الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

الاتصال

١ $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+7} & ,x\le 3\\ \frac{8}{x-2} & ,x>3\end{cases}$

ابحث في اتصال $f(x)$ عندما $x=3$

الحل ① $f(3)=\frac{8}{3-2}=\frac{8}{1}=8$

② $\lim_{x\to 3^+}\frac{8}{x-2}=8$ ، $\lim_{x\to 3^-}\sqrt{x^2+7}=\sqrt{9+7}=4$

$4\neq 8$

③ f غير متصل عندما $x=3$

٢ $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin^2 x}{x} & ,x<0\\ [x+1] & ,x=0\\ \frac{|x|}{x} & ,x>0\end{cases}$

ابحث في الاتصال عندما $x=$ صفر

① $f(0)=[0+1]=1$

② $\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\frac{x}{x}=1$

$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin^2 x}{x}=\lim_{x\to 0^-}\sin x\cdot\frac{\sin x}{x}=0\times 1=0$

③ $f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)\Rightarrow$ f متصل عندما $x=$ صفر

٣ $f(x)=\begin{cases}[x-3] & ,x\ge 2\\ |x-2| & ,x<2\end{cases}$

ابحث في الاتصال عندما $x=2$

الحل نفيه تقرن $[x-3]\to L_1$ / $x\to 3$

$3\ 2\ 1$

$|x-2|\to$ $\begin{cases}-1 & ,2\le x<3\\ -(x-2) & ,x<2\end{cases}$ ← $-$ عند $x=2$ ، $+$

$f=\begin{cases}-1 & ,2\le x<3\\ -(x-2) & ,x<2\end{cases}$

① $f(2)=-1$

② $\lim_{x\to 2^+}-1=-1$ ، $\lim_{x\to 2^-}-(x-2)=0$

③ f غير متصل عندما $x=2$

٤ $f(x)=\begin{cases}\frac{|\sin x|}{x} & ,x<0\\ \cos x & ,x\ge 0\end{cases}$

ابحث في الاتصال عندما $x=$ صفر

① $f(0)=\cos 0=1$

② $\lim_{x\to 0^+}\frac{|\sin x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$

$\lim_{x\to 0^-}\frac{|\sin x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}-\frac{\sin x}{x}=-1$

③ $f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)\Rightarrow$ f متصل عندما $x=$ صفر

٥ $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x-1} & ,x\neq 1\\ 3p^2-2x^2 & ,x=1\end{cases}$

f متصل عندما $x=1$ فما قيم p

الحل : $f(1)=\lim_{x\to 1}f(x)$

$3p^2-2(1)^2=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$

$3p^2-2=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$

$3p^2-2=2\Leftarrow 3p^2=4\Leftarrow p=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$

٦ $f=\begin{cases}\frac{\sin px}{x} & ,x\neq 0\\ x^3+2p^3 & ,x=0\end{cases}$

f متصل فما قيم p

الحل $f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)$

$4(0)^2+2p^3=\lim_{x\to 0}\frac{\sin px}{x}$

$2p^3=p\Leftarrow 2p^3-p=0$

$p(2p^2-1)=0$

$p=0$ ، $p=\frac{1}{\sqrt{2}}$

٧ $f=\begin{cases}Lx^2+3x & ,x>2\\ 8x+2L & ,x\le 2\end{cases}$

فما قيمة L إذا كانت f متصلة عندما $x=2$

الحل $\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^-}f(x)$

$\lim_{x\to 2^+}Lx^2+3x=\lim_{x\to 2^-}8x+2L$

$4L+6=16+2L$

$2L=10$

$L=5$

الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

٨ $ق(س) = \begin{cases} أ س^2 - ب س + 1 & ، س < 1 \\ 5 & ، س = 1 \\ س^2 - (أ+ب) س + 2 & ، س > 1 \end{cases}$

ق متصل عندما س = 1 فما قيم أ، ب

الحل

$ق(1) = \lim_{س \to 1^+} ق(س)$

$5 = \lim_{س \to 1^+} س^2 - (أ+ب) س + 2$

$5 = 1 - (أ+ب) + 2 \leftarrow$ ① $\boxed{-أ - ب = 2}$

$ق(1) = \lim_{س \to 1^-} ق(س)$

$5 = \lim_{س \to 1^-} أ س^2 - ب س + 1$

$5 = أ - ب + 1 \leftarrow$ ② $\boxed{أ - ب = 4}$

بجمع المعادلتين $\boxed{أ = 1}$ $\boxed{ب = -3}$

ملاحظات هامة :-

١ جميع كثيرات الحدود متصلة على ح

مثال $ق(س) = س^3 + 5س + 9$

٢ اقتران الجيب و الجتاد لخلقه و الجذور الفردية جميعها متصلة على ح

٣ الجذور الزوجية متصلة على مجالها.

٤ الاقترانات النسبية متصلة باستثناء اصفار المقام.

مثال : $ق(س) = \frac{س - 9}{س - 2}$ غير متصل عندما س = 2

مثال : $ق(س) = \frac{س^2 + 8}{س^2 + ب س + 1}$. فما قيم ب

بحيث متصل على ح

الحل يجب أن يكون المقام $\neq$ صفر

يعني المميز $<$ صفر

$ب^2 - 4 \times 1 \times 1 < 0$ صفر

$ب^2 - 4 < 0$ صفر

	-2		2	
	+	× −	×	+

قيم ب $\in (-2, 2)$

٥ اقتران أكبر عدد صحيح لو أحد يكون غير متصل لأنه النهايات تكون غير موجودة.

مثال $ق(س) = [س + 5]$: ق غير متصل $س \in ص$

مثال $ق(س) = [3س + 1]$: ق غير متصل $س \in \frac{ص}{3}$

مثال $ق(س) = \begin{cases} \frac{س^2 - ب}{س - 2} & ، س < 2 \\ أ + ب & ، 2 \leq س < 4 \\ 6 & ، س \geq 4 \end{cases}$

متصل على ح فما قيم أ، ب

الحل :

بما أنه الاقتران متصل فإذن

$\lim_{س \to 2^-} ق(س) = ق(2)$

$\lim_{س \to 2^-} \frac{س^2 - ب}{س - 2}$: $ق(2)$ ق

$\lim_{س \to 2^+}$ = المقام = صفر فإذن

البسط = صفر

$\lim_{س \to 2^-} س^2 - ب = 0$ صفر $\leftarrow \boxed{ب = 4}$

$\lim_{س \to 2^-} ق(س) = \lim_{س \to 2^+} ق(س)$

$\lim_{س \to 2^-} \frac{س^2 - 4}{س - 2} = أ + ب$

$\lim_{س \to 2^+} \frac{(س - 2)(س + 2)}{س - 2} = أ + ب$

$4 + 2 = أ + ب$

① $\boxed{6 = أ + ب}$

$\lim_{س \to 4^-} ق(س) = \lim_{س \to 4^+} ق(س)$

$\lim_{س \to 4^-} أ + ب = \lim_{س \to 4^+} 6$

$4أ + ب = 6$

② $\boxed{4أ + ب = 6}$

بحل المعادلتين ① و ②

$\boxed{أ = 0}$ $\boxed{ب = 6}$

الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

نظريات في الاتصال

اذا كانة و , هـ اقترانين متصلين فإنة ناتج اي عملية حسابية يكون الجواب متصل عند تلك النقطة.

مثال: -

1) اذا كانة و(س) = $\sqrt[3]{س^٥ + ٩}$
هـ(س) = $س^٦ - ٤س^٢ + ١٧س + ١٩$ ابحث في اتصال (و × هـ)(س) عندما س = ٣

الحل: و متصل عندما س = ٣ لانة جذر فردي
هـ متصل عندما س = ٣ لانة كثير حدود
اذاً (و × هـ)(س) متصل عندما س = ٣
لانة حاصل ضرب متصلين.

2) اذا كان و(س) = $[\frac{س}{٢} + ٥]$

$هـ(س) = \begin{cases} س^٢ + ٢س & ، س \geq ٣ \\ ٤س + \frac{٣}{س-٢} & ، س < ٣ \end{cases}$

وكان ل(س) = و(س) − هـ(س) ابحث في اتصال و(س) عندما س = ٣

الحل: نبحث في اتصال هـ(س) عندما س = ٣

هـ(٣) = ١٢ + ٣ = ١٥

نهـا ٤س + $\frac{٣}{س-٢}$ = ١٥ ⟸ هـ متصل عندما س = ٣
س ← ٣+

نهـا $س^٢ + ٢س$ = ١٥
س ← ٣-

و(٣) = $[\frac{٣}{٢} + ٥] = [٦,٥] = ٦$

نهـا $[\frac{س}{٢} + ٥]$ = ٦ ⟸ و متصل عندما س = ٣
س ← ٣

⟸ ل(س) متصل عندما س = ٣ لانة طرح متصلين

3) اذا كان و(س) = $\begin{cases} ٤س + ٣ & ، س \leq ٢ \\ ١٦ - س^٢ & ، س > ٢ \end{cases}$

هـ(س) = $\begin{cases} ٣س^٤ & ، س = ٢ \\ \frac{٣س - ٨}{س - ٢} & ، س \neq ٢ \end{cases}$

وكان ل(س) = ٥ و(س) − $\frac{٦}{٧}$ هـ(س)
ابحث في اتصال ل(س) عندما س = ٢

نبحث في اتصال هـ(س) عندما س = ٢

هـ(٢) = ٣ × ٤ = ١٢

نهـا هـ(س) = نهـا $\frac{٣س - ٨}{س - ٢}$ = نهـا $\frac{٣(س-٢)(س+٢+٤)}{س-٢}$
س ← ٢ س ← ٢ س ← ٢

= ٣(٢+٢+٤) = ٣٦

نهـا و(س) = نهـا (١٦ − $س^٢$) = ١٦ − ٤ = ١٢
س ← ٢ س ← ٢

و(س) متصل عندما س = ٢

$\frac{٦}{٧}$ هـ(س) متصل عندما س = ٢

نبحث في اتصال و(س) − $\frac{٦}{٧}$ هـ(س) عندما س = ٢

و(٢) = | ١١١ | = ١١

نهـا و(س) − $\frac{٦}{٧}$ هـ(س) = ١١ − ١١ = ٠ ⟸ و متصل عندما س = ٢
س ← ٢+

نهـا ٤س + ٣ = ١١
س ← ٢-

و متصل عندما س = ٢

٥ و(س) متصل عندما س = ٢

اذاً ل(س) متصل عندما س = ٢
لانة طرح متصلين.

4) و(س) = [س + ١] − [س − ٢]
ابحث في اتصال و(س) على ح

الحل [س + ١] − [س − ٢]
= [س] + ١ − [س] + ٢
= ١٠ ، متصل على ح لانة كثير حدود

5) اذا كان و(س) , هـ(س) متصلين عندما س = ب لإثبت أن
و(س) + هـ(س) متصل عندما س = ب

الحل: و متصل عندما س = ب فإن
نهـا و(س) = و(ب)
س ← ب

هـ متصل عندما س = ب فإن
نهـا هـ(س) = هـ(ب)
س ← ب

نهـا و + هـ = نهـا و(س) + نهـا هـ(س)
س ← ب س ← ب س ← ب

= و(ب) + هـ(ب)

= (و + هـ)(ب)

⟸ و + هـ متصل عندما س = ب

الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

٦ $ق(س) = \begin{cases} \frac{س^{ن} + (1-ن)س}{ن س} & س < صفر \\ ن & س = صفر \\ \frac{جا ب س - س^{٢}}{س^{٢} جا س} & س > صفر \end{cases}$

فما قيم ن، ب اذا كان ق متصل عندما $س = صفر$

الحل

$ق(٠) = نهـا_{س \to ٠} ق(س)$

$ن = نهـا_{س \to ٠} \frac{جا ب س - س^{٢}}{س^{٢} جا س}$ (اقسم على $س^{٢}$)

$ن = نهـا_{س \to ٠} \frac{\frac{جا ب س}{س} - \frac{س^{٢}}{س^{٢}}}{\frac{س^{٢} جا س}{س^{٢}}}$

$ن = \frac{ب \times ب - ١}{١ \times ٢}$ ← $ب^{٢} = ٥$

$ب = \pm \sqrt{٥}$

$ق(٠) = نهـا_{س \to ٠^{+}} ق(س)$

$ن = نهـا_{س \to ٠^{+}} \frac{ن س^{٣} + (١-ن)س}{ن س^{٢}}$

$ن = \frac{١}{٣}$ ← $ن = \frac{(ن + (١-ن))}{ن \times ٣}$

٧ $ق(س) = \begin{cases} ن - ب جتا س & س = \frac{\pi}{٤} \\ ٣ & س = \frac{\pi}{٤} \\ ب + \frac{\pi}{٤} |س| & س > \frac{\pi}{٤} \end{cases}$

فما قيم ن، ب حيث ق متصل عندما $س = \frac{\pi}{٤}$

الحل :- $ق(\frac{\pi}{٤}) = نهـا_{س \to \frac{\pi}{٤}^{+}} ق(س)$

$٣ = ن - ب جتا \frac{\pi}{٤}$

$٣ = ن - ٢ \times \frac{\sqrt{٢}}{٢}$

$٣ = ن - \sqrt{٢}$ ← $ن = ٥$

$ق(\frac{\pi}{٤}) = نهـا_{س \to \frac{\pi}{٤}^{-}} ق(س)$

$٣ = ب + \frac{\pi}{٤} \times \frac{٤}{\pi}$ ← $ب = ٢$

٨ $ق(س) = \begin{cases} ٢ - ن س & س < ٢ \\ [س + ٥] & س \geq ٢ \end{cases}$

ق متصل عندما $س = ٢$ فما قيمة ن

بحيث ن ∈ ح

الحل

$نهـا_{س \to ٢^{+}} ق(س) = نهـا_{س \to ٢^{-}} ق(س)$

$نهـا_{س \to ٢^{+}} [س + ٥] = نهـا_{س \to ٢^{-}} |س - ٢|$

$٥ + ١ - ن = ٢ - ن$

$٤ + ن = |ن - ٢|$

(أ)	(ب)
$ن - ٢ = ٤ + ن$	$ن - ٢ = -٤ - ن$
$-٢ = ٤$	$٢ن = -٦$
	$ن = -٣$
	∉ ح مقبول

$ن = ١$

قاعدة :-

اذا كان احدالاقترانين او كلاهما غير متصل تنفذ العملية الحسابية ثم نبحث في الاتصال من جديد .

٩ $ق(س) = \begin{cases} ٣س + ٤ & س < ٥ \\ س^{٢} & س \geq ٥ \end{cases}$

$ك(س) = \begin{cases} س & س < ٢ \\ س^{٣} & س \geq ٢ \end{cases}$

وكان $ل(س) = ق(س) + ك(س)$

ابحث في الاتصال عندما $س = ٢$

الحل نلاحظ انه $ق(٢) + ك(٢)$ غير متصل عندما $س = ٢$

لانه $ق(٢) \neq نهـا_{س \to ٢} ق(س)$

عندما ننفذ العملية الحسابية الجمع :-

$ل(س) = ق + ك = \begin{cases} ٣س^{٣} + ٤ + س & ، س < ٢ \\ س^{٢} + س^{٣} & ، س \geq ٢ \end{cases}$

$ل = \begin{cases} ٣س^{٣} + س + ٤ & ، س < ٢ \\ ٢س^{٣} + س^{٢} & ، س \geq ٢ \end{cases}$

$ل(٢) = ١٦$

$نهـا_{س \to ٢^{+}} ل(س) = ١٦$ | $نهـا_{س \to ٢^{-}} ل(س) = ١٦$

$ل(س)$ متصل عندما $س = ٢$

الاستاذ
اياد عماد عباد
٠٧٩٩٣٦٦٦١١

تمارين وتدريبات الكتاب

١ ابحث في اتصال د حيث
د(س) = س [س+١] عندما س = ١

الحل [س+١] = { ١ ، ١ ≤ س < ٢ ، ٢ ، ٢ ≤ س < ٣

د(س) × [س+١] = { س × ١ ، ١ ≤ س < ٢ ، س × ٢ ، ٢ ≤ س < ٣

نها (س) = ١ ، نها (س) = ٢ ∴ نها د(س) غير موجودة
س→١⁻ س→١⁺ س→١

∴ د غير متصل عندما س = ١

٢ د(س) = { أ س² − ب س + ١ ، س < ١ ، س = ١ ، ٢ س³ − (أ+ب) س + ٢ ، س > ١

عين قيم أ، ب التي تجعل د متصل عندما س = ١

الحل
د(١) = نها د(س) = نها د(س)
س→١ س→١⁺ س→١⁻

٥ = نها ٢ س³ − (أ+ب) س + ٢ ، ٥ = نها أ س² − ب س + ١
س→١⁺ س→١⁻

٥ = ٢ − (أ+ب) + ٢ ، ٥ = أ − ب + ١

−أ − ب = ٢ ، أ − ب = ٤

بحل المعادلتين أ = ١ ، ب = −٣

٣ إذا كانت د(س) = (س − ٢)³
هـ(س) = [س+١]
ابحث في اتصال د(س) × هـ(س) عندما س = ٢

الحل هـ(س) = [س+١] = { ٢ ، ١ ≤ س < ٢ ، ٣ ، ٢ ≤ س < ٣

هـ(س) غير متصل عندما س = ٢

عندها تنفذ الطلبة الى ايجاد الضرب

د(س) هـ(س) = { (س − ٢)³ × ٢ ، ١ ≤ س < ٢ ، (س − ٢)³ × ٣ ، ٢ ≤ س < ٣

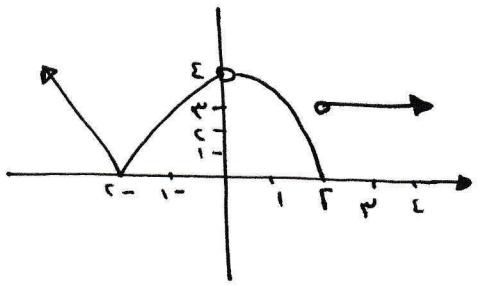
نها (س − ٢)³ × ٣ = صفر
س→٢⁺

نها (س − ٢)³ × ٢ = صفر] ∴ نهاية د(س) هـ(س) = صفر
س→٢⁻ س→٢

(د × هـ)(٢) = صفر

⇐ د × هـ متصل عندما س = ٢

١ من الشكل المجاور ما هم س التي يكون عندها د غير متصل.



الحل:
د غير متصل عندما س = صفر ، ٢
لأن د(٠) ≠ نها د(س)
س→٠
لأن نها د(س) ≠ نها د(س)
س→٢⁻ س→٢⁺

٤ د(س) = { |أ س| / س ، س < صفر ، ١ − جتا س ، س ≥ صفر

ابحث في الاتصال عندما س = صفر

الحل: د(٠) = ١ −
نها ١ − جتا س = ١ −
س→٠
نها |أ س| / س = −أ
س→٠⁻

د متصل عندما س = صفر ⇐ −أ = ١ − ⇐ أ = ١

٣ ك(س) = { حا أ س / س ، س ≠ صفر ، ١ ، س = صفر

ابحث في الاتصال عندما س = صفر

الحل
ك = { حا |أ س| / س ، س ≠ صفر ، ١ ، س = صفر

ك = { حا س / س ، س > صفر ، حا −س / −س ، س < صفر ، ١ ، س = صفر

د(٠) = ١
نها حا س / س = ١
س→٠⁺
نها حا −س / −س = ١
س→٠⁻
نها ك(س) = ١
س→٠

د غير متصل عندما س = صفر

١-

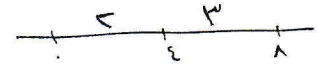
$$ق(س)=\begin{cases}\sqrt{س+1} & ,\ 0 \le س < 3\\ [\frac{س}{4}+2] & ,\ 3 \le س < 6\\ |س-9| & ,\ س = 6\end{cases}$$

ابحث اتصال ق (س) لكل س $\in$ [٠ ، ٦]

الحل:

ⓐ نعيد تعريف $[\frac{س}{4}+2]$

حيث ل = ٤



ⓑ لاحظ تعريف |س-٩| لأنه لا يوجد فترة.

$$\Leftarrow هـ(س)=\begin{cases}\sqrt{س+1} & ,\ 0 \le س < 3\\ 2 \text{ ، } 3 \le س < 4\\ 3 \text{ ، } 4 \le س < 6\\ |س-9| \text{ ، } س = 6\end{cases}$$

القواعد:-

$\sqrt{س+1}$ متصل على (٠ ، ٣) لأنه مأخوذ الجذر متصل وهو موجب

٢ متصل على (٣ ، ٤) لأنه كثير حدود.

٣ = = = (٤ ، ٦) = = = =

الأطراف:-

عند س = ٠ ⇐ هـ(٠) = ١ ⇐ متصل عندما س = ٠

نهاية هـ(س) = ١ ، س ← ٠+

عند س = ٦ ⇐ هـ(٦) = |٩-٦| = ٣ ⇐ متصل عندما س = ٦

نهاية هـ(س) = ٣ ، س ← ٦-

التحول:

عند س = ٣

هـ(٣) = ٢ ⇐ متصل عندما س = ٣

نهاية هـ(س) = ٢ ، س ← ٣+

نهاية هـ(س) = ٢ ، س ← ٣-

عند س = ٤

هـ(٤) = ٣ ⇐ غير متصل عندما س = ٤

نهاية هـ(س) = ٣ ، س ← ٤+

نهاية هـ(س) = ٢ ، س ← ٤-

٢- $$ق(س)=\begin{cases}[س+2] & ,\ س=1\\ 3س+جا\frac{\pi}{س} & ,\ 1<س<2\\ |5س-3| & ,\ س=2\\ س^3-1 & ,\ س>2\end{cases}$$

ابحث الاتصال ق(س) على (∞ ، ١)

الحل:

القواعد:

$س^3-1$ متصل على (٢ ، ∞) لأنه كثير حدود

$3س+جا\frac{\pi}{س}$ متصل على (١ ، ٢) لأنها مجموع متصلين

الأطراف:

عند س = ١ ⇐ هـ(١) = [١+٢] = ٣

نهاية هـ(س) = ٣+جاπ = ٣+٠ = ٣ ، س ← ١+

⇐ هـ(١) = نهاية هـ(س) ، س ← ١+

⇐ هـ(س) متصل عندما س = ١ من اليمين.

التحول:

عند س = ٢

هـ(٢) = |٥×٢-٣| = ٧

نهاية هـ(س) = ٣×٢+جا$\frac{\pi}{2}$ = ٧ ، س ← ٢-

نهاية هـ(س) = ٨-١ = ٧ ، س ← ٢+

⇐ هـ(٢) = نهاية هـ(س) ، س ← ٢

⇐ هـ(س) متصل عندما س = ٢

النتيجة النهائية:-

⇐ هـ(س) متصل على [١ ، ∞).

النتيجة النهائية:

هـ(س) متصل على

[٠ ، ٦] - {٤}

15- $$ق(س) = \begin{cases} \frac{2س^2 - 1}{س - 2} & ,\ س > 2 \\ ب س + جـ & ,\ 2 \leq س \leq 4 \\ 6 س & ,\ س \leq 4 \end{cases} $$

اوجد أ , ب , جـ اذا كان ق(س) متصلا على ح

الحل:

16- $ق(س) = \frac{5س + 2}{س^2 + ب س + 1}$

اوجد ب بحيث ق(س) متصل على ح

الحل:

17- اوجد الفترات التي يكون ق(س) متصلا فيها :

1) $ق(س) = \frac{\sqrt{س^2 + 1}}{|س| + 3}$

الحل:

2) $ق(س) = \frac{\sqrt{9 - س^2}}{س^2 - س}$

الحل:

18- اوجد قيم س التي ق(س) عندها غير متصل فيما يلي :

أ)ق(س)= $5س^3 - 2س^2 + 9$

الحل:

ب)ق(س)= $|س - 16|^3 + \sqrt{5س + 6}$

الحل:

ج)ق(س)= $5جا3س + جتاس^2$

الحل:

د)ق(س)= $\frac{3س}{س^2 - 2س}$

الحل:

هـ)ق(س)= $\begin{cases} س^2 + 2 & , \ س < 1 \\ 3س & , \ 1 < س < 4 \\ س^2 - 1 & , \ س \geq 4 \end{cases}$

الحل:

و)ق(س)= $\begin{cases} س^2 & , \ س \notin ص \\ 2س & , \ س \in ص \end{cases}$

الحل:

ز) ق(س)= $[س + 3]$

الحل:

ح)ق(س)=$|س^2 + 16|^3 + \sqrt{5س + 6}$

الحل:

ط) ق(س)= $[\frac{س}{3} + 2]$

الحل:

ي) ق(س) = $(س^2 - 4) . [س + 3]$

الحل:

19 – ق(س) = $\begin{cases} [س + 5] & ، \ س < أ \\ |2 - س| & ، \ س \geq أ \end{cases}$

متصل عندما س = أ $\in$ ص ، فما قيمة أ

الحل:

20- ق(س)= $\sqrt{\frac{\text{س- 5}}{\text{3- س}}}$

إبحث اتصال ق(س) عند س = 5

الحل:

---

21 –

ق (س) = $\begin{cases} \text{س}^2 + \text{س} & ,\ \text{س} < 2 \\ [\text{س} + 4] & ,\ \text{س} = 2 \\ \sqrt{\text{س}^2 + 5} + \frac{6}{\text{س}} & ,\ \text{س} > 2 \end{cases}$

ابحث اتصال ق(س) لكل س ∋ ح

الحل:

22- ق(س)= $\begin{cases} \text{س}^2 + 4 & ,\ |\text{س}| \geq 3 \\ 4\ \text{س} + 1 & ,\ |\text{س}| < 3 \end{cases}$

ابحث اتصال ق(س) لكل س ∋ ح

الحل:

23 - ق(س)= $\begin{cases} \frac{3\text{ظاس}}{\text{س}} & ,\ -\frac{\pi}{4} \leq \text{س} < 0 \\ [\text{س} + 3] & ,\ \text{س} = 0 \\ 3\text{جتاس} & ,\ 0 < \text{س} < \frac{\pi}{4} \end{cases}$

ابحث اتصال ق(س) على $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$

الحل:

بسم الله الرحمن الرحيم

اعداد الاستاذ
اياد عماد عباد

ورقة عمل

١ اذا كانت $\lim_{س \to ٣} [أ س + ١] = ٣$ فما قيمة أ؟؟

الحل:

$[٣أ + ١] = ٣ \Leftarrow ٣ \leq ٣أ + ١ < ٤$

$\Leftarrow ٢ \leq ٣أ < ٣ \Leftarrow ١ \leq أ < \frac{٣}{٣}$

* نفحص الأطراف $أ = ١ \Leftarrow \lim_{س \to ٢} [س + ١] = ٢ \neq ٣$

$أ = \frac{٣}{٣} \Leftarrow \lim_{س \to ٢} [\frac{٣}{٣} س + ١] = ٣$

$\Leftarrow ١ \leq أ < \frac{٣}{٣}$ تهمل

٢ $\lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتا س}{س^{ن}}$ موجودة حيث

ن ∈ ص$^{+}$ ، فما قيم ن

الحل:

$\lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتا س}{س^{ن}} \times \frac{١ + جتا س}{١ + جتا س} = \lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتا^{٢} س}{س^{ن} (١ + جتا س)}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{جا^{٢} س}{س^{ن}} \times \lim_{س \to ٠} \frac{١}{١ + جتا س}$

تكون النهاية موجودة عندما درجة البسط أكبر أو تساوي درجة المقام

أي أنه ن ≥ ٢ لكن ن ∈ ص$^{+}$

$\Leftarrow ن = \{٢، ١\}$

٣ اذا كانت $\lim_{س \to ٢} \frac{أ س^{٣} + ٤ ب س + ٨}{س^{٢} - ٢}$ موجودة

أثبت أن $أ ب < \frac{١}{٢}$.

البرهان:

بما أن النهاية موجودة وناتج التعويض بالمقام = صفر ⇐ البسط = ٠

$\Leftarrow \lim_{س \to ٢} أ س^{٣} + ٤ ب س + ٨ = ٠ \Leftarrow ٨ أ + ٨ ب + ٨ = ٠$

$\Leftarrow ٨ أ + ٨ ب = -٨ \Leftarrow أ + ب = -١$

$\Leftarrow ب = -١ - أ$

$\Leftarrow أ ب = أ(-١ - أ) = -أ - أ^{٢}$

$\Leftarrow أ ب = -(أ^{٢} + أ)$

$\Leftarrow أ ب = -(أ^{٢} + أ + \frac{١}{٤}) + \frac{١}{٤}$

$\Leftarrow أ ب = \frac{١}{٤} - (أ + \frac{١}{٢})^{٢}$

$\Leftarrow أ ب < \frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٤} < \frac{١}{٢}$

$\Leftarrow أ ب < \frac{١}{٢}$

٤ اذا كانه هـ اقتران كثير حدود وكانه باقي قسمته على س - ٣ هو ٥ اوجد

$\lim_{س \to ٣} \frac{هـ(س) - ٥}{س - ٣}$

الحل:-

هـ(س) = (ناتج × المقسوم عليه) + الباقي

هـ(س) = ل(س)(س - ٣) + ٥

لكن بالطلب $\lim_{س \to ٣} \frac{هـ(س) - ٥}{س - ٣}$

$\Leftarrow \lim_{س \to ٣} \frac{ل(س)(س - ٣) + ٥ - ٥}{س - ٣}$

$= \lim_{س \to ٣} ل(س) + \lim_{س \to ٣} \frac{٥ - ٥}{س - ٣}$

$= هـ ف + (٥ - ٥) = -٤$

٥ اذا كانت $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٣} + أ س + ب}{س^{٢} - ٢} = ٨$

فما قيم أ، ب

الحل:

بما أن النهاية موجودة وناتج التعويض بالمقام = صفر ⇐ ناتج التعويض بالبسط = ٠

$\Leftarrow ٨ + ٢أ + ب = ٠ \Leftarrow \boxed{ب = -٨ - ٢أ}$

عوض قيمة ب في النهاية ⇐

$\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٣} + أ س + (-٨ - ٢أ)}{س^{٢} - ٢} = ٨$ ، بترتيب البسط

$\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٣} - ٨}{س^{٢} - ٢} + \lim_{س \to ٢} \frac{أ س - ٢أ}{س^{٢} - ٢} = ٨$

$١٢ + أ = ٨ \Leftarrow أ = ٨ - ١٢$

$\boxed{أ = -٤}$

$\Leftarrow ب = -٨ - ٢أ$

بسم الله الرحمن الرحيم

اعداد الاستاذ
اياد عماد عباد

٦ اذا كانت $\lim_{س \to ٢} \frac{أ س^{٣} + ٢ ب س - ١٢}{س - ٢}$ موجودة

اوجد $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢} + (٢أ + ب - ٣) س - (٣ ٢أ + ب)}{س - ٣}$

الحل:

$\lim_{س \to ٢} \frac{أ س^{٣} + ٢ ب س - ١٢}{س - ٢}$ موجودة

بما أن النهاية موجودة وناتج التعويض بالمقام = صفر فإن ناتج التعويض بالبسط = صفر

$\Leftarrow$ نهـا $_{س \to ٢}$ $أ س^{٣} + ٢ ب س - ١٢ = ٠$

$\Leftarrow ٨أ + ٤ ب - ١٢ = ٠$

$\Leftarrow ٢أ + ب = ٣$

لكن

$$\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢} + (٢أ + ب - ٣) س - (٣ ٢أ + ب)}{س - ٣}$$

$$= \lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢} + (٣ - ٣) س - ٣ (٣)}{س - ٣}$$

$$= \lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{(س - ٣)} = ٦$$

٧ اذا كانت $\lim_{س \to ١} \frac{س^{ن} - ١}{س - ١} = ن$

فما قيمة $\lim_{س \to ١} \frac{س^{ن+١} - (ن + ١) س + ن}{س - ١}$

الحل:

$$= \lim_{س \to ١} \frac{س^{ن+١} - ن س - س + ن}{س - ١}$$

نرتب البسط.

$$= \lim_{س \to ١} \frac{س^{ن+١} - س}{س - ١} + \lim_{س \to ١} \frac{ن - ن س}{-(س - ١)}$$

$$= \lim_{س \to ١} \frac{س (س^{ن} - ١)}{س - ١} + \lim_{س \to ١} \frac{ن (١ - س)}{-(١ - س)}$$

$$= \lim_{س \to ١} س \times \lim_{س \to ١} \frac{س^{ن} - ١}{س - ١} - ن$$

$$= ١ \times ن - ن = ن - ن = صفر.$$

٨ اذا كانت $د(س) = \begin{cases} \frac{٥ س^{٣} + ٢ (١٠ + أ) س + ٤ أ}{س + ٢} & س \neq -٢ \\ -٦ & س = -٢ \end{cases}$

أوجد قيمة أ التي تجعل $د(س)$ متصل عندما $س = -٢$

الحل:

بما أن $د(س)$ متصل $\Leftarrow$ نهـا $_{س \to -٢}$ $د(س) = د(-٢)$

$\Leftarrow$ نهـا $_{س \to -٢}$ $\frac{٥ س^{٣} + ٢ (١٠ + أ) س + ٤ أ}{س + ٢} = -٦$

$\Leftarrow$ نهـا $_{س \to -٢}$ $\frac{٥ س^{٣} + ٢ أ س + ١٠ س + ٤ أ}{س + ٢} = -٦$

$\Leftarrow$ نهـا $_{س \to -٢}$ $\frac{٥ س^{٣} + ١٠ س}{س + ٢} + \frac{٢ أ س + ٤ أ}{س + ٢} = -٦$

$\Leftarrow$ نهـا $_{س \to -٢}$ $\frac{٥ س (س^{٢} + ٢)}{س + ٢} + \frac{٢ أ (س + ٢)}{س + ٢} = -٦$

$\Leftarrow$ نهـا $_{س \to -٢}$ $٥ س (س^{٢} + ٢) + ٢ أ = -٦$

$\Leftarrow -١٠ + ٢ أ = -٦ \Leftarrow ٢ أ = -٦ + ١٠$

$\Leftarrow ٢ أ = ٤ \Leftarrow$ أ $= ٢$

بسم الله الرحمن الرحيم

اعداد الاستاذ
اياد عماد عباد

"

١٠ أوجد $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س} - ١}{٨ - (س+١)^{٣}}$

الحل:

نفرض $ص = س + ١ \Leftarrow س = ص - ١$

عندما $س \to ١ \Leftarrow ص \to ٢$

$$= \lim_{ص \to ٢} \frac{\sqrt{ص-١} - ١}{٨ - ص^{٣}} \times \frac{\sqrt{ص-١} + ١}{\sqrt{ص-١} + ١}$$

$$= \lim_{ص \to ٢} \frac{(ص-١) - ١}{(٨ - ص^{٣})(\sqrt{ص-١} + ١)}$$

$$= \lim_{ص \to ٢} \frac{(ص-٢)}{(٢-ص)(٤+٢ص+ص^{٢})(\sqrt{ص-١} + ١)}$$

$$= \frac{-١}{٢١ \times ٤} = \frac{-١}{٤٢}$$

١١ أوجد $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{٤ - س^{٢}} - \sqrt{٦ - س} + ص}{\sqrt{س} - \sqrt{٢}}$

بالاستعانة بالإضافة و/أو ط

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{٤ - س^{٢}}}{\sqrt{س} - \sqrt{٢}} - \lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{٦ - س} - ٢}{\sqrt{س} - \sqrt{٢}}$$

$$= \lim_{س \to ٢} \sqrt{\frac{٤ - س^{٢}}{س - ٢}} \times \frac{\sqrt{س} + \sqrt{٢}}{\sqrt{س} + \sqrt{٢}} - \lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{٦ - س} - ٢}{س - ٢} \times \frac{\sqrt{٦ - س} + ٢}{\sqrt{٦ - س} + ٢}$$

$$= \lim_{س \to ٢} \sqrt{\frac{(٢ - س)(٢ + س)}{(س - ٢)}} \times (\sqrt{س} + \sqrt{٢}) - \lim_{س \to ٢} \frac{(٢ - س)}{(س - ٢)(\sqrt{٦ - س} + ٢)}$$

$$= \sqrt{٢+٢} \times (\sqrt{٢} + \sqrt{٢}) - \frac{-١}{\sqrt{٦-٢} + ٢} = ٤ \sqrt{٢} - \frac{-١}{٤} = \frac{١}{٤} + ٤ \sqrt{٢}$$

١٢ $\lim_{س \to ٨} \frac{(\sqrt[٣]{س^{٢}} - ٤\sqrt[٣]{س} + ٤)(\sqrt[٣]{س} + ٢)}{س - ٨}$

نلاحظ $(\sqrt[٣]{س^{٢}} - ٤\sqrt[٣]{س} + ٤)(\sqrt[٣]{س} + ٢)$ مجموع مكعبين

$= س + ٨$

$$= \lim_{س \to -٨} \frac{س + ٨}{(س - ٨)(\sqrt[٣]{س^{٢}} - ٤\sqrt[٣]{س} + ٤)(\sqrt[٣]{س} + ٢)} = \frac{١}{-١٦}$$

١٣ اذا كانت

$$د(س) = \begin{cases} س^{٢} - ١ & ، س \leq ١ \\ ٣س & ، ١ < س < ٢ \\ \begin{cases} س + ١٠ & ، س < ٢ \\ ٦ & ، س = ٢ \end{cases} & ، س > ٢ \end{cases}$$

ابحث في اتصال $(هـ \cdot د)(س)$ عندما $س = ٢$

الحل:

نلاحظ أنه $هـ$ متصل عندما $س = ٢$ لأن ... = ... = ... = $هـ$ متصل عندما $س = ٢$

نجد $(هـ \cdot د)(س)$

	$س < ١$	$١ < س < ٢$	$س > ٢$
$هـ$	$س - ١$	٣	$س^{٢} - ١$
$د$	$س^{٢} - ١$	$٣س$	$\begin{cases} س + ١٠ & ، س < ٢ \\ ٦ & ، س = ٢ \end{cases}$
$هـ \times د$	$(س-١)(س^{٢}-١)$ [١]	$٣ \times ٣س$ [٢]	$(س^{٢}-١)(س+١٠)$ [٣]

$$(هـ \times د)(س) = \begin{cases} س^{٣} + ١٠س^{٢} - س - ١٠ & ، س < ١ \\ ٩س & ، ١ < س < ٢ \\ س^{٣} + ١٠س^{٢} - س - ١٠ & ، س > ٢ \\ ٣٦ & ، س = ٢ \end{cases}$$

$\lim_{س \to ١^{-}} (هـ \times د)(س) = ١ + ١٠ - ١ - ١٠ = ١$

$\lim_{س \to ١^{+}} (هـ \times د)(س) = ٩$

$\lim_{س \to ٢^{-}} (هـ \times د)(س) = ٨ + ٤٠ - ٢ - ١٠ = ٣٦$

$(هـ \times د)(١) = ٩$

$(هـ \times د)(٢) = ٣٦$

$\lim_{س \to ١} (هـ \times د)(س)$ غير موجود $\Rightarrow$ $هـ \times د$ غير متصل عند $س = ١$

$\lim_{س \to ٢} (هـ \times د)(س) = (هـ \times د)(٢) = ٣٦$ $\Rightarrow$ $هـ \times د$ متصل عند $س = ٢$

بسم الله الرحمن الرحيم

اعداد الاستاذ
اياد عماد عباد

$\Leftarrow (f \times g)(2) = 36$

$\because \lim_{s \to 2^+} (f \times g)(s) = \lim_{s \to 2^+} 3s^2 - s = 6$

$\lim_{s \to -2^-} (f \times g)(s) = \lim_{s \to -2^-} 1 - s = 1 - (-2) = 3$

$\Leftarrow \lim_{s \to 2} (f \times g)(s) = 6 \neq 3$

$\Leftarrow (f \times g)(s)$ غير متصل عندما $s = 2$

---

14) $\lim_{s \to \pi} \frac{\text{ظا}s - \text{ظا}\pi}{s - \pi} = \div$

لكن: $\text{ظا}s - \text{ظا}\pi = (1 + \text{ظا}s\,\text{ظا}\pi)(\text{ظا}(s-\pi))$

$\Leftarrow \lim_{s \to \pi} \frac{(1 + \text{ظا}s\,\text{ظا}\pi) \times \text{ظا}(s-\pi)}{s - \pi}$

$= \lim_{s \to \pi} (1 + \text{ظا}s\,\text{ظا}\pi) \times \lim_{s \to \pi} \frac{\text{ظا}(s-\pi)}{s-\pi}$

$= (1 + \text{ظا}\pi\,\text{ظا}\pi) \times 1$

$= (1 + \text{ظا}^2\pi)$

$= \text{قا}^2\pi$.

---

15) $\lim_{s \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \text{ظا}^2 s}{\text{جتا}2s} = \div$

$= \lim_{s \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \frac{\text{جا}^2 s}{\text{جتا}^2 s}}{\text{جتا}^2 s - \text{جا}^2 s} = \lim_{s \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جتا}^2 s - \text{جا}^2 s}{\text{جتا}^2 s (\text{جتا}^2 s - \text{جا}^2 s)}$

$= \lim_{s \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جتا}^2 s - \text{جا}^2 s}{\text{جتا}^2 s (\text{جتا}^2 s - \text{جا}^2 s)(\text{جتا}^2 s + \text{جا}^2 s)}$

$= \lim_{s \to \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\text{جتا}^2 s (\text{جتا}^2 s + \text{جا}^2 s)}$

$= \frac{1}{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

---

16) $\lim_{s \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}\,\text{جتا}s - 1}{1 - \text{ظا}^2 s}$

$= \lim_{s \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}\,\text{جتا}s - 1}{1 - \text{ظا}^2 s} \times \frac{\sqrt{2}\,\text{جتا}s + 1}{\sqrt{2}\,\text{جتا}s + 1}$

$= \lim_{s \to \frac{\pi}{4}} \frac{2\,\text{جتا}^2 s - 1}{(1 - \text{ظا}^2 s)(\sqrt{2}\,\text{جتا}s + 1)}$ لكن $\boxed{1 = \text{جا}^2 s + \text{جتا}^2 s}$

$= \lim_{s \to \frac{\pi}{4}} \frac{2\,\text{جتا}^2 s - (\text{جا}^2 s + \text{جتا}^2 s)}{(1 - \text{ظا}^2 s)(\sqrt{2}\,\text{جتا}s + 1)}$

$= \lim_{s \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جتا}^2 s - \text{جا}^2 s}{(1 - \text{ظا}^2 s)(\sqrt{2}\,\text{جتا}s + 1)}$

$= \lim_{s \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جتا}^2 s - \text{جا}^2 s}{(1 - \frac{\text{جا}^2 s}{\text{جتا}^2 s})(\sqrt{2}\,\text{جتا}s + 1)}$

$= \lim_{s \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جتا}^2 s - \text{جا}^2 s}{\text{جتا}^2 s - \text{جا}^2 s} \times \lim_{s \to \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{2}\,\text{جتا}s + 1}$

$= \lim_{s \to \frac{\pi}{4}} \frac{(\text{جتا}^2 s - \text{جا}^2 s)(\text{جتا}^2 s + \text{جا}^2 s)}{(\text{جتا}^2 s - \text{جا}^2 s)} \times \frac{1}{\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + 1}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{1} \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$

---

17) $\lim_{s \to \frac{\pi}{2}} (\text{جا}s - \text{ظا}s)$

$= \lim_{s \to \frac{\pi}{2}} (\text{جا}s - \frac{\text{جا}s}{\text{جتا}s}) = \lim_{s \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا}s\,\text{جتا}s - \text{جا}s}{\text{جتا}s}$

$= \lim_{s \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا}s(\text{جتا}s - 1)}{\text{جتا}s} = \lim_{s \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا}s}{\text{جتا}s} \times \lim_{s \to \frac{\pi}{2}} (\text{جتا}s - 1)$

$= \lim_{s \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \text{جتا}s}{\text{جتا}s} \times \frac{1 + \text{جتا}s}{1 + \text{جتا}s}$

$= \lim_{s \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \text{جتا}^2 s}{\text{جتا}s (1 + \text{جتا}s)} = \lim_{s \to \frac{\pi}{2}} \frac{(\text{جا}s)(\text{جا}s)}{\text{جتا}s (1 + \text{جتا}s)}$

$= \lim_{s \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا}s}{1 + \text{جتا}s} = \frac{1}{2} = \text{صفر}$