* نهاية الاقترانات الدائرية :

اذا كان ق(س) اقتران دائري معرف حول العدد (أ) فإن $\lim_{س \to أ}$ ق(س) = ق(أ)

مثال: $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}}$ (٥ جتاس + ٢ جاس) = ٥(٠) + ٢(١) = ٢

مثال: $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}}$ (٦ قاس + ٤ ظاس) = ٦(√٢)² + ٤(١) = ١٢ + ٤ = ١٦

مثال: $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{جاس}{س} = \frac{جا\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{١}{\frac{\pi}{2}} = \frac{٢}{\pi}$

مثال: $\lim_{س \to ٠} \frac{جا(س + \frac{\pi}{2})}{س + \frac{\pi}{2}} = \frac{٢}{\pi}$

مثال: $\lim_{س \to ٠} \frac{جتاس}{س + ٣} = \frac{١}{٣}$

الأستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

ملاحظة: عندما يكون ناتج التعويض $\frac{٠}{٠}$ فإننا نقوم باستخدام خواص النهايات والعمليات الجبرية على الاقترانات إضافة إلى استخدام المتطابقات.

* تذكير ببعض المتطابقات :-

١) جا²س + جتا²س = ١

٢) قا²س = ١ + ظا²س

٣) جتا٢س = جتا²س − جا²س
= ٢ جتا²س − ١
= ١ − ٢ جا²س

٤) جا٢س = ٢ جاس جتاس

٥) جتا(س + ص) = جتاس جتاص − جاس جاص

٦) جتا(س − ص) = جتاس جتاص + جاس جاص

٧) جا(س + ص) = جاس جتاص + جتاس جاص

٨) جا(س − ص) = جاس جتاص − جتاس جتاص

٩) ظا²س = قا²س − ١

١٠) ظتا²س = قتا²س − ١

١١) جا الزاوية = جا(π − الزاوية)

١٢) جتا الزاوية = جا($\frac{\pi}{2}$ − الزاوية)

١٣) جاس − جاص = ٢ جتا $\frac{س+ص}{2}$ جا $\frac{س-ص}{2}$

١٤) جتاس − جتاص = −٢ جا $\frac{س+ص}{2}$ جا $\frac{س-ص}{2}$

١٥) ظا(س − ص) = $\frac{ظاس - ظاص}{١ + ظاس ظاص}$

١٦) ظا(س + ص) = $\frac{ظاس + ظاص}{١ - ظاس ظاص}$

← تابع متطابقات

(١٧) جا(-س) = -جاس ، جتا(-س) = جتاس

ظا(-س) = -ظاس

(١٨) جاس = جتا(π/٢ - س) ، جتاس = جا(π/٢ - س)

ظاس = ظتا(π/٢ - س)

(١٩) جاس = جا(π - س) ، جاس = -جا(π + س)

جتاس = -جتا(π - س) ، جتاس = -جتا(π + س)

ظاس = -ظا(π - س) ، ظاس = ظا(π + س)

(٢٠) جاس = -جا(٢π - س) ، جاس = جا(س + ٢π)

جتاس = جتا(٢π - س) ، جتاس = جتا(س + ٢π)

ظاس = -ظا(٢π - س) ، ظاس = ظا(س + ٢π)

جدول تجميع الاقترانات المثلثية للزوايا المشهورة :-

الزاوية بالدرجات	الزاوية بالدائري	جاس	جتاس	ظاس
صفر	صفر	صفر	١	صفر
٣٠°	π/٦	١/٢	√٣/٢	١/√٣
٤٥°	π/٤	√٢/٢ = ١/√٢	١/√٢ = √٢/٢	١
٦٠°	π/٣	√٣/٢	١/٢	√٣
٩٠°	π/٢	١	صفر	غير معرف
١٨٠°	π	صفر	-١	صفر
٢٧٠°	٣π/٢	-١	صفر	غير معرف
٣٦٠°	٢π	صفر	١	صفر

ملاحظة:

١) عند التحويل من تقدير دائري إلى درجات نعوض بدل π = ١٨٠° ، π/٢ = ٩٠° ، π/٤ = ٤٥° ، π/٣ = ٦٠° ، π/٦ = ٣٠°

٢) عند التحويل من درجات إلى دائري نضرب في π/١٨٠°

مثال: ٣٢٠° = ٣٢٠° × π/١٨٠° = ١١π/٩

مثال: ٦٠° = ٦٠° × π/١٨٠° = π/٣

* **نظرية:** $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جاس}}{\text{س}} = 1$ إذا كان ناتج التعويض $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

مثال: أثبت أن $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{ظاس}}{\text{س}} = 1$

البرهان: $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{ظاس}}{\text{س}} = \lim_{\text{س} \to 0} \frac{\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}}{\text{س}} = \lim_{\text{س} \to 0} \frac{1}{\text{س}} \times \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$

$= \lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جاس}}{\text{س}} \times \frac{1}{\text{جتاس}} = \lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جاس}}{\text{س}} \times \lim_{\text{س} \to 0} \frac{1}{\text{جتاس}}$

$= 1 \times \frac{1}{1} = 1 \times 1 = 1$

نتائج مهمة على النظرية السابقة:

① $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جاأس}}{\text{بس}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ ومنها $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{بس}}{\text{جاأس}} = \frac{\text{ب}}{\text{أ}}$

② $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{ظاأس}}{\text{بس}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}} \Leftarrow \lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{بس}}{\text{ظاأس}} = \frac{\text{ب}}{\text{أ}}$

③ $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جاأس}}{\text{جاب س}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}} \Leftarrow \lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جاب س}}{\text{جاأس}} = \frac{\text{ب}}{\text{أ}}$

④ $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جاأس}}{\text{ظاب س}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}} \Leftarrow \lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{ظاب س}}{\text{جاأس}} = \frac{\text{ب}}{\text{أ}}$

⑤ $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{ظاأس}}{\text{ظاب س}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}} \Leftarrow \lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{ظاب س}}{\text{ظاأس}} = \frac{\text{ب}}{\text{أ}}$

وبشكل عام فإن: $\lim_{\text{ق(س)} \to 0} \frac{\text{جاق(س)}}{\text{ق(س)}} = 1$

أمثلة:

① $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جا٤س}}{\text{٤س}} = 1$

② $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{ظا٢س}}{\text{٣س}} = \frac{2}{3}$

③ $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{٦س}}{\text{جا١٢س}} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

④ $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جا٥س}}{\text{جا١٥س}} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

⑤ $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جا٤س}}{\text{ظا٦س}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

⑥ $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{ظا٧س}}{\text{جا٣س}} = \frac{7}{3}$

⑦ $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{ظا٢س}}{\text{ظا٩س}} = \frac{2}{9}$

⑧ $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{ظا}\frac{\text{س}}{4}}{\text{س}} = \frac{\frac{1}{4}}{1} = \frac{1}{4}$

⑨ $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جا٨س}}{3} = \frac{\text{جا٠}}{3} = \text{صفر}$ (جاس)

⑩ $\lim_{\text{س} \to \frac{\pi}{3}} \frac{\text{جاس}}{\text{س}} = \frac{\text{جا}\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\pi}{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$

(١١) $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{2س}{جتاس} = \frac{2 \times \frac{\pi}{4}}{جتا\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ (تعويض مباشر)

(١٢) $\lim_{س \to 3} \frac{جا(س-3)}{(س-3)} = 1$

(١٣) $\lim_{س \to -1} \frac{ظا5(س+1)}{جا(س+1)} = \frac{5}{1}$

الأستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

(١٤) $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{6(س-\frac{\pi}{2})}{ظا3(س-\frac{\pi}{2})} = \frac{6}{3} = 2$

(١٥) $\lim_{س \to \pi} \frac{ظا(س-\pi)}{ظا(\frac{س-\pi}{3})} = \lim_{س \to \pi} \frac{ظا(س-\pi)}{ظا\frac{1}{3}(س-\pi)} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$

(١٦) $\lim_{س \to 0} \frac{جا(س+\frac{3\pi}{2})}{(س+\frac{3\pi}{2})} = \frac{جا\frac{3\pi}{2}}{\frac{3\pi}{2}} = \frac{-1}{\frac{3\pi}{2}} = \frac{-2\pi}{3}$

(١٧) $\lim_{س \to 3} \frac{جا(2س-6)}{3-س} = \lim_{س \to 0} \frac{جا2(س-3)}{3-س} = \frac{-2}{1} = -2$

(١٨) $\lim_{س \to 0} \frac{8س^2}{ظا2س^2} = \frac{8}{2} = 4$

(١٩) $\lim_{س \to 2} \frac{ظا(5س-10)}{جا(3س-6)} = \lim_{س \to 2} \frac{ظا5(س-2)}{جا3(س-2)} = \frac{5}{3}$

(٢٠) $\lim_{س \to -\frac{\pi}{2}} \frac{(\frac{س+\frac{\pi}{2}}{5})}{جا(س+\frac{\pi}{2})} = \lim_{س \to -\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{5}(س+\frac{\pi}{2})}{جا(س+\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{5}$

مثال: $\lim_{س \to \pi} \frac{جاس}{1+جتاس} = \lim_{س \to \pi} \frac{1-جتاس}{1+جتاس} = \lim_{س \to \pi} \frac{(1-جتاس)\cancel{(1+جتاس)}}{\cancel{(1+جتاس)}(1-جتاس+جتاس)}$

$= \frac{1-(-1)}{1+(-1)+1} = \frac{2}{3}$

مثال: $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - ظاس}{جاس - جتاس} = \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \frac{جاس}{جتاس}}{جاس - جتاس}$ (نوحد المقامات)

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{جتاس - جاس}{جتاس}}{جاس - جتاس} = \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cancel{جتاس - جاس}^{-1}}{جاس(\cancel{جاس - جتاس})} = \frac{-1}{جتا\frac{\pi}{4}} = \frac{-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\sqrt{2}$

مثال: $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}\,جتاس - 1}{ظتاس - 1} = \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}\,جتاس - 1}{\left(\frac{جتاس}{جاس} - 1\right)} \times \frac{\sqrt{2}\,جتاس + 1}{\sqrt{2}\,جتاس + 1}$ ضرب بالمرافق

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{2\,جتاس - 1}{\left(\frac{جتاس - جاس}{جاس}\right)\left(\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right)} = \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{2\,جتاس - 1}{\frac{جتاس - جاس}{جاس}} \times 2$ مشتركة جاس

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} 2\,جتاس - 1 \times \frac{جاس}{جتاس - جاس} \times \frac{1}{2} = \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cancel{جتاس - جاس}}{\cancel{جتاس - جاس}} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

مثال: $\lim_{س \to 0} \frac{1 - قاس}{ظاس} = \lim_{س \to 0} \frac{1 - قاس}{قاس - 1} = \lim_{س \to 0} \frac{\cancel{1 - قاس}^{-1}}{\cancel{(قاس - 1)}(قاس + 1)}$

$= \frac{-1}{1+1} = \frac{-1}{2}$

مثال: $\lim_{س \to \frac{\pi}{6}} \frac{1 - 2جاس}{3 - 4جتا^2س} = \lim_{س \to \frac{\pi}{6}} \frac{1 - 2جاس}{3 - 4(1 - جا^2س)}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{6}} \frac{1 - 2جاس}{3 - 4 + 4جا^2س} = \lim_{س \to \frac{\pi}{6}} \frac{1 - 2جاس}{4جا^2س - 1} = \lim_{س \to \frac{\pi}{6}} \frac{\cancel{1 - 2جاس}^{-1}}{\cancel{(2جاس - 1)}(2جاس + 1)}$

$= \frac{-1}{2\left(\frac{1}{2}\right) + 1} = \frac{-1}{2}$

ملاحظة: في نهاية التي تحتوي على جيب وظل فقط فإننا نفكر أولاً بالتوزيع ثم التحليل ثم القسمة على س أو على الزاوية وأخيراً نفكر بالمتطابقات

مثال: $\lim_{س \to 0} \left(\frac{ظا2س + جا3س}{2س}\right)$ نوزع البسط على المقام

$= \lim_{س \to 0} \frac{ظا2س}{2س} + \lim_{س \to 0} \frac{جا3س}{2س} = \frac{5}{2} + \frac{7}{2} = \frac{12}{2} = 6$

مثال: $\lim_{س \to ٠} \frac{ظا ٨س \, جا ٤س - س^٢}{س^٢}$ نوزع البسط على المقام

$= \lim_{س \to ٠} \frac{ظا ٨س}{س} \times \lim_{س \to ٠} \frac{جا ٤س}{س} - \lim_{س \to ٠} \frac{س^٢}{س^٢} = ٨(٤) - ١ = ١٥$

سؤال: جد $\lim_{س \to ٠} \frac{٣س - ظا ٧س + جا ٦س}{٢س}$ ـــــــــــ الإجابة ١

مثال: $\lim_{س \to ٠} \frac{جا^٢ ٣س}{٥س^٢}$ نحلل $= \lim_{س \to ٠} \frac{جا ٣س}{٥س} \times \lim_{س \to ٠} \frac{جا ٣س}{س} = \frac{٣}{٥} \times ٣ = \frac{٩}{٥}$

مثال: $\lim_{س \to ٠} \frac{٥س^٢ + ظا^٢ ٣س}{جا^٢ ٤س}$ نوزع ثم نحلل

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٥س^٢}{جا^٢ ٤س} + \lim_{س \to ٠} \frac{ظا^٢ ٣س}{جا^٢ ٤س} = \lim_{س \to ٠} \frac{٥س}{جا ٤س} \times \lim_{س \to ٠} \frac{س}{جا ٤س} + \lim_{س \to ٠} \frac{ظا ٣س}{جا ٤س} \times \lim_{س \to ٠} \frac{ظا ٣س}{جا ٤س}$

$= \frac{٥}{٤} \times \frac{١}{٤} + \frac{٣}{٤} \times \frac{٣}{٤}$

$= \frac{٥}{١٦} + \frac{٩}{١٦} = \frac{١٤}{١٦} = \frac{٧}{٨}$

مثال: $\lim_{س \to ٤} \frac{(س^٣ - ٦٤)}{جا(س - ٤)} = \frac{صفر}{صفر}$ نحلل البسط

$= \lim_{س \to ٤} \frac{(س - ٤)(س^٢ + ٤س + ١٦)}{جا(س - ٤)} = \lim_{س \to ٤} \frac{(س - ٤)}{جا(س - ٤)} \times \lim_{س \to ٤} س^٢ + ٤س + ١٦$

$= ١ \times (١٦ + ١٦ + ١٦) = ٤٨$

سؤال: جد $\lim_{س \to ٣} \frac{جا(س^٣ - ٢٧)}{س - ٣}$ (في هذه الحالة نضرب ونقسم على الزاوية)

$= \lim_{س \to ٣} \frac{جا(س^٣ - ٢٧)}{س - ٣} \times \frac{س^٣ - ٢٧}{س^٣ - ٢٧} = \lim_{س \to ٣} \frac{جا(س^٣ - ٢٧)}{س^٣ - ٢٧} \times \lim_{س \to ٣} \frac{س^٣ - ٢٧}{س - ٣}$

$= ١ \times \lim_{س \to ٣} \frac{\cancel{(س - ٣)}(س^٢ + ٣س + ٩)}{\cancel{س - ٣}}$

$= ١ \times ٢٧ = ٢٧$

سؤال: جد $\lim_{س \to ١} \frac{س - ١}{ظا(س^٢ - ١)}$ ـــــــــــ الإجابة $\frac{١}{٢}$

مثال: $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{ظا(س^٣ - ٨)}{(س^٢ - ٤)}$ نقسم على الزاوية

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{\frac{ظا(س^٣ - ٨)}{س^٣ - ٨}}{\frac{س^٢ - ٤}{س^٣ - ٨}} = \lim_{س \to ٢} \frac{ظا(س^٣ - ٨)}{س^٣ - ٨} \times \lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ - ٨}{س^٢ - ٤}$$

$$= ١ \times \lim_{س \to ٢} \frac{\cancel{(س-٢)}(س^٢ + ٢س + ٤)}{\cancel{(س-٢)}(س+٢)} = ١ \times ٣ = ٣$$

مثال: $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{جا^٢ ٣س}{ظا^٢ ٢س} = \lim\limits_{س \to ٠} \frac{\frac{جا^٢ ٣س}{س^٢}}{\frac{ظا^٢ ٢س}{س^٢}}$ (قسمنا البسط والمقام على $س^٢$)

$$= \lim_{س \to ٠} \frac{\frac{جا ٣س}{س} \times \frac{جا ٣س}{س}}{\frac{ظا ٢س}{س} \times \frac{ظا ٢س}{س}} = \frac{٣ \times ٣}{٢ \times ٢} = \frac{٩}{٤}$$

الأستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

مثال: $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{٣س^٢ + جا^٢ ٨س}{٢س^٣ + س\, ظا ٥س} = \lim\limits_{س \to ٠} \frac{\frac{٣س^٢}{س^٢} + \frac{جا^٢ ٨س}{س^٢}}{\frac{٢س^٣}{س^٢} + \frac{س\, ظا ٥س}{س^٢}}$

$$= \lim_{س \to ٠} \frac{٣ + \frac{جا ٨س}{س} \times \frac{جا ٨س}{س}}{٢س + \frac{ظا ٥س}{س}} = \frac{٣ + ٨(٨)}{٠ + ٥} = \frac{٦٧}{٥}$$

مثال: جد $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{١ - ظتاس}{قتاس} = \lim\limits_{س \to ٠} \frac{١ - \frac{جتاس}{جاس}}{\frac{١}{جاس}} = \lim\limits_{س \to ٠} \frac{\frac{جاس - جتاس}{\cancel{جاس}}}{\frac{١}{\cancel{جاس}}}$

$$= \lim_{س \to ٠} (جاس - جتاس) = ٠ - ١ = -١$$

مثال: $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{جا(ظا ٣س)}{س} = \lim\limits_{س \to ٠} \frac{\frac{جا(ظا ٣س)}{ظا ٣س}}{\frac{س}{ظا ٣س}} = \lim\limits_{س \to ٠} \frac{جا(ظا ٣س)}{ظا ٣س} \times \lim\limits_{س \to ٠} \frac{ظا ٣س}{س}$ قسمنا على ظا٣س

نفرض ظا٣س = ص ⟸ عندما س ← ٠ ، فإن ص ← ٠

$$= \lim_{ص \to ٠} \frac{جا ص}{ص} \times ٣ = ١ \times ٣ = ٣$$

مثال: $\lim_{س \to 0} \frac{٥ - ٥\,جتا^{٢}٣س}{س\,ظا^{٢}س} = \lim_{س \to 0} \frac{٥(١ - جتا^{٢}٣س)}{س\,ظا^{٢}س} = \lim_{س \to 0} \frac{٥\,جا^{٢}٣س}{س\,ظا^{٢}س}$ نقسم على $س^{٢}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{\frac{٥\,جا^{٢}٣س}{س^{٢}}}{\frac{س\,ظا^{٢}س}{س^{٢}}} = \lim_{س \to 0} \frac{٥ \times \frac{جا٣س}{س} \times \frac{جا٣س}{س}}{\frac{ظا^{٢}س}{س}} = \frac{٥ \times ٣ \times ٣}{٢} = \frac{٤٥}{٢}$

مثال: $\lim_{س \to 0} \frac{ظتا٣س}{قتا٤س} = \lim_{س \to 0} \frac{\frac{١}{ظا٣س}}{\frac{١}{جا٤س}} = \lim_{س \to 0} \frac{جا٤س}{ظا٣س} = \lim_{س \to 0} \frac{\frac{جا٤س}{س}}{\frac{ظا٣س}{س}} = \frac{٤}{٣}$

مثال: $\lim_{س \to 0} \frac{جتا٢س + س^{٢} - جتاس}{٢س^{٢}} = \lim_{س \to 0} \frac{٢جتاس - ١ + س^{٢} - جتاس}{٢س^{٢}}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{جتاس - ١ + س^{٢}}{٢س^{٢}}$ لكن $(جتاس - ١ = -جاس)$

$= \lim_{س \to 0} \frac{-جاس + س^{٢}}{٢س^{٢}} = \lim_{س \to 0} \frac{-جاس}{٢س^{٢}} + \lim_{س \to 0} \frac{س^{٢}}{٢س^{٢}}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{-جاس \times جاس}{٢س \times س} + \frac{١}{٢} = -\frac{١}{٢} \times ١ + \frac{١}{٢} =$ صفر

مثال: $\lim_{س \to 0} \frac{١ - جتا٢س}{س\,جاس} = \lim_{س \to 0} \frac{١ - جتا٢س}{س\,جاس} \times \frac{١ + جتا٢س}{(١ + جتا٢س)}$ ضربنا بالمرافق بالتعويض المباشر

$= \lim_{س \to 0} \frac{١ - جتا^{٢}٢س}{٢س\,جاس}$ نستخدم متطابقة $جا^{٢}س + جتا^{٢}س = ١$

$= \lim_{س \to 0} \frac{جا^{٢}٢س}{٢س\,جاس} = \lim_{س \to 0} \frac{جا٢س \times جا٢س}{٢س\,جاس} = \lim_{س \to 0} \frac{جا٢س}{٢س} \times \lim_{س \to 0} \frac{جا٢س}{جاس}$

$= ١ \times ٢ = ٢$

سؤال: جد $\lim_{س \to 0} \frac{ظا٣س + جا٢س}{جا٦س - ظا٥س}$ _____ $\boxed{\text{الاجابة (٥)}}$

شرح الدرس بطريقة سهلة ومبسطة :-

إذا كان ناتج المقدوض = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ فإننا نتبع ما يلي :

① هل ما تؤول إليه س هي صفر سيكون هناك إجابتان

إجابتان
- نعم
- لا

إذا كان نعم : ⓐ اسأل إذا قسمنا على س ، س² ، ... هل سيحل السؤال ثم أقسم على القيمة التي تحل السؤال .

أما إذا كانت الإجابة لا اسأل نفسك سؤالاً آخر

ⓑ هل في البسط أو المقام على الصورة (أ ± جاس ، أ ± جتاس ، ...) وما تؤول إليه س صفر فوراً اضرب بالمرافق واستخدم المتطابقة جا²س + جتا²س = ١

أما إذا كانت س لا تؤول إلى الصفر فوراً نفرض ص = س − م ونطبق إحدى المتطابقات التالية :

جتا(س + ص) = جتاس جتاص − جاس جاص

جتا(س − ص) = جتاس جتاص + جاس جاص

جا(س + ص) = جاس جتاص + جتاس جاص

جا(س − ص) = جاس جتاص − جتاس جاص

الأستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

مثال: جد $\lim_{س \to ٠} \frac{(\sqrt{١+س} - ١)\,جاس}{س} = \lim_{س \to ٠} \frac{(\sqrt{١+س} - ١)}{س} \times \lim_{س \to ٠} \frac{جاس}{س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{١+س} - ١}{س} \times \frac{\sqrt{١+س} + ١}{\sqrt{١+س} + ١} \times ١ = \lim_{س \to ٠} \frac{١+س-١}{س(١+١)}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{\cancel{س}}{٢\cancel{س}} = \frac{١}{٢}$

مثال: $\lim_{س \to ٠} \frac{ظا٣س}{\sqrt{٥س+١} - ١} \times \frac{\sqrt{٥س+١} + ١}{\sqrt{٥س+١} + ١} = \lim_{س \to ٠} \frac{ظا٣س\,(١+١)}{٥س+١-١}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{ظا٣س}{٥س} \times ٢ = \frac{٣}{٥} \times ٢ = \frac{٦}{٥}$

مثال: $\lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتا٤س}{٥س^٢}$ نستخدم متطابقة $جتا٢(٢س) = ١ - ٢جا^٢٢س$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{١ - (١ - ٢جا^٢٢س)}{٥س^٢} = \lim_{س \to ٠} \frac{١ - ١ + ٢جا^٢٢س}{٥س^٢} = \lim_{س \to ٠} \frac{٢جا^٢٢س}{٥س^٢}$

$= \frac{٢}{٥} \times \frac{جا٢س}{س} \times \frac{جا٢س}{س}$

$= \frac{٢}{٥} \times ٢ \times ٢ = \frac{٨}{٥}$

مثال: $\lim_{س \to ٠} \frac{س\,ظا٣س}{١ - جتا٨س}$ نستخدم متطابقة

$= \lim_{س \to ٠} \frac{س\,ظا٣س}{١ - (١ - ٢جا^٢٤س)} = \lim_{س \to ٠} \frac{س\,ظا٣س}{١ - ١ + ٢جا^٢٤س} = \lim_{س \to ٠} \frac{س\,ظا٣س}{٢جا^٢٤س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{س}{٢جا٤س} \times \lim_{س \to ٠} \frac{ظا٣س}{جا٤س} = \frac{١}{٢ \times ٤} \times \frac{٣}{٤} = \frac{٣}{٣٢}$

مثال: $\lim_{س \to ٠} \frac{٢س\,ظا٣س}{جتا٥س - جتا٧س} = \lim_{س \to ٠} \frac{٢س\,ظا٣س}{-٢جا\left(\frac{٥س+٧س}{٢}\right)جا\left(\frac{٥س-٧س}{٢}\right)}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٢س\,ظا٣س}{-٢جا٦س\,جا(-س)} = \lim_{س \to ٠} \frac{٢س}{-٢جا٦س} \times \lim_{س \to ٠} \frac{ظا٣س}{جا(-س)}$

$= -\frac{١}{٦} \times -١ = \frac{١}{٦}$

* الحالات التي نستخدم فيها الضرب بالمرافق:

① $1 \pm$ دائري ② $1 \pm \sqrt{2}$ جتاس

③ $1 \pm \sqrt{2}$ جاس ④ جاس ± جتاس

مثال: $\lim_{س \to 0} \frac{1 - جتاس}{3س^2} \times \frac{1 + جتاس}{1 + جتاس} = \lim_{س \to 0} \frac{1 - جتا^2س}{3س^2(1+1)}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{جا^2س}{6س^2} = \lim_{س \to 0} \frac{جاس}{6س} \times \lim_{س \to 0} \frac{جاس}{س} = \frac{1}{6} \times 1 = \frac{1}{6}$

مثال: $\lim_{س \to 0} \frac{جتا4س - جتاس}{2س^3}$ (نستخدم متطابقة: جتاس - جتاص = -2 جا$\left(\frac{س+ص}{2}\right)$ جا$\left(\frac{س-ص}{2}\right)$)

$= \lim_{س \to 0} \frac{-2 جا\left(\frac{4س+س}{2}\right) جا\left(\frac{4س-س}{2}\right)}{2س^3} = \lim_{س \to 0} \frac{-2 جا\frac{5س}{2} جا\frac{3س}{2}}{2س^2}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{-2 جا\frac{5س}{2}}{2س} \times \lim_{س \to 0} \frac{جا\frac{3س}{2}}{س} = \frac{-5}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{-15}{4}$

مثال: $\lim_{س \to 0} \frac{قا3س - 1}{س جا4س} \times \frac{قا3س + 1}{قا3س + 1}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{قا^2 3س - 1}{س جا4س} \times \lim_{س \to 0} \frac{1}{قا3س + 1} = \lim_{س \to 0} \frac{ظا^2 3س}{س جا4س} \times \frac{1}{1+1}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{ظا3س}{س} \times \lim_{س \to 0} \frac{ظا3س}{جا4س} \times \frac{1}{2} = 3 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{8}$

هناك حل آخر للمثال السابق عن طريق (توحيد المقامات) بعد وضع قا3س = $\frac{1}{جتا3س}$

سؤال: ① جد $\lim_{س \to 4} \frac{جا(س-4)}{س^2 - 16}$ ـــــ نقسم على (س-4) ـــــ $\boxed{جـ = \frac{1}{8}}$

② $\lim_{س \to 3} \frac{س^2 - س - 6}{ظا(5س - 15)}$ نقسم على (س-3) ـــــ $\boxed{جـ = 1}$

③ $\lim_{س \to 1} \frac{س - 1}{جا(س^3 - 1)}$ نقسم على س³-1 ـــــ $\boxed{جـ = \frac{1}{3}}$

مثال: جد $\lim_{س \to ٢} \frac{(س^٢ - ٤)\,ظا(س - ٢)}{س^٢ - ٤س + ٤} = \lim_{س \to ٢} \frac{\cancel{(س-٢)}(س+٢)\,ظا(س-٢)}{\cancel{(س-٢)}(س-٢)}$

$= \lim_{س \to ٢} (س+٢) \times \lim_{س \to ٢} \frac{ظا(س-٢)}{س-٢} = ٤ \times ١ = ٤$

مثال: $\lim_{س \to ١} \frac{س^٢ - س - جا(\sqrt{س} - ١)}{س - ١} = \lim_{س \to ١} \frac{س^٢ - س}{س - ١} - \lim_{س \to ١} \frac{جا(\sqrt{س} - ١)}{س - ١}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{س(س-١)}{س-١} - \lim_{س \to ١} \frac{جا(\sqrt{س} - ١)}{\frac{\sqrt{س} - ١}{\frac{س-١}{\sqrt{س}-١}}} = ١ - \lim_{س \to ١} \frac{جا(\sqrt{س} - ١)}{\sqrt{س} - ١} \cdot \frac{\cancel{(\sqrt{س}-١)}(\sqrt{س}+١)}{\cancel{\sqrt{س}-١}}$

$= ١ - \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$

الأستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

مثال: $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{جاس - جتاس}{١ - \sqrt{٢}\,جاس} = \frac{صفر}{صفر}$ نضرب بالمرافق

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{جاس - جتاس}{١ - \sqrt{٢}\,جاس} \times \frac{جاس + جتاس}{جاس + جتاس} \times \frac{١ + \sqrt{٢}\,جاس}{١ + \sqrt{٢}\,جاس}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{جا^٢س - جتا^٢س\,(١ + \sqrt{٢}\,جاس)}{١ - ٢جا^٢س\,(جاس + جتاس)} = \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{جا^٢س - جتا^٢س\,(١+١)}{١ - ٢جا^٢س\,(\frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}})}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{\cancel{٢جا^٢س - ٢}^{-١}}{\cancel{١ - ٢جا^٢س}} \times \frac{٢}{\frac{٢}{\sqrt{٢}}} = -١ \times ٢ \times \frac{\sqrt{٢}}{٢} = -\sqrt{٢}$

ملاحظة: أي نهاية يكون فيها اقتران مثلثي جمع أو طرح أو العكس يمكن حلها باستخدام المتممة أو المكملة أو الاستبدال وذلك بغرض الجمع أو الطرح

مثال: $\lim_{س \to \pi} \frac{جاس}{س - \pi}$ نفرض $ص = س - \pi$ ، $س = ص + \pi$

عندما $س \to \pi$ فإن $ص \to ٠$

متطابقة

$= \lim_{ص \to ٠} \frac{جا(ص + \pi)}{ص} = \lim_{ص \to ٠} \frac{جاص\,جتا\pi + جتاص\,\cancel{جا\pi}^{صفر}}{ص}$

$= \lim_{ص \to ٠} \frac{جاص \times -١}{ص} = ١ \times -١ = -١$

تابع حل آخر للمثال ←

حل آخر للمثال السابق باستخدام المكملة ⇐ جاس = جا(π − س)

$$\Leftarrow \lim_{س \to \pi} \frac{جاس}{س - \pi} = \lim_{س \to \pi} \frac{جا(\pi - س)}{س - \pi} = -1$$

سؤال: $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{جتا٢س}{\pi - ٤س}$ ——— $\boxed{\text{الاجابة } (\frac{1}{2})}$

مثال: $\lim_{س \to \frac{\pi}{3}} \frac{١ - ٢جتاس}{جا(س - \frac{\pi}{3})}$ ⇐ لنفرض $ص = س - \frac{\pi}{3}$ ⇐ $س = ص + \frac{\pi}{3}$

عندما $س \to \frac{\pi}{3}$ فإن $ص \to ٠$

$$\lim_{ص \to ٠} \frac{١ - ٢جتا(ص + \frac{\pi}{3})}{جاص} = \lim_{ص \to ٠} \frac{١ - ٢(جتاص جتا\frac{\pi}{3} - جاص جا\frac{\pi}{3})}{جاص}$$

$$= \lim_{ص \to ٠} \frac{١ - ٢(جتاص \times \frac{1}{2} - جاص \times \frac{\sqrt{3}}{2})}{جاص} = \lim_{ص \to ٠} \frac{١ - جتاص + جاص \times \sqrt{3}}{جاص}$$

$$= \lim_{ص \to ٠} \frac{١ - جتاص}{جاص} + \lim_{ص \to ٠} \frac{\cancel{جاص} \times \sqrt{3}}{\cancel{جاص}} = \lim_{ص \to ٠} \frac{١ - جتاص}{جاص} \times \frac{١ + جتاص}{١ + جتاص} + \sqrt{3}$$

$$= \lim_{ص \to ٠} \frac{١ - جتا^2ص}{جاص(١ + جتاص)} + \sqrt{3} = \lim_{ص \to ٠} \frac{جا^2ص}{جاص} \times \frac{1}{2} + \sqrt{3}$$

$$= \lim_{ص \to ٠} جاص \times \frac{1}{2} + \sqrt{3} = صفر + \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

---

* **ملاحظة:** عند وجود $\boxed{جتاأ - جتاب}$ أو $\boxed{جاأ - جاب}$ نستخدم المتطابقات:

① $جتاأ - جتاب = -٢ جا\frac{أ + ب}{2} جا\frac{أ - ب}{2}$

② $جاأ - جاب = ٢ جتا\frac{أ + ب}{2} جا\frac{أ - ب}{2}$

مثال: $\lim_{س \to أ} \frac{جا٢س - جا٢أ}{س - أ} = \lim_{س \to أ} \frac{٢ جتا(\frac{٢س + ٢أ}{2}) جا(\frac{٢س - ٢أ}{2})}{س - أ}$

$$= \lim_{س \to أ} \frac{٢ جتا(س + أ) جا(س - أ)}{س - أ} = \lim_{س \to أ} ٢ جتا(س + أ) \times \lim_{س \to أ} \frac{جا(س - أ)}{س - أ}$$

$$= ٢ جتا٢أ \times ١ = ٢ جتا٢أ$$

الأستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

مثال: $\lim_{س \to ٠} \frac{س جتا س - س جتا ٣س}{س^٢ جا ٢س} = \lim_{س \to ٠} \frac{-٢ جا\left(\frac{س+٣س}{٢}\right) جا\left(\frac{س-٣س}{٢}\right)}{س جا ٢س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{-٢ \cancel{جا ٢س} \times جا(-س)}{س \cancel{جا ٢س}} = \lim_{س \to ٠} \frac{-٢ جا(-س)}{س} = -٢ \times -١ = ٢$

مثال: $\lim_{س \to ٠} \frac{١ - ٢ جتا^٢ ٣س + جتا ٦س}{س^٢}$

تذكيرة:
جتا ٢س = ٢ جتا^٢ س - ١
جتا ٤س = ٢ جتا^٢ ٢س - ١
⇐ ١ - ٢ جتا^٢ ٣س = - جتا ٦س

$= \lim_{س \to ٠} \frac{جتا ٦س - جتا ٤س}{س^٢}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{-٢ جا\left(\frac{٦س+٤س}{٢}\right) جا\left(\frac{٦س-٤س}{٢}\right)}{س^٢} = \lim_{س \to ٠} \frac{-٢ جا ٥س جا س}{س \times س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{-٢ جا ٥س}{س} \times \lim_{س \to ٠} \frac{جا س}{س} = -٢ \times ٥ \times ١ = -١٠$

مثال: $\lim_{س \to ٠} \frac{قا ٢س - ١}{س^٢} = \lim_{س \to ٠} \frac{\frac{١}{جتا ٢س} - ١}{س^٢} = \lim_{س \to ٠} \frac{\frac{١ - جتا ٢س}{جتا ٢س}}{س^٢}$

نضرب بالمرافق

$= \lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتا ٢س}{س^٢ جتا ٢س} \times \frac{١ + جتا ٢س}{١ + جتا ٢س} = \lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتا^٢ ٢س}{س^٢ جتا ٢س(١+١)}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{جا^٢ ٢س}{س^٢} \times \lim_{س \to ٠} \frac{١}{جتا ٢س(٢)} = \lim_{س \to ٠} \frac{جا ٢س}{س} \times \frac{جا ٢س}{س} \times \frac{١}{(١)(٢)}$

$= ٢ \times ٢ \times \frac{١}{٢} = ٢$

نضرب بالمرافق

مثال: $\lim_{س \to ٠} \frac{(ظا ٢س + ٣س)^٢}{١ - جتا ٤س} \times \frac{١ + جتا ٤س}{١ + جتا ٤س} = \lim_{س \to ٠} \frac{(ظا ٢س + ٣س)^٢ (١+١)}{١ - جتا^٢ ٤س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٢(ظا ٢س + ٣س)^٢}{جا^٢ ٤س} = \lim_{س \to ٠} ٢\left(\frac{ظا ٢س + ٣س}{جا ٤س}\right)^٢$ نقسم على س

$= \lim_{س \to ٠} ٢\left(\frac{\frac{ظا ٢س}{س} + \frac{٣س}{س}}{\frac{جا ٤س}{س}}\right)^٢ = ٢\left(\frac{٢ + ٣}{٤}\right)^٢ = ٢$

مثال: $\lim_{س \to ٠} \frac{١ + س\,جا٣س - جتا٢س}{س^٢} = \lim_{س \to ٠} \frac{س\,جا٣س}{س^٢} + \lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتا٢س}{س^٢}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{جا٣س}{س} + \lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتا٢س}{س^٢} \times \frac{١ + جتا٢س}{١ + جتا٢س}$

$= ٣ + \lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتا^٢٢س}{س^٢(١ + جتا٢س)} = ٣ + \lim_{س \to ٠} \frac{جا^٢٢س}{س^٢} \times \frac{١}{٢}$

$= ٣ + \lim_{س \to ٠} \frac{جا٢س}{س} \times \frac{جا٢س}{س} \times \frac{١}{٢} = ٣ + \left(٢ \times ٢ \times \frac{١}{٢}\right) = ٥$

ضرب بالمرافق

مثال: $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{١ - جتاس}}{س} \times \frac{\sqrt{١ + جتاس}}{\sqrt{١ + جتاس}} = \lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{١ - جتا^٢س}}{س(\sqrt{٢})}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{جا^٢س}}{\sqrt{٢}\,س} = \lim_{س \to ٠} \frac{|جاس|}{\sqrt{٢}\,س}$ نبحث النهاية من اليمين واليسار

$\frac{\pi}{٢}$ ٠ π

$\lim_{س \to ٠^-} \frac{-جاس}{\sqrt{٢}\,س} = \frac{-١}{\sqrt{٢}}$

$\lim_{س \to ٠^+} \frac{جاس}{\sqrt{٢}\,س} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

$\Leftarrow \lim_{س \to ٠} \frac{|جاس|}{\sqrt{٢}\,س}$ غير موجودة

مثال: $\lim_{س \to ٠} \frac{ظا(١ - جتاس)}{س^٢} = \lim_{س \to ٠} \frac{\frac{ظا(١ - جتاس)}{١ - جتاس}}{\frac{س^٢}{١ - جتاس}}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{ظا(١ - جتاس)}{١ - جتاس} \times \lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتاس}{س^٢} \times \frac{١ + جتاس}{١ + جتاس}$ ضرب بالمرافق

$= ١ \times \lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتا^٢س}{س^٢(٢)} = ١ \times \lim_{س \to ٠} \frac{جا^٢س}{س^٢} \times \frac{١}{٢}$

$= ١ \times \lim_{س \to ٠} \frac{جاس}{س} \times \lim_{س \to ٠} \frac{جاس}{س} \times \frac{١}{٢} = ١ \times ١ \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$

مثال: $\lim_{س \to ٠} \frac{٢ - ٢\,جتا^٣ س}{س\,جا^٢ س} = \lim_{س \to ٠} \frac{٢(١ - جتا^٣ س)}{س\,جا^٢ س}$ نحلل

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٢(١ - جتا س)(١ + جتا س + جتا^٢ س)}{س\,جا^٢ س} = \lim_{س \to ٠} \frac{٢(١ - جتا س)(١+١+١)}{س\,جا^٢ س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٦(١ - جتا س)}{س\,جا^٢ س} = ٦ \lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتا س}{س\,جا^٢ س} \times \frac{١ + جتا س}{١ + جتا س}$

$= ٦ \times \lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتا^٢ س}{س\,جا^٢ س (١+١)} = \frac{٦}{٢} \lim_{س \to ٠} \frac{جا^٢ س}{س\,جا^٢ س}$ بالقسمة على $س^٢$

$= ٣ \times \lim_{س \to ٠} \frac{\frac{جا^٢ س}{س^٢}}{\frac{\cancel{س}\,جا^٢ س}{س^{\cancel{٢}}}} = ٣ \times \lim_{س \to ٠} \frac{\frac{جا س}{س} \times \frac{جا س}{س}}{\frac{جا^٢ س}{س}}$

$= ٣ \times \frac{١ \times ١}{٢} = \frac{٣}{٢}$

مثال: $\lim_{س \to ١} \frac{ظتا(س - ١) + جا \pi س}{١ - س} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ نفرض $ص = ١ - س$

$س = ١ - ص$

عندما $س \to ١$ فإن $ص \to ٠$

$\Leftarrow \lim_{س \to ١} \frac{ظتا(س - ١)}{١ - س} + \lim_{س \to ١} \frac{جا \pi س}{١ - س}$

$= -١ + \lim_{ص \to ٠} \frac{جا \pi (١ - ص)}{ص} = -١ + \lim_{ص \to ٠} \frac{جا(\pi - \pi ص)}{ص}$

$= -١ + \lim_{ص \to ٠} \frac{جا \pi \cancelto{صفر}{جتا \pi ص} - \cancelto{-١}{جتا \pi} جا \pi ص}{ص} = -١ + \lim_{ص \to ٠} \frac{جا \pi ص}{ص}$

$= -١ + \pi$

الأستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

مثال: $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 + جتا ٢س}{(٢س - \pi)^٢} = \frac{صفر}{صفر}$ نستخدم متطابقة $جتا ٢س = 1 - ٢جا^٢س$

$$= \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 + 1 - ٢جا^٢س}{(٢س - \pi)^٢} = \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{٢ - ٢جا^٢س}{(٢س - \pi)^٢} = \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{٢(1 - جا^٢س)}{(٢س - \pi)^٢}$$

$$= \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{٢جا^٢س}{(٢س - \pi)^٢} = \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} ٢\left(\frac{جاس}{٢س - \pi}\right)^٢ = \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} ٢\left(\frac{جا(\frac{\pi}{2} - س)}{٢(س - \frac{\pi}{2})}\right)^٢$$

$$= \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{٢جا^٢(\frac{\pi}{2} - س)}{٤(س - \frac{\pi}{2})^٢} = \frac{٢}{٤} \times \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{جا(\frac{\pi}{2} - س)}{س - \frac{\pi}{2}} \times \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{جا(\frac{\pi}{2} - س)}{س - \frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$$

مثال: أثبت أن $\lim\limits_{س \to 0} \frac{1 - جتا٦س}{جتا٨س - 1} = \frac{-٩}{١٦}$

الإثبات: الطرف الأيمن $\Leftarrow \lim\limits_{س \to 0} \frac{1 - جتا٦س}{جتا٨س - 1} \times \frac{1 + جتا٦س}{1 + جتا٦س} \times \frac{جتا٨س + 1}{جتا٨س + 1}$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{1 - جتا^٢٦س}{جتا^٢٨س - 1} \times \lim_{س \to 0} \frac{جتا٨س + 1}{1 + جتا٦س}$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{جا^٢٦س}{-جا^٢٨س} \times \frac{٢}{٢} = \lim_{س \to 0} -\left(\frac{جا٦س}{جا٨س}\right)^٢ \times 1$$

$$= -\left(\frac{٦}{٨}\right)^٢ \times 1 = -\left(\frac{٣}{٤}\right)^٢ = \frac{-٩}{١٦}$$

= الطرف الأيسر

الأستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

مثال: أثبت أن $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{6}} \frac{2جاس - 1}{4جتاس - 3} = -\frac{1}{2}$

الحل: الطرف الأيسر:-

$$\Leftarrow \lim_{س \to \frac{\pi}{6}} \frac{2جاس - 1}{4جتاس - 3} \times \frac{2جاس + 1}{2جاس + 1}$$

$$= \lim_{س \to \frac{\pi}{6}} \frac{4جا^2س - 1}{4جتاس - 3(2 \times \frac{1}{2} + 1)} = \lim_{س \to \frac{\pi}{6}} \frac{4جا^2س - 1}{4(1 - جا^2س) - 3 \times 2}$$

$$= \lim_{س \to \frac{\pi}{6}} \frac{4جا^2س - 1}{4 - 4جا^2س - 3 \times 2} = \lim_{س \to \frac{\pi}{6}} \frac{\cancel{4جا^2س - 1}}{\cancel{1 - 4جا^2س} \times 2} = -1 \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

مثال: $\lim\limits_{س \to 0} \frac{جاس}{قاس - 1} = \lim\limits_{س \to 0} \frac{جاس}{\frac{1}{جتاس} - 1} = \lim\limits_{س \to 0} \frac{جاس}{\frac{1 - جتاس}{جتاس}}$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{جاس \times جتاس}{1 - جتاس} = \lim_{س \to 0} \frac{(1 - جتاس)\,جتاس}{1 - جتاس}$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{\cancel{(1 - جتاس)}(1 + جتاس)\,جتاس}{\cancel{1 - جتاس}} = (1+1)(1) = 2$$

وزارة ٢٠٠٨

مثال: $\lim\limits_{س \to 0} \frac{1 + جتا4س - 2جتاس}{س^2} = \lim\limits_{س \to 0} \frac{1 + جتا4س - 2(1 - جاس)}{س^2}$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{1 + جتا4س - 2 + 2جاس}{س^2} = \lim_{س \to 0} \frac{جتا4س - 1}{س^2} + \lim_{س \to 0} \frac{2جاس}{س^2}$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{جتا4س - 1}{س^2} \times \frac{جتا4س + 1}{جتا4س + 1} + 2\lim_{س \to 0} \frac{جاس}{س} \times \frac{جاس}{س}$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{جتا^2 4س - 1}{س^2(1+1)} + 2 \times 1 \times 1 = \lim_{س \to 0} \frac{-جا^2 4س}{س^2 \times 2} + 2$$

$$= \lim_{س \to 0} -\frac{جا4س}{س} \times \frac{جا4س}{س} \times \frac{1}{2} + 2 = -4 \times 4 \times \frac{1}{2} + 2$$

$$= -6$$

مثال: $\lim_{س \to 0} \frac{1 - جتا٢س}{٢س^٢} = \lim_{س \to 0} \frac{1 - جتا٢س}{٢س^٢} \times \frac{1 + جتا٢س}{1 + جتا٢س}$

مقطع نسبة

$= \lim_{س \to 0} \frac{1 - جتا^٢ ٢س}{٢س^٢(٢)} = \lim_{س \to 0} \frac{جا^٢ ٢س}{٤س^٢} = \lim_{س \to 0} \frac{جا٢س}{٢س} \times \lim_{س \to 0} \frac{جا٢س}{٢س}$

$= 1 \times 1 = 1$

مثال: $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{جتاس}{\frac{\pi}{٢} - س}$

الحل: نفرض $ص = س - \frac{\pi}{٢} \Leftarrow س = ص + \frac{\pi}{٢}$

الأستاذ عماد مسك ٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

عندما $س \to \frac{\pi}{٢}$ فإن $ص \to 0$

$\Leftarrow \lim_{ص \to 0} \frac{جتا(ص + \frac{\pi}{٢})}{-ص} = \lim_{ص \to 0} \frac{جتاص \cancel{جتا\frac{\pi}{٢}} - جاص جا\frac{\pi}{٢}}{-ص}$ صفر

$= \lim_{ص \to 0} \frac{-جاص}{-ص} = 1$

مثال: $\lim_{س \to ٣\pi} \frac{جاس}{\frac{س}{٣} - \pi}$

الحل: نفرض $ص = س - ٣\pi$ (فرضنا المقام) $\Leftarrow س = ص + ٣\pi$

عندما $س \to ٣\pi$ فإن $ص \to 0$

$\Leftarrow \lim_{ص \to 0} \frac{جا(ص + ٣\pi)}{\frac{ص}{٣}} = \lim_{ص \to 0} \frac{جاص جتا٣\pi - جتاص جا٣\pi}{\frac{ص}{٣}}$

$= \lim_{ص \to 0} \frac{-جاص}{\frac{ص}{٣}} = -٣$

مثال: $\lim_{س \to 1} \frac{جتا(س-1) + جا\pi س}{1 - س} = \lim_{س \to 1} \frac{جتا(س-1)}{1-س} + \lim_{س \to 1} \frac{جا\pi س}{1-س}$

$= -1 + \lim_{س \to 1} \frac{جا\pi س}{1-س}$ ← تحل جاها بالاستدلال أو المقدرة

نفرض $ص = 1 - س \Leftarrow س = 1 - ص$

عندما $س \to 1$ فإن $ص \to 0$

$= -1 + \lim_{ص \to 0} \frac{جا(\pi - \pi ص)}{ص} = -1 + \lim_{ص \to 0} \frac{\cancel{جا\pi جتا\pi ص} - جتا\pi جا\pi ص}{ص}$ صفر

$= -1 + \lim_{ص \to 0} \frac{جا\pi ص}{ص} = -1 + \pi$

مثال: $\lim_{س \to 0} \frac{2\,س\,(س + جا٨س - جا٤س)}{س^2\,جتاس} = \lim_{س \to 0} \frac{2\,(س + جا٨س - جا٤س)}{س\,جتاس}$

وزارة ٩٨

$= \lim_{س \to 0} \frac{2}{جتاس} \times \lim_{س \to 0} \left(\frac{س}{س} + \frac{جا٨س}{س} - \frac{جا٤س}{س}\right)$

$= \frac{2}{1} \times (1 + 8 - 4) = 2 \times 5 = 10$

وزارة ٩٩

مثال: $\lim_{س \to 0} \left(7\,س^2\,ظتا٤س\,قتا٥س\right) = \lim_{س \to 0} 7\,س^3 \times \frac{1}{ظا٤س} \times \frac{1}{جا٥س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{7\,س}{ظا٤س} \times \lim_{س \to 0} \frac{س}{ظا٤س} \times \lim_{س \to 0} \frac{س}{جا٥س} = \frac{7}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{7}{40}$

وزارة ١٠٠

مثال: $\lim_{س \to 0} \frac{ظاس - جاس}{س^3} = \lim_{س \to 0} \frac{\frac{جاس}{جتاس} - جاس}{س^3}$

ضربنا بالمرافق

$= \lim_{س \to 0} \frac{جاس - جاس\,جتاس}{\frac{جتاس}{س^3}} = \lim_{س \to 0} \frac{جاس\,(1 - جتاس)}{س^3\,جتاس} \times \frac{1 + جتاس}{1 + جتاس}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{جاس\,(1 - جتا^2س)}{س^3\,جتاس\,(2)} = \lim_{س \to 0} \frac{جاس \times جا^2س}{س^3\,جتاس} \times \frac{1}{2}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{جا^2س}{س^2} \times \lim_{س \to 0} \frac{1}{جتاس} \times \frac{1}{2} = \lim_{س \to 0} \left(\frac{جاس}{س}\right)^3 \times 1 \times \frac{1}{2}$

$= (1)^3 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

وزارة ١٠١

مثال: $\lim_{س \to 0} \frac{قا٢س - 1}{س^2} = \lim_{س \to 0} \frac{\frac{1}{جتا٢س} - 1}{س^2} = \lim_{س \to 0} \frac{\frac{1 - جتا٢س}{جتا٢س}}{س^2}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{1 - جتا٢س}{س^2\,جتا٢س} \times \frac{1 + جتا٢س}{1 + جتا٢س} = \lim_{س \to 0} \frac{1 - جتا^2 ٢س}{س^2\,جتا٢س\,(2)}$ متطابقة

$= \lim_{س \to 0} \frac{جا^2 ٢س}{س^2\,جتا٢س} \times \frac{1}{2} = \lim_{س \to 0} \left(\frac{جا٢س}{س}\right)^2 \times \frac{1}{جتا٢س} \times \frac{1}{2}$

$= (2)^2 \times 1 \times \frac{1}{2} = 2$

مثال: وزارة ٢٠١٨

$$\lim_{\text{س} \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جتاس} - \text{جاس}}{\text{س} - \frac{\pi}{4}}$$

نفرض ص = س − $\frac{\pi}{4}$ ⟸ س = ص + $\frac{\pi}{4}$

عندما س ← $\frac{\pi}{4}$ فإن ص ← ٠

$$= \lim_{\text{ص} \to ٠} \frac{\text{جتا}(\text{ص} + \frac{\pi}{4}) - \text{جا}(\text{ص} + \frac{\pi}{4})}{\text{ص}} = \lim_{\text{ص} \to ٠} \frac{(\text{جاص جتا}\frac{\pi}{4} - \text{جاص جا}\frac{\pi}{4}) - (\text{جاص جا}\frac{\pi}{4} + \text{جتاص جا}\frac{\pi}{4})}{\text{ص}}$$

$$= \lim_{\text{ص} \to ٠} \frac{\text{جتاص جتا}\frac{\pi}{4} - \text{جاص جا}\frac{\pi}{4} - \text{جاص جتا}\frac{\pi}{4} - \text{جتاص جا}\frac{\pi}{4}}{\text{ص}}$$

$$= \lim_{\text{ص} \to ٠} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\cancel{\text{جتاص}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\text{جاص} - \frac{1}{\sqrt{2}}\text{جاص} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cancel{\text{جتاص}}}{\text{ص}}$$

$$= \lim_{\text{ص} \to ٠} \frac{\frac{-2}{\sqrt{2}}\text{جاص}}{\text{ص}} = \frac{-2}{\sqrt{2}}$$

مثال: وزارة ٢٠١٨

$$\lim_{\text{س} \to ٠} ٣\text{س}(\text{قتا}٢\text{س} + \text{قتا}٣\text{س}) = \lim_{\text{س} \to ٠} ٣\text{س}\left(\frac{1}{\text{جا}٢\text{س}} + \frac{1}{\text{جا}٣\text{س}}\right)$$

$$= \lim_{\text{س} \to ٠} \frac{٣\text{س}}{\text{جا}٢\text{س}} + \lim_{\text{س} \to ٠} \frac{٣\text{س}}{\text{جا}٣\text{س}} = \frac{٣}{٢} + \frac{٣}{٣} = \frac{٦}{٢} = ٣$$

مثال: وزارة ٢٠١٨

$$\lim_{\text{س} \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتاس}}{٢\text{س} - \pi} = \lim_{\text{س} \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتاس}}{٢(\text{س} - \frac{\pi}{2})}$$

نفرض ص = س − $\frac{\pi}{2}$ ⟸ س = ص + $\frac{\pi}{2}$

عندما س ← $\frac{\pi}{2}$ فإن ص ← ٠

$$= \lim_{\text{ص} \to ٠} \frac{\text{جتا}(\text{ص} + \frac{\pi}{2})}{٢\text{ص}} = \lim_{\text{ص} \to ٠} \frac{\cancel{\text{جتاص جتا}\frac{\pi}{2}} - \text{جاص جا}\frac{\pi}{2}}{٢\text{ص}}$$

$$= \lim_{\text{ص} \to ٠} \frac{-\text{جاص}}{٢\text{ص}} = -\frac{1}{2}$$

مثال: وزارة ٢٠١٨

$$\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{1 - \text{جتاس}}{\text{س جاس}} \times \frac{1 + \text{جتاس}}{1 + \text{جتاس}} = \lim_{\text{س} \to ٠} \frac{1 - \text{جتا}^2\text{س}}{\text{س جاس}} \times \frac{1}{2}$$

$$= \lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{جا}^2\text{س}}{\text{س جاس}} \times \frac{1}{2} = \lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{جاس}}{\text{س}} \times \frac{\text{جاس}}{\text{جاس}} \times \frac{1}{2}$$

$$= 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

مثال: $\lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا}\,2\text{س}}{\text{س} - \frac{\pi}{2}} = \lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا}\,2\text{س}}{\text{س}\left(\text{س} - \frac{\pi}{2}\right)} = \lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\text{س}} \times \lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا}\,2\text{س}}{\text{س} - \frac{\pi}{2}}$

(وزارة ٢٠١٢)

نفرض $\text{ص} = \text{س} - \frac{\pi}{2} \Leftarrow \text{س} = \text{ص} + \frac{\pi}{2}$

عندما $\text{س} \to \frac{\pi}{2}$ فإن $\text{ص} \to 0$

$\Leftarrow \lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\text{س}} \times \lim\limits_{\text{ص} \to 0} \frac{\text{جا}\,2\left(\text{ص} + \frac{\pi}{2}\right)}{\text{ص}} = \frac{2}{\pi} \times \lim\limits_{\text{ص} \to 0} \frac{\text{جا}(\text{ص} + \pi)}{\text{ص}}$

$= \frac{2}{\pi} \times \lim\limits_{\text{ص} \to 0} \frac{\text{جا}\,2\text{ص}\ \text{جتا}\,\pi + \text{جتا}\,2\text{ص}\ \cancel{\text{جا}\,\pi}}{\text{ص}} = \frac{2}{\pi} \times \lim\limits_{\text{ص} \to 0} \frac{-\text{جا}\,2\text{ص}}{\text{ص}}$

صفر

$= \frac{2}{\pi} \times -2 = \frac{-4}{\pi}$

مثال: إذا كانت $\lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{أ}\,\text{جتا}\,2\text{س}}{\pi - 4\text{س}} = 3$ ، جد قيمة أ ؟

الحل: نفرض $\text{ص} = \pi - 4\text{س} \Leftarrow \text{س} = \frac{\pi - \text{ص}}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{\text{ص}}{4}$

عندما $\text{س} \to \frac{\pi}{4}$ فإن $\text{ص} \to 0$

$\Leftarrow \lim\limits_{\text{ص} \to 0} \frac{\text{أ}\,\text{جتا}\,2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\text{ص}}{4}\right)}{\text{ص}} = \lim\limits_{\text{ص} \to 0} \frac{\text{أ}\,\text{جتا}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\text{ص}}{2}\right)}{\text{ص}}$

$= \lim\limits_{\text{ص} \to 0} \frac{\text{أ}\left[\text{جتا}\frac{\pi}{2}\ \cancel{\text{جتا}\frac{\text{ص}}{2}} + \text{جا}\frac{\pi}{2}\ \text{جا}\frac{\text{ص}}{2}\right]}{\text{ص}} = 3$

صفر

$\Leftarrow \lim\limits_{\text{ص} \to 0} \frac{\text{أ}\,\text{جا}\frac{\text{ص}}{2}}{\text{ص}} = 3 \Leftarrow \text{أ} \times \frac{1}{2} = 3 \Leftarrow \boxed{\text{أ} = 6}$

مثال: اذا كانت $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جا}\,4\text{س}}{\text{أ}\,\text{س} - \text{س}} = \lim\limits_{\text{س} \to 0} \frac{\text{ظا}\,\text{ب}\,\text{س}}{7\text{س}} = 5$ فما قيمة أ ، ب ؟

الحل: $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جا}\,4\text{س}}{\text{س}(\text{أ} - 1)} = 5 \Leftarrow \lim\limits_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جا}\,4\text{س}}{\text{س}} \times \lim\limits_{\text{س} \to 0} \frac{1}{\text{أ} - 1} = 5$

$\Leftarrow \frac{4}{\text{أ} - 1} = 5 \Leftarrow 5\text{أ} - 5 = 4 \Leftarrow \boxed{\text{أ} = \frac{9}{5}}$

$\lim\limits_{\text{س} \to 0} \frac{\text{ظا}\,\text{ب}\,\text{س}}{7\text{س}} = 5 \Leftarrow \frac{\text{ب}}{7} = 5 \Leftarrow \boxed{\text{ب} = 35}$

مثال: إذا كانت $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{أ} - \text{جتا ب س}}{\text{س}^٢} = ١٨$ فما قيمة أ ، ب ؟

الحل: بما أن ناتج تعويض المقام يعطي صفر والنهاية موجودة فإن ناتج تعويض البسط يعطي صفر

$\Leftarrow \text{أ} - \text{جتا}٠ = ٠ \Leftarrow \text{أ} - ١ = \text{صفر} \Leftarrow \boxed{\text{أ} = ١}$

$\Leftarrow \lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{١ - \text{جتا ب س}}{\text{س}^٢} \times \frac{١ + \text{جتا ب س}}{١ + \text{جتا ب س}} = \lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{١ - \text{جتا}^٢ \text{ب س}}{\text{س}^٢ (١ + ١)}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{جا}^٢ \text{ب س}}{\text{س}^٢ \times ٢} = \lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{جا ب س}}{\text{س}} \times \frac{\text{جا ب س}}{\text{س}} \times \frac{١}{٢}$

$\Leftarrow \text{ب} \times \text{ب} \times \frac{١}{٢} = ١٨ \Leftarrow \frac{\text{ب}^٢}{٢} = ١٨ \Leftarrow \text{ب}^٢ = ٣٦$

$\Leftarrow \boxed{\text{ب} = \pm ٦}$

مثال: إذا كانت $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{١ - \text{جتا}٢\text{س}}{\text{س}^{\text{ن}}}$ موجودة حيث ن عدد صحيح ≥ صفر ، جد ن

الحل: $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{١ - \text{جتا}٢\text{س}}{\text{س}^{\text{ن}}} \times \frac{١ + \text{جتا}٢\text{س}}{١ + \text{جتا}٢\text{س}} = \lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{١ - \text{جتا}^٢ ٢\text{س}}{\text{س}^{\text{ن}} (١ + ١)}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{جا}^٢ ٢\text{س}}{٢\text{س}^{\text{ن}}}$ ولكي هذه النهاية موجودة عندما ن ∈ {٠ ، ١ ، ٢}

مثال: $\lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{٤}} \frac{\text{جا}^٢ ٣\text{س} - \text{جا}^٢ \text{س}}{٢\text{س} - \frac{\pi}{٢}} = \lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}} \frac{(\text{جا}٣\text{س} - \text{جا س})(\text{جا}٣\text{س} + \text{جا س})}{٢\text{س} - \frac{\pi}{٢}}$

$= \text{جا}\frac{٣\pi}{٤} + \text{جا}\frac{\pi}{٤} \times \lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}} \frac{٢\,\text{جتا}\frac{٣\text{س} + \text{س}}{٢} \; \text{جا}\frac{٣\text{س} - \text{س}}{٢}}{٢\text{س} - \frac{\pi}{٢}}$

$= \frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{٤}} \frac{٢\,\text{جتا}٢\text{س} \times \text{جا س}}{٢\text{س} - \frac{\pi}{٢}} = \frac{٢}{\sqrt{٢}} \times \lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}} \frac{٢\,\text{جا}٢\text{س}}{٢\text{س} - \frac{\pi}{٢}} \times \lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{٤}} \text{جا س}$

$= \frac{٢}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{٤}} \frac{٢\,\text{جا}(\frac{\pi}{٢} - ٢\text{س})}{٢\text{س} - \frac{\pi}{٢}}$ نفرض ص = $\frac{\pi}{٢}$ − ٢س

عندما س ← $\frac{\pi}{٤}$ فإن ص ← ٠

$= \frac{٢}{٢} \times \lim\limits_{\text{ص} \to ٠} \frac{٢\,\text{جا ص}}{-\text{ص}} = ١ \times -٢ = -٢$

مثال: $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\text{س} + \text{جا}(\pi - ٢\text{س})}{\text{س}}$

$\text{جا}(\pi - ٢\text{س}) = \text{جا}٢\text{س}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\text{س} + \text{جا}٢\text{س}}{\text{س}} = \lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\text{س}}{\text{س}} + \lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\text{جا}٢\text{س}}{\text{س}} = ١ + ٢ = ٣$

مثال: $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \dfrac{\text{جا}\pi\text{س}}{١ - \text{س}}$

$\text{جا}\pi\text{س} = \text{جا}(\pi - \pi\text{س})$

$= \text{جا}\pi(١ - \text{س})$

نفرض $١ - \text{س} = \text{ص} \Leftarrow \text{س} = ١ - \text{ص}$

عندما $\text{س} \to ١$ فإن $\text{ص} \to ٠$

$\Leftarrow \lim\limits_{\text{ص} \to ٠} \dfrac{\text{جا}\pi\text{ص}}{\text{ص}} = \pi$

مثال: $\lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}} \dfrac{١ + \text{جتا}٢\text{س}}{١ - \text{جا}\text{س}} = \lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}} \dfrac{١ + ١ - ٢\text{جا}^٢\text{س}}{١ - \text{جا}\text{س}} = \lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}} \dfrac{٢ - ٢\text{جا}^٢\text{س}}{١ - \text{جا}\text{س}}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}} \dfrac{٢(١ - \text{جا}^٢\text{س})}{١ - \text{جا}\text{س}} = \lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}} \dfrac{٢\cancel{(١ - \text{جا}\text{س})}(١ + \text{جا}\text{س})}{\cancel{١ - \text{جا}\text{س}}} = ٢(١ + ١) = ٤$

مثال: $\lim\limits_{\text{س} \to ٣\pi} \dfrac{\text{جا}\text{س}}{\frac{\text{س}}{٣} - \pi}$

نفرض $\text{ص} = \dfrac{\text{س}}{٣} - \pi \Leftarrow \text{س} = ٣\text{ص} + ٣\pi$

عندما $\text{س} \to ٣\pi$ فإن $\text{ص} \to ٠$

$\Leftarrow \lim\limits_{\text{ص} \to ٠} \dfrac{\text{جا}(٣\text{ص} + ٣\pi)}{\text{ص}} = \lim\limits_{\text{ص} \to ٠} \dfrac{-\text{جا}٣\text{ص}}{\text{ص}} = -٣$

$\text{جا}(٣\text{ص} + ٣\pi) = -\text{جا}٣\text{ص}$

مثال: $\lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{٤}} \dfrac{\text{جا}\text{س} - \text{جتا}\text{س}}{\text{س} - \frac{\pi}{٤}} = \lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{٤}} \dfrac{\text{جتا}(\frac{\pi}{٢} - \text{س}) - \text{جتا}\text{س}}{\text{س} - \frac{\pi}{٤}}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{٤}} \dfrac{\dfrac{-٢\text{جا}\frac{\pi}{٢} - \text{س} + \text{س}}{٢} \cdot \text{جا}\dfrac{\frac{\pi}{٢} - \text{س} - \text{س}}{٢}}{\text{س} - \frac{\pi}{٤}} = \lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{٤}} \dfrac{-٢\,\text{جا}\frac{\pi}{٤}\,\text{جا}(\frac{\pi}{٤} - \text{س})}{\text{س} - \frac{\pi}{٤}}$

$= -٢ \times \dfrac{١}{\sqrt{٢}} \times -١ = \dfrac{٢}{\sqrt{٢}} = \sqrt{٢}$

الأستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

مثال: $\lim_{س \to ٢} \frac{جتا \frac{\pi}{س}}{س - ٢}$

نستخدم المتطابقة $جتا \frac{\pi}{س} = جا\left(\frac{\pi}{٢} - \frac{\pi}{س}\right)$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{جا\left(\frac{\pi}{٢} - \frac{\pi}{س}\right)}{س - ٢}$ نقسم البسط والمقام على $\frac{\pi}{٢} - \frac{\pi}{س}$

نوحد المقامات

$= \lim_{س \to ٢} \frac{\frac{جا\left(\frac{\pi}{٢} - \frac{\pi}{س}\right)}{\frac{\pi}{٢} - \frac{\pi}{س}}}{\frac{س - ٢}{\frac{\pi}{٢} - \frac{\pi}{س}}} = \lim_{س \to ٢} \frac{جا\left(\frac{\pi}{٢} - \frac{\pi}{س}\right)}{\frac{\pi}{٢} - \frac{\pi}{س}} \times \lim_{س \to ٢} \frac{\frac{\pi}{٢} - \frac{\pi}{س}}{س - ٢}$

$= ١ \times \lim_{س \to ٢} \frac{\frac{\pi س - ٢\pi}{٢س}}{س - ٢} = ١ \times \lim_{س \to ٢} \frac{\pi \cancel{(س - ٢)}}{٢س} \times \frac{١}{\cancel{س - ٢}}$

$= ١ \times \frac{\pi}{٤} = \frac{\pi}{٤}$

مثال: $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{جتاس}{٢س - \pi}$ $\Leftarrow$ $\boxed{جتاس = جا\left(\frac{\pi}{٢} - س\right)}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{جا\left(\frac{\pi}{٢} - س\right)}{٢\left(س - \frac{\pi}{٢}\right)} = \frac{-١}{٢}$

مثال: $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} (\pi - ٢س) ظاس = \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} (\pi - ٢س) \times \frac{جاس}{جتاس}$

متطابقة: جا٢س

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{جا٢س}{جتاس} \times \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} جاس = \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{٢جاس \cancel{جتاس}}{\cancel{جتاس}} \times \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} جاس$

$= ٢ جا\frac{\pi}{٢} \times جا\frac{\pi}{٢}$

$= ٢ \times ١ \times ١ = ٢$

مثال: $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{١ + جتا٢س}{(٢س + \pi)^٢} \times \frac{١ - جتا٢س}{١ - جتا٢س} = \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{١ - جتا^٢ ٢س}{(٢س + \pi)^٢ (١ - (-١))}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{جا^٢ ٢س}{(٢س + \pi)^٢} \times \frac{١}{٢} = \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{-جا^٢(\pi + ٢س)}{(٢س + \pi)^٢} \times \frac{١}{٢}$

$جا٢س = -جا(\pi + ٢س)$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \left(\frac{جا(\pi + ٢س)}{(٢س + \pi)}\right)^٢ \times \frac{١}{٢} = (+١)^٢ \times \frac{١}{٢}$

$= \frac{١}{٢}$

مثال: $\lim\limits_{س \to 1} \dfrac{جا^2 \pi س}{1 - 2س + س^2}$

$جا \pi س = جا(\pi - \pi س)$

$= جا \pi (1 - س)$

$= \lim\limits_{س \to 1} \dfrac{جا^2(\pi - \pi س)}{(1 - س)(1 - س)}$

$= \lim\limits_{س \to 1} \dfrac{جا^2 \pi (1 - س)}{(1 - س)(1 - س)} = \lim\limits_{س \to 1} \dfrac{جا \pi (1 - س)}{1 - س} \times \lim\limits_{س \to 1} \dfrac{جا \pi (1 - س)}{1 - س}$

$= \pi \times \pi = \pi^2$

ضربنا بالأفق

مثال: $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1 - جاس}{(\pi - 2س)^2} = \lim\limits_{س \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1 - جاس}{4(\frac{\pi}{2} - س)^2} \times \dfrac{1 + جاس}{1 + جاس}$

$= \lim\limits_{س \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1 - جا^2 س}{4(\frac{\pi}{2} - س)^2} \times \dfrac{1}{(1 + 1)} = \lim\limits_{س \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{جتا^2 س}{(\frac{\pi}{2} - س)^2} \times \dfrac{1}{8}$

$= \lim\limits_{س \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{جا^2(\frac{\pi}{2} - س)}{(\frac{\pi}{2} - س)^2} \times \dfrac{1}{8}$

$= \left(\dfrac{جا(\frac{\pi}{2} - س)}{(\frac{\pi}{2} - س)}\right)^2 \times \dfrac{1}{8}$

$= (1)^2 \times \dfrac{1}{8} = 1 \times \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{8}$

الأستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

مثال: $\lim\limits_{س \to 2} \dfrac{2 - س}{جا \pi س} = \lim\limits_{س \to 2} \dfrac{2 - س}{-جا(2\pi - \pi س)}$

$جاس = -جا(2\pi - س)$

$جا \pi س = -جا(2\pi - \pi س)$

$= \lim\limits_{س \to 2} \dfrac{2 - س}{-جا \pi (2 - س)} = -\dfrac{1}{\pi}$

الأستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

* الاتصال :

يكون الاقتران ق متصلاً عند س = أ إذا تحققت الشروط التالية :

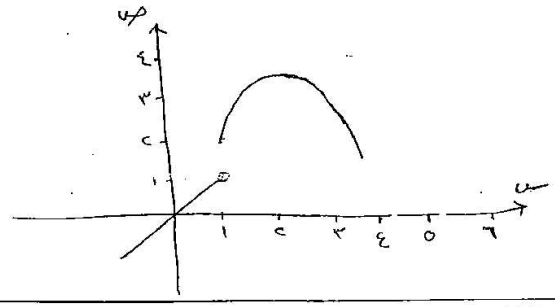
١) الاقتران معرف عند س = أ

٢) $\lim_{س \to أ}$ ق(س) موجودة

٣) $\lim_{س \to أ}$ ق(س) = ق(أ)

مثال : في الشكل المجاور جد :

١) $\lim_{س \to ١^+}$ ق(س) ٢) $\lim_{س \to ١^-}$ ق(س) ٣) ق(١)



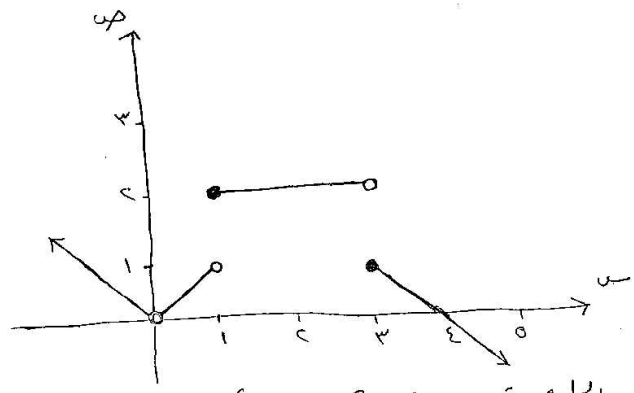
الحل : ١) $\lim_{س \to ١^+}$ ق(س) = ٢

٢) $\lim_{س \to ١^-}$ ق(س) = ١

٣) ق(١) = ٢

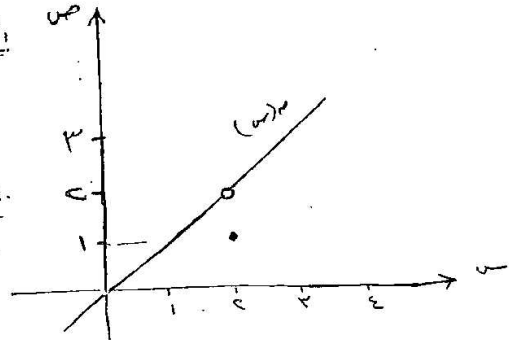
∴ ق(س) غير متصل عند $\boxed{س = ١}$

مثال : في الشكل المجاور الذي يمثل منحنى ق المعرف على ح ، أوجد مجموعة قيم س التي يكون عندها الاقتران غير متصل .



الحل : قيم س هي {٠ ، ١ ، ٣ ، ٤}

مثال: اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على ح
هل الاقتران ق متصل عند س = ٢ ؟؟



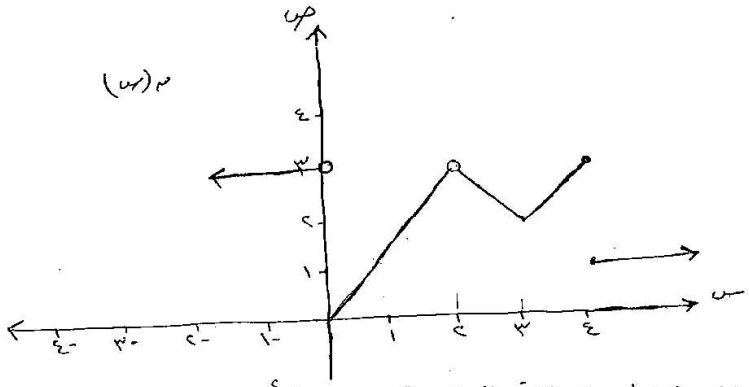
الحل: $\lim_{س \to ٢} ق(س) = ٢$

ق(٢) = ١

$\therefore \lim_{س \to ٢} ق(س) \neq ق(٢)$

⇐ غير متصل عند س = ٢

مثال: في الشكل المجاور جد قيم س التي تجعل الاقتران ق(س) متصلاً



الحل: نقاط عدم الاتصال هي {٠، ٢، ٤}

يكون ق(س) متصل عند س = {-٢، ١، ٣}

ويكون ق(س) متصل في الفترات (-∞، ٠)، (٤، ∞)

الأستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

مثال: ليكن $هـ(س) = \frac{س^٣ - ١}{س - ١}$ ، $س \neq ١$ ابحث في اتصال الاقتران عند $س = ١$ ، $س = ٢$

الحل: هـ(س) غير متصل عند س = ١ (أصفار المقام) هـ(١) غير معرفة

$$\lim_{س \to ٢} هـ(س) = \frac{٨ - ١}{٢ - ١} = \frac{٧}{١} = ٧$$

$$هـ(٢) = \frac{٨ - ١}{٢ - ١} = ٧ \Leftarrow$$ هـ متصل عند $\boxed{س = ٢}$

مثال: إذا كان $ق(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣} & ، س \neq ٣ \\ ٢س & ، س = ٣ \end{cases}$ ابحث اتصال ق(س) عند س = ٣

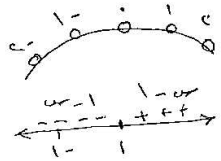
الحل: $$\lim_{س \to ٣} ق(س) = \lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣} \frac{\cancel{(س - ٣)}(س + ٣)}{\cancel{س - ٣}} = ٦$$

$$ق(٣) = ٦$$

$$\therefore \lim_{س \to ٣} ق(س) = ق(٣) = ٦$$ متصل عند س = ٣

مثال: إذا كان $ق(س) = \begin{cases} [١ - س] & ، س < -١ \\ ٢ - س & ، س = -١ \\ |س - ١| - س & ، -١ < س < ٢ \end{cases}$ ابحث الاتصال عند س = -١

الحل: نعيد تعريف أكبر عدد صحيح والقيمة المطلقة



$$ق(س) = \begin{cases} ٣ & ، -٢ \leq س < -١ \\ ٢ - س & ، س = -١ \\ ١ - ٢س & ، -١ < س < ١ \\ -١ & ، ١ \leq س < ٢ \end{cases}$$

$$\lim_{س \to -١^-} ق(س) = ٣$$

$$\lim_{س \to -١^+} ق(س) = ١ - ٢(-١) = ٣$$

$$ق(-١) = ٢ - (-١) = ٣$$

$$\therefore \lim_{س \to -١^-} ق(س) = \lim_{س \to -١^+} ق(س) = ق(-١) = ٣$$

$\Leftarrow$ متصل عند $\boxed{س = -١}$

مثال: اذا كان $ق(س) = \begin{cases} \frac{|س|}{س} & ، س < ٠ \\ [٣س + ١] & ، س = ٠ \\ \frac{ظا^٢ س}{س^٢} & ، س > ٠ \end{cases}$ ابحث اتصال ق عند س = صفر

الحل: $\lim_{س \to ٠^-} ق(س) = \lim_{س \to ٠^-} \frac{ظا^٢ س}{س^٢} = (١)^٢ = ١$

$\lim_{س \to ٠^+} ق(س) = \lim_{س \to ٠^+} \frac{|س|}{س} = \lim_{س \to ٠^+} \frac{س}{س} = ١$

$ق(٠) = [٣(٠) + ١] = ١$

$\Leftarrow \lim_{س \to ٠^-} ق(س) = \lim_{س \to ٠^+} ق(س) = ق(٠) = ١$

$\therefore$ ق متصل عند $\boxed{س = ٠}$

مثال: $ق(س) = \begin{cases} \sqrt{س^٢ + ٧} & ، س < ٣ \\ \frac{٨}{س - ٢} & ، س \geq ٣ \end{cases}$ ابحث اتصال ق(س) عند س = ٣

الحل: $\lim_{س \to ٣^-} ق(س) = \sqrt{٩ + ٧} = \sqrt{١٦} = ٤$

$\lim_{س \to ٣^+} ق(س) = \frac{٨}{٣ - ٢} = ٨$

$\Leftarrow \lim_{س \to ٣} ق(س)$ غير موجودة

$\therefore$ ق غير متصل عند س = ٣

مثال: $ق(س) = \begin{cases} \frac{|ظا س|}{س} & ، س < ٠ \\ ١ - ٢ جتا س & ، س \geq ٠ \end{cases}$ ابحث اتصال ق عند $\boxed{س = ٠}$

الحل: $\lim_{س \to ٠^-} ق(س) = \lim_{س \to ٠^-} \frac{|ظا س|}{س} = \lim_{س \to ٠^-} \frac{-ظا س}{س} = -١$

$\lim_{س \to ٠^+} ق(س) = \lim_{س \to ٠^+} ١ - ٢ جتا ٠ = ١ - ٢(١) = -١$

$ق(٠) = ١ - ٢ جتا ٠ = -١$

$\therefore$ ق متصل عند $\boxed{س = -١}$

مثال: اذا كان $ق(س) = \begin{cases} \frac{\text{ظا}\sqrt{س^2}}{س} & ، س \neq ٠ \\ ٢س^2 + ١ & ، س = ٠ \end{cases}$ ابحث اتصال ق(س) عند $\boxed{س = ٠}$

الحل: $\sqrt{س^2} = |س| \Leftarrow$ $\underset{٠}{\overset{س}{+++}}$ $\overset{س}{---}$

$ق(س) = \begin{cases} \frac{\text{ظا}-س}{س} & ، س < ٠ \\ \frac{\text{ظا}س}{س} & ، س > ٠ \\ ٢س^2 + ١ & ، س = ٠ \end{cases}$

$\lim_{س \to ٠^-} ق(س) = \lim_{س \to ٠^-} \frac{\text{ظا}-س}{س} = -١$

$\lim_{س \to ٠^+} ق(س) = \lim_{س \to ٠^+} \frac{\text{ظا}س}{س} = ١$

$\Leftarrow \lim_{س \to ٠} ق(س)$ غ م

$\therefore$ ق غير متصل عند $\boxed{س = ٠}$

الأستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

مثال: $ق(س) = \begin{cases} [س - ٣] & ، س \geq ٢ \\ \frac{|س - ٢|}{س - ٢} & ، س < ٢ \end{cases}$ ابحث الاتصال عند $\boxed{س = ٢}$

الحل: نعيد تعريف $[س - ٣] = -١ ، ٢ \leq س < ٣$

نعيد تعريف $|س - ٢| \Leftarrow س - ٢ = ٠ \Leftarrow س = ٢$

$\underset{٢}{\overset{٢ - س}{---}}$ $\overset{س - ٢}{+++}$

$ق(س) = \begin{cases} -١ & ، ٢ \leq س < ٣ \\ \frac{٢ - س}{س - ٢} & ، س < ٢ \end{cases} = \begin{cases} -١ & ، ٢ \leq س < ٣ \\ -١ & ، س < ٢ \end{cases}$

$\lim_{س \to ٢^-} ق(س) = \lim_{س \to ٢^+} ق(س) = ق(٢) = -١$

$\therefore$ ق متصل عند $\boxed{س = ٢}$

مثال: اذا كان ق(س) = { جا٣س / س ، س ≠ ٠ ؛ ٣ ، س = ٠ } ابحث اتصال ق(س) عند س = ٠.

الحل: نها ق(س) = نها (جا٣س / س) = ٣
س ← ٠ ، س ← ٠

ق(٠) = ٣

∴ ق متصل عند س = ٠

ملاحظة: عندما يكون ق(س) متصلاً عند س = أ فإننا عند إيجاد الثوابت يمكننا الاستفادة من بعض الحقائق:

١) ق(أ) = نها ق(س) ، س ← أ

٢) ق(أ) = نها ق(س) ، س ← أ⁻

٣) ق(أ) = نها ق(س) ، س ← أ⁺

٣) نها ق(س) ، س ← أ⁻ = نها ق(س) ، س ← أ⁺

مثال: ق(س) = { (س³ - ١) / (س - ١) ، س ≠ ١ ؛ ٢أ² - ٥ ، س = ١ } ما قيمة أ اذا كان ق(س) متصلاً عند س = ١

الحل: بما أن ق متصلاً عند س = ١ فإن

نها ق(س) = ق(١)
س ← ١

⇐ نها ق(س) = نها (س³ - ١) / (س - ١) = نها (س - ١)(س² + س + ١) / (س - ١) = ٣
س ← ١ ، س ← ١ ، س ← ١

ق(١) = ٢أ² - ٥

⇐ ٢أ² - ٥ = ٣ ⇐ ٢أ² = ٨ ⇐ أ² = ٤ ⇐ أ = ±٢

مثال: $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{ظا}^2 \text{أس}}{\text{س}^2} & ، \text{س} \neq 0 \\ 2\text{س}^2 + 2\text{أ}^3 & ، \text{س} = 0 \end{cases}$ ما قيمة أ اذا كان ق(س) متصلاً عند $\boxed{\text{س} = 0}$

الحل: $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \text{ق}(\text{س}) = \lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{\text{ظا}^2 \text{أس}}{\text{س}^2} = \lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{\text{ظا أس}}{\text{س}} \times \dfrac{\text{ظا أس}}{\text{س}} = \text{أ} \times \text{أ} = \text{أ}^2$

$\text{ق}(0) = 2\text{أ}^3$

$\Leftarrow 2\text{أ}^3 = \text{أ}^2 \Leftarrow 2\text{أ}^3 - \text{أ}^2 = 0 \Leftarrow \text{أ}^2(2\text{أ} - 1) = \text{صفر}$

$\Leftarrow \text{أ} = 0$ أو $\text{أ} = \frac{1}{2}$

سؤال: $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^3 + \text{أ}\text{س}^2 & ، \text{س} \leq 2 \\ 8\text{س} + 2\text{أ} & ، \text{س} > 2 \end{cases}$ ما قيمة أ إذا كان ق(س) متصلاً عند س = 2 — $\boxed{\text{أ} = 4}$

مثال: $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{أس}^2 - \text{ب}\text{س} + 1 & ، \text{س} < 1 \\ 5 & ، \text{س} = 1 \\ \text{س}^2 - (\text{أ} + \text{ب})\text{س} + 2 & ، \text{س} > 1 \end{cases}$ جد أ، ب اذا كان ق(س) متصلاً عند $\boxed{\text{س} = 1}$

الحل: $\lim\limits_{\text{س} \to 1^-} \text{ق}(\text{س}) = \text{أ} - \text{ب} + 1 \Leftarrow \text{أ} - \text{ب} + 1 = 5 \Leftarrow \text{أ} - \text{ب} = 4$ —— (1)

$\lim\limits_{\text{س} \to 1^+} \text{ق}(\text{س}) = 1 - (\text{أ} + \text{ب}) + 2 \Leftarrow 1 - \text{أ} - \text{ب} + 2 = 5 \Leftarrow -\text{أ} - \text{ب} = 2$ —— (2)

نحل المعادلتين (1) و (2)

$\cancel{\text{أ}} - \text{ب} = 4$ —— (1)

$-\cancel{\text{أ}} - \text{ب} = 2$ —— (2)

$-2\text{ب} = 6 \Leftarrow \boxed{\text{ب} = -3}$

نعوض في (1)

$\text{أ} - (-3) = 4 \Leftarrow \text{أ} + 3 = 4$

$\Leftarrow \boxed{\text{أ} = 1}$

الأستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

مثال: ليكن $ق(س) = \begin{cases} [س] + أ & ، س \geq ٣ \\ أس - ٧ & ، س < ٣ \end{cases}$ جد قيمة أ التي تجعل ق متصلاً عند س = ٣

الحل: بما أن ق(س) متصل فإن: $\lim_{س \to ٣^+} ق(س) = \lim_{س \to ٣^-} ق(س) = ق(٣)$

$\lim_{س \to ٣^-} ٣أ - ٧ = \lim_{س \to ٣^+} [٣] + أ$

$\Leftarrow ٣أ - ٧ = ٣ + أ \Leftarrow ٢أ = ١٠ \Leftarrow \boxed{أ = ٥}$

سؤال: اذا كان $م(س) = \begin{cases} \frac{س \sqrt{س} - ١}{س - ١} & ، س > ١ \\ ب & ، س = ١ \\ ٢أس & ، س < ١ \end{cases}$ جد قيمة أ ، ب $\boxed{أ = \frac{٣}{٤}}$ إذا كان م متصلاً عند س = ١ ؟ $\boxed{ب = \frac{٣}{٤}}$

مثال: $م(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ - (٣ - ٢ب)س - ٦ب}{س - ٣} & ، س \neq ٣ \\ ٤س - ١ & ، س = ٣ \end{cases}$

اقتران متصل عند $\boxed{س = ٣}$ فما قيمة ب ؟؟

الحل: بما أن م متصل فإن $\lim_{س \to ٣} م(س) = م(٣)$

$\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - (٣ - ٢ب)س - ٦ب}{س - ٣}$ عبارة تربيعية $= \lim_{س \to ٣} \frac{\cancel{(س - ٣)}(س + ٢ب)}{\cancel{س - ٣}}$

$= ٣ + ٢ب$

$م(٣) = ٤(٣) - ١ = ١١$

$\Leftarrow ٣ + ٢ب = ١١ \Leftarrow ٢ب = ٨ \Leftarrow \boxed{ب = ٤}$

الأستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

* ملاحظات عن الاتصال :-

① جميع كثيرات الحدود متصلة على ح

مثل: ق(س) = ٤س^٣ - ٣س^٢ + ٥س - ١

هـ(س) = $\frac{٣}{٤}$س + ٢

د(س) = $\sqrt{٢}$س^٢ - $\frac{٢}{٥}$س + ٤

ل(س) = ٨

② اقترانات الجيب والجتا والمطلق والجذور الفردية متصلة عندما يكون ما بداخلها متصلاً .

مثل: ق(س) = ٥ جا ٣س + ٦ جتا (س^٣ - ١)

هـ(س) = $\sqrt[٣]{س + ٧س^٢}$ + |س^٢ - ٩|

متصلة على ح لأن ما داخلها كثيرات حدود متصلة

③ الجذور الزوجية متصلة عندما يكون ما داخل الجذر متصل وموجب .

مثل: ق(س) = $\sqrt{س^٢ + ١}$ هـ(س) = $\sqrt{س - ٣}$

ل(س) = $\sqrt{س^٢ - ٤}$ د(س) = $\sqrt{١٦ - س^٢}$ و(س) = $\sqrt{٢س - ٧}$

مثال: جد الفترة أو الفترات التي يكون ق(س) متصلاً فيها

① ق(س) = $\sqrt{س - ٥}$

الحل: نبحث اشارة ما تحت الجذر ⇐ س - ٥ = ٠ ⇐ س = ٥

- - - - | + + + (٥)

∴ متصل على [٥ ، ∞)

② ق(س) = $\sqrt{٧ - ٢س}$ ⇐ ٧ - ٢س = ٠ ⇐ س = ٣,٥

+ + + | - - - (٣,٥)

∴ متصل على الفترة (-∞ ، ٣,٥)

③ ق(س) = $\sqrt{س^٢ - ٤}$ ⇐ س^٢ = ٤ ⇐ س = ±٢

+ + + | - - - | + + + (-٢ ، ٢)

∴ متصل على الفترة (-∞ ، -٢] ∪ [٢ ، ∞)

(د) $ق(س) = \sqrt{١٦ - س^٢}$ ⇐ $١٦ - س^٢ = ٠$ ⇐ $س = \pm ٤$

-٤ ، ٤

ق متصل على الفترة $[-٤ ، ٤]$

(هـ) $ق(س) = \sqrt{س^٢ + ١}$ ⇐ $س^٢ + ١ = ٠$ ⇐ $س^٢ = -١$ ليس لها حل

∴ ق متصل على ح

(٤) الاقترانات النسبية غير متصلة عند أصفار المقام

الأستاذ عماد مسك ٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

مثال: $ق(س) = \frac{٢س - ٤}{س - ١}$ غير متصل عند $س = ١$

$ق(س) = \frac{س - ٢}{س^٢ - ٣س}$ ⇐ $س^٢ - ٣س = ٠$ ⇐ $س(س - ٣) = ٠$

⇐ $س = ٠$ أو $س = ٣$

∴ ق غير متصل عند $س = ٠ ، ٣$

مثال: إذا كان $ق(س) = \frac{٢س + ٧}{س^٢ + ب س + ١}$ جد قيمة ب بحيث يكون ق(س) متصلاً على ح

الحل: يجب أن يكون المقام ≠ صفر أي أن مميز العبارة التربيعية في المقام < ٠

⇐ $ب^٢ - ٤أجـ < ٠$ ⇐ $ب^٢ - (٤ × ١ × ١) < ٠$

⇐ $ب^٢ - ٤ < ٠$

⇐ $ب^٢ - ٤ = ٠$ ⇐ $ب^٢ = ٤$ ⇐ $ب = \pm ٢$

ندرس إشارة $ب^٢ - ٤$ ⇐ $+ + + \quad - - - \quad + + +$ ، -٢ ، ٢

∴ قيم ب هي $ب \in (-٢ ، ٢)$

مثال: $ق(س) = \frac{٣س + ٤}{أس^٢ - ٤س + ٥}$ جد أ بحيث يكون ق(س) متصلاً على ح

الحل: يجب أن يكون المميز في المقام < ٠ ⇐ $ب^٢ - ٤أجـ < ٠$

⇐ $(-٤)^٢ - (٤ × أ × ٥) < ٠$ ⇐ $١٦ - ٢٠أ < ٠$

نحولها إلى معادلة ⇐ $١٦ - ٢٠أ = ٠$ ⇐ $أ = \frac{١٦}{٢٠} = \frac{٤}{٥}$

$+ + + + \quad - - - - -$ ، $\frac{٤}{٥}$

∴ $ب \in (\frac{٤}{٥} ، \infty)$

⑤ الاقترانات المتشعبة عند نقاط التحول قد تكون متصلة وقد تكون غير متصلة

مثال: $ق(س) = \begin{cases} س^2 + 3 ، & س < 1 \\ 2س + 2 ، & 1 \le س < 4 \\ س^2 + 1 ، & س \ge 4 \end{cases}$

ق(س) غير متصل عند س = 1 ، س = 4 لأن ق(1) غير موجودة ونهـا ق(س) غير موجودة (س ← 4)

⑥ في اقتران أكبر عدد صحيح [ق(س)] عندما يكون لوحده يكون غير متصل عندما ق(س) ∈ ص لأن النهاية تكون غير موجودة كما درسنا سابقاً

مثال: جد قيم س والتي يكون ق(س) غير متصل عندها

أ) $ق(س) = [س + 3]$

الحل: $ق(س) = [س] + 3$ ق غير متصل عندما س ∈ ص

ب) $ق(س) = [\frac{س}{3} - 2] = [\frac{س}{3}] - 2$ ق غير متصل عندما $\frac{س}{3}$ ∈ ص ⇐ س ∈ 3ص

ج) $ق(س) = [3س + 1] = [3س] + 1$ ق غير متصل عندما 3س ∈ ص ⇐ س ∈ $\frac{ص}{3}$

د) $ق(س) = (س^2 - 4)[س + 3]$

في هذه الحالة نجد أصفار المقدار $س^2 - 4$ ⇐ $س^2 - 4 = 0$ ⇐ س = ±2

∴ ق غير متصل لكل س ∈ ص − {−2، 2}

هـ) $ق(س) = \frac{س - 7}{[س] - 2}$ ⇐ نجد أصفار المقام

⇐ [س] − 2 = 0 ⇐ [س] = 2 ⇐ 2 ≤ س < 3 ⇐ س ∈ [2، 3)

كما أن نهـا (س ← أ) [س] − 2 غير موجودة لكل أ ∈ ص

وبذلك نهـا (س ← أ) $\frac{س - 7}{[س] - 2}$ غير موجودة لكل أ ∈ ص − {7} (صفر البسط)

∴ ق غير متصل لكل أ ∈ {ص ∪ [2، 3)} − {7}

(9) $ق(س) = \begin{cases} س^2 & ، س \notin ص \\ 3س & ، س \in ص \end{cases}$

الحل: في هذه الحالة تكون $\lim_{س \to أ} ق(س) \neq ق(أ)$ لكل $أ \in ص$ إلا عندما

يكون $س^2 = 3س \Leftarrow س^2 - 3س = 0 \Leftarrow س(س-3) = 0$

$\Leftarrow س = 0 ، 3$

$\therefore$ ق غير متصل لكل $س \in ص - \{0 ، 3\}$

الأستاذ عماد مسك
0795153669

* الاتصال على ح:

نبحث الاتصال عند القواعد ونقاط التحول.

مثال: $ق(س) = \begin{cases} س^2 + 2س & ، س < -2 \\ 2س^2 + 5 & ، س \geq -2 \end{cases}$ ابحث الاتصال على ح؟

الحل: 1) القواعد: $(-\infty ، -2)$ متصل لأنه كثير حدود

$(-2 ، \infty)$ " " " "

2) نقاط التحول عند $س = -2$

$\lim_{س \to -2^-} ق(س) = (-2)^2 + 2(-2) = 0$

$\lim_{س \to -2^+} ق(س) = 2(-2)^2 + 5 = 13$ $\Leftarrow$ غير متصل عند $\boxed{س = -2}$

$\Leftarrow$ ق متصل على $ح / \{-2\}$

مثال: $ق(س) = \begin{cases} س^2 + 3س & ، س \leq 2 \\ س^2\sqrt{س+2} + 2 & ، س > 2 \end{cases}$ ابحث اتصال ق(س) لكل $س \in ح$

الحل: 1) القواعد: $س^2 + 3س$ متصل على $(-\infty ، 2)$ لأنه كثير حدود

$س^2\sqrt{س+2} + 2$ متصل على $(2 ، \infty)$ لأن:

$س^2$ متصل كثير حدود

$\sqrt{س+2}$ متصل لأن ما داخل الجذر موجب وهو متصل على $(2 ، \infty)$

2 ثابت (كثير حدود من الدرجة الصفرية) متصل

$\Leftarrow$ تابع حل المثال

ج) نقاط التحول ⇐ عند س = ٢

$\lim_{س \to ٢^-}$ ق(س) = ق(٢) = ٢^٢ + ٣(٢) = ٤ + ٦ = ١٠

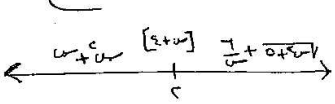
$\lim_{س \to ٢^+}$ ق(س) = $\sqrt{٢ + ٢}$ + ٢ = ١٠

ق(٢) = ٢^٢ + ٣(٢) = ١٠ ⇐ متصل عند س = ٢

∴ ق متصل على ح

مثال: ق(س) = { س^٢ + س ، س < ٢
[س + ٤] ، س = ٢
$\sqrt{س^٢ + ٥}$ + $\frac{٦}{س}$ ، س > ٢ }

ابحث اتصال ق(س) لكل س ∈ ح



الحل: القواعد: س^٢ + س متصل على (-∞، ∞) لأنه كثير حدود

$\sqrt{س^٢ + ٥}$ + $\frac{٦}{س}$ متصل على (٢، ∞) لأنه ما داخل الجذر موجب

و صفر المقام ∉ (٢، ∞)

نقاط التحول: عند س = ٢

$\lim_{س \to ٢^-}$ ق(س) = ٢^٢ + ٢ = ٤ + ٢ = ٦

$\lim_{س \to ٢^+}$ ق(س) = $\sqrt{٤ + ٥}$ + $\frac{٦}{٢}$ = ٣ + ٣ = ٦

⇐ $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) = ٦

ق(٢) = [٢ + ٤] = ٦

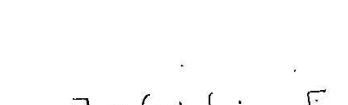
ق متصل عند س = ٢

⇐ ق متصل على ح

مثال: ق(س) = { $\sqrt{١ - س^٢}$ ، |س| < ١
س^٢ + س ، |س| ≥ ١ }

ابحث اتصال ق(س) على ح

اعادة التعريف



الحل: في البداية |س| < ١ ⇐ -١ < س < ١

|س| ≥ ١ ⇐ س ≥ ١

س ≤ -١

⇐ تابع حل المثال

* القواعد: $س^2 + س$ متصل على $(-\infty ، -1)$ وعلى $(1 ، \infty)$ لأنه كثير حدود

$\sqrt{1 - س^2}$ متصل على $(-1 ، 1)$ لأن ما داخل الجذر موجب ومتصل

$- - - \; + + + + \; - - -$ (-1 ، 1)

* نقاط التحول: عند $\boxed{س = -1}$

$\lim_{س \to -1^-} م(س) = (-1)^2 + (-1) = صفر$

$\lim_{س \to -1^+} م(س) = \sqrt{1 - (-1)^2} = صفر$

$م(-1) = (-1)^2 + (-1) = صفر$

∴ متصل عند $\boxed{س = -1}$

عند $\boxed{س = 1}$

$\lim_{س \to 1^-} م(س) = \sqrt{1 - (1)^2} = صفر$

$\lim_{س \to 1^+} م(س) = 1 + 1 = 2$

$\lim_{س \to 1} م(س)$ غير موجودة

∴ غير متصل عند $\boxed{س = 1}$

⇐ م متصل على $ح / \{1\}$

مثال: $م(س) = \begin{cases} \dfrac{|س - 2|}{س - 2} ، & س < 3 \\ \dfrac{1}{6}س + \dfrac{1}{2} ، & س \geq 3 \end{cases}$: بحث الاتصال على ح

الحل: نحدد تعريف $|س - 2|$ ⇐ $س - 2 = 0$ ⇐ $س = 2$

$س - 2$ ، $2 - س$ ، $- - - \; + + +$ ، 2

⇐ $م(س) = \begin{cases} \dfrac{2 - س}{س - 2} ، & س < 2 \\ \dfrac{س - 2}{س - 2} ، & 2 < س < 3 \\ \dfrac{1}{6}س + \dfrac{1}{2} ، & س \geq 3 \end{cases} = \begin{cases} -1 ، & س < 2 \\ 1 ، & 2 < س < 3 \\ \dfrac{1}{6}س + \dfrac{1}{2} ، & س \geq 3 \end{cases}$

* القواعد: -1 متصل على $(-\infty ، 2)$ كثير حدود

1 متصل على $(2 ، 3)$ كثير حدود

$\dfrac{1}{6}س + \dfrac{1}{2}$ متصل على $(3 ، \infty)$ كثير حدود

⇐ تابع حل المثال

* نقاط الشك :

عند $\boxed{\text{س} = ٢}$

ق(٢) غير معرفة

∴ غير متصل عند $\boxed{\text{س} = ٢}$

عند $\boxed{\text{س} = ٣}$

$\lim_{\text{س} \to ٣^-}$ ق(س) = ١

$\lim_{\text{س} \to ٣^+}$ ق(س) = $\frac{٣}{٦}$ + $\frac{١}{٢}$ = ١

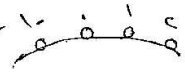
ق(٣) = $\frac{٣}{٦}$ + $\frac{١}{٢}$ = ١

∴ ق متصل عند $\boxed{\text{س} = ٣}$

⇐ ق متصل على ح / {٢}

مثال: اذا كان ق(س) = { س² + ٢ ، س < ٠ ؛ [س + ٢] ، ٠ ≤ س < ٢ ؛ $\sqrt{\text{س} + ٧} + \frac{٤}{\text{س}}$ ، س ≥ ٢ } ابحث اتصال ق على ح

الحل: نعيد تعريف [س + ٢]



⇐ ق(س) = { س² + ٢ ، س < ٠ ؛ ٢ ، ٠ ≤ س < ١ ؛ ٣ ، ١ ≤ س < ٢ ؛ $\sqrt{\text{س} + ٧} + \frac{٤}{\text{س}}$ ، س ≥ ٢ }

* القواعد: س² + ٢ متصل على (-∞ ، ٠) لأنه كثير حدود

٢ متصل على (٠ ، ١) كثير حدود

٣ " " (١ ، ٢) " "

$\sqrt{\text{س} + ٧} + \frac{٤}{\text{س}}$ متصل على (٢ ، ∞) لأنه ما داخل الجذر موجب وصفر المقام ∉ (٢ ، ∞)

* نقاط الشك : عند $\boxed{\text{س} = ١}$

⇐ $\lim_{\text{س} \to ١^-}$ ق(س) = ٢ ، $\lim_{\text{س} \to ١^+}$ ق(س) = ٣ غير متصل عند $\boxed{\text{س} = ١}$

عند $\boxed{\text{س} = ٢}$

$\lim_{\text{س} \to ٢^-}$ ق(س) = ٣ ، $\lim_{\text{س} \to ٢^+}$ ق(س) = $\sqrt{٢ + ٧} + \frac{٤}{٢}$ = ٥ غير متصل عند $\boxed{\text{س} = ٢}$

∴ ق متصل على ح — {١ ، ٢}

الأستاذ عماد مسك ٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

مثال: اذا كان ق(س) = { ٣ جتاس ، $-\frac{\pi}{٦}$ < س ≤ ٠ ، $\frac{ظا٣س}{س}$ ، ٠ < س < $\frac{\pi}{٦}$ } ابحث اتصال ق(س) على الفترة $(-\frac{\pi}{٦} ، \frac{\pi}{٦})$

الحل: القواعد: ٣ جتاس متصل على $(-\frac{\pi}{٦} ، ٠)$ لأن ق(أ) = $\lim_{س \to أ}$ ق(س) لكل أ ∈ $(-\frac{\pi}{٦} ، ٠)$

$\frac{ظا٣س}{س}$ متصل على $(٠ ، \frac{\pi}{٦})$ لأن ق(أ) = $\lim_{س \to أ}$ ق(س) لكل أ ∈ $(٠ ، \frac{\pi}{٦})$

صفر المقام ∉ $(٠ ، \frac{\pi}{٦})$

* نقاط التحول: عند $\boxed{س = ٠}$

$\lim_{س \to ٠^-}$ ق(س) = ٣ جتا ٠ = ٣

$\lim_{س \to ٠^+}$ ق(س) = $\frac{ظا٣س}{س}$ = ٣

ق(٠) = ٣ جتا ٠ = ٣

⇐ متصل عند $\boxed{س = ٠}$

∴ ق متصل على الفترة $(-\frac{\pi}{٦} ، \frac{\pi}{٦})$

نلاحظ أننا لم نبحث اتصال الاقتران ق(س) عند أطراف الفترة وذلك لأنها فترة مفتوحة وأن كلاً من $-\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{\pi}{٦}$ ∉ $(-\frac{\pi}{٦} ، \frac{\pi}{٦})$

الأستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

مثال: ق(س) = { $\frac{٢س جاس}{ظاس}$ ، $-\frac{\pi}{٣}$ < س < ٠ ، ٢ جتا٣س ، ٠ ≤ س < $\frac{\pi}{٣}$ } ابحث اتصال ق(س) في الفترة $(-\frac{\pi}{٣} ، \frac{\pi}{٣})$

الحل: القواعد: $\frac{٢س جاس}{ظاس} = \frac{٢س جاس}{\frac{ظاس جاس}{جتاس}}$ = ٢ جتاس متصل على الفترة $(-\frac{\pi}{٣} ، ٠)$

لأن ق(أ) = $\lim_{س \to أ}$ ق(س) لكل أ ∈ $(-\frac{\pi}{٣} ، ٠)$ وصفر المقام ∉ $(-\frac{\pi}{٣} ، ٠)$

٢ جتا٣س متصل على الفترة $(٠ ، \frac{\pi}{٣})$ لأن ق(أ) = $\lim_{س \to أ}$ ق(س) لكل أ ∈ $(٠ ، \frac{\pi}{٣})$

* نقاط التحول: عند $\boxed{س = ٠}$

$\lim_{س \to ٠^-}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٠^-} \frac{٢س}{ظاس} \times \frac{جاس}{ظاس}$ = ٢ × ١ = ٢

$\lim_{س \to ٠^+}$ ق(س) = ٢ جتا٣×٠ = ٢ × ١ = ٢

ق(٠) = ٢ جتا٣×٠ = ٢ × ١ = ٢

⇐ ق متصل عند $\boxed{س = ٠}$ ∴ ق(س) متصل على $(-\frac{\pi}{٣} ، \frac{\pi}{٣})$

مثال: إذا كان $ق(س) = \begin{cases} \sqrt{٥س - س^٢} &، |س - ٣| < ١ \\ س^٢ + ٢ &، [س] = ٤ \end{cases}$ ابحث في اتصال ق(س) على مجاله

الحل: $ق(س) = \begin{cases} \sqrt{٥س - س^٢} &، -١ < س - ٣ < ١ \\ س^٢ + ٢ &، ٤ \leq س < ٥ \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{٥س - س^٢} &، ٢ < س < ٤ \\ س^٢ + ٢ &، ٤ \leq س < ٥ \end{cases}$

بعد إيجاد مجال الاقتران وهو الفترة (٢، ٥) نبحث الاتصال على هذه الفترة

* القواعد: $\sqrt{٥س - س^٢}$ متصل على (٢، ٤) لأن ما تحت الجذر موجب

$س^٢ + ٢$ متصل على (٤، ٥) لأنه كثير حدود

* نقاط التحول: عند $\boxed{س = ٤}$

$\lim_{س \to ٤^-} ق(س) = \sqrt{٢٠ - ١٦} = ٢$

$\lim_{س \to ٤^+} ق(س) = (٤)^٢ + ٢ = ١٨$

$\Leftarrow \lim_{س \to ٤} ق(س)$ غير موجودة

$\Leftarrow$ ق غير متصل عند $\boxed{س = ٤}$ $\therefore$ ق متصل على الفترة $(٢، ٥) - \{٤\}$

مثال: $ق(س) = \begin{cases} \frac{٣ \text{ ظا } س}{س} &، -\frac{\pi}{٤} < س < ٠ \\ [س + ٣] &، س = ٠ \\ ٣ \text{ جتا } س &، ٠ < س < \frac{\pi}{٤} \end{cases}$ ابحث اتصال ق(س) على $\left(-\frac{\pi}{٤}، \frac{\pi}{٤}\right)$

الحل: * القواعد: $\frac{٣ \text{ ظا } س}{س}$ متصل على $\left(-\frac{\pi}{٤}، ٠\right)$ لأن $ق(أ) = \lim_{س \to أ} ق(س)$ لكل $أ \in \left(-\frac{\pi}{٤}، ٠\right)$

٣ جتا س متصل على $\left(٠، \frac{\pi}{٤}\right)$ لأنه ما داخل الجتا متصل

* نقاط التحول: عند $\boxed{س = ٠}$

$\lim_{س \to ٠^-} ق(س) = \lim_{س \to ٠^-} \frac{٣ \text{ ظا } س}{س} = ٣$

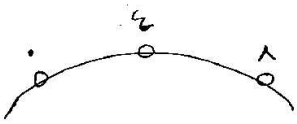
$\lim_{س \to ٠^+} ق(س) = \lim_{س \to ٠^+} ٣ \text{ جتا } ٠ = ٣ \times ١ = ٣$

$ق(٠) = [٠ + ٣] = ٣$

$\Leftarrow$ ق(س) متصل عند $\boxed{س = ٠}$ $\therefore$ ق متصل على $\left(-\frac{\pi}{٤}، \frac{\pi}{٤}\right)$

مثال: $ق(س) = \begin{cases} \sqrt{س+1} & ، ٠ \leq س < ٣ \\ [\frac{س}{٤} + ٢] & ، ٣ \leq س < ٦ \\ |٩ - س| & ، س = ٦ \end{cases}$

ابحث اتصال ق(س) لكل س ∈ [٠، ٦]



الحل: نعيد تعريف $[\frac{س}{٤} + ٢]$ طول الدرجة $= \frac{١}{|\frac{١}{٤}|} = ٤$

$ق(س) = \begin{cases} \sqrt{س+1} & ، ٠ \leq س < ٣ \\ ٢ & ، \cancel{٣} \leq س < ٤ \\ ٣ & ، ٤ \leq س < \cancel{٦} \\ |٩ - س| & ، س = ٦ \end{cases}$

* القواعد: $\sqrt{س+1}$ متصل على (٠، ٣) لأنه ما داخل الجذر موجب ومتصل
٢ متصل على (٣، ٤) كثير حدود
٣ " " (٤، ٦) كثير حدود

* نقاط التحول: عند $\boxed{س = ٣}$
$\lim_{س \to ٣^-} ق(س) = \sqrt{٣+1} = ٢$
$\lim_{س \to ٣^+} ق(س) = ٢$
$ق(٣) = ٢$ ⇐ متصل عند $\boxed{س = ٣}$

عند $\boxed{س = ٤}$
$\lim_{س \to ٤^-} ق(س) = ٢$
$\lim_{س \to ٤^+} ق(س) = ٣$
$ق(٤) = ٣$
∴ غير متصل عند س = ٤

* أطراف الفترات: عند $\boxed{س = ٦}$
$\lim_{س \to ٦} ق(س) = ٣$
$ق(٦) = |٩ - ٦| = ٣$
∴ ق متصل عند $\boxed{س = ٦}$

عند $\boxed{س = ٠}$
$\lim_{س \to ٠} ق(س) = \sqrt{٠ + ١} = ١$
$ق(٠) = \sqrt{٠+١} = ١$
∴ ق متصل عند $\boxed{س = ٠}$

⇐ ق متصل على $[٠، ٦] - \{٤\}$

مثال: ق(س) = { [س + ٢] ، س = ١ ؛ ٣س + جا(π/س) ، ١ < س < ٢ ؛ |٥س − ٣| ، س = ٢ ؛ س^٣ − ١ ، س > ٢ }

ابحث اتصال ق(س) على [١ ، ∞)

الحل: * القواعد: ٣س + جا(π/س) متصل على (١ ، ٢) لأن ق(أ) = نها_{س←أ} ق(س) لكل أ ∈ (١ ، ٢)

س^٣ − ١ متصل على (٢ ، ∞) لأنه كثير حدود

* نقاط التحول: عند $\boxed{س = ٢}$

نها_{س←٢^−} ق(س) = ٣(٢) + جا(π/٢) = ٧

نها_{س←٢^+} ق(س) = (٢)^٣ − ١ = ٧

⇐ نها_{س←٢} ق(س) = ٧

ق(٢) = |٥(٢) − ٣| = ٧ ⇐ ق متصل عند $\boxed{س = ٢}$

الأستاذ عماد مسك ٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

* أطراف المجال: عند $\boxed{س = ١}$

نها_{س←١^+} ق(س) = ٣(١) + جا π = ٣ + ٠ = ٣

ق(١) = [١ + ٢] = ٣ ⇐ ق متصل عند $\boxed{س = ١}$

∴ ق متصل على [١ ، ∞)

مثال: ق(س) = { (أس^٢ − ٢) / (س − ٢) ، س < ٢ ؛ ب س + جـ ، ٢ ≤ س < ٤ ؛ ٦س ، س ≥ ٤ }

أوجد كلاً من أ ، ب ، جـ اذا كان ق(س) متصلاً على ح

الحل: نها_{س←٢^−} ق(س) = نها_{س←٢^−} (أس^٢ − ٢) = ٨ − ٢ = ٠ ⇐ $\boxed{أ = ٨}$

عندما النهاية موجودة ساوينا البسط بالعدد صفر

∴ نها_{س←٢^−} ق(س) = نها_{س←٢^−} (٢س^٢ − ٨) / (س − ٢) = نها_{س←٢^−} ٢(س − ٢)(س + ٢) / (س − ٢) = ٨

نها_{س←٢^+} ق(س) = نها_{س←٢^+} ب س + جـ = ٢ب + جـ

⇐ $\boxed{٢ب + جـ = ٨}$

نها_{س←٤^−} ق(س) = نها_{س←٤^+} ق(س) ⇐ $\boxed{٤ب + جـ = ٢٤}$

بالطرح ⇐ ٤ب + جـ = ٢٤ ، −(٢ب + جـ = ٨) ⇐ ٢ب = ١٦ ⇐ $\boxed{ب = ٨}$

وبالتعويض ⇐ ٢(٨) + جـ = ٨ ⇐ ١٦ + جـ = ٨

$\boxed{جـ = -٨}$

(١٠٩)

مثال: $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} |٢\text{س}+٢| & ، -٤ \le \text{س} < ١ \\ [\frac{١}{٣}\text{س}+٤] & ، ١ \le \text{س} \le ٦ \end{cases}$ ابحث اتصال ق(س) على [-٤، ٦]

الحل: نعيد تعريف $|٢\text{س}+٢| \Leftarrow ٢\text{س}+٢ = ٠ \Leftarrow \text{س} = -١$

$٢\text{س}+٢$ ، $-٢\text{س}-٢$

نعيد تعريف $[\frac{١}{٣}\text{س}+٤]$ طول الدرجة = ٣

$\Leftarrow \text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} -٢\text{س}-٢ & ، -٤ \le \text{س} < -١ \\ ٢\text{س}+٢ & ، -١ \le \text{س} < ١ \\ ٤ & ، ١ \le \text{س} < ٣ \\ ٥ & ، ٣ \le \text{س} < ٦ \\ ٦ & ، \text{س} = ٦ \end{cases}$

الأستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

* القواعد: $-٢\text{س}-٢$ متصل على [-٤، -١) لأنه كثير حدود
$٢\text{س}+٢$ متصل على (-١، ١) لأنه كثير حدود
٤ متصل على (١، ٣) كثير حدود
٥ متصل على (٣، ٦) كثير حدود

* نقاط التحول: عند $\boxed{\text{س} = -١}$

$\lim_{\text{س} \to -١^-} \text{ق}(\text{س}) = -٢(-١) - ٢ = \text{صفر}$

$\lim_{\text{س} \to -١^+} \text{ق}(\text{س}) = ٢(-١) + ٢ = \text{صفر}$

$\text{ق}(-١) = \text{صفر}$

ق متصل عند $\boxed{\text{س} = -١}$

عند $\boxed{\text{س} = ١}$

$\lim_{\text{س} \to ١^-} \text{ق}(\text{س}) = ٢(١) + ٢ = ٤$

$\lim_{\text{س} \to ١^+} \text{ق}(\text{س}) = ٤$

$\text{ق}(١) = ٤$

ق متصل عند $\boxed{\text{س} = ١}$

عند $\boxed{\text{س} = ٣}$

$\lim_{\text{س} \to ٣^-} \text{ق}(\text{س}) = ٤$

$\lim_{\text{س} \to ٣^+} \text{ق}(\text{س}) = ٥$

$\Leftarrow \lim_{\text{س} \to ٣} \text{ق}(\text{س})$ غ م

ق غير متصل عند $\boxed{\text{س} = ٣}$

* أطراف الفترات:

عند $\boxed{\text{س} = -٤}$

$\lim_{\text{س} \to -٤} \text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(-٤) = -٢(-٤) - ٢ = ٦$

متصل عند $\boxed{\text{س} = -٤}$

عند $\boxed{\text{س} = ٦}$

$\lim_{\text{س} \to ٦} \text{ق}(\text{س}) = ٥$ ، $\text{ق}(٦) = ٦$ ق غير متصل عند $\boxed{\text{س} = ٦}$

∴ ق متصل على $[-٤، ٦] - \{٣، ٦\}$

سؤال: إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^2 - ٣س + ٣ ، & -٢ < س < ١ \\ [س] ، & ١ < س < ٣ \\ |س - ٥| ، & ٣ \leq س \leq ٨ \end{cases}$

ابحث في اتصال ق في الفترة $[-٢ ، ٨]$

---

* **نظريات في النهايات:**

إذا كان ق ، هـ اقترانين متصلين عند $\boxed{س = أ}$ فإن:

١) كلا الاقترانين ق + هـ ، ق - هـ اقتران متصل عند $\boxed{س = أ}$

٢) الاقتران ق × هـ متصل عند $\boxed{س = أ}$

٣) الاقتران $\left(\frac{ق}{هـ}\right)$ متصل عند $\boxed{س = أ}$ بشرط أن $هـ(أ) \neq صفر$

مثال: اذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^2 + ٣ ، & س < ٢ \\ ٤س - ١ ، & س \geq ٢ \end{cases}$ وكان $هـ(س) = ٢س^2 - س$

ابحث اتصال ق(س) + هـ(س) عند س = ٢

الحل: هـ(س) متصل عند $\boxed{س = ٢}$ لأنه كثير حدود

نبحث اتصال ق(س) عند $\boxed{س = ٢}$

$\lim_{س \to ٢^-} ق(س) = (٢)^2 + ٣ = ٤ + ٣ = ٧$

$\lim_{س \to ٢^+} ق(س) = ٤(٢) - ١ = ٨ - ١ = ٧$

$ق(٢) = ٤(٢) - ١ = ٨ - ١ = ٧$

⇐ ق(س) متصل عند $\boxed{س = ٢}$

∴ ق + هـ متصل عند $\boxed{س = ٢}$ لأنه ناتج من جمع اقترانين متصلين

سؤال: اذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^2 ، & س < ٢ \\ ٣س - ٢ ، & س \geq ٢ \end{cases}$ $هـ(س) = س^3 - ١$

بين أن ق(س) × هـ(س) متصل عند $\boxed{س = ٢}$

الأستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

مثال: اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^2 + 2\text{س} & ، \text{س} < 3 \\ 4\text{س} + \frac{3}{\text{س} - 2} & ، \text{س} \geq 3 \end{cases}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = \left[\frac{\text{س}}{2} + 5\right]$

وكان $\text{ل}(\text{س}) = \text{ق}(\text{س}) - \text{هـ}(\text{س})$ ابحث اتصال $\text{ل}(\text{س})$ عند $\boxed{\text{س} = 3}$

الحل: نبحث اتصال $\text{ق}(\text{س})$ عند $\boxed{\text{س} = 3}$

$\lim\limits_{\text{س} \to 3^-} \text{ق}(\text{س}) = 9 + 6 = 15$

$\lim\limits_{\text{س} \to 3^+} \text{ق}(\text{س}) = 4(3) + \frac{3}{3-2} = 15$

$\text{ق}(3) = 15$

$\therefore$ ق متصل عند $\boxed{\text{س} = 3}$

$\Leftarrow$ نبحث اتصال $\text{هـ}(\text{س})$ عند $\boxed{\text{س} = 3}$

$\lim\limits_{\text{س} \to 3} \text{هـ}(\text{س}) = \lim\limits_{\text{س} \to 3} \left[\frac{3}{2} + 5\right] = \lim\limits_{\text{س} \to 3} [6,5] = 6$

$\text{هـ}(3) = \left[\frac{3}{2} + 5\right] = [6,5] = 6$

$\therefore$ $\text{هـ}(\text{س})$ متصل عند $\boxed{\text{س} = 3}$

$\therefore$ $\text{ل}(\text{س}) = \text{ق}(\text{س}) - \text{هـ}(\text{س})$ متصل عند $\boxed{\text{س} = 3}$ لأنه ناتج من طرح اقترانين متصلين

مثال: $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{\text{س}^3 - 8}{\text{س} - 2} & ، \text{س} \neq 2 \\ 3\text{س}^2 & ، \text{س} = 2 \end{cases}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = \begin{cases} 4\text{س} + 3 & ، \text{س} < 2 \\ |6\text{س} - 1| & ، \text{س} \geq 2 \end{cases}$

وكان $\text{ل}(\text{س}) = \frac{1}{2}\text{ق}(\text{س}) + 3\text{هـ}(\text{س})$ ابحث اتصال $\text{ل}(\text{س})$ عند $\boxed{\text{س} = 2}$

الحل: نبحث اتصال $\text{ق}(\text{س})$ عند $\boxed{\text{س} = 2}$

$\lim\limits_{\text{س} \to 2} \text{ق}(\text{س}) = \lim\limits_{\text{س} \to 2} \frac{\cancel{(\text{س} - 2)}(\text{س}^2 + 2\text{س} + 4)}{\cancel{\text{س} - 2}} = 12$

$\text{ق}(2) = 3(2)^2 = 12$ $\therefore$ ق متصل عند $\boxed{\text{س} = 2}$ أيضاً $\frac{1}{2}\text{ق}(\text{س})$ متصل عند $\boxed{\text{س} = 2}$

نبحث اتصال $\text{هـ}(\text{س})$ عند $\boxed{\text{س} = 2}$

$\lim\limits_{\text{س} \to 2^-} \text{هـ}(\text{س}) = 4(2) + 3 = 11$ $\quad$ $\text{هـ}(2) = |12 - 1| = 11$

$\lim\limits_{\text{س} \to 2^+} \text{هـ}(\text{س}) = |12 - 1| = 11$ $\quad$ $\therefore$ $\text{هـ}(\text{س})$ متصل عند $\boxed{\text{س} = 2}$

$3\text{هـ}(\text{س})$ متصل عند $\boxed{\text{س} = 2}$

$\therefore$ $\text{ل}(\text{س}) = \frac{1}{2}\text{ق}(\text{س}) + 3\text{هـ}(\text{س})$ متصل عند $\boxed{\text{س} = 2}$

مثال: $ق(س) = (س^2 - 9) \cdot [س + 2]$ ابحث اتصال $ق(س)$ عند $\boxed{س = 3}$

الحل: نحدد توقيت $[س + 2]$

$$[س + 2] = \begin{cases} 4 ، 2 \le س < 3 \\ 5 ، 3 \le س < 4 \end{cases}$$

غير متصل عند $\boxed{س = 3}$

لكن عند إجراء عملية الضرب ينتج اقترانه جديد متصل عند $\boxed{س = 3}$

$$\Leftarrow ق(س) = \begin{cases} 4(س^2 - 9) ، 2 \le س < 3 \\ 5(س^2 - 9) ، 3 \le س < 4 \end{cases}$$

$\lim_{س \to 3^-} ق(س) = 4(9 - 9) = صفر$ ، $ق(3) = صفر$

$\lim_{س \to 3^+} ق(س) = 5(9 - 9) = صفر$ ∴ $ق$ متصل عند $\boxed{س = 3}$

مثال: $ق(س) = [س + 7] - [س - 1]$ ابحث اتصال $ق(س)$ على ح

الحل: $ق(س) = [س] + 7 - ([س] - 1) = \cancel{[س]} + 7 - \cancel{[س]} + 1 = 8$ متصل على ح لأنه ثابت

ملاحظة: يمكن أن يكون أحد الاقترانين أو كلاهما غير متصل لكن ناتج الجمع أو الطرح أو الضرب يكون متصل

سؤال: إذا كان $ق(س) = (س - 4)^2$ ، $هـ(س) = \frac{3}{(س - 4)^2}$ هل $ق \times هـ$ متصل عند $\boxed{س = 4}$ ؟؟

مثال: إذا كان $ق(س) = \begin{cases} 5 - 3س^2 ، س < -1 \\ 2س + 1 ، س \ge -1 \end{cases}$

$هـ(س) = \begin{cases} 4س + 3 ، س < -1 \\ س^2 + 1 ، س \ge -1 \end{cases}$

ابحث في اتصال $ل(س) = ق(س) + هـ(س)$ عند $\boxed{س = -1}$

الحل: $ل(س) = \begin{cases} 5 - 3س^2 + 4س + 3 ، س < -1 \\ 2س + 1 + س^2 + 1 ، س \ge -1 \end{cases} = \begin{cases} -3س^2 + 4س + 8 ، س < -1 \\ س^2 + 2س + 2 ، س \ge -1 \end{cases}$

$\lim_{س \to -1^-} ل(س) = 1$ ، $ل(-1) = 1$

$\lim_{س \to -1^+} ل(س) = 1$ ∴ $ل(س)$ متصل عند $\boxed{س = -1}$

الأستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

مثال: اذا كان ق(س) ، هـ(س) متصلتين عندما $\boxed{\text{س} = \text{أ}}$ أثبت أن:

ق(س) + هـ(س) يكون متصلاً عند $\boxed{\text{س} = \text{أ}}$

الحل: ق(س) متصل عند س = أ $\Leftarrow$ $\lim_{\text{س} \to \text{أ}}$ ق(س) = ق(أ)

هـ(س) متصل عند س = أ $\Leftarrow$ $\lim_{\text{س} \to \text{أ}}$ هـ(س) = هـ(أ)

$\lim_{\text{س} \to \text{أ}}$ (ق(س) + هـ(س)) = $\lim_{\text{س} \to \text{أ}}$ ق(س) + $\lim_{\text{س} \to \text{أ}}$ هـ(س)

= ق(أ) + هـ(أ)

= (ق + هـ)(أ)

مثال: ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{جا}^2(\text{ب س}) - \text{س}^2}{\text{س جا}2\text{س}} & ، -\frac{\pi}{4} \leq \text{س} < 0 \\ 2 & ، \text{س} = 0 \\ \dfrac{\text{س}^2 + (1-\text{أ})\text{س}}{\text{أ س}} & ، 0 < \text{س} \leq 2 \end{cases}$

جد أ، ب اذا كان ق(س) متصلاً عند $\boxed{\text{س} = 0}$

الحل: ق(0) = 2 ، $\lim_{\text{س} \to 0^-}$ ق(س) = $\lim_{\text{س} \to 0^-} \dfrac{\text{جا}^2(\text{ب س})}{\text{س جا}2\text{س}} - \dfrac{\text{س}^2}{\text{س جا}2\text{س}}$

= $\lim_{\text{س} \to 0^-} \dfrac{\text{جا ب س}}{\text{س}} \times \dfrac{\text{جا ب س}}{\text{جا}2\text{س}} - \dfrac{\text{س}^2}{\text{س جا}2\text{س}}$

= ب × $\dfrac{\text{ب}}{2}$ − $\dfrac{1}{2}$ = $\dfrac{\text{ب}^2}{2} - \dfrac{1}{2}$

$\Leftarrow \dfrac{\text{ب}^2}{2} - \dfrac{1}{2} = 2 \Leftarrow \dfrac{\text{ب}^2}{2} = 2 + \dfrac{1}{2} \Leftarrow \dfrac{\text{ب}^2}{2} = \dfrac{5}{2} \Leftarrow \text{ب}^2 = 5 \Leftarrow \boxed{\text{ب} = \pm\sqrt{5}}$

$\lim_{\text{س} \to 0^+}$ ق(س) = $\lim_{\text{س} \to 0^+} \dfrac{\text{س}^2 + (1-\text{أ})\text{س}}{\text{أ س}}$ = $\lim_{\text{س} \to 0^+} \dfrac{\cancel{\text{س}}(\text{س} + (1-\text{أ}))}{\text{أ}\cancel{\text{س}}}$

= $\dfrac{0 + 1 - \text{أ}}{\text{أ}}$ = $\dfrac{1-\text{أ}}{\text{أ}}$

$\Leftarrow \dfrac{1-\text{أ}}{\text{أ}} = 2 \Leftarrow 1 - \text{أ} = 2\text{أ} \Leftarrow 1 = 3\text{أ} \Leftarrow \boxed{\text{أ} = \frac{1}{3}}$

سؤال: ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{جا أ س}}{5\text{س}} & ، -2 \leq \text{س} < 1 \\ 4 & ، \text{س} = 0 \\ \text{ب}(2 + \text{س}) & ، 0 < \text{س} \leq 2 \end{cases}$

جد أ، ب اذا كان ق(س) متصلاً على [-2، 2]

$\boxed{\begin{array}{l} \text{أ} = 20 \\ \text{ب} = 2 \end{array}}$ ← لا جابة

مثال: جد الفترات التي يكون ق(س) متصلاً مبرهناً

① $ق(س) = \frac{\sqrt{س^2+1}}{|س|+3}$

الحل: $\sqrt{س^2+1}$ متصل على ح لأنه موجب دائماً

|س|+٣ متصل ولا توجد أصفار مقام

∴ ق(س) متصل على ح

|س| = -٣ لا يمكن لذلك فهو متصل على ح لأنه موجب

---

② $ق(س) = \frac{\sqrt{9-س^2}}{س^2-س}$

الحل: نبحث مجال $9-س^2 \Leftarrow 9-س^2 = 0 \Leftarrow س = \pm 3$

- - - + + + - - -

-٣ ٣

$\sqrt{9-س^2}$ معرف على الفترة [-٣،٣]

$س^2-س$ متصل لأنه كثير حدود

نجد أصفار المقام $\Leftarrow س^2-س = 0 \Leftarrow س(س-1) = 0 \Leftarrow س = 0 ، 1$

∴ ق(س) متصل على [-٣،٣] - {٠،١}

سؤال: اذا كان $ق(س) = \begin{cases} أ - ب\,جتا\,س & ، 0 < س < \frac{\pi}{4} \\ 3 & ، س = \frac{\pi}{4} \\ ب + \frac{4}{\pi}|س| & ، \frac{\pi}{4} < س < \frac{\pi}{2} \end{cases}$

أوجد قيمة أ، ب بحيث أن ق(س) متصل عندما $س = \frac{\pi}{4}$

الإجابة: $\boxed{أ = 5}$ $\boxed{ب = 2}$

الأستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

نهاية الوحدة الأولى

تميز مع عماد مسك