التكامل وتطبيقاته

إعداد

محمد صالح

بدائيات التكامل:

التكامل هو: عملية عكسية للتفاضل حيث يكون لدينا المشتقة ويطلب منا الاقتران الأصلي (البدائي: م(س)).

مثال: ماهو الاقتران الذي مشتقته ٢س ؟

الحل: س^{٢} او س^{٢} + ٣ او س^{٢} − ٧ او س^{٢} − ١٠٠

بشكل عام الجواب س^{٢} + جـ ← ثابت التكامل

* يمكن كتابة المطلوب في المثال السابق بصورة أخرى هي: اذا كان ق(س) = ٢س ،
جد الاقتران البدائي م(س)

الحل: م(س) = س^{٢} + جـ

أمثلة: ① جد الاقتران البدائي للاقتران ق(س) = جتاس

الحل: م(س) = جاس + جـ

② ق(س) = قاس ظاس جد البدائي م(س)

الحل: م(س) = قاس + جـ

* يوجد طريقة ثالثة للمطلوب وهي
جد ∫ ٢س . دس (جد تكامل ٢س ، دالس)

أمثلة:
① جد ∫ ٣س^{٢} . دس = س^{٣} + جـ
② ∫ ٥ . دس = ٥س + جـ
③ ∫ ٥ . دص = ٥ص + جـ
④ ∫ ٥ . دهـ = ٥هـ + جـ
⑤ ∫ صفر دس = جـ
⑥ ∫ قا^{٢}س . دس = ظاس + جـ
⑦ ∫ (٤س^{٣} + قاس ظاس) . دس = س^{٤} + قاس + جـ
⑧ ∫ جاس . دس = − جتاس + جـ
⑨ ∫ قا^{٣}س . دس = صعب بالتحرير

قواعد التكامل:
[١] ∫ أ . دس = أس + جـ
[٢] ∫ س^{ن} . دس = $\frac{س^{ن+١}}{ن+١}$ + جـ شرط ن ≠ −١

أمثلة:
① ∫ ٢ . دس = ٢س + جـ
② ∫ $\frac{١}{٢}$. دص = $\frac{١}{٢}$ص + جـ
③ ∫ π . دص = πص + جـ
④ ∫ دس = س + جـ
⑤ ∫ $\frac{دس}{٤}$ = $\frac{١}{٤}$س + جـ
⑥ ∫ جتا π . دس = ∫ −١ . دس = −س + جـ
⑦ ∫ س^{٥} . دس = $\frac{س^{٦}}{٦}$ + جـ
⑧ ∫ س$^{-٥}$. دس = $\frac{س^{-٤}}{-٤}$ + جـ

٩) ∫ أ^{٣} . دس = أ^{٣}س + جـ حيث أ ثابت
١٠) ∫ أ^{٣} . دأ = $\frac{أ^{٤}}{٤}$ + جـ
١١) ∫ ٥^{٣} . دس = ٥^{٣}س + جـ
١٢) ∫ نه^{٢} . دس = نه^{٢}س + جـ
١٣) ∫ نه^{٢} . دنه = $\frac{نه^{٣}}{٣}$ + جـ
١٤) ∫ ٣س^{٢} . دس = ٣ × $\frac{س^{٣}}{٣}$ + جـ = س^{٣} + جـ
١٥) ∫ أس^{٢} . دس = أ × $\frac{س^{٣}}{٣}$ + جـ = $\frac{أ}{٣}$س^{٣} + جـ
١٦) ∫ أ^{٢}س$^{-٢}$. دس = أ^{٢} $\frac{س^{-١}}{-١}$ + جـ = −أ^{٢}س$^{-١}$ + جـ
١٧) ∫ ٥س$^{-٣}$. دس = ٥ $\frac{س^{-٢}}{-٢}$ + جـ
١٨) ∫ $\sqrt[٣]{س}$. دس = ∫ س$^{\frac{١}{٣}}$. دس = ٣ $\frac{س^{\frac{٤}{٣}}}{٤}$ + جـ
١٩) ∫ $\frac{١}{\sqrt{س}}$. دس = ∫ س$^{-\frac{١}{٢}}$. دس = ٢ $\frac{س^{\frac{١}{٢}}}{١}$ + جـ
٢٠) ∫ $\frac{١}{٥\sqrt{س}}$. دس = ∫ $\frac{١}{٥}$ س$^{-\frac{١}{٢}}$. دس = $\frac{١}{٥}$ × $\frac{س^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}}$ + جـ
= $\frac{٢}{٥}$ $\sqrt{س}$ + جـ

تذكر أنه في كل الأمثلة السابقة يمكن أن يكون المطلوب جد الإقتران البدائي م(س).

∴ لإيجاد الإقتران البدائي م(س) نجري التكامل.

نتائج:
* ∫ ق''(س) . دس = ق'(س) + جـ
* ∫ ق'(س) . دس = ق(س) + جـ
* ∫ ق(س) . دس = م(س) + جـ
* ∫ ع . دن = ف + جـ
  (ع ← السرعة ، ف ← المسافة)

ق''(س)
ق'(س)
ق(س)
م(س)

قاعدة لحساب التكامل المحدود:
∫$_{أ}^{ب}$ ق(س) . دس = م(س) $\Big]_{أ}^{ب}$ = م(ب) − م(أ)

أمثلة:
١) ∫$_{١}^{٣}$ ٢س . دس = ٢ $\frac{س^{٢}}{٢}$ $\Big]_{١}^{٣}$ = (٩) − (١) = ٨
٢) ∫$_{١}^{٣}$ $\frac{٢}{س^{٢}}$. دس = ∫$_{١}^{٣}$ ٢س$^{-٢}$. دس = ٢ $\frac{س^{-١}}{-١}$ $\Big]_{١}^{٣}$
= $\frac{-٢}{س}$ $\Big]_{١}^{٣}$ = −[($\frac{٢}{٣}$) − ($\frac{٢}{١}$)] = $\frac{٤}{٣}$
٣) ∫$_{١}^{٣}$ ٧ . دس = ٧س $\Big]_{١}^{٣}$ = (٧×٣) − (٧×١) = ١٤
حل أبسط: ∫$_{١}^{٣}$ ٧ . دس = ٧(٣ − ١) = ١٤

قاعدة: ∫$_{أ}^{ب}$ جـ . دس = جـ(ب − أ) حيث جـ ثابت

أمثلة:
① ∫$_{١}^{٦}$ ٤ . دس = ٤(٦ − ١) = ٢٠
② ∫$_{-٣}^{٢}$ ٣ . دس = ٣(٢ − −٣) = ١٥

٣) $\int_{٠}^{م} ٤ \, ءس = ٤(م-٠) = ٤م$.

٤) $\int_{١}^{٢م} ٣ \, ءس = ٦$ ما قيمة الثابت م؟

الحل: $٣(٢م-١) = ٦ \Leftarrow ٢م-١ = ٢ \Leftarrow م = \frac{٣}{٢}$

٥) جد $\int_{٠}^{٢}$ جتاص . ءس حيث ص زاوية ثابتة .

الحل: جتاص (٢-٠) = ٢جتاص

واجب: $\int_{م+١}^{٢+٣م} ٥ \, ءس = ٤٥$ ما قيمة م؟ الجواب ٤

خصائص التكامل المحدود

[١] خاصية التوزيع :-

نستطيع توزيع التكامل على الجمع والطرح فقط .

أمثلة: جد ① $\int (٦س^٢ - س + ٥) \, ءس$

الحل: $\int ٦س^٢ \, ءس - \int س \, ءس + \int ٥ \, ءس$

$\frac{\cancel{٦}^{٢}س^٣}{٣} - \frac{س^٢}{٢} + ٥س + ح$ لاحظ الثابت ح فقط في نهاية الجواب.

② $\int (م س + ن) \, ءس$ حيث م، ن ثوابت

الحل: نجري التكامل مباشرة (نوزع شفوي)

$م \frac{س^٢}{٢} + ن س + ح$

③ $\int_{١}^{٤} \left(\frac{١}{س^٢} - \frac{١}{\sqrt{س}}\right) ءس$ احذر سؤال دقيق .

الحل: نقوم بالتجهيز

$= \int_{١}^{٤} (س^{-٢} - س^{-\frac{١}{٢}}) ءس = \frac{س^{-١}}{-١}\Big|_{١}^{٤} - \frac{٢س^{\frac{١}{٢}}}{١}\Big|_{١}^{٤}$

$= -١ \times \frac{١}{س}\Big|_{١}^{٤} - ٢\sqrt{س}\Big|_{١}^{٤}$ استخدام اقواس الأمان

$-١\left[(\frac{١}{٤}) - (١)\right] - ٢\left[(٢) - (١)\right]$

$-١\left[-\frac{٣}{٤}\right] - ٢ = \frac{٣}{٤} - ٢ = -\frac{٥}{٤}$

④ $\int_{١}^{٤} \left(\frac{\sqrt{س}+١}{\sqrt{س}}\right) ءس$ نقوم بالتجهيز

الحل: $\int_{١}^{٤} \left(\frac{\sqrt{س}}{\sqrt{س}} + \frac{١}{\sqrt{س}}\right) ءس = \int_{١}^{٤} (١ + س^{-\frac{١}{٢}}) ءس$

$= ١(٤-١) + \frac{٢س^{\frac{١}{٢}}}{١}\Big|_{١}^{٤} = ٣ + ٢\sqrt{س}\Big|_{١}^{٤}$

$= ٣ + ٢\left[\sqrt{٤} - \sqrt{١}\right] = ٣ + ٢(٢-١) = ٥$

هناك حل آخر نتخلص من الجذر ونرفعه للبسط ونفك قوس

⑤ $\int_{-١}^{٣} (٢س - م) \, ءس = ١٦$ ما قيمة الثابت م .

الحل: $\frac{٢س^٢}{٢}\Big|_{-١}^{٣} - م(٣+١) = ١٦$

$(٩) - (١) - ٤م = ١٦$

$٨ - ٤م = ١٦ \Leftarrow م = -٢$

⑥ اذا كان $\int_{١}^{٤} ٢ ق(س) \, ءس = ٢٠$ احسب $\int_{١}^{٤} (ق(س) - ٥) \, ءس$

الحل: نجهز المعطيات للحصول على $\int_{١}^{٤} ق(س) \, ءس$ حيث يتم ذلك بالقسمة على ٢ $\Leftarrow \int ق(س) \, ءس = ١٠$

المطلوب $\int_{١}^{٤} (ق(س) - ٥) \, ءس$ يجب توزيع اشارة ∫ اجباري لوجود ق(س) في المطلوب .

$\Leftarrow \int_{١}^{٤} ق(س) \, ءس - \int_{١}^{٤} ٥ \, ءس$

$١٠ - ٥(٤-١) = ١٠ - ١٥ = -٥$

⑦ $\int_{٠}^{م} (٢س+٣) \, ءس =$ صفر جد قيمة الثابت م؟

$(س^٢ + ٣س)\Big|_{٠}^{م} =$ صفر

$م^٢ + ٣م -$ صفر $=$ صفر

$م(م+٣) = ٠ \Leftarrow م = ٠$ أو $م = -٣$

واجب: اذا كان $\int_{١}^{٢} (ق(س) - ٢س) \, ءس = ٢٠$ جد $\int_{١}^{٢} ٣ق(س) \, ءس$ ٧٢

[٢] التكامل عند نقطة

$\int_{م}^{م} ق(س) \, ءس =$ صفر

أمثلة:

① جد $\int_{٢}^{٢} \sqrt{١-س^٢} \, ءس =$ صفر

② $\int_{٣}^{م^٢-١} ق(س) \, ءس =$ صفر ما قيم الثابت م؟

$٣ = م^٢ - ١ \Leftarrow ٤ = م^٢ \Leftarrow م = \pm ٢$

[٣] خاصية قلب الحدود :-

اذا كان $\int_{م}^{ب} ق(س) \, ءس = ل$ فإن $\int_{ب}^{م} ق(س) \, ءس = -ل$

مثال: اذا كان $\int_{١}^{٥} (٣ق(س) - ٢) \, ءس = ١٢$

جد $\int_{٥}^{١} (ق(س) - ٣س) \, ءس$.

الحل: يجب تجهيز المعطيات للوصول الى $\int_{١}^{٥} ق(س) \, ءس$

$\int_{١}^{٥} ٣ق(س) \, ءس - \int_{١}^{٥} ٢ \, ءس = ١٢$

$٣\int_{١}^{٥} ق(س) \, ءس - ٢(٥-١) = ١٢$

$٣\int_{١}^{٥} ق(س) \, ءس = ٣٠$

$\therefore \int_{١}^{٥} ق(س) \, ءس = ١٠$

المطلوب $\int_{٥}^{١} ق(س) \, ءس - \int_{٥}^{١} ٣س \, ءس$

$-١٠ - \frac{٢س^٢}{٢}\Big|_{٥}^{١}$

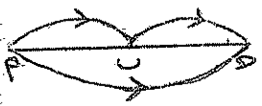
$-١٠ - \left[(١) - (٢٥)\right] = -١٠ + ٢٤ = ١٤$

٤ خاصية الإضافة :-

أهم فائدة لهذه الخاصية هي إيجاد التكامل للاقتران المتشعب.

إذا كان $\int_{أ}^{ب} ق(س).دس = م$ ، $\int_{ب}^{هـ} ق(س).دس = ن$

فإن $\int_{أ}^{هـ} ق(س).دس = م + ن$



الشرط ليس بالضرورة ان تكون ب بين أ، هـ

أمثلة :

① إذا كان $\int_{1}^{4} ق(س).دس = 8$ ، $\int_{6}^{4} \frac{1}{2} ق(س).دس = 5$

احسب $\int_{1}^{6} ق(س).دس$.

الحل: نجهز المعطيات $\int_{6}^{4} ق(س) دس = 10$ (تم الضرب ×٢)

المطلوب $\int_{1}^{6} ق(س).دس = \int_{1}^{4} ق(س).دس + \int_{4}^{6} ق(س).دس$

$= 8 + -10 = -2$

واجب: إذا كان $\int_{1}^{5} ق(س).دس = 9$ ، $\int_{4}^{5} \frac{1}{2} ق(س).دس = 10$

احسب $\int_{1}^{4} (ق(س) - 2س).دس$. $\boxed{-26}$

② إذا كان $\int_{أ}^{ب} ق(س).دس - \int_{5}^{3} ق(س).دس = \int_{3}^{4} ق(س).دس$

جد أ، ب

الحل: $\int_{أ}^{ب} ق(س).دس = \int_{3}^{4} ق(س).دس + \int_{5}^{3} ق(س).دس$

الجمع تبديلي $\Leftarrow$ $\int_{5}^{3} ق(س).دس + \int_{3}^{4} ق(س).دس$

$\int_{أ}^{ب} ق(س).دس = \int_{5}^{4} ق(س).دس$ الشرط ٣ ليس بالضرورة ان تكون بين ٥، ٤

∴ أ = ٥ ، ب = ٤

٥ خاصية المقارنة :-

إذا كان ق(س)، هـ(س) قابلين للتكامل في [أ، ب]

وكان ق(س) ≤ هـ(س) فإن

$\int_{أ}^{ب} ق(س).دس \le \int_{أ}^{ب} هـ(س).دس$

يستفاد من هذه الخاصية فيما يلي :-

أ إيجاد إشارة التكامل المحدود بدون حساب التكامل

مثال: بدون حساب التكامل جد إشارة $\int_{0}^{1} (س^3 - 4) دس$

الحل: سوف نجد إشارة الاقتران ق(س) في الفترة [٠، ١]

ويتم ذلك من خلال

تعويض رقم من داخل الفترة

فلاحظ ان ق(س) < صفر

∴ $\int ق(س).دس$ < صفر

٦ إيجاد القيم القصوى للتكامل المحدود :-

مقدمة: ق(س) ≥ ٧ تعني لدينا أقل قيمة هي ٧

ق(س) ≤ ٥ تعني لدينا أكبر قيمة هي ٥

٣ ≤ ق(س) ≤ ٨ تعني أصغر قيمة هي ٣ وأكبر قيمة هي ٨

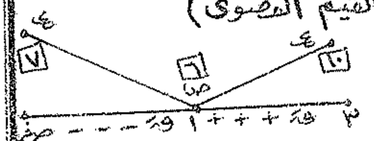
للتذكير !!

جد أكبر وأصغر قيمة للاقتران

$ق(س) = س^2 - 2س + 7$ ، س ∈ [٠، ٣]

الحل: من الوحدة الثالثة (القيم القصوى)

$ق'(س) = 2س - 2 = 0$ $\Leftarrow$ $\boxed{س = 1}$



صغرى مطلقة عند س = ١

هي ق(١) = ٦

يوجد تنافس على العظمى المطلقة وتكون عند س = ٣

∴ أكبر قيمة هي ق(٣) = ١٠ ∴ ٦ ≤ ق(س) ≤ ١٠

أمثلة :

① إذا كان ق(س) ≥ ٦ لجميع قيم س في [١، ٣]

ما أقل قيمة للمقدار $\int_{1}^{3} (2ق(س) - 4).دس$

الحل: ق(س) ≥ ٦ بالضرب في ٢

٢ق(س) ≥ ١٢ طرح العدد ٤

٢ق(س) - ٤ ≥ ٨ أخذ التكامل

$\int_{1}^{3} (2ق(س) - 4).دس \ge \int_{1}^{3} 8.دس$ $\Leftarrow$ أقل قيمة ١٦

② إذا كان ٢ ≤ ق(س) ≤ ٥ ، لجميع قيم س ∈ [١، ٤]

أ جد أكبر قيمة للمقدار $\int_{1}^{4} (3 + 2ق(س)).دس$.

ب إذا كان $ن \le \int_{1}^{4} (3 + 2ق(س)).دس \le م$

جد الثوابت ن، م .

الحل: أ

٢ ≤ ق(س) ≤ ٥

٤ ≤ ٢ق(س) ≤ ١٠

٧ ≤ ٣ + ٢ق(س) ≤ ١٣

$\int_{1}^{4} 7.دس \le \int_{1}^{4} (3 + 2ق(س)).دس \le \int_{1}^{4} 13.دس$

$21 \le \int_{1}^{4} (3 + 2ق(س)).دس \le 39$

∴ أكبر قيمة هي ٣٩

ب نفس حل فرع أ .

كي نجد ن الأصغر ، م الأكبر

∴ ن = ٢١ ، م = ٣٩ .

واجب

إذا كان ٢ ≤ ق(س) ≤ ٥ لجميع قيم س ∈ [١، ٤]

جد ن، م حيث $ن \le \int_{1}^{4} (3 - 2ق(س)).دس \le م$.

③ ما أكبر قيمة للمقدار $\int_{-2}^{2} \sqrt{4-س^2}\,.ءس$

أ) ١٦ ب) ٤ جـ) ٨ د) صفر

الحل: نحتاج أن نجد أكبر قيمة للاقتران $\sqrt{4-س^2}$ من الوحدة الثالثة (القيم القصوى).

$ق'(س) = \frac{-2س}{2\sqrt{4-س^2}} = 0$ ← س = ٠ ، س = ±٢

لاحظ أكبر قيمة هي

$ق(0) = \sqrt{4} = 2$

سوف نجرى تكامل للعدد ٢

$\int_{-2}^{2} 2.ءس = 2(4) = 8$ ⇐ الجواب جـ

واجب: بدون إجراء التكامل بين أن $\int_{-3}^{3}\sqrt{9-س^2}\,.ءس$ محصور بين صفر، ١٨ .

تكامل الإقترانات المتشعبة

سوف نستخدم خاصية الإضافة إذا لزم الأمر وتجب إعادة تعريف المطلق والصحيح.

١] اذا كان $ق(س) = \begin{cases} 2س ، & س \le 3 \\ 5 ، & س > 3 \end{cases}$

جد أ) $\int_0^4 ق(س).ءس$

ب) $\int_0^3 (ق(س)-2).ءس$

جـ) $\int_3^8 ق(2س-4).ءس$

الحل:

أ) $\int_0^4 ق(س).ءس = \int_0^3 2س.ءس + \int_3^4 5.ءس$

$= 9 + 5 = 14$

ب) $\int_0^3 (ق(س)-2).ءس \overset{نوزع}{=} \int_0^3 ق(س).ءس - \int_0^3 2.ءس$

⇐ $\int_0^3 2س.ءس - \int_0^3 2.ءس = \frac{2س^2}{2}\Big|_0^3 - 2(3-0)$

$= 9 - 6 = 3$

جـ) ص = ٢س − ٤ نشتق

$\frac{ءص}{ءس} = 2$ ⇐ $\int_2^{12} ق(ص).\frac{ءص}{2} = \frac12\int_2^{12} ق(ص).ءص$

$\frac{ءص}{2} = ءس$

عندما س = ٣ فإن ص = ٢

عندما س = ٨ فإن ص = ١٢

$\frac12\left[\int_2^3 2س.ءس + \int_3^{12} 5.ءس\right]$

$= \frac12\left[س^2\Big|_2^3 + 5(9)\right] = 25$

١٢] احسب $\int_{-1}^{2} |1-س|.ءس$

الحل:

نعيد التعريف ويكفي على الخط

$\boxed{س = 1}$

⇐ $\int_{-1}^{1}(1-س).ءس + \int_1^2 (-1+س).ءس$

$= 1(2) - \frac{س^2}{2}\Big|_{-1}^{1} + -1(1) + \frac{س^2}{2}\Big|_1^2 = 2.5$

١٣] واجب $\int_{-1}^{2}\sqrt{س^2-2س+1}\,.ءس$ الجواب $\frac{5}{2}$

١٤] $\int_1^5 \left[\frac{س}{2}\right].ءس$ يمكن اعادة التعريف على الخط

الحل: الطول = ٢

الخط

$\int_1^5 ق(س).ءس = \int_1^2 صفر.ءس + \int_2^4 1.ءس + \int_4^5 2.ءس$

$=$ صفر $+ 1(2) + 2(1) = 4$

١٥] واجب جد $\int^{3ن} \left[\frac{س}{ن}\right].ءس$ حيث ن ∈ ط*

١٦] $ق(س) = 4س - [س+1]$ ، س ∈ [١،٣]

جد $\int_1^3 ق(س).ءس$

الحل: نعيد التعريف حيث الطول = ١

الخط

$\int_1^3 ق(س).ءس = \int_1^3 4س.ءس - \int_1^3 [س+1].ءس$

$= \frac{4س^2}{2}\Big|_1^3 - \left(\int_1^2 2.ءس + \int_2^3 3.ءس\right)$

$= 2[9-1] - (2+3) = 11$

١٧] $\int_0^{أ} \left[\frac{س}{3}+2\right].ءس = 15$ ما قيمة أ حيث أ > ٠ .

الحل: نعيد التعريف ونأخذ القواعد التي يلزم لتكون الجواب ١٥ حيث الطول = ٣

$ق(س) = \begin{cases} 2 ، & 0 \le س < 3 \\ 3 ، & 3 \le س < 6 \end{cases}$

لاحظ أن القاعدة الأولى لا تكفي لأن تكون الناتج ١٥

لذلك نأخذ الاولى مع الثانية وهكذا حتى يصبح الجواب ١٥

$\int_0^3 2.ءس + \int_3^{أ} 3.ءس \overset{؟}{=} 15$

$6 + 9 = 15$

∴ أ = ٦

يمكن الحل عن طريق الأعداد

٢×٣ = ٦ ، ٣×٣ = ٩

٨) اذا كان $\int_{٢}^{أ} \left[\frac{س}{٣}+٢\right] ءس = ١٢$ جد الثابت أ حيث أ > ٢ .

الحل:

نعيد التعريف حيث الطول = ٣

$[\text{صفر} \quad ٣ > ٢ \; ٣ \quad ٦ > ٣ \; ٦ \quad ٩]$ ، $٢ \quad ٣ \quad ٤$

أ تقع بين ٣ ، ٦

$\int_{٢}^{٣} ٢ \, ءس + \int_{٣}^{أ} ٣ \, ءس = ١٢$

$٦ + ٣(أ - ٣) = ١٢ \Leftarrow ٣أ - ٩ = ٦ \leftarrow \boxed{أ = ٥}$

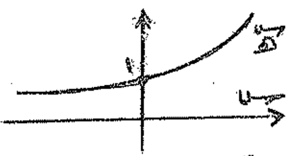
واجب: اذا كان $\int_{أ}^{٥} \left[٥ - \frac{س}{٢}\right] ءس = ٨$ ، ما قيمة أ > ٥ ؟ الجواب (٣)

الإشتقاق

أ) الإقتران الأسي ($هـ^{س}$): ($هـ \approx ٢.٧٣$)

هو اقتران أساسه ثابت وهو العدد النسبي هـ وقوته متغيرة ويكون على صورة $ص = هـ^{ل(س)}$.

رسمه ومميزاته:



* $هـ^{س}$ لا يقطع محور السينات لذلك لا جذور له $هـ^{س} \neq$ لا يمكن أن يساوي صفر

* $هـ^{٠} = ١$ * $هـ^{س} \times هـ^{ص} = هـ^{س+ص}$ * $\frac{هـ^{س}}{هـ^{ص}} = هـ^{س-ص}$

$(هـ^{س})^{٢} = هـ^{٢س}$

اشتقاق الإقتران الأسي: (لا قيود على القوة)

$ص = هـ^{ل(س)} \longrightarrow \frac{ءص}{ءس} = هـ^{ل(س)} \times ل'(س)$

أمثلة: جد المشتقة الأولى لما يلي:

① $ص = هـ^{س^{٢}} \longrightarrow \frac{ءص}{ءس} = هـ^{س^{٢}} \times ٢س$.

② $ص = هـ^{٣س+٥} \longrightarrow \frac{ءص}{ءس} = هـ^{٣س+٥} \times ٣$.

③ $ص = هـ^{٢} \longrightarrow \frac{ءص}{ءس} = \text{صفر}$.

④ $ص = هـ^{جا ٣س} \longrightarrow \frac{ءص}{ءس} = هـ^{جا٣س} \times ٣ جتا ٣س$

⑤ $ص = جاهـ^{٣س} \longrightarrow \frac{ءص}{ءس} = جتاهـ^{٣س} \times هـ^{٣س} \times ٣$

⑥ $ص^{٢} = هـ^{٢س}$ جد $\frac{ءص}{ءس}$ بدلالة ص

$٢ص \times \frac{ءص}{ءس} = هـ^{٢س} \times ٢ \Leftarrow \frac{ءص}{ءس} = \frac{هـ^{٢س}}{ص} = \frac{ص^{٢}}{ص} = ص$

⑦ $هـ^{ص} = ٢س$ جد $\frac{ءص}{ءس}$ بدلالة س

$هـ^{ص} \times \frac{ءص}{ءس} = ٢ \Leftarrow \frac{ءص}{ءس} = \frac{٢}{هـ^{ص}} = \frac{٢}{٢س} = \frac{١}{س}$

⑧ $ص = هـ^{\sqrt{س}} \longrightarrow \frac{ءص}{ءس} = هـ^{\sqrt{س}} \times \frac{١}{٢\sqrt{س}}$

⑨ $ص = \sqrt{هـ^{س}}$ جد $\frac{ءص}{ءس}$.

$ص = (هـ^{س})^{\frac{١}{٢}} = هـ^{\frac{١}{٢}س} \longrightarrow \frac{ءص}{ءس} = هـ^{\frac{١}{٢}س} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}\sqrt{هـ^{س}}$

حل آخر $\longrightarrow \frac{ءص}{ءس} = \frac{هـ^{س}}{٢\sqrt{هـ^{س}}} = \frac{١}{٢}\sqrt{هـ^{س}}$.

⑩ $ص = \sqrt{س}\, هـ^{جتاس}$ جد $\frac{ءص}{ءس}$ عندما س = π .

$\frac{ءص}{ءس} = \sqrt{س} \times هـ^{جتاس} \times -جاس + هـ^{جتاس} \times \frac{١}{٢\sqrt{س}}$

$\left.\frac{ءص}{ءس}\right|_{س=π} = \sqrt{π} \times هـ^{جتا١٨٠} \times -جا١٨٠ + هـ^{جتا١٨٠} \times \frac{١}{٢\sqrt{π}}$

$= \text{صفر} + هـ^{-١} \times \frac{١}{٢\sqrt{π}} = \frac{١}{٢هـ\sqrt{π}}$.

تمارين:

١) إذا كان $ص = هـ^{أس}$ حيث أ ∈ ح جد قيمة أ بحيث $ص'' + ٣ص' + ٢ص = \text{صفر}$ [أ = -١ ، -٢]

٢) إذا كان $ص = أهـ^{ب س}$ ، وكان $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = ص$ جد الثوابت أ ، ب . [أ = ٩ ، ب = ±١]

٣) إذا كان $ق(س) = هـ^{|س|}$ فإن ق'(٠) هي

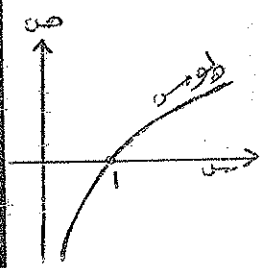
أ) صفر ب) ١ ج) غ.م د) -١

ب) الإقتران اللوغاريتمي $لو_{هـ}س$:

مقدمة: $لو_{٢}٨ = ٣ \Leftarrow ٨ = ٢^{٣}$

$\underbrace{لو_{هـ}ص = س}_{\text{صورة لوغارتمية}} \Leftarrow \underbrace{ص = هـ^{س}}_{\text{صورة أسية}}$

رسمه وبعض خصائصه:



* $لو_{هـ}١ = \text{صفر}$ * $لو_{هـ}هـ = ١$

أما $لو_{هـ}\text{صفر}$ غير معروف (انظر الشكل)

* $لو_{هـ}س^{ن} = ن لو_{هـ}س$

* $لو_{هـ}(س \times ص) = لو_{هـ}س + لو_{هـ}ص$.

* $لو_{هـ}\left(\frac{س}{ص}\right) = لو_{هـ}س - لو_{هـ}ص$

سؤال: اذا كان $ص = هـ^{لو_{هـ}ق(س)}$ اثبت ان ص = ق(س)

الحل: $ص = هـ^{لو_{هـ}ق(س)}$ اخذ اللوغاريتم للطرفين ،

$لو_{هـ}ص = لو_{هـ}هـ^{لو_{هـ}ق(س)}$ قاعدة قدوباب

$\Leftarrow لو_{هـ}ص = لو_{هـ}ق(س) \underbrace{لو_{هـ}هـ}_{١}$

$\Leftarrow لو_{هـ}ص = لو_{هـ}ق(س) \Longrightarrow$ لذلك ص = ق(س)

نتيجة.. $ص = هـ^{لو_{هـ}س^{٢}} \Leftarrow ص = س^{٢}$.

اشتقاق الاقتران اللوغاريتمي : (لاقود)

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ق(س)} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{ق}'\text{(س)}}{\text{ق(س)}}$

أسئلة: جد المشتقة الأولى لما يلي:

١) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \longrightarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{1}{\text{س}}$

٢) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2 - 5) \longrightarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{2\text{س}}{\text{س}^2 - 5}$

٣) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\frac{1}{\text{س}}$ حيث $\text{س} > 0$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\frac{-1}{\text{س}^2}}{\frac{1}{\text{س}}} = \frac{-1}{\text{س}}$

حل آخر: $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^{-1} \Leftarrow \text{ص} = -1\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -1 \times \frac{1}{\text{س}} = \frac{-1}{\text{س}}$

حل آخر: $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}1 - \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{صفر} - \frac{1}{\text{س}} = \frac{-1}{\text{س}}$

٤) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{حا}3\text{س})$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{3\,\text{حتا}3\text{س}}{\text{حا}3\text{س}} = 3\,\text{ظتا}\,3\text{س}$

٥) $\text{ص} = \text{حا}(\text{لو}_{\text{هـ}}3\text{س}) \longrightarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{حتا}(\text{لو}_{\text{هـ}}3\text{س}) \times \frac{3}{3\text{س}}$

٦) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}) \longrightarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\frac{1}{\text{س}}}{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}} = \frac{1}{\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}$

٧) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ}^5 = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{صفر}$

٨) $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = \text{س}^2$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ بدلالة س

الحل: $\frac{\frac{\text{دص}}{\text{دس}}}{\text{ص}} = 2\text{س} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2\text{س}\,\text{ص}$

لكن $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}^2}$ $\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}^2}$

٩) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ}^{\sqrt{\text{س}}} \longrightarrow \text{ص} = \sqrt{\text{س}} \longrightarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{1}{2\sqrt{\text{س}}}$

١٠) $\text{ص} = 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ}^{\text{ظاس}} \longrightarrow \text{ص} = 2 \times \text{ظاس} \longrightarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2\,\text{قا}^2\text{س}$

١١) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^3} \longrightarrow \text{ص} = \text{س}^3 \longrightarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 3\text{س}^2$

١٢) $\text{ص} = \text{هـ}^{2\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^3} \longrightarrow \text{ص} = \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^3)^2} = \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^6}$

$\longrightarrow \text{ص} = \text{س}^6 \longrightarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 6\text{س}^5$

١٣) إذا كان $\text{ص} = \text{هـ}^{2+\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^3}$ فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\Big|_{\text{س}=2} =$

أ) صفر ب) 24هـ^2 ج) $\text{هـ}^2 + 24$ د) 12هـ^2 .

$\text{ص} = \text{هـ}^2 \times \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^3} \Leftarrow \text{ص} = \text{هـ}^2 \times \text{س}^3 \longrightarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{هـ}^2 \times 3\text{س}^2$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\Big|_{\text{س}=2} = 12\text{هـ}^2$

١٤) $\text{ص} = \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عندما $\text{هـ}^{\text{س}} = \text{هـ}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{س} \times \frac{1}{\text{س}} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \times 1$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 1 + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

عندما $\text{هـ}^{\text{س}} = \text{هـ}$ فإن $\text{س} = 1$

القوة = القوة لأن الأساس = الأساس

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 1 + \text{لو}_{\text{هـ}}1 = 1 + 0 = 1$

١٥) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt[3]{\text{س}^2 + 2}$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

* الأفضل أن نجهز السؤال لأن ما داخل اللوغاريتم نكد

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2 + 2)^{\frac{1}{3}} \longrightarrow \text{ص} = \frac{1}{3}\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2 + 2)$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{1}{3} \times \frac{2\text{س}}{\text{س}^2 + 2}$

١٦) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\frac{\text{حاس}}{1 - \text{حتاس}}$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الأفضل أن نبسط السؤال $\longrightarrow \text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{حاس} - \text{لو}_{\text{هـ}}(1 - \text{حتاس})$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{حتاس}}{\text{حاس}} - \frac{\text{حاس}}{1 - \text{حتاس}}$.

١٧) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}(5\text{س} \cdot \text{حاس})$ نجزئ $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}5\text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{حاس}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{5}{5\text{س}} + \frac{\text{حتاس}}{\text{حاس}} = \frac{1}{\text{س}} + \text{ظتاس}$

١٨) $\text{ق(س)} = \text{هـ}^{\text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{حتاس}}$ جد $\text{ق}'(0)$ الجواب $\boxed{1}$

١٩) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}^2}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^3$ ، جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\Big|_{\text{س}=1}$ الجواب $\boxed{3\text{هـ}}$

قاعدة :-

إذا كان $\text{ص} = \text{أ}^{\text{ق(س)}}$ فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{أ}^{\text{ق(س)}} \times \text{ق}'\text{(س)}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{أ}$

البرهان: أخذ لوغاريتم للطرفين لإنزال القوة

$\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{أ}^{\text{ق(س)}}$

$\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = \text{ق(س)}\,\underbrace{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{أ}}_{\text{ثابت}}$ نشتق

$\frac{\frac{\text{دص}}{\text{دس}}}{\text{ص}} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{أ} \times \text{ق}'\text{(س)}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ص}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{أ} \times \text{ق}'\text{(س)}$

$= \text{أ}^{\text{ق(س)}} \times \text{لو}_{\text{هـ}}\text{أ} \times \text{ق}'\text{(س)}$ وهو المطلوب.

٢٠) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}10\text{س} \longrightarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{1}{\text{س}}$ المغلف - لا يؤثر

٢١) $\text{ص} = 3^{3\text{س}}$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\Big|_{\text{س}=\frac{1}{3}}$

الحل: $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}3^{3\text{س}}$

$\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = 3\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}3$

$\frac{\text{ص}'}{\text{ص}} = 3\,\text{لو}_{\text{هـ}}3$

$\text{ص}' = 3\,\text{لو}_{\text{هـ}}3 \times \text{ص} = 3\,\text{لو}_{\text{هـ}}3 \times 3^{3\text{س}}$

$\text{ص}'\Big|_{\text{س}=\frac{1}{3}} = 3\,\text{لو}_{\text{هـ}}3 \times 3^{3 \times \frac{1}{3}} = 6\,\text{لو}_{\text{هـ}}3$

واجب (١): ص = $٣^{س^٢+١}$ ، جد $\frac{دص}{دس}\Big|_{(١،٩)}$ الجواب ٩ لو$_هـ$ ٩

واجب (٢): ص = $س^س$ ، جد $\frac{دص}{دس}$ الجواب $(١ + لو_هـ س) \times س^س$

العلاقة بين التفاضل و التكامل:

تذكر أن التكامل هو عملية عكسية للتفاضل حيث

* $\frac{د}{دس}\left(\int ق(س) \,.\, دس\right) = ق(س)$

* $\frac{د}{دس}\left(\int_أ^ب ق(س) \,.\, دس\right) = صفر$

* تذكر أيضاً أن $م'(س) = ق(س)$ ، لأن $\int ق(س) \,.\, دس = م(س) + حـ$

* تذكر أيضاً أن $\int ق'(س) \,.\, دس = ق(س) + حـ$

أمثلة:

(١) جد $\frac{د}{دس}\left(\int جا ٢س \,.\, دس\right) = جا ٢س$

(٢) جد $\frac{د}{دس}\left(\int_٠^{\frac{\pi}{٢}} ظا ٢س \,.\, دس\right) =$ صفر فوراً لأنه محدود

(٣) جد $\frac{د}{دس}\left(\int (س^٢ + ٣س) \,.\, دس - \int ٥ \,.\, دس\right)$

أ) $٢س + ٣$ ب) $٥س$ ج) $س^٢ + ٣$ د) $٢س - ٧$

الحل: نشتق ما بين الأقواس

$٢س + ٣س - صفر = ٥س$

أمثلة: بشكل جديد على الإشتقاق.

١) $\int ق(س) \,.\, دس = س^٣ - س^٢ + ٢س + ٣$

جد ق(١) ، ق'(١)

الحل: اشتق الطرفين لنحصل على ق(س)

$ق(س) = ٣س^٢ - ٢س + ٢$

$ق(١) = ٣ - ٢ + ٢ = ٣$

$ق'(س) = ٦س - ٢ \Leftarrow ق'(١) = ٤$.

٢) $\int ق(س) \,.\, دس = س جتا \pi س$ جد ق(٤)

اشتق الطرفين ⟸

$ق(س) = (س)(-جا \pi س)(\pi) + (جتا \pi س)(١)$

$ق(٤) = -٤\pi جا ٤\pi + جتا ٤\pi = صفر + ١ = ١$

تمرين: $\int ق(س) \,.\, دس = س جا س$

جد $ق'(\frac{\pi}{٢})$. الجواب $\boxed{\frac{-\pi}{٢}}$

٣) ص = $\int \sqrt[٣]{س^٤ + ٣س + ١٠} \,.\, دس$ جد $\frac{دص}{دس}\Big|_{س=-١}$

الحل نشتق الطرفين

$\frac{دص}{دس} = \sqrt[٣]{س^٤ + ٣س + ١٠}$

$\frac{دص}{دس}\Big|_{س=-١} = \sqrt[٣]{١ - ٣ + ١٠} = \sqrt[٣]{٨} = ٢$

٤) جد $\frac{د}{دس}\left(س^٢ \,.\, \int_١^٣ ٢س \,.\, دس\right)$

أ) ٢س ب) ١٦س ج) صفر د) $٨س^٢$

الجزء $\int_١^٣ ٢س \,.\, دس$

$\Leftarrow س^٢ \Big|_١^٣ = ٩ - ١ = ٨$

$\Leftarrow \frac{د}{دس}(٨س^٢) = ١٦س$.

* نستطيع حلها عن طريق مشتقة ضرب .

٥) اذا كان $\int (ق'(س) + ٢س) \,.\, دس = س^٣ + أس^٢ + ١$

جد الثابت أ علماً بأن ق'(١) = ٥

الحل: $\int ق'(س) \,.\, دس + \int ٢س \,.\, دس = س^٣ + أس^٢ + ١$

اشتق الطرفين

$ق'(س) + ٢س = ٣س^٢ + ٢أس$

$ق'(١) + ٢ = ٣ + ٢أ$

$٥ + ٢ = ٣ + ٢أ \Leftarrow \boxed{أ = ٢}$

تمرين: $\int ق(س) \,.\, دس = جا س - جتا س + ٢$

اثبت ان $ق(\frac{\pi}{٢}) - ق'(\frac{\pi}{٢}) = ٢$

تمارين متنوعة على المواضيع السابقة:

[١] احسب $\int_{0}^{1}(1-س)\sqrt{س}\,ءس$

الحل: نتخلص من الجذر والضرب بفك الأقواس.

$\int_{0}^{1}(1-س)س^{\frac{1}{2}}\,ءس = \int_{0}^{1}س^{\frac{1}{2}}\,ءس - \int_{0}^{1}س^{\frac{3}{2}}\,ءس$

$= \frac{2س^{\frac{3}{2}}}{3}\Big|_{0}^{1} - \frac{2س^{\frac{5}{2}}}{5}\Big|_{0}^{1} = \frac{2}{3}\sqrt{س^{3}}\Big|_{0}^{1} - \frac{2}{5}\sqrt{س^{5}}\Big|_{0}^{1}$

$= \frac{2}{3}[1-0] - \frac{2}{5}[1-0] = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$.

جد $\int_{0}^{1}(1-س)^{2}\sqrt{س}\,ءس$ الجواب $\boxed{\frac{16}{105}}$

[٢] م(س) بدائي لـ ق(س) المتصل في [٣، ٧] وكان م(٣) = -١، م(٧) = -١٨ جد $\int_{7}^{3}(2ق(س)-5)\,ءس$

الحل: وزع التكامل أولاً

$2\int_{7}^{3}ق(س)\,ءس - \int_{7}^{3}5\,ءس$

$2\times م(س)\Big|_{7}^{3} - 5(3-7)$

$2[م(3)-م(7)] - 5(-4)$

$2[-1-(-18)] + 20 = 2(17) + 20 = 54$

[٣] $\int ق(س)\,ءس = هـ^{س^{2}} + لو جاس + جـ$، جد ق(س)

الحل: نشتق الطرفين

$ق(س) = هـ^{س^{2}} \times 2س + \frac{جتاس}{جاس}$

$ق(س) = هـ^{س^{2}} \times 2س + ظتاس$.

[٤] اذا كان $\int_{-1}^{3}(3س^{2} - 3\int_{0}^{هـ}3م^{2}\,ءم)\,ءس = -20$ جد هـ (الثابت)

الحل: نجد الداخلي أولاً $جـ \times \frac{3}{3}م^{3}\Big|_{0}^{هـ} = 3هـ^{2} -$ صفر

$\Leftarrow \int_{-1}^{3}(3س^{2} - 3هـ^{2})\,ءس = -20$

$\frac{3س^{3}}{3}\Big|_{-1}^{3} - 3هـ^{2}(3 - -1) = -20$

$(27) - (-1) - 12هـ^{2} = -20$

$28 + 20 = 12هـ^{2} \Leftarrow هـ^{2} = 4 \Leftarrow هـ = \pm 2$

[٥] اذا كان $ق'(س) = س^{3} - 3س^{2} + 1$، جد ق(٣) - ق(١)

الحل: نجري تكامل للطرفين.

$\int_{1}^{3}ق'(س)\,ءس = \int_{1}^{3}(س^{3} - 3س^{2} + 1)\,ءس$

$ق(س)\Big|_{1}^{3} = \frac{س^{4}}{4}\Big|_{1}^{3} - \frac{3س^{3}}{3}\Big|_{1}^{3} + 1(2)$

$ق(3) - ق(1) = 20 - 26 + 2 = -4$

[٦] اذا كان ق'(س) + جتاس = ٢س جد ق(س) حيث ق$(\frac{\pi}{2})$ = ٤.

الحل: ق'(س) = ٢س - جتاس ⟸ نكامل الطرفين

$\int ق'(س)\,ءس = \int(2س - جتاس)\,ءس$

$ق(س) = س^{2} - جاس + جـ$ ← نجد جـ حيث ق$(\frac{\pi}{2})$ = ٤

$\frac{\pi^{2}}{4} - جا90 + جـ = 4$ ، $جـ = 5 - \frac{\pi^{2}}{4}$

$\therefore ق(س) = س^{2} - جاس + 5 - \frac{\pi^{2}}{4}$

[٧] اذا كان $م_{1}(س)$، $م_{2}(س)$ اقترانين بدائيين للاقتران ق(س) وكان $ل(س) = م_{1}(س) - م_{2}(س)$ فإن ل'(س) =

أ) ق(س) ب) صفر جـ) م(س) د) ل(س)

الحل: ل(س) = مقدار ثابت لأن طرح البدائيين = جـ

∴ ل'(س) = صفر .... يوجد حل آخر

[٨] ق(س) كثير حدود من الدرجة الأولى ويمر بالنقطة (٠، ٢) وكان $\int_{0}^{1}ق(س)\,ءس = 6$ جد قاعدة الاقتران.

الحل: ق(س) = أس + ب نحتاج معادلتين.

(٠، ٢) ← ق(٠) = ٢ ⟸ ٠ + ب = ٢ ⟸ $\boxed{ب = 2}$

$\int_{0}^{1}ق(س)\,ءس = 6 \Leftarrow \int_{0}^{1}(أس + 2)\,ءس = 6$

$\Leftarrow أ\frac{س^{2}}{2}\Big|_{0}^{1} + 2(1) = 6$

$\frac{أ}{2} + 2 = 6 \Leftarrow \frac{أ}{2} = 4 \Leftarrow \boxed{أ = 8}$

قاعدة الاقتران ⟸ ق(س) = ٨س + ٢

[٩] بين ان الاقتران الذي قاعدته $م(س) = س^{3} + 4س$ هو اقتران بدائي للاقتران $ق(س) = 3س^{2} + 4$

الحل: نشتق م(س) فقط $م'(س) = 3س^{2} + 4$ وهو ق(س) ومتصل

[١٠] $\int ق'(س)\,ءس = س^{2} + 3س + 3$ جد ق(٤) علماً ان ق(١) = ٢ يوجد حل آخر

الحل: ∴ $ق(س) + جـ = س^{2} + 3س + 3$

لنجد جـ حيث ق(١) = ٢

$ق(س) + جـ = س^{2} + 3س + 3$ ، $2 + جـ = 1 + 3 + 3$ ، $جـ = 5$

$ق(س) = س^{2} + 3س - 2$

∴ ق(٤) = ١٦ + ١٢ - ٢ = ٢٦

واجب [١] ق(س) = أس + ب ، م(س) بدائي لـ ق(س) جد أ، ب علماً ان م'(٢) = ٧ ، م''(٢) = ٢ الجواب أ = ٢ ، ب = ٣

[٢] اذا كان $\int_{0}^{أ}|2س - 3|\,ءس = 5$ جد أ حيث أ > ١ الجواب = ٣

[٣] اذا كان $\int_{2}^{4}(أ + ق(س))\,ءس = 15$ ، $\int_{2}^{4}ق(س)\,ءس = 8أ$ ما قيمة الثابت أ الجواب = ١,٥

[٤] جد $\int \frac{س - 9}{\sqrt{س} - 3}\,ءس$ الجواب = $\frac{2س^{\frac{3}{2}}}{3} + 3س + جـ$

قواعد التكامل :-

١] $\int \text{أ} \,.\, \text{ءس} = \text{أس} + \text{ث}$

٢] $\int \text{س}^{\text{ن}} \,.\, \text{ءس} = \dfrac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{ث}$ شرط $\text{ن} \neq -1$

٣] $\int \dfrac{\text{عدد}}{\text{خطي}} \,.\, \text{ءس} = \dfrac{\text{العدد}}{\text{معامل س}} \,\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{المقام}| + \text{ث}$

★ $\int \dfrac{\text{ل}}{\text{أس}+\text{ب}} \,.\, \text{ءس} = \dfrac{\text{ل}}{\text{أ}} \,\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{أس}+\text{ب}| + \text{ث}$

★ $\int \dfrac{1}{\text{س}} \,.\, \text{ءس} = \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}| + \text{ث}$

٤] $\int (\text{أس}+\text{ب})^{\text{ن}} \,.\, \text{ءس} = \dfrac{(\text{أس}+\text{ب})^{\text{ن}+1}}{(\text{ن}+1)\times \text{أ}} + \text{ث}$ مثل يا عزيز

★ $\int \text{ق}(\text{أس}+\text{ب}) \,.\, \text{ءس} = \dfrac{\text{د}(\text{أس}+\text{ب})}{\text{أ}} + \text{ث}$

٥] $\int \text{هـ}^{\text{أس}} \,.\, \text{ءس} = \dfrac{\text{هـ}^{\text{أس}}}{\text{أ}} + \text{ث}$

٦] $\int \text{جا أس} \,.\, \text{ءس} = \dfrac{-\text{جتا أس}}{\text{أ}} + \text{ث}$

٧] $\int \text{جتا أس} \,.\, \text{ءس} = \dfrac{\text{جا أس}}{\text{أ}} + \text{ث}$

٨] $\int \text{قا}^2 \text{أس} \,.\, \text{ءس} = \dfrac{\text{ظا أس}}{\text{أ}} + \text{ث}$

٩] $\int \text{قتا}^2 \text{أس} \,.\, \text{ءس} = \dfrac{-\text{ظتا أس}}{\text{أ}} + \text{ث}$

١٠] $\int \text{قا أس ظا أس} \,.\, \text{ءس} = \dfrac{\text{قا أس}}{\text{أ}} + \text{ث}$

١١] $\int \text{قتا أس ظتا أس} \,.\, \text{ءس} = \dfrac{-\text{قتا أس}}{\text{أ}} + \text{ث}$

لازم الزاوية خطية

أمثلة :

١] $\int_1^{\text{هـ}^2} \dfrac{1}{\text{س}} \,.\, \text{ءس} = \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}| \Big]_1^{\text{هـ}^2} = \text{لو}_{\text{هـ}} \text{هـ}^2 - \text{لو}_{\text{هـ}} 1$
$= 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ} - \text{صفر} = 2$

٢] $\int \dfrac{1}{3+5\text{س}} \,.\, \text{ءس} = \dfrac{1}{5} \text{لو}_{\text{هـ}} |3+5\text{س}| + \text{ث}$

٣] $\int 3(2-\text{س})^{-1} \,.\, \text{ءس}$ .... نتخلص من القوة (-١) أولاً

$\int \dfrac{3}{2-\text{س}} \,.\, \text{ءس} = \dfrac{3}{-1} \text{لو}_{\text{هـ}} |2-\text{س}| + \text{ث}$

٤] $\int_0^{\text{هـ}} \dfrac{1}{\text{س}+\text{هـ}} \,.\, \text{ءس}$ حيث هـ العدد النيبيري .

$= \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}+\text{هـ}| \Big]_0^{\text{هـ}}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}} 2\text{هـ} - \text{لو}_{\text{هـ}} \text{هـ} = \text{لو}_{\text{هـ}} \dfrac{2\text{هـ}}{\text{هـ}} = \text{لو}_{\text{هـ}} 2$

٥] إذا كان م(س) بدائي لـ د(س) حيث $\text{م}(\text{س}) = \text{س}^2 + \text{ث}$

جد $\int_1^5 (\text{د}(2\text{س}+1) - 3) \,.\, \text{ءس}$

الحل : نوزع التكامل

$\int_1^5 \text{د}(2\text{س}+1) \,.\, \text{ءس} - \int_1^5 3 \,.\, \text{ءس}$

$\dfrac{\text{م}(2\text{س}+1)}{2} \Big]_1^5 - 3(5-1)$

$\dfrac{1}{2} [\text{م}(11) - \text{م}(3)] - 12$

$\dfrac{1}{2} [121 - 9] - 12 = 44$

٦] $\int (2\text{س}+5)^3 \,.\, \text{ءس} = \dfrac{(2\text{س}+5)^4}{8} + \text{ث}$

٧] $\int \sqrt[3]{2-5\text{س}} \,.\, \text{ءس} = \int (2-5\text{س})^{\frac{1}{3}} \,.\, \text{ءس} = \dfrac{(2-5\text{س})^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3} \times -5} + \text{ث}$

٨] $\int \text{هـ}^{2\text{س}} \,.\, \text{ءس} = \dfrac{\text{هـ}^{2\text{س}}}{2} + \text{ث}$

٩] $\int \text{هـ}^{\text{س}} \,.\, \text{ءس}$ حيث هـ العدد النيبيري $= \text{هـ}^{\text{س}} + \text{ث}$

١٠] $\int_{-2}^{0} \text{هـ}^2 \,.\, \text{ءس}$ حيث هـ العدد النيبيري $= \text{هـ}^2 \text{س} \Big]_{-2}^{0}$

$= \text{هـ}^2 (0+2) = 2\text{هـ}^2$

١١] $\int_2^{2\text{هـ}} \dfrac{3}{\text{هـ}-1} \,.\, \text{ءس}$ ، حيث هـ العدد النيبيري .

$= \dfrac{3}{\text{هـ}-1} \times (2\text{هـ}-2) = \dfrac{3\times 2\cancel{(\text{هـ}-1)}}{\cancel{\text{هـ}-1}} = 6$

١٢] $\int \text{هـ}^{3\text{س}} \times \text{هـ}^{5\text{س}} \,.\, \text{ءس} \overset{\text{نجمع الأسس}}{=} \int \text{هـ}^{2\text{س}+5} \,.\, \text{ءس} = \dfrac{\text{هـ}^{2\text{س}+5}}{2} + \text{ث}$

١٣] $\int \dfrac{\text{هـ}^{2\text{س}}}{\text{هـ}^{5\text{س}}} \,.\, \text{ءس} \overset{\text{نطرح الأسس}}{=} \int \text{هـ}^{-3\text{س}} \,.\, \text{ءس} = \dfrac{\text{هـ}^{-3\text{س}}}{-3} + \text{ث}$

١٤] $\int \sqrt{\text{هـ}^{\text{س}}} \,.\, \text{ءس} \overset{\text{نتخلص من الجذر}}{=} \int (\text{هـ}^{\text{س}})^{\frac{1}{2}} \,.\, \text{ءس}$

$= \int \text{هـ}^{\frac{1}{2}\text{س}} \,.\, \text{ءس} = \dfrac{2\text{هـ}^{\frac{1}{2}\text{س}}}{1} + \text{ث}$

١٥] $\int \text{هـ}^{\text{س}^2} \,.\, \text{ءس}$ لا يجوز اجراء التكامل لانه القوة ليست خطية .

١٦] $\int_{-1}^{1} \dfrac{\text{هـ}^{\text{س}}+1}{\text{هـ}^{\text{س}}} \,.\, \text{ءس} = \int_{-1}^{1} \left(\dfrac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}}} + \dfrac{1}{\text{هـ}^{\text{س}}}\right) \,.\, \text{ءس}$

$= \int_{-1}^{1} (1+\text{هـ}^{-\text{س}}) \,.\, \text{ءس} = 1(1+0) + \dfrac{\text{هـ}^{-\text{س}}}{-1} \Big]_{-1}^{1}$

$= 1 - [\text{هـ}^{0} - \text{هـ}] = 1 - 1 + \text{هـ} = \text{هـ}$

١٧] $\int \text{جا}\, 2\text{س} \,.\, \text{ءس} = \dfrac{-\text{جتا}\, 2\text{س}}{2} + \text{ث}$

١٨) $\int$ جتا(٥س+١) . دس = $\frac{\text{جا}(٥س+١)}{٥}$ + جـ

١٩) $\int$ قا² $\frac{س}{٣}$. دس = $\frac{\text{ظا}\frac{س}{٣}}{\frac{١}{٣}}$ + جـ = ٣ظا $\frac{س}{٣}$ + جـ

٢٠) $\int$ قتا²(٢هـ+١) . دهـ = $\frac{-\text{ظتا}(٢هـ+١)}{٢}$ + جـ

٢١) $\int$ قا٣س ظا٣س . دس = $\frac{\text{قا}٣س}{٣}$ + جـ

٢٢) $\int$ قتا½ع ظتا½ع . دع = $\frac{-\text{قتا}\frac{١}{٢}ع}{\frac{١}{٢}}$ + جـ

٢٣) $\int$ جتا $\frac{\pi}{٢}$. دس = $\int$ صفر . دس = صفر ص + جـ = جـ

٢٤) $\int$ جتاπص . دس ، حيث ص زاوية ثابتة .
= جتاπص (٢-٠) = ٢ جتاπص

٢٥) $\int$ جتا س² . دس لا يجوز مباشرة لأن الزاوية ليست خطية

واجب: $\int_{0}^{\text{لو}٥}$ هـ^{٢س} . دس

أ) $\frac{٢٥}{٢}$ ب) ٢٥ جـ) ٢٤ د) ١٢

قاعدة: $\int \frac{\text{ق}'(س)}{\text{ق}(س)}$. دس = لوهـ|ق(س)| + جـ

أمثلة:-

١) $\int \frac{٢س}{س^٢+٥}$. دس = لوهـ|س²+٥| + جـ

٢) $\int \frac{٣س}{س^٢+٥}$. دس = $\frac{٣}{٢}\int \frac{٢س}{س^٢+٥}$. دس = $\frac{٣}{٢}$ لوهـ|س²+٥| + جـ

٣) $\int$ ظتاس . دس = $\int \frac{\text{جتا}س}{\text{جا}س}$. دس = لوهـ|جاس| + جـ

٤) $\int$ ظاس . دس = $\int \frac{\text{جا}س}{\text{جتا}س}$. دس = $-\int \frac{-\text{جا}س}{\text{جتا}س}$. دس
= -لوهـ|جتاس| + جـ

٥) $\int$ ظتا٣س . دس = $\int \frac{\text{جتا}٣س}{\text{جا}٣س}$. دس
= $\frac{١}{٣}\int \frac{٣\text{جتا}٣س}{\text{جا}٣س}$. دس = $\frac{١}{٣}$ لوهـ|جا٣س| + جـ

٦) $\int \frac{١+\text{ظا}^٢س}{\text{ظا}س}$. دس = $\int \frac{\text{قا}^٢س}{\text{ظا}س}$. دس = لوهـ|ظاس| + جـ

مقدمة لطرق التكامل :-

قبل اجراء أي تكامل يجب تجهيز الاقتران وذلك بتخليصه من الجذور والكسور والمتطابقات ويتم ذلك كما يلي :-

١) * نحول الجذور إلى أسس كسرية عدا أن تكون قوة أو زاوية مثل جا$\sqrt{س}$ ، هـ^{$\sqrt{س}$} .

٢) * الكسور التي لمقامها قوة ترفع للبسط مع عكس اشارة القوة ماعدا القوة (١) .
(لا تظهر القوة -١ في البسط)

٣) * الكسور التي مقامها مثلثي منفرد (لوحده) ترفع للبسط بقيمتها وليس بقوتها ماعدا الحالات الثلاث وهي (جا مع جتا)، (ظا مع قا²)، (ظتا مع قتا²)

٤) * عند ظهور أي من المتطابقات التالية لوحدها أو مع الجمع والطرح تبدل فوراً كما يلي :-

* ظاس = $\frac{\text{جا}س}{\text{جتا}س}$ * ظتاس = $\frac{\text{جتا}س}{\text{جا}س}$

* ظا²س = قا²س - ١ * ظتا²س = قتا²س - ١

* جا²س = $\frac{١}{٢}$(١ - جتا٢س) * جتا²س = $\frac{١}{٢}$(١ + جتا٢س)

أمثلة:

١) جد $\int_{0}^{\frac{\pi}{٢}}$ (جا²س + جتا²س) . دس = $\int_{0}^{\frac{\pi}{٢}}$ ١ . دس = س] = ($\frac{\pi}{٢}$ - ٠) = $\frac{\pi}{٢}$

٢) $\int$ جاس جتاس . دس = $\int \frac{١}{٢}$ جا٢س . دس
= $\frac{١}{٢} \times \frac{-\text{جتا}٢س}{٢}$ + جـ

٣) $\int_{0}^{\frac{\pi}{٤}}$ (١+ظا²س) . دس = $\int$ (١ + قا²س - ١) . دس
= $\int_{0}^{\frac{\pi}{٤}}$ قا²س . دس = ظاس$]_{0}^{\frac{\pi}{٤}}$ = ظا٤٥ - ظا٠ = ١ - ٠ = ١

٤) $\int$ (١ - ظتا²س) . دس = $\int$ ١ - (قتا²س - ١) . دس
= $\int$ (٢ - قتا²س) . دس = ٢س + ظتاس + جـ

٥) $\int \frac{١}{\text{جا}س\ \text{ظا}س}$. دس = $\int$ قتاس ظتاس . دس = -قتاس + جـ

٦) $\int$ (جتا²س - جا²س) . دس = $\int$ جتا٢س . دس
= $\frac{\text{جا}٢س}{٢}$ + جـ

أمثلة :-

① $\int_0^1 \frac{1}{(3\text{س}-2)^3}\,\text{ءس} = \int_0^1 (3\text{س}-2)^{-3}\,\text{ءس} = \frac{(3\text{س}-2)^{-2}}{-6}\Big|_0^1$

$= -\frac{1}{6}\left[\frac{1}{(3\text{س}-2)^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8}$

② $\int \left(\text{س}^3 + \text{س}^{-3} - \text{هـ}^{3\text{س}} - \text{جا}3\text{س}\right)\text{ءس}$

$\frac{\text{س}^4}{4} + \frac{\text{س}^{-2}}{-2} - \frac{\text{هـ}^{3\text{س}}}{3} + \frac{\text{جتا}3\text{س}}{3} + \text{ج}$

③ $\int \left(\text{س}^5 + \frac{1}{\text{س}^5} + \sqrt[5]{\text{س}} + \frac{1}{\text{جا}^2 5\text{س}} + \text{جا}^2 5\text{س}\right)\text{ءس}$

$\int \left(\text{س}^5 + \text{س}^{-5} + \text{س}^{\frac{1}{5}} + \text{قتا}^2 5\text{س} + \frac{1}{2}(1-\text{جتا}10\text{س})\right)\text{ءس}$

$= \frac{\text{س}^6}{6} + \frac{\text{س}^{-4}}{-4} + \frac{5\text{س}^{\frac{6}{5}}}{6} - \frac{\text{ظتا}5\text{س}}{5} + \frac{1}{2}\left(\text{س} - \frac{\text{جا}10\text{س}}{10}\right) + \text{ج}$

④ $\int \left(\sqrt{\text{س}} + \frac{1}{\text{س}} + \text{قا}^2 3\text{س}\right)\text{ءس}$

$= \int \left(\text{س}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\text{س}} + \text{قا}^2 3\text{س}\right)\text{ءس}$

$= \frac{2\text{س}^{\frac{3}{2}}}{3} + \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \frac{\text{ظا}3\text{س}}{3} + \text{ج}$

⑤ $\int \left(\text{ظا}^2 3\text{س} + \frac{1}{\text{قا}^2 5\text{س}} - \text{قتا}^2 3\text{س}\right)\text{ءس}$

$= \int \left(\text{قا}^2 3\text{س} - 1 + \underbrace{\text{جتا}^2 5\text{س}}_{\frac{1}{2}(1+\text{جتا}10\text{س})} - \text{قتا}^2 3\text{س}\right)\text{ءس}$

$= \frac{\text{ظا}3\text{س}}{3} - \text{س} + \frac{1}{2}\left(\text{س} + \frac{\text{جا}10\text{س}}{10}\right) + \frac{\text{ظتا}3\text{س}}{3} + \text{ج}$

⑥ $\int \left(\text{هـ}^{5\text{س}} + \frac{1}{\text{هـ}^{5\text{س}}} + \sqrt[5]{\text{هـ}^{\text{س}}} + \text{هـ}^5\right)\text{ءس}$

$= \int \left(\text{هـ}^{5\text{س}} + \text{هـ}^{-5\text{س}} + \text{هـ}^{\frac{1}{5}\text{س}} + \text{هـ}^5\right)\text{ءس}$

$= \frac{\text{هـ}^{5\text{س}}}{5} + \frac{\text{هـ}^{-5\text{س}}}{-5} + \frac{5\,\text{هـ}^{\frac{1}{5}\text{س}}}{1} + \text{هـ}^5\text{س} + \text{ج}$

⑦ $\int \left(\frac{\text{قاس}}{\text{جتاس}} - \frac{1}{\text{هـ}^{\text{س}}}\right)\text{ءس}$

$= \int \left(\text{قا}^2\text{س} - \text{هـ}^{-\text{س}}\right)\text{ءس} = \text{ظاس} + \text{هـ}^{-\text{س}} + \text{ج}$

⑧ $\int \left(\text{هـ}^{3\text{س}} + \text{هـ}^{-\text{س}}\right)^2\text{ءس} \overset{\text{فك التربيع}}{=} \int \left(\text{هـ}^{6\text{س}} + 2\text{هـ}^{2\text{س}} + \text{هـ}^{-2\text{س}}\right)\text{ءس}$

$= \frac{\text{هـ}^{6\text{س}}}{6} + \frac{2\text{هـ}^{2\text{س}}}{2} + \frac{\text{هـ}^{-2\text{س}}}{-2} + \text{ج}$

⑨ $\int \left(\frac{\text{ظاس}}{\text{جتاس}} - \text{جا}^{-2} 3\text{س}\right)\text{ءس}$

$= \int \left(\text{ظاس} \times \text{قاس} - \frac{1}{\text{جا}^2 3\text{س}}\right)\text{ءس}$

$= \int \left(\text{ظاس قاس} - \text{قتا}^2 3\text{س}\right)\text{ءس}$

$= \text{قاس} + \frac{\text{ظتا}3\text{س}}{3} + \text{ج}$

⑦ $\int (\text{جاس} + \text{جتاس})^2\,\text{ءس} =$

$= \int \big(\underbrace{\text{جا}^2\text{س} + 2\text{جاس جتاس} + \text{جتا}^2\text{س}}_{\text{متطابقة}}\big)$

$= \int (1 + \text{جا}2\text{س})\,\text{ءس} = \text{س} - \frac{\text{جتا}2\text{س}}{2} + \text{ج}$

⑧ $\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} |\text{جاس}|\,\text{ءس}$

جاس = ٠ ⟸ س = ٠ ، π ، -π

$-\pi \quad - \; - \quad 0 \quad + \; + \quad \frac{\pi}{2}$ (−جاس ، جاس)

$\int_{-\pi}^{0} -\text{جاس}\,\text{ءس} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{جاس}\,\text{ءس}$

$\text{جتاس}\Big|_{-\pi}^{0} + -\text{جتاس}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$[\text{جتا}0 - \text{جتا}(-\pi)] - [\text{جتا}\frac{\pi}{2} - \text{جتا}0]$

$[1 - -1] - [\text{صفر} - 1] = 1+1+1 = 3$.

واجب: $\int \frac{\text{ءس}}{\text{جا}^2\text{س} - 1}$

أ) ظتاس + ج
ب) − ظاس + ج
ج) −قتاس + ج
د) −قتاس − س + ج

واجب: $\int \frac{2}{1+\text{جتا}2\text{س}}\,.\,\text{ءس}$

أ) قاس + ج
ب) ظاس + ج
ج) −قتاس + ج
د) −ظتاس + ج

⑨ $\text{م} = \int_0^{\pi} \text{جا}^2\text{س}\,.\,\text{ءس}$ ، $\text{ن} = \int_0^{\pi} \text{جتا}^2\text{س}\,.\,\text{ءس}$

جد ما يلي ① ن + م ② ن − م

الحل:

$\text{ن} + \text{م} = \int_0^{\pi} \text{جتا}^2\text{س}\,.\,\text{ءس} + \int_0^{\pi} \text{جا}^2\text{س}\,.\,\text{ءس}$

$= \int_0^{\pi} (\text{جتا}^2\text{س} + \text{جا}^2\text{س})\,.\,\text{ءس} = \int_0^{\pi} 1\,.\,\text{ءس} = \pi$

$\text{ن} - \text{م} = \int_0^{\pi} \text{جتا}^2\text{س}\,.\,\text{ءس} - \int_0^{\pi} \text{جا}^2\text{س}\,.\,\text{ءس}$

$= \int_0^{\pi} (\text{جتا}^2\text{س} - \text{جا}^2\text{س})\,.\,\text{ءس} = \int_0^{\pi} \text{جتا}2\text{س}\,.\,\text{ءس}$

$= \frac{\text{جا}2\text{س}}{2}\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2}[\text{جا}2\pi - \text{جا}0] = \text{صفر}$

طرق التكامل :- لها أربع حالات .

أولاً :- التكامل المباشر

(في حالة الجمع والطرح والمركب الخطي)

في هذا النوع نقوم بإجراء التكامل مباشرة مع مراعاة ما يلي :

*① ما داخل قوس المركب خطي من الدرجة الأولى .

*② زاوية الاقتران المثلثي خطية من الدرجة الأولى .

*③ قوة الاقتران الأسي خطية من الدرجة الأولى .

ثانياً: التكامل في حالة الضرب (تعويض أو أجزاء)

يمنع اجراء التكامل مباشرة بل نقوم بفك الأقواس إن أمكن وبغير ذلك نستخدم طريقة التعويض أو الأجزاء.

أ) التعويض (الاستبدال) حيث نفرض

ص = جزء من السؤال (لا يكون خطي).

كيف نختار ص في التعويض :-

* ∫ اقتران × مركب ← ص = ما داخل المركب وبدون القوة.
* ∫ اقتران × أسي ← ص = قوة الأسي.
* ∫ اقتران × مثلثي ← ص = زاوية المثلثي.
* ∫ $\underbrace{\text{جا زاوية × جتا نفس الزاوية}}_{\text{عائلة}}$ ← ص = أحدهما دون القوة
* ∫ $\underbrace{\text{ظا زاوية × قا}^2\text{ نفس الزاوية}}_{\text{عائلة}}$ ← ص = ظا الزاوية.
* ∫ $\underbrace{\text{ظتا زاوية × قتا}^2\text{ نفس الزاوية}}_{\text{عائلة}}$ ← ص = ظتا الزاوية
* ∫ اقتران × دائري × دائري ← ص = الزاوية.
* ∫ دائري × أسي ← ص = الزاوية أو الأسي.

** تذكر أن الفرض ص غير خطي.

** في أسئلة العائلات اذا كانت الزوايا مختلفة نفكر بمتطابقة.

أمثلة:

① $\int 8س(س^2+5)\,ءس$

الحل: لدينا ضرب بسيط نفك الاقواس

$\int 8س^3 + 40س\,ءس = \frac{8س^4}{4} + \frac{40س^2}{2} + جـ$.

واجب: $\int^{لو 2} ه^{س}(9-4ه^{-س})\,ءس$ الجواب $\boxed{3}$

② $\int \underbrace{8س}_{\text{اقتران}}\underbrace{(س^2+5)^3}_{\text{مركب}}\,ءس$ لاحظ تم تصنيف السؤال .

الحل: ص = $س^2+5$ ، $\frac{ءص}{ءس} = 2س$ ، $ءس = \frac{ءص}{2س}$

$\Leftarrow \int 8س\, ص^3 \cdot \frac{ءص}{2س}$

$= \int 4ص^3\, ءص$ سؤال مباشر

$= \frac{4ص^4}{4} + جـ$

$= (س^2+5)^4 + جـ$

③ $\int \underbrace{س^2 ه^{س^3}}_{\text{اقتران أسي}}\,ءس$

ص = $س^3$ ، $\frac{ءص}{ءس} = 3س^2$ ، $ءس = \frac{ءص}{3س^2}$

$\Leftarrow \int س^2 ه^{س^3}\,ءس = \int \cancel{س^2} ه^{ص} \cdot \frac{ءص}{3\cancel{س^2}}$

$= \frac{1}{3}\int ه^{ص}\,ءص$ سؤال مباشر

$= \frac{1}{3} ه^{ص} + جـ = \frac{1}{3} ه^{س^3} + جـ$

④ $\int \underbrace{8س}_{\text{اقتران}}\ \underbrace{جتا(س^2+5)}_{\text{مثلثي}}\,ءس$

ص = $س^2+5$ ، $\frac{ءص}{ءس} = 2س$ ، $ءس = \frac{ءص}{2س}$

$\Leftarrow \int 8\cancel{س}\, جتاص \times \frac{ءص}{2\cancel{س}}$.

$= \int 4جتاص\, ءص$

$= 4جاص + جـ = 4جا(س^2+5) + جـ$

⑤ $\int \frac{6س^2+2}{(س^3+س)^5}\,ءس \xLeftarrow{نحول} \int (6س^2+2)(س^3+س)^{-5}\,ءس$

لدينا اقتران × مركب

ص = $س^3+س$ ، $\frac{ءص}{ءس} = 3س^2+1$ ، $ءس = \frac{ءص}{3س^2+1}$

$\Leftarrow \int (6س^2+2)(ص^{-5}) \times \frac{ءص}{3س^2+1}$

$= \int 2(\cancel{3س^2+1})ص^{-5} \times \frac{ءص}{\cancel{3س^2+1}} = \int 2ص^{-5}\,ءص$

$= \frac{2ص^{-4}}{-4} + جـ = -\frac{1}{2}(س^3+س)^{-4} + جـ$

⑥ $\int \underbrace{جا^2 3س\ جتا3س}_{\text{عائلة}}\,ءس$

ص = جا3س ، $\frac{ءص}{ءس} = 3جتا3س$ ، $ءس = \frac{ءص}{3جتا3س}$

$\Leftarrow \int ص^2\, \cancel{جتا3س} \cdot \frac{ءص}{3\cancel{جتا3س}}$

$= \frac{1}{3}\frac{ص^3}{3} + جـ$

$= \frac{1}{9}(جا3س)^3 + جـ$

⑦ $\int \underbrace{قا^2 3س\ ظا3س}_{\text{عائلة}}\,ءس$

ص = ظا3س ، $\frac{ءص}{ءس} = 3قا^2 3س$ ، $ءس = \frac{ءص}{3قا^2 3س}$

$\Leftarrow \int \cancel{قا^2 3س}\, ص \cdot \frac{ءص}{3\cancel{قا^2 3س}}$

$= \frac{1}{3}\frac{ص^2}{2} + جـ$

$= \frac{1}{6}(ظا3س)^2 + جـ$

* حل آخر حيث ص = قا3س

⑧ $\int س^3\sqrt{س^2+1}\,ءس \xLeftarrow{نحول} \int \underbrace{س^3}_{\text{اقتران}}\underbrace{(س^2+1)^{\frac{1}{2}}}_{\text{مركب}}\,ءس$

ص = $س^2+1$ ، $\frac{ءص}{ءس} = 2س$ ، $ءس = \frac{ءص}{2س}$

$\Leftarrow \int س^3 ص^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{ءص}{2س} = \frac{1}{2}\int س^2 ص^{\frac{1}{2}}\,ءص$.

من الفرض ص−1 = $س^2$

$\Leftarrow \frac{1}{2}\int (ص-1)(ص)^{\frac{1}{2}}\,ءص$

$= \frac{1}{2}\int ص^{\frac{3}{2}} - ص^{\frac{1}{2}}\,ءص = \frac{1}{2}\left[\frac{2ص^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{2ص^{\frac{3}{2}}}{3}\right] + جـ$

تكملة ⑧ $\frac{\sqrt{(\text{س}^4+1)^5}}{5} - \frac{\sqrt{(\text{س}^4+1)^3}}{3} + \text{ج}$.

⑨ $\int \text{جا}^2(\text{جاس})\,\text{جتاس}\cdot \text{ءس}$

$\text{ص} = \text{جاس} \rightarrow \int \text{جا}^2\text{ص}\,\cancel{\text{جتاس}} \times \frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{جتاس}}}$ متطابقة

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{جتاس}$ ، $= \int \frac{1}{2}(1 - \text{جتا}\,2\text{ص})\cdot \text{ءص}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{جتاس}} = \text{ءس}$ ، $= \frac{1}{2}\left(\text{ص} - \frac{\text{جا}\,2\text{ص}}{2}\right) + \text{ج}$

$= \frac{1}{2}\text{جاس} - \frac{1}{4}\text{جا}(2\text{جاس}) + \text{ج}$

⑩ $\int 8\text{س}\,\text{جتا}^2\text{س}^2\cdot\text{ءس}$ ← لدينا اقتران × مثلثي .

$\text{ص} = \text{س}^2 \rightarrow \int 8\cancel{\text{س}}^4\,\text{جتا}^2\text{ص} \times \frac{\text{ءص}}{2\cancel{\text{س}}}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 2\text{س}$ ، $= 4\int \frac{1}{2}(1 + \text{جتا}\,2\text{ص})\cdot\text{ءص}$

$\frac{\text{ءص}}{2\text{س}} = \text{ءس}$ ، $= 2\left(\text{ص} + \frac{\text{جا}\,2\text{ص}}{2}\right) + \text{ج}$

$= 2\text{س}^2 + \text{جا}\,2\text{س}^2 + \text{ج}$.

⑪ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{جا}\,2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{جا}^2\text{س}}\cdot\text{ءس}$ ← لدينا مثلثي × أسي

$\text{ص} = \text{جا}^2\text{س} \rightarrow \int_0^1 \text{جا}\,2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{ص}}\cdot\frac{\text{ءص}}{\underbrace{2\text{جاس جتاس}}_{\text{متطابقة جا}\,2\text{س}}}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 2\text{جاس جتاس}$ ، $= \int_0^1 \text{هـ}^{\text{ص}}\cdot\text{ءص}$

$\frac{\text{ءص}}{2\text{جاس جتاس}} = \text{ءس}$ ، $= \frac{\text{هـ}^{\text{ص}}}{1}\Big|_0^1$

نجد الحدود الجديدة
$\text{س} = 0$ فإن $\text{ص} = \text{جا}^2 0 = \text{صفر}$
$\text{س} = \frac{\pi}{2}$ فإن $\text{ص} = \text{جا}^2 90 = 1$

$\text{هـ}^1 - \text{هـ}^0 = \text{هـ} - 1$

ب- الأجزاء :

إذا كان ما داخل المركب أو الزاوية أو قوة الأسي خطية تستخدم طريقة الأجزاء حيث نفرض

ق = الجزء السهل للاشتقاق ونجد $\frac{\text{ءق}}{\text{ءس}}$

ءهـ = باقي السؤال ونجد هـ بالتكامل المباشر أو متطابقة أو تعويض

نطبق القانون التالي :

$$\boxed{\int \text{ق}\cdot\text{ءهـ} = \text{ق}\cdot\text{هـ} - \int \text{هـ}\cdot\text{ءق}}$$

* من قانون مشتقة الضرب نبرهن القانون
هدف الأجزاء تفتيت السؤال لإنتاج سؤال جديد يكامل مباشرة أو متطابقة أو أجزاء

البرهان :· $(\text{ق}\cdot\text{هـ})'_{\text{س}} = \text{ق}\cdot\text{هـ}' + \text{هـ}\cdot\text{ق}'$

نكامل الطرفين بالنسبة لـ س $\Longrightarrow \int (\text{ق}\cdot\text{هـ})'\cdot\text{ءس} = \int (\text{ق}\cdot\text{هـ}')\cdot\text{ءس} + \int (\text{هـ}\cdot\text{ق}')\cdot\text{ءس}$

$\int (\text{ق}\cdot\text{هـ})'\cdot\text{ءس} = \int \left(\text{ق}\cdot\frac{\text{ءهـ}}{\text{ءس}}\right)\times\text{ءس} + \int \text{هـ}\cdot\frac{\text{ءق}}{\text{ءس}}\times\text{ءس}$

$\text{ق}\cdot\text{هـ} = \int \text{ق}\cdot\text{ءهـ} + \int \text{هـ}\cdot\text{ءق}$

$\therefore \int \text{ق}\cdot\text{ءهـ} = \text{ق}\cdot\text{هـ} - \int \text{هـ}\cdot\text{ءق}$

مثال

① $\int \underbrace{\text{س}}_{\text{ق}}\cdot\underbrace{\text{جتاس}\cdot\text{ءس}}_{\text{ءهـ}}$

ءهـ ← مقدار سهل للتكامل
ق ← نجد اشتقاقه عدة مرات يصبح ثابت

$\text{ق} = \text{س} \rightarrow \frac{\text{ءق}}{\text{ءس}} = 1 \rightarrow \text{ءق} = 1\cdot\text{ءس}$

$\text{ءهـ} = \text{جتاس}\cdot\text{ءس} \rightarrow \text{هـ} = \text{جاس}$.

$\int \text{ق}\cdot\text{ءهـ} = \text{ق}\cdot\text{هـ} - \int \text{هـ}\cdot\text{ءق}$

$\int \text{س}\cdot\text{جتاس}\cdot\text{ءس} = \text{س جاس} - \int \text{جاس}\cdot\text{ءس}$

$= \text{س جاس} + \text{جتاس} + \text{ج}$.

② $\int 8\text{س}(2\text{س}+5)^3\cdot\text{ءس}$

$\text{ص} = 2\text{س} + 5$ نلاحظ أنه خطي ∴ نعتمد الأجزاء

$\text{ق} = 8\text{س} \xrightarrow{\text{نشتق}} \text{ءق} = 8\cdot\text{ءس}$

$\text{ءهـ} = (2\text{س}+5)^3\cdot\text{ءس} \xrightarrow{\text{نكامل}} \text{هـ} = \frac{(2\text{س}+5)^4}{8}$

$\int 8\text{س}(2\text{س}+5)^3\cdot\text{ءس} = \cancel{8}\text{س}\frac{(2\text{س}+5)^4}{\cancel{8}} - \int \frac{(2\text{س}+5)^4}{\cancel{8}}\times\cancel{8}\cdot\text{ءس}$

$= \text{س}(2\text{س}+5)^4 - \frac{(2\text{س}+5)^5}{10} + \text{ج}$

③ $\int 8\text{س}\,\text{جتا}(2\text{س}+5)\cdot\text{ءس}$

$\text{ص} = 2\text{س}+5$ (زاوية خطية) لذلك نعتمد الأجزاء

$\text{ق} = 8\text{س} \longrightarrow \text{ءق} = 8\cdot\text{ءس}$

$\text{ءهـ} = \text{جتا}(2\text{س}+5)\cdot\text{ءس} \longrightarrow \text{هـ} = \frac{\text{جا}(2\text{س}+5)}{2}$

$\int 8\text{س}\,\text{جتا}(2\text{س}+5) = 4\text{س}\,\text{جا}(2\text{س}+5) - \int 4\,\text{جا}(2\text{س}+5)\cdot\text{ءس}$

$= 4\text{س}\,\text{جا}(2\text{س}+5) - 4 \times \frac{-\text{جتا}(2\text{س}+5)}{2} + \text{ج}$

$= 4\text{س}\,\text{جا}(2\text{س}+5) + 2\,\text{جتا}(2\text{س}+5) + \text{ج}$

④ $\int_0^1 8\text{س}\,\text{هـ}^{2\text{س}}\cdot\text{ءس}$ ← أجزاء لأن قوة الأسي خطية

$\text{ق} = 8\text{س} \longrightarrow \text{ءق} = 8\cdot\text{ءس}$

$\text{ءهـ} = \text{هـ}^{2\text{س}}\cdot\text{ءس} \longrightarrow \text{هـ} = \frac{\text{هـ}^{2\text{س}}}{2}$

$\int_0^1 8\text{س}\,\text{هـ}^{2\text{س}}\cdot\text{ءس} = 4\text{س}\,\text{هـ}^{2\text{س}}\Big|_0^1 - 4\int_0^1 \text{هـ}^{2\text{س}}\cdot\text{ءس}$

$= 4\text{هـ}^2 - \text{صفر} - \cancel{4}\frac{\text{هـ}^{2\text{س}}}{\cancel{2}}\Big|_0^1$

$= 4\text{هـ}^2 - (2\text{هـ}^2 - 2\text{هـ}^0) = 4\text{هـ}^2 - 2\text{هـ}^2 + 2 = 2\text{هـ}^2 + 2$

⑤ $\int 8\text{س}\,\text{جتا}^2\text{س}\cdot d\text{س}$ ← لدينا اقتران × مثلثي

الحل: اجزاء لأن الزاوية خطية

$\text{ق} = 8\text{س} \rightarrow d\text{ق} = 8\cdot d\text{س}$

$d\text{هـ} = \underbrace{\text{جتا}^2\text{س}\cdot d\text{س}}_{\text{مطابقة } \frac{1}{2}(1+\text{جتا}4\text{س})} \rightarrow \text{هـ} = \frac{1}{2}\left(\text{س} + \frac{\text{جا}4\text{س}}{4}\right)$

$\int 8\text{س}\,\text{جتا}^2\text{س}\cdot d\text{س} = 4\text{س}\left(\text{س}+\frac{\text{جا}4\text{س}}{4}\right) - 4\int\left(\text{س}+\frac{\text{جا}4\text{س}}{4}\right)\cdot d\text{س}$

$= 4\text{س}^2 + \text{س}\,\text{جا}4\text{س} - 4\frac{\text{س}^2}{2} - 4\left(\frac{-\text{جتا}4\text{س}}{16}\right) + \text{جـ}$

$= 4\text{س}^2 + \text{س}\,\text{جا}4\text{س} - 2\text{س}^2 + \frac{1}{4}\text{جتا}4\text{س} + \text{جـ}$

⑥ $\int \frac{\text{س}\,\text{جاس}}{\text{جتا}^3\text{س}}\cdot d\text{س}$

$= \int \underbrace{\text{س}}_{\text{ق}}\,\underbrace{\text{جاس}\,\text{جتا}^{-3}\text{س}}_{d\text{هـ}}\cdot d\text{س}$

$\text{ق} = \text{س} \rightarrow d\text{ق} = 1\cdot d\text{س}$

$d\text{هـ} = \text{جاس}\,\text{جتا}^{-3}\text{س}\cdot d\text{س} \rightarrow \text{هـ} = \frac{\text{جتا}^{-2}\text{س}}{2}$

$d\text{هـ} \xrightarrow[\text{بالتعويض}]{\text{تكامل}} \text{هـ}$

$\int \text{جاس}\,\text{جتا}^{-3}\text{س}\cdot d\text{س}$

$\text{ص} = \text{جتاس} \rightarrow \frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = -\text{جاس}$

$\frac{d\text{ص}}{-\text{جاس}} = d\text{س}$

$\int \text{جاس}\,\text{ص}^{-3}\cdot\frac{d\text{ص}}{-\text{جاس}}$

$\frac{\text{ص}^{-2}}{2} \Rightarrow \frac{\text{جتا}^{-2}\text{س}}{2}$

$= \frac{1}{2}\text{س}\,\text{جتا}^{-2}\text{س} - \int\frac{1}{2}\text{جتا}^{-2}\text{س}\cdot d\text{س}$

$= \frac{1}{2}\text{س}\,\text{جتا}^{-2}\text{س} - \frac{1}{2}\int \text{قا}^2\text{س}\cdot d\text{س}$

$= \frac{1}{2}\text{س}\,\text{قا}^2\text{س} - \frac{1}{2}\text{ظا}\text{س} + \text{جـ}$

* شكل آخر للسؤال $\int \text{س}\,\text{ظا}\text{س}\,\text{قا}^2\text{س}\cdot d\text{س}$

⑦ $\int \frac{\text{س}^2}{\text{قتاس}}\cdot d\text{س} \xLeftarrow{\text{تحويل}} \int \underbrace{\text{س}^2}_{\text{اقتران}}\,\underbrace{\text{جاس}}_{\text{مثلثي}}\cdot d\text{س}$

* لاحظ الزاوية خطية ← اجزاء

$\text{ق} = \text{س}^2 \rightarrow d\text{ق} = 2\text{س}\cdot d\text{س}$

$d\text{هـ} = \text{جاس}\cdot d\text{س} \rightarrow \text{هـ} = -\text{جتاس}$

$\int \text{س}^2\,\text{جاس}\cdot d\text{س} = -\text{س}^2\,\text{جتاس} + \int \underbrace{2\text{س}}_{\text{اقتران}}\,\underbrace{\text{جتاس}}_{\text{مثلثي}}\cdot d\text{س}$ اجزاء مرة اخرى

لاحظ ان الأجزاء تولد سؤال جديد

$= -\text{س}^2\,\text{جتاس} + \left\{\begin{array}{l}\text{ق} = 2\text{س} \rightarrow d\text{ق} = 2\cdot d\text{س}\\ d\text{هـ} = \text{جتاس}\cdot d\text{س} \rightarrow \text{هـ} = \text{جاس}\\ 2\text{س}\,\text{جاس} - \int 2\text{جاس}\cdot d\text{س}\\ 2\text{س}\,\text{جاس} + 2\text{جتاس} + \text{جـ}\end{array}\right.$

$= -\text{س}^2\,\text{جتاس} + 2\text{س}\,\text{جاس} + 2\text{جتاس} + \text{جـ}$

⑧ $\int \text{جاس}\,\text{هـ}^{\text{س}}\cdot d\text{س}$

$\text{ق} = \text{جاس} \rightarrow d\text{ق} = \text{جتاس}\cdot d\text{س}$

$d\text{هـ} = \text{هـ}^{\text{س}}\cdot d\text{س} \rightarrow \text{هـ} = \text{هـ}^{\text{س}}$

$\int \text{جاس}\,\text{هـ}^{\text{س}}\cdot d\text{س} = \text{جاس}\,\text{هـ}^{\text{س}} - \int \underbrace{\text{جتاس}\,\text{هـ}^{\text{س}}}_{\text{اجزاء}}\cdot d\text{س}$

$= \text{جاس}\,\text{هـ}^{\text{س}} - \left\{\begin{array}{l}\text{ق} = \text{جتاس} \rightarrow d\text{ق} = -\text{جاس}\cdot d\text{س}\\ d\text{هـ} = \text{هـ}^{\text{س}} \rightarrow \text{هـ} = \text{هـ}^{\text{س}}\\ \text{جتاس}\,\text{هـ}^{\text{س}} + \int \text{جاس}\,\text{هـ}^{\text{س}}\cdot d\text{س}\end{array}\right.$

$\int \text{جاس}\,\text{هـ}^{\text{س}}\cdot d\text{س} = \text{جاس}\,\text{هـ}^{\text{س}} - \text{جتاس}\,\text{هـ}^{\text{س}} - \underbrace{\int \text{جاس}\,\text{هـ}^{\text{س}}\cdot d\text{س}}_{\text{من السؤال الأصلي}}$

$2\int \text{جاس}\,\text{هـ}^{\text{س}}\cdot d\text{س} = \text{جاس}\,\text{هـ}^{\text{س}} - \text{جتاس}\,\text{هـ}^{\text{س}} + \text{جـ}$

$\int \text{جاس}\,\text{هـ}^{\text{س}}\cdot d\text{س} = \frac{1}{2}\left(\text{جاس}\,\text{هـ}^{\text{س}} - \text{جتاس}\,\text{هـ}^{\text{س}}\right) + \text{جـ}$

* شكل آخر للسؤال $\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{قتاس}}\cdot d\text{س}$ سؤال دوري

نوعية خاصة من الأسئلة: تحوي ق أو قَ أو ....

[1] اذا كان م(س) بدائي لـ ق(س) بحيث م(5) = 7 ، م(1) = 3

احسب $\int_0^2 \underbrace{8\text{س}}_{\text{اقتران}}\,\underbrace{\text{ق}(\text{س}^2+1)}_{\text{مركب لوجوده}}\cdot d\text{س}$

الحل: $\text{ص} = \text{س}^2 + 1$

$\frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = 2\text{س}$

$\frac{d\text{ص}}{2\text{س}} = d\text{س}$

تستبدل الحدود

$\text{س} = 0 \rightarrow \text{ص} = 1$

$\text{س} = 2 \rightarrow \text{ص} = 5$

$\xrightarrow{\text{تعويضاً}} \int_1^5 8\cancel{\text{س}}\,\text{ق}(\text{ص})\cdot\frac{d\text{ص}}{2\cancel{\text{س}}}$

$= 4\int_1^5 \text{ق}(\text{ص})\cdot d\text{ص}$

$= 4\times \text{م}(\text{ص})\Big|_1^5$

$= 4[\text{م}(5) - \text{م}(1)] = 16$

[2] اذا كان ق(س) يمر بالنقطتين (1، 3) ، (5، 1) وكان $\int_1^5 \text{ق}(\text{س})\cdot d\text{س} = 6$ احسب $\int_1^5 8\text{س}\,\text{قَ}(\text{س})\cdot d\text{س}$

الحل: لدينا ضرب مع قَ (اقتران × مركب) ... بالأجزاء

$\text{ق} = 8\text{س} \rightarrow d\text{ق} = 8\cdot d\text{س}$

$d\text{هـ} = \text{قَ}(\text{س})\cdot d\text{س} \rightarrow \text{هـ} = \text{ق}(\text{س})$

$\int_1^5 8\text{س}\,\text{قَ}(\text{س})\cdot d\text{س} = 8\text{س}\,\text{ق}(\text{س})\Big|_1^5 - \int_1^5 8\text{ق}(\text{س})\cdot d\text{س}$

$= 40\,\text{ق}(5) - 8\text{ق}(1) - 8\int_1^5 \text{ق}(\text{س})\cdot d\text{س}$

$= 40(1) - 8(3) - 8(6)$

$= 40 - 24 - 48$

$= -32$

[3] اذا كان $\int_0^1 \text{ق}(\text{س})\cdot d\text{س} = 5$ احسب $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \text{جتا}2\text{س}\,\text{ق}(\text{جا}2\text{س})\cdot d\text{س}$

الجواب $-\frac{5}{2}$

[4] اذا كان ق(1) = 5 ، قَ(1) = 6 ، ق(5) = 9 ؛ قَ(5) = 8

احسب $\int_0^2 \text{س}\,\text{قً}(2\text{س}+1)\cdot d\text{س}$ الجواب 7

[5] $\int (\text{س}^2 - 6\text{س} + 9)^4\cdot d\text{س}$

الحل: لدينا اقتران مركب فقط داخله ليس خطي لذلك نقوم بحركة في السؤال

$\int \left((\text{س}-3)(\text{س}-3)\right)^4\cdot d\text{س} = \int\left((\text{س}-3)^2\right)^4\cdot d\text{س}$

$= \int (\text{س}-3)^8\cdot d\text{س} = \frac{(\text{س}-3)^9}{9} + \text{جـ}$

٦ $\int_{\text{٠}}^{\text{٢}} \text{س}\sqrt{\text{س}^2 - \text{٢س} + \text{١}}\ .\ \text{ءس}$

<u>الحل</u>: لدينا مركب داخله ليس خطي (نحلل الداخلي)

$\Leftarrow \int_{\text{٠}}^{\text{٢}} \text{س}\sqrt{(\text{س}-\text{١})(\text{س}-\text{١})}\ .\ \text{ءس} = \int_{\text{٠}}^{\text{٢}} \text{س}\sqrt{(\text{س}-\text{١})^2}\ .\ \text{ءس}$

$= \int_{\text{٠}}^{\text{٢}} \text{س}\,|\text{س}-\text{١}|\ .\ \text{ءس}$ نعيد التعريف: ٠ ... $-\text{س}+\text{١}$ ... ١ ... $\text{س}-\text{١}$ ... ٢

$= \int_{\text{٠}}^{\text{١}} (-\text{س})(\text{س}+\text{١})\ .\ \text{ءس} + \int_{\text{١}}^{\text{٢}} \text{س}(\text{س}-\text{١})\ .\ \text{ءس} = \text{١}$

٧ $\int (\text{س}^{\text{٤}} + \text{٣س})^{\text{٥}}\ .\ \text{ءس}$

$= \int (\text{س}^{\text{٢}})(\text{س}^{\text{٣}} + \text{٣})^{\text{٥}}\ .\ \text{ءس}$

$\left\{ \text{ص} = \text{س}^{\text{٣}} + \text{٣},\quad \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٣س}^{\text{٢}},\quad \frac{\text{ءص}}{\text{٣س}^{\text{٢}}} = \text{ءس} \right.$

$= \int \cancel{\text{س}^{\text{٢}}}\ \text{ص}^{\text{٥}}\ .\ \frac{\text{ءص}}{\text{٣}\cancel{\text{س}^{\text{٢}}}}$

$= \frac{\text{١}}{\text{٣}} \int \text{س}^{\text{٣}}\ \text{ص}^{\text{٥}}\ .\ \text{ءص}$

$= \frac{\text{١}}{\text{٣}} \int (\text{ص} - \text{٣})\ \text{ص}^{\text{٥}}\ .\ \text{ءص}$

$= \frac{\text{١}}{\text{٣}} \int (\text{ص}^{\text{٦}} - \text{٣ص}^{\text{٥}})\ \text{ءص} = \frac{\text{١}}{\text{٣}}\left(\frac{\text{ص}^{\text{٧}}}{\text{٧}} - \frac{\text{٣ص}^{\text{٦}}}{\text{٦}}\right) + \text{جـ}$

$= \frac{\text{١}}{\text{٣}}\left(\frac{(\text{س}^{\text{٣}}+\text{٣})^{\text{٧}}}{\text{٧}} - \frac{(\text{س}^{\text{٣}}+\text{٣})^{\text{٦}}}{\text{٢}}\right) + \text{جـ}$

٨ $\int \sqrt{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٢س}^{\text{٤}}}\ .\ \text{ءس}$ حيث س > ٠.

<u>الحل</u>: لدينا مركب داخله ليس خطي (نحلل الداخلي)

$\int \sqrt{\text{س}^{\text{٢}}(\text{١} + \text{٢س}^{\text{٢}})}\ .\ \text{ءس} = \int \sqrt{\text{س}^{\text{٢}}}\ \sqrt{\text{١} + \text{٢س}^{\text{٢}}}\ .\ \text{ءس}$

$= \int \underbrace{\text{س}}_{\text{اقترانه}}\ \underbrace{(\text{١} + \text{٢س}^{\text{٢}})^{\frac{\text{١}}{\text{٢}}}}_{\text{مركب}}\ .\ \text{ءس}$ لاحظ أن $\sqrt{\text{س}^{\text{٢}}} = |\text{س}|$ لكن س > ٠ لذلك $\sqrt{\text{س}^{\text{٢}}} = \text{س}$

$\left\{ \text{ص} = \text{١} + \text{٢س}^{\text{٢}},\quad \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٤س},\quad \frac{\text{ءص}}{\text{٤س}} = \text{ءس} \right. \longrightarrow \int \cancel{\text{س}}\ (\text{ص})^{\frac{\text{١}}{\text{٢}}}\ .\ \frac{\text{ءص}}{\text{٤}\cancel{\text{س}}}$

$= \frac{\text{١}}{\text{٤}} \times \frac{\text{٢ص}^{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}}}{\text{٣}} + \text{جـ} = \frac{\text{١}}{\text{٦}}(\text{١} + \text{٢س}^{\text{٢}})^{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}} + \text{جـ}$

٩ $\int_{\frac{\pi}{\text{٢}}}^{\pi} \sqrt{\text{١} + \text{جتا٢س}}\ .\ \text{ءس}$ لدينا مركب داخله ليس خطي

<u>الحل</u>: تذكر المطابقة $\text{جتا}^{\text{٢}}\text{س} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}(\text{١} + \text{جتا٢س}) \Leftarrow \text{١} + \text{جتا٢س} = \text{٢جتا}^{\text{٢}}\text{س}$.

$\int_{\frac{\pi}{\text{٢}}}^{\pi} \sqrt{\text{٢جتا}^{\text{٢}}\text{س}}\ .\ \text{ءس}$ جتاس: ٠ (+ + ربع أول) $\frac{\pi}{\text{٢}}$ (− − ربع ثاني) π ؛ جتاس ، −جتاس

$= \int_{\frac{\pi}{\text{٢}}}^{\pi} \sqrt{\text{٢}}\ |\text{جتاس}|\ .\ \text{ءس} = \int_{\frac{\pi}{\text{٢}}}^{\pi} \sqrt{\text{٢}} \times -\text{جتاس}\ .\ \text{ءس} = \sqrt{\text{٢}}$.

تمرين عام (١) :-

① $\int \text{جا٦س جتا}^{\text{٢}}\text{٣س}\ .\ \text{ءس}$ نريد حلين

② $\int \text{س ظا}^{\text{٢}}\text{س}^{\text{٢}}\ \text{قا}^{\text{٢}}\text{س}^{\text{٢}}\ .\ \text{ءس}$ ..... نريد حلين

③ $\int \text{س}^{\text{٢}}\ \text{هـ}^{\text{٢س}}\ .\ \text{ءس}$

④ $\int \text{س}^{\text{٢}}\ \text{قا}^{\text{٢}}\text{س}^{\text{٣}}\ .\ \text{ءس}$

⑤ $\int \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{ظا}(\text{هـ}^{\text{س}})\ .\ \text{ءس}$

⑥ $\int_{\text{٠}}^{\frac{\pi}{\text{٢}}} \text{س جاس}\ .\ \text{ءس} = \int_{\text{٠}}^{\text{٢}} (\text{م س}^{\text{٢}} + \text{٢س})\ .\ \text{ءس}$ جد الثابت م

⑦ $\int_{\text{٠}}^{\frac{\pi}{\text{٤}}} \frac{\text{جتا٢س}}{\sqrt{\text{جا٢س}}}\ .\ \text{ءس}$

⑧ $\int_{\text{٠}}^{\frac{\pi}{\text{٢}}} \sqrt{\text{١} - \text{جا٢س}}\ .\ \text{ءس}$

⑨ $\int \sqrt[\text{٣}]{\text{س}^{\text{٣}} + \text{٤س}^{\text{٤}}}\ .\ \text{ءس}$

⑩ $\int_{\text{٠}}^{\frac{\pi}{\text{٢}}} \text{جا٢س}\ \text{هـ}^{\text{جاس}}\ .\ \text{ءس}$

⑪ $\int \frac{\text{س هـ}^{\text{س}}}{(\text{س}+\text{١})^{\text{٢}}}\ .\ \text{ءس}$

⑫ $\int (\text{س}+\text{١})^{\text{٣}}(\text{س}^{\text{٢}} + \text{٢س} - \text{٧})^{\text{٥}}\ .\ \text{ءس}$

ثالثاً : التكامل في حالة القسمة :-

يمنع إجراء التكامل مباشرة بل نقوم برفع المقام للبسط إن أمكن وبغير ذلك نتبع التفكير المتسلسل التالي :-

* ١- إذا كانت درجة البسط ≥ درجة المقام نستخدم القسمة الطويلة.
* ٢- إذا كان المقام خطي والبسط ثابت نكامل مباشرة باللوغاريتم.
* ٣- إذا كان المقام ① كثير حدود ② تربيعي ③ يتحلل في أقواس مختلفة ④ البسط خطي أو ثابت نستخدم الكسور الجزئية.
* ٤- إذا كان المقام غير ما ورد في البنود السابقة نستخدم التعويض حيث نفرض ص = المقام أو جزء منه.

مخطط حل سؤال القسمة :-

نميز ← قسمة طويلة ← لوغاريتم مباشر ← كسور جزئية ← تعويض

حركة فنية: تحليل ، ضرب بمرافقه

أمثلة :-

① $\int \frac{\text{١}}{(\text{٢س}+\text{٣})^{\text{٥}}}\ .\ \text{ءس} \xleftarrow{\text{نميز}} \int (\text{٢س}+\text{٣})^{-\text{٥}}\ .\ \text{ءس}$

$= \frac{(\text{٢س}+\text{٣})^{-\text{٤}}}{\ldots} + \text{جـ}$

② $\int \frac{١}{٢س+٣} \, ءس$ مباشر $= \frac{\text{لوهـ}|٢س+٣|}{٢} + ث$

③ $\int \frac{١٢}{٩-٢س} \, ءس$ مباشر $١٢ \frac{\text{لوهـ}|٩-٢س|}{-٢} + ث$

④ $\int \frac{٤س+٢}{س^٢-س} \, ءس$ المقام تربيعي ويتحلل إلى $س(س-١)$

الحل: بالكسور الجزئية حيث نجعل الكسر كسور

$$\frac{٤س+٢}{س^٢-س} = \frac{أ}{س} + \frac{ب}{س-١}$$

$\boxed{٤س+٢ = أ(س-١) + ب س}$ أساس الحل.

جذور المقام:
$\boxed{س=٠}$ نعوض في الأساس $٢ = -أ + ٠ \Leftarrow أ = -٢$
$\boxed{س=١}$ نعوض في الأساس $٦ = ٠ + ب \Leftarrow ب = ٦$

$$\therefore \frac{٤س+٢}{س^٢-س} = \frac{-٢}{س} + \frac{٦}{س-١}$$

$$\int \frac{٤س+٢}{س^٢-س} \, ءس = \int \frac{-٢}{س} \, ءس + \int \frac{٦}{س-١} \, ءس$$

$$= -٢ \frac{\text{لوهـ}|س|}{١} + ٦ \frac{\text{لوهـ}|س-١|}{١} + ث$$

⑤ $\int_{٠}^{\frac{١}{٢}} \frac{ءس}{١-س^٢}$ المقام تربيعي ويتحلل إلى $(١-س)(١+س)$ لثلاث كسور جزئية

الحل: $\frac{١}{١-س^٢} = \frac{أ}{١-س} + \frac{ب}{١+س}$

$\boxed{١ = أ(١+س) + ب(١-س)}$ أساس الحل

جذور المقام:
$س = ١ \xrightarrow{\text{نعوض}} ١ = ٢أ + ٠ \Leftarrow أ = \frac{١}{٢}$
$س = -١ \xrightarrow{\text{نعوض}} ١ = \text{صفر} + ٢ب \Leftarrow ب = \frac{١}{٢}$

$$\therefore \int_{٠}^{\frac{١}{٢}} \frac{١}{١-س^٢} \, ءس = \int_{٠}^{\frac{١}{٢}} \frac{\frac{١}{٢}}{١-س} \, ءس + \int_{٠}^{\frac{١}{٢}} \frac{\frac{١}{٢}}{١+س} \, ءس$$

$$= \frac{١}{٢} \left. \frac{\text{لوهـ}|١-س|}{-١} \right]_{٠}^{\frac{١}{٢}} + \frac{١}{٢} \left. \frac{\text{لوهـ}|١+س|}{١} \right]_{٠}^{\frac{١}{٢}}$$

$$= -\frac{١}{٢}\left[\text{لوهـ}\frac{١}{٢} - \cancel{\text{لوهـ}١}\right] + \frac{١}{٢}\left[\text{لوهـ}\frac{٣}{٢} - \cancel{\text{لوهـ}١}\right] = -\frac{١}{٢}\text{لوهـ}\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}\text{لوهـ}\frac{٣}{٢}$$

$$= \frac{١}{٢}\left[-\text{لوهـ}\frac{١}{٢} + \text{لوهـ}\frac{٣}{٢}\right] = \frac{١}{٢}\text{لوهـ}٣ = \text{لوهـ}\sqrt{٣}$$

⑥ $\int \frac{١٢س^٣}{س^٤-٩} \, ءس$

الحل:
$ص = س^٤ - ٩$
$\frac{ءص}{ءس} = ٤س^٣$
$ءس = \frac{ءص}{٤س^٣}$

$\xrightarrow{\text{تعويض}} \int \frac{\cancel{١٢}^{٣} \cancel{س^٣}}{ص} \times \frac{ءص}{\cancel{٤} \cancel{س^٣}}$

$= ٣ \, \text{لوهـ}|ص| + ث$

$= ٣ \, \text{لوهـ}|س^٤ - ٩| + ث$

⑦ $\int_{٣}^{٤} \frac{٢س-١}{(س-٢)(٥-س)} \, ءس$ لاحظ المقام محلل إلى قوسين مختلفين لثلاث كسور فوراً.

الحل: $\frac{٢س-١}{(س-٢)(٥-س)} = \frac{أ}{(س-٢)} + \frac{ب}{(٥-س)}$

$\boxed{٢س-١ = أ(٥-س) + ب(س-٢)}$ الأساس في الحل

جذور المقام:
$س = ٢ \Leftarrow ٣ = ٣أ + ٠ \Leftarrow أ = ١$
$س = ٥ \Leftarrow ٩ = ٠ + ٣ب \Leftarrow ب = ٣$

$$\therefore \int_{٣}^{٤} \frac{٢س-١}{(س-٢)(٥-س)} \, ءس = \int_{٣}^{٤} \frac{١}{س-٢} \, ءس + \int_{٣}^{٤} \frac{٣}{٥-س} \, ءس$$

$$= \left. \frac{\text{لوهـ}|س-٢|}{١} \right|_{٣}^{٤} + ٣ \left. \frac{\text{لوهـ}|٥-س|}{-١} \right|_{٣}^{٤}$$

$$= \text{لوهـ}٢ - \cancel{\text{لوهـ}١} - ٣(\cancel{\text{لوهـ}١} - \text{لوهـ}٢) = \text{لوهـ}٢ + ٣\,\text{لوهـ}٢$$

$$= ٤\,\text{لوهـ}٢ = \text{لوهـ}١٦$$

⑧ $\int \frac{٤س}{٥+٢س} \, ءس$ لاحظ درجة البسط = درجة المقام (قسمة)

الحل:

$٤س \div (٥+٢س) = ٢$، الباقي -١٠

$$\int \frac{٤س}{٥+٢س} \, ءس = \int \left(٢ + \frac{-١٠}{٥+٢س}\right) ءس$$

$$= ٢س - ١٠ \frac{\text{لوهـ}|٥+٢س|}{٢} + ث.$$

⑨ $\int \frac{٤}{٥+٢س} \, ءس \xrightarrow{\text{مباشر}} ٤ \frac{\text{لوهـ}|٥+٢س|}{٢} + ث = ٢\,\text{لوهـ}|٥+٢س| + ث$

⑩ $\int \frac{س^٢+٤}{س^٢-٤} \, ءس$ درجة البسط = درجة المقام (قسمة)

الحل:

$(س^٢+٤) \div (س^٢-٤) = ١$، الباقي ٨

$$\int \frac{س^٢+٤}{س^٢-٤} \, ءس = \int \left(١ + \frac{٨}{س^٢-٤}\right) ءس$$

$$= \int ١ \, ءس + \int \frac{٨}{س^٢-٤} \, ءس$$

كسور جزئية.

$= س +$

$$\frac{٨}{س^٢-٤} = \frac{أ}{س-٢} + \frac{ب}{س+٢}$$

$٨ = أ(س+٢) + ب(س-٢)$

جذور المقام:
$س = ٢ \Leftarrow ٨ = ٤أ \Leftarrow أ = ٢$
$س = -٢ \Leftarrow ٨ = -٤ب \Leftarrow ب = -٢$

$$\int \frac{٨}{س^٢-٤} \, ءس = \int \frac{٢}{س-٢} \, ءس + \int \frac{-٢}{س+٢} \, ءس$$

$= س + ٢\,\text{لوهـ}|س-٢| - ٢\,\text{لوهـ}|س+٢| + ث$.

⑪ $\int \frac{س^٣ + ٥س - ٧}{س^٢} \, ءس$ جهز (وزع البسط على المقام)

$$\int \frac{س^٣}{س^٢} \, ءس + \int \frac{٥س}{س^٢} \, ءس - \int \frac{٧}{س^٢} \, ءس$$

$$\int س \, ءس + \int \frac{٥}{س} \, ءس - \int ٧س^{-٢} \, ءس$$

$$\frac{س^٢}{٢} + ٥\,\text{لوهـ}|س| - \frac{٧س^{-١}}{-١} + ث$$

(١٢) $\int \frac{\text{٢س} - \text{١}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{س} - \text{٢}} \cdot \text{ءس} = \text{لـو}\left|\text{س}^{\text{٢}} - \text{س} - \text{٢}\right| + \text{جـ}$

ملاحظة: يمكن حله بالكسور أو بالتعويض.

(١٣) $\int \frac{\text{٢س} + \text{٤}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{س} - \text{٦}} \cdot \text{ءس}$

$= \int \frac{\text{٢}\cancel{(\text{س}+\text{٢})}}{(\text{س}-\text{٣})\cancel{(\text{س}+\text{٢})}} \cdot \text{ءس} = \text{٢لـو}|\text{س}-\text{٣}| + \text{جـ}$

* لاحظ نفكر بالاختصار إن أمكن.
* حل آخر: كسور جزئية حيث يكون فيه أ = ٠ أو ب = ٠.

(١٤) $\int \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{قتا}^{\text{٢}}\text{س}^{\text{٣}}} \cdot \text{ءس} \xRightarrow{\text{تحويل}} \int \text{س}^{\text{٢}}\text{جا}^{\text{٢}}\text{س}^{\text{٣}} \cdot \text{ءس}$

الحل: لدينا اقتران × مثلثي.

$\left\{ \begin{array}{l} \text{ص} = \text{س}^{\text{٣}} \\ \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٣س}^{\text{٢}} \\ \frac{\text{ءص}}{\text{٣س}^{\text{٢}}} = \text{ءس} \end{array} \right.$

$\xrightarrow{\text{تعويض}} \int \cancel{\text{س}^{\text{٢}}}\text{جا}^{\text{٢}}\text{ص} \cdot \frac{\text{ءص}}{\text{٣}\cancel{\text{س}^{\text{٢}}}}$

$= \frac{\text{١}}{\text{٣}}\int \underbrace{\text{جا}^{\text{٢}}\text{ص}}_{\frac{\text{١}}{\text{٢}}(\text{١}-\text{جتا٢ص})} \cdot \text{ءص}$

$= \frac{\text{١}}{\text{٦}}\left(\text{ص} - \frac{\text{جا٢ص}}{\text{٢}}\right) + \text{جـ}$

$= \frac{\text{١}}{\text{٦}}\text{س}^{\text{٣}} - \frac{\text{١}}{\text{١٢}}\text{جا٢س}^{\text{٣}} + \text{جـ}$

(١٥) $\int \frac{\text{س جاس}}{\text{قاس}} \cdot \text{ءس} \xRightarrow{\text{تحويل}} \int \text{س}\underbrace{\text{جاس جتاس}}_{\text{متطابقة } \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{جا٢س}} \cdot \text{ءس}$

$\int \underbrace{\text{س}}_{\text{اقتران}} \times \underbrace{\frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{جا٢س}}_{\text{مثلثي}} \cdot \text{ءس}$ ------- بالأجزاء

$\text{ق} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{س} \longrightarrow \text{ءق} = \frac{\text{١}}{\text{٢}} \cdot \text{ءس}$

$\text{ءهـ} = \text{جا٢س} \cdot \text{ءس} \longrightarrow \text{هـ} = \frac{-\text{جتا٢س}}{\text{٢}}$

$\int \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{س جا٢س} \cdot \text{ءس} = \frac{-\text{١}}{\text{٤}}\text{س جتا٢س} + \int \frac{\text{١}}{\text{٤}}\text{جتا٢س} \cdot \text{ءس}$

$= \frac{-\text{١}}{\text{٤}}\text{س جتا٢س} + \frac{\text{١}}{\text{٤}} \times \frac{\text{جا٢س}}{\text{٢}} + \text{جـ}$

ملاحظة: هناك حل آخر.

(١٦) $\int \frac{\text{س}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٤س} + \text{٤}} \cdot \text{ءس}$

المقام تربيعي يحلل $\underbrace{(\text{س}-\text{٢})(\text{س}-\text{٢})}_{\text{متشابهة}}$

الحل: ليس كسور جزئية

$\int \frac{\text{س}}{(\text{س}-\text{٢})^{\text{٢}}} \cdot \text{ءس} = \int \text{س}(\text{س}-\text{٢})^{-\text{٢}} \cdot \text{ءس}$ بالأجزاء

المقام يمكن تعويض

$\text{ق} = \text{س} \longrightarrow \text{ءق} = \text{١} \cdot \text{ءس}$

$\text{ءهـ} = (\text{س}-\text{٢})^{-\text{٢}} \cdot \text{ءس} \longrightarrow \text{هـ} = \frac{(\text{س}-\text{٢})^{-\text{١}}}{-\text{١}}$

$= -\text{س}(\text{س}-\text{٢})^{-\text{١}} + \int (\text{س}-\text{٢})^{-\text{١}} \cdot \text{ءس}$

$= -\text{س}(\text{س}-\text{٢})^{-\text{١}} + \text{لـو}|\text{س}-\text{٢}| + \text{جـ}$

للعلم ...

$\int \text{قاس} \cdot \text{ءس} = \int \frac{\text{قاس}(\text{قاس}+\text{ظاس})}{\text{قاس}+\text{ظاس}} \cdot \text{ءس} = \text{لـو}|\text{قاس}+\text{ظاس}| + \text{جـ}$

$\int \text{قتاس} \cdot \text{ءس} = \int \frac{\text{قتاس}(\text{قتاس}-\text{ظتاس})}{\text{قتاس}-\text{ظتاس}} \cdot \text{ءس} = \text{لـو}|\text{قتاس}-\text{ظتاس}| + \text{جـ}$

أسئلة غير مباشرة على الكسور الجزئية (تعويض ثم كسور)

(١) $\int \frac{\text{١}}{\text{١}+\text{هـ}^{\text{س}}} \cdot \text{ءس}$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}} \\ \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{هـ}^{\text{س}} \\ \frac{\text{ءص}}{\text{هـ}^{\text{س}}} = \text{ءس} \end{array} \right.$

$\longrightarrow \int \frac{\text{١}}{\text{١}+\text{ص}} \times \frac{\text{ءص}}{\text{هـ}^{\text{س}}}$ ← من الفرض $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}$

$= \int \frac{\text{١}}{\text{١}+\text{ص}} \times \frac{\text{ءص}}{\text{ص}}$

$= \int \frac{\text{١}}{\text{ص}(\text{١}+\text{ص})} \cdot \text{ءص}$ .... كسور جزئية

اكمل الحل.

(٢) $\int \frac{\text{١}}{\text{هـ}^{\text{س}} - \text{هـ}^{-\text{س}}} \cdot \text{ءس}$

$= \int \frac{\text{١}}{\text{هـ}^{\text{س}} - \frac{\text{١}}{\text{هـ}^{\text{س}}}} \cdot \text{ءس} \overset{\text{توحيد}}{=} \int \frac{\text{١}}{\frac{\text{هـ}^{\text{٢س}} - \text{١}}{\text{هـ}^{\text{س}}}} \cdot \text{ءس}$

$= \int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{٢س}} - \text{١}} \cdot \text{ءس}$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}} \\ \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{هـ}^{\text{س}} \\ \frac{\text{ءص}}{\text{هـ}^{\text{س}}} = \text{ءس} \end{array} \right.$

$\longrightarrow \int \frac{\cancel{\text{ص}}}{\text{ص}^{\text{٢}}-\text{١}} \times \frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{ص}}}$

$= \int \frac{\text{١}}{\text{ص}^{\text{٢}}-\text{١}} \cdot \text{ءص}$ .... كسور جزئية

اكمل الحل.

حل آخر: $\left\{ \begin{array}{l} \text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}} \\ \frac{\text{ءص}}{\text{هـ}^{\text{س}}} = \text{ءس} \end{array} \right.$ $\int \frac{\text{١}}{\text{ص} - \text{ص}^{-\text{١}}} \times \frac{\text{ءص}}{\text{ص}}$ لا $\int \frac{\text{١}}{\text{ص}^{\text{٢}}-\text{١}} \cdot \text{ءص}$

(٣) $\int \frac{\text{هـ}^{\text{٣س}}}{\text{هـ}^{\text{٢س}} - \text{٣هـ}^{\text{س}} - \text{٤}} \cdot \text{ءس}$

الحل: نحتاج دائماً $\text{هـ}^{\text{س}}$ لذلك $\text{هـ}^{\text{٣س}} = (\text{هـ}^{\text{س}})^{\text{٣}}$ ، $\text{هـ}^{\text{٢س}} = (\text{هـ}^{\text{س}})^{\text{٢}}$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}} \\ \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{هـ}^{\text{س}} \\ \frac{\text{ءص}}{\text{هـ}^{\text{س}}} = \text{ءس} \end{array} \right.$

$\longrightarrow \int \frac{\text{ص}^{\text{٣}}}{\text{ص}^{\text{٢}} - \text{٣ص} - \text{٤}} \cdot \frac{\text{ءص}}{\text{هـ}^{\text{س}}}$ ← من الفرض $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}$

$= \int \frac{\cancel{\text{ص}^{\text{٣}}}^{\,\text{٢}}}{\text{ص}^{\text{٢}} - \text{٣ص} - \text{٤}} \cdot \frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{ص}}}$

$\Leftarrow \int \frac{\text{ص}^{\text{٢}}}{\text{ص}^{\text{٢}} - \text{٣ص} - \text{٤}} \cdot \text{ءص}$ قسمة طويلة ثم كسور جزئية

$\begin{array}{r} \text{١} \\ \text{ص}^{\text{٢}} - \text{٣ص} - \text{٤} \,\big)\, \text{ص}^{\text{٢}} \\ \mp\text{ص}^{\text{٢}} \pm \text{٣ص} \pm \text{٤} \\ \hline \text{٣ص} + \text{٤} \end{array}$

$= \int \text{١} \cdot \text{ءص} + \int \frac{\text{٣ص} + \text{٤}}{\text{ص}^{\text{٢}} - \text{٣ص} - \text{٤}} \cdot \text{ءص}$

اكمل الحل.

(٤) $\int \frac{\text{جا}^{\text{٣}}\text{س}}{\text{جتا}^{\text{٢}}\text{س} - \text{٣جتاس} + \text{٢}} \cdot \text{ءس}$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{ص} = \text{جتاس} \\ \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{جاس} \\ \frac{\text{ءص}}{-\text{جاس}} = \text{ءس} \end{array} \right.$

$\longrightarrow \int \frac{\text{جا}^{\cancel{\text{٣}}\,\text{٢}}\text{س}}{\text{ص}^{\text{٢}} - \text{٣ص} + \text{٢}} \times \frac{\text{ءص}}{-\cancel{\text{جاس}}}$

$= -\int \frac{\text{١} - \text{جتا}^{\text{٢}}\text{س}}{\text{ص}^{\text{٢}} - \text{٣ص} + \text{٢}} \cdot \text{ءص}$

$= \int \frac{\text{ص}^{\text{٢}} - \text{١}}{\text{ص}^{\text{٢}} - \text{٣ص} + \text{٢}}$

$\begin{array}{r} \text{١} \\ \text{ص}^{\text{٢}} - \text{٣ص} + \text{٢} \,\big)\, \text{ص}^{\text{٢}} - \text{١} \\ \mp\text{ص}^{\text{٢}} \pm \text{٣ص} \mp \text{٢} \\ \hline \text{٣ص} - \text{٣} \end{array}$

$= \int \text{١} \cdot \text{ءص} + \int \frac{\text{٣ص} - \text{٣}}{\text{ص}^{\text{٢}} - \text{٣ص} + \text{٢}} \cdot \text{ءص}$

$= \text{ص} + \int \frac{\text{٣}\cancel{(\text{ص}-\text{١})}}{\cancel{(\text{ص}-\text{١})}(\text{ص}-\text{٢})} \cdot \text{ءص} = \text{ص} + \text{٣لـو}|\text{ص}-\text{٢}| + \text{جـ}$

$= \text{جتاس} + \text{٣لـو}|\text{جتاس}-\text{٢}| + \text{جـ}$

رابعًا: تكامل الاقترانات اللوغاريتمية :-

* ملاحظة: لا يوجد تكامل مباشر لـ $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

$\int \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \cdot \text{ءس}$ بالأجزاء .

* اذا ظهر اللوغاريتم في أي تكامل نبدأ بطريقة التعويض بحيث نفرض ص = اللوغاريتم أينما وجد ثم نجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

* في بعض الحالات تفشل طريقة التعويض بسبب عدم الاختصار عندئذٍ نعتمد الأجزاء بحيث نفرض ق = اللوغاريتم وليس الجزء السهل للاشتقاق .

أمثلة :-

① $\int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}} \cdot \text{ءس}$

ص = $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1}{\text{س}}$ ، س . ءص = ءس

$\xrightarrow{\text{تعويض}} \int \frac{\text{ص}}{\cancel{\text{س}}} \times \cancel{\text{س}} \cdot \text{ءص} = \frac{\text{ص}^2}{2} + \text{جـ} = \frac{(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2}{2} + \text{جـ}$

② $\int \frac{\text{ءس}}{\text{س لو}_{\text{هـ}}\text{س}} = \int \frac{1}{\text{س لو}_{\text{هـ}}\text{س}} \cdot \text{ءس}$

ص = $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1}{\text{س}}$ ، س . ءص = ءس

$\longrightarrow \int \frac{1}{\cancel{\text{س}}\,\text{ص}} \times \cancel{\text{س}} \cdot \text{ءص} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| + \text{جـ} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}| + \text{جـ}$

③ $\int_{1}^{\text{هـ}^{\frac{\pi}{2}}} \frac{1}{\text{س}} \text{جا}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}) \cdot \text{ءس}$

ص = $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1}{\text{س}}$ ، س . ءص = ءس

$\longrightarrow \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cancel{\text{س}}} \times \text{جا ص} \times \cancel{\text{س}} \cdot \text{ءص} = -\text{جتا ص}\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$

يتم تبديل الحدود: س = ١ ← ص = ٠ ، س = $\text{هـ}^{\frac{\pi}{2}}$ ← ص = $\frac{\pi}{2}$

$= -[\text{جتا}\,0 - \text{جتا}\frac{\pi}{2}]$

$= -[1 - \text{صفر}] = -1$

④ $\int \text{س لو}_{\text{هـ}}\text{س} \cdot \text{ءس}$

ص = $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1}{\text{س}}$ ، س . ءص = ءس

$\longrightarrow \int \text{س ص} \times \text{س} \cdot \text{ءص}$

لا يوجد اختصار لذلك فشلت طريقة التعويض نعتمد الأجزاء مؤقتًا

ق = $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ ⟵ ءق = $\frac{1}{\text{س}} \cdot \text{ءس}$

ءهـ = س . ءس ⟵ هـ = $\frac{\text{س}^2}{2}$

$\int \text{س لو}_{\text{هـ}}\text{س} \cdot \text{ءس} = \frac{\text{س}^2}{2}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \int \frac{\text{س}^2}{2} \times \frac{1}{\text{س}} \cdot \text{ءس}$

$= \frac{\text{س}^2}{2}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\text{س}^2}{2} + \text{جـ}$

⑤ $\int_{\text{هـ}}^{\text{هـ}^2} \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \cdot \text{ءس}$ بالأجزاء

ق = $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ ⟵ ءق = $\frac{1}{\text{س}} \cdot \text{ءس}$

ءهـ = ١ . ءس ⟵ هـ = س

$\int_{\text{هـ}}^{\text{هـ}^2} (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}) \cdot \text{ءس} = \text{س لو}_{\text{هـ}}\text{س}\Big|_{\text{هـ}}^{\text{هـ}^2} - \int_{\text{هـ}}^{\text{هـ}^2} \text{س} \times \frac{1}{\text{س}} \cdot \text{ءس}$

$= \text{هـ}^2\text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ}^2 - \text{هـ لو}_{\text{هـ}}\text{هـ} - 1(\text{هـ}^2 - \text{هـ})$

$= \text{هـ}^2 \times 2 - \text{هـ} \times 1 - \text{هـ}^2 + \text{هـ} = \text{هـ}^2$

⑥ $\int_{1}^{\text{هـ}} \text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{\text{س}} \cdot \text{ءس}$ من عائلة ($\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$)

نبسط الاقتران $\int \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^{\frac{1}{2}} \cdot \text{ءس} = \int_{1}^{\text{هـ}} \frac{1}{2}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \cdot \text{ءس}$

ق = $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ ⟵ ءق = $\frac{1}{\text{س}} \cdot \text{ءس}$

ءهـ = $\frac{1}{2} \cdot \text{ءس}$ ⟵ هـ = $\frac{1}{2}$س

$\int_{1}^{\text{هـ}} \text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{\text{س}} \cdot \text{ءس} = \frac{1}{2}\text{س لو}_{\text{هـ}}\text{س}\Big|_{1}^{\text{هـ}} - \int_{1}^{\text{هـ}} \frac{1}{2}\cancel{\text{س}} \times \frac{1}{\cancel{\text{س}}} \cdot \text{ءس}$

$= \frac{1}{2}\text{هـ لو}_{\text{هـ}}\text{هـ} - \frac{1}{2}\text{لو}_{\text{هـ}}1 - \frac{1}{2}(\text{هـ} - 1) = \frac{1}{2}$

⑦ $\int \text{لو}_{\text{هـ}}\frac{1}{\sqrt[3]{\text{س}}} \cdot \text{ءس}$ من عائلة ($\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$)

الحل: نجهز $\int \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^{-\frac{1}{3}} \cdot \text{ءس} = \int -\frac{1}{3}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \cdot \text{ءس}$

بالأجزاء .... $= -\frac{1}{3}\text{س لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \frac{1}{3}\text{س} + \text{جـ}$

⑧ $\int_{1}^{\text{هـ}} \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^2 \cdot \text{ءس}$ من عائلة ($\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$)

الحل: نجهز $\int_{1}^{\text{هـ}} 2\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \cdot \text{ءس}$ ـــ بالأجزاء الجواب ؟

⑨ $\int (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2 \cdot \text{ءس}$ لا نستطيع أن نخرج القوة لأنها للجميع

الحل:- ق = $(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2$ ⟵ ءق = $2(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}) \times \frac{1}{\text{س}} \cdot \text{ءس}$

ءهـ = ١ . ءس ⟵ هـ = س

$\int (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2 \cdot \text{ءس} = \text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2 - \int 2\cancel{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \times \frac{1}{\cancel{\text{س}}} \cdot \text{ءس}$

أجزاء مرة أخرى

$= \text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2 - $ [ق = $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ ⟵ ءق = $\frac{1}{\text{س}} \cdot \text{ءس}$ ، ءهـ = ٢ . ءس ⟵ هـ = ٢س]

$\int (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2 \cdot \text{ءس} = \text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2 - (2\text{س لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \int 2\cancel{\text{س}} \times \frac{1}{\cancel{\text{س}}} \cdot \text{ءس})$

$= \text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2 - 2\text{س لو}_{\text{هـ}}\text{س} + 2\text{س} + \text{جـ}$

حل آخر: تعويض ثم أجزاء مرتين حيث ص = $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$.

⑩ $\int_{1}^{\text{هـ}} 2\text{س}^2\,\text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}} \cdot \text{ءس}$

الحل: نبسط الاقتران $\Leftarrow \int_{1}^{\text{هـ}} 2\text{س}^2 \times \text{س} \cdot \text{ءس}$ (تذكر $\text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}} = \text{س}$)

$= \int_{1}^{\text{هـ}} 2\text{س}^3 \cdot \text{ءس} = \frac{2\text{س}^4}{4}\Big|_{1}^{\text{هـ}} = \frac{1}{2}(\text{هـ}^4 - 1)$

(١١) $\int \text{جتاس لو}_{\text{هـ}}(\text{جاس}) \,.\, \text{ءس}$

الحل : ق = $\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{جاس})$ ⟵ ءق = $\frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}$. ءس

ءهـ = جتاس . ءس ⟵ هـ = جاس

$\int \text{جتاس لو}_{\text{هـ}}(\text{جاس}) \,.\, \text{ءس} = \text{جاس لو}_{\text{هـ}}\text{جاس} - \int \text{جتاس} \,.\, \text{ءس}$

= $\text{جاس لو}_{\text{هـ}}\text{جاس} - \text{جاس} + \text{ث}$

حل آخر بالتعويض حيث ص = جاس ...... ثم أجزاء .

(١٢) $\int \text{قا}^2\text{س لو}_{\text{هـ}}\text{ظاس} \,.\, \text{ءس}$

الحل : ق = $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظاس}$ ⟵ ءق = $\frac{\text{قا}^2\text{س}}{\text{ظاس}}$. ءس

ءهـ = $\text{قا}^2\text{س}$. ءس

STOP لأنها نكدة !!؟

ص = ظاس

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{قا}^2\text{س}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{قا}^2\text{س}} = \text{ءس}$

⟵ $\int \text{قا}^2\text{س لو}_{\text{هـ}}\text{ص} \,.\, \frac{\text{ءص}}{\text{قا}^2\text{س}}$

$= \int (\text{ظا}^2\text{س} + 1)\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} \,.\, \text{ءص}$

$= \int \underbrace{(\text{ص}^2 + 1)}_{\text{ءهـ}} \underbrace{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}}_{\text{ق}} \,.\, \text{ءص}$

(١٣) $\int \text{جا}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}) \,.\, \text{ءس}$

ص = $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1}{\text{س}}$

س . ءص = ءس

⟵ $\int \text{جاص} \times \text{س} \,.\, \text{ءص}$ ⟵ من الفرض س = $\text{هـ}^{\text{ص}}$

$= \int \text{جاص} \,.\, \text{هـ}^{\text{ص}} \,.\, \text{ءص}$

اذاً اجزاء مرتين ثم دوري مثل ١٤ .

تمرين عام (٢) :-

(١) $\int \text{س}^{\text{ن}}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \,.\, \text{ءس}$

(٢) $\int \sqrt{1 + \text{هـ}^{\text{س}}} \,.\, \text{ءس}$

(٣) $\int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+٢)}{\sqrt[3]{\text{س}+٢}} \,.\, \text{ءس}$

(٤) $\int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{(\text{س}-٢)^2} \,.\, \text{ءس}$

(٥) $\int \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس لو}_{\text{هـ}}\text{جاس}} \,.\, \text{ءس}$

(٦) $\int \frac{\text{جتاس}}{1 + ٣\text{جاس} - \text{جتا}٢\text{س}} \,.\, \text{ءس}$

(٧) $\int \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2 - 1) \,.\, \text{ءس}$

الحلول :-

(١) ق = $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ ⟵ ءق = $\frac{1}{\text{س}}$. ءس

ءهـ = $\text{س}^{\text{ن}}$. ءس ⟵ هـ = $\frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1}$

$\int \text{س}^{\text{ن}}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \,.\, \text{ءس} = \frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \frac{1}{\text{ن}+1}\int \underbrace{\text{س}^{\text{ن}+1} \times \frac{1}{\text{س}}}_{\text{س}^{\text{ن}}} \,.\, \text{ءس}$

$= \frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \frac{1}{\text{ن}+1} \times \frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{ث}$.

(٢) ص = $\sqrt{1 + \text{هـ}^{\text{س}}}$

$\text{ص}^2 = 1 + \text{هـ}^{\text{س}}$

$٢\text{ص} \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{هـ}^{\text{س}}$

$\frac{٢\text{ص}}{\text{هـ}^{\text{س}}} \,.\, \text{ءص} = \text{ءس}$

⟵ $\int \text{ص} \times \frac{٢\text{ص}}{\text{هـ}^{\text{س}}} \,.\, \text{ءص}$ ⟵ الفرض $\text{هـ}^{\text{س}} = \text{ص}^2 - 1$

$\int \frac{٢\text{ص}^2}{\text{ص}^2 - 1} \,.\, \text{ءص}$

قسمة ثم كسور

(٣) ص = $\sqrt[3]{\text{س}+٢}$

$\text{ص}^3 = \text{س} + ٢$

$٣\text{ص}^2 \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 1$

$٣\text{ص}^2 \,.\, \text{ءص} = \text{ءس}$

⟵ $\int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}^3}{\cancel{\text{ص}}} \times ٣\cancel{\text{ص}^2} \,.\, \text{ءص}$

$\int ٣\text{ص لو}_{\text{هـ}}\text{ص}^3 \,.\, \text{ءص}$

$\int ٩\text{ص لو}_{\text{هـ}}\text{ص} \,.\, \text{ءص}$

.... اجزاء محلول مثل ١ .

(٤) $\int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{(\text{س}-٢)^2} \,.\, \text{ءس} = \int (\text{س}-٢)^{-2}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \,.\, \text{ءس}$.

ق = $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ ⟵ ءق = $\frac{1}{\text{س}}$. ءس

ءهـ = $(\text{س}-٢)^{-2}$ ءس ⟵ هـ = $\frac{(\text{س}-٢)^{-1}}{-1}$

$\frac{-1}{(\text{س}-٢)}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \int \frac{1}{\text{س}(\text{س}-٢)} \,.\, \text{ءس}$

..... كسور جزئية

(٥) ص = $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{جاس}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}$

$\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} \,.\, \text{ءص} = \text{ءس}$

⟵ $\int \frac{\cancel{\text{جتاس}}}{\cancel{\text{جاس}} \times \text{ص}} \times \frac{\cancel{\text{جاس}}}{\cancel{\text{جتاس}}} \,.\, \text{ءص}$

$\int \frac{1}{\text{ص}} \,.\, \text{ءص}$

$\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| + \text{ث} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{لو}_{\text{هـ}}\text{جاس}| + \text{ث}$

* حل آخر نفرض ص = جاس .

(٦) نحتاج المطابقة جتا٢س = ١ - ٢جا²س كي يصبح كل المقام بدلالة جاس .

⟸ $\int \frac{\text{جتاس}}{1 + ٣\text{جاس} - 1 + ٢\text{جا}^2\text{س}} \,.\, \text{ءس}$

$\int \frac{\text{جتاس}}{٢\text{جا}^2\text{س} + ٣\text{جاس}} \,.\, \text{ءس}$

ص = جاس

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{جتاس}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{جتاس}} = \text{ءس}$

⟵ $\int \frac{\cancel{\text{جتاس}}}{٢\text{ص}^2 + ٣\text{ص}} \times \frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{جتاس}}}$

$\int \frac{1}{٢\text{ص}^2 + ٣\text{ص}} \,.\, \text{ءص}$ ..... كسور جزئية

أكمل الحل أ = $\frac{1}{3}$ ، ب = $\frac{-2}{3}$

تتميز هذه الصفحة بظهور الجذر تربيعي أو تكعيبي .

١ جد $\int \text{هـ}^{\sqrt{\text{س}}} \cdot \text{ءس}$

* المشكلة في القوة لذلك نفرضها ص .

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}}$ ، $\text{ص}^2 = \text{س}$ ، $2\text{ص} \cdot \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 1$ ، $2\text{ص} \cdot \text{ءص} = \text{ءس}$

$\longrightarrow \int \text{هـ}^{\text{ص}} \times 2\text{ص} \cdot \text{ءص}$ بالأجزاء

$\text{ق} = 2\text{ص} \longrightarrow \text{ءق} = 2 \cdot \text{ءص}$

$\text{ءهـ} = \text{هـ}^{\text{ص}} \cdot \text{ءص} \longrightarrow \text{هـ} = \text{هـ}^{\text{ص}}$

$= 2\text{ص}\,\text{هـ}^{\text{ص}} - 2\int \text{هـ}^{\text{ص}} \cdot \text{ءص}$

$= 2\text{ص}\,\text{هـ}^{\text{ص}} - 2\,\text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ}$

$= 2\sqrt{\text{س}}\,\text{هـ}^{\sqrt{\text{س}}} - 2\,\text{هـ}^{\sqrt{\text{س}}} + \text{جـ}$.

٢ $\int \text{قا}^2 \sqrt{\text{س}} \cdot \text{ءس}$ ---- المشكلة الزاوية

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}}$ ، $\text{ص}^2 = \text{س}$ ، $2\text{ص} \cdot \text{ءص} = \text{ءس}$

$\longrightarrow \int \text{قا}^2\text{ص} \cdot 2\text{ص} \cdot \text{ءص}$

$\text{ق} = 2\text{ص} \longrightarrow \text{ءق} = 2 \cdot \text{ءص}$

$\text{ءهـ} = \text{قا}^2\text{ص} \cdot \text{ءص} \longrightarrow \text{هـ} = \text{ظاص}$

$= 2\text{ص}\,\text{ظاص} - 2\int \text{ظاص} \cdot \text{ءص} \longleftarrow \frac{\text{جاص}}{\text{جتاص}}$

$= 2\text{ص}\,\text{ظاص} + 2\,\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{جتاص}| + \text{جـ}$

$= 2\sqrt{\text{س}}\,\text{ظا}\sqrt{\text{س}} + 2\,\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{جتا}\sqrt{\text{س}}| + \text{جـ}$.

٣ $\int \frac{\sqrt{\text{س}}}{\text{س} - 9} \cdot \text{ءس}$ ---- المشكلة $\sqrt{\text{س}}$ لذلك نفرضها ص .

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}}$ ، $\text{ص}^2 = \text{س}$ ، $2\text{ص} \cdot \text{ءص} = \text{ءس}$

$\longrightarrow \int \frac{\text{ص}}{\text{ص}^2 - 9} \times 2\text{ص} \cdot \text{ءص}$

$= \int \frac{2\text{ص}^2}{\text{ص}^2 - 9} \cdot \text{ءص}$ ---- قسمة طويلة

$$\begin{array}{r|l} 2 & \\ \hline 2\text{ص}^2 & \text{ص}^2 - 9 \\ -2\text{ص}^2 \pm 18 & \\ \hline 18 & \end{array}$$

$\Longleftarrow \int \frac{2\text{ص}^2}{\text{ص}^2 - 9} \cdot \text{ءص} = \int 2 \cdot \text{ءص} + \int \underbrace{\frac{18}{\text{ص}^2 - 9}}_{\text{كسور}} \cdot \text{ءص}$

$= 2\text{ص} + \int \frac{18}{\text{ص}^2 - 9} = \frac{\text{أ}}{\text{ص} - 3} + \frac{\text{ب}}{\text{ص} + 3}$

$18 = \text{أ}(\text{ص} + 3) + \text{ب}(\text{ص} - 3)$

جذور المقام: $\text{ص} = 3 \longrightarrow 18 = 6\text{أ} \longrightarrow \text{أ} = 3$

$\text{ص} = -3 \longrightarrow 18 = -6\text{ب} \longrightarrow \text{ب} = -3$

$= 2\text{ص} + \int \frac{3}{\text{ص} - 3} \cdot \text{ءص} + \int \frac{-3}{\text{ص} + 3} \cdot \text{ءص}$

$= 2\text{ص} + 3\,\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{ص} - 3| - 3\,\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{ص} + 3| + \text{جـ}$

$= 2\sqrt{\text{س}} + 3\,\text{لو}_{\text{هـ}} |\sqrt{\text{س}} - 3| - 3\,\text{لو}_{\text{هـ}} |\sqrt{\text{س}} + 3| + \text{جـ}$

ملاحظة إذا ظهر $\sqrt{\text{س}}$ افرضه ص .

٤ $\int \frac{\sqrt[3]{1 - \sqrt{\text{س}}}}{4\sqrt{\text{س}}} \cdot \text{ءس}$ الحل افرض $\text{ص} = 1 - \sqrt{\text{س}}$ أو $\sqrt{\text{س}}$

٥ $\int \text{لو}_{\text{هـ}} \sqrt{2\text{س} + 1} \cdot \text{ءس} \longrightarrow \int \text{لو}_{\text{هـ}} (2\text{س} + 1)^{\frac{1}{2}} \cdot \text{ءس}$

$= \int \frac{1}{2}\,\text{لو}_{\text{هـ}} (2\text{س} + 1) \cdot \text{ءس}$ ---- بالأجزاء وداخله قسمة طويلة

$\text{ق} = \text{لو}_{\text{هـ}} (2\text{س} + 1) \longrightarrow \text{ءق} = \frac{2}{2\text{س} + 1}$

$\text{ءهـ} = \frac{1}{2} \cdot \text{ءس} \longrightarrow \text{هـ} = \frac{1}{2}\text{س}$

$\Longleftarrow$ أكمل الحل ... الجواب $\frac{1}{2}\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(2\text{س}+1) - \frac{1}{2}\text{س} + \frac{1}{4}\,\text{لو}_{\text{هـ}} |2\text{س} + 1|$

حل آخر : افرض $\text{ص} = \sqrt{2\text{س} + 1}$

$\text{ص} = \sqrt{2\text{س} + 1}$ ، $\text{ص}^2 = 2\text{س} + 1$ ، $2\text{ص} \cdot \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 2$ ، $\text{ص} \cdot \text{ءص} = \text{ءس}$

$\longrightarrow \int \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} \times \text{ص} \cdot \text{ءص}$

$= \int \underbrace{\text{ص}}_{\text{ءهـ}}\,\underbrace{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}}_{\text{ق}} \cdot \text{ءص}$ ---- بالأجزاء

محلول ص ١٨

٦ $\int \frac{\sqrt{\text{س} + 1} + 1}{\sqrt{\text{س} + 1} - 1} \cdot \text{ءس}$ لاحظ وجود جذر مكرر

الحل: $\text{ص} = \sqrt{\text{س} + 1}$ ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1}{2\sqrt{\text{س} + 1}}$ ، $2\sqrt{\text{س} + 1} \cdot \text{ءص} = \text{ءس}$

$\longrightarrow \int \frac{\text{ص} + 1}{\text{ص} - 1} \times 2\sqrt{\text{س} + 1} \cdot \text{ءص}$

$= \int \frac{\text{ص} + 1}{\text{ص} - 1} \times 2\text{ص} \cdot \text{ءص}$

$= \int \frac{2\text{ص}^2 + 2\text{ص}}{\text{ص} - 1}$ قسمة طويلة أكمل الحل .

حل آخر

$\text{ص} = \sqrt{\text{س} + 1} - 1$ المقام كامل ---- اكمل الحل .

٧ $\int \frac{\text{س}}{\sqrt{2\text{س} + 3} - \sqrt{\text{س} + 3}} \cdot \text{ءس}$

* لاحظ جذرين مختلفين لذلك بالمرافق .

الحل: $\int \frac{\text{س}}{\sqrt{2\text{س} + 3} - \sqrt{\text{س} + 3}} \times \frac{\sqrt{2\text{س} + 3} + \sqrt{\text{س} + 3}}{\sqrt{2\text{س} + 3} + \sqrt{\text{س} + 3}} \cdot \text{ءس}$

$= \int \frac{\text{س}\left(\sqrt{2\text{س} + 3} + \sqrt{\text{س} + 3}\right)}{2\text{س} + 3 - (\text{س} + 3)} \cdot \text{ءس}$

$= \int \frac{\cancel{\text{س}}\left(\sqrt{2\text{س} + 3} + \sqrt{\text{س} + 3}\right)}{\cancel{\text{س}}} \cdot \text{ءس}$

$= \underbrace{\int \sqrt{2\text{س} + 3} \cdot \text{ءس}}_{\text{مباشر}} + \underbrace{\int \sqrt{\text{س} + 3} \cdot \text{ءس}}_{\text{مباشر}}$

تمرين :- $\int \frac{\sqrt{\text{س}}}{1 + \text{س}\sqrt{\text{س}}} \cdot \text{ءس}$

افرض $\text{ص} = \sqrt{\text{س}}$ الحل ص ٢٨٨ من الكتاب

8 $\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{س}} . دس$

ص $= \sqrt[3]{س}$

$ص^3 = س$

$3ص^2 \frac{دص}{دس} = 1$

$3ص^2 . دص = دس$

$\leftarrow \int \frac{1}{1+ص} \times 3ص^2 . دص$

$= \int \frac{3ص^2}{1+ص} . دص$

قسمة طويلة أكمل الحل

حل آخر: ص $= 1 + \sqrt[3]{س}$ (المقام كامل).

9 $\int \frac{دس}{\sqrt{1-\sqrt{س}}}$

الحل: ص $= 1 - \sqrt{س}$

$\frac{دص}{دس} = -\frac{1}{2\sqrt{س}}$

$-2\sqrt{س} . دص = دس$

$\leftarrow \int \frac{-2\sqrt{س}}{\sqrt{ص}} . دص$ من الفرض $\sqrt{س} = 1 - ص$

$\leftarrow \int \frac{-2(1-ص)}{ص^{\frac{1}{2}}} . دص$

$\leftarrow \int (-2 + 2ص) ص^{-\frac{1}{2}} دص$

$\leftarrow \int -2ص^{-\frac{1}{2}} + 2ص^{\frac{1}{2}} . دص$

$-2 \times \frac{ص^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + 2 \times \frac{ص^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + ج$

$-4(1-\sqrt{س})^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{3}(1-\sqrt{س})^{\frac{3}{2}} + ج$

10 اذا كان $\int_1^{هـ} س\, ق(س) . دس = 4$

جد $\int_0^2 هـ^{س} ق(\sqrt{هـ^{س}}) . دس$

الحل: ص $= \sqrt{هـ^{س}}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{هـ^{س}}{2\sqrt{هـ^{س}}}$

$\frac{2\sqrt{هـ^{س}} . دص}{هـ^{س}} = دس$

$\leftarrow \int_1^{هـ} \cancel{هـ^{س}} ق(ص) \frac{2\sqrt{هـ^{س}}}{\cancel{هـ^{س}}} . دص$

$= \int_1^{هـ} 2ص\, ق(ص) . دص$

$= 8$

عندما س = 0 ← ص = 1 وعندما س = 2 ← ص = هـ

11 $\int_1^8 \frac{2}{\sqrt[3]{س^4} + 4س + 3\sqrt[3]{س^2}} . دس$

ص $= \sqrt[3]{س}$

$ص^3 = س$

$3ص^2 \frac{دص}{دس} = 1$

$3ص^2 . دص = دس$

$\leftarrow \int_1^2 \frac{2 \times 3ص^2}{ص^4 + 4ص^3 + 3ص^2} . دص$

$\int_1^2 \frac{6\cancel{ص^2}}{\cancel{ص^2}(ص^2+4ص+3)} . دص$

$\int_1^2 \frac{6}{ص^2+4ص+3} . دص$

ثم اكمل كسور جزئية

* الجواب -3 لو(5×2) + 3 لو(4×3)

12 $\int \frac{1}{1+جا2س} . دس$ بالضرب بالمرافق.

الحل: $\int \frac{1}{1+جا2س} \times \frac{1-جا2س}{1-جا2س} . دس = \int \frac{1-جا2س}{1-جا^2 2س} . دس$

$\Leftarrow \int \frac{1-جا2س}{جتا^2 2س} . دس = \int \frac{1}{جتا^2 2س} . دس - \int \frac{جا2س}{جتا^2 2س} . دس$

$= \int قا^2 2س . دس - \underbrace{\int قا2س\, ظا2س . دس}_{مباشر}$

$= \frac{ظا2س}{2} - \frac{قا2س}{2} + ج$

13 $\int \frac{(س+1)^5}{س^7} . دس$ سؤال غير طبيعي لانه ليس تعويض مباشر وليس اجزاء

حيث انه لو تم رفع المقام للبسط فيصبح السؤال

$\int (س+1)^5 \times س^{-7} . دس$ فلا يحل اجزاء

سوف نقوم باخراج عامل مشترك من لا شئ.

$\int \frac{(س(1+س^{-1}))^5}{س^7} . دس = \int \frac{\cancel{س^5}(1+س^{-1})^5}{\cancel{س^7}\,^2} . دس$

ص $= 1 + س^{-1}$

$\frac{دص}{دس} = -س^{-2}$

$\frac{دص}{-س^{-2}} = دس$

$\leftarrow \int \frac{ص^5}{\cancel{س^2}} \times \frac{دص}{\cancel{-س^{-2}}} = \frac{-ص^6}{6} + ج$

$= \frac{-(1+س^{-1})^6}{6} + ج$

حل آخر: فك $س^7 = س^5 \times س^2$

$\Leftarrow \int \frac{(س+1)^5}{س^5 \times س^2} . دس = \int \left(\frac{س+1}{س}\right)^5 \times \left(\frac{1}{س^2}\right) . دس$

تمرين: جد $\int \frac{(س+1)^ن}{س^{ن+2}} . دس$ حيث ن $\in$ ط*

14 $\int \frac{(س^3+1)^5}{س^{19}} . دس$

الحل: $\int \frac{(س^3(1+س^{-3}))^5}{س^{19}} . دس = \int \frac{س^{15}(1+س^{-3})^5}{س^{19}} . دس$

$\Leftarrow \int \frac{(1+س^{-3})^5}{س^4} . دس$ اكمل بالتعويض ص $= 1 + س^{-3}$

حل آخر: تفتيت حسب الأصول.

$\int \frac{(س^3+1)^5}{س^{19}} . دس = \int \frac{(س^3+1)^5}{(س^3)^5 \times س^4} . دس$

$= \int \frac{(س^3+1)^5}{(س^3)^5 \times س^4} . دس$

$\int \left(\frac{س^3+1}{س^3}\right)^5 \times \frac{1}{س^4} . دس = \int (1+س^{-3})^5 \times \frac{1}{س^4} . دس$

ص $= 1 + س^{-3}$ ← أكمل

١١٥ $\int \frac{\sqrt{س+1}}{\sqrt{س^5}} \cdot ءس = \int \frac{\sqrt{س+1}}{\sqrt{س}\,\sqrt{س^4}} \cdot ءس$

$\Leftarrow \int \sqrt{\frac{س+1}{س}} \times \frac{1}{س^2} \cdot ءس = \int \sqrt{1+س^{-1}} \times \frac{1}{س^2} \cdot ءس$

ثم تعويض

---

١١٦ $\int س^{10}\left(س^2+\frac{4}{س}\right)^5 \cdot ءس$ توحيد مقامات ثم اختصار القوة الكبيرة

$\int س^{10}\left(\frac{س^3+4}{س}\right)^5 \cdot ءس$

$\int س^{10}\,\frac{(س^3+4)^5}{س^5} \cdot ءس = \int س^5 (س^3+4)^5 \cdot ءس$

$ص = س^3+4$ أكمل بالتعويض مع مختلط

---

١١٦ $\int س^2\sqrt{\frac{2}{س^2}+\frac{3}{س}} \cdot ءس$ حيث س > صفر

الحل: $\int س^2 \sqrt{\frac{2+3س}{س^2}} \cdot ءس$

$\int س^2\, \frac{\sqrt{2+3س}}{\sqrt{س^2}} \cdot ءس = \int \frac{س^2}{|س|}\sqrt{2+3س} \cdot ءس$

$\Leftarrow \int \underbrace{س}_{ق}\, \underbrace{\sqrt{2+3س} \cdot ءس}_{ءهـ}$ بالاجزاء

---

١١٧ $\int س\, هـ^{س+لوس} \cdot ءس = \int س\, هـ^{س} \times هـ^{لوس} \cdot ءس$

$= \int س^2 \cdot هـ^{س} \cdot ءس$ اجزاء مرتين.

---

١١٨ اذا كان ن عدد ∈ ص+ ما هي قيم ن التي تجعل المساواة $\int_{-1}^{1} س^{ن} \cdot ءس = 2\int_{0}^{1} س^{ن} \cdot ءس$ دائماً صحيحة.

الحل: $\frac{س^{ن+1}}{ن+1}\Big|_{-1}^{1} = 2 \times \frac{س^{ن+1}}{ن+1}\Big|_{0}^{1}$

$\frac{1-(-1)^{ن+1}}{ن+1} = 2 \times \frac{1}{ن+1} \Leftarrow 1-(-1)^{ن+1} = 2$

$-1 = (-1)^{ن+1} \Leftarrow$ ن+1 عدد فردي اذاً ن عدد زوجي.

---

١١٩ $\int \frac{1}{س^8 - س} \cdot ءس$ مقام من الدرجة ٨ فكر بعامل مشترك

الحل: $\int \frac{1}{س(س^7-1)} \cdot ءس$

$ص = س^7 - 1$

$\frac{ءص}{ءس} = 7س^6$

$\frac{ءص}{7س^6} = ءس$

$\Leftarrow \int \frac{1}{س\,ص} \cdot \frac{ءص}{7س^6}$

$\int \frac{1}{7س^7 ص} \cdot ءص$

$\int \frac{1}{7(ص+1)ص} \cdot ءص$ بالكسور الجزئية ← من الفرض ص+1 = س^7

* الجواب $-\frac{1}{7}لو|س^7| + \frac{1}{7}لو|س^7-1| + ج$

حل آخر لـ ١٩

---

١٢٠ $\int \frac{8}{س^3 - س} \cdot ءس$ — له عدة حلول.

الحل الأول: كسور جزئية.

$\frac{8}{س(س^2-1)} = \frac{أ}{س} + \frac{ب}{س-1} + \frac{جـ}{س+1}$

$\boxed{8 = أ(س-1)(س+1) + ب\,س(س+1) + جـ\,س(س-1)}$

الجذور:

$س = 0 \Leftarrow 8 = -أ \Leftarrow \boxed{أ = -8}$

$س = 1 \Leftarrow 8 = 0 + 2ب + 0 \Leftarrow \boxed{ب = 4}$

$س = -1 \Leftarrow 8 = 0 + 0 + 2جـ \Leftarrow \boxed{جـ = 4}$

$\int \frac{8}{س^3-س} \cdot ءس = \int \frac{-8}{س} \cdot ءس + \int \frac{4}{س-1} \cdot ءس + \int \frac{4}{س+1} \cdot ءس$

$= -8لو|س| + 4لو|س-1| + 4لو|س+1| + ج$

الحل الثاني: مشترك عادي ثم تعويض ثم كسور.

$\int \frac{8}{س(س^2-1)} \cdot ءس$

$ص = س^2 - 1$

$\frac{ءص}{ءس} = 2س$

$\frac{ءص}{2س} = ءس$

$\Leftarrow \int \frac{\cancel{8}^{4}}{س\,ص} \times \frac{ءص}{\cancel{2}س}$

$\int \frac{4}{س^2 ص} \cdot ءص$ لكن ص+1 = س^2

$\int \frac{4}{(ص+1)(ص)} \cdot ءص$ — كسور جزئية

الحل الثالث: مشترك عفريتي

$\int \frac{8}{س^3 - س} \cdot ءس = \int \frac{8}{س^3(1-س^{-2})} \cdot ءس$

$ص = 1 - س^{-2}$

$\frac{ءص}{ءس} = 2س^{-3}$

$\frac{ءص}{2س^{-3}} = ءس$

$\Leftarrow \int \frac{\cancel{8}^{4}}{\cancel{س^3}ص} \times \frac{ءص}{\cancel{2س^{-3}}}$

$\int \frac{4}{ص} \cdot ءس = 4لو|ص| + ج$

$= 4لو|1-س^{-2}| + ج$

$\int \frac{1}{س^8 - س} \cdot ءس = \int \frac{1}{س^8(1-س^{-7})} \cdot ءس$ مشترك عفريتي

$ص = 1 - س^{-7}$

$\frac{ءص}{7س^{-8}} = ءس$

$\int \frac{1}{\cancel{س^8}ص} \times \frac{ءص}{7\cancel{س^{-8}}}$

$\frac{1}{7}لو|ص| + ج$

$\frac{1}{7}لو|1-س^{-7}| + ج$

حل المقرر: ضرب البسط والمقام بـ $س^{-8}$

$\int \frac{س^{-8}}{1-س^{-7}} \cdot ءس = \frac{1}{7}\int \frac{7س^{-8}}{1-س^{-7}} \cdot ءس = \frac{1}{7}لو|1-س^{-7}| + ج$

ملاحظة للقوى الفردية والزوجية للجيب والجتا.

* اذا كانت القوى فردية نستخدم المتطابقة القديمة $\text{جا}^2\text{س} = 1 - \text{جتا}^2\text{س}$ والعكس ثم تعويض.
* في القوى الزوجية نستخدم المتطابقة $\text{جا}^2\text{س} = \frac{1}{2}(1 - \text{جتا}2\text{س})$ ، $\text{جتا}^2\text{س} = \frac{1}{2}(1 + \text{جتا}2\text{س})$ ثم متطابقات مرة أخرى ولا يكون تعويض وأجزاء.

١١ جد $\int \text{جا}^3\text{س} \, . \, \text{دس}$ ـــ القوة فردية

فك القوة للحصول على التربيع هو مبدأ الحل.

$\int \text{جا}^2\text{س جاس} \, . \, \text{دس} = \int (1 - \text{جتا}^2\text{س}) \, \text{جاس} \, . \, \text{دس}$ متطابقة $1 - \text{جتا}^2\text{س}$ فك الأقواس

$= \int \text{جاس} . \text{دس} - \int \text{جتا}^2\text{س جاس} . \text{دس}$

$= -\text{جتاس}$ ...

ص = جتاس ، $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\text{جاس}$ ، $\text{دس} = \frac{\text{دص}}{-\text{جاس}}$ ⇐ $\int \text{ص}^2 \text{جاس} . \frac{\text{دص}}{-\text{جاس}}$

$\frac{-\text{ص}^3}{3} + \text{هـ}$

$\frac{-\text{جتا}^3\text{س}}{3} + \text{هـ}$

$= -\text{جتاس} + \frac{\text{جتا}^3\text{س}}{3} + \text{هـ}$

١٢ $\int \text{جا}^4\text{س} . \text{دس}$ القوة زوجية نفكها للحصول على التربيع

الحل: $\int \text{جا}^2\text{س جا}^2\text{س} . \text{دس}$ ـ المتطابقة $\frac{1}{2}(1 - \text{جتا}2\text{س})$

$= \int \frac{1}{2}(1 - \text{جتا}2\text{س}) \, \frac{1}{2}(1 - \text{جتا}2\text{س}) . \text{دس}$ فك الأقواس

$= \int \frac{1}{4}(1 - 2\text{جتا}2\text{س} + \text{جتا}^2 2\text{س}) . \text{دس}$ ، $\frac{1}{2}(1 + \text{جتا}4\text{س})$

$= \frac{1}{4}\left(\text{س} - \frac{2\text{جا}2\text{س}}{2} + \frac{1}{2}\left(\text{س} + \frac{\text{جا}4\text{س}}{4}\right)\right) + \text{هـ}$.

١٣ $\int_0^{\pi/3} \text{ظا}^3\text{س} . \text{دس}$

$= \int_0^{\pi/3} \text{ظاس ظا}^2\text{س} . \text{دس}$ ..... $\text{ظا}^2\text{س} = \text{قا}^2\text{س} - 1$

$= \int_0^{\pi/3} \text{قا}^2\text{س ظاس} . \text{دس} - \int_0^{\pi/3} \text{ظاس} . \text{دس}$ تعويض

ص = ظاس ، $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قا}^2\text{س}$ ، $\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{قا}^2\text{س}}$ ؛ $\int \text{قا}^2\text{س} . \text{ص} . \frac{\text{دص}}{\text{قا}^2\text{س}}$ ؛ $\frac{\text{ص}^2}{2}$

$\int_0^{\pi/3} \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} . \text{دس}$ بالتعويض او مباشرة $= -\text{لو}|\text{جتاس}| \Big|_0^{\pi/3}$

$= \frac{1}{2} \text{ظا}^2\text{س} \Big|_0^{\pi/3} + \text{لو}|\text{جتاس}| \Big|_0^{\pi/3}$

$= \frac{1}{2}(\text{ظا}^2 60 - 0) + (\text{لوجتا}60 - \text{لو}1) = \frac{3}{2} + \text{لو}\frac{1}{2}$

١٤ $\int \text{جتا}^2 2\text{س جا}^2 2\text{س} . \text{دس}$ ⇐ نجعل $\int (\text{جتا}2\text{س جا}2\text{س})^2 . \text{دس}$ متطابقة

الحل: $\int (\frac{1}{2}\text{جا}4\text{س})^2 . \text{دس} = \int \frac{1}{4} \text{جا}^2 4\text{س} . \text{دس}$ أكمل الحل

١٥ $\int \text{قا}^4\text{س} . \text{دس}$

الجواب $\frac{1}{3}\text{ظا}^3\text{س} + \text{ظاس} + \text{هـ}$

١٦ $\int \text{ظا}^4\text{س} . \text{دس}$ فك $\text{ظا}^4\text{س} = \text{ظا}^2\text{س ظا}^2\text{س}$

⇐ $\int \text{ظا}^2\text{س ظا}^2\text{س دس} = \int (\text{قا}^2\text{س} - 1) \text{ظا}^2\text{س} . \text{دس}$ فك الأقواس

$= \int \text{قا}^2\text{س ظا}^2\text{س} . \text{دس} - \int \text{ظا}^2\text{س} . \text{دس}$

شفوي او تعويض $\frac{\text{ظا}^3\text{س}}{3} - \int (\text{قا}^2\text{س} - 1) . \text{دس}$

$\frac{\text{ظا}^3\text{س}}{3} - (\text{ظاس} - \text{س}) + \text{هـ}$.

١٧ اذا كان $\text{ع}_\text{ن} = \int \text{ظا}^\text{ن}\text{س} . \text{دس}$ حيث ن ≥ ٢

اثبت أن $\text{ع}_\text{ن} = \frac{1}{\text{ن}-1} \text{ظا}^{\text{ن}-1}\text{س} - \text{ع}_{\text{ن}-2}$

الحل: تذكر أن القوة كبيرة لذلك نحصل على التربيع.

$\text{ع}_\text{ن} = \int \text{ظا}^2\text{س ظا}^{\text{ن}-2}\text{س} . \text{دس}$

$= \int (\text{قا}^2\text{س} - 1) \text{ظا}^{\text{ن}-2}\text{س} . \text{دس}$ فك الأقواس

$= \int \text{قا}^2\text{س ظا}^{\text{ن}-2}\text{س} . \text{دس} - \int \text{ظا}^{\text{ن}-2}\text{س} . \text{دس}$

بالتعويض أو شفوي

ص = ظاس ، $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قا}^2\text{س}$ ، $\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{قا}^2\text{س}}$ ؛ $\int \text{قا}^2\text{س ص}^{\text{ن}-2} . \frac{\text{دص}}{\text{قا}^2\text{س}}$

$\frac{\text{ص}^{\text{ن}-1}}{\text{ن}-1} - \underbrace{\int \text{ظا}^{\text{ن}-2}\text{س} . \text{دس}}_{\text{ع}_{\text{ن}-2}}$

$\text{ع}_\text{ن} = \frac{1}{\text{ن}-1} \text{ظا}^{\text{ن}-1}\text{س} - \text{ع}_{\text{ن}-2}$

١٨ $\int \text{جا}^2\text{س جتا}^3\text{س} . \text{دس}$ تعويض حيث ص = الزوجي

الحل: ص = جاس ، $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{جتاس}$ ، $\frac{\text{دص}}{\text{جتاس}} = \text{دس}$ ⇐ $\int \text{ص}^2 \text{جتا}^3\text{س} . \frac{\text{دص}}{\text{جتاس}}$

$\int \text{ص}^2 \text{جتا}^2\text{س} . \text{دص}$ ، $1 - \text{جا}^2\text{س}$ لنعود من الفرض

$\int \text{ص}^2 (1 - \text{ص}^2) . \text{دص} = \int \text{ص}^2 - \text{ص}^4 . \text{دص}$

$\frac{\text{ص}^3}{3} - \frac{\text{ص}^5}{5} + \text{جـ} = \frac{\text{جا}^3\text{س}}{3} - \frac{\text{جا}^5\text{س}}{5} + \text{هـ}$.

١٩ $\int \text{جا}^3\text{س جتا}^3\text{س} . \text{دس}$ تعويض حيث ص = أحدهم

ص = جاس ، $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{جتاس}$ ، $\frac{\text{دص}}{\text{جتاس}} = \text{دس}$ ⇐ $\int \text{ص}^3 \text{جتا}^3\text{س} . \frac{\text{دص}}{\text{جتاس}}$

$\int \text{ص}^3 (1 - \text{جا}^2\text{س}) . \text{دص}$ من الفرض

$\int \text{ص}^3 (1 - \text{ص}^2) . \text{دص}$

$\int (\text{ص}^3 - \text{ص}^5) . \text{دص} = \frac{\text{ص}^4}{4} - \frac{\text{ص}^6}{6} + \text{هـ}$

⇐ $\frac{\text{جا}^4\text{س}}{4} - \frac{\text{جا}^6\text{س}}{6} + \text{هـ}$

حل آخر كما في مثال ٤ نجعل $(\text{جاس جتاس})^3$ ← متطابقة $\frac{1}{2}\text{جا}2\text{س}$

١٠ $\int \text{جا}^3\text{س جتا}^9\text{س} . \text{دس}$ حيث نفرض ص = جتاس

الجواب $-\frac{\text{جتا}^{10}\text{س}}{10} + \frac{\text{جتا}^{12}\text{س}}{12} + \text{هـ}$

متطابقات هامة ... حفظ :-

① $\text{جا}\,أ\ \text{جتا}\,ب = \frac{1}{2}\left(\text{جا}(أ+ب) + \text{جا}(أ-ب)\right)$

② $\text{جتا}\,أ\ \text{جتا}\,ب = \frac{1}{2}\left(\text{جتا}(أ+ب) + \text{جتا}(أ-ب)\right)$

③ $\text{جا}\,أ\ \text{جا}\,ب = -\frac{1}{2}\left(\text{جتا}(أ+ب) - \text{جتا}(أ-ب)\right)$

أمثلة :-

① جد $\int \text{جا}٧س\ \text{جتا}٣س \,.\, دس$

$= \int \frac{1}{2}(\text{جا}١٠س + \text{جا}٤س)\,.\,دس$

$= \frac{1}{2}\left(-\frac{\text{جتا}١٠س}{١٠} - \frac{\text{جتا}٤س}{٤}\right) + ث$

② $\int ٤\,\text{جا}٦س\ \text{جا}٢س \,.\, دس$

$= -٤\int \frac{1}{2}(\text{جتا}٨س - \text{جتا}٤س)\,.\,دس$

$= -٢\left(\frac{\text{جا}٨س}{٨} - \frac{\text{جا}٤س}{٤}\right) + ث$

③ $\int س\,(\underbrace{٢\,\text{جتا}٣س\ \text{جتا}س}_{٢ \times \frac{1}{2}(\text{جتا}٤س + \text{جتا}٢س)} - \text{جتا}٢س)^2 \,.\, دس$

الحل:

$\int س\,(\text{جتا}٤س + \cancel{\text{جتا}٢س} - \cancel{\text{جتا}٢س})^2\,.\,دس$

$= \int \underbrace{س}_{ع}\ \underbrace{\text{جتا}^2٤س\,.\,دس}_{دهـ}$ ..... أجزاء

$ع = س \rightarrow دع = ١\,.\,دس$

$دهـ = \text{جتا}^2٤س \rightarrow هـ = \frac{1}{2}\left(س + \frac{\text{جا}٨س}{٨}\right)$ ، $\frac{1}{2}(١ + \text{جتا}٨س)$

$= \frac{1}{2}س\left(س + \frac{\text{جا}٨س}{٨}\right) - \frac{1}{2}\int\left(س + \frac{\text{جا}٨س}{٨}\right)\,.\,دس$

$= \frac{1}{2}س^2 + \frac{1}{16}س\,\text{جا}٨س - \frac{1}{2}\left(\frac{س^2}{٢} - \frac{\text{جتا}٨س}{٦٤}\right) + ث$

تمارين متنوعة في التكامل :-

① $\int \frac{\text{جتا}س}{٣ + \text{جتا}^2س}\,.\,دس$

الحل: نحتاج جاس في المقام لوجود جتاس في البسط.

$\int \frac{\text{جتا}س}{٣ + ١ - \text{جا}^2س}\,.\,دس = \int \frac{\text{جتا}س}{٤ - \text{جا}^2س}\,.\,دس$

$ص = \text{جا}س$ ، $\frac{دص}{\text{جتا}س} = دس$

$\rightarrow \int \frac{\text{جتا}س}{٤ - ص^2} \times \frac{دص}{\text{جتا}س} = \int \frac{1}{٤ - ص^2}\,.\,دص$

أصبح كسور جزئية أكمل الحل.

② $\int \frac{س^2}{س^6 - ٩}\,.\,دس$

الحل: نحتاج $س^3$ في المقام لوجود $س^2$ في البسط.

$\int \frac{س^2}{(س^3)^2 - ٩}\,.\,دس$

$ص = س^3$ ، $\frac{دص}{٣س^2} = دس$

$\rightarrow \int \frac{\cancel{س^2}}{ص^2 - ٩} \times \frac{دص}{٣\cancel{س^2}}$

$= \int \frac{1}{٣(ص^2 - ٩)}\,.\,دص$

أصبح كسور جزئية أكمل الحل.

③ $\int \text{قا}^3س\ \text{ظا}^3س\,.\,دس$

الحل: $ص = \text{قا}س$ ، $دس = \frac{دص}{\text{قا}س\ \text{ظا}س}$

$\rightarrow \int ص^3\,\text{ظا}^{\cancel{3}\,2}س\,.\,\frac{دص}{\text{قا}س\ \cancel{\text{ظا}س}}$

$= \int ص^3(\text{قا}^2س - ١)\,.\,\frac{دص}{\text{قا}س}$

$\rightarrow \int ص^{\cancel{3}\,2}(ص^2 - ١)\,.\,\frac{دص}{\cancel{ص}}$

$= \int (ص^4 - ص^2)\,.\,دص$

$= \frac{ص^5}{٥} - \frac{ص^3}{٣} + ث = \frac{\text{قا}^5س}{٥} - \frac{\text{قا}^3س}{٣} + ث$

④ $\int \frac{\text{قا}^4س}{\sqrt{\text{ظا}س}}\,.\,دس$

$ص = \sqrt{\text{ظا}س}$

$ص^2 = \text{ظا}س$

$٢ص\,.\,\frac{دص}{دس} = \text{قا}^2س$

$دس = \frac{٢ص\,.\,دص}{\text{قا}^2س}$

$\rightarrow \int \frac{\text{قا}^{\cancel{4}\,2}س}{\cancel{ص}} \times \frac{٢\cancel{ص}\,.\,دص}{\cancel{\text{قا}^2س}}$

$= \int ٢\,\text{قا}^2س\,.\,دص$

$= ٢\int(\text{ظا}^2س + ١)\,.\,دص$

$= ٢\int((ص^2)^2 + ١)\,.\,دص$

$= ٢\left[\frac{ص^5}{٥} + ص\right] + ث$

$= ٢\left[\frac{(\sqrt{\text{ظا}س})^5}{٥} + \sqrt{\text{ظا}س}\right] + ث$

حل آخر: $ص = \text{ظا}س$ .....

⑤ $\int \frac{\text{ظا}س - ١}{١ + \text{ظا}س} \times \text{قا}^2\left(س - \frac{\pi}{٤}\right)\,.\,دس$

الحل: نحتاج متطابقة لأن الزوايا مختلفة حيث

$\text{ظا}\left(س - \frac{\pi}{٤}\right) = \frac{\text{ظا}س - \text{ظا}\frac{\pi}{٤}}{١ + \text{ظا}س\ \text{ظا}\frac{\pi}{٤}} = \frac{\text{ظا}س - ١}{١ + \text{ظا}س}$

أصبح السؤال

$\int \text{ظا}\left(س - \frac{\pi}{٤}\right) \times \text{قا}^2\left(س - \frac{\pi}{٤}\right)\,.\,دس = \frac{\text{ظا}^2\left(س - \frac{\pi}{٤}\right)}{٢} + ث$

تعويض مباشر

⑥ $\int \frac{\text{س}}{\text{س}^2+\text{س}^4}\,.\,\text{ءس}$ .... له ٣ حلول.

الحل الأول: مشترك طبيعي

$\int \frac{\text{س}}{\text{س}^2(1+\text{س}^2)}\,.\,\text{ءس} = \int \frac{1}{\text{س}(1+\text{س}^2)}\,.\,\text{ءس}$

ص = ١ + س² ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 2\text{س}$ ، ءس = $\frac{\text{ءص}}{2\text{س}}$ ← $\int \frac{1}{\text{س(ص)}} \times \frac{\text{ءص}}{2\text{س}} = \int \frac{1}{2\text{س}^2\text{ص}}\,.\,\text{ءص}$ مختلط محترم

$= \int \frac{1}{2(\text{ص}-1)(\text{ص})}\,.\,\text{ءص}$ ← كسور جزئية

الحل الثاني: مشترك غير طبيعي (س⁴)

$\int \frac{\text{س}}{\text{س}^4(\text{س}^{-2}+1)}\,.\,\text{ءس} = \int \frac{1}{\text{س}^3(\text{س}^{-2}+1)}\,.\,\text{ءس}$

ص = س⁻² + ١ ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -2\text{س}^{-3}$ ، ءس = $\frac{\text{ءص}}{-2\text{س}^{-3}}$ ← $\int \frac{1}{\text{س}^3\text{ص}} \times \frac{\text{ءص}}{-2\text{س}^{-3}}$

$= -\frac{1}{2}$ لوهـ|ص| + جـ

$= -\frac{1}{2}$ لوهـ|س⁻² + ١| + جـ

الحل الثالث: لاحظ نحتاج س² في المقام كي ينتج البسط لذلك تعويض حيث

ص = س² ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 2\text{س}$ ، ءس = $\frac{\text{ءص}}{2\text{س}}$ ← $\int \frac{\text{س}}{\text{ص}+\text{ص}^2} \times \frac{\text{ءص}}{2\text{س}}$

$= \int \frac{1}{2(\text{ص}+\text{ص}^2)}\,.\,\text{ءص}$

كسور جزئية ---

⑦ $\int \frac{\sqrt{\text{س}^2+\text{س}^4}}{\text{س}^5}\,.\,\text{ءس}$ ، س > ٠

الحل: لاحظ المقام قوة كبيرة لذلك مشترك س⁴

$\int \frac{\sqrt{\text{س}^4(\text{س}^{-2}+1)}}{\text{س}^5}\,.\,\text{ءس}$

$= \int \frac{\text{س}^2\sqrt{\text{س}^{-2}+1}}{\text{س}^5}\,.\,\text{ءس} = \int \frac{\sqrt{\text{س}^{-2}+1}}{\text{س}^3}\,.\,\text{ءس}$

تعويض حيث نفرض ص = س⁻² + ١ ---- اكمل الحل.

⑧ $\int \frac{1-\text{جا}^2\text{س}}{\text{جا}^2\frac{\text{س}}{2}\,\text{جتا}^2\frac{\text{س}}{2}}\,.\,\text{ءس}$ ـــ نحتاج متطابقة

الحل: $\int \frac{\text{جتا}^2\text{س}}{(\text{جا}\frac{\text{س}}{2}\text{جتا}\frac{\text{س}}{2})^2}\,.\,\text{ءس} \Leftarrow \int \frac{\text{جتا}^2\text{س}}{(\frac{1}{2}\text{جاس})^2}\,.\,\text{ءس}$

$\Leftarrow 4\int \frac{\text{جتا}^2\text{س}}{\text{جا}^2\text{س}}\,.\,\text{ءس} = 4\int \text{ظتا}^2\text{س}\,.\,\text{ءس}$ ← متطابقة.

⑨ $\int \frac{1-\text{جا}2\text{س}}{\text{جتاس}-\text{جاس}}\,.\,\text{ءس}$ نحتاج متطابقة

الحل: $\int \frac{\text{جا}^2\text{س}+\text{جتا}^2\text{س}-2\text{جاس جتاس}}{\text{جتاس}-\text{جاس}}\,.\,\text{ءس}$

$\int \frac{(\text{جتاس}-\text{جاس})^2}{\text{جتاس}-\text{جاس}}\,.\,\text{ءس} = \int (\text{جتاس}-\text{جاس})\,.\,\text{ءس}$

= جاس + جتاس + جـ

⑩ $\int \frac{1}{\text{س}^2-1} \times \sqrt{\frac{\text{س}+1}{\text{س}-1}}\,.\,\text{ءس}$ ، س > ١

الحل:

ص = $\sqrt{\frac{\text{س}+1}{\text{س}-1}}$

ص² = $\frac{\text{س}+1}{\text{س}-1}$

$2\text{ص}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{(\text{س}-1)-(\text{س}+1)}{(\text{س}-1)^2}$

$2\text{ص}\,.\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-2}{(\text{س}-1)^2}$

$-(\text{س}-1)^2\text{ص}\,.\,\text{ءص} = \text{ءس}$

← $\int \frac{1}{\text{س}^2-1} \times \text{ص} \times -(\text{س}-1)^2\,\text{ص}\,.\,\text{ءص}$

$-\int \frac{\text{ص}^2(\text{س}-1)^{\cancel{2}}\,.\,\text{ءص}}{(\text{س}+1)\cancel{(\text{س}-1)}}$

$-\int \text{ص}^2\,.\,\boxed{\frac{\text{س}-1}{\text{س}+1}}\,.\,\text{ءص}$ ← من الفرض

$-\int \cancel{\text{ص}^2} \times \frac{1}{\cancel{\text{ص}^2}}\,.\,\text{ءص}$

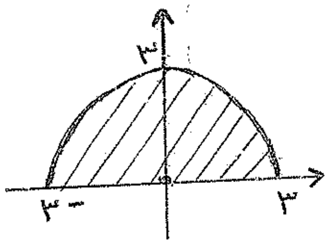
$-\int 1\,.\,\text{ءص} = -\text{ص} + \text{جـ}$

$= -\sqrt{\frac{\text{س}+1}{\text{س}-1}} + \text{جـ}$.

⑪ $\int_{-3}^{3} \sqrt{9-\text{س}^2}\,.\,\text{ءس}$

الحل: لا نستطيع اجراء تكامله لذلك فكر بمساحة لأنه محدود.

الحل:



$\frac{1}{2}$ مساحة دائرة نصف قطرها ٣

$= \frac{1}{2} \times \pi (3)^2 = \frac{9}{2}\pi$

تمرين:

جد $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (\text{قاس}-\text{ظاس})^2\,.\,\text{ءس}$

الجواب $6 - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + \frac{\pi}{12}$

تمرين:

جد $\int \frac{\text{قاس}}{\text{قاس}-\text{جتاس}}\,.\,\text{ءس}$

الحل: استبدل قاس ب $\frac{1}{\text{جتاس}}$ ثم توحيد المقامات

الجواب ـ ظتاس + جـ

المعادلة التفاضلية :-

يطلق هذا الإسم على المعادلات التي تحتوي رموز المشتقة مثل دص، دس، دم ..... إلخ

تظهر المعادلة التفاضلية إما بصورة مباشرة عن طريق جد ص بدلالة س أو بصورة غير مباشرة عن طريق المسألة الفيزيائية أو الهندسية أو معدل التغير وفي الحالة غير المباشرة يجب معرفة ما يلي :-

* السرعة (ع) = $\frac{\text{دف}}{\text{دن}}$ ، التسارع = $\frac{\text{دع}}{\text{دن}}$ ، الميل = $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

معدل التغير = $\frac{\text{دم}}{\text{دن}}$ أو $\frac{\text{دح}}{\text{دن}}$ أو $\frac{\text{دح}}{\text{دس}}$ أو $\frac{\text{دم}}{\text{دص}}$ ..... إلخ

إن حل المعادلة التفاضلية يعني التخلص من رموز المشتقة ويتم ذلك بخطوتين :

أ) نقوم بفرز الرموز بحيث كل نوع لوحده في طرف

ب) نجري عملية التكامل للطرفين مع اضافة الثابت جـ للطرف الأيسر فقط .

الأسئلة المباشرة :-

جد ص بدلالة س لكل مما يلي (حل المعادلة التفاضلية)

١) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \sqrt{\frac{\text{ص}}{\text{س}}} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\sqrt{\text{ص}}}{\sqrt{\text{س}}}$ حيث س، ص > ٠

الحل :- عملية الفرز

$\frac{\text{دص}}{\sqrt{\text{ص}}} = \frac{\text{دس}}{\sqrt{\text{س}}} \xLeftarrow{\text{تكامل}} \int \frac{\text{دص}}{\sqrt{\text{ص}}} = \int \frac{\text{دس}}{\sqrt{\text{س}}}$

$\Leftarrow \int \text{ص}^{-\frac{1}{2}} \text{دص} = \int \text{س}^{-\frac{1}{2}} . \text{دس}$

$\frac{2\text{ص}^{\frac{1}{2}}}{1} = \frac{2\text{س}^{\frac{1}{2}}}{1} + \text{جـ} \Leftarrow \sqrt{\text{ص}} = \sqrt{\text{س}} + \text{جـ}_1$ جديدة

٢) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{هـ}^{\text{س}-\text{ص}}$

الحل: $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{ص}}} \Leftarrow \text{هـ}^{\text{ص}} . \text{دص} = \text{هـ}^{\text{س}} . \text{دس}$

$\Leftarrow$ نكامل $\int \text{هـ}^{\text{ص}} . \text{دص} = \int \text{هـ}^{\text{س}} . \text{دس} \Leftarrow \text{هـ}^{\text{ص}} = \text{هـ}^{\text{س}} + \text{جـ}$

اخذ اللوغاريتم $\Leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}} \text{هـ}^{\text{ص}} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{هـ}^{\text{س}} + \text{جـ}) \Leftarrow \text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{هـ}^{\text{س}} + \text{جـ})$

٣) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{س ص}$ ، ص > ٠

الحل :- $\frac{\text{دص}}{\text{ص}} = \text{س} . \text{دس} \xLeftarrow{\text{تكامل}} \int \frac{\text{دص}}{\text{ص}} = \int \text{س} . \text{دس}$

$\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| = \frac{\text{س}^2}{2} + \text{جـ} \Leftarrow \text{ص} = \text{هـ}^{\frac{\text{س}^2}{2}+\text{جـ}} \Leftarrow \text{ص} = \text{هـ}^{\frac{\text{س}^2}{2}} \times \text{هـ}^{\text{جـ}}$

$= \text{م} \, \text{هـ}^{\frac{\text{س}^2}{2}}$ حيث م ثابت

٤) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{ص}}{\text{جتاس}}$ ، ص > ٠ الجواب $\text{ص} = \text{م} \, \text{هـ}^{\text{ظاس}}$

٥) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٣\text{س ص} + \text{ص} + ٣\text{س} + ١$

الجواب : $\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}+١| = \frac{٣}{٢}\text{س}^2 + \text{س} + \text{جـ}$

٦) $\text{ص} . \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{حا}^2\text{س} \, \text{قاص}^2$

الحل) $\frac{\text{ص} . \text{دص}}{\text{قاص}^2} = \text{حا}^2\text{س} . \text{دس} \Leftarrow \text{ص جتاص}^2 . \text{دص} = \text{حا}^2\text{س} . \text{دس}$

$\xLeftarrow{\text{تكامل}} \int \underbrace{\text{ص} . \text{جتاص}^2}_{\text{بالتعويض}} . \text{دص} = \int \text{حا}^2\text{س} . \text{دس}$

ع = ص² ، $\frac{\text{دع}}{\text{دص}} = ٢\text{ص}$ ، $\frac{\text{دع}}{٢\text{ص}} = \text{دص}$

$\Leftarrow \int \text{ص جتاع} . \frac{\text{دع}}{٢\text{ص}} = \int \frac{1}{2}(1 - \text{جتا}٢\text{س}) . \text{دس}$

$\frac{1}{2}\text{جاع} = \frac{1}{2}\left(\text{س} - \frac{\text{جا}٢\text{س}}{٢}\right) + \text{جـ}$

$\text{جاص}^2 = \text{س} - \frac{\text{جا}٢\text{س}}{٢} + \text{جـ}$

الأسئلة غير المباشرة :-

١) يتحرك جسم بسرعة تعطى حسب العلاقة ع(ن) = ٨ن³ احسب المسافة التي يقطعها الجسم عندما ن = ٢ علماً بأن الجسم قطع ٣٠ متر عندما ن = ١ .

الحل :- لدينا ع = ٨ن³ $\Leftarrow \frac{\text{دف}}{\text{دن}} = ٨\text{ن}^٣$

$\therefore \text{دف} = ٨\text{ن}^٣ . \text{دن} \Leftarrow \int \text{دف} = \int ٨\text{ن}^٣ . \text{دن}$

$\text{ف} = \frac{٨\text{ن}^٤}{٤} + \text{جـ}$ حيث لدينا ف = ٣٠ عندما ن = ١

$٣٠ = ٢(١)^٤ + \text{جـ} \Leftarrow \text{جـ} = ٣٣$

$\therefore \text{ف} = ٢\text{ن}^٤ + ٣٣ \Leftarrow \text{ف}|_{\text{ن}=٢} = ٢(٢)^٤ + ٣٣ = ٦٥\text{م}$

٢) قذف حجر رأسياً لأعلى بسرعة ابتدائية مقدارها ١٠٠م/ث وبتسارع مقداره (-١٠) م/ث² احسب

أ) سرعة الحجر عندما ن = ٣ ثواني ب) ارتفاعه |ن=٣

الحل :- لدينا ت = -١٠ $\Leftarrow \frac{\text{دع}}{\text{دن}} = -١٠ \Leftarrow \text{دع} = -١٠ . \text{دن}$

$\int \text{دع} = \int -١٠ . \text{دن} \Leftarrow \text{ع} = -١٠\text{ن} + \text{جـ}$

لكن ع = ١٠٠ عندما ن = ٠ $\Leftarrow ١٠٠ = ٠ + \text{جـ} \Leftarrow \text{جـ} = ١٠٠$

$\therefore \text{ع} = -١٠\text{ن} + ١٠٠ \Leftarrow \text{ع}|_{\text{ن}=٣} = -٣٠ + ١٠٠ = ٧٠\text{م/ث}$

ب) بما أن ع = -١٠ن + ١٠٠ حيث ع = $\frac{\text{دف}}{\text{دن}}$

$\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = -١٠\text{ن} + ١٠٠ \Leftarrow$

$\text{دف} = (-١٠\text{ن} + ١٠٠) . \text{دن}$

$\int \text{دف} = \int (-١٠\text{ن} + ١٠٠) . \text{دن}$

$\text{ف} = -٥\text{ن}^٢ + ١٠٠\text{ن} + \text{جـ}_1$

ف = صفر عندما ن = صفر $\Leftarrow \text{جـ}_1 = \text{صفر}$

$\therefore \text{ف} = -٥\text{ن}^٢ + ١٠٠\text{ن}$

$\text{ف}|_{\text{ن}=٣} = -٩\times٥ + ٣٠٠ = ٢٥٥\text{م}$

واجب بيتي :-

٣) قذف حجر رأسياً لأعلى من قمة برج يرتفع ٣٠ متر عن الأرض وكانت سرعته بعد ن ثانية هي ع(ن) = ٤٠ - ١٠ن جد ارتفاع الحجر عن سطح الأرض بعد ٤ث من بدء الحركة .

* الجواب ٦٥ متر

④ انطلق جسيم في خط مستقيم من النقطة م وكانت سرعته ع تعطى حسب العلاقة

ع(ن) = { ٣ن² ، صفر ≤ ن < ٢
　　　　{ ١٦ − ٢ن ، ٢ ≤ ن ≤ ٨

جد بعد الجسيم عن م عندما ن = ٥

الحل: نجد ف عندما ن = ٥ بإجراء تكامل محدود

ف(٥) = ∫ من ٠ إلى ٥ ع(ن).دن

= ∫ من ٠ إلى ٢ ٣ن².دن + ∫ من ٢ إلى ٥ (١٦ − ٢ن).دن = ٣٥م

⑤ يسير جسيم بتسارع يعطى حسب العلاقة ت = ١/ع ، ع > ٠ . وتحرك الجسيم من السكون فقطع مسافة ١٠√٢ م بعد ٤ ثوانٍ من الحركة جد المسافة التي يقطعها بعد ١ ثانية من الحركة .

الحل: ت = ١/ع ⟸ دع/دن = ١/ع ⟸ ع.دع = دن

$\xLeftarrow{\text{تكامل}}$ ∫ ع.دع = ∫ دن

ع²/٢ = ن + جـ نجد جـ حيث عندما ن = ٠ فإن ع = ٠
لذلك جـ = ٠

لذلك ع²/٢ = ن ⟸ ع² = ٢ن ⟸ نجعل ع لوحدها بأخذ الجذر

ع = √(٢ن) ⟸ دف/دن = √٢ ن^(١/٢) ⟸ دف = √٢ ن^(١/٢).دن

∫ دف = ∫ √٢ ن^(١/٢).دن ⟸ ف = √٢ × ٢ن^(٣/٢)/٣ + جـ نجد جـ

حيث ف = ١٠√٢ عندما ن = ٤ ⟸ جـ = ١٤√٢/٣

∴ ف = ٢√٢/٣ ن^(٣/٢) + ١٤√٢/٣

ف(١) = ٢√٢/٣ + ١٤√٢/٣ = ١٦√٢/٣

⑥ اذا كان ميل المماس لمنحنى ق(س) عند النقطة (١، ٨) يساوي ٤ وكان ق''(س) = ١٢س − ١٠ جد قاعدة الاقتران

الحل: لدينا ق''(س) = ١٢س − ١٠ نكامل الطرفين

∫ ق''(س).دس = ∫(١٢س − ١٠).دس

ق'(س) = ١٢س²/٢ − ١٠س + جـ

لدينا ميل المماس = ٤ ⟸ ق'(١) = ٤ ⟸ ٤ = ٦ − ١٠ + جـ
جـ = ٨

∴ ق'(س) = ٦س² − ١٠س + ٨ نكامل الطرفين

∫ ق'(س).دس = ∫(٦س² − ١٠س + ٨).دس

ق(س) = ٦س³/٣ − ١٠س²/٢ + ٨س + جـ

لدينا (١، ٨) ⟸ ق(١) = ٨ ⟸ ٨ = ٢ − ٥ + ٨ + جـ
جـ = ٣

∴ قاعدة الاقتران ق(س) = ٢س³ − ٥س² + ٨س + ٣

⑦ اذا كان ميل المماس لمنحنى ق(س) عند أي نقطة (س، ص) يساوي ١/(س − ٣) جد قاعدة الاقتران علماً بأنه يمر بالنقطة (٤، ٥)

الحل: لدينا الميل = ١/(س − ٣) ⟸ دص/دس = ١/(س − ٣)

دص = ١/(س − ٣) .دس ⟸ نكامل الطرفين

∫ دص = ∫ ١/(س − ٣) .دس ⟸ ص = لوهـ |س − ٣| + جـ

لدينا (٤، ٥) $\xrightarrow{\text{نعوض}}$ ٥ = لوهـ ١ + جـ ⟸ ٥ = جـ

∴ القاعدة ص = لوهـ |س − ٣| + ٥

⑧ (واجب) اذا كان ميل العمودي على منحنى عند أي نقطة (س، ص) عليه يساوي (٥ + ٢ص)/(٢ − ٣س²) وكان المنحنى يمر بالنقطة (٢، ١) جد معادلته. الجواب ص² + ٥ص = س³ − ٢س + ١٥

⑨ اذا كان ق(س) يمر بالنقطتين (٢، ٣) ، (٥، م) وكان ق'(س) = ٢س جد الثابت م .

الحل: نجد الاقتران ق(س) لأن (٥، م) تحقق ق(س)

∫ ق'(س).دس = ∫ ٢س.دس ⟸ ق(س) = ٢س²/٢ + جـ

لدينا (٢، ٣) $\xrightarrow{\text{نعوض}}$ ق(٢) = ٤ + جـ = ٣ ⟸ جـ = −١

∴ ق(س) = س² − ١

لكن (٥، م) تحقق ق(س) ⟸ ق(٥) = ٢٥ − ١ = م ⟸ م = ٢٤

أسئلة عملية على المعادلة التفاضلية :-

① وضعت ١٠٠ سمكة في بركة ماء بحيث كان معدل الزيادة في عدد السمك ع يساوي ١/√(٢ن + ١) سمكة/يوم. جد عدد السمك بعد ١٢ يوم.

الحل: لدينا معدل الزيادة في ع أي لدينا دع/دن

∴ دع/دن = ١/√(٢ن + ١) ⟸ دع = ١/√(٢ن + ١) .دن $\xLeftarrow{\text{نكامل}}$

∫ دع = ∫ ١/√(٢ن + ١) .دن ⟸ ع = (٢ن + ١)^(١/٢) / (١/٢ × ٢) + جـ

لكن ع = ١٠٠ عندما ن = ٠ ⟸ ١٠٠ = √(٠ + ١) + جـ ⟸ ٩٩ = جـ

ع = √(٢ن + ١) + ٩٩ ⟸ ع عند ن = ١٢ = √٢٥ + ٩٩ = ١٠٤

② اذا كان معدل التغير في مساحة سطح صفيحة نتيجة للتسخين يتغير من العلاقة دم/دن = ٠,٢٤ن + ٠,٠٣ن² ، ن حيث م المساحة بالمتر المربع والزمن ن بالدقيقة . جد مساحة سطح الصفيحة عند بدء التسخين علماً بأن مساحتها بلغت ٣٤,٥ م² عندما ن = ١٠د

الحل: دم/دن = ٠,٢٤ن + ٠,٠٣ن² ⟸ دم = (٠,٢٤ن + ٠,٠٣ن²).دن

نكامل ⟸ ∫ دم = ∫ (٠,٢٤ن + ٠,٠٣ن²).دن

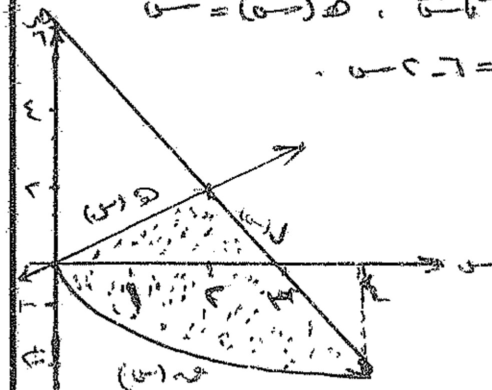
م = ٠,٢٤ن²/٢ + ٠,٠٣ن³/٣ + جـ　نجد جـ حيث م = ٣٤,٥ عندما ن = ١٠

٣٤,٥ = ٠,٢٤(١٠)²/٢ + ٠,٠٣(١٠)³/٣ + جـ ⟸ جـ = ٢٥

∴ م = ٠,٠١ن³ + ٠,١٢ن² + ٢٥

عند بدء التسخين ن = ٠ ⟸ م = ٢٥ م²

جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور
حيث ق(س) = $-\sqrt{\text{س}}$ ، هـ(س) = س
ل(س) = ٦ − ٢س .



الحل: نجد حدود التكامل (نقط تقاطع الاقترانات)

نبدأ من اليسار :

من الرسمة س = ٠ ، س = ٢ ، س = ٤

يلزم تجزئة المنطقة .

م١ = $\int_{٠}^{٢}$ هـ − ق

= $\int_{٠}^{٢}$ س − ($-\sqrt{\text{س}}$) . ءس = ٢ + $\frac{٢\sqrt{٨}}{٣}$

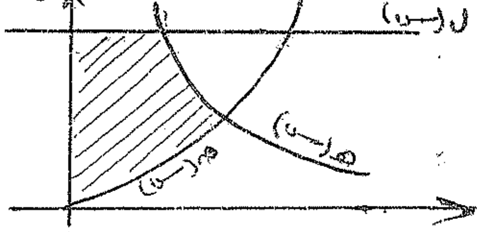
م٢ = $\int_{٢}^{٤}$ ل − ق

= $\int_{٢}^{٤}$ ٦ − ٢س − ($-\sqrt{\text{س}}$) . ءس = $\frac{١٦}{٣} - \frac{٢}{٣}\sqrt{٨}$

المساحة الكلية = م١ + م٢ = $\boxed{\frac{٢٢}{٣}}$

واجب : جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور حيث

ق(س) = س٢ ، هـ(س) = $\frac{١}{\text{س}^٢}$ ، ل(س) = ٤

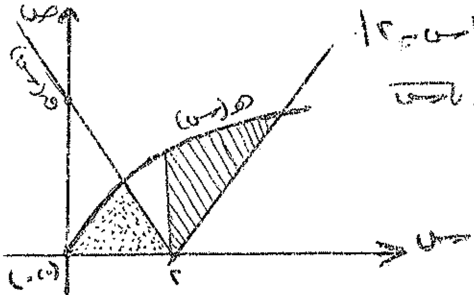


الجواب $\frac{٨}{٣}$ م

جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور

حيث ق(س) = |س − ٢|

هـ(س) = $\sqrt{\text{س}}$



الحل: نعيد تعريف المطلق .

ق(س) = { س − ٢ ، س ≥ ٢ ؛ ٢ − س ، س ≤ ٢ }

نجد حدود التكامل (تقاطع الاقترانات)

هـ(س) مع ق(س)
لـ ٢ − س من الرسمة (الأيسر)

$\sqrt{\text{س}}$ = ٢ − س

س = ٤ − ٤س + س٢ ⟸ س٢ − ٥س + ٤ = ٠

(س − ١)(س − ٤) = ٠

هل المعادلة بالتجربة أفضل

$\boxed{\text{س} = ١}$ ، $\boxed{\text{س} = ٤}$ تهمل

$\boxed{\text{س} = ١}$

*المنطقة الأولى (قسمين) م١ ، م٢

م١ = $\int_{٠}^{١}$ $\sqrt{\text{س}}$ − (صفر) . ءس = $\frac{٢}{٣}$

م٢ = $\int_{١}^{٢}$ ٢ − س − (صفر) . ءس = $\frac{١}{٢}$

مساحة المنطقة الأولى = $\frac{٢}{٣} + \frac{١}{٢} = \frac{٧}{٦}$

*المنطقة الثانية تقاطع هـ مع ق(س)
لـ س − ٢ من الأيمن

$\sqrt{\text{س}}$ = س − ٢

س = س٢ − ٤س + ٤ ⟸ س٢ − ٥س + ٤ = ٠

(س − ١)(س − ٤) = ٠

بالتجربة $\boxed{\text{س} = ١}$ تهمل ، $\boxed{\text{س} = ٤}$

$\boxed{\text{س} = ٤}$

مساحة المنطقة الثانية = $\int_{٢}^{٤}$ $\sqrt{\text{س}}$ − (س − ٢) . ءس

= $\frac{١٦}{٣} - \frac{٢}{٣}\sqrt{٨} - ٢$

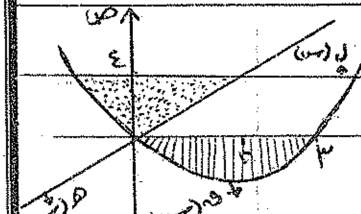
المساحة الكلية = $\frac{٧}{٦} + \frac{١٦}{٣} - \frac{٢}{٣}\sqrt{٨} - ٢ = \frac{٢٧ - ٤\sqrt{٨}}{٦}$.

جد مجموع المساحتين المظللتين

حيث ق(س) = س٢ − ٣س

هـ(س) = ٢س

ل(س) = ٤



الحل: المنطقة الأولى (قسمين) م١ + م٢

نجد حدود التكامل

ق مع ل ⟸ س٢ − ٣س = ٤ ⟸ س = ٤ تهمل ، س = −١

هـ مع ل ⟸ ٢س = ٤ ⟸ س = ٢ ، ق مع هـ ⟸ س = ٠ من الرسم .

*المنطقة الأولى :-

م١ = $\int_{-١}^{٠}$ ل − ق = $\int_{-١}^{٠}$ ٤ − (س٢ − ٣س) . ءس = $\frac{١٣}{٦}$

م٢ = $\int_{٠}^{٢}$ ل − هـ = $\int_{٠}^{٢}$ ٤ − ٢س . ءس = ٤

مساحة المنطقة الأولى = $\frac{١٣}{٦} + ٤ = \frac{٣٧}{٦}$

*المنطقة الثانية :-

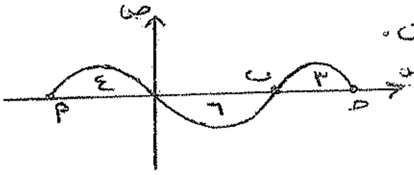
م = $\int_{٠}^{٣}$ صفر − (س٢ − ٣س) . ءس = $\frac{٩}{٢}$ (تحت السينات)

المساحة الكلية = $\frac{٣٧}{٦} + \frac{٩}{٢} = \frac{٦٤}{٦}$

المساحات وعلاقتها مع التكامل :-

* المساحة هي تكامل محدود لذلك يكون الناتج عدد موجب
* اذا كانت المساحة فوق محور السينات فانها تنتج تكامل قيمته موجبة
* اذا كانت المساحة تحت محور السينات فانها تنتج تكامل قيمته سالبة .

مثال ١ : الشكل المجاور يمثل المساحة المحصورة بين منحنى ق(س) ومحور السينات .



احسب مايلي

١) $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) . ءس

الحل: $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) . ءس = $\int_{أ}^{.}$ ق(س) . ءس (فوق) + $\int_{.}^{ب}$ ق(س) . ءس (تحت)

= ٤ + -٦ = -٢

٢) $\int_{أ}^{جـ}$ ق(س) . ءس = $\int_{أ}^{.}$ ق(س) . ءس (فوق) + $\int_{.}^{ب}$ ق(س) . ءس (تحت) + $\int_{ب}^{جـ}$ ق(س) . ءس (فوق)

= ٤ + -٦ + ٣ = ١

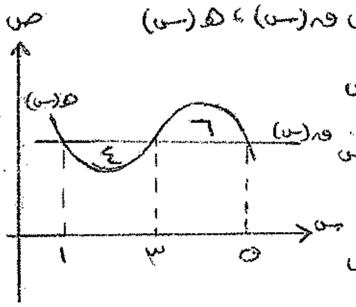
٣) المساحة الكلية = ٤ + ٦ + ٣ = ١٣

٤) $\int_{جـ}^{.}$ ق(س) . ءس = $-\int_{.}^{جـ}$ ق(س) . ءس — انتبه الحدود معكوسة

= $-\left[\int_{.}^{ب} ق(س) . ءس + \int_{ب}^{جـ} ق(س) . ءس\right]$ (تحت ، فوق)

= $-$(-٦ + ٣) = ٣

مثال ٢ : الشكل المجاور يمثل ق(س) ، هـ(س)



جد ① $\int_{١}^{٣}$ (هـ - ق) (س) . ءس

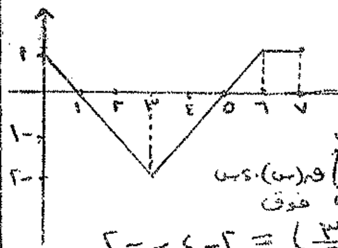
الحل: $\int_{١}^{٣}$ هـ(س) - ق(س) . ءس
أصغر - أكبر = -٤

② $\int_{١}^{٥}$ (ق(س) - هـ(س)) ءس

الحل: نوزع ⟸ $\int_{١}^{٣}$ ق(س) - هـ(س) . ءس + $\int_{٣}^{٥}$ ق(س) - هـ(س) . ءس
أصغر - أكبر ، أكبر - أصغر

(-٤) + (٦) = (٢)

٣] الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق(س) في الفترة [٠ ، ٧]



جد مايلي :-

أ] $\int_{٠}^{٧}$ ق(س) . ءس

= $\int_{٠}^{١}$ ق(س) . ءس + $\int_{١}^{٥}$ ق(س) . ءس + $\int_{٥}^{٧}$ ق(س) . ءس
(فوق ، تحت ، فوق)

= $(\frac{١}{٢})$ + (-٤) + $(\frac{٣}{٢})$ = ٢-٤ = -٢
(مثلث ، مثلث ، مثلث + مربع)

ب] $\int_{٠}^{٧}$ |ق(س)| ءس ⟸ المطلق يجعل الاقتران فوق السينات

= $\frac{١}{٢}$ + ٤ + $\frac{٣}{٢}$ = ٦

جـ] $\left|\int_{٠}^{٧} ق(س) . ءس\right|$ = $\left|\int_{٠}^{١} ق(س) . ءس + \int_{١}^{٥} ق(س) . ءس + \int_{٥}^{٧} ق(س) . ءس\right|$

= $\left|\frac{١}{٢} + -٤ + \frac{٣}{٢}\right|$ = |-٢| = ٢

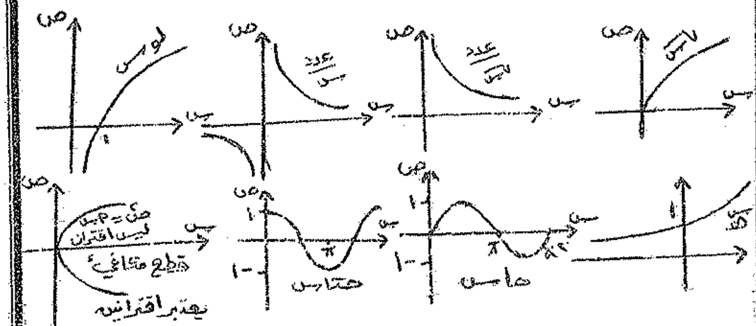
مبادئ وأساسيات لحساب المساحة :-

١] نعتبر كل مستقيم على صورة ص = عدد اقتران وأهمهم محور السينات (ص = ٠) رسمته خط أفقي .

٢] نعتبر كل مستقيم على صورة س = عدد عمود وأهمهم س = ٠ .

قانون المساحة = $\int_{أ}^{ب}$ (الاعلى - الادنى) . ءس
الأكبر - الاصغر

٣] رسمة بعض الاقترانات الهامة :-



خطوات حل السؤال :-

١] نحدد ما لدينا من أعمدة واقترانات

٢] نساوي كل اقترانين ببعض لنجد نقط التقاطع والتي تعتبر اعمدة (حدود التكامل)

٣] نرسم الأعمدة ثم الاقترانات ونظلل المنطقة المطلوبة .

٤] نجد المساحة باستخدام التكامل .

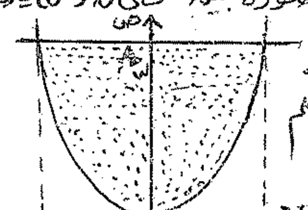
ملاحظات هامة :-

① اذا كان لدينا ٣ اقترانات فانه يوجد أكثر من منطقة

② نقط التقاء الاقترانات يجب ان تكون اعمدة .

③ اذا كان لدينا اقترانين وعمودين يمكن الحل بدون الرسم .

س: ما مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = س² والمستقيم ص = ٤



/رسم اللعلم

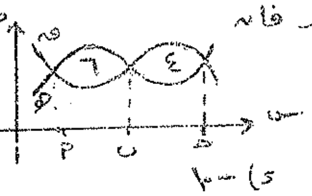
الحل: اعمدة : X
اقترانات : ② س² ، ٤

س² = ٤ ⟸ س = ٢ ، -٢

عند الرسم نجد رأس الاقتران التربيعي ونعوض الأعمدة في الاقتران .

م = $\int_{-٢}^{٢}$ (٤ - س²) . ءس = ٤(٢ - -٢) - $\left.\frac{س^٣}{٣}\right|_{-٢}^{٢}$ = $\frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة

تمرين :- من الشكل المجاور فانه



$\int_{أ}^{جـ}$ (هـ - ق)(س) . ءس

أ) ٢ ب) ١٠ جـ) -٢ د) -١٠

س٢: احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = $\sqrt{س}$ حيث س ≥ ٠ ومحور السينات والمستقيم س = ٤

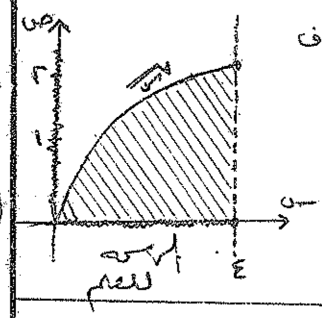
الحل: أعمدة: $\boxed{س = ٤}$ كشاف

اقترانات: (٢) $\sqrt{س}$ ، صفر

$\sqrt{س} = ٠ \rightarrow \boxed{س = ٠}$

م = $\int_0^4 (\sqrt{س} - ٠)\,دس$

= $\int_0^4 س^{\frac12}\,دس = \frac{2س^{\frac32}}{3}\Big|_0^4 = \frac{16}{3}$



الرسم للعلم

س٣: احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = س² والمستقيم هـ(س) = ٢ − س

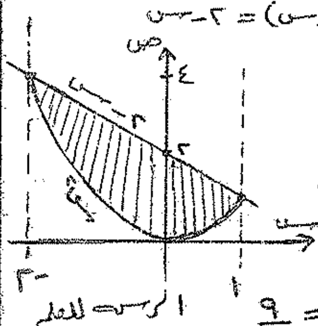
الحل: أعمدة: X

اقترانات: (٢) س²، ٢ − س

س² = ٢ − س ← س² + س − ٢ = ٠

(س + ٢)(س − ١) = ٠ ← $\boxed{س = -٢}$ $\boxed{س = ١}$

م = $\int_{-2}^{1} \left((٢ - س) - س^2\right)\,دس = \frac{9}{2}$



الرسم للعلم

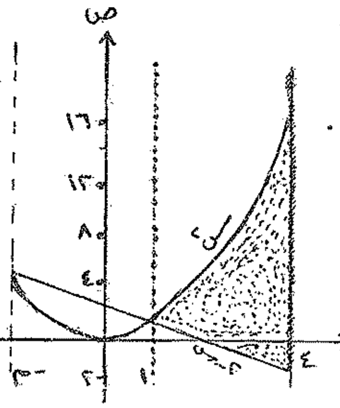
س٤: ما مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = س² والمستقيم هـ(س) = ٢ − س والمستقيم س = ٤

الحل: أعمدة: $\boxed{س = ٤}$ كشاف

اقترانات: (٢) س²، ٢ − س

س² = ٢ − س ← س² + س − ٢ = ٠

← $\boxed{س = -٢}$ $\boxed{س = ١}$



م = $\int_1^4 \left(س^2 - (٢ - س)\right)\,دس$

= $\frac{س^3}{3}\Big|_1^4 - \frac{(٢-س)^2}{-2}\Big|_1^4$

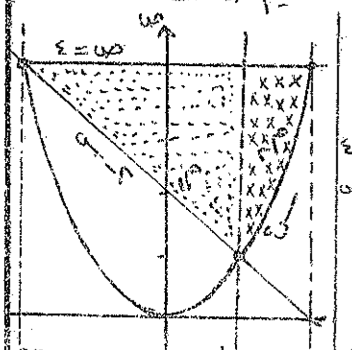
= ٢١ + $\frac{3}{2}$ = ٢٢٫٥

س٥: ما مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = س² والمستقيم هـ(س) = ٢ − س والمستقيم ص = ٤.

الحل: أعمدة: X

اقترانات: (٣) س²، ٢ − س، ٤

س² = ٢ − س	س² = ٤	٢ − س = ٤
س² + س − ٢ = ٠	$\boxed{س = ٢}$	س = −٢
(س + ٢)(س − ١) = ٠	−٢ = س	
$\boxed{س = -٢}$ $\boxed{س = ١}$		



لدينا ٣ اقترانات لذلك يوجد منطقتين.

م١ = $\int_{-2}^{1} \left(٤ - (٢ - س)\right)\,دس = \frac{9}{2}$

م٢ = $\int_1^2 (٤ - س^2)\,دس = \frac{5}{3}$

المساحة الكلية = $\frac{9}{2} + \frac{5}{3} = \frac{37}{6}$

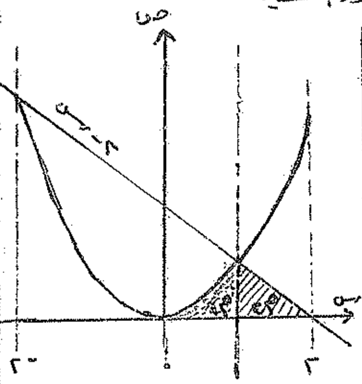
سؤال وزاري

س٦: ما مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = س² والمستقيم هـ(س) = ٢ − س ومحور السينات.

الحل: أعمدة: X

اقترانات: (٣) س²، ٢ − س، صفر

س² = ٢ − س	س² = ٠	٢ − س = ٠
س² + س − ٢ = ٠	$\boxed{س = ٠}$	$\boxed{س = ٢}$
$\boxed{س = ١}$ $\boxed{س = -٢}$		



م١ = $\int_0^1 (س^2 - ٠)\,دس$

= $\frac{س^3}{3}\Big|_0^1 = \frac13$

م٢ = $\int_1^2 \left((٢ - س) - ٠\right)\,دس = \frac12$ (او مساحة مثلث)

← المساحة الكلية = $\frac13 + \frac12 = \frac56$

س٧: ما مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ص = س³ والمستقيمات ص = ١ ، ص = ٨ ومحور الصادات

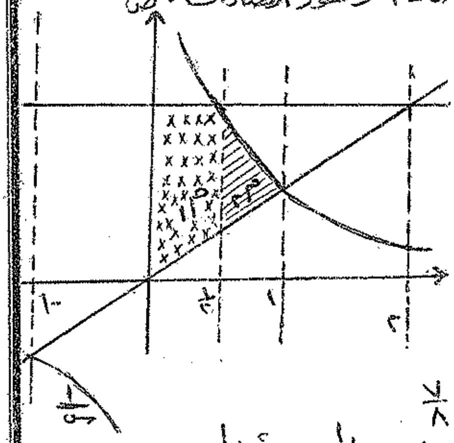
الجواب $\frac{45}{4}$

س٨: ما مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = $\frac{1}{س}$ والمستقيمات ص = س ، ص = ٢ ومحور الصادات.

الحل: أعمدة: $\boxed{س = ٠}$ كشاف

اقترانات: (٣) $\frac{1}{س}$ ، ٢ ، س

$\frac{1}{س}$ = س	$\frac{1}{س}$ = ٢	س = ٢
س² = ١	$\boxed{س = \frac12}$	$\boxed{س = ٢}$
$\boxed{س = -١}$ $\boxed{س = ١}$		



٣ اقترانات ← منطقتين

م١ = $\int_0^{\frac12} (٢ - س)\,دس = \frac78$

م٢ = $\int_{\frac12}^{1} \left(\frac{1}{س} - س\right)\,دس = لوهـ|س|\Big|_{\frac12}^{1} - \frac{س^2}{2}\Big|_{\frac12}^{1}$

= −لوهـ $\frac12$ − $\frac38$

المساحة الكلية = $\frac78$ + −لوهـ $\frac12$ − $\frac38$ = $\frac12$ − لوهـ $\frac12$

س٩: ما مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = س هـ^{٢س} ومحور السينات في الفترة [٠، ٢]

الحل: أعمدة: انتبه لدينا فترة $\boxed{س = ٠}$ $\boxed{س = ٢}$

اقترانات: (٢) س هـ^{٢س} ، صفر * لاحظ لا نحتاج الرسم لوجود عمودين واقترانين

س هـ^{٢س} = صفر

اما $\boxed{س = ٠}$ أو هـ^{٢س} = ٠ وهذا مستحيل.

م = $\int_0^2 \underbrace{س}_{ق}\,\underbrace{هـ^{٢س}\,دس}_{دهـ}$ تكامل بالاجزاء

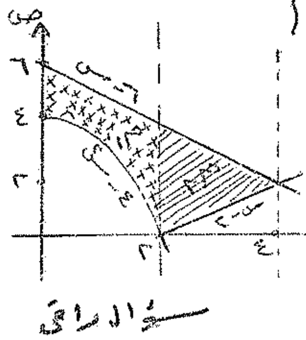
الجواب $\frac34 هـ^4 + \frac14$

س١٠ جد مساحة المنطقة الواقعة في الربع الأول والمحصورة بين منحنى ص = ٤ − س² والمستقيمين ص = س − ٢ ، ص = ٦ − س ومحور الصادات .

<u>الحل</u>: أعمدة: $\boxed{\text{س} = ٠}$ محور الصادات

اقترانات: ③ ٤ − س² ، س − ٢ ، ٦ − س .

٤ − س² = س − ٢	٤ − س² = ٦ − س	س − ٢ = ٦ − س
س² + س − ٦ = ٠	س² − س + ٢ = ٠	٢س = ٨ ⟸ $\boxed{\text{س} = ٤}$
(س + ٣)(س − ٢) = ٠	لا تحلل	
س = −٣ تهمل ، $\boxed{\text{س} = ٢}$		



لاحظ المنطقة في الربع الأول ! لذلك تهمل الأعداد السالبة .

م١ = $\int_{٠}^{٢}$ ٦ − س − (٤ − س²) . ء س

= $\int_{٠}^{٢}$ ٢ + س² − س . ء س = $\frac{١٤}{٣}$

م٢ = $\int_{٢}^{٤}$ ٦ − س − (س − ٢) . ء س

= $\int_{٢}^{٤}$ (٨ − ٢س) . ء س = ٤

المساحة الكلية = ٤ + $\frac{١٤}{٣}$ = $\frac{٢٦}{٣}$

سؤال راقي

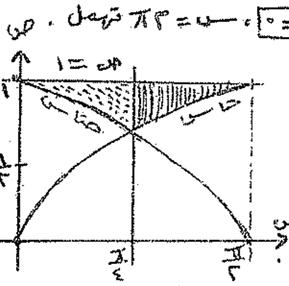
س١١ ما مساحة المنطقة بين منحنى الاقتران ق(س) = جاس ، هـ(س) = جتاس والمستقيم ص = ١ في الفترة $[٠ ، \frac{\pi}{٢}]$.

<u>الحل</u>: أعمدة: لدينا فترة

اقترانات: ③ جاس ، جتاس ، ١

راقي

جاس = جتاس	جاس = ١	جتاس = ١
$\boxed{\text{س} = \frac{\pi}{٤}}$ ، س = ٢٢٥° تهمل	$\boxed{\text{س} = \frac{\pi}{٢}}$	$\boxed{\text{س} = ٠}$ ، س = ٢π تهمل .



م١ = $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}}$ ١ − جتاس . ء س = $\frac{\pi}{٤} - \frac{١}{\sqrt{٢}}$

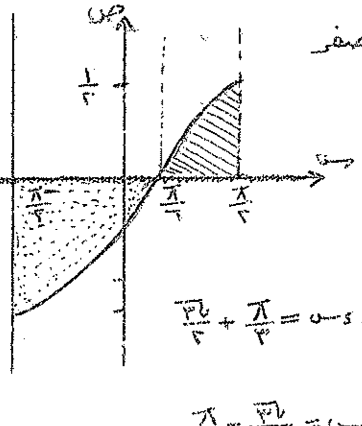
م٢ = $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}}$ ١ − جاس . ء س = $\frac{\pi}{٤} - \frac{١}{\sqrt{٢}}$

م الكلية = ٢$\left(\frac{\pi}{٤} - \frac{١}{\sqrt{٢}}\right)$ لاحظ التماثل .

س١٢ ما مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = جاس − $\frac{١}{٢}$ ومحور السينات في الفترة $[\frac{-\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢}]$

<u>الحل</u>: أعمدة: لدينا فترة

اقترانات: ② جاس − $\frac{١}{٢}$ ، صفر



جاس − $\frac{١}{٢}$ = صفر

جاس = $\frac{١}{٢}$

س = $\frac{\pi}{٦}$ ، س = $\frac{٥\pi}{٦}$ تهمل

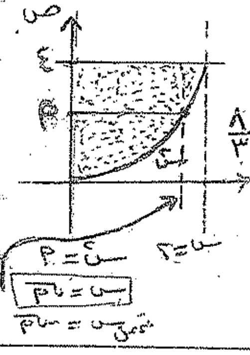
م١ = $\int_{\frac{-\pi}{٢}}^{\frac{\pi}{٦}}$ صفر − (جاس − $\frac{١}{٢}$) . ء س = $\frac{\pi}{٣} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

م٢ = $\int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٢}}$ (جاس − $\frac{١}{٢}$) − صفر . ء س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{\pi}{٦}$

المساحة الكلية = $\frac{\pi}{٦}$ + $\sqrt{٣}$

انتبه !!
جتا −٩٠ = جتا ٩٠

س١٣ إذا كان المستقيم ص = م ينصف المساحة المحصورة بين منحنى ق(س) = س² والمستقيم ص = ٤ والصادات وفي الربع الأول ، جد الثابت م .



<u>الحل</u>: أولاً نجد المساحة الكلية حيث

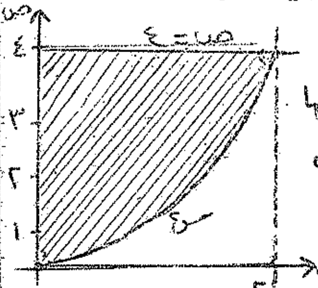
م = $\int_{٠}^{٢}$ ٤ − س² . ء س = $\frac{١٦}{٣}$ نأخذ نصفها = $\frac{٨}{٣}$

∴ $\int_{٠}^{\sqrt{\text{م}}}$ م − س² . ء س = $\frac{٨}{٣}$

م($\sqrt{\text{م}}$ − ٠) − $\left.\frac{\text{س}^٣}{٣}\right|_{٠}^{\sqrt{\text{م}}}$ = $\frac{٨}{٣}$ ⟸ م$^{\frac{٣}{٢}}$ = ٤

م$^{\frac{٣}{٢}}$ − $\frac{\text{م}^{\frac{٣}{٢}}}{٣}$ = $\frac{٢\text{م}^{\frac{٣}{٢}}}{٣}$ ⟵ م = $\sqrt[٣]{١٦}$

س١٤ جد معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل وينصف المساحة المحصورة بين الاقترانين ق(س) = س² ، ص = ٤ ومحور الصادات والواقعة في الربع الأول .



<u>أولاً</u>: نجد المساحة الكلية ثم نأخذ نصفها

أعمدة: س = ٠ محور الصادات

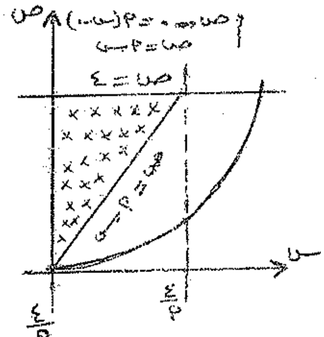
اقترانات: ② س² ، ٤

س² = ٤ ⟸ س = ٢ ، س = −٢ تهمل

م = $\int_{٠}^{٢}$ ٤ − س² . ء س = $\frac{١٦}{٣}$ ⟸ نصف المساحة = $\frac{١٦}{٣} \times \frac{١}{٢}$ = $\frac{٨}{٣}$

<u>ثانياً</u>: نرسم مستقيم يمر بنقطة الأصل وينصف المساحة.

تذكر أن معادلة المستقيم هي ص = م س (صف تاسع)



* الآن نجد حدود التكامل للمنطقة المظللة.

وهي س = ٠

نساوي الاقتران م س مع ٤ لنجد نقطة التقاطع

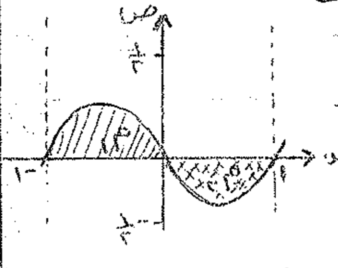
م س = ٤ ⟵ س = $\frac{٤}{\text{م}}$

م المظللة = $\int_{٠}^{\frac{٤}{\text{م}}}$ (٤ − م س) . ء س ⟸ $\frac{٨}{٣}$ = ٤($\frac{٤}{\text{م}}$) − $\left.\text{م}\frac{\text{س}^٢}{٢}\right|_{٠}^{\frac{٤}{\text{م}}}$

$\frac{٨}{٣}$ = $\frac{١٦}{\text{م}}$ − $\frac{\text{م}}{٢}$($\frac{١٦}{\text{م}^٢}$ − ٠) ⟸ $\frac{٨}{٣}$ = $\frac{١٦}{\text{م}}$ − $\frac{٨}{\text{م}}$ ⟸ $\frac{٨}{٣}$ = $\frac{٨}{\text{م}}$

∴ م = ٣ لذلك معادلة المستقيم هي ص = ٣س .

س١٥ ما مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = س³ − س والسينات .



الحل: أعمدة: X

اقترانات: ② س³ − س ، صفر

س³ − س = صفر

س(س² − ١) = ٠

س = ٠ ، س = ١ ، س = −١

م١ = $\int_{-١}^{٠}$ (س³ − س) − صفر . ء س = $\frac{١}{٤}$

م٢ = $\int_{٠}^{١}$ صفر − (س³ − س) . ء س = $\frac{١}{٤}$

م الكلية = $\frac{٢}{٤}$ = $\frac{١}{٢}$

حلول تمرين عام (١) :-

① نوحد الزوايا (متطابقة)

جا٦س = ٢جا٣س جتا٣س

∫ ٢جا٣س جتا٣س جتا^٢ ٣س . ءس

∫ ٢جا٣س جتا^٣ ٣س . ءس

ص = جتا٣س → ∫ ٢جا٣س ص^٣ . ءص / (-٣جا٣س)

ءص/ءس = -٣جا٣س

ءس = ءص / (-٣جا٣س)

= -٢/٣ ص^٤/٤ + ث

= -١/٦ (جتا٣س)^٤ + ث .

② ∫ س ظا س^٢ قا^٢ س^٢ . ءس

الحل الأول :

ص = ظا س^٢ → ∫ س ص قا^٢ س^٢ . ءص / (٢س قا^٢ س^٢)

ءص/ءس = قا^٢ س^٢ × ٢س

ءس = ءص / (٢س قا^٢ س^٢)

= ١/٢ ص^٢/٢ + ث

= ١/٤ (ظا س^٢)^٢ + ث

الحل الثاني :

ص = س^٢ → ∫ س ظا ص قا^٢ ص . ءص / ٢س

ءص/ءس = ٢س ، ءس = ءص/٢س

= ١/٢ ∫ ظا ص قا^٢ ص . ءص

تعويض مرة أخرى

ع = ظا ص → ١/٢ ∫ ع قا^٢ ص . ءع / قا^٢ ص

ءع/ءص = قا^٢ ص

ءص = ءع / قا^٢ ص

١/٢ ع^٢/٢ + ث .

١/٤ (ظا ص)^٢ + ث = ١/٤ (ظا س^٢)^٢ + ث

③ ∫ س^٢ هـ^{٢س} . ءس — اجزاء مرتين

ف = س^٢ → ءف = ٢س . ءس

ءد = هـ^{٢س} . ءس → د = هـ^{٢س}/٢

⇐ ١/٢ س^٢ هـ^{٢س} - ∫ س هـ^{٢س} . ءس

اجزاء

١/٢ س^٢ هـ^{٢س} - [ف = س → ءف = ١ . ءس ، ءد = هـ^{٢س} . ءس → د = هـ^{٢س}/٢ ، ١/٢ (س هـ^{٢س}) - ∫ ١/٢ هـ^{٢س} . ءس]

= ١/٢ س^٢ هـ^{٢س} - ١/٢ س هـ^{٢س} + ١/٢ . هـ^{٢س}/٢ + ث .

④ ∫ س^٥ قا^٢ س^٣ . ءس

ص = س^٣ → ∫ س^٥ قا^٢ ص . ءص / ٣س^٢

ءص/ءس = ٣س^٢ ، ءس = ءص / ٣س^٢

∫ ١/٣ س^٣ قا^٢ ص . ءص ← من الأصل ص = س^٣

∫ ١/٣ ص قا^٢ ص . ءص — اجزاء

ف = ١/٣ ص → ءف = ١/٣ . ءص

ءد = قا^٢ ص . ءص → د = ظا ص

= ١/٣ ص ظا ص - ∫ ١/٣ ظا ص . ءص ← جاص/جتاص

= ١/٣ ص ظا ص + ١/٣ لـو|جتا ص| + ث

= ١/٣ س^٣ ظا س^٣ + ١/٣ لـو|جتا س^٣| + ث .

⑤ ∫ هـ^س ظا هـ^س . ءس

ص = هـ^س → ∫ هـ^س ظا ص . ءص / هـ^س

ءص/ءس = هـ^س ، ءس = ءص / هـ^س

-∫ -جاص/جتاص . ءص = -لـو|جتا ص| + ث

= -لـو|جتا هـ^س| + ث .

⑥ $\int_0^{\pi/2}$ س جاس . ءس = $\int_0^{2}$ (م س^٢ + ٢س) . ءس

الأيمن : أجزاء

ف = س → ءف = ١ . ءس

ءد = جاس . ءس → د = -جتاس

= -س جتاس $|_0^{\pi/2}$ + $\int_0^{\pi/2}$ جتاس . ءس

= -[π/2 جتا π/2 - صفر] + جاس $|_0^{\pi/2}$

= صفر + جا π/2 - جا ٠ .

= ١

الأيسر : عادي .

م س^٣/٣ $|_0^2$ + ٢س^٢/٢ $|_0^2$

م/٣ [٨ - ٠] + [٤ - ٠]

٨م/٣ + ٤

١ = ٨م/٣ + ٤ ⇐ -٣ = ٨م/٣ ⇐ م = -٩/٨

⑦ $\int_0^{\pi/4}$ جتا٢س / √(١+جا٢س) . ءس — ظهر جامع جتا .

ص = ١+جا٢س → ∫ جتا٢س/√ص × ءص / ٢جتا٢س

ءص/ءس = ٢جتا٢س ، ءس = ءص / ٢جتا٢س

١/٢ ∫ ص^{-١/٢} . ءص

١/٢ × ص^{١/٢} / (١/٢) |

= √ص | = ١

⑧ $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 - جا٢س} \,.\, دس$ ناقشة

$1 - جا٢س = جا^2س + جتا^2س - ٢جاس جتاس$

$= (جاس - جتاس)^2$

$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{(جاس - جتاس)^2} \,.\, دس$

$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} |جاس - جتاس| \,.\, دس$

إعادة التعريف $جاس = جتاس$ ← $س = \frac{\pi}{4} ، س = \frac{5\pi}{4}$

$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (جتاس - جاس) \,.\, دس$

الجواب $\frac{2}{\sqrt{2}} - 1$

ملاحظة يوجد حل آخر بالمرافق .

---

⑨ $\int \sqrt[3]{س^3 + ٤س^4} \,.\, دس$ ناقشة

$\int \sqrt[3]{س^3(1+٤س)} \,.\, دس$

$\int \sqrt[3]{س^3} \times \sqrt[3]{1+٤س} \,.\, دس$

$\int س (1+٤س)^{\frac{1}{3}} \,.\, دس$ — اجزاء — اكمل الحل .

---

⑩ $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} جا٢س \, هـ^{جاس} \,.\, دس$

$ص = جاس$ ، $\frac{دص}{دس} = جتاس$ ، $دس = \frac{دص}{جتاس}$

$\int ٢جاس \cancel{جتاس} \, هـ^{ص} \,.\, \frac{دص}{\cancel{جتاس}}$

$\int ٢ص \, هـ^{ص} \,.\, دص$ ---- اجزاء

الجواب $\boxed{٢}$

---

⑪ $\int \frac{س هـ^س}{(س+1)^2} \,.\, دس = \int \underbrace{س هـ^س}_{ق} \underbrace{(س+1)^{-2} . دس}_{دهـ}$

$ق = س هـ^س$ ← $دق = (س هـ^س + هـ^س) \,.\, دس$

$دهـ = (س+1)^{-2} \,.\, دس$ ← $هـ = \frac{(س+1)^{-1}}{-1}$

$= - س هـ^س (س+1)^{-1} + \int (س هـ^س + هـ^س)(س+1)^{-1} \,.\, دس$

$= - \frac{س هـ^س}{1+س} + هـ^س + جـ$. $\int \frac{هـ^س \cancel{(س+1)}}{\cancel{(س+1)}} \,.\, دس$

---

⑫ $\int (س+1)^3 (س^2 + ٢س - ٧)^5 \,.\, دس$

$ص = س^2 + ٢س - ٧$ ، $\frac{دص}{دس} = ٢س + ٢$ ، $دس = \frac{دص}{٢(س+1)}$

← $\int (س+1)^{\cancel{3}\,2} ص^5 \,.\, \frac{دص}{٢\cancel{(س+1)}}$

$= \frac{1}{2} \int (\underbrace{س^2 + ٢س} + 1) ص^5 \,.\, دص$

← $س^2 + ٢س = ص + ٧$ من الفرض .

$= \frac{1}{2} \int (ص + ٨) ص^5 \,.\, دص$

$= \frac{1}{2} \int ص^6 + ٨ص^5 \,.\, دص = \frac{1}{2}\left[\frac{ص^7}{7} + \frac{٨ص^6}{6}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{(س^2+٢س-٧)^7}{7} + \frac{8}{6}(س^2+٢س-٧)^6\right] + جـ$

تمارين تزويدية ⑨

س١ اوجد كل من التكاملات التالية :

أ) $\int ٢^{٣س} \,.\, دس$ انتبه $٢^{٣س} = هـ^{٣س لو٢}$

$\Leftarrow \int هـ^{لو ٢^{٣س}} \,.\, دس = \int هـ^{٣س لو٢} \,.\, دس$ لاحظ المعوضية

اصبح مباشر

$= \frac{هـ^{٣س لو٢}}{٣لو٢} + جـ$.

حل آخر نفرض $ص = ٢^{٣س}$ ولكن الاقتران مشكلة

س٢ اذا كان $ق(س)$ قابل للاشتقاق على ح وكان $ق(٢) = ٥$ وكان $\int_{0}^{2} س^ن ق'(س) \,.\, دس + ن \int_{0}^{2} س^{ن-1} ق(س) \,.\, دس = ٨٠$

جد الثابت ن .

*نبدأ بإجراء التكامل (واضح انه اجزاء)

$ق = س^ن$ ← $دق = ن س^{ن-1} \,.\, دس$

$دهـ = ق'(س) \,.\, دس$ ← $هـ = ق(س)$

$س^ن ق(س) \Big|_{0}^{2} - ن \int_{0}^{2} س^{ن-1} ق(س) \,.\, دس + ن \int_{0}^{2} س^{ن-1} ق(س) \,.\, دس = ٨٠$

$٢^ن ق(٢) - صفر = ٨٠ \Leftarrow ٢^ن \times ٥ = ٨٠ \Leftarrow ٢^ن = ١٦$

$\Leftarrow ن = ٤$

س٣ اذا كان $\int_{1}^{3} ق \,.\, دهـ = ٥$ وكان $ق(1) = هـ(1) = ٢$

$ق(٣) = هـ(٣) = ٧$ جد $\int_{1}^{3} هـ \,.\, دق$

* نطبق قانون الأجزاء :

$\int_{1}^{3} ق \,.\, دهـ = ق \,.\, هـ \Big|_{1}^{3} - \int_{1}^{3} هـ \,.\, دق$ — الجواب ٤٠ .

س٤ ما مساحة المنطقة الواقعة في الربع الأول و المحصورة بين منحنى $ص^2 = س$ والمستقيم $ص = س - ٢$ ومحور السينات .

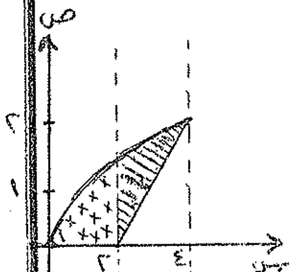
الحل: $ص^2 = س$ اقترانين ص .

$ص = \sqrt{س}$ ، $ص = -\sqrt{س}$ مهمل لانه تحت السينات

اعدة X :

اقترانات: $\sqrt{س}$ ، $س - ٢$ ، صفر

$\sqrt{س} = 0$ ← $\boxed{س = 0}$ ؛ $س - ٢ = 0$ ← $\boxed{س = ٢}$ ؛ $\sqrt{س} = س - ٢$ ← $س = س^2 - ٤س + ٤$ ← $س^2 - ٥س + ٤ = 0$ ← $(س-1)(س-٤) = 0$ ← $\boxed{س = ٤}$ ، $\boxed{س = 1}$ مهمل



$م_1 = \int_{0}^{2} \sqrt{س} - صفر \,.\, دس = \frac{٢}{٣} س^{\frac{3}{2}} \Big|_{0}^{2} = \frac{٤}{٣}\sqrt{٢}$

$م_2 = \int_{2}^{4} \sqrt{س} - (س-٢) \,.\, دس = \frac{١٦}{٣} - \frac{٤}{٣}\sqrt{٢}$

$م_{الكلية} = \frac{١٦}{٣}$

س٦ $\int \frac{١}{١ - \text{جتا}٢س} \cdot ءس$

الحل :- مطابقة $\text{جا}^٢ س = \frac{١}{٢}(١ - \text{جتا}٢س)$.

$\Leftarrow ١ - \text{جتا}٢س = ٢\text{جا}^٢ س$.

$\int \frac{١}{٢\text{جا}^٢ س} \cdot ءس = \frac{١}{٢}\int \text{قتا}^٢ س \cdot ءس$

$= \frac{١}{٢} \times -\text{ظتا}س + ث$.

* هناك حل آخر بالمرافق .

لاحظ أن الجتا لها مطابقة أما الجيب فلا يوجد ويجب المرافق

س إذا كان تسارع جسم يعطى حسب العلاقة $ت = ٢ع$ حيث (ع) سرعة الجسم م/ث أوجد سرعة الجسم بعد ثانية واحدة من بدء الحركة علماً بأن سرعته الابتدائية هي (هـ) م/ث حيث هـ : العدد النيبيري .

الحل :- $ت = ٢ع \Leftarrow \frac{ءع}{ءن} = ٢ع$

$\Leftarrow \int \frac{ءع}{ع} = \int ٢ءن \Leftarrow \text{لو}_هـ|ع| = ٢ن + ث$.

لكن : $ع_٠ = هـ \Leftarrow \text{لو}_هـ هـ = ٢(٠) + ث \Leftarrow$ ، $ن = ٠$

$\boxed{ث = ١}$

$\therefore \text{لو}_هـ|ع| = ٢ن + ١ \Leftarrow |ع| = هـ^{٢ن+١}$

وعندما $ن = ١ \Leftarrow ع = هـ^٣$ (على فرض أن الجسم يتحرك باتجاه واحد) .

س٧ ما مساحة المنطقة المحصورة بين $ق(س) = س^٢$ ومحور السينات والمماس لمنحنى ق(س) عند النقطة (٢، ٤)

الحل :- نجد معادلة المماس أولاً حيث لدينا نقطة التماس (٢، ٤) $\Leftarrow$ ميل المماس $= قَ(٢)$ لكن $قَ(س) = ٢س$

$\Leftarrow \therefore$ ميل المماس $= ٤$

معادلة المماس $ص - ٤ = ٤(س - ٢) \Leftarrow ص = ٤س - ٤$

---- أكمل الحل كالمعتاد الجواب م الكلية $= \frac{٢}{٣}$

س ما مساحة المنطقة المحصورة بين $ص^٢ = س$ والمستقيم $ص = س - ٢$.

الحل : لدينا ٣ اقترانات $\sqrt{س}$ ، $-\sqrt{س}$ ، $س - ٢$

$م = \int_٠^١ (\sqrt{س} - -\sqrt{س}) + \int_١^٤ (\sqrt{س} - (س - ٢))$ | بالتجربة | بالتجربة | سؤال إثرائي | الجواب $\frac{٢٧}{٦}$

حل أسئلة الاختبار الذاتي صفحة ٣٠٥

س١ :

رقم الفقرة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
رمز الإجابة	جـ	د	أ	د	ب	أ	ب	أ	جـ	ب

س٢ : أ) $= \int ٣\text{لو}_هـ س \times س^ن ءس = هـ \cdot و - \int و ءهـ$

$= ٣\text{لو}_هـ س \times \frac{س^{ن+١}}{ن+١} - \int \frac{س^{ن+١}}{ن+١} \times \frac{٣}{س} ءس$

$= ٣\text{لو}_هـ س \times \frac{س^{ن+١}}{ن+١} - \frac{٣}{ن+١} \int س^ن ءس$

$= ٣\text{لو}_هـ س \times \frac{س^{ن+١}}{ن+١} - \frac{٣}{ن+١} \times \frac{س^{ن+١}}{ن+١} + ث$

ب) $ص = \sqrt{١ - س} \Leftarrow ص^٢ = ١ - س \Leftarrow ٢ص ءص = -ءس$

$\int \frac{٢ص ءص}{\sqrt{١ - ص}} = \int ٢ص(١ - ص)^{-\frac{١}{٢}} ءص$ أجزاء

$= \dots$

جـ) افرض $ص = \text{ظا}س$ ثم كسور جزئية .

د) أجزاء مرتين .

س٣ : $= \int_{-٢}^{٠} -س ءس + \int_{٠}^{٣} (٣س^٢ + ١) ءس = \dots = ٣٢$

س٤ : نشتقه : $ق(س) = ٢س هـ^{س^٢} + \frac{\text{قتا}س}{\text{جتا}س} = ٢س هـ^{س^٢} + \text{ظا}س \text{قا}س$

نشتقه : $قَ(س) = ٢ \times س \times ٢س \times هـ^{س^٢} + ٢ \times هـ^{س^٢} + \text{قا}^٣ س$

س٥ : $|س - ٢| = \begin{cases} س - ٢ & ، س \geq ٢ \\ ٢ - س & ، س < ٢ \end{cases}$

* نقاط التقاطع :

$س - ٢ = ١٠ - س^٢$

$\Leftarrow س^٢ + س - ١٢ = ٠$

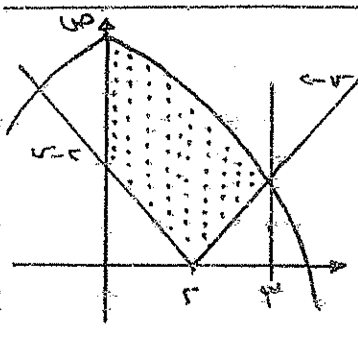
$(س + ٤)(س - ٣) = ٠ \Leftarrow س = ٣$

$س = -٤$ ×

$م = \int_٠^٢ ((١٠ - س^٢) - (٢ - س)) ءس$

$+ \int_٢^٣ ((١٠ - س^٢) - (س - ٢)) ءس$

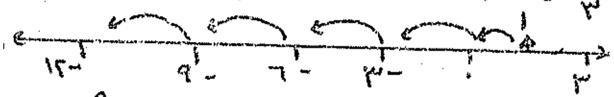
$= \dots = \frac{٣٧}{٢}$



تمرين : إذا كان $\int_١^{جـ} [\frac{١}{٣}س + ١] ءس = ١١$ جد جـ < ١

الحل : $\Leftarrow \int_{جـ}^{١} [ق(س)] ءس = -١١$

$\frac{١}{٣}س + ١ = ٠ \Leftarrow س = -٣$ ، ل = ٣ .



$\int_٠^١ ٠ ءس + \int_{-٣}^{٠} -١ ءس + \int_{-٦}^{-٣} -٢ ءس + \int_{-٩}^{-٦} -٣ ءس + \int_{جـ}^{-٩} -٣ ءس \stackrel{؟}{=} -١١$

$١ + ٠ + -٣ + -٦ + -٣(-٩ - جـ) = -١١$

$\Leftarrow -٨ + ٢٧ + ٣جـ = -١١ \Leftarrow جـ = -١٠$

حل أسئلة المراجعة صفحة ٣٠٤

س١: أ) $\int_2^3 (4س+1)^{\frac{1}{2}}\,دس = \left[\frac{(4س+1)^{\frac{3}{2}}}{4\times\frac{3}{2}}\right]_2^3$

$= \frac{1}{6}\left((\sqrt{13})^3 - 27\right)$

ب) $\int_1^3 \frac{(1+س)^7}{س^7}\times\frac{1}{س^2}\,دس = \int_1^3 \left(1+\frac{1}{س}\right)^7\times\frac{1}{س^2}\,دس$

تعويض: $ص = 1+\frac{1}{س} \Leftarrow \dots$

جـ) $\int_1^3 (9-س^2)\,دس + \int_3^4 (س^2-9)\,دس$

$= \dots = \frac{38}{3}$.

د) $\int_1^{-2} -2\,دس + \int_{-2}^{6} -1\,دس + \int_6^7 0\,دس = -4+3+0 = -7$

هـ) $\int هـ^{\frac{2}{3}س}\,دس = \frac{3}{2}هـ^{\frac{2}{3}س} + جـ$

و) $ص = \sqrt[3]{س} \Leftarrow ص^3 = س \Leftarrow 3ص^2\,دص = دس$

$\therefore \int \frac{1}{ص+1}\times 3ص^2\,دص = \int \frac{3ص^2}{ص+1}\,دص$ قسمة

$= \int \left(3ص - 3 + \frac{3}{ص+1}\right)دص$

$= \frac{3ص^2}{2} - 3ص + 3\,لو_هـ|ص+1| + جـ$

$= \frac{3}{2}(\sqrt[3]{س})^2 - 3\sqrt[3]{س} + 3\,لو_هـ|\sqrt[3]{س}+1| + جـ$

ز) دوري

ح) نفرض ص = ظاس ثم أكمل

ط) $\int \frac{(لو_هـ(س+2))^{\frac{1}{2}}}{س+2}\,دس = \frac{1}{2}\int \frac{1}{س+2}\times لو_هـ(س+2)\,دس$

$ص = لو_هـ(س+2) \Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{1}{س+2} \Leftarrow دس = (س+2)\,دص$

$\frac{1}{2}\int \frac{1}{\cancel{س+2}}\times ص \times \cancel{(س+2)}\,دص = \frac{1}{2}\cdot\frac{ص^2}{2} + جـ$

$= \frac{1}{4}\left(لو_هـ(س+2)\right)^2 + جـ$

ي) $\int \frac{دس}{س^{10}+س} = \int \frac{\frac{1}{س^{10}}}{\frac{س^{10}}{س^{10}}+\frac{س}{س^{10}}}\,دس$

$= \int \frac{س^{-10}}{1+س^{-9}}\,دس$

$= \frac{1}{-9}\int \frac{-9س^{-10}}{1+س^{-9}}\,دس = -\frac{1}{9}\,لو_هـ|1+س^{-9}| + جـ$

ك) $\int \frac{\sqrt{س^4(س^2-1)}}{س^5}\,دس = \int \frac{س^2(س^2-1)^{\frac{1}{2}}}{س^5}\,دس$

افرض ص = س² − ١ ....

س٢: أ) $\frac{د}{دس}\int هـ(س)\,دس = \frac{د}{دس}(س^2-3س+3)$

$\Leftarrow هـ(س) = 2س - 3 \Leftarrow هـَ(س) = 2 \Leftarrow هـَ(3) = 2$

ب) $\int_3^1 هـ(س)\,دس - 2\int_3^1 هـ(س)\,دس + \int_3^1 (2س-4)\,دس$

$= -5 + 12 + [(س^2-4س)]_3^1 = 7 + (-3-(-3)) = 7$

س٣: هـ(س) = أس + ب

* $\int_{-1}^{1} هـ(س)\,دس = 4 \Leftarrow \left[\left(\frac{أس^2}{2} + بس\right)\right]_{-1}^{1} = 4$

$\Leftarrow \frac{1}{2}أ + ب - \left(\frac{1}{2}أ - ب\right) = 4 \Leftarrow 2ب = 4 \Leftarrow ب = 2$

* $\int_1^3 (أس+ب)\,دس = 2 \Leftarrow \left[\left(\frac{أس^2}{2} + 2س\right)\right]_1^3 = 2$

$\Leftarrow \left(\frac{9}{2}أ + 6\right) - \left(\frac{أ}{2} + 2\right) = 2 \Leftarrow 4أ + 4 = 2 \Leftarrow أ = -\frac{1}{2}$

$\therefore هـ(س) = -\frac{1}{2}س + 2$

س٤: $\frac{دص}{ص} = \frac{دس}{س} \Leftarrow \int \frac{1}{ص}\,دص = \int \frac{1}{س}\,دس$

$\Leftarrow لو_هـ|ص| = لو_هـ|س| + جـ \Leftarrow |ص| = هـ^{لو_هـ|س|} \times هـ^{جـ}$

$\Leftarrow |ص| = ج\,|س| \Leftarrow ص = ج\,س ،\ ج \in ح$

س٥: أ) $ص^2 = لو_هـ س\,ص - هـ^{س^2}$

$\Leftarrow ص^2 = لو_هـ س + لو_هـ ص - هـ^{س^2}$

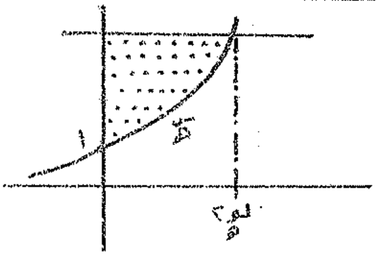
نشتق: $2ص\frac{دص}{دس} = \frac{1}{س} + \frac{\frac{دص}{دس}}{ص} - 2س\,هـ^{س^2}$

$2ص\frac{دص}{دس} - \frac{1}{ص}\frac{دص}{دس} = \frac{1}{س} - 2س\,هـ^{س^2}$

$\frac{دص}{دس}\left(2ص - \frac{1}{ص}\right) = \frac{1}{س} - 2س\,هـ^{س^2}$

$\Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{\frac{1}{س} - 2س\,هـ^{س^2}}{2ص - \frac{1}{ص}}$

ب) انظر صفحة (٩)



س٦: تقاطع: $2 = هـ^س$

$\Leftarrow لو_هـ 2 = س$

$\therefore م = \int_0^{لو_هـ 2} (2 - هـ^س)\,دس$

$= \left[(2س - هـ^س)\right]_0^{لو_هـ 2}$

$= 2لو_هـ 2 - 2 - (0 - 1) = 2لو_هـ 2 - 1$

اثبت لو_هـ ٢ < ١