣) = ١٣ - ٩ - ٩ = -٥$$

$$= ٣ - ٣ - ١٣ = -١٣$$

$$١٤٤ = ١٣ - ١٣ = ٠$$

* مثال ٥- نجد فائض المستهلك لطيف السعر الطلب $ع = ٤$ - ٣ عند $ع = ١٣$
الحل ٥- نجد $ع = ١٣$ (كمية التوازن)

$$٤ - ٣ = ١ \Leftarrow ١٣ = ٣ \Leftarrow ١٣ = ٣ \Leftarrow ١٣ = ٣ \Leftarrow ١٣ = ٣$$

$$\boxed{٣ = ٣} \Leftarrow \boxed{٣ = ٣}$$

$$\text{فك} = \left[٣(٣) - ٣(٣) - ٣(٣) \right] = ٣(٣) - ٣(٣) - ٣(٣) = ٩ - ٩ - ٩ = -٩$$

$$٥٤ = ٣٩ - (١٠ - ١٠) = ٢٩$$

* مثال ٥- إذا كان حضي اقتداء السعر العرض $ع = ١٠$ وكان $ع = ٤$ نجد
فائض المنتج ؟؟

$$\boxed{١٠ = ١٠} \Leftarrow ١٠ = ١٠ \Leftarrow ١٠ = ١٠ \Leftarrow ١٠ = ١٠ \Leftarrow ١٠ = ١٠$$

$$\Leftarrow \text{فك} = \left[١٠(١٠) - ١٠(١٠) - ١٠(١٠) \right] = ١٠(١٠) - ١٠(١٠) - ١٠(١٠) = ١٠٠ - ١٠٠ - ١٠٠ = -١٠٠$$

$$\left[\left[١٠(١٠) - ١٠(١٠) - ١٠(١٠) \right] - ١٠(١٠) \right] = ١٠(١٠) - ١٠(١٠) - ١٠(١٠) = ١٠٠ - ١٠٠ - ١٠٠ = -١٠٠$$

$$١٠ = ١٠ - ١٠ = ٠$$

* مثال: جود فائض المنتج ملحق السعر - العرض $C = 0 + 6S = 6S$ عند $C = 9$

* الحل: نجد S $\hookrightarrow 9 = 0 + 6S \Leftrightarrow 9 = 6S \Leftrightarrow S = \frac{9}{6} = 1.5$ $\hookrightarrow$ نأخذ $S = 1.5$ $\hookrightarrow$ $C = 9$

$$\hookrightarrow \text{فج} = 9 \times 9 - \int_0^9 (0 + 6S) dS \text{ اكمل}$$

الاجابة ٣٢

* مثال: اذا كانه مخرى السعر - الطلب هو $D = 0.5 - 0.05S$ ومخرى السعر - العرض هو $C = 0.5 + 0.05S$ فاحسب مايلي:

(أ) كمية التوازن وسعر التوازن (ب) فائض المستهلك (ج) فائض المنتج
الحل: نعمل على S (كمية التوازن) بوضع $D = C$ (س)

$$\hookrightarrow 0.5 - 0.05S = 0.5 + 0.05S \Leftrightarrow -0.05S = 0.05S \Leftrightarrow S = 0 = \frac{0}{0.1} \hookrightarrow 0 = 0$$

ويكون سعر التوازن هو $C = D = 0.5 = 0.5 - 0.05(0) = 0.5$
أو $C = 0.5 + 0.05(0) = 0.5$

(ب) فج = $\int_0^{0.5} (0.5 - 0.05S) dS - \int_0^{0.5} (0.5 + 0.05S) dS = 0.5 \times 0.5 - \frac{0.05}{2} (0.5)^2 - (0.5 \times 0.5 + \frac{0.05}{2} (0.5)^2)$
 $= 0.25 - 0.00625 - (0.25 + 0.00625) = 0.25 - 0.00625 - 0.25 - 0.00625 = -0.0125$

(ج) فج = $\int_0^{0.5} (0.5 + 0.05S) dS - (0 \times 0.5) = 0.5 \times 0.5 + \frac{0.05}{2} (0.5)^2 - 0$
 $= 0.25 + 0.00625 = 0.25625$

$$20 = 100 - 10 = ((10) - (100 + 10)) - 10 =$$

* مثال :- اذا كانه اقترانه السعر - الطلب هو $(س) = ٢٠ - س$ و $س$ واقترانه
السعر - العرض هو $(س) = \frac{س}{٣} + ٤$ فاحسب ما يلي :-

(٢) كمية التوازن وسعر التوازن (ب) فائض المستهلك (ج) فائض المنتج

الحل :- (٢) $س(س) = س(س)$

$$\Leftrightarrow ٢٠ - س = \frac{س}{٣} + ٤ \Leftrightarrow ١٦ = \frac{س}{٣} + س \quad (\text{بالضرب في ٣})$$

$$\Leftrightarrow ٤٨ = س٣ + س \Leftrightarrow ٤٨ = س٤ \Leftrightarrow س = ١٢ \Leftrightarrow س = ١٢ \quad \boxed{س = ١٢}$$

$$\Leftrightarrow ٨ = ١٢ - ٢٠ = ١٦ \Leftrightarrow$$

(ج) فائض = $\int_{١٢}^{٢٠} (٢٠ - س) - \left(\frac{س}{٣} + ٤ \right) ds$ ————— الاجابة ٧٢

(د) ف = $\int_{١٢}^{٢٠} (٢٠ - س) - \left(\frac{س}{٣} + ٤ \right) ds$ ————— الاجابة ٢٤

الاستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩