مثال: اذا كانت جتاص = جاس أثبت أن: $\frac{ص''}{1-(ص')^2}$ = ظتاص

الحل: نشتق ⇐ $-جاص \times ص' = جتاص$ نشتق مرة أخرى $\left\{ ص' = -\frac{جتاص}{جاص} \right.$

$\Leftarrow -جاص \times ص'' + ص' \times -جتاص \times ص' = -جاس$ نقسم على $(-جاص)$

$\Leftarrow ص'' + (ص')^2 \times \frac{جتاص}{جاص} = +\frac{جاس}{جاص}$ وبما أن جاس = جتاص

$\therefore ص'' + (ص')^2 \times ظتاص = \frac{جتاص}{جاص} \Leftarrow ص'' + (ص')^2 \times ظتاص = ظتاص$

$\Leftarrow ص'' = ظتاص - (ص')^2 \times ظتاص$

$\Leftarrow ص'' = ظتاص\,(1-(ص')^2) \Leftarrow ظتاص = \frac{ص''}{1-(ص')^2}$

عامل مشترك

سؤال: س = ظتاص أثبت أن: $ص''(1+س^2) = جا^2 ص$

مثال: اذا كانت $\sqrt{س} + \sqrt{ص} = 2$ أثبت أن $\frac{د^2ص}{د س^2} = \frac{1}{س\sqrt{ص}}$

الحل: نشتق الطرفين ⇐ $\frac{1}{2\sqrt{س}} + \frac{1}{2\sqrt{ص}} \frac{د ص}{د س} = 0$

$\Leftarrow \frac{1}{2\sqrt{ص}} \frac{د ص}{د س} = -\frac{1}{2\sqrt{س}} \Leftarrow \frac{د ص}{د س} = -\frac{\sqrt{ص}}{\sqrt{س}}$

$\frac{د^2ص}{د س^2} = \sqrt{س} \times -1 \frac{1}{2\sqrt{ص}} \frac{د ص}{د س} - (-\sqrt{ص}) \times \frac{1}{2\sqrt{س}}$

$= \left(\sqrt{س} \times -\frac{1}{2\sqrt{ص}} \times -\frac{\sqrt{ص}}{\sqrt{س}} + \sqrt{ص} \times \frac{1}{2\sqrt{س}}\right) \times \frac{1}{س} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{ص}}{2\sqrt{س}}\right) \times \frac{1}{س}$

$= \frac{\sqrt{س} + \sqrt{ص}}{2\sqrt{س}} \times \frac{1}{س} = \frac{2}{2س\sqrt{س}} = \frac{1}{س\sqrt{س}}$

مثال: $س + ص = س ص$ أثبت أن $ص'' = \frac{٢ص^{٣}}{س^{٣}}$

الحل:

$س + ص = س ص \Leftarrow س = س ص - ص$

$\Leftarrow س = ص(س - ١) \Leftarrow ص = \frac{س}{س - ١}$ نشتقه

$\Leftarrow ص' = \frac{(س-١)(١) - (س)(١)}{(س-١)^{٢}} \Leftarrow ص' = \frac{س - ١ - س}{(س-١)^{٢}}$

$\Leftarrow ص' = \frac{-١}{(س-١)^{٢}}$

$\Leftarrow ص'' = \frac{٢(س-١)}{(س-١)^{٤}} = \frac{٢}{(س-١)^{٣}}$

$\therefore ص'' = \frac{٢ص^{٣}}{س^{٣}}$

ام السؤال:

$ص = \frac{س}{س-١}$

$س - ١ = \frac{س}{ص}$ نكعب

$(س-١)^{٣} = \frac{س^{٣}}{ص^{٣}}$

مثال: اذا كان $جا ص = ظا س$ أثبت أن: $ظا ص = \frac{ص''}{٢ قا^{٢} س + (ص')^{٢}}$

الحل: نشتق الطرفين $\Leftarrow جتا ص \times ص' = قا^{٢} س$ نشتق مرة أخرى

$\Leftarrow جتا ص \times ص'' + ص' \times -جا ص \times ص' = ٢ قا س \times قا س ظا س$

نستبدل ظا س بـ جا ص $\Leftarrow جتا ص \times ص'' - جا ص \times (ص')^{٢} = ٢ قا^{٢} ص جا ص$

بالقسمة على جتا ص $\Leftarrow ص'' - ظا ص \times (ص')^{٢} = ٢ قا^{٢} ظا ص$

$\Leftarrow ص'' = ٢ قا^{٢} ظا ص + ظا ص \times (ص')^{٢}$

$\Leftarrow ص'' = ظا ص (٢ قا^{٢} + (ص')^{٢})$

$\Leftarrow ظا ص = \frac{ص''}{٢ قا^{٢} + (ص')^{٢}}$

مثال: اذا كان $م^{٣}(ص^{٢}) = ٥س^{٣} + ٣$ وكانت $ص = ١$ عندما $س = ١$ وأيضاً $م'(١) = ٥$

فجد $\frac{د ص}{د س}$ عندما $س = ١$ ، $ص = ١$

الحل: نشتق الطرفين $\Leftarrow ٣ م^{٢}(ص^{٢}) \times م'(ص^{٢}) \times ٢ص \frac{د ص}{د س} = ١٥ س^{٤}$

نضع $\boxed{س = ١}$ $\boxed{ص = ١}$

$\Leftarrow ٣ م^{٢}(١) \times م'(١) \times ٢ \frac{د ص}{د س} = ١٥$

ولإيجاد $م(١) \Leftarrow م^{٣}(١) = ٥ + ٣ = ٨ \Leftarrow م(١) = \sqrt[٣]{٨} = ٢$

$\Leftarrow ٣ \times ٤ \times ٥ \times ٢ \frac{د ص}{د س} = ١٥ \Leftarrow \frac{د ص}{د س} = \frac{١٥}{٢ \times ٥ \times ٤ \times ٣} = \frac{١}{٨}$

مثال: اذا كان $\frac{د ص}{د س} = ٢ص$ وكانت $\frac{د ص}{د س^{٢}} = ٨$ جد $ص$

الحل: $\frac{د ص}{د س^{٢}} = ص \frac{د ص}{د س} = ص \times ٢ص = ٢ص^{٢}$

$\Leftarrow \frac{ص^{٢}}{٢} = ٨ \Leftarrow ص^{٢} = ١٦ \Leftarrow \boxed{ص = \pm ٤}$

مثال: جد النقطة على منحنى $\sqrt{س} + \sqrt{ص} = ٣$ والتي تحقق المعادلة $ص' = -٢$

الحل: نشتق $\Leftarrow \frac{١}{٢\sqrt{س}} + \frac{١}{٢\sqrt{ص}} \times ص' = ٠$ وبوضع $\boxed{ص' = ٢}$

$\Leftarrow \frac{١}{٢\sqrt{س}} + \frac{١}{٢\sqrt{ص}} \times -٢ = ٠ \Leftarrow \frac{١}{٢\sqrt{س}} - \frac{٢}{٢\sqrt{ص}} = ٠$

$\Leftarrow \frac{١}{٢\sqrt{س}} = \frac{٢}{٢\sqrt{ص}} \Leftarrow \sqrt{ص} = ٢\sqrt{س}$ نعوض في المعادلة $\sqrt{س} + \sqrt{ص} = ٣$

$\Leftarrow \sqrt{س} + ٢\sqrt{س} = ٣ \Leftarrow ٣\sqrt{س} = ٣ \Leftarrow \sqrt{س} = ١ \Leftarrow \boxed{س = ١}$

لإيجاد صورة العدد (١) (الاحداثي الصادي) نعوض في $\sqrt{ص} = ٢\sqrt{س}$ أو بالمعادلة الأصلية

$\Leftarrow \sqrt{ص} = ٢\sqrt{١} \Leftarrow \sqrt{ص} = ٢ \Leftarrow \boxed{ص = ٤}$ $\therefore$ النقطة $(١، ٤)$

قاعدة:

اذا كانت $ص = ه(ن)$ ، $س = ط(ن)$ فإن: $\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ن} \times \frac{د ن}{د س} = \frac{ه'(ن)}{ط'(ن)}$

مثال: اذا كانت $ص = ن^3 + ٢ن^2$ ، $س = ٣ن^2 + ٥ن$ فجد $\frac{د ص}{د س}$ عند $ن = ١$

الحل: $\frac{د ص}{د ن} = ٣ن^2 + ٤ن$ $\quad \frac{د س}{د ن} = ٦ن + ٥ \Leftarrow \frac{د ن}{د س} = \frac{١}{٦ن + ٥}$

$\Leftarrow \frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ن} \times \frac{د ن}{د س} = \frac{٣ن^2 + ٤ن}{٦ن + ٥} \Leftarrow \frac{د ص}{د س}_{ن=١} = \frac{٧}{١١}$

مثال: اذا كانت $ص = ن^2 + ٥$ ، $س = \frac{٦}{٣ - ٢ن}$ فجد $\frac{د ص}{د س}$ عند $ن = ٢$

الحل: $\frac{د ص}{د ن} = \frac{٢ن}{٠ + ٢ن^2} = \frac{ن}{ن^2 + ٥} = \frac{٢}{٤ + ٥} = \frac{٢}{٣}$

$\frac{د س}{د ن} = \frac{-٦(-٢)}{(٣ - ٢ن)^2} = \frac{-١٢}{(٣-٤)^2} = -١٢ \Leftarrow \frac{د ن}{د س} = \frac{-١}{١٢}$

$\Leftarrow \frac{د ص}{د س} = \frac{٢}{٣} \times \frac{-١}{١٢} = \frac{-١}{١٨}$

سؤال: (أ) $ص = ظا^2 ٥ن$ ، $س = قا ٥ن$ فجد $\frac{د ص}{د س}$

(ب) $ص = جتا ٧ن$ ، $س = جا ٧ن$ فجد $\frac{د ص}{د س}$

مثال: $ص = جا^3 ٣ن$ ، $س = جتا ٣ن$ فجد $\frac{د ص}{د س}^2$

الحل: $\frac{د ص}{د ن} = ٣ جا^2 ٣ن \times جتا ٣ن \times ٣$ ، $\frac{د س}{د ن} = -٣ جا ٣ن \Leftarrow \frac{د ن}{د س} = \frac{-١}{٣ جا ٣ن}$

$\Leftarrow \frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ن} \times \frac{د ن}{د س} = \frac{-٣ جا ٣ن \times جتا ٣ن \times ٣}{-٣ جا ٣ن} = -٣ جتا ٣ن$

$\frac{د ص}{د س}^2 = -٣ \times -٣ جا ٣ن \times ٣ \times \frac{د ن}{د س} = ٣ جا ٣ن \times ٣ \times \frac{-١}{٣ جا ٣ن} = -٣$