

## الاقتران البدائي (التكامل غير المحدود)

إن الاقتران  $m(s)$  يسمى الاقتران البدائي للاقتران  $q(s)$  إذا كانت مشتقة  $m(s)$  تعيد الاقتران الأصلي، أي أن:  $m'(s) = q(s)$  ويسمى الاقتران البدائي بالتكامل غير المحدود ويرمز له

بالرمز  $\int q(s) ds$ ، والصورة العامة لقاعدة الاقتران البدائي للاقتران  $q(s)$  هي

$m(s) + C$ ، حيث  $C$  عدد ثابت، وبالرمز فإن:

$$\int q(s) ds = m(s) + C$$

مثال: جد الاقتران البدائي لـ  $q(s) = s^3 + 3s^2 - 4s + 7$

$$\text{الحل: } m(s) = s^3 - \frac{3}{2}s^2 + 7s + C$$

للتأكد  $\leftarrow$  نشتق  $m(s)$  فنحصل على  $q(s)$

$$\text{مثال: جد } \int (2s^2 + 3s + 7) ds$$

الحل:  $m(s) = \frac{2}{3}s^3 + \frac{3}{2}s^2 + 7s + C$   $\leftarrow$  ويسمى أيضاً (البدائي) (لتتأكد من خلال الاشتراك)

مثال: إذا كان  $m(s) = s^3 - 2s^2 + 5s - 7$  افتراناً بدائياً للاقتران  $q(s)$ ، فجد قيمة

$$q(s)$$

الحل:  $m(s)$  هو البدائي  $\leftarrow$  نشتقه فنحصل على  $q(s)$

$$q(s) = m'(s) = 3s^2 - 4s + 5$$

$$q(2) = 5 + 8 - 12 = -9$$

مثال: إذا كان  $Q(s) = s^3 - 2s^2 + s + 1$

$$\left( \frac{\Pi}{12} \right) Q \quad \left( \frac{\Pi}{6} \right)$$

الحل:

$$\text{لدينار البدائي } M(s) = (s^3 - 2s^2 + s + 1)$$

$M(s)$

$$Q(s) = 2(s^3 - 2s^2 + s + 1)$$

$$= -s^6 + 3s^4 - 2s^2$$

$$Q(s) = -s^6 + 2s^4 - s^2 + \dots$$

$$\left( \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right)^2 + \dots + (-1)^3 = \left( \frac{\Pi}{3} \right)^2 + \dots = \left( \frac{\Pi}{6} \right)$$

$$\frac{8}{3} = \frac{4}{3} \times 2 = \left( \frac{2}{\sqrt[3]{2}} \right) \times 2 + \dots$$

$$Q(s) = -s^6 + 2s^4 - 4s^2 + 8s$$

$$= -s^6 + 2s^4 - 8s^2$$

$$\frac{\frac{\Pi}{6} \text{ جتنا}}{\frac{\Pi}{6} \text{ جا}} \times \frac{1}{\frac{\Pi}{2} \text{ جا}} \times \lambda - \frac{\Pi}{2} \text{ جتا} \lambda - = \left( \frac{\Pi}{12} \right) \text{ ق}$$

$$\sqrt{3} \times 2 = \sqrt{3} \times \epsilon \times \lambda - \cdot \times 1\lambda =$$

**مثال:** إذا كان  $\{ \text{ق}(s) | s = 2 - 4s + 5, \text{ وكان } \text{ق}(2) = 7 \}$  فجد قيمة  $\text{ق}(1)$

$$\text{الحل: } \left\{ \begin{array}{l} q(s) ds = q(s) + \int g(s) ds \end{array} \right.$$

$$\rightarrow s^3 - 4s^2 + 5s + 6 = 0$$

$$\text{بما أن } \text{ق}(2) = 7 \leftarrow \text{ج} + 8 - 12 \leftarrow 5 + \text{ج} \leftarrow 2 - \text{ج}$$

$$2 - 5 + 4s^3 - s^2 = \text{Eq}(s)$$

$$\gamma = \alpha + \beta - \alpha = (\gamma)$$

سؤال هام: إذا كان  $n(s) = s^3 + 3s$  جد ق (٥)

$$\text{سؤال هام إذا كان } \left\{ \begin{array}{l} n^{\text{س}}(\text{س}) = \text{س}^3 + 3\text{س} \\ \text{و كانت ق}(2) = 7 \text{ جد ق}(5) \end{array} \right.$$

يكتب الحل بعد الشرح

## قواعد التكامل غير المحدود:

قاعدة ١:  $\int a ds = a s + J$ , حيث  $a$  عدد ثابت

$$\text{قاعدة ٢: } \left\{ \begin{array}{l} \text{سدس} = \frac{s}{1+n} + ج, \text{ حيث } n \neq -1 \end{array} \right.$$

أمثلة جد كلاً من التكاملات التالية:

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} ۲ = ۳ - ۳ - دس \\ ۷ = س + س + ج \end{array} \right. \quad (۱)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{دنس} = \text{س} + \text{ج} \\ \text{دن} = \text{ن} + \text{ج} \end{array} \right\} (3)$$

$$\underline{J} + \frac{\underline{s}}{\underline{\zeta}} = s^{\gamma} \underline{d}s \quad (6) \quad \underline{J} + \frac{\underline{s}}{\underline{\lambda}} = s^{\gamma} \underline{d}s \quad (5)$$

$$\rightarrow + \frac{s}{2} = \left\{ \begin{array}{l} s - ds \\ s + ds \end{array} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} s^{\frac{5}{3}} ds &= \frac{s^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}} + C \\ \int s^{\frac{5}{3}} ds &= \frac{s^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}} + C \end{aligned} \right\} (9)$$

**ملاحظة هامة:**  $\{ \text{د}(s) = \text{د}(s) \text{ دس، حيث } \text{أ عدد ثابت} \}$

$$= \{ (Q_1(s) \pm Q_2(s) \pm \dots \pm Q_n(s)) ds \}$$

$\{Q_1(s), Q_2(s), \dots, Q_n(s)\}$  دس

القواعد الدائريّة:

$$\text{قاعدة } 3: \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\text{قاعدة } 4: \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\text{قاعدة } 5: \int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C$$

$$\text{قاعدة } 6: \int \cot x dx = \ln |\sin x| + C$$

$$\text{قاعدة } 7: \int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| + C$$

$$\text{قاعدة } 8: \int \csc x dx = -\ln |\csc x + \cot x| + C$$

أمثلة: جد كلاً من التكاملات التالية:

$$(1) \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$$

$$(2) \int (x^3 - 9x^2 + 8x - 7) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{9x^3}{3} + \frac{8x^2}{2} - 7x + C$$

$$(3) (2 \sin x + \cos x) dx = \sin x - 2 \cos x + C$$

$$(4) (\sec x - \csc x) dx = \ln |\sec x + \csc x| + C$$

## التكامل المحدود:

$$\int_a^b q(s) ds = q(b) - q(a)$$

$$\int_a^b m(s) ds = m(b) - m(a)$$

ونلاحظ أن ناتج التكامل المحدود هو عدد ثابت وليس اقتران مثل ناتج التكامل غير المحدود، كما نلاحظ أنه لا داعي لكتابية ثابت التكامل  $\underline{ج}$  عند إجراء التكامل المحدود لأنه يتم اختصاره بعد عملية تعويض الحدود.

$$\underline{ج} \int_a^b ds = \underline{ج}(b-a), \text{ حيث } \underline{ج} \text{ عدد ثابت}$$

## خصائص التكامل المحدود:

$$1) \text{ التكامل عند نقطة يساوي صفر: } \int_a^a q(s) ds = 0$$

$$2) \text{ قلب حدود التكامل: } \int_b^a q(s) ds = - \int_a^b q(s) ds$$

٣) الخاصية الخطية (التوزيع):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{هـ(س) دس} \\ \text{ق(س) دس} \end{array} \right\} \pm \left\{ \begin{array}{l} \text{هـ(س)) دس} \\ \text{ق(س)) دس} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{(ق(س) \pm هـ(س)) دس} \\ \text{هـ(س) دس} \end{array} \right\} \leftarrow$$

٤) خاصية الإضافة:



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ق(س) دس} \\ \text{ق(س) دس} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{ق(س) دس} \\ \text{ق(س) دس} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{(ق(س) + ق(س)) دس} \\ \text{ق(س) دس} \end{array} \right\} \leftarrow$$

٥) خاصية الاستبدال:

ملاحظة: في مسائل الاستبدال يجب التأكد من أن المقدار الذي نستبدل به خطياً من الدرجة الأولى ومعامل س هو (١)

٦) خاصية المقارنة:

إذا كان  $ق(س) > هـ(س)$  لـ كل  $s \in [أ, ب]$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ق(س) دس} \\ \text{هـ(س)) دس} \end{array} \right\} < \left\{ \begin{array}{l} \text{ق(س)) دس} \\ \text{هـ(س)) دس} \end{array} \right\} \leftarrow$$

نتيجة: إذا كان  $ق(س) >$  صفر لـ كل  $s \in [أ, ب]$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ق(س) دس} \\ \text{صفر} \end{array} \right\} < \left\{ \begin{array}{l} \text{أي أنه موجب} \\ \text{هـ(س)) دس} \end{array} \right\} \leftarrow$$

تمارين:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{إذا علمت أن } \mathbf{Q(S)} \text{ دس} = 7, \text{ فجد:} \\ \mathbf{Q(S)} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{(2Q(S) + 3S) دس} \\ \mathbf{Q(S) دس} \quad \text{ب) } \end{array} \right.$$

الحل:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Q(S) دس} = 11 \\ \mathbf{Q(S) دس} \quad \text{أ) } \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{3Q(S) دس} \\ \text{فما قيمة } \mathbf{Q(S) دس} \end{array} \right.$$

الحل:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{(2S + 3) دس} \\ \text{ما قيمة } \mathbf{S دس} \end{array} \right.$$

الحل:



$$4) \text{ ما قيمة } \int_{1}^{2} (s^2 + 2s) ds$$

الحل:

$$5) \text{ إذا كان } \int_{1}^{3} (3s - 5) ds = 17, \text{ فـ} \int_{2}^{7} (s+2) ds$$

$$\text{فـ} \int_{1}^{3} (7s + 2) ds$$

$$6) \text{ إذا كان } \int_{2}^{6} (s-2) ds = 6$$

$$\text{فـ} \int_{5}^{7} (s-2s+5) ds$$

$$7) \text{ أثبت أن: } \int_{1}^{4} (s+1) ds - \int_{2}^{3} (s) ds + \int_{4}^{5} (s) ds = صفر$$

$$8) \text{ إذا كان } \int_{2}^{5} (s) ds = 1, \text{ فـ} \int_{2}^{5} (s+2) ds$$

$$\int_{5}^{10} (s+10) ds$$



الحل: استبدال غريب

$$\left. \begin{array}{l} 5(s+2)q(s) \\ 2s = s \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} s = 3 - s \\ 2 = 0 - s \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} s = 3 - s \\ 2 = 0 - s \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 2 + 2 \\ s = s \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} s = 3 - s \\ 2 = 0 - s \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 2 + 2 \\ s = s \end{array} \right\}$$

$$0 = 1 \times 0 =$$

٧) إذا كان  $M(s) = 4s^3 - 2s^2$  هو اقتران بدائي للاقتران  $q(s)$  المتصل في  $[1, 3]$ ، فجد

$$\left. \begin{array}{l} (2 - q(s)) \\ 1 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} (2 - q(s)). \\ 1 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 2 - q(s) \\ 1 \end{array} \right\}$$

$$\left[ \begin{array}{l} 3 \\ 1 \end{array} \right] (1 - 3)^2 =$$

$$(1 - 3)^2 =$$

$$8\zeta - 8\lambda - \zeta = ((2 - \zeta) - (1\lambda - 10\lambda)) - \zeta =$$

$$8) \text{ أيهما أكبر } \left\{ \begin{array}{l} \text{س}^2 \text{ دس أم} \\ \text{س}^3 \text{ دس} \end{array} \right.$$

الحل: نقارن بين س<sup>2</sup> ، س<sup>3</sup> في [٢، ٣] بالتعويض

$$\text{س}^2 > \text{س}^3 \text{ لكل س } \exists [٣, ٢]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{س}^2 . \text{ دس} < \\ \text{س}^3 . \text{ دس} \end{array} \right.$$

$$9) \text{ أيهما أكبر } \left\{ \begin{array}{l} \text{س}^2 \text{ دس أم} \\ \text{س}^3 \text{ دس} \end{array} \right.$$

الحل: نعرض في س<sup>2</sup> ، س<sup>3</sup> خلال [١، ٠]

$$\text{س}^2 > \text{س}^3 \text{ في } [١, ٠]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{س}^2 . \text{ دس} > \\ \text{س}^3 \text{ دس} \end{array} \right.$$

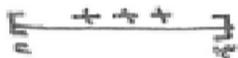
$$10) \text{ ما إشارة } \frac{\text{س}^2}{\text{س}-1} \text{ دس (دون حساب التكامل)}$$

الحل: نحدد إشارة  $Q(s) = \frac{s^2}{s-1}$  ضمن الفترة [٢، ٣]



نجد الجذور أولاً: بسط س<sup>٢</sup> = ، س = (خارج الفترة)

مقام س - ١ = س ← ٠ = ١ (خارج الفترة)



إشاره ق(س) ضمن [٢، ٣] (بالتعبير)

$Q(s) < 0$  في  $[2, 3]$  دس < . (موجب)

$$(11) \text{ أوجد العددين } m, n \text{ بحيث أن: } m \geq \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{ Jas } ds \geq n \end{cases}$$

الحل:

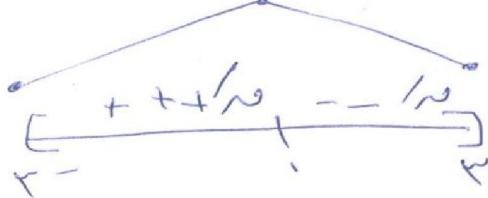
يكتب الحل بعد الشرح

$$12) \text{ أثبت أن: } 0 \leq \sqrt{-9s^2 - s} \leq 3$$

الحل: نحدد القيم القصوى (أكبر وأقل قيمة لـ  $Q(s)$ )

$$[3, 3-] \ni s \mapsto \sqrt{s-9} = \varphi(s)$$

$$\frac{s^2 - \sqrt{9s^2 - 4}}{2} = Q(s)$$



### (نحدد جذري البسط والمقام وإشارة قـ)

من شكل  $Q(s)$  الناتج نجد أن

$$\text{أكبر قيمة لـ } Q(s) \text{ عند } s = 0 \text{ هي } Q(0) = 3$$

$$\text{أقل قيمة لـ } Q(s) \text{ عند } s = 3 \text{ هي } Q(3) = 0$$

$Q(s)$  ينحصر ما بين  $0 \leq s \leq 3$

$$\int_{-3}^3 Q(s) ds \geq \int_{-3}^3 Q(3) ds \leftarrow$$

$$\int_{-3}^3 Q(s) ds \geq 0$$

$$\int_0^5 \sqrt{s - 25} ds \geq 0 \quad (13) \text{ اثبت أن:}$$

الحل:

(١٤) إذا كان:  $2 \geq Q(s) \geq 5$  لكل  $s \in [1, 3]$ , فما أكبر قيمة للتكامل

$$\int_1^3 (2Q(s) + 3) ds$$

الحل: من تطبيق خاصية المقارنة

$$\int_{1}^{5} n(s) ds \geq 2$$

$$\int_{1}^{10} n(s) ds \geq 4$$

أكبر قيمة للتكامل المحدود  
 $\int_{1}^{10} n(s) ds$  تساوي (١٠)

ولكن المطلوب أكبر قيمة لـ  $\int_{1}^{2} (2n(s) + 3) ds$

$$2 \leftarrow \int_{1}^{3} n(s) ds + 3 \cdot 2$$

$$26 = (1 - 3)^3 + 10 \times 2 =$$

(١٥) إذا كان  $\int_{1}^{(s+1)} n(s) ds = 9$  ، فما قيمة الثابت؟

الحل:

(١٦) إذا كان  $\int_{1}^{(2s-4)} n(s) ds = 0$  ، فما قيمة الثابت؟

الحل:

$$(17) \text{ إذا كان } \left\{ \begin{array}{l} s^3 + 13s = 34, \\ \text{فما قيمة الثابت } \alpha? \end{array} \right.$$

الحل: تكامل عادي

$$34 = \int_1^2 s^2 + \frac{s^3}{3} \leftarrow$$

$$34 = (2s^3 + s^2) - (1s^3 + s)$$

$$34 = 2s^3 + s$$

$$2s^3 + s = 34$$

$$s = 1$$

$$\alpha = 3 - s$$

$$(18) \text{ إذا كان } \left\{ \begin{array}{l} 2 - s^3 = 20, \\ \text{فما قيمة الثابت } \alpha? \end{array} \right.$$

الحل:

$$(19) \text{ إذا كان } \left\{ \begin{array}{l} s(s-4) = 2, \\ \text{فما قيمة الثابت } \alpha? \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} s = \alpha - 4 \\ s = 5 \end{array} \right\} \text{الحل: نضع } s = \alpha - 4$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{دص} \\ \text{رس} \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{l} \text{رس} \\ \text{دص} \end{array} \right\}$$

$$9 = ج - 5 = 4 - ج$$

$$\left. \begin{array}{l} ٣ \\ س^٤ \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{l} دس \\ دس + ٤ \end{array} \right\} \cdot \left. \begin{array}{l} ٢ \\ ١/٦ \end{array} \right\} (٢)$$

الحل: ليتم الاستبدال.. يجب أن يكون معامل س = 1

$$\left. \begin{array}{l} دس \\ دس + ٤ \end{array} \right\} \cdot \left. \begin{array}{l} ١/٦ \\ ١/٦ \times ١/٦ \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{l} دس \\ دس + ٢ \end{array} \right\} \cdot \left. \begin{array}{l} ١/٦ \\ ١/٦ \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{2} + 4 = ص \leftarrow 4 = ص \\ \frac{1}{2} + 2 = ص \leftarrow 2 = ص \end{array} \right\} \frac{1}{2} + نضع ص = ص = س$$

$$\left. \begin{array}{l} س^٤ دص \\ دص \end{array} \right\} \leftarrow \left. \begin{array}{l} \frac{1}{2} + 4 \\ \frac{1}{2} + 2 \end{array} \right\}$$

$$2 - = 1 - \leftarrow 1 - = \frac{1}{2} \leftarrow 3 = \frac{1}{2} + 4$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ٤٤(س)رس = ١٥ \\ ٤(١+س)(س)رس = ١٥ \end{array} \right.$$

الحل:

$$\left\{ \begin{array}{l} ٤(س)رس = ١٨ \\ ٤(١+س)(س)رس = ١٢ \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ٤(س)رس = ١٥ \\ ٤(١+س)(س)رس = ١٥ \end{array} \right. \text{ ولكن}$$

$$١٥ = ١٢ + (٢ - ٢)$$

$$٧,٥ \leftarrow ١٥ = ١٢$$

(٢٢) إذا كان  $q(s) =$  كثير حدود من الدرجة الأولى، وكان  $m(s)$  اقتران بدائي للاقتران

$q(s)$  حيث  $m(2) = 2$ ,  $m'(2) = 7$ , جد قاعدة الاقتران  $q(s)$

الحل: نضع  $q(s) = As + B$

$$m(s) = q(s) = As + B$$

$$m(s) = q(s) = A$$

$$(1) ... 7 = 12 + B = (2)$$

$$(2) ... 2 = 1 \leftarrow 2 = 1 = (2)$$

نوع فی (١)  $\leftarrow ٤ + ب = ٧$

$$ب = ٣$$

$$ق(s) = ٣s^2 + s^3$$

إذا كان  $\left\{ \begin{array}{l} (as + b)rs = ٣, \text{ فما قيمة } \frac{b}{r}, \text{ حيث } a \neq ٠ \\ . \end{array} \right.$  (٢٣)

الحل:

تكامل عادي...

$$٣ = \left[ \frac{s^2}{2} + bs \right] \leftarrow$$

$$٣ = ٠ - ٣b + ٣a$$

$$b = a / \text{القسمة على } ٣$$

$$\frac{١}{٣} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{١}{٣} = \frac{b}{a}$$

$$24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ن}(س)\text{رس} - \left\{ \begin{array}{l} \text{ن}(س)\text{رس} \\ \text{ن}(س)\text{رس} \end{array} \right. \\ \text{ن}(س)\text{رس} \end{array} \right. , \text{ جدأ، بـ} \end{math>$$

الحل:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ن}(س)\text{رس} + \left\{ \begin{array}{l} \text{ن}(س)\text{رس} \\ \text{ن}(س)\text{رس} \end{array} \right. \\ \text{ن}(س)\text{رس} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ن}(س)\text{رس} + \left\{ \begin{array}{l} \text{ن}(س)\text{رس} \\ \text{ن}(س)\text{رس} \end{array} \right. \\ \text{ن}(س)\text{رس} \end{array} \right. =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ن}(س).\text{رس} \\ \text{ن}(س).\text{رس} \end{array} \right. =$$

$$1 = ب = 5 ، ب = أ$$

25) إذا كان:  $2 \geq \text{ن}(س) \forall \text{س} \in [4, 6]$ ، فما أكبر قيمة ممكنة للتكامل

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ن}(س)\text{رس} \\ \text{ن}(س)\text{رس} \end{array} \right.$$

الحل: نكامل خلال الفترة [4، 6]

$$\left\{ \begin{array}{l} 2.\text{رس} \geq \left\{ \begin{array}{l} \text{ن}(س).\text{رس} \\ \text{ن}(س).\text{رس} \end{array} \right. \\ \text{ن}(س).\text{رس} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n(s)_{\text{رس}} \geq 1 \\ n(s)_{\text{رس}} \leq 4 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n(s)_{\text{رس}} = 1 \\ n(s)_{\text{رس}} > 4 \end{array} \right.$$

ولكن عند قلب حدود التكامل

$$\left\{ \begin{array}{l} n(s)_{\text{رس}} \leq -4 \\ n(s)_{\text{رس}} \geq -1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n(s)_{\text{رس}} = -4 \\ n(s)_{\text{رس}} < -1 \end{array} \right.$$

**التكامل المحدود للاقترانات المتشعبه:**

(وتشمل اقترانات القيمة المطلقة وأكبر عدد صحيح)

تنبيه: لا يسمح بالتعامل مع هذين الاقترانين إلا بعد إعادة التعريف

### تمارين

$$(1) \text{ إذا كان } q(s) = \left\{ \begin{array}{l} s^3 \geq 1, \\ s^5 \geq 3, \end{array} \right. \text{ فجد:}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ١) ن(س) دس \\ ٢) ب ) ن(س) دس \end{array} \right.$$

الحل:

$$\left\{ \begin{array}{l} ١) ما قيمة |٦ - ٢| س \\ ٢) ما قيمة |٤ - ٣| س \end{array} \right.$$

الحل:

$$\left\{ \begin{array}{l} ١) ما قيمة |٤ - ٣| س \\ ٢) ما قيمة |٣ - ٤| س \end{array} \right.$$

الحل:

$s^3 - 4s = 0 \iff s = 0, \pm\sqrt[3]{4}$  نعين الجذور ثم نضع الفترة

$$\left\{ \begin{array}{l} ١) s \leq -4 \\ ٢) -4 < s \leq 0 \\ ٣) s > 0 \end{array} \right. = \text{ق}(s)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ١) ن(س) دس \\ ٢) (س^3 - 4s) دس \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} ١) ن(س) دس \\ ٢) (س^3 + 4s) دس \end{array} \right.$$

$$\left[ \frac{s^2}{2} - \frac{s^4}{4} \right]_1^2 =$$

$$((8-4)-(32-64)) + \left( \left( 2 + \frac{1}{4} - \right) - (8 + 4 -) \right) =$$

$$38\frac{1}{4} = 36 + 2\frac{1}{4} =$$

٤) ما قيمة  $\left[ \frac{s-5}{2} \right]$  دس

الحل:

٥) ما قيمة  $\left[ \frac{s}{3} \right]$  دس

الحل:

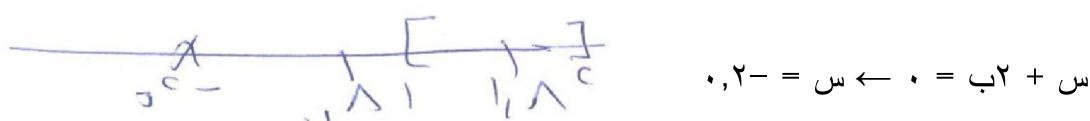
٦) ما قيمة  $[s + 0.2]$  دس

$s + 0.2 \leftarrow$  هذه حالة خاصة

الحل:

$$\text{طول الدرجة} = \frac{1}{1}$$

هنا نقسم خط الأعداد من صفر الاقتران (انتباه: نقسم خط الأعداد ثم نضع الفترة)



$$Q(s) = \begin{cases} 1.8 & s \geq 1.8 \\ 2 & s < 1.8 \end{cases}$$

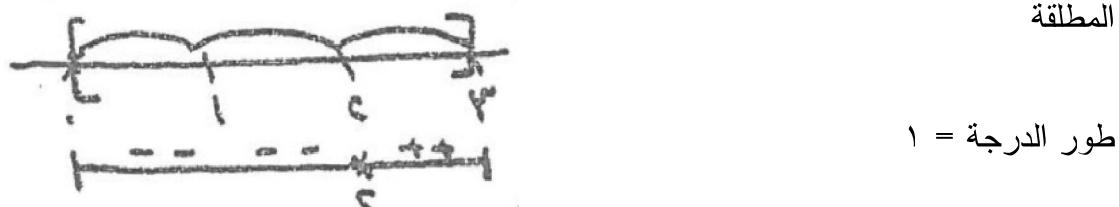
$$N(s)_{\text{رس}} = \begin{cases} 1.8 & s \geq 1.8 \\ 2 & s < 1.8 \end{cases}$$

$$1,2 = (0,2)2 + (0,8)1 =$$

$$N(s) = \begin{cases} 2 & s - 2 \geq 0 \\ 1 & s - 2 < 0 \end{cases}$$

الحل:

نعيد التعريف الاولوية لاكبر عدد صحيح ثم وضمن كل جزء نهتم باشاره ما داخل القيمة



$$Q(s) = \begin{cases} 1 & s - 2 \geq 0 \\ 2 & s - 2 < 0 \\ 3 & s - 2 \geq 0 \end{cases}$$

$$N(s)_{\text{رس}} = \begin{cases} 2 & s - 2 \geq 0 \\ 1 & s - 2 < 0 \end{cases}$$

$$\left[ \frac{s}{2} + 4 \right] + \left[ \frac{s}{2} - 5 \right] =$$

$$((6-6-)+(4+1-)(8+4-))+(0)-(0+1-)) =$$

$$+1+4 =$$

$$0 =$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{إذا كان } \\ \text{د} \cdot \text{س} = 9, \text{ فما قيمة الثابت جـ (حيث جـ > 1) } \end{array} \right\} \quad (\text{سؤال كتاب})$$

الحل:

نعيد التعريف تدريجياً وبالتجريب؟؟؟

تتبّيه: سبق أن عرفنا بأن المشتقة للتكامل غير المحدود تعيد الاقتران الأصلي، أي أن

$$\frac{d}{ds} \int_a^s f(x) dx = f(s)$$

دائماً، وبالتالي فإن مشتقته = صفر (لأنها مشتقة عدد ثابت)، أي أن:

$$* \quad \frac{d}{ds} \int_a^s f(x) dx = \text{صفر} \dots$$

$$\text{مثال: أوجد } \frac{d}{ds} (s^2 + 6s + 6)$$

الحل: مشتقة البدائي = الأصلي

$$= s^2 + 6s + 6$$

$$\text{مثال: أوجد } \frac{ds}{dt} \left( s^3 + s^2 + 6s \right)$$

الحل:

= صفر ... لأنها مشتقة ثابت

$$\text{مثال: أوجد } \frac{ds}{dt} (s\sqrt{s})$$

الحل:

$$\text{مثال: أوجد } \frac{ds}{dt} (s\sqrt{rs})$$

الحل:

### المعادلة التفاضلية:

يطلق هذا الاسم على المعادلات التي تشتمل على رموز للمشتقه، وتحل المعادلة التفاضلية بمكاملة الطرفين تكامل غير محدود بشرط التأكد من فصل المتغيرات كل نوع في طرف لوحده.

ملاحظات: \* معدل التغير هو المشتقه الأولى بالنسبة للزمن ن

$$* \text{ هندسياً: ميل المماس} = \frac{ds}{dt}$$

\* فيزيائياً: السرعة =  $\frac{\text{دistance}}{\text{time}}$  ، التسارع =  $\frac{\text{change in velocity}}{\text{time}}$

### تمارين

حل كلاً من المعادلات التفاضلية التالية:

$$(1) \frac{ds}{dt} = s^2 \cdot s^3$$

الحل:

$$(2) s^2 \frac{ds}{dt} = q \cdot s^3$$

الحل:

$$(3) \frac{ds}{dt} - s^2 \cdot s^3 = 0$$

$$\text{الحل: } \frac{ds}{dt} = s^2 \cdot s^3$$

$$ds = s^2 \cdot s^3 dt$$

$$\frac{ds}{s^3} = 2 \cdot s^2 dt$$

$$s^{-3} ds = 2 \cdot s^2 dt$$

$$\frac{s^{-2}}{2} = s^2 + C$$

$$4) \frac{دص}{رس} = جا س جا^2 ص$$

الحل:

$$5) \frac{دص}{رس} = فا^2 س قتا ص$$

الحل:

$$6) \frac{دص}{رس} = \sqrt{س ص}$$

$$\text{الحل: } دص = \sqrt{س ص رس}$$

$$\frac{دص}{ص} = \sqrt{س رس}$$

$$ص^{-\frac{1}{2}} دص = س^{\frac{1}{2}} رس$$

$$\frac{\frac{3}{2} س}{ج} + \frac{\frac{1}{2} ص}{\frac{1}{2}} =$$

$$2 \sqrt{س^3 + ج} = \frac{2}{3}$$

$$7) س^4 دص = ص^3 دس$$

الحل:

$$\frac{دص}{ص^3} = \frac{رس}{س^4}$$

$$[s^{-3}rs] = [s^{-4}rs]$$

$$j + \frac{s^{-3}}{s^{-2}} = \frac{s^{-2}}{s^{-3}}$$

٨) إذا كان  $q(s) = 6s^2 + 2$ ، وكانت  $(1, 7)$  هي نقطة حرجة للاقتران  $q(s)$ ، فما قيمة  $q(5)$ ؟

الحل:

$$[q(s)rs] = [6s^2 + 2 + js]$$

$$\left. \begin{array}{l} (1, 7) \text{ حرجة} \\ q(1) = \text{صفر} \\ 7 = q(1) \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} q(s) = s^3 + 2s + j \\ q(1) = 1 + 2 + 3 = 6 \\ j = -5 \end{array}$$

$$[q(s)rs] = [3s^3 + 2s^2 - 5rs]$$

$$\left. \begin{array}{l} 7 = q(1) \\ 7 = j + 5 - 1 + 1 \\ 10 = j \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} q(s) = s^3 + s^2 - 5s + j \\ q(5) = 125 = 10 + 25 - 25 + 125 = 135 \end{array}$$

$$135 = 10 + 25 - 25 + 125 = q(5)$$

٩) منحنى ميله  $2s^2$  ص، ويمر المنحنى بالنقطة  $(1, 3)$ ، فما معادلته؟

الحل:

١٠) منحنى ميله  $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$  ، ويمر المنحنى بالنقطة (٤، ١)، فما معادلته؟

$$\text{الحل: الميل} \leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\sqrt{\text{ص}}}{\sqrt{\text{س}}} \leftarrow \frac{\sqrt{\text{ص}}}{\sqrt{\text{س}}} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$$

$$\boxed{\text{ص} - \frac{1}{2} \text{دص} = \text{س} - \frac{1}{2} \text{دس}}$$

$$\rightarrow \frac{\frac{1}{2} \text{س}}{\frac{1}{2}} + \text{ج} = \frac{\frac{1}{2} \text{ص}}{\frac{1}{2}}$$

(٤، ١) تحقق معادلة المنحنى

$$\rightarrow \text{ج} + \sqrt{\text{s}} \cdot 2 = \sqrt{\text{c}} \cdot 2$$

$$2 = \rightarrow \text{ج}$$

$$\rightarrow \sqrt{\text{c}} \cdot 2 = \sqrt{\text{s}} \cdot 2 + \text{ج}$$

$$2 = \sqrt{\text{c}} \cdot 2 + \sqrt{\text{s}} \cdot 2$$

$$\sqrt{\text{c}} = \sqrt{\text{s}} + 1$$

١١) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران  $q(s)$  عند أية نقطة (س، ص) هو

$6s^2 - 30s + 36$ ، جد معادلة هذا المنحنى علماً بأن له قيمة عظمية محلية مقدارها ٢٨.

: الحل

$$\text{الميل} \leftarrow q'(s) = 6s^2 - 30s + 36$$

$$q(s) = \boxed{6s^2 - 30s + 36}$$

$$Q(s) = \frac{2}{3}s^3 + 36s^2 - \frac{3}{2}s + J$$

$$Q(s) = s^2 - 15s^3 + 36s + J$$

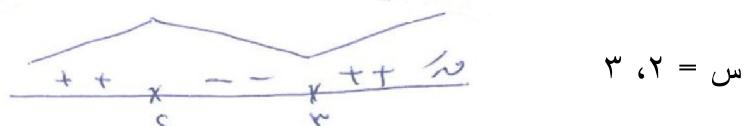
ولكن يجب معرفة قيمة  $J$ ؟

هنا لدينا قيمة عظمى قيمتها = 28

ولكن لم يعطنا  $s = ??$  عندما نعود إلى اشارة  $Q$  ونبحث عن القيم القصوى

$$s^2 - 36s + 30 = 0 \leftarrow$$

$$s^2 - 5s + 6 = 0 \leftarrow (s-2)(s-3)$$



عند  $s = 2$  عظمى هي  $Q(2) = 28$

$$Q(2) = 28 = J + (2)(4) + (4)(15) - (8)2$$

$$J = 0$$

$$Q(s) = s^2 - 15s^3 + 36s$$

(١٢) يتحرك جسيم بحيث أن سرعته  $8 \text{ m/s}$ ، فإذا كانت المسافة له بعد مرور ثانيتين هي ٢٥

متر، كم المسافة له بعد ٥ ثواني؟

الحل:

## سؤال هام إضافي

يتتحرك جسم بحيث تسارعه  $t = 2$  م/ث وكانت سرعته الابتدائية  $9$  م/ث وكانت المسافة

عندما  $t = 1$  تساوي  $(5)$  متر جد المسافة عندما  $t = 3$  ثانية

$(13)$  يتتحرك جسيم بحيث أن تسارعه هو  $t = 6$ ، فإذا كانت سرعته الابتدائية  $2$  م/ث،

وكانت المسافة له بعد مرور ثانتين هي  $21$  متر، كم المسافة له بعد  $5$  ثواني؟

$$\text{الحل: } t = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 6$$

$$\Delta v = 6 \text{ دن}$$

$$\begin{aligned} \Delta v &= 2 \text{ عندما } t = 0 \\ 2 &= \underline{v} - \underline{v}_0 = 2 \end{aligned}$$

$$\Delta v = 6 \text{ دن}$$

$$\Delta v = 3n^2 + 2$$

$$\Delta v = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 3n^2 + 2$$

$$\Delta v = (3n^2 + 2) \cdot \Delta t$$

$$\begin{aligned} \Delta v &= 21 \text{ عندما } t = 2 \\ \underline{v} + 4 + 8 &= 21 \\ \underline{v} &= 9 \end{aligned}$$

$$\Delta v = (3n^2 + 2) \cdot \Delta t$$

$$\Delta v = n^3 + 2n + \underline{v}$$

$$\Delta v = n^3 + 2n + 9$$

$$\Delta v = (5) = 9 + 10 + 125 = 144 \text{ متر}$$

٤) يسير جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة  $t = \frac{1}{4}u$  ، حيث  $t$  التسارع،  $u$  السرعة، فإذا تحرك الجسيم من السكونقطع مسافة  $10\sqrt{2}$  متر بعد ٤ ثواني من حركته، جد المسافة التي قطعها بعد ثانية واحدة من حركته.

الحل:

تحرك الجسم من السكون

$$\begin{aligned} u &= v_0 + at \\ &= 0 + 4t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{4}u \\ u &= 4v \\ v &= \frac{u}{4} \end{aligned}$$

$v^2 = 2s = u^2 / 2t$ . يجب أن تكون  $u$

$$v = \sqrt{2t \cdot s} = \sqrt{2 \cdot 4 \cdot 10} = \sqrt{80}$$

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{80} \\ \sqrt{4}v &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \\ 2v &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \\ 2v &= 2\sqrt{2} \\ v &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$v = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{2}}{\frac{2}{3}}$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{2}$$

$$v = \frac{\sqrt{14}}{3}$$

$$v = \frac{\sqrt{16}}{3} = \frac{4}{3}$$

١٥) إذا كان معدل تغير حجم سائل في وعاء نتيجة وجود ثقب بالقاع معطى بالعلاقة

$$\frac{D}{R} = 5 \text{ متر} - 100 \text{ سم}^3/\text{دقيقة} \text{ وكان حجم السائل بالوعاء بعد مرور ١٠ دقائق هو ٢٥٠ سم}^3$$

٣، فجد:

أ) حجم السائل في الوعاء عند بدء تسربه من التقب.

ب) الزمن اللازم حتى يتسرّب السائل كله.

## الحل:

دح = (٥٥ - ١٠٠) دن

$$\left. \begin{array}{l} \text{لـمـرـفـة جـ} \\ \text{جـ = ١٠٠٠ نـ + جـ} \\ \text{جـ = } \frac{100 \times 5}{2} = ٢٥٠ \\ \text{جـ = ١٠٠٠} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \text{دـعـ (١٠٠ - ٥٥) جـ} \\ \text{جـ = } \frac{٥٥}{٢} نـ + جـ \\ \text{جـ = } \frac{١٠٠ - ٥٥}{٢} نـ + جـ \end{array} \right\}$$



$$\text{نمایش } \dots = \dots + \dots - \dots = |x|$$

ب) نضع  $H = 0$  ليتسرب كل السائل

$$1000 + 100 - \frac{2n^5}{2} = .$$

$$5n^2 - 200n + 2000 = n^2 - 40n + 400$$

$$(ن - ٢٠)(ن - ٠) = ٢٠ \text{ دقيقة}$$

## الأسس واللوغاريتمات

نعتمد هنا على أساس محدد ثابت دائمًا هو العدد التبيري الذي نرمز له بالرمز  $e$  (وقيمه التقريرية  $\approx 2,7$ )

مراجعة قوانين اللوغاريتمات:

$$1) \log_e 1 = \text{صفر}$$

$$3) \log_e s^n = n \log_e s \quad 4) \log_e e^f(s) = f(s)$$

$$5) e^{\log_e f(s)} = f(s)$$

$$6) \log_e (s \times c) = \log_e s + \log_e c$$

$$7) \log_e \frac{s}{c} = \log_e s - \log_e c$$

اشتقاق الاقتران الأسني والاقتران اللوغاريتمي الطبيعي:

$$\text{نظريّة: } c = \log_e q(s) \leftarrow \frac{dc}{ds} = \frac{n(s)}{n'(s)}$$

$$\left( \frac{\text{مشتقة ما داخل اللوغاريتم}}{\text{ما داخل اللوغاريتم}} \right)$$

$$\text{حالة خاصة: } \text{ص} = \text{لو}_\text{ه} \text{س} \leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{رس}}$$

$$\text{نظيرية: } \text{ص} = \text{ه} \leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{رس}} = \text{ه} \leftarrow \text{ق}(s) \times \text{ق}(s)$$

$$\text{حالة خاصة: } \text{ص} = \text{ه} \leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{رس}} = \text{ه} \leftarrow \text{s}$$

### تمارين

أوجد  $\frac{\text{دص}}{\text{رس}}$  فيما يلي:

$$1) \text{ ص} = \text{لو}_\text{ه} (\text{s}^2 + 5\text{s}) \leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{رس}}$$

$$2) \text{ ص} = \text{لو}_\text{ه} (\text{حا}^5 \text{s}) \leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{رس}}$$

$$3) \text{ ص} = \text{جا} (\text{لو}_\text{ه}^5 \text{s}) \leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{رس}}$$

$$4) \text{ ص} = \text{s} \text{ لو}_\text{ه}^5 \text{s} \leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{رس}}$$

$$5) \text{ س} = \text{لو}_\text{ه}^5 \text{ص} \leftarrow (\text{ضمنية})$$

الحل:

$$6) \text{ ص} = \text{لو}_\text{ه} (\text{s}^2 + 5) \leftarrow$$

الحل:

$$(7) \text{ ص} = \text{لو}_\text{هـ} (س^3)$$

الحل:

$$(8) \text{ ص} = \text{لو}_\text{هـ} \sqrt{\frac{s - s^2}{1 + 7s}}$$

الحل:

$$(9) \text{ ص} = \text{لو}_\text{هـ} \leftarrow \frac{دص}{رس} \leftarrow \text{ص} =$$

$$(10) \text{ ص} = \text{هـ} \leftarrow \frac{دص}{رس} \leftarrow \text{ص} =$$

$$(11) \text{ ص} = \text{هـ} \leftarrow \frac{دص}{رس} \leftarrow \text{ظا} \text{س} \leftarrow \text{ص} =$$

$$(12) \text{ ص} = \text{هـ} \leftarrow \frac{دص}{رس} \leftarrow \text{ص} =$$

$$(12) \text{ ص} = \text{هـ} \leftarrow \frac{دص}{رس} \leftarrow \text{ص} =$$

$$(13) \text{ ص} = \text{هـ} \leftarrow \sqrt[3]{s} \leftarrow \frac{دص}{رس} \leftarrow \text{ص} =$$

$$(14) \text{ ص} = \text{هـ} \leftarrow \frac{دص}{رس} \leftarrow \text{ص} = \text{لو}_\text{هـ} (جاس^2)$$

سؤال خاص: إذا كانت ص = ٣٧، فجد  $\frac{دص}{رس}$

الحل:

سؤال: إذا كانت  $s^2 = h^2$ ، فاثبت أن  $\frac{ds}{ds} = \frac{1}{s}$

الحل:

### تمارين

(١) إذا كانت  $s = (h^s)^3 \ln h \cdot j^3 s$ ، فجد  $\frac{ds}{ds}$

الحل: نلاحظ أهمية تبسيط المقدار

$$s = h^{15} \times 2 \ln h \cdot j^3 s \dots \text{ضرب}$$

$$\frac{ds}{ds} = (h^{15})^3 \times 2 \times \frac{\ln h \cdot j^3 s + 3h^{15} \ln h \cdot j^3 s}{j^3 s}$$

$$= h^6 \cdot 30 \ln h \cdot j^3 s + h^{15} \ln h \cdot j^3 s$$

$$= 6 h^{15} (\ln h \cdot j^3 s + 5 \ln h \cdot j^3 s)$$

(٢) إذا كانت  $s = h^{2(s+1)} + \ln h \cdot h^s$ ، فجد  $\frac{ds}{ds}$

الحل:

### نبسط المقدار

$$s = h^{2(s+1)} + \ln h \cdot h^s$$

$$s = (s+1)^2 + h^s \ln h$$

$$\frac{دص}{رس} = 2(s+1) \times 5^2 \text{ مس}^{*} \text{ مهم}$$

٣) إذا كانت ص = هـ بـ<sup>s</sup>، فجد قيمة الثابت ب التي تجعل  $\frac{د^2 ص}{رس} = ص$

$$\text{الحل: } \frac{د^2 ص}{رس} = هـ بـ<sup>s</sup> \times بـ = بـ هـ بـ<sup>s</sup>$$

$$\frac{د^2 ص}{رس} = بـ \times هـ بـ<sup>s</sup> \times بـ = بـ^2 هـ بـ<sup>s</sup>$$

$$\text{بما أن } \frac{د^2 ص}{رس} = ص \leftarrow بـ^2 هـ بـ<sup>s</sup> = هـ بـ<sup>s</sup>$$

$$بـ^2 هـ بـ<sup>s</sup> - هـ بـ<sup>s</sup> = 0 \leftarrow هـ بـ<sup>s</sup> (بـ^2 - 1)$$

إما هـ بـ<sup>s</sup> = 0 مستحيل لأن هـ بـ<sup>s</sup> موجبة دائمًا

$$\text{أو } بـ^2 - 1 = 0 \leftarrow بـ = 1, -1$$

٤) إذا كانت ص = هـ أـ<sup>s</sup>، فجد قيمة الثابت أ التي تجعل  $\frac{د^2 ص}{رس} - \frac{دص}{رس} - 6ص = صفر$

الحل:

$$\frac{دص}{رس} = هـ أـ<sup>s</sup> \times أـ = أـ هـ أـ<sup>s</sup>$$

$$\frac{د^2 ص}{رس} = أـ هـ أـ<sup>s</sup> \times أـ = أـ^2 هـ أـ<sup>s</sup>$$

$$\text{ولكن } \frac{د^2 ص}{رس} - \frac{دص}{رس} - 6ص = 0$$

$$\text{أ} \text{ هـ} \text{ أـس} - \text{أ} \text{ هـ} \text{ أـس} = 0$$

$$\text{هـ} \text{ أـس} \neq 0 \quad \text{ولكن} \quad \text{هـ} \text{ أـس} = 0$$

$$0 = 6 - 6$$

$$0 = (2+1)(3-1)$$

$$2-3 = 1 \leftarrow$$

$$(5) \text{ هـ} \text{ سـص} = \text{سـ} + \text{صـ} \quad \text{فأثبت أن} \quad \frac{\text{دـص}}{\text{دـس}} = \frac{1-\text{سـص}-\text{صـ}^2}{1-\text{سـص}}$$

الحل: نستقـ ضمـنـيـاً

$$\text{هـ} \text{ سـص} \times \left( \text{سـ} \frac{\text{دـص}}{\text{دـس}} \times \text{صـ} \right) = 1 + \frac{\text{دـص}}{\text{دـس}}$$

$$(\text{سـ} + \text{صـ}) \left( \text{سـ} \frac{\text{دـص}}{\text{دـس}} + \text{صـ} \right) = 1 + \frac{\text{دـص}}{\text{دـس}}$$

$$\text{سـ}^2 \frac{\text{دـص}}{\text{دـس}} + \text{سـ} \text{صـ} + \text{سـص} \frac{\text{دـص}}{\text{دـس}} + \text{صـ}^2 = 1 + \frac{\text{دـص}}{\text{دـس}}$$

$$\text{سـ}^2 \frac{\text{دـص}}{\text{دـس}} + \text{سـ} \text{صـ} \frac{\text{دـص}}{\text{دـس}} - \frac{\text{دـص}}{\text{دـس}} = 1 - \text{سـص} - \text{صـ}^2$$

$$\frac{\text{دـص}}{\text{دـس}} = \frac{1-\text{سـص}-\text{صـ}^2}{1-\text{سـص}}$$

$$6) \text{ ص} = \underline{\text{ه}}^{\text{س}}. \text{ جا س، أثبت أن } \frac{\underline{\text{د}}^{\text{ص}}}{\text{رس}} - 2 \frac{\underline{\text{د}}^{\text{ص}}}{\text{رس}} + 2 \text{ ص} = 0$$

الحل:

$$\frac{\underline{\text{د}}^{\text{ص}}}{\text{رس}} = \underline{\text{ه}}^{\text{س}} \times \text{جتا س} + \text{جا س} \times \underline{\text{ه}}^{\text{س}}$$

$$\frac{\underline{\text{د}}^{\text{ص}}}{\text{رس}} = (\underline{\text{ه}}^{\text{س}} \times \text{جا س} + \text{جتا س} \times \underline{\text{ه}}^{\text{س}})$$

$$+ (\text{جا س} \times \underline{\text{ه}}^{\text{س}} + \underline{\text{ه}}^{\text{س}} \times \text{جتا س})$$

$$= 2 \underline{\text{ه}}^{\text{س}} \text{ جتا س}$$

$$\text{الطرف الأيمن} = \frac{\underline{\text{د}}^{\text{ص}}}{\text{رس}} - 2 \frac{\underline{\text{د}}^{\text{ص}}}{\text{رس}} + 2 \text{ ص}$$

$$= 2 \underline{\text{ه}}^{\text{س}} \text{ جتا س} - 2 (\underline{\text{ه}}^{\text{س}} \text{ جتا س} + \underline{\text{ه}}^{\text{س}} \text{ جا س})$$

$$+ 2 \underline{\text{ه}}^{\text{س}} \text{ جا س}$$

$$= 2 \underline{\text{ه}}^{\text{س}} \text{ جتا س} - 2 \underline{\text{ه}}^{\text{س}} \text{ جتا س} - 2 \underline{\text{ه}}^{\text{س}} \text{ جا س} + 2 \underline{\text{ه}}^{\text{س}} \text{ جا س}$$

$$= \text{صفر}$$

7) إذا كانت  $\text{ص} = \underline{\text{ه}}^{\text{س}} + \underline{\text{ه}}^{\text{س}}$ ، فأثبت أن:

$$\frac{\underline{\text{د}}^{\text{ص}}}{\text{رس}} - 3 \frac{\underline{\text{د}}^{\text{ص}}}{\text{رس}} + 2 \text{ ص} = \text{صفر}$$

$$\text{الحل: } \frac{\underline{\text{د}}^{\text{ص}}}{\text{رس}} = 2 \underline{\text{ه}}^{\text{س}} + \underline{\text{ه}}^{\text{س}}$$

$$\frac{d^2s}{ds^2} = 4 - \frac{2s}{ds} + \frac{s^2}{ds^2}$$

$$\text{الطرف الأيمن} = \frac{\frac{d^2s}{ds^2}}{ds} - \frac{2}{ds} + \frac{2s}{ds}$$

$$(4 - \frac{2s}{ds} + \frac{s^2}{ds^2}) - \frac{2}{ds} + \frac{3s}{ds} = 4 - \frac{2s}{ds} + \frac{s^2}{ds^2} - \frac{2}{ds} + \frac{3s}{ds}$$

$$= 4 - \frac{2s}{ds} + \frac{s^2}{ds^2} - \frac{2}{ds} + \frac{3s}{ds} = 4 - \frac{2s}{ds} + \frac{s^2}{ds^2} - \frac{2}{ds} + \frac{3s}{ds}$$

= صفر

$$(8) \quad s^2 \text{ لو}_s, \text{ أثبت أن } \frac{d^2s}{ds^2} = \frac{2s}{ds} + \frac{2}{ds^2}$$

$$\text{الحل: } \frac{d^2s}{ds^2} = \left( \frac{1}{s^2} \right) + (لو_s)(s^2)$$

$$= s^2 \text{ لو}_s$$

$$\left( 2 \times s^2 \times \frac{1}{s} + \text{لو}_s \times 2 \right) + 1 = \frac{d^2s}{ds^2}$$

$$= 2 + 2 + 1 = 5$$

ولكن  $s^2 \text{ لو}_s$

$$= 2 + 3 = 5$$

$$\frac{s}{s^2} = \text{لو}_s$$

$$\frac{s}{s^2} = 2 + 3 = 5$$

٩)  $m(s) = h^s + Loh^s$  هو اقتران بدائي للاقتران  $q(s)$ ، فجد قيمة  $q(0)$ .

$$\text{الحل: } q(s) = m(s) = h^s + Loh^s$$

$$q(0) = h^0 + Loh^0 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} + 1$$

١٠) حل المعادلة التفاضلية  $\frac{ds}{dt} = h^s$

$$\text{الحل: } \frac{ds}{dt} = h^s \Rightarrow s' = h^s \times h^s$$

$$h^s \cdot ds \leftarrow h^{-s} ds \Rightarrow h^s ds = h^{-s} ds$$

$$h^{-s} ds = h^s ds$$

$$h^s + C = \frac{1}{h^{-s}} \leftarrow h^s + C = \frac{h^s}{1-h^{-s}}$$

## طرق حساب التكامل

القوانين العامة للتكمال: ... حفظ أساسي

$$(1) \quad \int ds = s + C, \quad (\text{حيث } C \text{ عدد ثابت})$$

$$(2) \quad s^n ds = \frac{s^{n+1}}{n+1} + C, \quad (\text{حيث } n \neq -1)$$

$$(3) \quad s^{-1} ds = \frac{1}{s} ds = \frac{1}{s} + C, \quad (\text{حيث } s \neq 0)$$

$$\rightarrow \frac{ه دس}{م} + ج دس = ج \quad (4)$$

$$\rightarrow \frac{ج دس}{م} - ج دس = ج \quad (5)$$

$$\rightarrow ج دس = \frac{ج دس}{م} + ج \quad (6)$$

$$\rightarrow ق دس = \frac{ق دس}{م} + ج \quad (7)$$

$$\rightarrow ق دس = \frac{ق دس}{م} + ج \quad (8)$$

$$\rightarrow ق دس = \frac{ق دس}{م} + ج \quad (9)$$

$$\rightarrow ق دس = \frac{ق دس}{م} + ج \quad (10)$$

**أساسيات تمهدية:**

(١) جميع الجذور تحول إلى أسس كسرية.

(٢) الكسور التي لمقامها قوة ترفع إلى البسط بقوة سالبة، إلا إذا أنتجت القوة (-) عندها

يبقى المقدار كثراً.

(٣) الكسور التي مقامها مثلثي ترفع إلى البسط أيضاً ولكن بقيمتها وليس بقوتها.

(٤) لدى ظهور أي من المتطابقات التالية (لوحدها) تبدل فوراً كالتالي

$$\bullet \quad جتا أ جتا ب = \frac{1}{2} [جتا (أ-ب) + جتا (أ+ب)]$$

$$\bullet \quad جا أ جا ب = \frac{1}{2} [جتا (أ-ب) - جتا (أ+ب)]$$

$$\bullet \quad جا\alpha جتا\beta = \frac{1}{2} [جا(\alpha\beta) + جا(\alpha+\beta)]$$

$$\bullet \quad جاس = \frac{1}{2} (-جتا_1\alpha)$$

$$\bullet \quad جتا_1\alpha = \frac{1}{2} (\alpha + جتا_2\alpha)$$

$$\bullet \quad ظاس = قاس - 1$$

$$\bullet \quad ظتاًس = قتاًس - 1$$

$$\bullet \quad ظاس = \frac{\text{جاس}}{\text{جتا}\alpha}$$

$$\bullet \quad ظتاًس = \frac{\text{جتا}\alpha}{\text{جاس}}$$

$$\text{تدريب: } جاس = \frac{1}{2} (1 - جتا_3\alpha)$$

$$ظاس = قاس - 1$$

**أولاً: التكامل في حالات الجمع والطرح والمركب**

هذه الحالات تكامل مباشرة على أن نراعي الشروط التالية:

(١) أن يكون ما داخل أقواس المركب خطى من الدرجة الأولى.

(٢) أن تكون زاوية المثلثي خطية من الدرجة الأولى.

(٣) أن تكون فوهة الأسي خطية من الدرجة الأولى.

تنبيه: عند مكاملة الحالات السابقة يجب أن نقسم على معامل س.

تمارين:

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \text{رس}^{\circ} + 3 + هـ^3 - جـ^3 \\ \text{رس}(جـ^3 + هـ^3) \end{array} \right.$$

الحل:

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \text{رس}^{\circ} + جـ^5 + هـ^5 \\ \text{رس}\left( جـ^5 + هـ^5 \right) \end{array} \right.$$

الحل:

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} \text{رس}^{\circ} + قـ^5 \\ \text{رس}\left( قـ^5 + \text{رس}^{\circ} \right) \end{array} \right.$$

الحل:

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} \text{رس}^{\circ} + 3 \\ \text{رس}(3 + \text{رس}^{\circ}) \end{array} \right.$$

الحل:

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\text{رس}^{\circ}} \\ \frac{1}{(\text{رس}^{\circ} - 1)} \end{array} \right.$$

الحل:

$$(6) \left\{ \begin{array}{l} \text{رس}^{\circ} - 2 \\ \text{رس}^{\circ}(\text{رس}^{\circ} - 2) \end{array} \right.$$

الحل:

$$(7) \left[ \text{رس} \left( \text{ه}^{\circ} + \sqrt{\text{ه}^{\circ}} + \frac{1}{\text{ه}^{\circ}} \right) \right]$$

الحل:

$$(8) \left[ \text{رس} \left( \frac{\text{جـ}^3 \text{س}}{\text{قا}^2 \text{س}} + \frac{1}{\text{جـ}^2 \text{س}} \right) \right]$$

الحل:

$$(9) \left[ \text{رس} \left( \frac{\text{جـ}^2 \text{س}}{2} + \frac{1}{\text{جـ}^2 \text{س}} \right) \right]$$

الحل:

$$(10) \left[ \text{قا} (\text{س}^2 + 3) (\text{ظا} 2 \text{س} + 3) \text{رس} \right]$$

الحل:

$$(11) \left[ \text{قـ} \text{تا} 7 \text{س} \text{ـطـ} \text{ـتـ} 7 \text{س} \text{رس} \right]$$

الحل:

### ثانياً: التكامل في حالات الضرب

في بعض الحالات النادرة يكون الضرب من النوع البسيط، نفأك أقواسه ويتكامل فوراً، ولكن

في حالات الضرب العامة يجب أن نبدأ مع طريقة التعويض حيث نحدد الفرض ص ونجد

مشتقته، وإذا انتجت هذه المشتقة عـدـاً ثـابـتـاً نلغـي طـرـيـقـةـ التـعـوـيـضـ وـنـعـتـمـدـ طـرـيـقـةـ الإـجـزـاءـ (هـذـاـ

في مسائل الضرب فقط)

**المبادئ العامة لتحديد الفرض ص في طريقة التعويض:**

(١) اقتران  $\times$  مركب  $\leftarrow$  ص = ما داخل أقواس المركب بدون القوة

(٢) اقتران  $\times$  هـ  $\leftarrow$  ص = القوة كاملة

(٣) اقتران  $\times$  مثلثي  $\leftarrow$  ص = الزاوية كاملة

**تابع التمارين**

$$(١٢) \int s(s^2 + 2s) ds$$

الحل:

$$(١٣) \int s^3 - \frac{3s^5}{2} ds$$

الحل:

$$(١٤) \int s(s^2 + 3)^\circ ds$$

الحل:

$$(١٥) \int 2s(2s + 3)^\circ ds$$

الحل:

$$(16) \left. \begin{array}{l} \text{رس} \\ \text{رس}^2 - \sqrt{رس + 1} + \sqrt{رس + 9} \end{array} \right\}$$

الحل:

$$(17) \left. \begin{array}{l} \text{رس}^4 - \sqrt[3]{رس^2} \\ \text{رس}^4 \end{array} \right\}$$

الحل:

$$(18) \left. \begin{array}{l} \text{رس}^4 - \sqrt[2]{رس^2} \\ \text{رس}^2 \end{array} \right\}$$

$$\text{الحل: } \left. \begin{array}{l} (\text{رس}^4 - \text{رس}^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \text{رس} \\ \text{رس}^2 \end{array} \right\}$$

← مركب غير خططي .. مرفوض ← حلاته

$$\left. \begin{array}{l} \left( \text{رس}^2 - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \text{رس} = \sqrt{\text{رس}^2 - 1} \cdot \text{رس} \\ \text{رس} \end{array} \right\} \leftarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{رس} \left( \text{رس}^2 - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \text{رس} \\ \text{رس}^2 - 1 \end{array} \right\} =$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{رس}^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \text{رس}^{\frac{1}{2}} = \frac{\text{رس}}{\text{رس}^2 - 1} \\ \text{رس}^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} = \frac{\text{رس}}{\text{رس}^2 - 1} \\ \text{رس}^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} = \frac{\text{رس}}{\text{رس}^2 - 1} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \text{رس} = \text{رس}^2 - 1 \\ \text{رس}^2 = \frac{\text{رس}}{\text{رس}} \\ \text{رس} = \frac{\text{رس}}{\text{رس}^2 - 1} \end{array} \right\}$$

$$(19) \left. \begin{array}{l} \frac{\text{رس}^2 + 2}{\text{رس}^3 + \sqrt[3]{رس}} \end{array} \right\}$$

الحل:

$$\left. \begin{array}{l} \text{رس} \\ \frac{1+s^2}{(s+5)(s+2)} \end{array} \right\} (20)$$

$$\text{الحل: } \left. \begin{array}{l} \text{رس} \\ (s^2 + s + 5) \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\text{رس}}{1+s^2} \\ \rightarrow + \frac{s}{4} = \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} s = s^2 + s \\ 1 + s^2 = \frac{\text{رس}}{\text{رس}} \\ s = \frac{\text{رس}}{1+s^2} \end{array} \right\}$$

$$\rightarrow + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} (s^2 + s + 5)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{4}{2+s^2} \end{array} \right\} (21)$$

$$\text{الحل: } \left. \begin{array}{l} \frac{1}{2} \text{رس} \\ 4(s^2 + 2s + 2) \end{array} \right\} \dots \text{مركب عادي}$$

$$\rightarrow + \frac{1}{2+s^2} 4 = \rightarrow + \frac{\frac{1}{2}(2+s^2)4}{2 \times \frac{1}{2}} =$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{4s}{2+s^2} \end{array} \right\} (22)$$

$$\text{الحل: } \left. \begin{array}{l} \frac{1}{2} \text{رس} \\ 4s(2-s) \end{array} \right\} \dots \text{أجزاء}$$

$$f = 4s - \frac{1}{2} \cdot 4s$$

$$\frac{\frac{1}{2}(2+s^2)}{2 \times \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} ds \leftarrow \frac{1}{2} ds = (2+s^2) \frac{1}{2}$$

$$J \leftarrow 4s(2+s^2) \int_{-\frac{1}{2}(2+s^2)}^{\frac{1}{2}(2+s^2)} ds +$$

$$J + \frac{\frac{1}{3}(2+s^2)4}{2 \times \frac{3}{2}} - \frac{1}{2}(2+s^2)4s =$$

$$J + \frac{4}{3} \int_{2+s^2}^{2+s^2} ds =$$

فأك أقواس

$$\left. \begin{array}{l} s^3 (s^2 + 1)^0 ds \\ \frac{1}{2} s^2 ds \\ s^2 + 1 \\ s^2 - 1 \end{array} \right\} \text{استبدال عكسي} \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 + s^2 \\ \frac{ds}{ds} = s^2 \\ \frac{ds}{s^2} = ds \end{array} \right.$$

الحل:  $s^2 + 1 = s^2$

$\frac{ds}{s^2} = ds$

$s^2 = s^2$

$s^2 - 1 = s^2 - 1$  من الفرض الأصلي

$$\left. \frac{1}{2} (s^6 - s^4) ds \right\} \rightarrow$$

$$J + \left( \frac{s^6}{6} - \frac{s^4}{4} \right) \frac{1}{2} =$$

$$J + \frac{1}{12} (s^6 + s^4) - \frac{1}{4} (s^6 - s^4) =$$

$$(24) \left\{ \begin{array}{l} \text{رس}^2 (1 + \text{رس}^2) = \text{رس} \dots \text{أجزاء} \\ \text{رس}^2 = \text{رس} - \text{رس}^2 \end{array} \right.$$

الحل:  $\text{رس} = \text{رس}^2 \leftarrow \text{رس} = 2 \text{رس}$

$$\frac{\gamma(1 + \text{رس}^2)}{2 \times 6} = \text{رس} \leftarrow \text{رس} = \frac{\gamma(1 + \text{رس}^2)}{2 \times 6}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{رس}^2 (1 + \text{رس}^2) = \text{رس}^2 (2 + \text{رس}^2) \\ \text{رس}^2 = \frac{\gamma(1 + \text{رس}^2)}{12} \end{array} \right\} \frac{\gamma(1 + \text{رس}^2)}{12}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{رس} = \frac{1}{6} \leftarrow \text{رس} = \frac{1}{6} \\ \frac{\gamma(1 + \text{رس}^2)}{2 \times 7} = \text{رس} \leftarrow \text{رس} = \frac{\gamma(1 + \text{رس}^2)}{14} \end{array} \right\} \frac{\gamma(1 + \text{رس}^2)}{12}$$

$$\text{رس} = \frac{\gamma(1 + \text{رس}^2)}{14} \left[ \frac{1}{6} - \frac{\gamma(1 + \text{رس}^2)}{14} \frac{1}{6} \right] - \frac{\gamma(1 + \text{رس}^2)}{12}$$

$$\text{رس} = \frac{\gamma(1 + \text{رس}^2)}{2 \times 8} \left[ \frac{1}{84} - \frac{\gamma(1 + \text{رس}^2)}{14} \frac{1}{6} \right] - \frac{\gamma(1 + \text{رس}^2)}{12}$$

$$(25) \left\{ \begin{array}{l} \text{رس}^2 \text{ جناه} = \text{رس} \\ \text{رس} = \text{رس}^2 \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\text{رس}}{\text{رس}^2 \text{ جناه}} = \frac{\text{رس}}{\text{رس}^2 \text{ جناه}} \\ \frac{1}{5} = \frac{\text{رس}^2}{3} + \frac{\text{رس}}{3} \\ \frac{1}{15} = \frac{1}{3} \text{ جناه} + \text{رس} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \text{رس} = \text{رس}^2 \\ \frac{\text{رس}}{\text{رس}^2} = \frac{5}{15} \\ \frac{\text{رس}}{5} = \text{رس} \end{array} \right\}$$

$$(26) \left\{ \begin{array}{l} جا 2s جتا 3s دس \\ علاقات \end{array} \right.$$

الحل:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{دا}{جاتا 2s} - \frac{دا}{جاتا 2s} \\ \frac{1}{3} \frac{ص}{2} + ج = \\ \frac{1}{6} جاتا 3s + ج = \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} ص = جاتا 2s \\ \frac{دا}{رس} = 2 - جاتا 2s \\ دس = \frac{دا}{جاتا 2s} \end{array} \right.$$

$$(27) \left\{ \begin{array}{l} جا 2s جتا 2s دس \\ علاقات \end{array} \right.$$

الحل:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{ص جاتا 3s}{جاتا 2s} \frac{دا}{جاتا 2s} \\ \frac{1}{2} \frac{ص}{2} + ج = \\ \frac{1}{4} جا 2s + ج = \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} ص = جاتا 2s \\ \frac{دا}{رس} = 2 - جاتا 2s \\ دس = \frac{دا}{جاتا 2s} \end{array} \right.$$

$$\text{حل آخر: } جاتا 2s = 2 جاتا 2s \leftrightarrow جاتا 2s = \frac{1}{2} جاتا 4s$$

$$\left\{ \begin{array}{l} جاتا 2s جاتا 2s دس = \frac{1}{4} جاتا 4s دس \end{array} \right.$$

$$\frac{1}{4} جاتا 4s + ج =$$

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{جتا } 2s \\ \text{جتا } 4s \\ \text{جتا } 4s \end{array} \right. \text{ ... زوايا مختلفة (متطابقة)}$$

الحل: تحذير (الشكل جا  $\times$  جتا ب)  $\leftarrow$  الجيب أولاً (ضروري)

$$\text{يعني} \leftarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{جتا } 4s \\ \text{جتا } 2s \\ \text{جتا } 4s \end{array} \right. \text{ تكتب}$$

$$= \left( \frac{1}{2} \right) \left[ \text{جا}(2s - 4s) + \text{جا}(2s + 4s) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \text{جا}(-2s) + \text{جا}(6s) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{\text{جتا } 6s}{6} - \frac{\text{جتا } 2s}{2} \right) + \left( \frac{\text{جتا } -2s}{2} - \frac{\text{جتا } 6s}{6} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \text{جتا } 2s - \frac{1}{12} \text{جتا } 6s + \text{جا } b$$

ملاحظة هامة:  $\text{جا } -2s = -\text{جا } 2s$  وكذلك  $\text{جتا } -2s = \text{جتا } 2s$

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{جتا } 2s \\ \text{جتا } 4s \\ \text{جتا } 4s \end{array} \right. \text{ ... زوايا مختلفة}$$

$$\text{الحل: } \frac{1}{2} \left[ \text{جتا}(4-b) + \text{جتا}(4+b) \right] \text{.دنس}$$

$$= \frac{1}{2} \left( \text{جتا } -2s + \text{جتا } 6s \right) \text{.دنس}$$

$$\Rightarrow + \left( \frac{\text{جا } -2s}{2} + \frac{\text{جا } 6s}{6} \right) \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{\text{جا } 6s}{6} + \frac{\text{جا } -2s}{2} \right) \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{جتا } 2s + \text{جا } b$$

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} جا 2s جا 2s دس ... زوايا مختلفة \end{array} \right.$$

$$\text{الحل: } \frac{1}{2} \times 2 \left( جتا(1-b) - جتا(1+b) \right) دس$$

$$= \left( جتا - 2s - جتا 6s \right) دس$$

$$جا - 2s - \frac{جا 6s}{6} + ج =$$

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} جا 2s رج 2s + جتا 2s دس \end{array} \right.$$

$$\text{الحل: } جا 2s \left( جا 2s + جتا 2s \right)^{\frac{1}{2}} دس$$

$$\frac{رس}{جا 2s} - جا 2s (2 + ص)^{\frac{1}{2}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{نضع ص = جتا 2s} \\ \frac{رس}{رس} = 2 - جا 2s \\ \frac{رس}{رس} = دس \end{array} \right.$$

$$\rightarrow + \frac{\frac{3}{2}(ص+2)}{1 \times \frac{3}{2}} \frac{1}{2} - =$$

$$\rightarrow + \frac{3}{2} \left( جا 2s + جتا 2s \right) \frac{1}{3} - =$$

ملاحظة يجوز أن نضع ص = 2 + جتا 2s ونكمel الحل

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{عالقات} \\ \text{دص} = \frac{\text{ظا}^3 \text{س}}{\text{قا}^2 \text{س}} \end{array} \right.$$

الحل:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{دص} = \text{ظا}^3 \text{س} \\ \frac{\text{دص}}{\text{دص}} = \frac{\text{ظا}^3 \text{س}}{\text{قا}^2 \text{س}} \\ \text{دص} = \text{دص} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{8} \text{ص} + \frac{1}{3} \text{ج} = \frac{1}{4} \text{ظا}^3 \text{س} + \text{ج} \\ \frac{1}{8} - \frac{1}{3} = \frac{1}{18} \text{ظنا}^3 \text{س} + \text{ج} \end{array} \right.$$

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{عالقات} \\ \text{دص} = \frac{\text{ظنا}^3 \text{س}}{\text{قتنا}^2 \text{س}} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{الحل: دص} = \text{ظنا}^3 \text{س} \\ \frac{\text{دص}}{\text{دص}} = \frac{\text{ظنا}^3 \text{س}}{\text{قتنا}^2 \text{س}} \\ \text{دص} = \frac{\text{دص}}{\text{قتنا}^2 \text{س}} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{6} \text{ص} + \frac{1}{3} \text{ج} = \frac{1}{18} \text{ظنا}^3 \text{س} + \text{ج} \\ \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{18} \text{ظنا}^3 \text{س} + \text{ج} \end{array} \right.$$

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{عالقات} \\ \text{ظا}^3 \text{س} = \frac{\text{قتنا}^2 \text{س}}{\text{دص}} \end{array} \right.$$

$$\text{الحل: } \leftarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{قتنا}^2 \text{س} = \text{ظنا}^3 \text{س} \\ \text{دص} = \frac{\text{قتنا}^2 \text{س}}{\text{قتنا}^2 \text{س}} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{دص} = \text{ظنا}^3 \text{س} \\ \frac{\text{دص}}{\text{دص}} = \frac{\text{قتنا}^2 \text{س}}{\text{قتنا}^2 \text{س}} \\ \text{دص} = \frac{\text{دص}}{\text{قتنا}^2 \text{س}} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \text{ص} + \frac{1}{3} \text{ج} = \frac{1}{6} \text{ظنا}^3 \text{س} + \text{ج} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \text{ظنا}^3 \text{س} + \text{ج} \end{array} \right.$$

$$\text{ضرب} \leftarrow \text{تعويض} \quad (35)$$

الحل:

$$\begin{aligned} & \frac{s^2 h^{-3} \text{رس}}{s^3} \\ & \frac{1}{3} h^{-3} \text{رس} = \frac{1}{3} h^{-2} \text{رس} + ج \\ & \frac{1}{3} h^{-3} \text{رس} = - \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} ص = s^3 \\ دس = \frac{دص}{رس} \\ دس = \frac{دص}{s^2} \end{array} \right.$$

$$\text{ضرب} \leftarrow \text{أجزاء} \quad (36)$$

الحل:

$$ق = s^2 \leftarrow دق = 2 \cdot دس$$

$$د_ه = ه^{s^2} - دس \leftarrow ه =$$

$$- \frac{s^2 h^{-2} \text{رس}}{2} \leftarrow$$

$$= سه^{s^2} - \frac{ه}{2} + ج$$

$$(37) \quad \frac{s^2 \text{رس}}{ه}$$

$$\text{الحل: } \left\{ \begin{array}{l} س^2 ه^{-3} \text{رس} \end{array} \right.$$

$$ق = س^2 \leftarrow دق = 2 س دس$$

$$د_ه = ه^{s^2} \cdot دس \leftarrow ه = \frac{ه}{1 -}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{رس} \\ \frac{\text{رس}}{1-\text{رس}} \end{array} \right\} - \left. \begin{array}{l} \text{رس} \\ \frac{\text{رس}}{1-\text{رس}} \end{array} \right\}$$

$$= \left. \begin{array}{l} \text{رس} \\ \frac{\text{رس}}{1-\text{رس}} \end{array} \right\} + \left. \begin{array}{l} \text{رس} \\ \frac{\text{رس}}{1-\text{رس}} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{رس} = \text{رس} - \text{رس} \\ \frac{\text{رس}}{1-\text{رس}} = \text{رس} - \text{رس} \end{array} \right\} + \left. \begin{array}{l} \text{رس} \\ \frac{\text{رس}}{1-\text{رس}} \end{array} \right\} =$$

$$= \left. \begin{array}{l} \text{رس} \\ \frac{\text{رس}}{1-\text{رس}} \end{array} \right\} + \left. \begin{array}{l} \text{رس} \\ \frac{\text{رس}}{1-\text{رس}} \end{array} \right\}$$

$$= \left. \begin{array}{l} \text{رس} \\ \frac{\text{رس}}{1-\text{رس}} \end{array} \right\} + \left. \begin{array}{l} \text{رس} \\ \frac{\text{رس}}{1-\text{رس}} \end{array} \right\}$$

$$= \left. \begin{array}{l} \text{رس} \\ \frac{\text{رس}}{1-\text{رس}} \end{array} \right\} + \left. \begin{array}{l} \text{رس} \\ \frac{\text{رس}}{1-\text{رس}} \end{array} \right\}$$

$$\text{العلاقة} \quad \left. \begin{array}{l} \text{رس} \\ \frac{\text{رس}}{1-\text{رس}} \end{array} \right\} = (38)$$

الحل:

$$\left. \begin{array}{l} \text{رس} \\ \frac{\text{رس}}{1-\text{رس}} \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{l} \text{رس} \\ \frac{\text{رس}}{1-\text{رس}} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{نضع ص} = \text{رس} \\ \frac{\text{رس}}{\text{رس}} = \frac{\text{رس}}{1-\text{رس}} \\ \frac{\text{رس}}{\text{رس}} = \frac{1-\text{رس}}{\text{رس}} \end{array} \right.$$

$$= \left. \begin{array}{l} \text{رس} \\ \frac{\text{رس}}{1-\text{رس}} \end{array} \right\}$$

$$= \left. \begin{array}{l} \text{رس} \\ \frac{\text{رس}}{1-\text{رس}} \end{array} \right\} + \left. \begin{array}{l} \text{رس} \\ \frac{\text{رس}}{1-\text{رس}} \end{array} \right\} =$$

$$ج + \frac{1}{س^3} \times \frac{5}{3} - \frac{1}{س} =$$

حل آخر:

$$\left. ج = \frac{5}{س^3} \cdot دس + \frac{س^2}{س^3} \right\}$$

$$\left. دس = س^3 \cdot هـ + س \right\}$$

$$ج = \frac{5}{3} دس + \frac{س}{1} =$$

$$(39) \left. س جتا(2س^2 + 5) دس ضرب \rightarrow تعويض \right\}$$

الحل:

$$\left. \begin{array}{l} س جناص \frac{1}{4} ص \\ جناص دص \\ 2 = 2 جا ص + ج \\ 2 = 2 جا (2س^2 + 5) + ج \end{array} \right\} \begin{array}{l} ص = 5 + 2س^2 \\ دص = \frac{4}{4} س \\ دص = دس \end{array}$$

$$(40) \left. س جتا(2س + 5) دس أجزاء \right\}$$

الحل:

$$ف = س^8 \rightarrow دف = 8 \cdot دس$$

$$دـهـ = جـتاـ (2ـسـ + 5ـ) دـسـ \leftarrow هـ$$

$$\left. س جـتاـ \frac{(5+2س)}{2} دـسـ \right\} \left. - \frac{(5+2س)}{2} دـسـ \right\}$$

$$= 4s \text{جا}(2s + 5) + \frac{s(5+2s)\text{جتا}}{2}$$

$$(41) \quad \left. \begin{array}{l} 4s \text{جا}(2s + 5) \\ s^2 \text{دس جتا}^2 \end{array} \right\} \text{دس تعويض}$$

الحل:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{s^2 \text{جتا}^2 \text{ص دص}}{4s} \\ \frac{1}{2} (1 + \text{جتا}^2 \text{ص}) \text{دص} \\ = \text{ص} + \frac{\text{جتا}^2 \text{ص دص}}{2} + \text{ج} \\ = \frac{1}{2} \text{جاء} s^2 + \text{ج} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ص} = 2s \\ \text{دص} = 4s \\ \text{دس} = \frac{4s}{4s} \end{array} \right.$$

$$(42) \quad \left. \begin{array}{l} 4s \text{جا}(2s + 5) \\ s^2 \text{دس أجزاء} \end{array} \right\}$$

الحل:

$$ق = 8s \cdot دق = 8s \cdot دس$$

$$ده = جتا^2 s دس ده = \frac{1}{2} (1 + \text{جتا}^2 s) \text{دس}$$

$$ده = \left( \frac{\text{جاء} s}{4} + s \right) \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \left( \frac{\text{جاء} s}{4} + s \right) \frac{1}{2} \times 8 - \left( \frac{\text{جاء} s}{4} + s \right) \frac{1}{2} \times s \\ \left( \frac{\text{جاء} s}{4} + s \right) \frac{1}{2} \times 8 - \left( \frac{\text{جاء} s}{4} + s \right) \frac{1}{2} \times s \end{array} \right\} \leftarrow$$

$$= 4s \left( \frac{\text{جاء} s}{4} + s \right) - \left( \frac{\text{جاء} s}{4} + s \right) \frac{s}{2} - \left( \frac{\text{جاء} s}{4} + s \right) \frac{s}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{مس}^2 \\ \text{مس}^3 \end{array} \right\} \text{رس} \quad (43)$$

الحل:

$$\left. \begin{array}{l} \text{مس}^2 \text{ جاس}^3 \text{ رس} \quad \text{تعويض} \\ \text{مس}^2 \text{ جاس}^3 \text{ رس} \\ \frac{\text{رس}}{\text{مس}^3} \\ \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \\ \left( 1 - \text{جتا}^2 \text{ ص} \right) \text{ رس} \\ \rightarrow \left( \text{ص} - \frac{\text{جاس}^2 \text{ رس}}{2} \right) \frac{1}{6} = \\ \left( \text{ص}^3 - \frac{1}{2} \text{ جاس}^3 \text{ رس} \right) \frac{1}{6} = \\ \left. \begin{array}{l} \text{ص} = \text{مس}^3 \\ \frac{\text{رس}}{\text{مس}^3} = \text{رس}^3 \\ \frac{\text{رس}}{\text{مس}^3} = \text{رس} \end{array} \right\} \end{array} \right. \quad (44)$$

الحل:  $\left. \begin{array}{l} \text{مس}^2 \text{ جاس} \text{ رس} \quad \text{أجزاء} \\ \text{مس}^2 \text{ جتا} \text{ رس} \end{array} \right\}$

$$\text{ق} = \text{مس}^2 \leftarrow \text{دق} = 2 \text{ مس رس}$$

$$\text{ده} = \text{جاس رس} \leftarrow \text{ه} = -\text{جتا رس}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{مس}^2 \text{ جتا رس} + 2 \text{ مس جناس رس} \quad \text{أجزاء} \\ \text{مس}^2 \text{ جناس رس} \end{array} \right\}$$

$$= -\text{مس}^2 \text{ جناس} + \left. \begin{array}{l} \text{رس} = 2 \text{ مس} \leftarrow \text{رس} = 2 \cdot \text{رس} \\ \text{ده} = \text{جناس رس} \leftarrow \text{ه} = \text{جاس} \end{array} \right\}$$

$$= -\text{مس}^2 \text{ جناس} + (2 \text{ مس جاس} - 2 \text{ جناس رس})$$

$$-\text{مس}^2 \text{ جناس} + 2 \text{ مس جاس} + 2 \text{ جناس رس} + \text{ج}$$

$$\text{استبدال زاوية} \quad (45) \quad \frac{\sqrt{s}}{s} \frac{ds}{\sqrt{s}}$$

الحل:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\text{جاص}}{s} \times s^2 \times ds \\ 2 \frac{\text{جاص} \cdot ds}{s} \\ - 2 \text{ جتا ص} + ج = \\ - 2 \text{ جتا } \sqrt{s} + ج = \end{array} \right\} \begin{array}{l} s = \sqrt{s} \\ \frac{ds}{s} = \frac{1}{2} \sqrt{s} \\ 2 \sqrt{s} ds = ds \\ ds = ds \end{array}$$

$$\text{استبدال قوة} \quad (46) \quad \frac{\frac{s^3 + 2s^4}{s^4} ds}{\frac{3 + 2s^2}{s^2} \sqrt{s}}$$

الحل:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{s^3 + 2s^4}{s^4} \cdot \frac{ds}{s} \times ds \\ \frac{s^3 + 2s^4}{s^2} ds \\ - s^3 + ج = \\ ج + \frac{s^3 + 2s^4}{s^2} ds = \end{array} \right\} \begin{array}{l} s = \sqrt{s^2} \\ \frac{ds}{s^2} = \frac{1}{2} s^{-1} \\ ds = \frac{s}{2} s^{-1} ds \\ \frac{ds}{s} = ds \end{array}$$

## استبدال زاوية

{ جاہ سادس ) ۴۷

## الحل:

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{أجزاء} \\
 \text{جاص. ٢ ص دص} \\
 \\ 
 \text{ق = ٢ ص} \leftarrow \text{د ق} = ٢ . \text{د ص} \\
 \\ 
 \text{ده = جاص د ص} \leftarrow \text{ه = - جتا ص} \\
 \\ 
 \text{ص جتا ص} - ٢ \times \leftarrow \text{جتا ص دص} \\
 \\ 
 \text{ص جتا ص} + ٢ \leftarrow \text{جتا ص دص} \\
 \\ 
 \text{ص جتا ص} + ٢ \text{ جا ص} + \text{جا} \\
 \\ 
 \text{ص جتا ص} + ٢ \text{ جا راس} + \text{جا راس} = \text{ص راس}
 \end{array} \right\}$$

استبدال قوة

(٤٨) هـ رسـ

الحل:

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{هـ ص د ص} \\
 \text{هـ ص} = \sqrt{s} \\
 \frac{1}{\sqrt{s}} = \frac{\text{د ص}}{2} \\
 2\sqrt{s} \text{ د ص} = \text{د س} \\
 \text{د س} = \text{د ص د ص} \\
 \text{د س} = \text{د س} \\
 \text{د س} = \text{د س} + \text{هـ ص} - 2\sqrt{s} - \frac{1}{\sqrt{s}} \text{ هـ ص} \\
 \text{د س} = \text{د س} + \text{جـ} + \text{هـ ص} - 2\sqrt{s} - \frac{1}{\sqrt{s}} \text{ هـ ص} - 2\sqrt{s} \text{ هـ ص}
 \end{array} \right\}$$

استبدال زاوية  $\boxed{جـا^2(جـاس) جـناس دـس}$

الحل:

$$\left. \begin{array}{l} \text{متطابقة ...} \\ \boxed{\frac{\text{جـا}^2 \text{صـجـناس دـص}}{\text{جـناس}}} \\ = \frac{1}{2}(1 - \text{جـناس}^2 \text{صـدـص}) \\ \boxed{\frac{\text{جـ} + \left( \frac{\text{جـا}^2 \text{ص}}{2} - \text{صـ} \right)}{2}} \\ = \frac{1}{2} \text{جـاس} - \frac{1}{4} \text{جـا}^2(\text{جـاس}) + \text{جـ} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{صـ} = \text{جـاس} \\ \frac{\text{دـص}}{\text{دـس}} = \text{جـناس} \\ \frac{\text{دـص}}{\text{جـناس}} = \text{دـس} \end{array}$$

استبدال قوة  $\boxed{قا^2 سـهـ ظـاس دـس}$

الحل:

$$\left. \begin{array}{l} \boxed{\frac{\text{قا}^2 \text{سـهـ صـ دـص}}{\text{قا}^2 \text{سـ}}} \\ = \text{هـصـ} + \text{جـ} \\ = \text{هـ ظـاسـ} + \text{جـ} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{صـ} = \text{ظـاسـ} \\ \frac{\text{دـص}}{\text{دـس}} = \text{قا}^2 \text{سـ} \\ \frac{\text{دـص}}{\text{قا}^2 \text{سـ}} = \text{دـس} \end{array}$$

استبدال زاوية  $\boxed{هـ سـ^2 ظـا^2(هـ سـ^2) دـس}$

الحل:

$$\left. \begin{array}{l} \boxed{\frac{\text{هـ سـ^2 ظـا^2 صـ دـص}}{\text{هـ سـ^2}}} \\ = \frac{1}{2}(\text{قا}^2 \text{صـ} - 1) \cdot \text{دـصـ} \\ = \frac{1}{2}(\text{ظـاسـ} - \text{صـ}) + \text{جـ} \\ = \frac{1}{2}(\text{ظـا}(\text{هـ سـ^2}) - \text{هـ سـ^2}) + \text{جـ} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{صـ} = \text{هـ سـ^2} \\ \frac{\text{دـص}}{2 \times \text{هـ سـ^2}} = \frac{\text{هـ سـ^2}}{\text{دـس}} \\ \frac{\text{دـص}}{\text{هـ سـ^2}} = \text{دـس} \end{array}$$

$$(52) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{هـ}^{\circ} \text{ جتا}^2 (\text{ظناهـ}^{\circ}) \\ \text{رس استبدال زاوية} \end{array} \right.$$

الحل:

$$\text{ص} = \text{ظناهـ}^{\circ} \text{ رس}$$

$$\frac{\text{دـص}}{\text{رس}} = - \text{قطـ}^2 \text{هـ}^{\circ} \times \text{هـ}^{\circ} \times \text{رس}^5$$

$$-\frac{\text{دـص}}{\text{قطـ}^2 \text{هـ}^{\circ} \times \text{هـ}^{\circ}} = \text{دـص}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{هـ}^{\circ} \text{ جتا}^2 \text{ صـ . قـ}^2 \text{ هـ}^{\circ} \\ - \text{قطـ}^2 \text{ هـ}^{\circ} \times \text{هـ}^{\circ} \end{array} \right. = \frac{\text{دـص}}{\text{قطـ}^2 \text{ هـ}^{\circ} \times \text{هـ}^{\circ}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{جـ} + \left( \frac{\text{جـ} \text{ جـ}^2 \text{ صـ}}{2} + \frac{1}{2} \text{ صـ} \right) \frac{1}{10} - = \frac{1}{2} \left( 1 + \text{جـ} \text{ جـ}^2 \text{ صـ} \right) \text{ دـصـ} \\ - \frac{1}{5} \end{array} \right.$$

$$\frac{1}{10} = \text{نـعـصـ} \text{ قيمةـ صـ} \quad \dots$$

$$(53) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{رسـ جـاسـ}^2 \text{ جـ} \text{ تـا}^2 \text{ رسـ}^2 \\ \text{ضربـ وـ عـلـاقـاتـ} \end{array} \right.$$

الحل:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\text{صـ}^{\circ} \text{ دـصـ}}{\text{رسـ جـاسـ}^2} - \frac{\text{رسـ جـاسـ}^2}{\text{رسـ جـاسـ}^2} \\ \text{صـ} = \text{جـ} \text{ تـا} \text{ رسـ}^2 \\ \frac{\text{دـصـ}}{\text{رسـ}} = - \text{جـ} \text{ اسـ}^2 \times \text{رسـ}^2 \\ \frac{\text{دـصـ}}{\text{رسـ جـاسـ}^2} = \text{دـصـ} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{نستبدل القوة} \\ \text{جاس ه جاس دس} \end{array} \right\} \frac{\pi}{4} \quad (54)$$

$$\frac{\text{جاس ه}}{\text{جاس}} \frac{\text{دص}}{\text{دص}}$$

الحل:

$$\left. \begin{array}{l} \text{هـ ص} + \text{جـ ص} = \text{صـ جـ} \\ \frac{\pi}{2} \text{ جـ هـ} = \frac{\pi}{4} \text{ جـ هـ} \\ \text{هـ جـ}^0 - \text{هـ جـ}^4 = \frac{1}{2} \text{ هـ} - \text{هـ} = \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \text{صـ جـ} = \text{صـ جـ} \\ \frac{\text{دص}}{\text{دص}} = 2 \text{ (جـ)} \times \text{جـ} = \text{جـ} \\ \frac{\text{دص}}{\text{جـ}} = \text{دـ} \end{array} \right.$$

$$(b) \text{ هـ جـ}^2 \text{ جـ} = \text{دـ جـ} \text{ (استبدال زاوية)} \quad \text{دـ جـ}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{صـ جـ} = \frac{\text{دـ}}{\text{صـ}} \text{ جـ} \\ \text{أجزاء} \end{array} \right\} \text{الحل:}$$

$$\text{قـ} = \text{صـ} \leftarrow \text{دقـ} = \text{دـصـ}$$

$$\text{دهـ} = \text{جـ} \text{ جـ} \text{ دـصـ} \leftarrow \text{هـ} = \text{جاـ} \text{ صـ}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{صـ جـ} \\ \text{جـ} \text{ دـصـ} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \text{صـ جـ} \\ \text{جـ} \end{array} \right\}$$

$$= \text{صـ جـ} + \text{جـ} \text{ جـ} + \text{جـ} \text{ جـ}$$

$$= \text{هـ جـ}^2 + \text{جـ} \text{ (هـ)} + \text{جـ}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{صـ} = \text{هـ}^2 \\ \frac{\text{دـ}}{\text{دـ}} = \frac{\text{هـ}}{\text{هـ}} \\ \frac{\text{دـ}}{\text{هـ}} = \text{دـ} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ضرب و علاقات} \leftarrow \text{أجزاء} \\ \text{سـ طـ} \text{ جـ}^2 \text{ سـ دـ} \end{array} \right\} (55)$$

الحل:

$$\text{قـ} = 2 \text{ سـ} \leftarrow \text{دقـ} = 2 \cdot \text{دـ}$$

$$د_ه = \text{ظا}^2 س \cdot \text{قا}^2 س \leftarrow ه \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ظا}^2 س \cdot \text{قا}^2 س \leftarrow د_س \\ \dots \end{array} \right.$$

$$ص = \text{ظا}^2 س \leftarrow د_ص = \text{قا}^2 س \cdot د_س$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{2} \frac{ص}{ه} = \frac{د_ص}{قا^2 س} \cdot \text{ص} \cdot \text{قا}^2 س \\ ه = \frac{1}{4} \text{ظا}^2 س \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} د_س \times \frac{1}{4} \text{ظا}^2 س - \frac{1}{4} \text{ظا}^2 س \times د_س \\ \leftarrow \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} س \cdot \text{ظا}^2 س - \left( \text{قا}^2 س - 1 \right) د_س$$

$$= \frac{1}{2} س \cdot \text{ظا}^2 س - \left( س - \frac{\text{ظا}^2 س}{2} \right) \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{ه}{1 + \frac{ه^2}{2}} \\ د_س \end{array} \right\} \quad (٥٦)$$

الحل:

$$\left. \begin{array}{l} ه = \frac{ه^2}{1 + \frac{ه^2}{2}} \cdot د_س \\ د_ص = \frac{د_ص}{1 + \frac{ه^2}{2}} \\ د_ص = \frac{د_ص}{1 + \frac{ه^2}{2}} \cdot \frac{1}{2} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} د_س \cdot \frac{ه^2}{1 + \frac{ه^2}{2}} \\ د_ص \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{الحل:} \\ \frac{\text{هـ جناس دس}}{\text{هـ جناس}} = \end{array} \right\} (57)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{الحل:} \\ \frac{\text{هـ جناس دس}}{\text{هـ جناس}} = \\ \text{هـ جـ} + \frac{\text{هـ جـ}}{\text{هـ جـ}} = \\ \text{هـ جـ} = \left[ \frac{\text{هـ جـ}}{\text{هـ جـ}} - \frac{\text{هـ جـ}}{\text{هـ جـ}} \right] \\ \text{هـ جـ} = \text{هـ جـ} - \text{هـ جـ} \\ \text{هـ جـ} = 1 - \text{هـ جـ} \\ \text{هـ جـ} = \text{هـ جـ} - 1 \\ \text{أجزاء} \quad \text{هـ جـ دس} \end{array} \right\} (58)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{الحل:} \\ \text{هـ جـ دس} = \text{هـ جـ دس} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{هـ جـ دس} = \text{هـ جـ دس} - \text{هـ جـ دس} \\ \text{هـ جـ دس} = \text{هـ جـ دس} - \text{هـ جـ دس} \\ \text{هـ جـ دس} = \text{هـ جـ دس} - \text{هـ جـ دس} \end{array} \right\}$$

$$= \text{هـ جـ دس} - (\text{هـ جـ دس} - \text{هـ جـ دس})$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{هـ جـ دس} = \text{هـ جـ دس} + \text{هـ جـ دس} \\ \text{هـ جـ دس} = \text{هـ جـ دس} + \text{هـ جـ دس} \end{array} \right\}$$

$$2 \left. \begin{array}{l} \text{هـ جـ دس} = \text{هـ جـ دس} + \text{هـ جـ دس} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{هـ جناس دس} = \frac{1}{2} (\text{هـ جاس} + \text{هـ جناس}) + \text{جـ} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{هـ جاس دس} \\ \text{أجزاء دوري} \end{array} \right\} (59)$$

$$\text{الحل:} \text{هـ} = \text{هـ} \leftarrow \text{دـ} = \text{هـ دـ س}$$

$$\text{دـ} = \text{جـ س دـ س} \leftarrow \text{هـ} = -\text{جـ س}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{هـ جناس} - \text{هـ} \times \text{جـ س دـ س} \\ \leftarrow \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{هـ جناس} + \text{هـ جـ س دـ س} \\ = \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{نـ} = \text{هـ} \leftarrow \text{دـ} = \text{هـ دـ س} \\ - \text{هـ جـ س} + \text{رـ} = \text{هـ جـ س دـ س} \leftarrow \text{هـ} = \text{جـ س} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{هـ جـ س دـ س} = -\text{هـ جـ س} + (\text{هـ جـ س} - \text{هـ جـ س دـ س}) \end{array} \right\}$$

$$= -\text{هـ جـ س} + \text{هـ جـ س} - \left. \begin{array}{l} \text{هـ جـ س دـ س} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2 \text{ هـ جـ س دـ س} = -\text{هـ جـ س} + \text{هـ جـ س} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{هـ جـ س دـ س} = -\frac{1}{2} (\text{هـ جـ س} + \text{هـ جـ س}) + \text{جـ} \end{array} \right\}$$

(٦٠)  $\left\{ جا^4 س دس \rightarrow نحل \right.$  (حالة خاصة)

الحل:

$$\left\{ جا^2 س . جا^2 س دس \right.$$

$$\left. \begin{aligned} & (1 - جتا 2 س) \times \frac{1}{2} (1 - جتا 2 س) دس \\ & \quad \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} & (1 - 2 جتا 2 س + جتا 2 س) دس \\ & \quad \end{aligned} \right\} = \frac{1}{4}$$

$$\left. \begin{aligned} & (1 - 2 جتا 2 س + \frac{1}{3} (1 + جتا 4 س)) دس \\ & \quad \end{aligned} \right\} = \frac{1}{4}$$

$$ج + \left( \left( \frac{جا 4 س}{4} + جا 2 س \right) \frac{1}{2} + \frac{جا 2 س}{2} \right) \frac{1}{4} =$$

(٦١)  $\left\{ جا^3 س دس علاقات (نحاول أن نترك (جاس) لوحدها والباقي (جتاس) ومضاعفاتها) \right.$

الحل:

$$\left. \begin{aligned} & جاس جا^2 س دس \\ & \frac{جاس (1 - س^2) دس}{- جاس} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} & جاس (1 - جتا 2 س) دس \\ & \quad \end{aligned} \right\}$$

$$ج + \left( س - \frac{ص}{3} \right) - = \left. \begin{aligned} & ص = جتاس \\ & دس = - جاس \end{aligned} \right\}$$

$$ج + \frac{ص}{3} - س = \left. \begin{aligned} & دس = دس \\ & - جاس \end{aligned} \right\}$$

$$- جتاس + \frac{1}{3} جا 3 س + ج = \left. \begin{aligned} & دس \\ & - جاس \end{aligned} \right\}$$

$$62) \left\{ جـا^3 س دـس \right.$$

الحل:

$$\left\{ جـا س جـا^2 س دـس = جـا س (1 - جـا^2 س) دـس \right.$$

$$\left\{ جـا س (1 - س^2) دـس \right.$$

$$جـا + س^3 - س = \frac{دـس}{جـا س}$$

$$جـا س - \frac{1}{3} جـا^3 س + جـا = \frac{دـس}{جـا س}$$

$$63) \left\{ جـا^3 س جـا^2 س دـس \right.$$

الحل:

$$\left\{ جـا س جـا^2 س جـا^2 س دـس \right.$$

$$\left\{ جـا س (1 - جـا^2 س) جـا^2 س دـس \right.$$

$$جـا + س^3 + س^5 = \frac{دـس}{جـا س}$$

$$-\frac{1}{3} جـا^3 س + \frac{1}{5} جـا^5 س + جـا = \frac{دـس}{جـا س}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} س = جـا س \\ \frac{دـس}{دـس} = - جـا س \\ \frac{دـس}{جـا س} = دـس \end{array} \right.$$

$$64) \left. \begin{array}{l} \text{ظا}^2 \text{س دس} \\ \text{ظا}^2 \text{س دس} \end{array} \right\}$$

الحل:

$$\left. \begin{array}{l} \text{ظا}^2 \text{س دس} \\ \text{ظا}^2 \text{س دس} \end{array} \right\} \leftarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} (\text{قا}^2 \text{س} - 1) \text{ظا}^2 \text{س دس} \\ \text{ظا}^2 \text{س دس} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} (\text{قا}^2 \text{س ظا}^2 \text{س دس} - \text{ظا}^2 \text{س دس}) \\ \text{جتا}^2 \text{س دس} \end{array} \right\} =$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{لتكميل الثاني} \\ \text{نضع ع} = \text{جتا}^2 \text{س} \\ \frac{\text{دع}}{\text{رس}} = \frac{\text{ـ جا}^2 \text{س}}{\text{ـ جتا}^2 \text{س}} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \text{ص} = \text{ظا}^2 \text{س} \\ \frac{\text{دص}}{\text{رس}} = \frac{\text{ـ قا}^2 \text{س}}{\text{ـ جتا}^2 \text{س}} \\ \frac{\text{دص}}{\text{رس}} = \frac{\text{ـ دس}}{\text{ـ قا}^2 \text{س}} \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ـ دع} \\ \frac{\text{ـ دص}}{\text{ـ دس}} = \frac{\text{ـ جتا}^2 \text{س}}{\text{ـ جا}^2 \text{س}} \end{array} \right\} \leftarrow$$

$$\frac{\text{ـ دع}}{\text{ـ دص}} = \frac{\text{ـ جا}^2 \text{س}}{\text{ـ جتا}^2 \text{س}} \left| \begin{array}{l} \text{ـ دع} \\ \text{ـ دص} \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \text{ـ دس} \\ \text{ـ دس} \end{array} \right\}$$

$$\frac{\text{ـ دع}}{\text{ـ دص}} = \frac{\text{ـ جا}^2 \text{س}}{\text{ـ جتا}^2 \text{س}} \left| \begin{array}{l} \text{ـ دع} \\ \text{ـ دص} \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \text{ـ دس} \\ \text{ـ دس} \end{array} \right\}$$

$$\frac{\text{ـ دع}}{\text{ـ دص}} = \frac{\text{ـ جا}^2 \text{س}}{\text{ـ جتا}^2 \text{س}} \left| \begin{array}{l} \text{ـ دع} \\ \text{ـ دص} \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \text{ـ دس} \\ \text{ـ دس} \end{array} \right\}$$

$$\frac{\text{ـ دع}}{\text{ـ دص}} = \frac{\text{ـ جا}^2 \text{س}}{\text{ـ جتا}^2 \text{س}} \left| \begin{array}{l} \text{ـ دع} \\ \text{ـ دص} \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \text{ـ دس} \\ \text{ـ دس} \end{array} \right\}$$

$$\frac{\text{ـ دع}}{\text{ـ دص}} = \frac{\text{ـ جا}^2 \text{س}}{\text{ـ جتا}^2 \text{س}} \left| \begin{array}{l} \text{ـ دع} \\ \text{ـ دص} \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \text{ـ دس} \\ \text{ـ دس} \end{array} \right\}$$

$$\frac{\text{ـ دع}}{\text{ـ دص}} = \frac{\text{ـ جا}^2 \text{س}}{\text{ـ جتا}^2 \text{س}} \left| \begin{array}{l} \text{ـ دع} \\ \text{ـ دص} \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \text{ـ دس} \\ \text{ـ دس} \end{array} \right\}$$

$$\frac{\text{ـ دع}}{\text{ـ دص}} = \frac{\text{ـ جا}^2 \text{س}}{\text{ـ جتا}^2 \text{س}} \left| \begin{array}{l} \text{ـ دع} \\ \text{ـ دص} \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \text{ـ دس} \\ \text{ـ دس} \end{array} \right\}$$

$$\frac{\text{ـ دع}}{\text{ـ دص}} = \frac{\text{ـ جا}^2 \text{س}}{\text{ـ جتا}^2 \text{س}} \left| \begin{array}{l} \text{ـ دع} \\ \text{ـ دص} \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \text{ـ دس} \\ \text{ـ دس} \end{array} \right\}$$

$$65) \left[ \begin{array}{l} \text{ظنا}^4 \text{ س درس} \\ \text{ظنا}^2 \text{ س درس} \end{array} \right]$$

الحل:

$$\left[ \begin{array}{l} \text{ظنا}^2 \text{ س ظنا}^2 \text{ س درس} \\ \text{قتا}^2 \text{ س درس} - \text{ظنا}^2 \text{ س درس} \end{array} \right] = (\text{قتا}^2 \text{ س} - 1)(\text{ظنا}^2 \text{ س درس})$$

$$\left[ \begin{array}{l} \text{قتا}^2 \text{ س ص}^2 - \frac{\text{د ص}}{\text{قتا}^2 \text{ س}} \\ \frac{\text{ص}^3}{3} - (\text{ظناس} - \text{س}) + \text{ج} \end{array} \right] = \left\{ \begin{array}{l} \text{ص} = \text{ظناس} \\ \frac{\text{د ص}}{\text{د رس}} = -\text{قتا}^2 \text{ س} \\ \frac{\text{د ص}}{\text{قتا}^2 \text{ س}} = \text{د س} \end{array} \right.$$

$$\frac{1}{3} \text{ ظنا}^3 \text{ س} + \text{ظناس} + \text{س} + \text{ج} = \left. \begin{array}{l} \text{ج} \\ \text{جا}^3 \text{ س جتا}^3 \text{ س درس} \end{array} \right\}$$

الحل:

$$\left[ \begin{array}{l} \text{جاس} \text{ جا}^2 \text{ س جتا}^3 \text{ س درس} \\ \text{جاس} \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{l} \text{جاس} (1 - \text{جتا}^2 \text{ س}) \text{ جتا}^3 \text{ س درس} \\ \text{جاس} \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{\text{جاس}}{\text{جاس}} (1 - \text{ص}^2)^{\frac{\text{د ص}}{\text{جاس}}} \\ -(\text{ص}^3 - \text{ص}^0)^{\frac{\text{د ص}}{\text{جاس}}} \end{array} \right] = \left\{ \begin{array}{l} \text{ص} = \text{جتا س} \\ \frac{\text{د ص}}{\text{د رس}} = -\text{جاس} \\ \frac{\text{د ص}}{-\text{جاس}} = \text{د س} \end{array} \right.$$

$$-\frac{\text{ص}^4}{6} + \frac{\text{ص}^4}{4} + \text{ج} =$$

$$= -\frac{1}{4} جـ + \frac{1}{4} جـ + س$$

٦٧)  $(س^3 - س^3 دـ) دـ$  مركب غير خطى... نحل

الحل:

$$= س(س^3 - س^3 دـ) دـ$$

$$\left. \begin{array}{l} س^3 ص^3 \frac{دـ}{4} \\ \frac{دـ}{4} = \\ \frac{1}{4} ص^4 + \frac{1}{4} جـ = \end{array} \right\} \begin{array}{l} ص = س^4 - 3 \\ دـ = \frac{3}{4} س^3 \\ دـ = \frac{3}{4} س^3 \end{array}$$

$$= \frac{1}{4} (س^4 - 3 + جـ)$$

٦٨)  $س^3 جـ دـ$  ضرب  $\rightarrow$  تعويض

$$\left. \begin{array}{l} س^3 جـ \frac{دـ}{3} \\ \frac{دـ}{3} = \end{array} \right\} \begin{array}{l} جـ = س^3 \\ دـ = \frac{3}{3} س^3 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{3} س^3 جـ دـ \\ \frac{1}{3} دـ = \end{array} \right\} \begin{array}{l} جـ دـ أجزاء \\ دـ = \frac{3}{3} س^3 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{3} ص جـ دـ \\ دـ = \end{array} \right\} \begin{array}{l} جـ = دـ ص \\ دـ = \frac{3}{3} س^3 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} دـ هـ = جـ ص دـ ص \\ دـ هـ = جـ هـ ص \end{array} \right\} \begin{array}{l} جـ هـ = جـ هـ \\ دـ هـ = جـ هـ \end{array}$$

$$= \frac{1}{3} ص جـ + \frac{1}{3} جـ دـ + جـ$$

$$= \frac{1}{3} s^3 + \frac{1}{3} جناس^3$$

٦٩)  $(جناس + جاس)^2$  دس مرکب غير خطی ولا يحل نفك الأقواس

الحل:

$$= (جنا ٢s + جا ٢s + ٢ جاس جناس) دس$$

$$= (١ + جا ٢s) دس$$

$$= s - \frac{جنا ٢s}{٢} + ج$$

٧٠)  $(s^3 + ٢)^2$  دس مرکب غير خطی ولا يحل نفك الأقواس

الحل:

$$= (s^6 + ٤s^3 + ٤ دس)$$

$$= \frac{s^7}{٤} + \frac{4s^4}{٤} + s^4 + ج$$

٧١)  $\sqrt{s^2 - ٢s + ١}$  دس مرکب غير خطی يحل

الحل:

$$= \left\{ \begin{array}{l} s - ١ | دس ... نعيد التعريف \\ (s + ١)^2 = s^2 + ٢s + ١ \end{array} \right.$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} ١ \geq s \geq -s + ١ \\ ٢ \geq s \geq ١ - s \end{array} \right\} ق(s)$$

$$س - 1 \cdot دس = \left[ (-س + 1) دس + س - 1 \right]$$

$$\left[ س - \frac{س}{2} \right] + \left[ س + \frac{س}{2} \right] =$$

$$1 = \left( \frac{1}{2} - 0 \right) + \left( 0 - \frac{1}{2} \right) =$$

$$\text{سؤال: أثبت أن } \frac{1+n}{1+n} (س + ب) دس = ج$$

الحل:

لغایات الاثبات نعتمد على التعويض

$$\begin{cases} ص = أ س + ب \\ دص = أ دس \\ ج = دس \end{cases}$$

$$\frac{1+ن}{1+ن} (س + ب) دس = ج$$

$$\text{سؤال: أثبت قانون الأجزاء } ج = ده - هـ$$

الحل: نعتمد أساساً على مشتقة ضرب اقترانين

الأول: مشتقة الثاني + الثاني . مشتقة الأول = مشتقة الضرب

$$ج = ده + هـ$$

نکامل الطرفین

$$\boxed{ن.ره + ه.رس = ه.رس}$$

$$\therefore \boxed{ن.ره + ه.رس = ن.ه}$$

$$\therefore \boxed{ن.ره = ن.ه - هرس}$$

### ثالثاً: التكاملات الكسرية

تنكير: وجوب التخلص من الكسر إذا كان لمقامه قوة، أما في المقايير التي تبقى كسورةً يجب أن ننظر دائماً إلى المقام بحيث:

١) إذا كان المقام خطى من الدرجة الأولى، فالتكامل لوغاريتمي مباشر كما يلي:

$$\boxed{\frac{1}{س} دس = لو_ه |س| + ج}$$

$$\boxed{\frac{1}{ص} دص = لو_ه |ص| + ج}$$

$$\boxed{\frac{1}{س + ب} دس = \frac{1}{ب} لو_ه |س + ب| + ج}$$

ملاحظة هامة: إذا كان المقام أي اقتران ولكن بشرط أن تكون مشتقته موجودة في البسط (نفس المشتقة تماماً) فإنه يمكننا إعطاء جواب مباشر للتكامل اعتماداً على النظرية التالية:

$$\boxed{\frac{n(s)}{n(s)} دس = لو_ه |n(s)| + ج}$$

(إلا أننا نفضل استخدام طريقة التعويض بدلاً من هذه النظرية)

٢) إذا كان المقام تربيعي يحل إلى عوامل مختلفة، عندها حل بطريقة الكسور الجزئية

٣) إذا كان المقام أي شيء آخر، فنستبدل به بالتعويض.

تنبيه: في بعض المسائل الكسرية يكون للبسط درجة تزيد عن أو تساوي درجة المقام، عندها نبدأ بإجراء قسمة طويلة أولاً.

### تابع التمارين

$$\text{رس}\left(\frac{2}{s} - \frac{2}{s^2}\right) \quad (72)$$

الحل:

$$\text{رس}\left(\frac{2}{s} - \frac{2}{s^2}\right) \quad (72)$$

$$= \frac{s^2 - 2}{s - 5}$$

$$\text{رس}\left(\frac{12}{1+s^2} + \frac{12}{(1+s^2)(s-5)}\right) \quad (73)$$

الحل:

$$\frac{12}{1+s^2} + \frac{(1+s^2)(s-5)}{s^2-25} \quad (73)$$

$$= \frac{|1+s^2|s-12}{2} + \frac{(1+s^2)(s-5)}{2 \times 4} \quad (74)$$

$$\text{رس}\left(\frac{1}{s^2-5} + \frac{1}{s^2-5}\right) \quad (74)$$

الحل:

$$\frac{1}{s^2-5} + \frac{1}{s^2-5} \quad (74)$$

$$ج + \frac{|s^2 - 5|}{2} + \frac{\frac{1}{2}(s^2 - 5)}{2 - \times \frac{1}{2}} =$$

$$\left. \frac{s^2 - 1}{s^2 + 1} \right]^{رس قسمة طويلة أولاً} \quad (75)$$

الحل:

$$\begin{array}{r} \text{رس - 3} \\ \text{رس 2} \sqrt{رس 12} \\ \underline{-} \\ \text{رس 6} \pm \text{رس 12} \\ \underline{-} \\ \text{رس 6} \\ \underline{-} \\ \text{رس 6} \pm \\ \underline{-} \\ 3 \end{array}$$

$$\left. \frac{3}{s^2 + 1} + رس (3 - رس) \right]$$

$$ج + \frac{|1 + s^2|}{2} + \frac{s^3}{s^3 - \frac{3}{2}} =$$

$$\left. \frac{s^3}{s^3 + 2} رس قسمة طويلة \right] \quad (76)$$

الحل:

$$\begin{array}{r} 2 \\ \text{رس 3} \sqrt{رس 6} \\ \underline{-} \\ \text{رس 6} \pm \text{رس 4} \\ \underline{-} \\ 4 - 0 \end{array}$$

$$\left. رس \left( \frac{4 - 2}{2 + s^3} + 2 \right) \right]$$

$$ج + \frac{|2 + s^3|}{3} - \frac{4}{s^2} =$$

$$\left. \frac{12}{s^2 + 9} \right\} (77) \quad \text{رس نستبدل المقام}$$

الحل:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{12}{s^2 + 9} \\ \frac{1}{s} \\ \frac{12}{s^2 + 9} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} s = 3 \\ \frac{12}{s^2} = 4 \\ \frac{12}{s^2} = 12 \end{array} \right.$$

$$\left. \frac{12}{s^2 - 9} \right\} (78) \quad \text{رس مقام تربيعي يحل كسور جزئية}$$

الحل:

$$\frac{b}{s+3} + \frac{1}{s-3} = \frac{12}{s^2 - 9}$$

$$12 = (s+3)(s-3) + b(s-3)$$

$$\left. \begin{array}{l} 2 = 1 \leftarrow 16 = 12 \leftarrow 3 = s \\ 2 = -1 \leftarrow -6 = 12 \leftarrow -3 = s \end{array} \right\}$$

$$\left. \frac{2}{s+3} + \frac{2}{s-3} \right\} \leftarrow$$

$$12 = (s-3) - 2 \log|s+3| + 2 \log|s-3|$$

$$\left. \frac{5+s^2}{2-s} \right|_{\text{رس مقام تربيعى يحل}} \rightarrow \text{كسور جزئية} \quad (79)$$

الحل:

$$\frac{b}{1+s} + \frac{1}{2-s} = \frac{5+s^2}{2-s}$$

$$2s+5 = (s+1) + b(s-2)$$

$$\left. \begin{array}{l} 3=1 \leftarrow 13=9 \leftarrow 2=s \\ 1=-3-b \leftarrow 3 \leftarrow 1-b \end{array} \right\} s=$$

$$\left. \frac{1-s}{1+s} + \frac{3}{2-s} \right| \leftarrow$$

$$3لوه|s-2 - لوه|s+1 + ج =$$

$$\left. \frac{s^3+3}{1-s} \right|_{\text{رس حتى لو كان كسور جزئية يجب ان نقسم قسمة طويلة او لا}} \quad (80)$$

الحل:

$$\frac{s}{1-\sqrt[3]{s^3+3}} \\ \frac{s \pm \sqrt[3]{s^3+3}}{s^3+s^0}$$

$$\left. \frac{s}{1-s} + \left( \frac{s^3+3}{s^3+s^0} \right) \right| \text{رس كسور جزئية}$$

$$\frac{b}{1+s} + \frac{1}{2-s} = \frac{3+s}{1-s}$$

$$s+3 = (s+1) + b(s-2)$$

$$s = 1 \leftarrow 1 = 2$$

$$s = 1 - b \leftarrow 1 - s =$$

$$\left[ s \left( \frac{1-s}{1+s} + \frac{2}{1-s} + \dots \right) \right] \leftarrow$$

$$z + \frac{s^2}{2} L(s) - |1 - L(s)| +$$

$$(81) \quad \left[ \frac{2s^4 + 4s^2 + 5}{s^2 + s + 1} \right] \text{ دس مقام تربيعى ولكن لا يحل } \leftarrow \text{ نستبدل المقام}$$

الحل:

$$\left[ \frac{2s^4 + 4s^2 + 5}{s^2 + s + 1} \right] = \begin{cases} s = s^2 + s \\ \frac{ds}{1+s} = \frac{ds}{s^2+1} \\ \frac{ds}{s^2+1} = ds \end{cases}$$

$$L(s) = s^2 + s + 5$$

$$(82) \quad \left[ \frac{1}{s^3 - 4s^2 + 3s + 1} \right] \text{ دس مقام تربيعى يحل } \leftarrow \text{كسور جزئية}$$

الحل:

$$\frac{b}{s-1} + \frac{1}{s-3} = \frac{1}{s^3 - 4s^2 + 3s + 1}$$

$$1 = (s-1) + b(s-3)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{2} - = ب \leftarrow 1 = س \\ \frac{1}{2} = 1 \leftarrow 3 = س \end{array} \right\}$$

$$د_س \left( \frac{\frac{1}{2} -}{1 - س} + \frac{\frac{1}{2}}{3 - س} \right) \leftarrow$$

$$\frac{1}{2} \log |س - 1| + \frac{1}{2} \log |س - 3| =$$

$$(83) \quad د_س \left[ \frac{1}{س^2 - 4س + 4} \right] \quad \text{مقام تربيعي يحل} \leftarrow \text{عوامل متشابهة} \leftarrow \text{حالة خاصة}$$

الحل:

$$\left. د_س = \frac{1}{(س - 2)(س - 2)} \right]$$

$$\left. ب + \frac{1 -}{2 - س} = ب + \frac{(س - 2)^{-1}}{1 \times 1^{-1}} = (س - 2)^{-1} د_س \right]$$

$$(84) \quad د_س \text{ يحل كما في السؤال السابق} \leftarrow \text{عوامل متشابهة} \left[ \frac{2 + س^5}{1 + س^2 + س^5} \right]$$

$$\text{الحل: } \left. د_س = \frac{2 + س^5}{(1 + س^2)(1 + س^5)} \right.$$

$$ق = س^5 + 2 \leftarrow د_س = 5 . د_س$$

$$د_ه = (س + 1)^{-1} . د_س \leftarrow د_س = (س + 1)^{-1} . د_س$$

$$\left. د_س = \frac{(1 + س)^{-1}}{1 - س} \right] \left. د_س = \frac{(1 + س)^{-1}}{1 - س} (2 + س^5) \right] \leftarrow$$

$$\frac{1}{1+s} \left[ 5 + \frac{1}{1+s} \times (2+s^5) \right] =$$

$$= \frac{2+s^5}{1+s} + 5 \ln|s+1| + \text{ج}$$

$$(85) \quad \frac{s^8}{s^4 - 9} \text{ دس } \quad \text{مقام غير تربيعي} \rightarrow \text{نستبدل بالتعويض}$$

الحل:

$$\frac{\frac{s^8}{s^4 - 9} \text{ دس}}{\frac{2}{s} \text{ دص}} = \begin{cases} \text{ص} = s^4 - 9 \\ \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{3}{4}s^3 \\ \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{3}{4}s^3 \end{cases}$$

$$= \ln(s^4 - 9) + \text{ج}$$

$$(86) \quad \frac{\overline{(3+s^2)(s)}}{\overline{s^2-s}} \text{ دس} = \frac{\overline{9+s^6+s^4}}{\overline{s^2-s}} \text{ دس}$$

الحل:

$$\frac{1+1+1+1}{s^2-s} \cdot \frac{|3+s^2|}{\text{دس}} =$$

$$\frac{s^2+3}{s^2-s} \cdot \frac{\text{دس}}{\text{قسما طويل}} =$$

$$\frac{1}{\frac{s^2-s}{s^2+s+s}} = \frac{1}{s^2+3}$$

$$\left[ \frac{3+s}{s^2-s} + 1 \right] \cdot ds$$

$$\frac{b}{1-s} + \frac{1}{s} = \frac{3+s}{s^2-s}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3- = 1 \leftarrow \cdot = s \\ 4 = 1 \leftarrow b \end{array} \right\} \begin{array}{l} s+1 = (s-1) + b \\ s = s \end{array}$$

$$\left[ \frac{4}{1-s} + \frac{3-s}{s} + 1 \right] \cdot ds$$

$$= s - 3 \log s + 4 \log |s-1| + \text{ج}$$

٨٧) ظننا س دس

الحل:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{جتا^3 s}{جاتا^3 s} دس \\ جاتا^3 s دس \end{array} \right\} \dots علاقات$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{جاتا^3 s دس}{ص جاتا^3 s} \\ \frac{1}{3} \log s + \text{ج} = \frac{دص}{دس} = 3 \text{ جتا}^3 s \\ \frac{1}{3} \log |جاتا^3 s| + \text{ج} = \frac{دص}{3 \text{ جتا}^3 s} = دس \end{array} \right\} \begin{array}{l} ص = جاتا^3 s \\ \frac{دص}{دس} = 3 \text{ جتا}^3 s \\ \frac{دص}{3 \text{ جتا}^3 s} = دس \end{array}$$

$$88) \left\{ \begin{array}{l} \text{جاه س دس} = \text{جناه س دس} \\ \text{علاقات} \end{array} \right.$$

الحل:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{جاه س دس}}{\text{ص}} - \frac{\text{ص}}{\text{جاه س}} = \frac{1}{5} \text{ لروه ص} + \text{ج} \\ \text{ص} = \text{جناه س دس} \\ \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = - \frac{5}{5} \text{ جاه س دس} \\ \frac{\text{دص}}{\text{داس}} = \frac{\text{داس}}{\text{جاه س}} \end{array} \right.$$

$$= - \frac{1}{5} \text{ لروه} | \text{جناه س دس} + \text{ج} |$$

$$89) \left\{ \begin{array}{l} \text{جناه س دس} = \frac{\text{ص}^2}{\text{داس}} \\ \text{جزاء} \end{array} \right.$$

الحل:

$$90) \left\{ \begin{array}{l} \text{جاه س دس} = \frac{\text{ص}^2}{\text{داس}} \\ \text{جزاء} \end{array} \right.$$

الحل:

$$\text{دق} = 2 \text{ دق} \leftarrow \text{داس} = 2 \cdot \text{داس}$$

$$\text{د هـ} = \text{قتا}^3 \text{ دس} \leftarrow \text{هـ} = - \frac{\text{ظنا}^2 \text{ دس}}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ظنا}^2 \text{ دس} \times 2 = - \frac{\text{ظنا}^2 \text{ دس}}{2} \\ \text{ص}^2 \times - \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ص}^2 = - \text{ظنا}^2 \text{ دس} + \text{جناه س دس} \\ \text{علاقات} \end{array} \right.$$

$$\text{ص} = \text{جا}^2 \text{ دس} \leftarrow$$



$$\frac{\text{دص}}{\text{رس}} = \frac{\text{رس}}{\text{جناس}} \leftarrow$$

$$\leftarrow -\text{سـ ظـ نـ اـ سـ} + \left[ \frac{\text{جـ نـ اـ سـ}}{\text{سـ ظـ نـ اـ سـ}} \frac{\text{دـ صـ}}{\text{صـ}} \right]$$

$$= -\text{سـ ظـ نـ اـ سـ} + \frac{1}{2} \text{لـ وـ صـ} + \text{جـ} = -\text{سـ ظـ نـ اـ سـ} + \frac{1}{2} \text{لـ وـ جـ} + \text{سـ ظـ نـ اـ سـ} + \text{جـ}$$

$$\left[ \frac{\text{ظـ اـ سـ}}{\text{ظـ اـ سـ}} \frac{\text{دـ صـ}}{\text{دـ صـ}} - \frac{1}{2} \right] = \left[ \frac{\text{ظـ اـ سـ}}{\text{ظـ اـ سـ}} \frac{\text{دـ صـ}}{\text{دـ صـ}} \right] \quad (٩١)$$

الحل:

$$= \left[ (\text{ظـ اـ سـ} - \text{ظـ اـ سـ}) \cdot \text{دـ صـ} \right]$$

$$= \left[ \frac{\text{جـ اـ سـ}}{\text{جـ اـ سـ}} \frac{\text{دـ صـ}}{\text{دـ صـ}} - \left( \frac{\text{جـ اـ سـ}}{\text{جـ اـ سـ}} \cdot \text{دـ صـ} \right) \right]$$

$$\text{صـ} = \text{جـ اـ سـ} \quad /$$

$$\frac{\text{دـ عـ}}{\text{دـ صـ}} = -\text{جـ اـ سـ} \quad \frac{\text{دـ عـ}}{\text{دـ صـ}} = \text{دـ صـ} \quad \leftarrow \frac{\text{دـ عـ}}{-\text{جـ اـ سـ}} = \text{دـ صـ} \quad \text{وـ كـ ذـ لـ}$$

$$\frac{\text{دـ عـ}}{\text{دـ صـ}} = \frac{\text{دـ صـ}}{\text{جـ اـ سـ}} \quad \frac{\text{دـ صـ}}{\text{جـ اـ سـ}} = \text{دـ صـ}$$

$$\leftarrow \left[ \frac{\text{دـ صـ}}{\text{صـ}} \frac{\text{جـ اـ سـ}}{\text{جـ اـ سـ}} - \frac{\text{دـ عـ}}{\text{دـ صـ}} \right]$$

$$= \text{لـ وـ صـ} + \frac{1}{2} \text{لـ وـ عـ} + \text{جـ} = \text{لـ وـ جـ اـ سـ} + \text{لـ وـ جـ اـ سـ} + \text{جـ}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{جاس} \\ \text{داس} \end{array} \right\} \frac{1}{1 - جناس} \quad (92)$$

الحل:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\text{جاس}}{1 - \text{ص}} - \frac{\text{داس}}{\text{ص}} \\ \frac{\text{لوه}}{1 - \text{ص}} + \frac{\text{ج}}{1 - 1} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{ص} = \text{جنا س} \\ \frac{\text{داس}}{\text{ص}} = -\text{جاس} \\ \frac{\text{داس}}{\text{جاس}} = \text{د س} \end{array} \right.$$

$$= \text{لوه} | 1 - \text{جنا س} | + \text{ج}$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 \\ 1 - \text{جاس}^3 \end{array} \right\} \cdot \text{د س} \dots \text{حالة خاصة (نضرب بالمرافق)} \quad (93)$$

الحل:

$$\left. \begin{array}{l} 1 \\ 1 - \text{جاس}^3 \end{array} \right\} \frac{1 + \text{جاس}^3}{1 + \text{جاس}^3} \cdot \text{د س}$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 + \text{جاس}^3 \\ 1 - \text{جاس}^3 \end{array} \right\} \cdot \text{د س} = \left. \begin{array}{l} 1 \\ 1 + \text{جاس}^3 \end{array} \right\} \cdot \text{د س}$$

$$= \left. \begin{array}{l} \text{جاس}^3 \\ \text{جنا س}^3 \end{array} \right\} \cdot \text{د س} + \frac{1}{\text{جنا س}^3} =$$

$$= \left. \begin{array}{l} \text{قا}^2 \text{س} + \text{قا}^3 \text{س} \cdot \text{طاس}^3 \text{س} \end{array} \right\} \cdot \text{د س}$$

$$= \frac{\text{طاس}^3 \text{س}}{3} + \frac{\text{قا}^3 \text{س}}{3} + \frac{\text{جا}^3 \text{س}}{3}$$

$$(94) \quad \frac{1}{1+جاس} \times \frac{1}{1-جاس} دس \dots مراافق$$

الحل:

$$= \frac{1}{1+جاس} \times \frac{1}{1-جاس} دس$$

$$= \frac{1}{1-جاس} دس - \left[ \frac{1}{1+جاس} دس - \frac{1}{1-جاس} دس \right]$$

$$= قاس دس - [ قاس ظاس دس ]$$

$$= ظاس \frac{قس}{2} + ج$$

$$(95) \quad \frac{1}{1-جناس} دس \dots مراافق$$

الحل:

$$= \frac{1}{1+جناس} \times \frac{1}{1-جناس} دس$$

$$= \frac{1}{1-جناس} دس + \left[ \frac{1}{1+جناس} دس - \frac{1}{1-جناس} دس \right]$$

$$= قناس دس + [ قناس ظناس دس ]$$

$$= -ظناس - قناس + ج$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\text{رس}}{\text{جتا}^2 \text{س} - \text{جتا}^2 \text{س}} \\ & \frac{\text{رس}}{(1 - \text{جتا}^2 \text{س})} \end{aligned} \right\} = \left. \begin{aligned} & \frac{\text{رس}}{\text{جتا}^2 \text{س} - \text{جتا}^2 \text{س}} \\ & \frac{\text{رس}}{\text{جتا}^2 \text{س} - \text{جتا}^2 \text{س}} \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

الحل:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\text{رس}}{\text{جاس جتاس}} \\ & \frac{\text{رس}}{\text{جاس جتاس}} \end{aligned} \right\} = \left. \begin{aligned} & \frac{\text{رس}}{\text{جتا}^2 \text{س} - \text{جتا}^2 \text{س}} \\ & \frac{\text{رس}}{\text{جتا}^2 \text{س} - \text{جتا}^2 \text{س}} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{\frac{1}{4} \text{جا}^2 \text{س}} \\ & \frac{1}{\frac{1}{2} \text{جا}^2 \text{س}} \end{aligned} \right\} = \left. \begin{aligned} & \frac{\text{رس}}{\text{جتا}^2 \text{س} - \text{جتا}^2 \text{س}} \\ & \frac{\text{رس}}{\text{جتا}^2 \text{س} - \text{جتا}^2 \text{س}} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} & 4 \cdot \frac{\text{قطنا}^2 \text{س}}{\text{رس}} \\ & + \frac{\text{قطنا}^2 \text{س}}{\text{رس}} \end{aligned} \right\} =$$

$$= 2 \cdot \frac{\text{قطنا}^2 \text{س}}{\text{رس}} + \frac{\text{قطنا}^2 \text{س}}{\text{رس}}$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1 - \text{جا}^2 \text{س}}{\text{جاس - جتاس}} \\ & \frac{\text{رس}}{\text{جاس - جتاس}} \end{aligned} \right\} \quad (97)$$

الحل:  $(1 - \text{جا}^2 \text{س})$  شكل مثلي له متطابقات ممizza ... نبسطه بالمتطابقات

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\text{جا}^2 \text{س} + \text{جتا}^2 \text{س} - 2 \cdot \text{جاس جتاس}}{\text{جاس - جتاس}} \\ & \frac{\text{رس}}{\text{جاس - جتاس}} \end{aligned} \right\} \quad \text{ويحلل}$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{(\text{جاس - جتاس})(\text{جاس - جتاس})}{\text{جاس - جتاس}} \\ & \frac{\text{رس}}{\text{جاس - جتاس}} \end{aligned} \right\} =$$

$$\left. \begin{aligned} & (\text{جاس - جتاس}) \cdot \text{رس} \\ & - \text{جتاس - جاس} + \frac{\text{رس}}{\text{جاس - جتاس}} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\text{جتا}^2 s}{\text{جاس جتا}^2 s} \cdot \frac{1}{s} \\ & \end{aligned} \right) (98)$$

الحل:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\text{جتا}^2 s}{\text{جاس جتا}^2 s} \cdot \frac{1}{s} \\ & \left( \frac{1}{s} \right)^2 = \frac{\text{جتا}^2 s}{\text{جاس جتا}^2 s} \cdot \frac{1}{s} \\ & \end{aligned} \right) =$$

$$\left. \begin{aligned} & 4 \cdot \frac{\text{جتا}^2 s}{\text{جاس جتا}^2 s} \cdot \frac{1}{s} = \\ & 4 \cdot \frac{\text{جتا}^2 s}{\text{جاس جتا}^2 s} \cdot \frac{1}{s} = \end{aligned} \right) =$$

$$\begin{aligned} & 4 \cdot \frac{\text{جتا}^2 s}{\text{جاس جتا}^2 s} = \\ & 4 \cdot \frac{\text{جتا}^2 s}{\text{جاس جتا}^2 s} = \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{s-1} \cdot \frac{1}{s} \\ & \end{aligned} \right) (99)$$

الحل:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{(s+2)(s+2)}{s^2} \cdot \frac{1}{s} \\ & \end{aligned} \right) (100)$$

الحل:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{s^3 - s^2}{s^4} \cdot \frac{1}{s} \\ & \end{aligned} \right) (101)$$

الحل:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{s^{\frac{1}{3}} \cdot s^{\frac{1}{3}}}{s^{\frac{4}{3}}} \cdot \frac{1}{s} \\ & \end{aligned} \right) =$$

$$s^{\frac{1}{3}} \cdot (s^{\frac{1}{3}} - s^{\frac{1}{3}}) \cdot \frac{1}{s} =$$

$$\left. \begin{array}{l}
 \frac{ds}{s^2} = \frac{1}{s^3} ds \\
 \frac{ds}{s^2} = \frac{1}{4s^3} ds \\
 \frac{ds}{s^2} = \frac{3}{4s^3} ds
 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l}
 s = 1 - \frac{1}{t} \\
 \frac{dt}{s^2} = \frac{1}{4s^3} dt \\
 \frac{dt}{s^2} = \frac{3}{4s^3} dt
 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l}
 s = \sqrt[3]{1 - t} \\
 \frac{dt}{s^2} = \frac{3}{8} (1 - t)^{\frac{2}{3}} dt
 \end{array} \right\}$$

### تكاملات متميزة

ملاحظة: إذا ظهرت  $\sqrt{s}$  أو  $s^{-\frac{1}{2}}$  كزاوية أو كجزء من كسر، فإنها فوراً تستبدل بالتعويض.

$$(102) \quad \int s^{\frac{1}{2}} ds$$

الحل:

$$\left. \begin{array}{l}
 \frac{ds}{s^2} = \frac{1}{4s^3} ds \\
 \frac{ds}{s^2} = \frac{1}{4s^2} ds \\
 \frac{ds}{s^2} = \frac{1}{4s^2} ds
 \end{array} \right\} \quad (103)$$

الحل:

$$\left. \begin{array}{l}
 s = \sqrt{t} \\
 s^2 = t \\
 2s ds = dt
 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l}
 \frac{dt}{s^2} = \frac{1}{4s^2} dt \\
 \frac{dt}{s^2} = \frac{1}{4t} dt \\
 \frac{dt}{s^2} = \frac{1}{4t} dt
 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l}
 \frac{dt}{s^2} = \frac{1}{4t} dt \\
 \frac{dt}{s^2} = \frac{1}{4t} dt \\
 \frac{dt}{s^2} = \frac{1}{4t} dt
 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l}
 \frac{dt}{s^2} = \frac{1}{4t} dt \\
 \frac{dt}{s^2} = \frac{1}{4t} dt \\
 \frac{dt}{s^2} = \frac{1}{4t} dt
 \end{array} \right\}$$

$$\frac{b}{2+s} + \frac{1}{s-2} = \frac{8}{4-s}$$

$$\lambda = \alpha(\chi + \beta(\chi - 2)) \text{ هنا}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2 = 1 \leftarrow 2 = \chi \\ 2 - = \beta \leftarrow 2 - = \chi \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \chi(\frac{2-}{2+\chi} + \frac{2}{2-\chi} + 2) \end{array} \right\} \leftarrow$$

$$= \chi(2 + |2 - \log| \chi + 2|)$$

$$= 2 \chi + \log(\chi - 2) - (\chi + \sqrt{\chi})$$

$$(104) \left. \begin{array}{l} \frac{d\chi}{\chi + 1} \end{array} \right\}$$

الحل:

$$(105) \left. \begin{array}{l} \frac{2}{\chi - \sqrt{\chi}} d\chi \end{array} \right\}$$

الحل:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{2}{\chi - \chi} d\chi \rightarrow \text{قسمة} \\ \frac{4\chi}{\chi - \chi} d\chi = \\ \frac{4\chi}{\chi(1-\chi)} d\chi \rightarrow \text{اختصار مباشر} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \chi = \sqrt{\chi} \\ \frac{1}{\sqrt{\chi}} = \frac{d\chi}{\chi} \\ 2\sqrt{\chi} d\chi = d\chi \\ \chi d\chi = d\chi \end{array} \right\}$$

$$= \left. \begin{array}{l} \frac{4}{\chi - 1} d\chi \end{array} \right\}$$

$$= \log(\chi - 1) + C$$

$$\left. \frac{1}{h} \right\} (106)$$

الحل:

$$\left. \frac{h}{h^2 - 6h + 9} \right\} (107)$$

الحل:

$$\left. \sqrt{h+1} \right\} (108)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1 - \frac{2}{h}}{\frac{2}{h}} \\ = \end{array} \right\}$$

قسمة ←

$$\frac{\frac{1 - \frac{2}{h}}{\frac{2}{h}}}{\frac{2 \pm \frac{2}{h}}{2 + 0}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{رسور جزئية} \\ \left( \frac{2}{1 - \frac{2}{h}} + 2 \right) \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} h = \sqrt{h+1} \\ h^2 = h + 1 \\ h^2 - h - 1 = 0 \\ h = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ h = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4}}{2} \\ h = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ h = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \end{array} \right\}$$

$$\frac{b}{1+h} + \frac{1}{1-h} = \frac{2}{1-\frac{2}{h}}$$

$$h = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} h = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \\ h = b \\ 1-h = 1-b \end{array} \right\}$$

$$\left[ \frac{1-s}{1+s} + \frac{1}{1-s} + 2 \right] s$$

$$= 2s + |s - 1| - |s + 1|$$

$$2 = \sqrt{s + 1} + \dots$$

$$(109) \quad \left[ \frac{s}{s-1} - \frac{s}{s+1} \right]$$

الحل:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{2-s}{s(1-s)} \right] \xrightarrow{\text{اختصار}} \\ & \left[ \frac{2-s}{1-s} \right] = \begin{cases} s = \sqrt{s-1} \\ s = 1-s \xrightarrow{\text{رس}} s = 1-s \\ ds = 2-s \end{cases} \\ & \frac{b}{s+1} + \frac{1}{s-1} = \frac{2-s}{1-s} \end{aligned}$$

$$2 - b(s+1) = 2 - s$$

$$s = 1 \leftarrow 2 = 2 - \leftarrow 1 = s$$

$$s = 1 \leftarrow b \leftarrow 2 = 2 - \leftarrow 1 = b$$

$$\left[ \frac{1-s}{s+1} + \frac{1}{s-1} \right] s$$

$$= \frac{-\ln|s-1| + \ln|s+1|}{1-s}$$

$$= \ln|s+1| - \ln|s-1| + \ln|s+1|$$

$$\frac{rs}{s-1+\sqrt{s+1}} \quad (11)$$

الحل:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{2s^2}{s-1+s} \\ \text{ولكن } s = s^2 \\ s = s - 1 \\ \frac{2s^2}{(s^2-1)(s-1)} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \sqrt{s+1} = s \\ s^2 = s + 1 \\ 2s^2 = 2s \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{2s^2}{2s-s} \\ \text{رسور جزئية} \end{array} \right\} =$$

$$\frac{b}{1-s} + \frac{1}{2+s} = \frac{2s^2}{2s-s}$$

$$s^2 = b(s-1) + s(b+1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{4}{3} = 1 \leftarrow 2- = s \\ \frac{2}{3} = b \leftarrow 1 = s \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{2}{3} \cdot rs \\ \frac{4}{3} \end{array} \right\}$$

$$= \frac{4}{3} \log |s+2| + \frac{2}{3} \log |s-1| + \log |s+1+\sqrt{s+1}|$$

$$= \frac{4}{3} + \log \left| 1 - \frac{1}{1+\sqrt{s+1}} \right| + \log \left| 2 + \frac{1}{1+\sqrt{s+1}} \right|$$

## أسئلة شاملة

$$\text{سؤال: } \left\{ \begin{array}{l} \text{طاء}^4 \text{ س.درس} \\ \text{فاس} \end{array} \right.$$

$$\text{سؤال: } \left\{ \begin{array}{l} \text{س جناه}^5 \text{ س جناه}^3 \text{ س درس} \\ 8 \end{array} \right.$$

$$\text{سؤال: } \left\{ \begin{array}{l} \text{جاء}^6 \text{ س.درس} \\ \text{جاء}^2 \text{ س - 5 جاس} \end{array} \right.$$

## التكاملات اللوغاريتمية

من المعروف أن اللوغاريتم لا يكامل مباشرة، ولكنه يشتق حيث نعرف أن:  $(لوه_s) = \frac{1}{s}$

إذا ظهر اللوغاريتم مع كسر، عندها نستبدل (اللوغاريتم) (بالتعويض)، أما إذا ظهر منفرداً أو مضروباً، فنعتمد على طريقة الأجزاء على أن يكون ق هو اللوغاريتم.

تابع التمارين

$$(111) \int \frac{\log s}{s} ds$$

الحل:

$$(112) \int \frac{\ln s}{s} ds$$

الحل:

$$(113) \int \frac{1}{s \ln s} ds$$

الحل:

$$\begin{aligned} & \left. \frac{1}{s \ln s} \right|_d^c \\ &= \ln s + c \\ &= \ln(s) + c \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \ln s = \ln c \\ \frac{1}{s} = \frac{1}{c} \\ s \ln s = c s \end{array} \right.$$

(١١٤) سلس دس

الحل:

(١١٥) لوه س دس ← لوه س دس أجزاء

الحل:

$$ق = لوه س \leftarrow دق = \frac{1}{س} دس$$

$$ده = د س \leftarrow ه = س$$

$$\leftarrow 2س لوه س - \frac{1}{س} \times س دس )$$

$$= 2(س لوه س - س) + ج$$

(١١٦) لوه  $\sqrt{s+1} دس$  أجزاء

الحل:

$$\frac{دس}{س\sqrt{1+لوه}} \quad (117)$$

الحل:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{س دص}{س\sqrt{1+ص}} \\ & (ص+1)^{\frac{1}{2}} دص \\ & = \end{aligned} \right\} \begin{cases} ص = لوه س \\ \frac{1}{ص} = \frac{دص}{س} \\ س دص = دس \end{cases}$$

$$\frac{\frac{1}{2}(ص+1)^{\frac{1}{2}} دص}{1 \times \frac{1}{2}} =$$

$$ج + \sqrt{ص+1} \cdot 2 =$$

$$ج + \sqrt{لوه س + ج} \cdot 2 =$$

$$\left. \begin{aligned} & لوه^3 س + لوه^3 دس \\ & دس مقدار يمكن تبسيطه \end{aligned} \right\} \quad (118)$$

الحل:

$$\left. \begin{aligned} & لوه^3 س + لوه^3 دس \\ & دس = \frac{س}{4} (1 + س^3) \end{aligned} \right\} =$$

(١١٩)  $\left\{ \text{س} \text{ه}^{\circ} \text{س} + \text{لوه}^{\circ} \text{س} \text{رس} \text{ نبسطه } \right.$

الحل:

$$\left\{ \text{س} \text{ه}^{\circ} \text{ه}^{\circ} \text{لوه}^{\circ} \text{س} \text{رس} = \text{س} \text{ه}^{\circ} \text{س} \text{رس} \right.$$

$$= \left\{ \text{س}^2 \text{ه}^{\circ} \text{س} \text{رس} \text{ أجزاء } \right.$$

$$\text{ق} = \text{س}^2 \leftarrow \text{د} \text{ق} = 2 \text{س} \text{د} \text{س}$$

$$\text{د} \text{ه}^{\circ} = \text{ه}^{\circ} \text{س} \text{د} \text{س} \leftarrow \text{ه}^{\circ} \text{ه}^{\circ}$$

$$\left\{ \left. \text{س}^2 \text{ه}^{\circ} \text{س} \text{ه}^{\circ} \text{س} \text{رس} \right\} - 2 \text{س} \text{ه}^{\circ} \text{س} \text{رس} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ن} = 2 \text{س} \leftarrow \text{د} \text{ن} = 2 \text{س} \text{رس} \\ \text{ر} \text{ه}^{\circ} = \text{ه}^{\circ} \text{س} \text{رس} \leftarrow \text{ه}^{\circ} \text{ه}^{\circ} \end{array} \right\} = \text{س}^2 \text{ه}^{\circ} \text{س} \text{ه}^{\circ} \text{س} \text{رس}$$

$$= \left( \text{س}^2 \text{ه}^{\circ} \text{س} \text{ه}^{\circ} \text{س} \text{رس} \right) - 2 \text{س} \text{ه}^{\circ} \text{س} \text{ه}^{\circ} \text{س} \text{رس}$$

$$= \text{س}^2 \text{ه}^{\circ} \text{س} \text{ه}^{\circ} \text{س} \text{رس} + 2 \text{س} \text{ه}^{\circ} \text{س} \text{ه}^{\circ} \text{س} \text{رس}$$

(١٢٠)  $\left\{ \text{جا}(\text{لوه}^{\circ} \text{س}) \text{رس} \right\}$

الحل:

$$\text{ص} = \text{لوه}^{\circ} \text{س} \leftarrow \frac{1}{\text{س}} \text{د} \text{ص} = \text{د} \text{س}$$

$\text{ولكن ص} = \text{لوه}^{\circ} \text{س}$ $\text{س} = \text{ه}^{\circ} \text{ص}$	$\left\{ \text{جا} \text{ص} \text{س} \text{د} \text{ص} \right\}$ $\left\{ \text{ه}^{\circ} \text{ص} \text{جا} \text{ص} \text{د} \text{ص} \text{أجزاء دوري} \right\}$
---	---

$$ق = ه^{ص} \leftarrow دق = ه^{ص} د ص$$

$$د ه = جا ص د ص \leftarrow ه = - جتا ص$$

$$\left. \begin{array}{l} ه^{ص} جتا ص - \\ ه^{ص} \times - جتا ص د ص \end{array} \right\}$$

$$= - ه^{ص} جتا ص + \left. \begin{array}{l} ه^{ص} جتا ص د ص \\ ه^{ص} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} د = ه^{ص} \leftarrow د ن = ه^{ص} د ص \\ د ه = جتا ص د ص \leftarrow ه = جا ص \end{array} \right\} = - ه^{ص} جتا ص +$$

$$= - ه^{ص} جتا ص + \left( \begin{array}{l} ه^{ص} جا ص - \\ ه^{ص} جا ص د ص \end{array} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} ه^{ص} جا ص د ص = - ه^{ص} جتا ص + \\ ه^{ص} جا ص - \end{array} \right\} ه^{ص} جا ص د ص$$

$$\left. \begin{array}{l} ٢ ه^{ص} جا ص د ص = - ه^{ص} جتا ص + \\ ه^{ص} جا ص \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} ه^{ص} جا ص د ص = - \left( \frac{1}{2} ه^{ص} جتا ص + ه^{ص} جا ص \right) + \end{array} \right\}$$

ونعرض بقيمة ص = لو هـ س

## تمارين متنوعة وهامة في التكاملات

$$(121) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{قا}^3 \text{س ظاس دس فردي} \\ \text{قا}^2 \text{س} \leftarrow \text{ص} = \text{قا س} \end{array} \right.$$

الحل: رغم أن شكل السؤال مشابه لما نتعلم إلا أننا سنعتمد على تقنيات أخرى في التكامل فمثلاً  
لنفرض  $\text{ص} = \text{ظا س حيث قوة قاس (فردية)}$  .. عند ذلك نقوم بما يلي:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{قا}^3 \text{س ظاس دس} = \text{قا}^2 \text{س.قاس ظاس دس} \\ \leftarrow \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{ص}^2 \cdot \text{قاس ظاس}}{\text{قاس ظاس}} \frac{\text{دص}}{\text{دص}} = \text{وضع ص} = \text{قا س} \\ \frac{\text{ص}^3 + ج}{3} = \frac{\text{دص}}{\text{دص}} = \text{قاس ظاس} \\ \frac{1}{3} \text{قا}^3 \text{س} + ج = \frac{\text{دص}}{\text{قاس ظاس}} = \text{دس} \end{array} \right.$$

$$(122) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{قا}^4 \text{س دس} = \text{قا}^2 \text{س.قا}^2 \text{س دس} \\ \leftarrow \end{array} \right.$$

الحل:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{قا}^2 \text{س} (\text{ظا}^2 \text{س} + 1) \text{ دس علاقات} \\ \leftarrow \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{قا}^2 \text{س} (\text{ص}^2 + 1)}{\text{قا}^2 \text{س}} \frac{\text{دص}}{\text{دص}} = \text{ص} = \text{ظا س} \\ \frac{\text{ص}^3 + \text{ص} + ج}{3} = \frac{\text{دص}}{\text{دص}} = \text{قا}^2 \text{س} \\ \frac{1}{3} \text{ظا}^3 \text{س} + \text{ظاس} + ج = \frac{\text{دص}}{\text{قا}^2 \text{س}} = \text{دس} \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\sqrt{s}}{2} \frac{h}{(1+\sqrt{s})} \end{aligned} \right\} (123)$$

الحل:

$$s = \sqrt{s} \leftarrow \frac{1}{\sqrt{s}} = \frac{ds}{\sqrt{s}}$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\sqrt{s}}{2} \frac{h}{(1+s)} \end{aligned} \right\} \leftarrow$$

$$Q = 2s - h \leftarrow Q = (2s + h) \times 2.$$

$$dh = (s + 2d) \leftarrow h$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{1-s} \times (1+s) \end{aligned} \right\} \leftarrow$$

$$\left. \begin{aligned} & -\frac{1}{1-s} \times (1+s) \end{aligned} \right\} + \frac{1}{1+s} \times s =$$

$$+ h \leftarrow \frac{s}{1+s}$$

$$+ \frac{\sqrt{s}}{1+\sqrt{s}} \leftarrow$$

$$\text{الحل: } \boxed{\frac{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{جاس}{دس}}}}{\frac{1}{\sqrt{1+\frac{جاس}{دس}}}}} = \dots \text{ يمكن تبسيط مثل هذا بالضرب بالمرافق}$$

الحل:

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{جاس}{دس}}}}{\frac{1}{\sqrt{1+\frac{جاس}{دس}}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1+\frac{جاس}{دس}}}}{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{جاس}{دس}}}} \times \frac{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{جاس}{دس}}}}{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{جاس}{دس}}}}$$

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{1+\frac{جاس}{دس}}}}{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{جاس}{دس}}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{جاس}{دس}}}}{\frac{1}{\sqrt{1+\frac{جاس}{دس}}}} \leftarrow \text{بإعادة التعريف الاشارة موجبة ضمن حدود التكامل}$$

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{جاس}{دس}}}}{\frac{1}{\sqrt{1+\frac{جاس}{دس}}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{جاس}{دس}}}}{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{جاس}{دس}}}} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{1+\frac{جاس}{دس}}}}{\frac{1}{\sqrt{1+\frac{جاس}{دس}}}} =$$

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{جاس}{دص}}}}{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{جاس}{دص}}}} = \begin{cases} \text{ص=جاس} \\ \frac{دص}{داس} = \frac{جاس}{داس} \\ \frac{دص}{جاس} = دس \end{cases}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{جاس}{دص}}} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{جاس}{دص}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{جاس}{دص}}} - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{جاس}{دص}}}$$

١٢٥) قاس درس ... حالة خاصة جداً (تحفظ كما هي)

الحل:

$$\frac{\text{قاس} + \text{ظاس}}{\text{قاس} + \text{ظاس}} \cdot \text{درس}$$

$$= \frac{\text{قا}^2 \text{س} + \text{قاس ظاس}}{\text{قاس} + \text{ظاس}} \cdot \text{درس}$$

$$\frac{\text{قا}^2 \text{س} + \text{قاس ظاس}}{\text{قاس ظاس} + \text{قا}^2 \text{س}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{ص} = \text{قا س} + \text{ظا س} \text{ (المقام)} \\ \frac{\text{دص}}{\text{درس}} = \text{قا س ظا س} + \text{قا}^2 \text{س} \end{array} \right.$$

$$= \text{لو}_ه \text{قا س} + \text{ظاس} + \text{ج}$$

١٢٦) قتاس درس ... فكرة مشابهة للسؤال السابق

الحل:

$$\frac{\text{قتاس} - \text{ظناس}}{\text{قتاس} - \text{ظناس}} \cdot \text{درس}$$

$$\text{ص} = \text{قتا س} - \text{ظنا س} \leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{درس}} = -\text{قتا س ظنا س} + \text{قتا}^2 \text{س}$$

$$\leftarrow \frac{\text{قتا}^2 \text{س} - \text{قتاس ظناس}}{\text{ص}} \cdot \frac{\text{دص}}{-\text{قتاس ظناس} + \text{قتا}^2 \text{س}}$$

$$= \text{لو}_ه \text{ص} + \text{ج} = \text{لو}_ه \text{قتاس} - \text{ظناس} + \text{ج}$$

$$(127) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{رس}^7 - \text{رس}^2 \\ \text{رس}^2 = 1 - \text{رس} \end{array} \right.$$

الحل:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{رس}^2 = 1 - \text{رس} \\ \text{رس}^2 = \frac{\text{رس}}{\text{رس}} \\ \text{رس}^2 = \frac{\text{رس}}{2} \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \text{رس}^7 = \text{رس}^2 \cdot \text{رس}^5 \\ \text{رس}^7 = \frac{1}{2} (\text{رس} + 1) \cdot \text{رس}^5 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{رس}^5 = \text{رس}^2 + \text{رس}^2 \cdot \text{رس}^3 \\ \text{رس}^5 = \frac{1}{2} (\text{رس}^2 + 1) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{رس}^9 = \text{رس}^5 + \text{رس}^5 \cdot \text{رس}^4 \\ \text{رس}^9 = \frac{1}{2} (\text{رس}^5 + 1) \end{array} \right.$$

$$... \text{ ونعرض بقيمة رس} = \left( \frac{\text{رس}^8}{8} + \frac{\text{رس}^9}{9} - \frac{\text{رس}^{10}}{10} \right) \frac{1}{2}$$

$$(128) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{رس}^3 = \text{رس}^2 \cdot \text{رس} \\ \text{رس}^2 = \frac{\text{رس}}{2} \end{array} \right.$$

الحل:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{رس}^3 = \text{رس}^2 \cdot \text{رس} \\ \text{رس}^2 = \frac{\text{رس}}{2} \\ \text{رس}^2 = \frac{\text{رس}}{2} \cdot \text{رس} \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \text{رس}^3 = \text{رس}^2 \cdot \text{رس} \\ \text{رس}^3 = \frac{1}{2} \text{رس}^2 \cdot \text{رس} \\ \text{رس}^3 = \frac{1}{2} \text{رس} \cdot \text{رس}^2 \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \text{رس} = \text{رس}^2 \\ \text{رس}^2 = \frac{\text{رس}}{2} \\ \text{رس}^2 = \frac{\text{رس}}{2} \end{array} \right.$$

$$\text{رس} = \text{رس}^2 \leftarrow \text{رس}^2 = \text{رس}$$

$$د_ه = ه^{ص} د_ص \leftarrow ه = ه^{ص}$$

$$\rightarrow + \frac{1}{2} ه^{ص} - \frac{1}{2} ص_ه = \left( \frac{1}{2} ص_ه - \frac{1}{2} ه^{ص} \right) \left( \frac{1}{2} ص_ه + \frac{1}{2} ه^{ص} \right)$$

$$\rightarrow + \frac{1}{2} ه^{ص} - \frac{1}{2} ه^{ص} =$$

(١٢٩) جناس ه دس جناس ه

الحل:

$$\begin{aligned} \frac{\text{جناس ه}}{\text{جناس}} &= \left\{ \begin{array}{l} \text{ص} = \text{جناس} \\ \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = -\text{جاس} \\ \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{د س} \end{array} \right. \\ \frac{2\text{ جاس جناس ه}}{\text{جناس}} &= \\ -2\text{ ص} ه رص &= \end{aligned}$$

$$\text{ق} = 2 - \text{ص} \leftarrow \text{د ق} = 2 - \text{د ص}$$

$$د_ه = ه^{ص} د_ص \leftarrow ه = ه^{ص}$$

$$\leftarrow -2\text{ ص} ه + 2\text{ ه}^{ص} رص$$

$$= -2\text{ جناس ه} + 2\text{ ه}^{ص} + ج$$

$$= -2\text{ جناس ه} + 2\text{ ه}^{ص} + ج$$

(١٣٠) جناس ه جناس دس جناس ه

الحل:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{2} \text{ جناس ه} \\ \text{جناس ه} \end{array} \right. دس$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\text{جتا}^2\text{س}}{\text{جتا}^2\text{س}} = \frac{\text{دص}}{\text{دص}} \\ \text{ه}^{\text{ص}} + \text{ج} = \text{ه}^{\text{ص}} + \frac{1}{2}\text{جتا}^2\text{س} \\ \text{ج} + \text{ه}^{\frac{1}{2}\text{جتا}^2\text{س}} = \text{ه}^{\text{جاس جناس}} + \text{ج} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ص} = \frac{1}{2}\text{جتا}^2\text{س} \\ \frac{\text{دص}}{\text{دص}} = \frac{1}{2} \times \text{جتا}^2\text{س} \times 2 \\ \frac{\text{دص}}{\text{جتا}^2\text{س}} = \text{د س} \end{array}$$

$$(131) \quad [ \text{س} (\text{جاس} - \text{جناس}) ] \text{ دص}$$

الحل:

$$[ \text{س} (\text{جا}^2\text{س} + \text{جنا}^2\text{س} - 2\text{جاس جناس}) \text{ دص} ]$$

$$[ \text{س} (1 - \text{جا}^2\text{س}) \text{ دص أجزاء} ]$$

$$\text{ق} = \text{س} \leftarrow \text{د ق} = \text{د س}$$

$$\text{د هـ} = 1 - \text{جا}^2\text{س} \cdot \text{د س} \leftarrow \text{هـ س} = \text{س} + \frac{\text{جتا}^2\text{س}}{2}$$

$$\left( \text{س} + \frac{\text{جتا}^2\text{س}}{2} \right) \text{ دص} - \left( \text{س} + \frac{\text{جتا}^2\text{س}}{2} \right) \leftarrow$$

$$\text{س}^2 + \frac{\text{س جتا}^2\text{س}}{2} - \left( \frac{\text{س}}{2 \times 2} + \frac{\text{جا}^2\text{س}}{2} \right) =$$

$$\frac{\text{س}}{2} + \frac{1}{4} \text{س جتا}^2\text{س} - \frac{1}{4} \text{جا}^2\text{س} + \text{ج} =$$

١٣٢) جناس جنا<sup>٢</sup> (جاس) درس

الحل:

$$\frac{\text{جنا}^2 \text{ جناس}}{\text{جناس}} = \begin{cases} \text{ص} = \text{جاس} \\ \frac{\text{دص}}{\text{دنس}} = \text{جنا س} \\ \frac{\text{دص}}{\text{جناس}} = \text{دنس} \end{cases}$$

$$\Rightarrow + \left( \frac{\text{جا}^2 \text{ ص}}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \text{ جاس} + \frac{1}{4} \text{ جا} (\text{جاس})$$

١٣٣) لوه<sup>٣</sup> مس<sup>٣</sup> درس

الحل: (لوه<sup>٣</sup>)<sup>٢</sup> درس ... ترتيب المقدار ... أجزاء

$$\text{ق: } (\text{لوه}^3)^2 = (\text{لوه}^3)^2 \text{ مركب دق} = 2(\text{لوه}^3) \times 3 \times \frac{1}{2} \text{ درس}$$

$$\text{هـ} = \text{دـ س} \leftarrow \text{هـ} = \text{س}$$

$$\text{التكامل} = \text{س} (\text{لوه}^3)^2 - 6 \text{لوه}^3 \times \frac{3}{2} \text{س درس}$$

$$= \text{س} (\text{لوه}^3)^2 - 18 \text{لوه}^3 \text{ س درس أجزاء}$$

$$= \left. \begin{aligned} & \text{رس} = \frac{1}{s} \rightarrow \text{رس} \rightarrow \text{رس} \\ & \text{رس} \rightarrow \text{رس} \rightarrow \text{رس} = 18 \end{aligned} \right\} - \left( s^3 \right)^2$$

$$= \left. \begin{aligned} & \text{رس} = 18 \times \frac{1}{s} - \left[ s \text{رس} - 18 \right] \end{aligned} \right\}$$

$$= \left. \begin{aligned} & \text{رس} = s^3 - 18s \text{رس} + 18 \end{aligned} \right\}$$

$$(134) \text{ إذا كان } \left. \begin{aligned} & \text{رس} = 7, \text{ جد} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \text{جتا} s \text{ من} (\text{جاتا} s) \text{ رس} \end{aligned} \right\}$$

الحل:

$$(135) \text{ إذا كان منحنى } q(s) \text{ يمر بالنقطتين } (1, 5), (3, 9), \text{ وكان } \left. \begin{aligned} & \text{رس} = 7, \end{aligned} \right\}$$

$$\text{فما قيمة: } A \left. \begin{aligned} & \text{رس} \end{aligned} \right\}$$

$$B \left. \begin{aligned} & \text{رس} (s^2 + 1) \text{ رس} \end{aligned} \right\}$$

$$C \left. \begin{aligned} & \text{رس} (2s + 1) \text{ رس} \end{aligned} \right\}$$

الحل:

$$(1) \left. \begin{aligned} & \text{رس} \end{aligned} \right\} \dots \text{أجزاء}$$

$$ق: s \leftarrow d \cdot q = d \cdot s$$

$$d \cdot h = q(s) \cdot d \cdot s \leftarrow h = q(s)$$

$$\left[ \begin{array}{c} s \\ d \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} h \\ q(s) \end{array} \right] \leftarrow$$

$$\left[ \begin{array}{c} s \\ d \end{array} \right] - ((1 \times 1 - 0) \times 5) =$$

$$35 = 7 - 3 \times 1 - 9 \times 5 =$$

$$(2) \quad \left[ \begin{array}{c} s \\ d \end{array} \right] + (1 \cdot d \cdot s) \text{ تعويض}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{s} s = 1 + 2 \\ d = s \cdot 2 \\ d = 2s \end{array} \right.$$

$$\left[ \begin{array}{c} s \\ d \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} 1 + 2 \\ 2s \end{array} \right]$$

$$7 \times 4 = \left[ \begin{array}{c} 4 \\ 4 \end{array} \right] \leftarrow$$

$$28 =$$

$$\rightarrow \left[ \frac{(1)u}{2} - \frac{(5)u}{2} \right] = \frac{(1+2s)u}{2} = s(1+s)u$$

$$3 = \frac{3}{2} - \frac{9}{2} =$$

$$(136) \text{ إذا كان } \left\{ \begin{array}{l} u = 7, \text{ ج} \\ u = \sqrt{s}h \end{array} \right. \text{ رس}$$

الحل:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \sqrt{\frac{s}{2}}h \leftarrow \text{ص}^2 = \frac{s}{2} \leftarrow h = \sqrt{\frac{s}{2}} \\ 2 \text{ ص دص} = h^2 \cdot \text{رس} \\ \frac{2 \text{ ص دص}}{\text{ص}} = \text{رس} \\ \frac{2 \text{ دص}}{\text{ص}} = \text{رس} \\ 14 = 7 \times 2 = 7 \leftarrow \text{ص دص} = \text{رس} \end{array} \right. \text{ ونبدل الحدود}$$

$$137) \text{ إذا كان } Q(1) = 6, Q(2) = 4, \text{ فما قيمة: } \left\{ \begin{array}{l} u(s) = 2 \\ u(s) = 2 \end{array} \right.$$

الحل:

$$Q: 2s \leftrightarrow d \cdot 2 = 2 \cdot d$$

$$\frac{d}{h} = Q(2s) \cdot d \leftarrow \frac{u(2s)}{2}$$

لاحظ أن

$s = 2$ $\frac{d}{s} = \frac{d}{2}$ $\frac{d}{s} = d$ $s = \frac{1}{2} \leftarrow d = 1$ $s = 1 \leftarrow d = 2$	$\left\{ \begin{array}{l} u(2s) = 2 \\ u(2s) = 2 \end{array} \right.$	$= Q(1) \times 1 - Q(2) \times \frac{1}{2} = (1 \times 1) - (2 \times \frac{1}{2}) = 1 - 1 = 0$
---	---	---

$$138) \text{ إذا كان } Q(2) = 5, Q(3) = 12, Q(1) = 18, \text{ فما قيمة: } \left\{ \begin{array}{l} u(s) = 3 \\ u(s) = 3 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u(s) = 3 \\ u(s) = 3 \end{array} \right.$$

الحل:

١٣٩) إذا علمت أن  $u = s^n h^m r^s$  فثبت أن:  $u^n = s^{n^2} h^{mn} r^{sn}$

الحل:

$s^n h^m r^s$  أجزاء

$$u = s^{n^2} h^{mn} r^{sn}$$

$$d_h = h^m d_s \leftarrow h^m$$

$u^n = s^{n^2} h^{mn} r^{sn}$

$$u^n = s^{n^2} - n^{*} \dots$$

لاحظ أن  $s^{n^2} h^m r^s$  على شكل  $u^{n^2}$

٤٠) إذا علمت أن  $u = (lows)^n$  فثبت أن:  $u^n = s(lows)^{n^2}$

الحل:

$u^n = (lows)^{n^2}$  أجزاء

$$u = (lows)^n \leftarrow d_s = n (lows)^{n-1} \times \frac{1}{s} d_s$$

$$d_h = d_s \leftarrow h = s$$

$(lows)^n d_s = s (lows)^{n-1} \times \frac{1}{s} d_s$

$$ع_n = s(\text{لوس})^{n-1} \cdot s$$

$$ع_n = s(\text{لوس})^{n-1} \cdots$$

$$14) \text{ إذا علمت أن } ع_n = \frac{1}{1-n} (\text{طاس})^n \text{ دس فأثبت أن: } ع_n =$$

الحل: نحلل لنحصل على طاس ونبدلها

$$\text{طاس}^2 \cdot \text{طاس}^{n-2} \cdot \text{دس} = (قا²س - 1) \text{طاس}^{n-2} \cdot \text{دس}$$

$$قا²س (\text{طاس})^{n-2} \cdot \text{دس} = \text{طاس}^{n-2} \cdot \text{دس} - \text{طاس}^{n-2} \cdot \text{دس}$$

$$\text{ص} = \text{طاس} \leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{قس}} = \text{قا²س} \leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{قس}}$$

$$\leftarrow \text{قا²س} \cdot \text{ص}^{n-2} - \text{طاس}^{n-2} \cdot \text{دس}$$

$$\text{ص} = \frac{1}{1-\text{قا²س}} \cdot (\text{طاس})^{n-2} \cdot \text{دس}$$

$$\text{ص} = \frac{1}{1-\text{قا²س}} \cdot (\text{طاس})^{n-1} \cdot \text{دع}$$

$$142) \text{ جد } \left\{ \frac{1}{\sqrt{s} - \sqrt{as}} \cdot \frac{1}{as} \right\} \text{ دس (حالة خاصة) للاطلاع}$$

الحل: (إرشاد: إفرض  $s = \sqrt{c}$ )

$$s = \sqrt{c} \leftarrow 1 = \sqrt{c} \cdot \frac{1}{as} \leftarrow \frac{1}{\sqrt{c} - \sqrt{ac}} \times \frac{1}{as}$$

$$\left[ \frac{\sqrt{c}}{c - \sqrt{c}} \cdot \frac{1}{as} \right] = \left[ \frac{\sqrt{c}}{c - \sqrt{c}} \cdot \frac{1}{as} \right]$$

$$= \left[ \frac{\sqrt{c}}{c - \sqrt{c}} \cdot \frac{1}{as} \right] \leftarrow \text{قسمة}$$

$$\begin{aligned} & \frac{c - \sqrt{c}}{c + \sqrt{c}} \\ & \frac{c^2 - c\sqrt{c}}{c^2 + c\sqrt{c}} \\ & \frac{c(c - \sqrt{c})}{c(c + \sqrt{c})} \\ & \frac{c - \sqrt{c}}{c + \sqrt{c}} \\ & \frac{c - \sqrt{c}}{c + \sqrt{c}} \end{aligned}$$

$$\left[ \frac{1}{\sqrt{c} - \sqrt{ac}} \cdot \frac{1}{as} \right] \leftarrow$$

$$= \left[ \frac{1}{\sqrt{c} - \sqrt{ac}} \cdot \frac{1}{as} \right] \left( \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{ac}} + \frac{1}{\sqrt{c} - \sqrt{ac}} \right)$$

$$= -c^2 - 3c^2 - c^2 - \frac{1}{as} + \frac{1}{as}$$

$$= -2 - \frac{1}{as} - \frac{1}{as} - \frac{1}{as} - \frac{1}{as} - \frac{1}{as}$$

## تمارين هامة منقاة من الكتاب

$$، ٧ = (١) \quad \left[ \begin{array}{l} \text{إذا كان } f'(s) + 2s = s^3 + 4s + 1 , \text{ وكان } f(1) = 5 , \\ \text{فـ } f(4) = ? \end{array} \right]$$

جد: ١) قيمة الثابت أ    ٢) فـ (٠)    ٣) فـ (٤)

الحل: تذكر أن الاقتران الأصلي = مشتقة (ناتج التكامل)

$$\leftarrow f'(s) + 2s = s^3 + 4s$$

$$\text{عندما } s = 1 \rightarrow f'(1) + 2 = 2 + 3 = 5$$

$$4 = 1 + 3 = 2 + 5$$

$$\leftarrow \frac{s^2}{2} + 2s + s^3 + 4s + 1 \quad \text{وكذلك}$$

$$f(s) + s^3 + 4s + 1 = s^4 + 2s^2 + 3$$

$$\text{عندما } s = 1 \rightarrow f(1) + 1 + 4 + 1 = 7$$

$$2 - = \underline{J} - \underline{J} = \underline{J} + 1 + 7$$

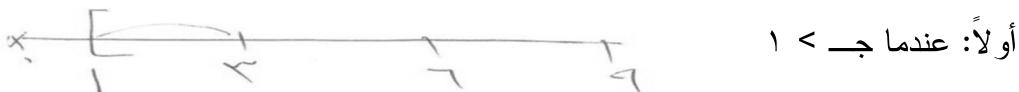
$$3 = (0) \leftarrow$$

$$\text{وبما أن } f(s) + 2s = s^3 + 2s + 4$$

$$s = 4 \leftarrow f(4) = 4 + 4 + 4 + 4 = 16$$

$$2) \text{ إذا كان } \int_{\underline{s}}^{\underline{t}} s + \frac{1}{3} ds = 12, \text{ فما قيمة } \underline{t}, \text{ حيث } \underline{t} > \underline{s}$$

الحل:  $\underline{t} > \underline{s}$  يعني أن  $\underline{t} > 1$  أو  $\underline{t} < 1$



طول الدرجة = 3

$$12 = (6 - \underline{t})^3 + 3 \cdot 2 \cdot \underline{t} + 2 \cdot 1 = \int_1^{\underline{t}} (s)^3 ds$$

$$12 = 18 - \underline{t}^3 + 6 + 2 =$$

$$7 \frac{1}{3} = \frac{22}{3} = \underline{t}^3 \leftarrow 22 =$$



$$\int_{\underline{t}}^1 (s)^3 ds = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 3 + 3 \cdot 6 - 6 \cdot 9 + 9 \cdot 12$$

يلاحظ أن حدود التكامل مقلوبة

$$(9 + \underline{t})^3 - + (6 - -9) 2 - + (3 - -6) 1 - + \dots + (1 - 0) 1 =$$

$$12 = 27 - \underline{t}^3 - 6 + 3 + 1 -$$

$$1 \cdot \frac{1}{3} - = \frac{31}{3} - = \underline{t}^3 \leftarrow = \underline{t}^3 -$$

٣) حل المعادلة التفاضلية التالية:  $\frac{ds}{dt} = \frac{c^2 s t^2 s}{c^2 s}$

الحل:

$$ds/dt = c^2 s t^2 s$$

$$ds/dt = [c^2 s t^2 s t^2 s] \rightarrow \text{جعل معنا } c^2 s \text{ واحدة والباقي } t^2 s$$

$$\left. \begin{aligned} ds/dt &= c^2 s (t^2 s + 1) \\ t^2 s &= \frac{ds}{dt} \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} t^2 s &= \frac{ds}{dt} \\ t^2 s &= \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{c^2 s} \\ t^2 s &= \frac{ds}{c^2 s} \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} t^2 s &= \frac{ds}{dt} \\ t^2 s &= \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} t^2 s &= \frac{ds}{dt} \\ t^2 s &= \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} t^2 s &= \frac{ds}{dt} \\ t^2 s &= \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} t^2 s &= \frac{ds}{dt} \\ t^2 s &= \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

ج) مساحت رسم

**الحل:**

س جاس  
جتا س جتاس

سقا<sup>۲</sup> سطاس و سأجزاء ضرب ثم علاقات

$$ق = س \leftarrow دق = د س$$

$\text{ر}_ه = \left\{ \begin{array}{l} \text{ف}_ا^2 \text{ س ط اس د س} \rightarrow ه \\ \text{ف}_ا^2 \text{ س ط اس د س} \rightarrow \text{ت ع و ي ض} \end{array} \right.$

$$\left. \begin{aligned} h &= \frac{ds}{c^2 s} \\ \frac{c^2}{2} = h & \end{aligned} \right\} \begin{aligned} s &= \text{ظاس} \\ ds &= \frac{ds}{c^2 s} \end{aligned}$$

$$\text{ه} = \frac{1}{3} \text{ ظا}^2 س$$

$$س \times \frac{1}{2} طا^2 س - \left\{ \frac{1}{2} طا^2 س دس \right.$$

$$= \frac{1}{2} \sin^2 s - \frac{1}{2} (\cos^2 s - 1)$$

$$= \frac{1}{2} (س - ظا²س) + ج$$

$$= \frac{1}{2} س ظا² س - \frac{1}{2} ظاس + ج$$

٥) جد  $\sqrt{اس ه دس}$

الحل:

$$ص = \sqrt{اس} \leftarrow ص^2 = س \leftarrow 2 ص د ص = د س$$

$$\left. \begin{aligned} ص ه د ص &= 2 ص^2 ه د ص \\ \leftarrow ص ه د ص & \end{aligned} \right\} أجزاء$$

$$ق = 2 ص^2 \leftarrow دق = 4 ص د ص$$

$$د ه = ه د ص \leftarrow ه د = د ه$$

$$\left. \begin{aligned} 4 ص ه د ص &= 2 ص^2 ه د ص \\ \leftarrow 2 ص^2 ه د ص & \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} د = 4 ص د &= 4 د ص \\ د ه = ه د &= ه د \end{aligned} \right\} - 2 ص^2 ه د ص =$$

$$(2 ص^2 ه د ص - 4 ص ه د) =$$

$$2 ص^2 ه د + 4 ص ه د + 4 ه د =$$

$$2 س ه د + س ه د + 4 ه د =$$

٦) جد  $\frac{\text{قا}^4 س}{طاس - طاس - 2}$

$$\left. \begin{aligned} \text{الحل: } م \frac{\text{قا}^2 س \text{قا}^2 س (طاس + 1)}{\text{طاس - طاس - 2}} &= د س \end{aligned} \right\}$$

$$ص = طاس \leftarrow \frac{دـس}{قاـس} \leftarrow دـس = \frac{دـس}{قاـس}$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{قاـس(صـ^2 + 1)}{قاـس - صـ^2} \leftarrow \frac{دـس}{قاـس} \text{ قسمة} \\ & \frac{1}{صـ^2 - صـ} \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{\frac{1}{صـ^2 - صـ}}{\frac{2 \pm \sqrt{صـ^2 - صـ}}{صـ + 3}}$$

$$\left. \begin{aligned} & دـس \leftarrow \text{كسور جزئية} \\ & \left( \frac{صـ + 3}{صـ^2 - صـ} + 1 \right) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{5}{3} = 1 \\ & \frac{2}{3} = ب \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} & دـس \left( \frac{\frac{2}{3} - \frac{5}{3}}{1 + صـ} + \frac{1}{2 - صـ} \right) = \frac{صـ + 3}{صـ^2 - صـ} = \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} & دـس \left( \frac{\frac{2}{3} - \frac{5}{3}}{1 + صـ} + \frac{1}{2 - صـ} + 1 \right) \end{aligned} \right\}$$

$$صـ + \frac{5}{3} دـس = 2 - \frac{2}{3} دـس | دـس + 1 + جـ ... \text{ ونوعرض صـ}$$

ثم نضع صـ = طـس

$$\left. \begin{aligned} & دـس \\ & \overline{\overline{دـس - 1}} \end{aligned} \right\}$$

$$\text{الحل: } صـ = طـس \leftarrow \sqrt{دـس - 1} = \sqrt{دـس} - 1 \leftarrow دـس = \sqrt{دـس - 1}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{s}} - = \frac{ds}{s^{\frac{1}{3}}}$$

$$ds = -r s \left( \frac{1}{(r-1)^2} - \frac{dr}{r^3} \right)$$

$$ds = r^3 (dr - r^3 dr)$$

$$\left. \frac{r^3 (dr - r^3 dr)}{r} \right| \leftarrow$$

$$= \frac{r^3 - r^6}{r} - \left( \frac{r^3 - r^6}{r} \right) \frac{dr}{r} = dr + \frac{r^3 - r^6}{r^2}$$

$$\left. \frac{1}{r^2 + 1} \right| \leftarrow ds$$

الحل:

$$s = \sqrt[3]{\frac{1}{r^2 + 1}} \leftarrow r^3 = s^3 - ds^2$$

$$\left. \frac{1}{r^2 + 1} \right| \leftarrow \frac{r^3 dr}{s^3}$$

$$\begin{array}{r} 3s - \\ \hline 1 + \sqrt[3]{s^2} \\ \hline 3s^2 + s^3 \\ \hline s^3 - 0 \\ \hline 3s^2 + s^3 \\ \hline 3 + 0 \end{array}$$

$$\left. \frac{3}{s^2 + 1} + (s^3 - 3s^2) \right| \leftarrow$$

$$ج + |1 + ص + 3لـوـه| ص + ج = \frac{ص^2}{2} - \frac{ص}{2}$$

$$ج + |1 + \sqrt{ص - 3} - 3\sqrt{ص} + 3لـوـه| \sqrt{ص} = \frac{ص}{2}$$

$$(9) ج = \frac{ص}{ص + 1}$$

الحل:

$$\frac{ص^{10-} دـس}{ص^{9-} + 1} = \frac{دـس}{(ص^{9-} + 1)^{10}}$$

$$\begin{aligned} \frac{ص^{10-} دـس}{ص^{9-} - ص} &= \left\{ \begin{array}{l} ص = 1 + ص^{9-} \\ دـس = دـس \end{array} \right. \\ \frac{1}{9} لـوـه ص + ج &= \\ \frac{1}{9} لـوـه ص + ج &= \left\{ \begin{array}{l} دـس = \frac{دـس}{ص^{9-} - ص} \\ دـس = دـس \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$(10) ج = \frac{\sqrt{ص^2 - ص^4}}{ص^4 دـس}$$

الحل:

$$\frac{\sqrt{(ص^2 - ص^4)(ص^4)}}{ص^4 دـس}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} (1 - s^{-2}) s^2}{s^{-3}} = \frac{\frac{1}{2} (1 - s^{-2}) s^{\frac{1}{2}}}{s^{-\frac{3}{2}}} =$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ص} = s^{-2} \\ \frac{دص}{د_s} = \frac{1}{s^{-2}} \\ \frac{دص}{د_s} = \frac{1}{s^{-\frac{3}{2}}} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{2} s^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} s^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2} s^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} s^{-\frac{1}{2}} \end{array} \right\}$$

$$(11) \quad جد \left[ \frac{s}{s^4 + s^2} \right] دس، حيث s > 0$$

الحل:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d}{ds} \left( \frac{s}{s^4 + s^2} \right) = \frac{s}{(s^4 + s^2)^2} \\ \frac{d}{ds} \left( \frac{s}{s^4 + s^2} \right) = \frac{1}{s^3} \\ \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{s^3} \right) = \frac{-3}{s^4} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ص} = s^{-2} \\ \frac{دص}{د_s} = \frac{1}{s^{-2}} \\ \frac{دص}{د_s} = \frac{1}{s^{-\frac{3}{2}}} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{دص}{د_s} = \frac{1}{s^{-\frac{3}{2}}} \\ \frac{دص}{د_s} = \frac{1}{s^{-\frac{1}{2}}} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{2} s^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} s^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2} s^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} s^{-\frac{1}{2}} \end{array} \right\}$$

$$12) \quad \text{جد} \left\{ \frac{\sqrt{2+s}}{1+s} \right\}$$

$$\text{الحل: } s^2 = s + 2 \leftarrow s = s^2 - 2$$

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} & \frac{s^2}{1-s} = \frac{s}{s^2-2} \\ & \frac{1-s^2}{1-s} = \frac{s^2}{s^2-2} \\ & \frac{1-s^2}{s^2-2} = \frac{s^2}{s^2-2} \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} & s = \sqrt{2+s} \\ & \frac{1}{\sqrt{2+s}} = \frac{s}{s^2-2} \\ & s^2-2 = s^2 \end{aligned} \\ & \left. \begin{aligned} & \left( \frac{1}{1-s} + 2 \right) \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

$$\frac{b}{1+s} + \frac{1}{s-1} = \frac{2}{s^2-2}$$

$$\left. \begin{aligned} & 1 = 1 \\ & 1 = b \end{aligned} \right\} \leftarrow (1-s) + b(s-1) = 2 \leftarrow$$

$$\left. \begin{aligned} & \left( \frac{1}{1+s} + \frac{1}{s-1} + 2 \right) \end{aligned} \right\}$$

$$= s^2 + |1-s| - \log|s+2|$$

$$= 2 + |1+\sqrt{2+s}| - |1-\sqrt{2+s}| + \log(\sqrt{s+2})$$

(١٣) إذا كان  $s = f(t)$  فاثبت أن  $\frac{ds}{dt} = s \times \text{لوه } f(s)$

الحل:

$$\text{لوه } s = \text{لوه } f(s) = f(s) \times \text{لوه } f$$

نستق الطرفين

$$\frac{\frac{ds}{dt}}{s} = f(s) \times \text{لوه } f$$

$$\frac{ds}{dt} = s \times \text{لوه } f \times f(s)$$

(١٤) بركة ماء وضع بها ١٠٠ سمكة، وكان معدل تزايد عدد الأسماك هو  $\frac{1}{1+50\%}$  سمكة/يوم،

كم عدد الأسماك بعد ٢٤ يوم؟

$$\text{الحل: } \frac{1}{1+50\%} = \frac{r}{1+r}$$

$$r = (1+50\%)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} r &= 100 \text{ عندما } n = 0 \\ \frac{1}{1+r} &= 100 \\ r &= 99 \end{aligned}$$

$$r = \frac{\frac{1}{2}(1+50\%)}{2 \times \frac{1}{2}}$$

$$r = \sqrt{1+50\%}$$

$$r = \sqrt{1+50\%}$$

$$ع = \sqrt{49} = 7 \text{ سمك}$$

١٥) شب حريق في غابة، ودل المتغير ( $m$ ) على مساحة المنطقة التي يصيبها الحريق مقدرة بالدونمات، إذا كان معدل زيادة المساحة ( $m$ ) هو  $0.02$  م مقدراً بالدونمات/ساعة. إذا علمت أن المساحة المحروقة عند بدء الحريق  $3$  دونم جد المساحة المحروقة عند وصول وسائل الإطفاء بعد ساعتين من اكتشاف الحريق.

الحل:

$$\frac{د_ن}{د_ن} = 2 \leftarrow 200 \text{ دونم}$$

$m^3 = 3 \text{ عندما } t = 0$ $\rightarrow + 0 = 3 \text{ لوهـ } m$ $\rightarrow \text{لوهـ } m^3 = ج$
---

$$\left[ \begin{array}{l} 2 \\ 2 \end{array} \right] = \frac{1}{m}$$

$$\text{لوهـ } m^2 = 200 \text{ دونم} + ج$$

$$\text{لوهـ } m^2 = 200 + \text{لوهـ } 3$$

$$\text{عندما } n = 2$$

$$\text{لوهـ } m = 0.02 \times 0.04 + \text{لوهـ } 3 - \text{لوهـ } m^3 = 0.04 + 27 - 3 = 24$$

$$\text{لوهـ } m^3 = \frac{24}{0.04} \leftarrow 600 \text{ دونم}$$

$$16) \text{ ما حل المعادلة التفاضلية } \frac{ds}{dc} = c$$

$$\text{الحل: } \frac{ds}{c} = ds \leftarrow \frac{1}{c} ds = ds$$

$$\ln c = s + \ln J$$

$$c = e^{s+J} \leftarrow c = e^{s} \times e^J \leftarrow \text{ثابت}$$

$$c = e^s \times J$$

$$c = J \cdot e^s$$

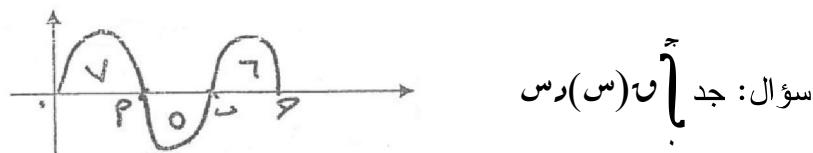
### حساب المساحة باستخدام التكامل

ملاحظات أولية:

١) المساحة قيمة موجبة دائمًا بغض النظر عن موقع المنطقة.

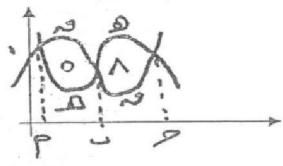
٢) يكون التكامل موجباً إذا وقع المنحنى فوق محور السينات.

٣) يكون التكامل سالباً إذا وقع المنحنى تحت محور السينات.



$$\text{الحل: } \int_{0}^{5} f(s) ds = \int_{0}^{2} f(s) ds + \int_{2}^{4} f(s) ds + \int_{4}^{5} f(s) ds$$

$$A = 6 + (5 - ) + 7 =$$



سؤال:  $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} (v(s) - h(s)) ds$

الحل:  $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} (v(s) - h(s)) ds = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} v(s) ds - \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} h(s) ds$

$$3 - (8 - ) + 5 =$$

لاحظ بقاء  $v - h$  وفقاً للمطلوب

قانون المساحة:

$$M = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} (\text{الكبير}) - (\text{الصغير}) ds$$

الخطوات:

١) نحدد ما لدينا من اقترانات وأعمدة، ثم نساوي كل اقترانين معاً لنجد قيم  $s$  إن أمكن.

٢) نرسم الأعمدة ثم الاقترانات ثم نحدد المنطقة.

ملاحظة هامة:

جميع المعادلات والمستقيمات التي تشتمل على المتغير  $(s)$  تعتبر اقترانات، وأهمها محور السينات وهو الاقتران  $s =$

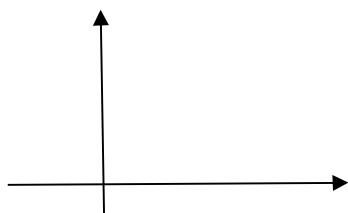
أما المستقيمات التي على صورة  $(s = \text{عدد})$  فتعتبر أعمدة.

تبيه:

إذا كان لدينا (٣ اقترانات) يجب تجزئة المنطقة بالتعاون مع الأعمدة.

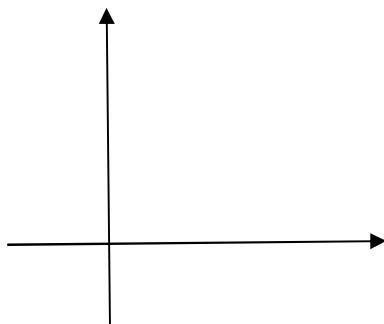
### تمارين

(١) ما مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى  $q(s) = s^2 + 1$  والمستقيم  $s = 5$



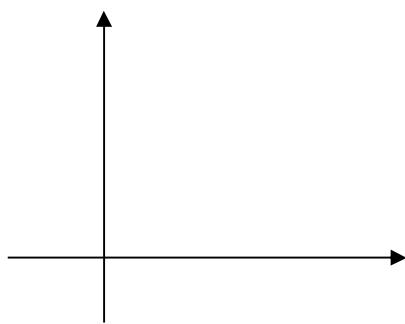
الحل:

(٢) ما مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى  $q(s) = \sqrt{s+1}$  ومحور السينات والمستقيم  $s = 3$ .



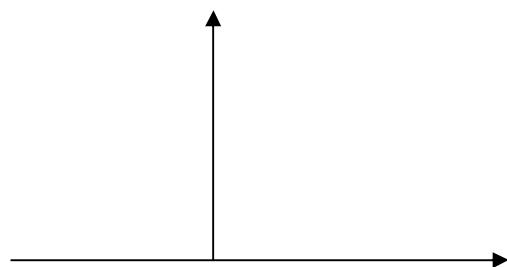
الحل:

(٣) ما مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى  $q(s) = s^2$ ، هـ( $s$ ) =  $2s$ .



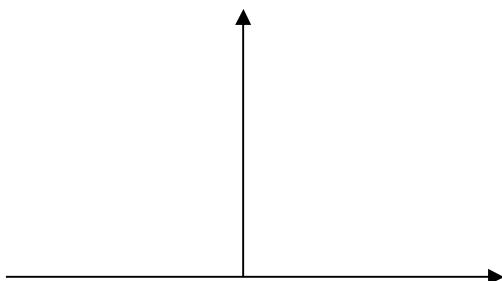
الحل:

٤) ما مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى  $q(s) = s^2$ ، و منحنى  $h(s) = 2 - s$ .



الحل:

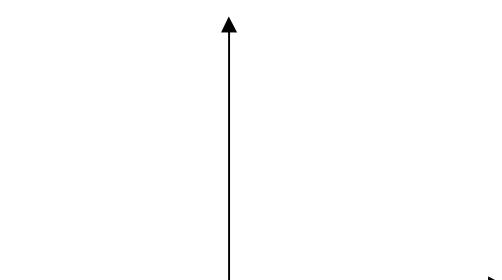
٥) ما مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى  $q(s) = s^2$ ، و منحنى  $h(s) = 2 - s$ ،



ومحور السينات.

الحل:

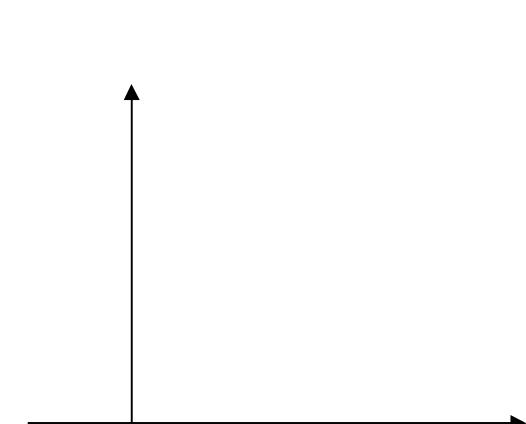
٦) ما مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى  $q(s) = s^2$ ، و منحنى  $h(s) = 2 - s$ ،



وال المستقيم  $s = 4$ .

الحل:

٧) ما مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى  $q(s) = s^2$ ، و منحنى  $h(s) = 2 - s$ ،



وال المستقيم  $s = 4$ .

الحل:

٨) ما مساحة المنطقة المحصورة بين  $q(s) = s - s^2$ ، محور السينات، والمستقيم



$$s = ص.$$

الحل:

٩) ما مساحة المنطقة الواقعة في الربع الأول، والمحصورة بين  $q(s) = s^2 - 4$ ،  $هـ(s)$



$$= s + 4, L(s) = 2 - s.$$

الحل:

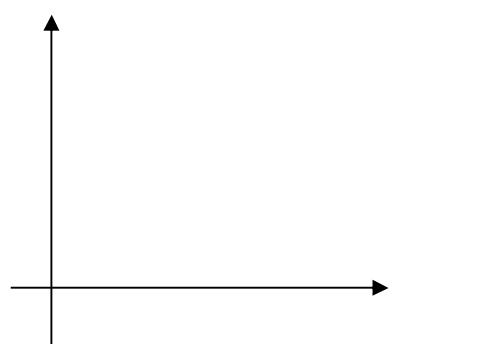
١٠) ما مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى  $q(s) = لوـs$ ، محور السينات، والمستقيم



$$ص = هـ.$$

الحل:

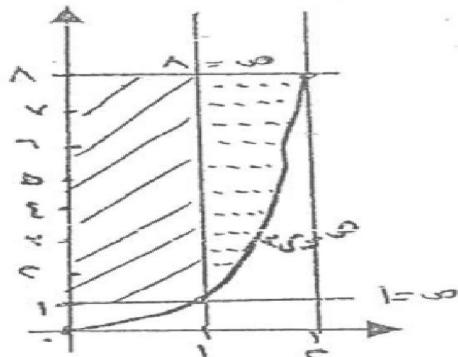
١١) ما مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى  $q(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}$ ، محور السينات، والمستقيم



$$س = هـ، س = 1.$$

الحل:

١٢) ما مساحة المنطقة المقصورة بين  $s = 1$ ,  $s = 8$ ,  $s = s^3$ .



الحل:

٣ اقترانات عمود ( $s = 0$ )

$$\begin{array}{c|c|c} \lambda = 1 & \lambda = s^3 & 1 = s^3 \\ \text{مستحيل} & s = 2 & s = 1 \\ \hline 7 = (\lambda) - (\lambda) & & \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} = 1m$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} = 2m$$



$$\left[ \frac{s^4}{4} - s\lambda \right]$$

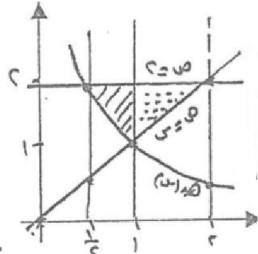
$$4 \frac{1}{4} =$$

$$4 \frac{1}{4} + 7 = 2m + 1m = m$$

$$11 \frac{1}{4} =$$

١٢) ما مساحة المنطقة المحصورة بين  $q(s) = s$ ،  $h(s) = \frac{1}{s}$ ، والمستقيم  $s = 2$ .

الحل: ٣ اقترانات



$$\begin{aligned} 2 &= \frac{1}{s} & 2 &= s & \frac{1}{s} &= s \\ 2s &= 1 & s &= 2 & 1 &= s \\ s &= \frac{1}{2} & s &= 2 & 1 &= s \\ && s &= 2 - \frac{1}{2} & s &= 1, 1 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$m = \left[ s - \left( \frac{1}{s} \right) - (2) \right]_{\frac{1}{2}}^2$$

$$= (2 - \frac{1}{2}) - (1 - \frac{1}{1})$$

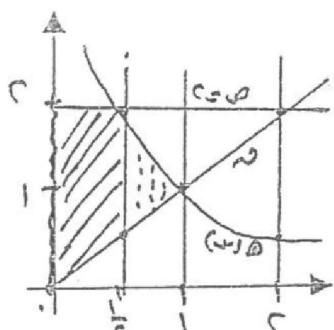
$$= 1 + \ln \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \left[ \frac{s}{2} - \left( \frac{1}{s} \right) - (2) \right]_{\frac{1}{2}}^2 = 2 - \left( \frac{1}{2} \right)$$

$$m = 1 + \ln \frac{1}{2} + 1.5 = 1.5 - \ln 2$$

٤) ما مساحة المنطقة المحصورة بين  $q(s) = s$ ،  $h(s) = \frac{1}{s}$ ، والمستقيمان  $s = 1$

$$s = 2$$



الحل:

٣ اقترانات والعمود  $s = 0$

$$\left| \begin{array}{l} 2 = \frac{1}{s} \\ \frac{1}{2} = s \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} 2 = s \\ s = 2 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} \frac{1}{s} = s \\ s^2 = 1 \end{array} \right|$$

$$\left[ \frac{1}{2} - \frac{s}{2} - s^2 = 0 \right] = 0$$

$$\frac{7}{8} = (0) - \left( \frac{1}{2} - 1 \right) =$$

$$\left[ \frac{1}{2} - \frac{s}{2} - s^2 = 0 \right] = 0$$

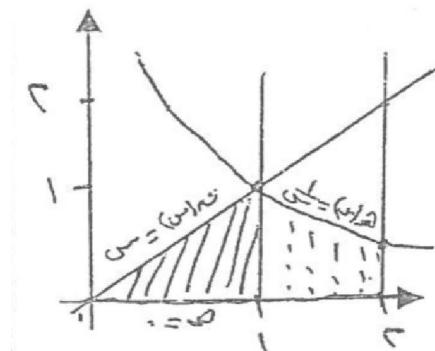
$$\left( \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) - \left( \frac{1}{2} - 1 \right) =$$

$$\frac{3}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 0 =$$

$$\frac{3}{8} - \frac{1}{8} =$$

$$0 = \frac{3}{8} - \frac{1}{8} + \frac{7}{8}$$

١٥) ما مساحة المنطقة المحصورة بين  $q(s) = s$ ،  $h(s) = \frac{1}{s}$ ، والمستقيمان  $s = 1$ ،  $s = 2$  =



$$0, s = 2.$$

الحل:

٣ اقترانات والعمود  $s = 2$

$$\begin{array}{c|c|c} \cdot = \frac{1}{s} & \cdot = s & \frac{1}{s} = s \\ 1 = \cdot & \cdot = s & 1 = s^2 \\ \times & & s = 1, 1 = s \end{array}$$

$$\frac{1}{2} = \left[ \frac{s^2}{2} - (s) \right] = 1_m$$

$$\left[ s^2 - \left( \frac{1}{s} \right) \right] = 1_m$$

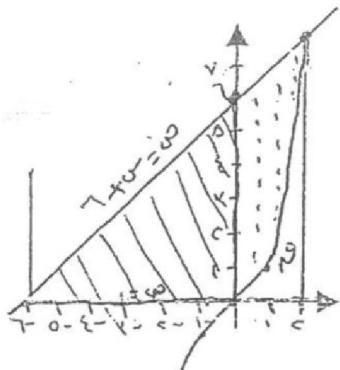
$$= \log_2 - \log_1$$

$$= \log_2$$

$$m = \frac{1}{2} + \log_2$$

١٦) ما مساحة المنطقة المحصورة بين  $q(s) = s^3$ ، والمستقيمان  $s = s + 6$ ،  $s = 0$

الحل: ٣ اقترانات



$$\begin{array}{c|c|c} \cdot = s^3 & \cdot = s^3 & s^3 = s + 6 \\ 6 = s & \cdot = s & s^3 - s = 6 - s \\ - & & \text{بالتجربة} \\ & & s = 2 \end{array}$$

$$18 = \left[ s^6 + \frac{s^2}{2} - (s + 6) \right] = 1_m$$

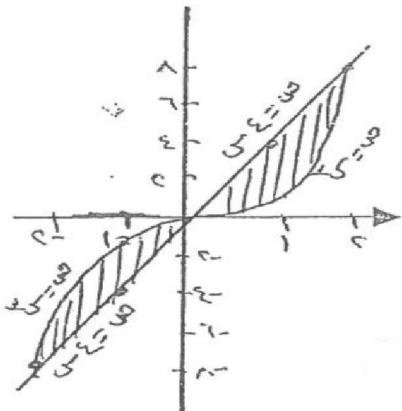
$$\left[ \frac{s^4}{4} - \frac{s^2}{2} + s^3 \right]_{-2}^2 = 28$$

$$10 = (0) - (4 - 12 + 2) =$$

$$28 = 10 + 18 = m$$

١٧) ما مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات  $s^3 = 4s$  و  $s^3 = 4s$ .

الحل:



اقترانين نرتبعما

$$s^3 = 4s, s^3 = 4s$$

$$s^3 = 4s$$

$$s^3 - 4s = 0$$

$$s(s^2 - 4) = 0 \iff s = 0, 2, -2$$

$$\left[ \frac{s^4}{4} - \frac{s^2}{2} + s^3 \right]_{-2}^2 = 10$$

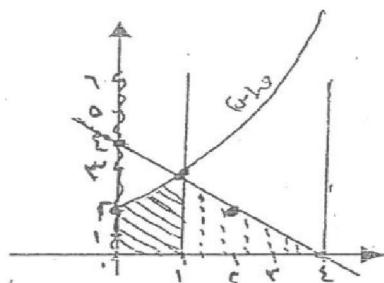
$$\lambda = (\lambda - \xi) - \cdot =$$

$$\xi = \left[ \frac{s^4}{4} - \frac{s^2}{2} + s^3 \right]_{-2}^2 = 2m$$

$$\lambda = \xi + \epsilon = m$$

١٨) ما مساحة المنطقة المقصورة بين  $Q(s) = s^2 + 2s$  ، ص = ٤ ، ومحور السينات

والصادات.



الحل:

٣ اقترانات والعمود ص = ٠

$$Q(s) = s^2 + 2s , \text{ ص} = 4 - s$$

$$\text{ص} = 0 \text{ والعمود } (s = 0)$$

$$\begin{array}{c|c|c} & s^2 + 2s = 0 & \\ \begin{array}{c} 0 = 4 - s \\ s = 4 \\ 0 = 2 - s \\ s = 2 \\ 0 = (s+2)(s-2) \end{array} & \begin{array}{c} 0 = 2 - s \\ 2 = s \\ 2 = 2 - s \\ s = 2 - 2 \\ s = 0 \end{array} & \times \\ \hline & s^2 + 2s = 0 & \end{array}$$

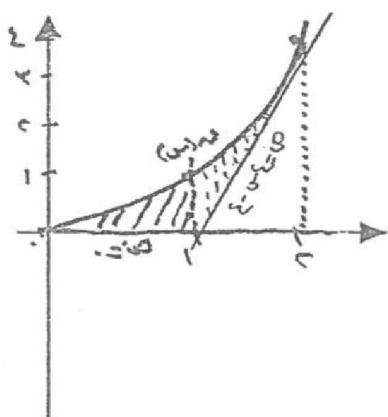
$$M = \left[ \frac{1}{3}s^3 + \frac{2}{3}s^2 \right]_0^4 = 16$$

$$M = \left[ \frac{1}{2}s^2 - 4s \right]_0^4 = 2$$

$$M = \frac{9}{2} + \frac{7}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = M$$

١٩) ما مساحة المنطقة المحصورة بين  $q(s) = s^2$ ، محور السينات، والمماس لمنحنى

$q(s)$  عند النقطة  $(2, 4)$ .



الحل: يجب إيجاد معادلة المماس

$$m = 2s \leftarrow m = 2 \times 2 = 4$$

$$\text{معادلة المماس} \leftarrow s - 4 = 4(s - 2)$$

$$s = 4s - 4$$

لدينا ٣ اقترانات هي

$$q(s) = s^2, s = 4s - 4, s = 4s - 4.$$

$$\begin{array}{c|c|c} s^2 = 4s - 4 & s^2 = s & s^2 = 4s - 4 \\ s = 1 & s = 0 & s = 4 + 4 \\ & & s = 2 \end{array}$$

$$\frac{1}{3} = \left[ \frac{s^3}{3} - (4s - 4)s \right]_1^2 = m$$

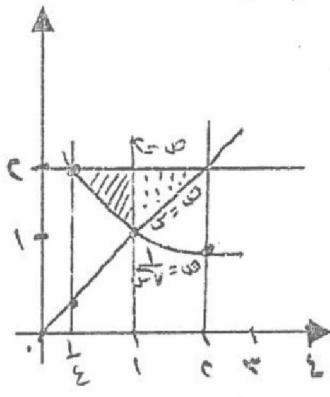
$$\left. \frac{1}{3} = \left[ \frac{s^3}{3} - (4s - 4)s \right] \right|_1^2 = m$$

$$\frac{1}{3} = \left[ \frac{s^3}{3} - 4s^2 + 4s \right]_1^2 =$$

$$\frac{5}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = m$$

٢٠) ما مساحة المنطقة المحصورة بين  $y = \frac{1}{x}$ ،  $x = 2$ ،  $x = 4$ ، والمستقيمان  $y = 0$ ،  $y = 1$ .

$$y = 2.$$



الحل:

$$\begin{array}{l|l|l} y = x & y = \frac{1}{x} & y = \frac{1}{x} \\ y = x & & \\ \frac{1}{4} = \frac{1}{x} & & y = \frac{1}{x} \\ \frac{1}{4} = x & & \\ x = \frac{1}{4} & & \\ & & y = 1 \\ & & x = 2 \\ & & x = 4 \end{array}$$

$$\left[ \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x} dx - \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \right] - \left[ \int_{\frac{1}{4}}^1 x dx - \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \right] = \frac{1}{2}$$

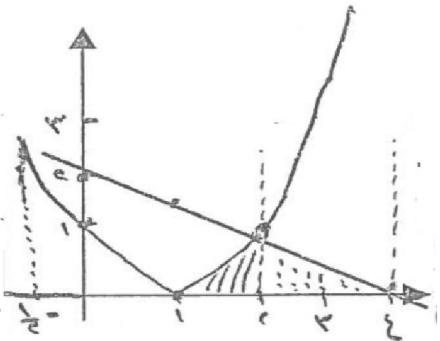
$$\left[ \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right] - \left[ \int_{\frac{1}{4}}^1 x dx - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right] =$$

$$\frac{1}{2} = \left( \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) - \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) =$$

$$\frac{1}{2} = \left[ \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x} dx - \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \right] = \frac{1}{2}$$

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

(٢١) ما مساحة المنطقة المحصورة بين  $s = (s - 1)^2$ ،  $s = -\frac{1}{2}s$ ، ومحور السينات.



الحل:

٣ اقترانات

$$(s - 1)^2 = \frac{1}{2}s$$

$$s^2 - 2s + 1 = \frac{1}{2}s$$

$$s^2 - \frac{3}{2}s + 1 = 0$$

$$2s^2 - 3s - 2 = 0$$

$$(s-2)(s+1)=0$$

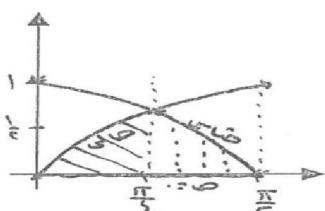
$$s = -1, \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \left[ \int_0^{-1} (1-s)^2 ds - \int_0^{\frac{1}{2}} (1-s)^2 ds \right] = 1$$

$$1 = \left[ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left( \frac{s^2}{2} - \frac{1}{2}s \right) ds - \left( s - \frac{1}{2} \right) \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right] = 2$$

$$\frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3} = 2$$

٢٢) ما مساحة المنطقة الممحصورة بين  $q(s) = \text{جتا } s$ ,  $h(s) = \text{جا } s$ , ومحور السينات،  $s \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .



الحل:

$$q(s) = \text{جاس}, h(s) = \text{جتاس}, s =$$

$$\begin{array}{c|c|c} \text{جتاس} & \text{جاس} & \text{جاس} = \text{جتاس} \\ \hline \frac{\pi}{2} = s & s = & s = \frac{\pi}{4} \\ \hline \left[ \begin{array}{l} \frac{\pi}{4} \\ \frac{\pi}{2} \end{array} \right] \text{ (جاس)} - \left[ \begin{array}{l} 0 \\ \frac{\pi}{4} \end{array} \right] \text{ (جتاس)} = \text{مسا} & \end{array}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{s}} - 1 = (1) - \frac{1}{2\sqrt{s}} =$$

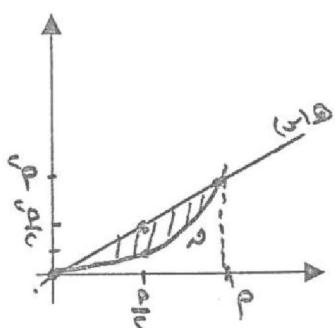
$$\left[ \begin{array}{l} \frac{\pi}{4} \\ \frac{\pi}{2} \end{array} \right] \text{ (جاس)} - \left[ \begin{array}{l} 0 \\ \frac{\pi}{4} \end{array} \right] \text{ (جتاس)} = \text{مسا} = 2\pi$$

$$\frac{1}{2\sqrt{s}} - 1 =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{s}} - 1 = \frac{1}{2\sqrt{1}} - 1 + \frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi}{4}}} - 1 = \pi$$

(٢٣) إذا كانت المساحة المقصورة بين المنحنيين  $q(s) = s^2$ ،  $h(s) = \alpha s$  هي  $\frac{4}{3}$

فما قيمة الثابت  $\alpha$ ؟ ( $\alpha < 0$ ).



الحل:

$$s^2 = \alpha s$$

$$s^2 - \alpha s = 0$$

$$s(s - \alpha) = 0$$

$$s = 0, \alpha$$

بما أن المساحة =  $\frac{4}{3}$

$$\int_0^1 (as) - (s^2) ds = (m) \times$$

$$\left[ \frac{s^3}{3} - \frac{s^2}{2} \right]$$

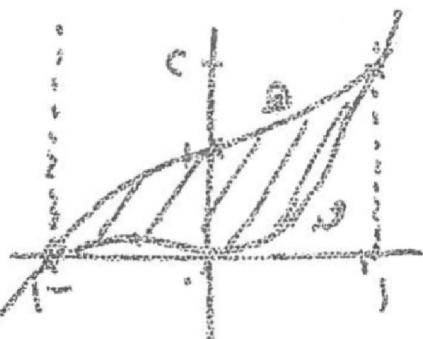
$$\frac{4}{3} = \frac{3}{6} - \frac{3}{2} = \frac{3}{3} - \frac{3}{2} =$$

$$\lambda = \frac{3}{6} \leftarrow \frac{3}{4} \leftarrow \frac{3}{13} \leftarrow \frac{4}{3} = \frac{3}{6}$$

$$2 = 1$$

٤) ما مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين  $q(s) = s^3 + s^2$ ،  $h(s) = s^3 + 1$ .

الحل:



$$s^3 + s^2 = s^3 + 1$$

$$s^2 = 1$$

$$s = 1, -1$$

$$M = \int_{-1}^1 (s^3 + s^2) - (s^3 + 1) ds$$

$$= \int_{-1}^1 (-s^2 + 1) ds$$

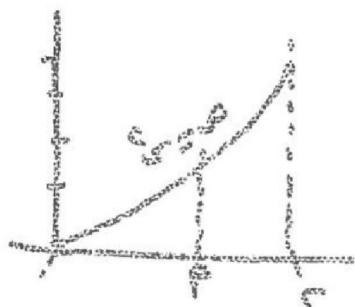
$$\left( \frac{1}{3}s^3 + s^2 \right) - \left( \frac{1}{3}s^3 - s^2 \right) = \left[ \frac{1}{3}s^3 - \frac{1}{3}s^3 \right]$$

$$= \frac{4}{3}$$

٥) جد قيمة الثابت  $A$  بحيث أن المستقيم  $s = A$  يقسم مساحة المنطقة المحصورة بين  $s$

$\sqrt{A}$ ، والمستقيم  $s = 2$ ، ومحور السينات إلى قسمين متساوين.

الحل:



$$s = \sqrt{A} - s = s^2, s = 0, s = 2$$

$$س^2 = ٠ \leftarrow س = ٠$$

نحسب المساحة الأصلية

$$م = \int_{-1}^1 (س^2 - ٠) دس$$

$$\frac{٨}{٣} = \int_{-1}^1 \frac{س^3}{٣} دس =$$

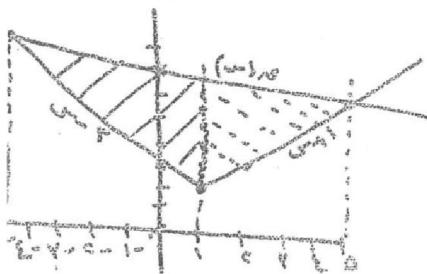
الآن المساحة في  $[٠, ١]$  تساوي  $\frac{٨}{٣}$

$$\frac{٤}{٣} = \int_{-1}^1 \frac{س^3}{٣} دس = \int_{-1}^1 (س^2 - ٠) دس$$

$$٤ = ٢$$

$$\sqrt{٤} = ٢$$

٢٦) ما مساحة المنطقة المحصورة بين  $ق(س) = -\frac{س}{٥} + ٧$  ،  $هـ(س) = س + ٢$  .



الحل:

$$ق(س) = \begin{cases} س - ٢، & س \leq ١ \\ س + ٢، & س \geq ١ \end{cases}$$

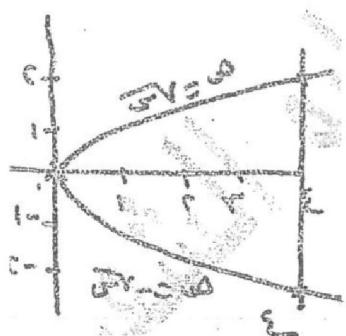
$$\begin{aligned} & \leq s+1 \\ & \geq s-3 \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} 5 = s \leftarrow s+1 = 7 + \frac{s}{5} - \\ 5 = s \leftarrow s-3 = 7 + \frac{s}{5} - \end{array} \right.$$

$$... = (s-3) - (7 + s \frac{1}{5} -) \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 0 \end{array} \right. = 1m$$

$$... = (s+1) - \left( 7 + s \frac{1}{5} - \right) \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 1 \end{array} \right. = 2m$$

$$m = 1m + 2m$$

٢٧) جد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحني  $s = \sin^2 x$ ، والمستقيم  $s = 4$ .



الحل:

$s = \sin^2 x$  ... قطع مكافيء يرسم فوراً بالتعويض

$$m = \int_{0}^{2\pi} (\sqrt{s}) - (\sqrt{4}) ds$$

$$= \int_{0}^{2\pi} \sqrt{s} ds$$

$$= \int_{0}^{2\pi} s^{1/2} ds$$

$$\frac{32}{3} = \int_{0}^{2\pi} \sqrt{s} ds = \left[ \frac{2}{3} s^{3/2} \right]_{0}^{2\pi} = \left[ \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} s^2 \right]_{0}^{2\pi} =$$

طريقة أخرى (خاصة جداً) للإطلاع فقط

يمكن أخذ الأعمدة على محور الصادات (ونعكس المعادلة  $s = sc^2$ )

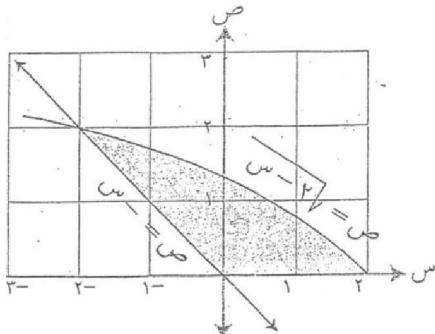
$$sc = 2$$

$$m = \left[ -\frac{1}{2} (4 - sc^2) - (4) \right] =$$

$$\frac{32}{3} = \left( \frac{8}{3} + sc - \right) - \left( \frac{8}{3} - sc \right) = \left[ -\frac{sc}{3} - \frac{8}{3} \right] =$$

تمارين هامة على المساحة (منتقاة من الكتاب)

١) جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور



الحل:

عندما نعطي الرسم ومعادلات المنحنيات نطبق فوراً حسب قوانين المساحة ولا ننسى اقامة الأعمدة عند نقط الأعمدة (نقط التقاطع)

$$m = \left[ -\frac{1}{2} (s - 2) - (s) - \sqrt{s-2} \right] =$$

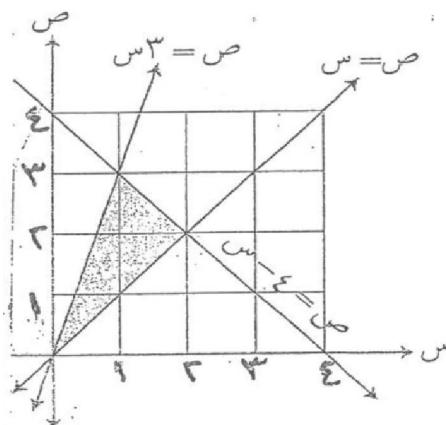
$$\frac{\sqrt{s-2}}{3} - \frac{1}{3} = \left[ -\frac{s}{2} + \frac{\frac{3}{2}(s-2)}{1-\times\frac{3}{2}} \right] =$$



$$\frac{8\sqrt{2}}{3} = \left[ \frac{\frac{3}{2}(s-2)}{1-\times \frac{3}{2}} = s - (\sqrt{s-2}) \right] = 2m$$

$$\frac{10}{3} = m$$

(٢) جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور



الحل:

$$m = (s^3) - (s \cdot ds)$$

$$1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = \left[ \frac{s^2}{2} - \frac{s^3}{2} \right] =$$

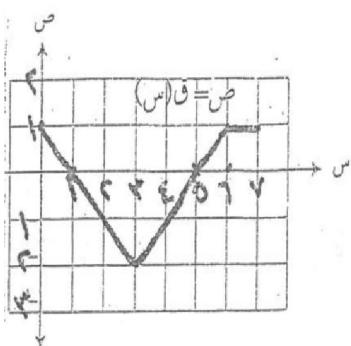
$$m = (4 - 4s)ds = (s - 4s)ds = 2m$$

$$1 = (3) - (4) = [s^2 - 4s] =$$

$$2 = 1 + 1 = m$$

٣) إعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران  $q(s)$  لإيجاد:

$$A = \int_{s=1}^{s=7} q(s) ds$$



الحل:

نحسب مساحة كل منطقة بالاعتماد على قوانين المساحة (لم يطلب في السؤال حساب مساحات)

$$M = 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ (مساحة مثلث قائم)}$$

$$2M = 2 \times 4 \times \frac{1}{2} = 4 \text{ (مساحة مثلث متساوي ساقين)}$$

$$3M = 1 \times (2+1) \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \text{ (مساحة شبه منحرف)}$$

$$A = \int_{s=1}^{s=7} q(s) ds = \int_{s=1}^{s=2} q(s) ds + \int_{s=2}^{s=3} q(s) ds + \int_{s=3}^{s=4} q(s) ds + \int_{s=4}^{s=5} q(s) ds + \int_{s=5}^{s=6} q(s) ds + \int_{s=6}^{s=7} q(s) ds$$

$$2 - = \frac{3}{2} + (4 - ) + \frac{1}{2} =$$

$$B = \int_{s=1}^{s=7} |q(s)| ds = \int_{s=1}^{s=2} |q(s)| ds + \int_{s=2}^{s=3} |q(s)| ds + \int_{s=3}^{s=4} |q(s)| ds + \int_{s=4}^{s=5} |q(s)| ds + \int_{s=5}^{s=6} |q(s)| ds + \int_{s=6}^{s=7} |q(s)| ds$$

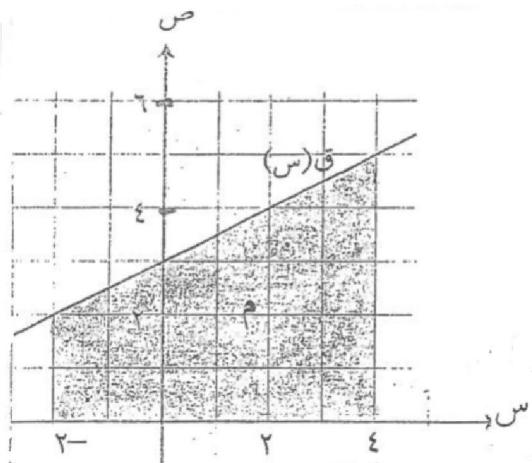
$$6 = \frac{3}{2} + |4 - | + \frac{1}{2} =$$

$$2 = |2 - | = \left| \int_{-2}^2 f(s) ds \right|$$

٤) جد (باستخدام التكامل) مساحة المنطقة M المظللة في

الشكل المجاور

الحل:



يلاحظ في السؤال أنه حدد استخدام التكامل رغم أن  
بالإمكان الاعتماد على قانون مساحة شبه المنحرف

يتربى علينا تحديد (المعادلات)

ق(س) خط مستقيم يمر بالنقطتين (-٢، ٣)، (٤، ٥)

$$\text{مائله} = \frac{3}{6} = \frac{2-5}{2-4}$$

$$\text{معادلته: } s - 5 = \frac{1}{2}(s - 4) \leftarrow s = \frac{1}{2}s + 3$$

$$M = \int_{-2}^4 \left( \frac{1}{2}s + 3 \right) ds$$

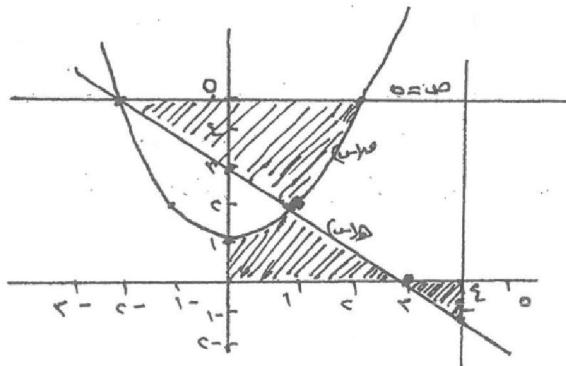
$$(6-1)-(12+4) = \left[ \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{2}s \right]_{-2}^4 =$$

$$21 =$$

## أسئلة إضافية في حساب المساحة

سؤال: إذا علمت أن  $Q(s) = s^3 - s$  أوجد المساحة المظللة

الحل:



نتعامل مع كل جزء لوحده

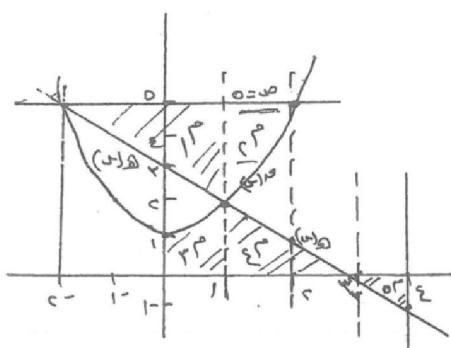
الجزء الأول بين

$$Q(s) = s^3 - s$$

والمستقيم  $s = 5$

$s = 5 - s$ $s = 2$ $s = 2 - s$	$s = 1 + s^2$ $s = 4$ $s = 2 - s$	$s^3 - s = 1 + s^2$ $s = 2 - s$ $(s+1)(s-2) = 0$ $s = 2 - 1$
---------------------------------------	---	---

الجزء الثاني بين



$$Q(s) = s^3 - s, \text{ ص} = 0, \text{ س} = 0$$

$s = 0 - s$ $s = 3$	$s = 1 + s^2$ $s = 1 - s$ $\times$	$s^3 - s = 1 + s^2$ $s = 2 - s$ $(s+1)(s-2) = 0$ $s = 2 - 1$
------------------------	--	---

### الجزء الثالث بين

$$هـ(س) = ٣ - س، ص = ٠ \text{ والمستقيم } س = ٤$$

$$٣ - س = ٠ \leftarrow س =$$

ثم نبدأ باعادة الرسم بدءاً بالاعمدة

$$\frac{٩}{٢} = س - ٣ - (٥) \left\{ \begin{array}{l} ١ \\ ٢ \\ ٣ \end{array} \right. = ١٣$$

$$\frac{٥}{٣} = س - (١ + ٢) - (٥) \left\{ \begin{array}{l} ١ \\ ٢ \\ ٣ \end{array} \right. = ٢$$

$$\frac{٤}{٢} = س - (١ + ٢) - (٠) \left\{ \begin{array}{l} ١ \\ ٢ \\ ٣ \end{array} \right. = ٣$$

$$٢ = س - (٠) - (٣ - س) \left\{ \begin{array}{l} ١ \\ ٢ \\ ٣ \end{array} \right. = ٤$$

$$\frac{١}{٢} = س - (٣ - س) - (٠) \left\{ \begin{array}{l} ١ \\ ٢ \\ ٣ \end{array} \right. = ٥$$

$$المساحة الكلية = \frac{١}{٢} + ٢ + \frac{٤}{٣} + \frac{٥}{٣} + \frac{٩}{٢}$$

سؤال هام: إذا علمت أن  $q(s) = 17 - s^2$

جد المساحة الواقعية بين  $q(s) = 17 - s^2$

وال المستقيمان  $h(s)$ ,  $l(s)$

(المنطقة المظللة)

الحل:

يجب كتابة معادلة كلا المستقيمين  $l(s)$ ,  $h(s)$

وبالطبع هي على صورة  $s - c_1 = m(s - s_1)$

### تمارين متنوعة

السؤال الأول: احسب التكاملات التالية

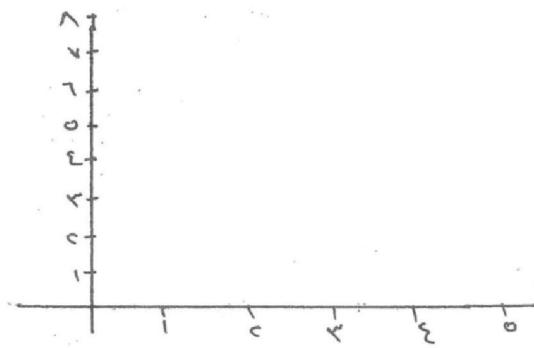
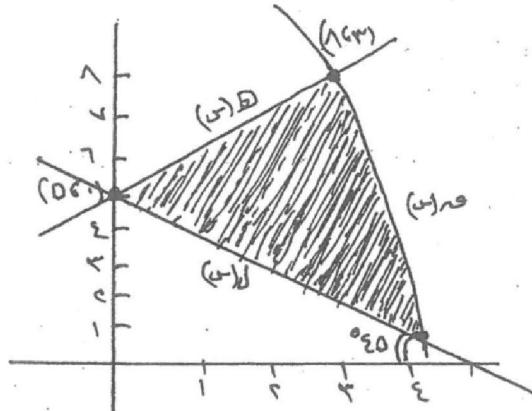
$$(1) \int (s+1)^3 - (s^2 + s^3)^{-1} ds$$

$$(2) \int (s^2 + 6s + 3) \sin(s) ds$$

$$(3) \int \frac{h^{s^2}}{(1+h^s)^2} ds$$

$$(4) \int \text{قياس لوه (طاس)} ds$$

$$(5) \int \frac{s^3 \sin(s)}{s^2 + \sin(s)} ds$$



$$\left. \begin{array}{l} \text{جاس} \\ \text{رس} \end{array} \right\} (6)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{رس} \\ \text{س}(\text{لوس})^2 - \text{لوس} \end{array} \right\} (7)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\text{رس}}{\text{س}-\text{جتاس}} \\ \frac{\text{رس}}{\text{س}-\text{جتاس}} \end{array} \right\} \frac{\Pi}{2} (8)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{رس}^2(1+\frac{1}{n}) \\ \text{رس}^3 \end{array} \right\} (9)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{1+n} \cdot \frac{(s-1)^2}{s} \end{array} \right\} \frac{1}{2} \text{ حيث } n \text{ عدد زوجي} (10)$$

السؤال الثاني:

$$(1) \left. \begin{array}{l} \text{رس} = 4 \\ \text{رس} = 1 \text{ وكان } \text{رس} = 1 \text{ و كان } \text{رس} = 4 \end{array} \right\} \text{ م}(s) \text{ البدائي لـ } \text{ق}(s), \text{ م}(-1) = 4, \text{ م}(3) = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{رس} \\ \text{رس}^3 \end{array} \right\} \text{ فما قيمة}$$

$$(2) \text{ إذا كان } \left. \begin{array}{l} \text{رس} = s^2 \\ \text{رس} = s \text{ جد } \text{ق}(s) \end{array} \right\}$$

$$(3) \text{ إذا كانت المشتقه النونية } \text{رس}^2(s) = \frac{1}{1+s} \text{ جد } \text{ق}(s)$$

$$(4) \left. \begin{array}{l} \text{رس} + 1 \\ \text{رس}^2 \end{array} \right\} \text{ إذا كانت } \text{رس} = 2 \text{ فما قيمة } n \in \mathbb{Z} \text{ صحيح موجب}$$

(5) يتحرك جسم بطيئاً = ٤، إذا كانت سرعة الجسم بعد ٢ ثانية تساوي

هـ / مث كم السرعة دـ ثانية.

السؤال الثالث:

(١) ما مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات  $q(s) = s^2 - 1$  ،  $h(s) = s - 3$

ومحوري السينات والصادات

(٢) ما مساحة المنطقة المحصورة بين محور الصادات ومنحني  $q(s) = \frac{4}{s}$  والمستقيمان

$$s = c, s = 4$$

(٣) ما مساحة المنطقة الواقعة بين  $q(s) = \text{جتا } s$  في الفترة  $\left[ \frac{\Pi}{2}, 4 \right]$  ومحور

السينات والمستقيم  $s = c + 1$

(٤) ما مساحة المنطقة الواقعة بين  $c = h^2$  والمستقيمان  $s = 0$  ،  $s = 4$

ومحوري الاحداثيات.

وآل إضافي: إذا كانت ميل المماس لمنحنى العلاقة عند النقطة  $(s, c)$  معطى بالمقدار

$$\text{فما قاعدة المنحنى} \left( \frac{h^{s-2} \cdot \text{جاه}^{s-2}}{c} \right)$$

الحل:

$$\frac{c}{s} = \frac{h^{s-2} \times h^{-s} \times \text{جاه}^{-s}}{c}$$

$$\frac{c}{s} = \frac{h^{-s} \cdot \text{جاه}^{-s} \cdot \text{رس}}{h}$$

$$c = h^{-s} \cdot \text{جاه}^{-s} \cdot \text{رس}$$

أجزاء  $\downarrow$  تعويض

$$= \underline{h} s^2$$

ق = ص ← دق = دص

$$\frac{\text{دعا}}{\text{رس}} = \underline{\underline{ه}} \times \underline{\underline{\text{رس}}}$$

دھ = ھ ← دھ = ھ ص دھ ص

$$د = \frac{د}{س^2}$$

ص ه ص د ص

$$\text{ص} \_ \text{ه} \_ \text{ص} - \text{ه} \_ \text{ص} = \left\{ \begin{array}{l} \text{ع} \_ \text{ج} \_ \text{اء} \\ \text{د} \_ \text{ع} \end{array} \right.$$

**صھے ص-ھے ص جھائے + ج**

$$\text{ص} - \text{هـ} = \frac{1}{3} \text{جـتـاهـ} + \text{جـ}$$

سوال إضافي: جناس+جاس. دس ه س+جاس

**الحل:**

$$\frac{\text{جهاز} + \text{جهاز}}{\text{جهاز} + \text{جهاز}} = \frac{\text{جهاز} + \text{جهاز}}{1 + \frac{\text{جهاز}}{\text{جهاز}}} \cdot \text{دس} \dots \text{نرتب المقدار}$$

$$= \left\{ \frac{هـ جناس + هـ جاس}{1 + هـ جاس} . دـس ... نـتـبـدـلـ المـقـامـ \right.$$

$$\left. \begin{aligned} & \left. \begin{aligned} & \text{ص} = 1 + \text{هـ جاس} \\ & \frac{\text{دـ ص}}{\text{دـ س}} = \text{هـ جـتاـس} + \text{جـاسـهـ} \end{aligned} \right\} \\ & \frac{1}{\text{ص}} = \frac{\text{لـوـهـ ص} + \text{جـ}}{\text{هـ جـتاـس} + \text{جـاسـهـ}} \\ & \text{ص} = \text{لـوـهـ} \mid 1 + \text{هـ جـاسـ} + \text{جـ} \end{aligned} \right. \right.$$

$$\text{سؤال: } \frac{\frac{\Pi}{\lambda}}{\frac{\Pi}{\lambda} - 2} = \frac{\frac{\Pi}{\lambda}}{(1 - جتا^2 س) دس} \dots \text{ مركب مرفوض ... نحله}$$

$$\text{الحل: } دس = \frac{\frac{\Pi}{\lambda}}{(جتا^2 س + جتا^2 س) - (جتا^2 س - جتا^2 س)} = \frac{\frac{\Pi}{\lambda}}{2 جاس دس}$$

$$\begin{aligned} & \text{الحل: } دس = \frac{\frac{\Pi}{\lambda}}{\frac{\Pi}{\lambda} + جاس دس} = \\ & = \frac{\frac{\Pi}{\lambda}}{- جتا^2 س + (جتا^2 س - جتا^2 س)} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{\Pi}{\lambda}}{- جتا^2 س}$$

$$\text{سؤال: } دس = \frac{\frac{\Pi}{\lambda}}{(س^9 + س^6 + س^3) دس} \leftarrow دس = دس$$

$$\text{الحل: } دس = دس = دس = دس$$

<p><b>للاستبدال العكسي</b></p> $س^0 = ص - 2$ $س^1 = (ص - 2)^0$ $= ص^2 - 4س + 4$
---

$$ص = س^0$$

$$\frac{دص}{دس} = 5س،$$

$$\frac{دص}{5س} = دس$$

$$س^1 بـ \frac{دص}{4} = \frac{1}{5} دس \cdot ص^0 دص$$

$$\left( \frac{1}{5} - 4\cos^2 \theta \right) \left[ \frac{1}{5} \right]$$

$$\left( \frac{1}{5} - 4\cos^2 \theta + 4\cos^4 \theta \right) \left[ \frac{1}{5} \right] =$$

$$+ \left( \frac{\cos^6 \theta}{6} + \frac{\cos^7 \theta}{7} - \frac{\cos^8 \theta}{8} \right) \left[ \frac{1}{5} \right] =$$

$$+ \left( 2 + \cos^2 \theta \right) \left[ \frac{2}{15} \right] + \left( 2 + \cos^2 \theta \right) \left[ \frac{4}{35} \right] - \left( 2 + \cos^2 \theta \right) \left[ \frac{1}{4} \right] =$$

$$\text{السؤال الأول: } 1 \left[ \frac{1}{2} \right] (\cos^2 \theta + 2\sin^2 \theta + \sin^4 \theta) \cos^2 \theta =$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\cos^2 \theta}{2 + \sin^2 \theta} \\ \left[ \frac{1}{2} \right] (\cos^2 \theta + 1) \cos^2 \theta \\ \left[ \frac{1}{2} \right] \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos = \sin^2 \theta + \sin^4 \theta \\ \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{\cos^2 \theta}{2 + \sin^2 \theta} \\ \frac{\cos^2 \theta}{2 + \sin^2 \theta} = \cos \end{array} \right.$$

نستبدل عكسياً  $\left[ \frac{1}{2} \right] = \cos^2 \theta + 2\sin^2 \theta + \sin^4 \theta \cos^2 \theta$

$$\sin^2 \theta + 2\sin^2 \theta = \cos^2 \theta -$$

$$\left[ \frac{1}{2} \right] (\cos^2 \theta + 1) \cos^2 \theta =$$

$$+ \left( \frac{\cos^6 \theta}{6} - \frac{\cos^7 \theta}{7} \right) \left[ \frac{1}{2} \right] = \left( \cos^6 \theta - \cos^7 \theta \right) \left[ \frac{1}{2} \right]$$

$$+ \left( 7 + \sin^2 \theta + \sin^4 \theta \right) \left[ \frac{1}{2} \right] - \left( 7 + \sin^2 \theta + \sin^4 \theta \right) \left[ \frac{1}{4} \right] =$$

$$(2) \quad \left. \begin{aligned} & \text{جاتا}(s-3)(s-6) \Pi^4 \\ & \text{جاتا}(s-3)(s-2) \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{\text{جاتا}(s-3)(s-2)}{(s-3)(\Pi^4 - 1)} = \left\{ \begin{array}{l} s = \text{دص} \\ 1 - \times^3(s-3)\Pi^4 = \frac{\text{دص}}{\text{دص}} \\ s = \frac{\text{دص}}{(s-3)(\Pi^4 - 1)} \end{array} \right.$$

$$\text{جاتا}(s-3)(s-2) \Pi^2 = \text{جاتا}(s-3)(s-2) \times \frac{2}{\Pi} =$$

$$(3) \quad \left. \begin{aligned} & \text{دص} = \frac{s^2 h}{(1+s^2 h)^2} \\ & \text{دص} = \frac{s^2 h}{1 + 2s^2 h + s^4 h^2} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} & \text{دص} = \frac{s^2 h}{1 + 2s^2 h + s^4 h^2} \text{ للسهولة} \\ & \text{دص} = \frac{s^2 h}{1 + 2s^2 h + s^4 h^2} \\ & \text{دص} = \frac{s^2 h}{1 + 2s^2 h + s^4 h^2} \end{aligned} \right\}$$

$$q = s \leftarrow d \leftarrow d \text{ص}$$

$$d_h = \text{جاتا}(s+1) \text{دص} \leftarrow h = \text{جا}(s+1) \text{دص}$$

$$\left. \begin{aligned} & \text{جا}(s+1) - \text{جا}(s+1) \text{دص} \\ & \text{ص جا}(s+1) \end{aligned} \right\}$$

$$= \text{ص جا}(s+1) + \text{جاتا}(s+1) \rightarrow$$

$$= \underline{h}^s \underline{j} + (\underline{h}^s + \underline{j}) + \underline{j} \underline{t}$$

٤) [قا²س لوه (ظاس). دس]

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{قا²س ص} \frac{\text{دص}}{\text{قا²س}} \times \text{ظاس} \\ = \text{قا²س ظاس ص دص} \\ = (\text{ظا³س} + 1) \text{ظاس. ص دص} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ص} = \text{لوه (ظاس)} \\ \frac{\text{دص}}{\text{قا²س}} = \frac{\text{قا²س}}{\text{ظاس}} \\ \frac{\text{دص}}{\text{قا²س}} \times \text{ظاس} = \text{دص} \end{array} \right.$$

$$= (\text{ظا³س} + \text{ظاس}) \text{ص دص} \dots ??$$

$$\text{ولكن ص} = \text{لوه ظاس} \leftarrow \text{ظاس} = \underline{h}^s$$

$$\left. \left( \underline{h}^s + \underline{h}^s \right) \text{ص دص} \dots \text{أجزاء} \right) \leftarrow$$

$$\text{ق} = \text{ص} \leftarrow \text{دق} = \text{دص}$$

$$\underline{h}^s + \frac{\underline{h}^s}{3} = \underline{h} \left( \text{دص} - \underline{h}^s + \underline{h}^s \right) = \text{د} \underline{h}$$

$$\left. \left( \underline{h}^s + \frac{\underline{h}^s}{3} \right) \right] - \left( \underline{h}^s + \frac{\underline{h}^s}{3} \right) \leftarrow \text{ص}$$

$$= \frac{1}{3} \underline{h}^s - \frac{\underline{h}^s}{3} - \frac{1}{3} \underline{h}^s + \underline{h}^s = \frac{1}{3} \underline{h}^s$$

$$= \frac{1}{3} \underline{h}^s - \underline{h}^s - \underline{h}^s + \underline{h}^s - \underline{h}^s + \underline{h}^s$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{جتا}^3 \text{س} \\ \text{د} \cdot \text{س} \\ \text{جاس} - \text{جا}^2 \text{س} \end{array} \right\} = ۵$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\text{جتا}^3 \text{س}}{\text{ص} - \text{ص}^2 + \frac{1}{3}} \\ \frac{\text{جتا}^2 \text{س}}{\text{ص} - \text{ص}^2 + \frac{1}{3}} \end{array} \right\} = \begin{cases} \text{ص} = \text{جا س} \\ \frac{\text{د} \cdot \text{س}}{\text{ص}} = \text{جتا س} \\ \frac{\text{د} \cdot \text{س}}{\text{جناس}} = \text{د س} \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1 - \text{ص}}{\text{ص} - \text{ص}^2 + \frac{1}{3}} \\ \frac{1 - \text{جا س}}{\text{ص} - \text{ص}^2 + \frac{1}{3}} \end{array} \right\} = \frac{1 - \text{جا س}}{\text{ص} - \text{ص}^2 + \frac{1}{3}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{(1 - \text{ص}^2) - \text{د} \cdot \text{س}}{(\text{ص}^2 - \text{ص}^2) - \text{د} \cdot \text{س}} \end{array} \right\} = \text{لغایات الترتیب}$$

قسمة

$$\frac{1}{\frac{\text{ص}^2 - \text{ص}^2}{\text{ص}^2 - \text{ص}^2 + \frac{1}{3}}} = \frac{1}{\frac{\text{ص}^2 - \text{ص}^2 + \frac{1}{3}}{\text{ص}^2 + \text{ص}^2}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{د} \cdot \text{س} \\ \frac{\text{ص}^2 + \text{ص}^2}{\text{ص}^2 - \text{ص}^2} + 1 \end{array} \right\} + \leftarrow$$

$$\frac{\text{ب}}{\text{ص} + 1} + \frac{1}{\text{ص} - 3} = \frac{\text{ص}^2 + 2}{\text{ص}^2 - \text{ص}^2 + 1}$$

$$2\text{ص} + 2 = \text{أ}(\text{ص} + 1) + \text{ب}(\text{ص} - 3)$$

$$\left. \begin{array}{l} 2 = 1 \leftarrow 14 = 8 \leftarrow 3 = \text{ص} \\ \cdot = 0 \leftarrow 1 - 4\text{ب} = \text{ب} \leftarrow \text{ص} \end{array} \right\}$$

$$\left( \frac{2}{3} - \frac{1}{s} \right) D_s \leftarrow$$

$$= s + \frac{1}{L_w} |s^3 - \frac{1}{s}|$$

$$= G(s) + \frac{1}{L_w} |G(s) - \frac{1}{s}|$$

$$= G(s) + \frac{1}{L_w} (G(s) - \frac{1}{s})$$

$$(6) \quad \frac{1}{1+G(s)} = \frac{1-G(s)}{D_s} \cdot \frac{G(s)(1-G(s))}{1-G(s)^2}$$

$$= \frac{G(s)-G(s)^2}{G(s)^2} \cdot \frac{G(s)}{D_s}$$

$$= Q(s) - \left[ T(s) - \frac{Q(s)T(s)}{D_s} \right]$$

$$= Q(s) - (Q(s) - 1) D_s = Q(s) - T(s) + \frac{Q(s)T(s)}{D_s}$$

$$(7) \quad \frac{D_s}{(L_w s) - L_w s}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^2 - s} &= \frac{s D_s}{s(s-1)} \\ \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s} &= \frac{1}{s^2 - s} = \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} s = L_w D_s \\ \frac{1}{s} = \frac{D_s}{s} \\ s D_s = D_s \end{array} \right.$$

$$1 = \alpha(s - 1) + b(s)$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 = 1 \leftarrow 0 = s \\ 1 = b \leftarrow 1 = s \end{array} \right\} =$$

$$\left. \begin{array}{l} \leftarrow \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} \\ 1 = D(s) = -L(s) + L(s-1) \end{array} \right\} \text{لغایات الترتیب}$$

$$= -L(s) + L(s-1) + \gamma$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\Pi}{s} = \frac{\sqrt{(s-1)} \cdot \sqrt{s}}{\sqrt{s} \cdot \sqrt{s-1}} \\ \frac{\Pi}{s} = \frac{\sqrt{(s-1)} \cdot \sqrt{s}}{\sqrt{s} \cdot \sqrt{s-1}} \end{array} \right\} (8)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\Pi}{s} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (s-1)^{\frac{1}{2}} \cdot s^{\frac{1}{2}}}{s^{\frac{1}{2}} \cdot (s-1)^{\frac{1}{2}}} \\ \frac{\Pi}{s} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (s-1)^{\frac{1}{2}} \cdot s^{\frac{1}{2}}}{s^{\frac{1}{2}} \cdot (s-1)^{\frac{1}{2}}} \end{array} \right\}$$

$$\left[ \frac{\Pi}{2}, \infty \right] = \text{جاس في حيث } | \text{جاس} |$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\frac{1}{2} \cdot s^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \cdot (s-1)^{\frac{1}{2}}}{s^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot s^{\frac{1}{2}}}{s^{\frac{1}{2}}} - \frac{\frac{1}{2} \cdot (s-1)^{\frac{1}{2}}}{s^{\frac{1}{2}}} \\ \frac{\frac{1}{2} \cdot s^{\frac{1}{2}}}{s^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \\ \frac{\frac{1}{2} \cdot (s-1)^{\frac{1}{2}}}{s^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (s-1)^{\frac{1}{2}}}{s^{\frac{1}{2}}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} s = جاس \\ \frac{D(s)}{s} = -جاس \\ \frac{D(s)}{s} = دس \end{array}$$

$$\frac{6}{7} = 1 - \times \frac{6}{7} = \left( \frac{6}{7}(1) - \frac{6}{7}(0) \right) \frac{6}{7} \leftarrow$$

$$\frac{\left( \left( \frac{1}{s} + 1 \right)^2 s \right)}{s^{\frac{13}{2}}} = \frac{(1 + \frac{2}{s})^{\frac{13}{2}}}{s^{\frac{13}{2}}}$$

$$\frac{\left( \left( \frac{1}{s} + 1 \right)^2 s \right)}{s^{\frac{3}{2}}} = \frac{(1 + \frac{2}{s})^{\frac{10}{2}}}{s^{\frac{13}{2}}} =$$

$$\frac{1}{s} ds \dots \text{تعويض} \quad \left( \frac{1}{s} + 1 \right) =$$

$$\begin{aligned} \frac{s^{\frac{3}{2}} ds}{2} \times \frac{1}{s} \times \left( \frac{1}{s} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} &= \begin{cases} \frac{1}{s} + 1 = \\ \frac{ds \times 1}{s^{\frac{3}{2}}} = \frac{ds}{s} \\ -s^{\frac{3}{2}} ds = \frac{ds}{2} \end{cases} \\ \pi + \left( \frac{1}{s} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} &= \pi + \frac{1}{2} - \end{aligned}$$

$$10) \text{ أثبت أن حيث } \frac{1}{1+n} \cdot \frac{(1-s)^{\frac{n}{2}}}{s^{\frac{n+2}{2}}} = n: \text{ عدد زوجي}$$

$$\frac{1}{s} \times \left( \frac{1-s}{s} \right)^{\frac{1}{2}} ds = \frac{(1-s)^{\frac{n}{2}}}{s^{\frac{n+2}{2}}} \times \frac{ds}{s} \leftarrow$$

$$\frac{1}{s} \times \left( \frac{1}{s} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} ds =$$

$$\left. \begin{aligned} & \text{ص} = \frac{1}{s} \times \frac{1}{1+e^{-\frac{1}{s}}} \\ & \frac{1+e^{-\frac{1}{s}}}{1+e^{\frac{1}{s}}} = e^{-\frac{1}{s}} \\ & \frac{1+e^{-\frac{1}{s}}}{1+e^{\frac{1}{s}}} - \frac{1+e^{\frac{1}{s}}}{1+e^{-\frac{1}{s}}} = -e^{-\frac{1}{s}} \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} & \text{ص} = \frac{1}{s} \\ & \frac{1 \times 1 - e^{-\frac{1}{s}}}{s} = \frac{e^{-\frac{1}{s}}}{s} \\ & s - e^{-\frac{1}{s}} = e^{-\frac{1}{s}} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} & n + 1 \text{ عدد فردي} \\ & \frac{1-e^{-\frac{1}{s}}}{1+e^{-\frac{1}{s}}} - \frac{1-e^{\frac{1}{s}}}{1+e^{\frac{1}{s}}} = e^{-\frac{1}{s}} \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} & s = 1 - e^{-\frac{1}{s}} \\ & 1 - e^{-\frac{1}{s}} = s \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} & \text{ص} = s - 1 \\ & \gamma = \frac{e^{-\frac{1}{s}}}{s} \\ & \epsilon = \frac{e^{-\frac{1}{s}}}{\gamma} \\ & 1 = \text{ص} \leftarrow 1 = s \\ & 1 - \text{ص} \leftarrow 0 = s \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} & 1 = (1)_{\text{م}}, \epsilon = (1)_{\text{م}}, \gamma = (1)_{\text{م}} \\ & \gamma = (s - 1)_{\text{م}} \leftarrow \\ & \epsilon = \frac{e^{-\frac{1}{s}}}{\gamma} \leftarrow \\ & \gamma \times \epsilon = (1)_{\text{م}} - (1)_{\text{م}} \leftarrow \end{aligned}$$

$$*.. 12 = (1)_{\text{م}} \leftarrow \lambda = \epsilon - (1)_{\text{م}}$$

$$12 - 1 = (1)_{\text{م}} - (3)_{\text{م}} = s \text{ دس} \quad \left. \begin{aligned} & \text{ولكن} \\ & 11 - \end{aligned} \right\}$$

$$^{\prime }((s)ds = s^{\circ }(s) \leftarrow (s)(s))$$

$$m(s) = 2q(s) \cdot q(s)$$

$q(s) = 2q(s) \cdot q(s)$  ... لا تختصر

$$\leftarrow q(s) - 2q(s)q(s) =$$

$$q(s) = ((2-q(s))$$

$$+ \dots = (1-q(s))$$

$$\text{أو } 1-2q(s) = q(s) \leftarrow q(s)$$

$$q(s) = \frac{1}{2} \cdot ds$$

$$q(s) = \frac{1}{2}s + \dots$$

ثم نضع ج =

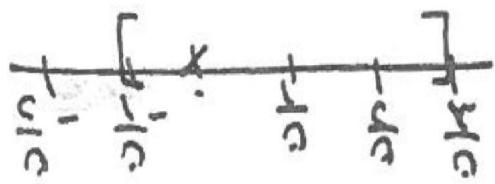
$$^{\circ }s(s) = \frac{1}{s^{1+2}} \text{ نحصل على } q(s) \text{ من مكانه } q(s)$$

$$\text{عندما } n = 1 \quad q(s) = \frac{1}{s}$$

$$q(s) = \frac{1}{s} \cdot ds = s^{-1} \cdot ds$$

$$q(s) = \frac{s^2}{2} + \dots$$

$$4) \sum_{k=1}^n [ns + 1] \cdot ds = 2 \text{ فما قيمة } n \in \mathbb{N}^* \dots \text{ عدد طبيعي}$$



طول الدرجة =  $\frac{1}{n}$

$$2 = \sum_{k=1}^3 [ds + \frac{1}{6}] \leftarrow$$

$$2 = \frac{6}{n} \leftarrow 2 = \frac{3}{n} + \frac{2}{n} + \frac{1}{n} + 0 =$$

$$2 = n \leftarrow 6$$

$$5) \text{ ت } = \frac{\text{م } - 4}{\text{م } + 4}$$

$$\frac{\text{م } - 4}{\text{م } + 4} = \frac{1}{4}$$

$\text{م } = 2 \text{ عندما}$ $\rightarrow + \wedge = \text{لوه}$ $\rightarrow + \wedge = 1$ $\rightarrow = 9+$
--

$$\text{لوه} = |4 + 5| = 9$$

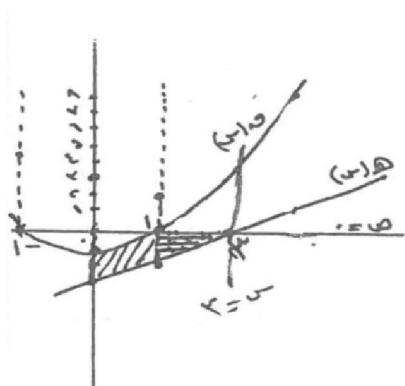
$$\text{لوه} = |4 + 5| = 9$$

$$\text{م } = \frac{4 - 9}{4 + 5} = -1$$

$$\text{ع}(\text{م }) = \frac{1}{\text{ه }} \text{ ث } = \frac{1}{\text{ه }} = \text{ه } - 3$$

السؤال الثالث:

$$(1) \quad q(s) = s^2 - 1, \quad h(s) = s - 3, \quad m = s$$



$$\left. \begin{array}{l} s^2 - 1 = s - 3 \\ s = 3 \end{array} \right| \quad \left. \begin{array}{l} s^2 - 1 = 1 - s \\ s = 1 \end{array} \right| \quad \left. \begin{array}{l} s^2 - 3 = s - 1 \\ s = 2 \end{array} \right|$$

لا تحل

$$m = \left\{ \begin{array}{l} (s^2 - 1) - (s - 3) \cdot m \\ s = 1 \end{array} \right.$$

$$\left[ s^2 + \frac{s}{2} - \frac{s^3}{3} \right] =$$

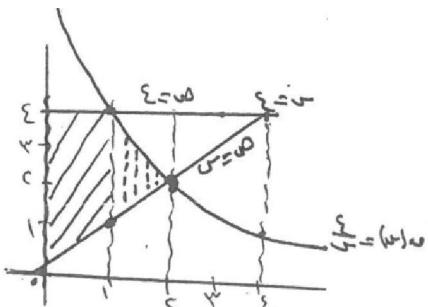
$$\left[ s^3 + \frac{s^2}{2} - s \right] = 2m$$

$$\left[ s^3 + \frac{s^2}{2} - s \right] =$$

$$m = 2m + \dots$$

$$(2) \quad q(s) = \frac{4}{s}, \quad m = s, \quad s = 4, \quad s = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} s = 4 \\ s = 4 \end{array} \right| \quad \left. \begin{array}{l} 4 = \frac{4}{s} \\ 4s = 4 \end{array} \right| \quad \left. \begin{array}{l} s = \frac{4}{s} \\ s^2 = 4 \end{array} \right| \quad \left. \begin{array}{l} s = 2 \\ s = 2 \end{array} \right|$$



$$\frac{7}{2} = \left[ \frac{2s}{2} - s \right]_{s=4}^{s=5} = 1m$$

$$\left[ \frac{s}{2} - \left( \frac{4}{s} \right) \right]_{s=2}^{s=4} = 2m$$

$$= (4\log_2 - (2 - 1)) - \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \right)$$

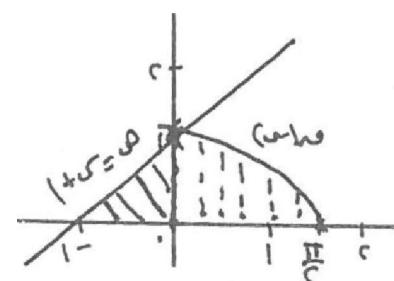
$$= 4\log_2 - 2 =$$

$$m = 1m + 2m = \frac{3}{2} - 2 + 4\log_2 2 = \frac{7}{2}$$

$$x(s) = \text{جتا س في } \left[ \frac{\Pi}{2}, s \right], \text{ ص} = s + 1, \text{ ص} = 0$$



$s = 1 + 0$	$\text{جتا س} = 0$	$\text{جتا س} = s + 1$
$s = 1 - 0$	$\downarrow$	بالتجريب
	$\frac{\Pi}{2} = s$	عندما $s = 0$
		$\text{جتا } 0 = 1 + 0 = 1$
		$1 = 1$
		$s = 0$



$$m = \left[ (s+1) - s \right]_{s=1}^{s=2}$$

$$\frac{1}{2} = \left[ s + \frac{s}{2} \right] =$$

$$1 = 0 - 1 = \left[ \frac{\Pi}{2} - \text{جنس} - \text{رس} \right] = 2m$$

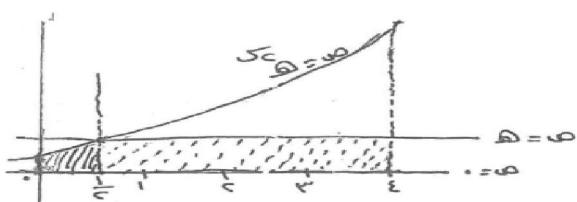
$$1.0 = 1 + \frac{1}{2} = m$$

$$4) ص = هـ^2، ص = هـ، ص = 0، ص = 0، ص = هـ$$

$0 = هـ$ لا تحل	$0 = هـ^2$ مستحيل	$هـ^2 = هـ$ $m^2 = 1$
--------------------	----------------------	--------------------------

$$\frac{1}{2} - \frac{هـ}{2} = \left[ \frac{1}{2} - \frac{هـ^2}{2} = \text{رس} - (هـ^2) \right] = 1m$$

$$هـ3.0 = \left( \frac{1}{2} - \epsilon \right) = هـ = هـ - (هـ) \left[ \frac{1}{2} \right] = 2m$$



$$\frac{1}{2} - \frac{هـ}{2} = هـ3.0 + \frac{1}{2} - \frac{هـ}{2} = m$$

مختارات من أسئلة التكامل/امتحانات التوجيهي/وزارة حتى ٢٠١٢

السؤال الأول:

(١) إذا كان  $q(s)$  متصلًا في مجاله وكان

$$(ظا^٢ s - 1 - قا^٢ s) q(s) \cdot دس = 3 - s^٢ \quad \text{جد } q(s)$$

$$(٢) \quad \text{جد } \left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{ظا } s}{\text{رس}} \\ \frac{\text{جنس}}{\text{رس}} \end{array} \right.$$

$$(٣) \quad s = h \cdot \text{ظا } s + \text{لو}_h \cdot \text{جنس} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\Pi}{s} \\ \frac{\text{رس}}{1 + \text{ظا } s} \end{array} \right.$$

$$(٤) \quad \left\{ \begin{array}{l} q(s) \cdot دس = 1, 3, 0 \\ (1) = (2) = (3) \end{array} \right. \quad \text{جد قيمة}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} s^٠ q(s) \\ s^٣ + 1 \cdot دس \end{array} \right.$$

$$(٥) \quad q(s) = h^{\frac{1}{s}} + \text{لو}_h \sqrt{s} \quad \text{وكان} \quad q(1) = h \quad \text{فما قيمة الثابت } h$$

$$(٦) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{s} \cdot دس = 1 \\ دس \cdot \sqrt{s} = 1 \end{array} \right. \quad \text{حيث } h \text{ عدد ثابت فإن } \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{s^2} \\ \frac{1}{s} \end{array} \right. \cdot دس \text{ يساوي}$$

(٧)  $m(s), h(s)$  إقترانان بدائيان للاقتران المتصل  $q(s)$  فما قيمة  $(m - h)(s)$

$$(٨) \quad \text{إذا كان } \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{s} \cdot دس = 3 \\ ج > 1 \end{array} \right. \quad \text{حيث } ج \text{ بما قيمة الثابت } ج؟$$

٩) إذا كان  $q(1) = 1$ ،  $q(2) = 4$  جد قيمة  $\int_{\text{رس}}^{\text{رس}} q(s) ds$

١٠)  $(q(s) + s^2 + s^3)^2$  وكان  $q(1) = 7$ ، جد قيمة الثابت  $A$

السؤال الثاني:

١) يسير جسيم حيث العلاقة  $t = \sqrt[3]{4s}$  حيث  $s > 0$ ، تحرك الجسم في السكون فما قيمة

الثابت  $A$  التي تجعل السرعة  $8m/s$  / ث بعد ٣ ثوان

٢) إذا كان  $q(s)$  كثير حدود وكان  $q(0) = 0$ ،  $q'(s) = 4$ ،  $q''(s) = 5$ ،  $q'''(s) = 3$  فجد

قاعدة الاقتران  $q(s)$

٣) ميل المماس لمنحنى العلاقة  $s$  عند النقطة  $(s, c)$  يساوي  $\frac{\sqrt{c}}{1-s^2}$  جد قاعدة

العلاقة علماً بأن المنحنى يمر بـ  $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$

٤) حل المعادلة التفاضلية  $g'(s) = s + c$

٥) ميل المماس عند النقطة  $(s, c)$  يساوي  $\frac{(s-4)(s-3)}{s^2 - s^3}$  فجد قاعدة

العلاقة إذا علمت أن منحناها يمر بالنقطة  $(1, 0)$

السؤال الثالث:

إحسب التكاملات التالية:

$$(1) \int h^s (9 - 4h^s) ds$$

$$(2) \int_{\cdot}^{\Pi} (1 + 2\cos x) ds$$

$$(3) \int \frac{2\ln s}{(s-2)^2} ds$$

$$(4) \int \frac{2ds}{s^2 + 4\sqrt{s}} ds$$

$$(5) \int \frac{\cos x}{x^2 - 2x - 3} dx$$

$$(6) \int \frac{2ds}{\sqrt[3]{s^2 + 4s + 3}} ds$$

$$(7) \int h^s (2\cos x - \sin x) ds$$

$$(8) \int \frac{ds}{(\sqrt{s} + 1)\sqrt{s}}$$

$$(9) \int \ln(s^2 - 1) ds$$

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{جـا}^2 \text{سـجـتا}^2 \text{سـ دـسـ} \\ \frac{\Pi}{2} \end{array} \right.$$

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{وـظـتا}(\text{لـوـهـ سـ}) \text{ دـسـ} \\ \text{سـ} \end{array} \right.$$

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{|s - 1|}{s^2 - 5s} \text{ دـسـ} \\ s \end{array} \right.$$

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{s}{1 + 2s} \text{ دـسـ} \\ \text{جـنـتا}^2 \text{سـ} \end{array} \right.$$

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{s}{h^2 - 4} \text{ دـسـ} \\ h \end{array} \right.$$

$$\frac{1}{4} |h|^2 - \frac{1}{4} |L|_h^2 + |2 + h|^2$$

السؤال الرابع:

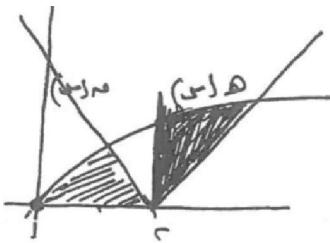
$$(1) \quad \text{جد مساحة المنطقة المحصورة بين } Q(s) = -s^3, H(s) = \frac{1}{3}s, L(s) = -6s$$

$$(2) \quad \text{جد مساحة المنطقة المحصورة بين } Q(s) = s^2, H(s) = \frac{1}{s}, L(s) = 4,$$

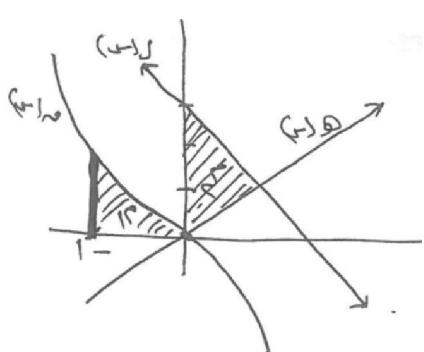
وال المستقيم  $s = 0$  في الربع الأول

$$(3) \quad \text{جد مساحة المنطقة المحصورة بين } Q(s) = -\sqrt[3]{s}, H(s) = s, L(s) = 6 - 2s$$

٤) جد مساحة المنطقة المظللة حيث  $q(s) = |s - 2|$ ,  $h(s) = \sqrt{s}$

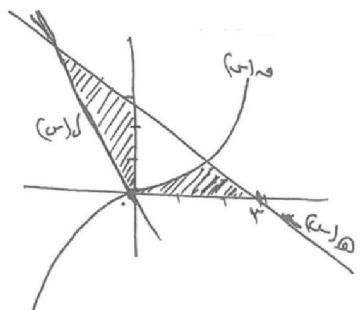


٥) جد مجموع مساحتي المثلثات  $M_1, M_2$  حيث أن  $q(s) = -s^3$ ,  $h(s) = s$ ,  $L(s) = -s^2$



$$M_2 = -s^2$$

٦) جد مجموع المساحات المظللة حيث  $q(s) = 2s^3$ ,  $h(s) = -s^3$ ,  $L(s) = -2s$



## إجابات المختارات من امتحانات الوزارة

السؤال الأول:

$$(1) \left[ (Q^2 s - 1 - Q^2 s) N(s) ds = 3 - s^2 \right]$$

$$\left[ -N(s) ds = 3 - s^2 \right]$$

$$\left[ N(s) ds = s^2 - 3 \right]$$

$$m(s) \leftarrow \text{نشتق} \leftarrow q(s) = s^2$$

$$(2) \left[ \frac{\text{ظاس}}{\text{جتاس}} ds = \text{قايس} \cdot \text{ظاس} ds \right]$$

$$= \underline{\text{قايس}} + \underline{\text{ج}} =$$

$$(3) s = h \frac{\overset{\Pi}{\underset{2}{\text{ظاس}}} ds + \text{الروه} \underset{2}{\text{جتاس}} + \underset{1}{\text{ظاس}} s}{1 + \underset{2}{\text{ظاس}} s}$$

$$ds = \frac{h \text{ظاس} \cdot Q^2 s + 1 \times \text{جتاس}}{1 + h^2} \leftarrow$$

$$1 + h^2 = \frac{h \text{ظاه} \cdot Q^2 s + 1 \times 4}{4 \text{جتاه}} \leftarrow \frac{ds}{s^2}$$

$$1 + h^2 = 1 - \times 1 + \left( \frac{1}{2} \right) \times h \leftarrow$$

$$1 - = 1 \leftarrow 1 + h^2 = 1 - h^2 \leftarrow$$

$$1 - = (1) \cup .3 = (2) \cup .1 = 0 \cup (s) دس = (4)$$

$$\left. \begin{array}{l} s^{\circ} \cup (s^3 + 1) دس \\ \hline \end{array} \right\} \rightarrow \text{تعويض ... دس } دس$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{دص}{s^3} (ص) دص \\ \frac{1}{3} s^3 \cup (ص) دص \text{ وبدل الحدود} \\ \frac{1}{3} (ص - 1) \cup (ص) دص \text{ أجزاء} \\ \hline \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} ص = s^3 + 1 \\ \frac{دص}{s^3} = s^2 \\ \frac{دص}{s^3} = دص \end{array} \right\}$$

$$ق = ص - 1 \leftarrow دص = دص$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{3} (ص - 1) \cup (ص) دص \\ \hline \end{array} \right\} - \left[ \begin{array}{l} (ص - 1) \cup (ص) دص \\ \hline \end{array} \right] \leftarrow$$

$$(10 - (1) \cup 0 - (2) \cup (1 - 2)) \frac{1}{3} =$$

$$\frac{7}{3} - = (10 - 3) \frac{1}{3} =$$

$$\left( 5 \cup (s) دس \right) \cup \frac{1}{s} + \frac{1}{s} ده = ده + \frac{1}{s} ده = (5$$

$$\frac{1}{s} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{s} ده = (s) دس$$

$$ده = 1 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 1 ده = (1) دس$$

$$هـ ٤ = ١ \leftarrow هـ ٢ = \frac{١}{٢} \leftarrow هـ = \frac{١}{٢} + هـ -$$

$$١ = \left[ \frac{\frac{٣}{٢}س}{\frac{٣}{٢}} = س^{\frac{١}{٢}} دس \right] = س \sqrt{س.دس} \quad (٦)$$

$$١ = \frac{٢}{٣} - \sqrt[٣]{١} \sqrt{\frac{٢}{٣}} = \left[ \sqrt[٣]{س} \sqrt{\frac{٢}{٣}} \right] \leftarrow$$

$$٥ = \sqrt[٣]{١} \sqrt{\frac{٢}{٣}} \leftarrow \frac{٥}{٣} = \left[ \sqrt[٣]{١} \sqrt{\frac{٢}{٣}} \right]$$

$$\frac{٢٥}{٤} \text{ وهذا كله لا ضرورة له} = ٣١ \leftarrow \frac{٥}{٣} = \sqrt[٣]{١}$$

$$\text{لأن } \left[ س^{\frac{٢}{٣}} دس \right] = س \sqrt{س.دس} \quad ٢$$

$$٢ = ١ \times ٢ = \left[ س \sqrt{س.دس} \right] \leftarrow ٢ =$$

(٧)  $m(s)$ ,  $h(s)$  بدائيان

$\leftarrow$  مشتقة كل منهما  $q(s)$

$\leftarrow$  الفرق بينهما  $m(s) - h(s)$  = ثابت جـ

$$(٨) m(٢) - h(٢) =$$

$$= q(٢) - q(s)$$

$$3 = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \quad (8)$$

$$s = s - 1 \quad (9)$$

$$4 = (2) - (1) \quad (10)$$

$$\frac{1}{s^2 + 1} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \left. \frac{1}{s^2 + 1} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s} \right\} \\ & \left. \begin{aligned} & s^2 + 1 = \\ & s + \frac{1}{s} = \\ & s^2 + s = \end{aligned} \right\} \\ & \left. \begin{aligned} & \text{نضع } s = \frac{1}{s} \\ & \frac{s}{s+1} = \frac{s}{s} \\ & \frac{1}{s+1} = \frac{1}{s} \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

$$(1) - (2) = \frac{1}{s^2 + 1} =$$

$$14 = (1) - (2) =$$

$$10 = (s^2 + s + 1) =$$

$$m(s) = s^2 + s + 1$$

$$m(s) = s^3 + s^2 + s$$

$$m(s) = s^3 + s^2 + s$$

$$\text{ق} = \text{ف} - \text{ك} + \text{م} = (1)$$

$$\text{م} = \text{أ} \leftarrow \text{ك} = \text{ك}$$

السؤال الثاني:

$$(1) \text{ ت} \leftarrow \frac{\text{د}}{\text{ع}} \cdot \frac{\text{د}}{\text{ع}} = \text{أ.د.ن}$$

$$\left[ \text{ع}^{\frac{1}{3}} \cdot \text{د} \right] = \text{أ.د.ن}$$

$$\text{ج} + \text{ان} = \frac{\frac{2}{3} \text{ع}}{\frac{2}{3}}$$

$$\text{ان} + \text{ج} = \sqrt[2]{\text{ع}} \cdot \frac{2}{3}$$

ولكن ع = ، ن = (حركة من السكون)

$$\cdot = \text{ج} \leftarrow \text{ج} + \cdot = + \cdot$$

$$\text{ان} + \text{ولكن ع} = \sqrt[2]{\text{ع}} \cdot \frac{2}{3}$$

$$13 = 2(2) \frac{2}{3} \leftarrow \text{ان} = \sqrt[2]{\lambda} \cdot \frac{2}{3}$$

$$\frac{\lambda}{9} = 1 \leftarrow \lambda = 19$$

٤٢ (س) قًّا أنٰ بما

$$\left. \begin{array}{l} n^{\equiv}(s) \\ = s(D) \end{array} \right\} \leftarrow$$

$$\varphi(s) = s + \zeta$$

$$\text{ولكن } \left\{ \begin{array}{l} \text{ـ} \\ \text{ـ} \end{array} \right. (س)رس = (س+ج)رس$$

$$3 = 0 - (x + 2) = \boxed{ } \quad x \geq -2$$

$$1 = \frac{1}{1}$$

$$Q(s) = s^4 + 1$$

$$n = \frac{1}{\omega} \ln(1 + \omega)$$

$$f(s) = s^2 + 4s + 2$$

$$\text{ولكن } Q(0) = \gamma + \alpha + \alpha - \gamma \leftarrow 0$$

$$Q(s) = s^2 + 5s + 2$$

$$\frac{\frac{ds}{s}}{1 - \frac{1}{s} \ln h} = \frac{ds}{s} \leftarrow \frac{\sqrt{h}}{s}$$

نِكَامَلُ الْطَّرْفَيْنِ

هـ  $\frac{ص}{٢}$  درص = قتاً س درس

$$\text{ظاس} + ج = \frac{\frac{ص}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{ه}{2}}$$

المنحنى يمر بـ  $\left( \frac{\Pi}{4}, 0 \right)$  ← تتحقق معادلته

$$\text{ظاس} 4 + ج = \frac{ه}{\frac{1}{2} - \frac{ص}{2}}$$

$$ج + 1 - = 2 - \leftarrow ج + 1 - = \frac{1}{2} -$$

$$ج = 1 -$$

$$\text{المعادلة } 2 ه = \frac{ص}{2} - \text{ظاس} + 1$$

$$4) جا^2 س دص + ص دس = دص$$

$$ص دس = دص - جا^2 س دص$$

$$ص دس = دص(1 - جا^2 س)$$

$$\frac{دص}{ص} = \frac{دص}{1 - جا^2 س} \quad \text{نكمال الطرفين}$$

$$\frac{دص}{جا^2 س} = \frac{1}{ص} دص$$

$$قا^2 س دس = لوره ص + ج$$

$$\text{ظاس} = لوره ص + ج \leftarrow لوره ص = \text{ظاس} - ج$$

$$\text{طاس} = ج$$

$$ص = هـ$$

$$\frac{(3-s)(4+s)}{s(s+3)} \frac{هـ}{دـص} = \frac{دـص}{هـ دـص}$$

$$\frac{دـص}{هـ دـص} = \frac{(4+s)}{s}$$

$$\frac{s+4}{s} \frac{دـص}{هـ دـص}$$

$$\left[ هـ دـص + 1 \right] = \frac{4}{s} دـص$$

$$\frac{هـ دـص + 1}{s} = \frac{4}{s} دـص$$

(١٠) تحقق المعادلة

$$ج + 1 = \frac{1}{s} \leftarrow ج + 1 + 4 \frac{هـ دـص}{s} = \frac{هـ دـص}{s}$$

$$ج = \frac{4}{s} -$$

$$هـ دـص = 4 \frac{هـ دـص}{s} + s$$

السؤال الثالث:

$$(1) \quad \left. \begin{array}{l} \text{هـ ٩ - هـ ٤} \\ \text{دـ ... يمكن فك الأقواس} \end{array} \right\} \text{دـ ... مباشر}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{هـ ٩ - هـ ٤} \\ \text{دـ ... مباشر} \end{array} \right\} =$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{هـ ٤ - هـ ٩} \\ \text{دـ + } \frac{\text{هـ ٢}}{٢} \end{array} \right\} =$$

ملاحظة: يمكن حل السؤال بالاستبدال نضع ص = هـ ... ونتابع لنحصل على نفس

الإجابة

$$(2) \quad \left. \begin{array}{l} \text{جـ ٢ + جـ ١} \\ \text{دـ ... جـ ٢ جـ ١} \end{array} \right\} \text{دـ ... جـ ٢ جـ ١}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{جـ ٢ سـ دـ + جـ ١ سـ دـ} \\ \text{دـ ... جـ ٢ سـ دـ + جـ ١ سـ دـ} \end{array} \right\} =$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{صـ = جـ ١} \\ \text{دـ صـ = جـ ٢} \\ \text{دـ = جـ ٢ - جـ ١} \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{l} \text{دـ ... جـ ٢ + جـ ١} \\ \text{دـ = جـ ٢ + جـ ١} \end{array} \right\} =$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{دـ ... جـ ٢ - جـ ١} \\ \text{دـ = جـ ٢ - جـ ١} \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{l} \text{دـ ... جـ ٢ - جـ ١} \\ \text{دـ = جـ ٢ - جـ ١} \end{array} \right\} =$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{دـ ... جـ ٢ - جـ ١} \\ \text{دـ = جـ ٢ - جـ ١} \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{l} \text{دـ ... جـ ٢ - جـ ١} \\ \text{دـ = جـ ٢ - جـ ١} \end{array} \right\} =$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{دـ ... جـ ٢ - جـ ١} \\ \text{دـ = جـ ٢ - جـ ١} \end{array} \right\} =$$

$$\left( ^\zeta \left( جتا . \right) - ^\zeta \left( \Pi جتا \right) \right) \frac{1}{2} - \frac{\Pi}{2} =$$

$$\frac{\Pi}{\gamma} = \left( {}^z(\gamma) - {}^z(\gamma^-) \right) \frac{1}{\gamma} - \frac{\Pi}{\gamma} =$$

$$\left\{ \frac{\log s}{(s-2)} \right\} = 2(s-2) \cdot ds - \text{أجزاء دس لوجاريتمي}$$

$$س = \frac{1}{س} \cdot دس \leftarrow دس$$

$$\frac{۱ - (۲ - س) ۲}{۱ \times ۱ -} = ه \leftarrow ه - (۲ - س) ۲ = ه$$

$$= -s(s-2) - \frac{1}{s} \left[ s(s-2) - 2 \right]$$

$$= \frac{2}{s-2} - \frac{2s}{(s-2)s} + \left\{ \frac{s-2}{s-2} - \frac{2}{s-2} \right\}$$

$$\frac{ب}{س-۲} + \frac{۱}{س} = \frac{۲}{س^۲ - ۴}$$

$$س + (٢ - س) = ٢$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 = \text{ا} \leftarrow . = \text{س} \\ 1 = \text{ب} \leftarrow ۲ = \text{س} \end{array} \right\}$$

$$-\frac{2}{s-2} + \frac{1}{s} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s-2} \leftarrow \text{دوس}$$

$$z + (2 - s) \frac{\log s}{s-2} =$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{رس ٢} \\ \text{رس ٣ + س ٤} \end{array} \right\} \text{ص} = \frac{\text{رس ٢}}{\text{رس ٣ + س ٤}}$$

$$\text{ص} = \sqrt{s} - \sqrt{s} = \text{رس ٢} - \text{رس ٣}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{رس ٢} \times ٢ \\ \text{رس ٣ + ص ٤} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{حل كسور جزئية}} \frac{\text{رس ٤} \times ٢}{\text{رس ٣ - ص ٤}}$$

$$\frac{ب}{ص - ١} + \frac{١}{ص - ٣} = \frac{ص ٤}{ص ٣ - ص ٤}$$

$$\text{ص} = أ(\text{ص} - ١) + ب(\text{ص} - ٣)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ص} = ١ - ١٢ = ١٢ - ٣ = ٦ \\ \text{ص} = ٢ - ب - ٢ = ٤ - ١ = ٣ \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{رس ٢} - \\ \text{رس ١} - \end{array} \right\} \frac{\text{رس ٦}}{\text{ص} - ٣}$$

$$= \text{لـ ٦} (\text{ص} - ٣) - \text{لـ ٢} (\text{ص} - ١) + ج$$

$$\left[ \begin{array}{l} \text{لـ ٦} \\ \text{لـ ٢} \\ \text{لـ ١} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} \text{ص} - \sqrt{s} \\ \sqrt{s} - \text{ص} \\ \text{ص} - \sqrt{s} \end{array} \right]$$

$$= (\text{لـ ٦} - \text{لـ ٢} - \text{لـ ١}) - (\text{لـ ٢} - \text{لـ ٣} - \text{لـ ١})$$

$$= ٠ + ٣ - \text{لـ ٦} - \text{لـ ٢} = ٠ \times ٦ - ٠ \times ٢ - ٠ \times ٣ =$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{جتاس} \\ \text{دوس} \end{array} \right\} \xleftarrow{\text{جتاس} - (\text{جتا}^2\text{س} - \text{جا}^2\text{س})} \left. \begin{array}{l} \text{جتاس} \\ \text{دوس} \end{array} \right\} \xleftarrow{1 + 3\text{جاس}} \quad (5)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{جتاس} \\ \text{دوس} \end{array} \right\} \xleftarrow{1 - 3\text{جاس} - (\text{جتا}^2\text{س} - \text{جا}^2\text{س})} \quad$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{جتاس} \\ \text{دوس} \end{array} \right\} \xleftarrow{3\text{جاس} + 2\text{جا}^2\text{س}} \quad$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{جتاس} \\ \text{دوس} \end{array} \right\} = \frac{\text{دص}}{\text{ص}^2 + \text{ص}^2 \text{جتاس}}$$

$$\frac{ب}{ص^2 + 3} + \frac{1}{ص} = \frac{1}{ص^2 + 3}$$

$$1 = أ(\text{ص}^2 + 2) + ب \text{ص}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{3} = 1 \leftarrow 1^3 = 1 \leftarrow 0 = ص \\ \frac{2}{3} - = ب \leftarrow ب \frac{3}{2} - 0 = 1 \leftarrow \frac{3}{2} - = ص \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{2}{3} - \\ \frac{3}{3} + 3 \end{array} \right\} \frac{\text{دص}}{\text{ص}^2 + 3} + \frac{1}{3} \quad$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{2}{3} - \\ \frac{3}{3} + 3 \end{array} \right\} \frac{\text{لوجا}^2\text{س}}{\text{ص}^2 + 3} + \frac{1}{3} \text{لوجا}^2\text{س} =$$

$$\frac{1}{3} \text{لوجا}^2\text{س} - \frac{1}{3} \text{لوجا}^2\text{س} + ج =$$

$$\frac{\overset{\wedge}{\text{رس}}}{\overset{\wedge}{\text{رس}} + \overset{\wedge}{\text{رس}}} \quad (6)$$

$$\text{نضع ص} = \overset{\wedge}{\text{رس}} \leftarrow \overset{\wedge}{\text{ص}}^3 = \text{رس} \leftarrow \overset{\wedge}{\text{ص}}^2 \text{ دص} = \text{دص}$$

$$\frac{\overset{\wedge}{\text{ص}}^6 \text{ دص}}{(\overset{\wedge}{\text{ص}}^3 + \overset{\wedge}{\text{ص}}^4)(\overset{\wedge}{\text{ص}}^3 + \overset{\wedge}{\text{ص}}^4)} = \frac{\overset{\wedge}{\text{ص}}^6 \times \overset{\wedge}{\text{ص}}^2 \text{ دص}}{(\overset{\wedge}{\text{ص}}^3 + \overset{\wedge}{\text{ص}}^4)^2} \leftarrow$$

$$\frac{\overset{\wedge}{\text{ص}}^6 \text{ دص}}{\overset{\wedge}{\text{ص}}^3 + \overset{\wedge}{\text{ص}}^4} \leftarrow \text{يحل}$$

$$\frac{b}{1+\overset{\wedge}{\text{ص}}} + \frac{1}{\overset{\wedge}{\text{ص}} + \overset{\wedge}{\text{ص}}} = \frac{\overset{\wedge}{\text{ص}}^6}{\overset{\wedge}{\text{ص}}^3 + \overset{\wedge}{\text{ص}}^4}$$

$$6 = \overset{\wedge}{\text{ص}} + (\overset{\wedge}{\text{ص}} + b)$$

$$\begin{cases} 3 = \overset{\wedge}{\text{ص}} + b \leftarrow 2+ = 6 \leftarrow 1- = \overset{\wedge}{\text{ص}} \\ 3- = 1 \leftarrow 2- = 6 \leftarrow 3- = \overset{\wedge}{\text{ص}} \end{cases}$$

$$\text{رس} = \frac{3}{1+\overset{\wedge}{\text{ص}}} + \frac{3-}{\overset{\wedge}{\text{ص}} + \overset{\wedge}{\text{ص}}} \leftarrow$$

$$\left[ \overset{\wedge}{\text{ص}} + \overset{\wedge}{\text{رس}} \right] \overset{\wedge}{\text{ص}} + \left[ \overset{\wedge}{\text{ص}} + \overset{\wedge}{\text{رس}} \right] \overset{\wedge}{\text{ص}} - =$$

$$(-\overset{\wedge}{\text{ص}}^5 + \overset{\wedge}{\text{ص}}^4 + \overset{\wedge}{\text{ص}}^3) - (\overset{\wedge}{\text{ص}}^4 + \overset{\wedge}{\text{ص}}^3 + \overset{\wedge}{\text{ص}}^2) =$$

$$-\overset{\wedge}{\text{ص}}^5 + \overset{\wedge}{\text{ص}}^4 + \overset{\wedge}{\text{ص}}^3 + \overset{\wedge}{\text{ص}}^2 - =$$

$$(\overset{\wedge}{\text{ص}}^3 + \overset{\wedge}{\text{ص}}^4 - \overset{\wedge}{\text{ص}}^5 - \overset{\wedge}{\text{ص}}^2) =$$

$$\frac{6}{5} \overset{\wedge}{\text{ص}}^3 = \frac{4 \times 3}{2 \times 5} \overset{\wedge}{\text{ص}}^3$$

(٧)  $\boxed{هـ = (جـ ٢٣ـ جـ ٢٤ـ جـ ٢٥ـ) دـ س \leftarrow زـ وـ اـ يـاـ مـ خـ لـ فـ هـ$

$$\boxed{هـ = (جـ ٢٣ـ جـ ٢٤ـ جـ ٢٥ـ) دـ س \leftarrow \frac{1}{2} \times ٢}$$

$$\boxed{هـ = (جـ ٢٣ـ جـ ٢٤ـ جـ ٢٥ـ) دـ س \leftarrow جـ ٢٣ـ جـ ٢٤ـ جـ ٢٥ـ دـ س}$$

$$\boxed{هـ = جـ ٢٤ـ دـ س \leftarrow أـ جـ زـ اـءـ دـ وـ رـ يـ}$$



$$هـ = دـ ق \leftarrow دـ س = هـ دـ س$$

$$\boxed{رـ هـ = جـ ٢٤ـ دـ س \leftarrow هـ جـ ٢٤ـ دـ س \leftarrow \frac{جـ ٢٤ـ دـ س}{٤}}$$

$$\boxed{هـ جـ ٢٤ـ دـ س - \frac{هـ جـ ٢٤ـ دـ س}{٤}}$$

$$\left. \begin{aligned} دـ س &= هـ دـ س \leftarrow دـ س = هـ دـ س \\ رـ هـ &= \frac{جـ ٢٤ـ دـ س}{٤} \leftarrow هـ \frac{جـ ٢٤ـ دـ س}{٤} \end{aligned} \right\}$$

$$\boxed{هـ جـ ٢٤ـ دـ س - \frac{هـ جـ ٢٤ـ دـ س}{١٦} - \frac{هـ جـ ٢٤ـ دـ س}{١٦} \times \frac{١}{٤} = هـ جـ ٢٤ـ دـ س}$$

$$\boxed{هـ جـ ٢٤ـ دـ س = \frac{١}{٤} هـ جـ ٢٤ـ دـ س + \frac{١}{١٦} هـ جـ ٢٤ـ دـ س}$$

$$\boxed{- \frac{١}{١٦} هـ جـ ٢٤ـ دـ س \leftarrow تـ نـ قـ إـ لـىـ الـ يـمـ يـنـ}$$

$$\boxed{هـ جـ ٢٤ـ دـ س + \frac{١}{١٦} هـ جـ ٢٤ـ دـ س = \frac{١}{٤} هـ جـ ٢٤ـ دـ س + \frac{١}{١٦} هـ جـ ٢٤ـ دـ س}$$

$$\left. \begin{aligned} & \text{هـ جناعـ رسـ} = \frac{1}{4} \text{هـ جـ رسـ} + \frac{1}{6} \text{هـ جـ رسـ} \end{aligned} \right\} \frac{17}{16}$$

$$\left. \begin{aligned} & \text{هـ جـ رسـ} = \left( \frac{1}{4} \text{هـ جـ رسـ} + \frac{1}{6} \text{هـ جـ رسـ} \right) \frac{16}{17} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} & \bar{s} = s \\ & s = s \\ & s = ds \end{aligned} \right\} \frac{ds}{(s+1)\bar{s}} \quad (8)$$

$$\left. \frac{s^2 ds}{(s+1)} \right\} =$$

$$\left. \begin{aligned} & \rightarrow + \frac{(s+1)^2}{1 \times 3 -} = s^2 ds \end{aligned} \right\} =$$

$$\left. \begin{aligned} & \rightarrow + \frac{2 -}{3(s+1)^3} = \rightarrow + \frac{1}{3(s+1)} \times \frac{2}{3} - = \end{aligned} \right.$$

$$\left. \begin{aligned} & \text{لـ وـ} (s^2 - 1) ds \end{aligned} \right\} (9)$$

$$v = \text{لـ وـ} (s^2 - 1) ds \leftarrow ds = \frac{s^2 ds}{s^2 - 1}$$

$$ds = v \rightarrow s = v$$

$$\left. \begin{aligned} & \leftarrow s^2 ds \left( 1 - \frac{s^2}{s^2 - 1} \right) \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{نـ قـمـ}$$

$$\left. \begin{aligned} & \leftarrow s^2 ds \left( \frac{2}{s^2 - 1} + 2 \right) \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{يـ حـلـ}$$

$$\frac{b}{1+s} + \frac{1}{1-s} = \frac{2}{1-s^2}$$

$$2 = (s-1) + b(s+1)$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 = 1 \leftarrow 1 = s \\ 1 = b \leftarrow 1 - s \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{سلوه}(s^2 - 1 - 2) \\ \text{سلوه}(s^2 - 1 + 1 + b) \end{array} \right\} \rightarrow \text{سلوه}(s^2 - 1 + b)$$

$$= \text{سلوه}(s^2 - 1 - 2 - \text{سلوه}|s - 1| + \text{سلوه}|s + 1| + b)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{جا}^2 s \text{جتا}^2 s \text{رس} \\ \frac{\Pi}{2} \end{array} \right\} \text{لا يصلح علاقات}$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 - \text{جتا}^2 s \\ \frac{\Pi}{2} \end{array} \right\} \times \left( 1 + \text{جتا}^2 s \right) \text{رس} =$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{4} \text{جا}^2 s \\ \frac{\Pi}{2} \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{l} 1 - \text{جتا}^2 s \\ \frac{\Pi}{2} \end{array} \right\} \text{رس} =$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{4} s - \frac{\text{جا}^4 s}{4} \\ \frac{\Pi}{2} \end{array} \right\} \frac{1}{8} = \left. \begin{array}{l} 1 - \text{جتا}^4 s \\ \frac{\Pi}{2} \end{array} \right\} \text{رس} =$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\Pi}{6} - \\ \frac{\Pi}{2} \end{array} \right\} = \left( \frac{\Pi \text{جا}^4 s}{4} - \frac{\Pi}{2} \right) \frac{1}{8} - (0 - 0) \frac{1}{8} =$$

$$(11) \quad \frac{\text{لوكس}}{\text{مسافة}} = \frac{\text{دص}}{\text{ص}}$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\text{جهاص}}{\text{مسافة}} = \frac{\text{دص}}{\text{ص}} \\ & \frac{\text{جهاص}}{\text{دص}} = \frac{\text{ص}}{\text{دص}} \\ & \text{دص} = \frac{\text{ص}}{\text{جهاص}} \leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دص}} = \frac{\text{ص}}{\text{دص}} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \text{ص} &= \text{لوكس} \\ \frac{1}{\text{دص}} &= \frac{\text{دص}}{\text{مسافة}} \\ \text{دص} &= \text{دص} \end{aligned}$$

$$= \frac{\text{جهاص}}{\text{جهاص}} \frac{\text{دص}}{\text{دص}} = \frac{\text{لوكس}}{\text{جهاص}} + \text{جهاص}$$

$$= \text{لوكس} + \text{جهاص}$$

$$(12) \quad \frac{\text{لوكس}}{\frac{\text{مسافة}}{\text{مسافة}}} = \frac{\text{دص}}{\text{دص}}$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\text{دص}}{\text{مسافة}} = \frac{\text{دص}}{\text{مسافة}} \\ & \frac{\text{دص}}{\text{مسافة}} = \frac{\text{دص}}{\text{مسافة}} \end{aligned} \right\} =$$

$$\frac{\text{ب}}{\text{س}-\text{أ}} + \frac{\text{أ}}{\text{س}-\text{ب}} = \frac{\text{س}-\text{أ}}{\text{س}-\text{ب}}$$

$$\text{س}-\text{أ} = (\text{س}-\text{ب}) + \text{ب}(\text{س}-\text{أ})$$

$$\text{س} = \text{أ} \leftarrow \text{أ} = \text{س} \leftarrow \text{ب}$$

$$\text{س} = \text{ب} \leftarrow \text{ب} = \text{س} \leftarrow \text{أ}$$

$$\left[ \frac{2}{s-3} - \frac{1}{s-2} \right] =$$

$$= -L_{\text{و}} s - |2 + L_{\text{و}}| s - |3 - L_{\text{و}}| s$$

$$= -L_{\text{و}} 2 + L_{\text{و}} 1 - (|2 - L_{\text{و}}| + |1 - L_{\text{و}}|)$$

$$= -L_{\text{و}} 2 - L_{\text{و}} 3 - L_{\text{و}} 2 = -L_{\text{و}} 3$$

$$(13) \quad \left[ \frac{s}{s+2s} \right] \text{ دس متطابقة خاصة ومتميزة}$$

$$= \left[ \frac{s}{s-2s+2s+2s} \right] = \left[ \frac{s}{s} \right]$$

$$= \left[ \frac{s}{s-2s} \right] = \left[ \frac{s}{2s} \right]$$

$$ق = س \leftarrow دق = دس$$

$$ده = قاًس دس \leftarrow ه = ظاس$$

$$\left( \frac{1}{2} س ظاس - \left[ ظاس دس \right] \right) \leftarrow$$

$$= \left[ \frac{1}{2} س ظاس - \frac{1}{2} \left[ جاس دس \right] \right]$$

$$ص = جناس \leftarrow \frac{دص}{دس} = -جاس$$

$$\left( \frac{1}{2} س ظاس - \left[ \frac{1}{2} \frac{دص}{ص} جاس \right] \right) \leftarrow$$

$$= \frac{1}{2} \text{س طاس} + \frac{1}{2} \text{لوه ص} + ج$$

$$= \frac{1}{2} \text{س طاس} + \frac{1}{2} \text{لوه جناس} + ج$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ص} = \text{ه} \\ \text{ص} = \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} \\ \text{ص} = \frac{\text{د ص}}{\text{ه}} \end{array} \right\} (14)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ص} = \frac{\text{د ص}}{\text{ص}} \text{ يحل } \\ \frac{\text{ب}}{\text{ص} + 2} + \frac{1}{\text{ص} - 2} = \frac{1}{\text{ص} - 4} \\ \frac{\text{ب}}{\text{ص} + 2} + \frac{1}{\text{ص} - 2} = \frac{1}{\text{ص} - 4} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \text{ص} = \text{ه} \\ \text{ص} = \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} \\ \text{ص} = \frac{\text{د ص}}{\text{ه}} \end{array} \right\}$$

$$1 = أ(\text{ص} + 2) + ب(\text{ص} - 2)$$

$$\text{ص} = 2 \quad أ = \frac{1}{4}$$

$$\text{ص} = 2 - ب = \frac{1}{4}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \text{ص} \\ \frac{1}{4} \text{ص} + \frac{1}{4} \end{array} \right\}$$

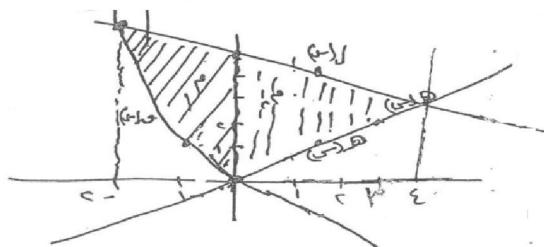
$$= \frac{1}{4} \text{لوه ص} - \frac{1}{4} \text{لوه ج} + |2 + \text{ص}| - |2 - \text{ص}|$$

$$= \frac{1}{4} \text{لوه ه} - \frac{1}{4} \text{لوه ج} + |2 + \text{ه}| - |2 - \text{ه}|$$

السؤال الرابع:

$$(1) \quad q(s) = -s^3, \quad h(s) = \frac{1}{2}s, \quad l(s) = -s^6$$

$\frac{1}{2}s = -s^6$	$-s^3 = -s^6$	$s^3 = \frac{1}{2}s$
$s^3 = \frac{3}{2}s$	$s^3 + s^6 = 0$	$s^3 - s^6 = 0$
$12 = s^3$	نـجـرـب	$s^3 = (1+2s^2)s$
$s = 4$	$s = 2$	س = 0 فقط



$$\left[ -s^6 - s^3 \right]_{-2}^{4} = 12$$

$$\left[ \frac{s^4}{4} + \frac{s^2}{2} - s^6 \right]_{-2}^{4} =$$

$$10 = (4 + 2 - 12) - 0 =$$

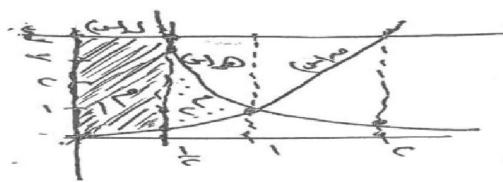
$$\left[ \frac{s^4}{4} + \frac{s^2}{2} - s^6 \right]_{-2}^{4} = 22$$

$$12 = 0 - 16 \times \frac{1}{4} - 8 - 24 =$$

$$22 = 12 + 10 = 32$$

$$2) \quad q(s) = s^2, \quad h(s) = 4, \quad l(s) = \frac{1}{s} \leftarrow \text{عمود}$$

$$\begin{array}{c|c|c}
\epsilon = \frac{1}{2}s & s = 2 & \frac{1}{s} = 2 \\
\frac{1}{4} = \frac{1}{2}s^2 & s = 2, 2 & s^2 = 1 \\
\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = s & & s = 1, 1
\end{array}$$



$$\left[ \frac{1}{3} s^3 - \frac{1}{4} s^2 \right]_1^2 = 1$$

$$\left( \frac{1}{24} - 2 \right) =$$

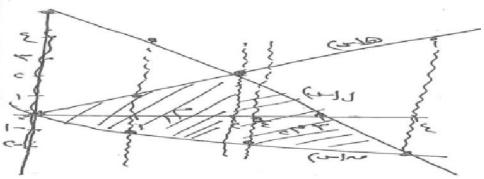
$$\left[ s^2 - \frac{1}{3} s^3 \right]_1^2 = 1$$

$$\frac{1}{24} + \frac{2}{3} = \left[ \frac{1}{3} s^3 - \frac{1}{2} s^2 \right]_1^2 =$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{24} - 2 = 1$$

$$3) \quad q(s) = \sqrt{s}, \quad h(s) = s, \quad l(s) = s - 6$$

$s = 6 - \sqrt{s}$ $6 = 3s$ $2 = s$	$s = \sqrt{s} - 6$ $s = 36 - 3s + 4s^2$ $0 = 36 + 4s^2 - 3s$ $0 = (4s - 9)(s - 4)$	$s = \sqrt{s}$ $s = s^2$ $s^2 - s = 0$ $s = 0, 1$
---	---	--



\* يلاحظ أن هناك أعمدة غير فعالة  $s = 1, s = \frac{1}{4}$  لعدم ظهورها عند نقط تقاطع

$$\left[ \frac{\frac{3}{2}s}{\frac{3}{2}} + \frac{\frac{2}{2}s}{\frac{2}{2}} = s(\sqrt{s} - ) - (s) \right] = 1$$

$$\sqrt{1} \frac{2}{3} + \frac{4}{2} =$$

$$\left[ \frac{\frac{3}{2}s}{\frac{3}{2}} - s - s\sqrt{s} = s(\sqrt{s} - ) - (s - 6) \right] = 2$$

$$(\sqrt{1} \frac{2}{3} + 4 - 12) - (\sqrt{4} \frac{2}{3} + 16 - 24) =$$

$$\frac{8}{3} = \frac{22}{3} = \sqrt{1} \frac{2}{3} - 8 - \frac{16}{3} + 8 + \sqrt{4} \frac{2}{3} + 2 = 2$$

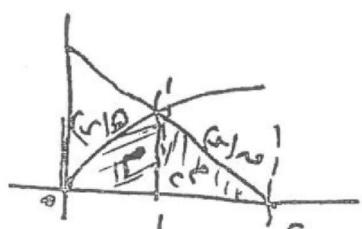
$$\left. \begin{array}{l} 2 \leq s - 2 \\ 2 \geq s + 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{s - 2 \leq h(s) \leq s + 2} \quad (4)$$

المنطقة الأولى بين  $h(s) = s - 2$  ،  $s \geq 2$

$$h(s) = s - 2$$

$$\left| \begin{array}{l} s = 2 \\ s = 4 \\ s = 6 \\ s = 8 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} s = 2 + s \\ s = 2 - s \\ s = 4 - s \\ s = 6 - s \\ s = 8 - s \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} s - 2 = s \\ s - 4 = s \\ s - 6 = s \\ s - 8 = s \end{array} \right|$$

$$\left[ \frac{\frac{2}{2}}{\frac{3}{3}} \right] = \boxed{m_1}$$



$$\frac{2}{3} =$$

$$\left[ \frac{1}{2} \right] = \boxed{m_2}$$

المنطقة الثانية بين

$$h(s) = s + 2 \text{ حيث } s < 2$$

$$h(s) = s + 2 \text{ والمستقيم } s = 2$$

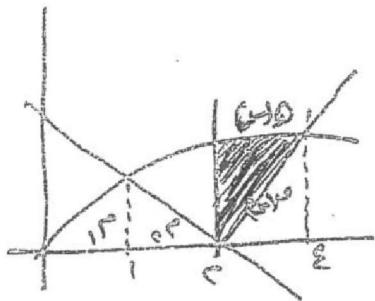
$$s - \sqrt{s} = 2$$

$$s^2 - 4s + 4 = s$$

$$s^2 - 4s + 4 = 0$$

$$(s-4)(s+4) = 0$$

$$s = 4, s = -4$$



$$\int_{-2}^4 (s^2 - 4s + 4) ds = 3m$$

$$\left[ s^2 - 4s + 4 \right]_{-2}^4 = \left[ s^2 - 4s + 4 \right]_{-2}^4 =$$

$$\frac{8\sqrt{2}}{3} - \frac{34}{3} =$$

$$\left( \frac{8\sqrt{2}}{3} + \frac{34}{3} \right) + \left( \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{2}{3} \right) = m$$

٥) المنطقة الأولى  $Q(s) = s^3 - 4s^2 + 4s$

$$s^3 - 4s^2 + 4s = 0 \Leftrightarrow s = 0, s = 2, s = 4$$

$$\int_{-1}^1 (s^3 - 4s^2 + 4s) ds = \left[ \frac{s^4}{4} - \frac{4s^3}{3} + 4s^2 \right]_{-1}^1 = 1m$$

المنطقة الثانية هـ(س) = س، ل(س) = ٣ - ٢س، س = ٠

$$س = ٣ - ٢س \leftarrow ٣س = ٣ \leftarrow س = ١$$

$$\left. (س٢ - ٣) دس \right\} = ٢م$$

$$\left. (٣ - ٣س) دس \right\} =$$

$$\left[ \frac{س^٣}{٢} - س٣ \right] =$$

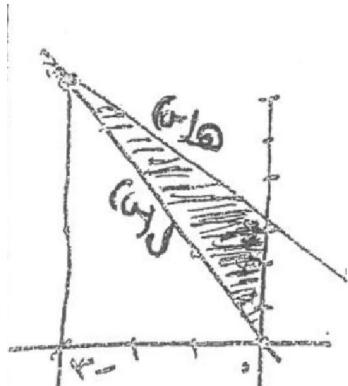
$$\frac{٣}{٢} = ٠ - \left( \frac{٣}{٢} - ٣ \right) =$$

$$\frac{٧}{٤} = \frac{٣}{٢} + \frac{١}{٤} = ٢م + ١م =$$

\*أنظر الرسم الأصلي

لا يحتاج إلى تجزئة لأي منطقة

٦) المنطقة الأولى تقع بين ل(س) = ٣ - س، هـ(س) = ٣ - ٢س، س = ٠



$$\text{اقترانين} \leftarrow ٣ - س - ٢س =$$

$$س = ٣ -$$

$$س = ٣ -$$

$$4.4 = \left[ -s^3 - (s^2 - 3s) \right] = 1m$$

$$4.5 = \left[ -\frac{s^2}{2} + s^3 \right] =$$

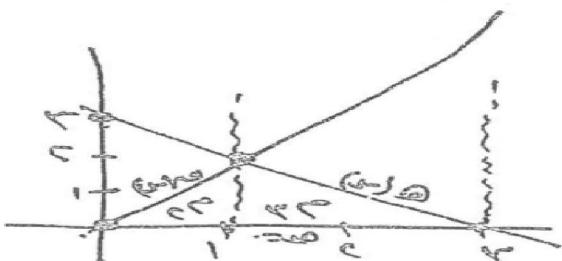
المنطقة الثانية تقع بين ٣ افترانات

$$Q(s) = s^2 - 3s, H(s) = s^3, \text{ ص } = 0$$

$s = 0$ $s = 3$	$s = 0$ $s = 3$	$s^3 - s^2 = 0$ $s^3 + s - 3 = 0$
--------------------	--------------------	--------------------------------------

نجرب  
س = ١

جزئ هذه المنطقة



$$1 < m, m < 2$$

$$\frac{1}{2} = \left[ \frac{s^3}{3} - \frac{s^2}{2} \right] = 2m$$

$$2 = \left[ \frac{s^3}{3} - \frac{s^2}{2} - (s^3 - 3s) \right] = 3m$$

$$\text{المساحة الكلية} = 2 + \frac{1}{2} + 9 = 11 \frac{1}{2}$$