الدرس الاول
معدل التغير

تعريف:
اذا تغيرت قيمه متغير مثل س من $س_١$ الى $س_٢$ فان مقدار التغير في س هو $س_٢ - س_١$ ، وسنرمز للتغير في س بالرمز $\triangle$س وتقرأ (دلتا س)

مثال : جد $\triangle$س اذا تغيرت س من ٣,٤٥ الى ٣,٨٠ ؟

مثال : جد $\triangle$س في الحالات الاتيه :
١) $س_١ = ٤$ ، $س_٢ = ٢,٤$
٢) اذا تغيرت س من $س_١ =$ ن الى $س_٢ =$ ن +١

تعريف:
التغير في س يصاحبه التغير في ق(س)
$\triangle$ق(س) = ق($س_٢$) – ق($س_١$)
$\triangle$ ص = $ص_٢ - ص_١$

مثال : احسب مقدار التغير في ق(س) = $س^٢$ + ٤ س عندما :
١) تتغير س من ١ الى ٣
٢) اذا تغيرت س من ن الى ن – ١

مثال : اذا كان ق(س) = ($س^٢$ + س $)^{-١}$ ، وكان مقدار التغير في الاقتران ق عندما تتغير س من ١ الى $س_٢$ يساوي ($\frac{-١}{٣}$) ، فجد قيمه $س_٢$

تعريف :
اذا كان ص = ق(س) فان المقدار $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$ يسمى معدل التغير في ص عدما تتغير س من $\text{س}_{١}$ الى $\text{س}_{٢}$ حيث:

$$\left[\tfrac{١}{٢}\text{س} - ١\right] \quad \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}} = \frac{\text{ق}(\text{س}_{٢}) - \text{ق}(\text{س}_{١})}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}}$$

حيث $\text{س}_{٢} = \text{س}_{١} + \Delta \text{س}$

مثال : اذا كان ق(س) = $\text{س}^{٢}$ + س وتغيرت س من ١ الى ٥ جد معدل التغير ؟

مثال : اذا كان ق(س) = ٢$\text{س}^{٢}$ + ٣س فجد معدل التغير عندما تتغير س من -١ الى ٢ ؟

مثال : اذا كان ص = ق(س)= ٥ – $\text{س}^{٢}$ ، فجد معدل التغير في الاقتران ق اذا تغيرت س من ٢ الى ٢,١ ؟

مثال : اذا ق(س) = $\text{س}^{٣}$ – ٢ س وتغيرت س حسب الفتره [٢ ، ٤] جد معدل التغير في ق ؟

مثال : اذا كان ق(س) = $\left[\frac{\text{س}}{٢}\right] + |\text{س}|$ وتغيرت س من -١ الى ٤ جد $\frac{\Delta \text{ق}(\text{س})}{\Delta \text{س}}$

مثال :اذا كان ق(س) = { ٢س + $\sqrt{\text{س} - ٢}$ ، س≤ ٥ ؛ س^{٢} + ١ ، س >٥ } وتغيرت س من ٣ الى ٦ جد معدل التغير

مثال : اذا كان ق(س) = { س^{٢} – ٣ ، س ≤ ٣ ؛ ٢س + ١ ، س > ٣ } وتغيرت س من ٤ بمقدار ٢ جد $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$

مثال : اذا كان ق(س) = س^{٢} – هـ (س) ، هــ (س) = { جتاس ، ٠ < س < π ؛ ٣ ، س ≥ π }

وتغيرت س من $\frac{\pi}{٢}$ بمقدار $\frac{\pi}{٢}$ جد $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$

مثال : اذا كان ق(س) = س^{٢} + ٥ وكان معدل تغير ق(س) عندما تتغير س من س$_{١}$ الى س$_{١}$ + ٢ يساوي ١٢ فما قيمه س$_{١}$ ؟

مثال : اذا كان $ق(س) = \begin{cases} |٢س - ٣| & ، ٠ \le س < ٢ \\ [س + ١] & ، ٢ \le س < ٦ \end{cases}$ فجد معدل التغير في الاقتران ق عندما تتغير س من ١ الى ٤

مثال : اذا كان $ق(س) = س^{٣}$ س $\in$ [١ ، أ] وكان $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = ١٣$ جد أ ؟

مثال : اذا كان $ق(س) = س^{٢} + س$ وكانت $س_{١} = ٣$ ، $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = ١٠$ جد Δس ؟

مثال : اذا كان ق(س) = ٢ س $\in$ [٣، ٥] جد معدل التغير ؟

مثال : اذا كان ق(س) = أ $س^{٢}$ – ٣ ب ، س $\in$ [-١ ، ٢] وكان $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = ٦$ ، جد أ ؟

مثال : اذا كان $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = ٤$ في الفتره [١ ، ٦] ، $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = ٣$ في الفتره [١ ، ٣] جد $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$ في الفتره [٣ ، ٦] ؟

مثال : اذا كان معدل التغير في ق على الفتره [١ ، ٤] يساوي ٣ ، وكان ق(١) + ق(٤)= ٢ فجد معدل التغير في الاقتران هـ (س) = ق^{٢}(س) على الفتره [١ ، ٤] ؟

مثال : اذا كان ق(س)= س^{٣} – ٢ هـ (س) س ∋[١ ، ٣] ، $\frac{\Delta هـ(س)}{\Delta س} = \frac{٥}{٢}$ ، في [١ ، ٣] جد $\frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$ في [١ ، ٣]

مثال : اذا كان معدل التغير في الاقتران ق على الفتره [٢ ، ٥] يساوي ٧ ، وكان معدل التغيره على الفتره [٥ ، ٩] يساوي ١٤ ، فجد معدل التغير في الاقتران ق على الفتره [٢ ، ٩] ؟

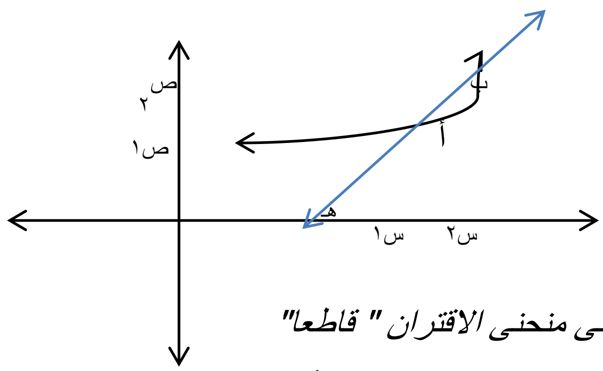
مثال : اذا كان معدل التغير في الاقتران ق في الفتره [١ ، ٦] يساوي ١٢ ، وكان هـ (س) = ٢س – ٣ ق(س) ، فجد معدل التغير في الاقتران هـ في الفتره [١ ، ٦]؟

مثال : اذا كان معدل التغير في الاقتران ق على الفتره [-١ ، ٢] يساوي ٥ ، فجد معدل التغير في الاقتران هـ (س)= ٤ س^{٢} – ٣ ق(س) ، على الفتره نفسها ؟

مثال :اذا كان $ن(س) = \frac{٢}{هـ(س)}$ س ∋ [٢ ، ٥] هـ (٢)× هـ (٥) =٢ وكان ق(٢)= -١ جد $\frac{\Delta ن(س)}{\Delta س}$ في [٢ ، ٥] ؟

مثال : اذا كان معدل التغير للاقتران ق(س)= ٢ س^{٢} + ٣ س في الفتره [أ ، ٣ أ] يساوي ١١ فما قيمه أ ؟

التفسير الهندسي لمعدل التغير :



يسمى الخط المستقيم المار بالنقطتين أ ، ب الواقعين على منحنى الاقتران " قاطعا"

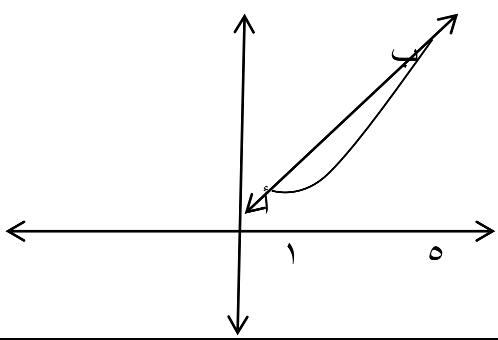
ميل القاطع أب = $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{\Delta ق(س)}{\Delta س}$ = ظا هـ " هي الزاويه المحصوره بين أب والاتجاه الموجب لمحور السينات

مثال:جد ميل القاطع بين النقطتين (٢ ، ق(٢)) ، (٥، ق(٥)) الواقعين على منحنى الاقتران ق حيث ق(س)= س^{٣} – س؟

مثال : اذا كان القاطع المار بالنقطتين (٢ ، ق(٢)) ، (٣ ، ق(٣)) يصنع زاويه قياسها ١٢٠ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فجد متوسط التغير [٢ ، ٣] ؟

مثال : اذا كان القاطع الواصل بين النقطتين (٣ ، ٧) ، (٥ ، ق(٥)) يصنع زايه قياسها (٤٥) مع الاتجاه السالب لمحور السينات جد ١) $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ ٢) ق (٥)

مثال: يمثل الشكل التالي منحنى الاقتران ق على الفتره [١ ، ٥] جد ميل العمودي على القاطع أب



التفسير الفيزيائي لمتوسط التغير:

تعريف:

السرعه المتوسطه = $\bar{ع} = \frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(ن_٢) - ف(ن_١)}{ن_٢ - ن_١}$

مثال : يتحرك جسيم على خط مستقيم وفق العلاقه ف(ن)= $ن^٢$ + ١ حيث ، ن : الزمن بالثواني ، ف : المسافه بالامتار احسب السرعه المتوسطه في الفتره [٣ ، ٥] ؟

مثال : يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث يكون بعده بالامتار عن نقطه ثابته ف(ن)= ٢$ن^٢$ – ٢ ن + ٢٠ جد السرعه المتوسطه في الفتره [٢ ، ٦] ؟

مثال : قذف جسم راسيا للاعلى بحيث بعده ف بالامتار عن سطح الارض ومعطى بالعلاقه : ف(ن)= ٤٠ ن – ٥$ن^٢$ جد

١) السرعه المتوسطه في الفتره [١ ، ٤]
٢) السرعه المتوسطه اذا تغيرت ن من صفر الى $\Delta ن$ بدلاله $\Delta ن$
٣) هل السرعه ثابته أم متغيره ؟ ولماذا ؟

امثله عمليه:

١) يتغير طول ضلع مكعب من ٥ سم الى ٣ سم احسب مقدار التغير في حجم المكعب

٢)اذا كان ق(س) = ظاس اثبت ان معدل التغير للاقتران يساوي $\frac{قا^{٢}س ظاهـ}{هـ(١ - ظاس ظاهـ)}$ اذا تغيرت س من س الى س+هـ؟

٣)صفيحه معدنيه مربعه الشكل تتمدد بالحراره محافظه على شكلها ، اذا زاد طول ضلعها من ٦ سم ال ٦,١ سم ، فجد معدل التغيرفي مساحه الصفيحه بالنسبه الى طولها ؟

تماريـــــــن:

١) اذا كان ق(س) = س^{٢} – س ، فجد مقدار التغير في قيمه الاقتران ق اذا تغيرت س من ٢ الى ٢+ هـ

٢) اذا كان القاطع المار بالنقطتين (١ ، ق(١)) ، (٢، ٤) الواقعين على منحنى الاقتران ق يصنع زاويه قياسها ($\frac{٣\pi}{٤}$) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فجد ق(١)

٣) اذا كان معدل التغير في الاقتران ق في الفتره [١، ٤] يساوي ٦ ، وكان هـ (س) = ٣ س – ق(س) + ٢ ، فجد معدل التغير في الاقتران هـ في الفتره [١ ، ٤]

٤) اذا كان ق(س) = $\left[\frac{١}{٢}س - ١\right]$ ، فجد معدل التغير في الاقتران ق في الفتره [٣، ٥]

٥) اذا كان ق(س) = $\sqrt{س}\,\sqrt{س}$ حيث تغيرت س من ١ الى ٩ جد ميل القاطع

٦) اذا كان ق(س) = أ س^{٢} – ٣ س + ٤ وكان متوسط التغير للاقتران في الفتره [١ ، ٣] يساوي ٣ فجد قيمه أ

الدرس الثاني

المشتقه الاولى

** يرمز لها بالرمز $س^{٢} - \frac{٤}{س}$ $ق'(س) = \frac{دص}{دس}$

$ق'(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(س+هـ)}{هـ}$ ، تكون المشتقه موجوده بشرط وجود النهايه

$ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$

مثال : جد $ق'(س)$ باستخدام التعريف العام للمشتقه لكل مما يلي :

١) $ق(س) = س^{٢}$

٢) $ق(س) = ٢س^{٢} - ١$

٣) $ق(س) = \sqrt{س}$

٤) $ق(س) = س^{٣} + \frac{٢}{س}$

٥) ق(س)= س $\sqrt{س}$

٦) ق(س) = س^{٢} + ٣ س

٧) ق(س)= $\frac{٢س}{٣ - س}$

٨) ق(س)= ٣ جتا٢س

٩) ق(س) = ظاس

$ق'(أ) = \lim_{س \to أ} \frac{ق(س) - ق(أ)}{س - أ}$ ، لحساب المشتقه عند عدد مثلا أ

$ق'(أ) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(أ+هـ) - ق(أ)}{هـ}$

مثال : استخدم تعريف العام للمشتقه الاولى ازاء كل من الاقترانات الاتيه عند قيمه س المبينه ازاء كل منها :

١) ق(س) = ٦ – ٢س ، عند س = ٣

٢) ق(س) = $س^٢$ + ٣ س ،عند س = ٢

٣) ق(س) = ٥س - $\sqrt{س}$ ، عند س = ٩

٤) ق(س) = $س^٢ - \frac{٥}{س}$ ، عند س = -١

٥) ق(س)= $س^٣ - س^٢ +$ س ، عند س = ٢

فكره جديده :

مثال : اذا كان $\text{ق}'(٣) = ٥$ فجد $\displaystyle \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{ق}(٣ + ٤\text{هـ}) - \text{ق}(٣)}{٥\text{هـ}}$

مثال : اذا كان $\text{ق}'(٠) = ٦$ فجد $\displaystyle \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{ق}(٠) - \text{ق}(٥\text{هـ})}{٢\text{هـ}}$

مثال : اذا كان $\text{ق}'(٢) = ٦$ فجد :

١) $\displaystyle \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{ق}(٢ + ٥\text{هـ}) - \text{ق}(٢ - ٤\text{هـ})}{٢\text{هـ}}$	٢) $\displaystyle \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{٥\text{هـ}}{\text{ق}(٢ + \text{هـ}) - \text{ق}(٢)}$

مثال : اذا كان $\text{ق}'(٣) = ٣$ فان ١) $\displaystyle \lim_{\text{س} \to ٣} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(٣)}{\text{س} - ٣}$ ٢) $\displaystyle \lim_{\text{س} \to ٣} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(٣)}{\text{س}^٢ - ٧\text{س} + ١٢}$ ٣) $\displaystyle \lim_{\text{س} \to ٣} \frac{\text{س}^٣ - ٢٧}{\text{ق}(٣) - \text{ق}(\text{س})}$

مثال : باستخدام تعريف المشتقه لايجاد $ق'(\frac{\pi}{3})$ علما ان ق(س)= جا٣س

مثال : استخدم تعريف المشتقه لايجاد المشتقه الاولى للاقتران قاس

مثال : استخدم تعريف المشتقه لايجاد المشتقه الاولى للاقتران $\frac{\text{ظاس}}{\text{س}}$

مثال :اذا كان ق(س)= (س- أ) ل(س) ، حيث ل(س) اقتران متصل عند س = أ ، اثبت باستخدام تعريف المشتقه أن

$ق'(أ) = ل(أ)$

تعريف :ليكن الاقتران ق معرفا عند العدد س = أ:

١) اذا كانت $ق'_{+}(أ) = \lim_{س \to أ^{+}} \frac{ق(س) - ق(أ)}{س - أ}$ موجوده ، فان $ق'_{+}(أ)$ تسمى المشتقه الاولى للاقتران ق من اليمين عند س = أ

٢) اذا كانت $ق'_{-}(أ) = \lim_{س \to أ^{-}} \frac{ق(س) - ق(أ)}{س - أ}$ موجوده ، فان $ق'_{-}(أ)$ تسمى المشتقه الاولى للاقتران ق من اليسار عند س = أ

٣) اذا كان $ق'_{-}(أ) = ق'_{+}(أ)$ فان $ق'(أ)$موجوده وغير ذلك فان$ق'(أ)$ غير موجوده او ق(س) غير قابل للاشتقاق عند س = أ

مثال : اذا كان ق(س)= $\begin{cases} ٢س -١ & ، س \leq ١ \\ س^{٢} & ، س > ١ \end{cases}$ ابحث في قابليه الاشتقاق للاقتران ق عند س = ١

مثال :اذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٤س + ١ & ، -٣ \leq س < ١ \\ ٢س+٣ & ، ١ \leq س \leq ٥ \end{cases}$ جد $ق'(-١)$، $ق'(١)$ ان وجدت

مثال : اذا كان ق(س) = | س – ٣ | ابحث في قابليه اشتقاق ق عند س= ٣

مثال: اذا كان ق(س) = $\left[\frac{س}{٢} + ٢\right]$ جد المشتقه الاولى عند س = ٤

مثال : اذا كان ق(س)= **س**[**س**] جد المشتقه الاولى عند س= ٠

مثال : اذا كان ع(س)= $\begin{cases} س^{٢} - س & ، ٠ < س \leq ٣ \\ ٥ س - ٩ & ، ٣ < س < ٦ \end{cases}$ جد المشتقه الاولى عند س = ٠ ، س = ٣ ، س = ٦

مثال : اذا كان ق(س) = | $س^{٢}$ – ٤ | جد المشتقه الاولى عند س = ٢

اذا كان الاقتران ق معرفا على [أ ، ب]فان ق′(أ) ، ق′(ب) غير موجودتين لان ق غير معرف على يسار العدد أ وغير معرف ايضا على يمين العدد ب

مثال : ليكن ق(س) = س^{٢}+٢ ، س ∋ [٢،٥] احسب

١) ق′(س) ٢) ق′(٣) ٣) ق′(٤)

مثال : اذا كان ق(س) = { س^{٢} + س ، ٠ ≤ س ≤ ١ ؛ ٣س -١ ، ١ > س ≥٥ }

جد المشتقه الاولى باستخدام التعريف العام عند س = ٠ ، س = ١، س= ٥

مثال : اثبت ان $\displaystyle نهـا_{هـ \to ٠} \frac{ق(س + هـ) - ق(س - هـ)}{هـ} = ٢ق'(س)$

مثال : اثبت ان $\displaystyle نهـا_{ع \to س} \frac{ع ق(س) - س ق(ع)}{ع - س} = ق(س) - س ق'(س)$

مثال : اثبت ان $\displaystyle نهـا_{ع \to س} \frac{٣ع ق(ع) - ٣س ق(س)}{ع - س} = ٣ق(س) + ٣س ق'(س)$

مثال : اذا كان ق قابلا للاشتقاق اثبت ان $\displaystyle نهـا_{هـ \to ٠} \frac{ق(س + ٢هـ) - ق(س - ٢هـ)}{هـ} = ٤ق'(س)$

أمثله عمليـــه :

١) صفيحه معدنيه مربعه الشكل تتمدد بانتظام ، جد معدل التغير في مساحه هذه الصفيحه بالنسبه الى طولها عندما يكون طولها يساوي (٥) سم

٢) اذا كان مقدار التغير في الاقتران ق(س) يساوي ٥س^{٢} هـ + ٨ س هـ فجد ق$'$(٢)

٣) اثبت ان معدل تغير مساحه الدائره بالنسبه الى طول نصف قطرها (عند اي قيمه) يساوي محيط الدائره .

٤) أثبت ان معدل تغير حجم الكره بالنسبه الى طول نصف قطرها (عند اي قيمه) يساوي مساحه سطحها

٥) أنبوب من المعدن أسطواني الشكل يزيد ارتفاعه عن طول نصف قطر قاعدته بمقدار وحدتين ، سخن الانبوب بالحراره فبدأ بالتمدد محافظا على شكله ، جد معدل تغير مساحته الجانبيه بالنسبه الى طول نصف قطر قاعدته ٦سم

تمارين:

١) اذا كان ق(س)= $\frac{س}{س^{٢}+٨}$ فجد ق′(س)

٢) اذا كان ق(س) = $\sqrt{س^{٢}+٣}$ فجد ق′(س)

٣) اذا كان ق(س)= $|س^{٢} - س|$ جد ق′(١)

٤) اذا كان مقدار التغير في الاقتران ق(س) يساوي ($س^{٢} ع - ع^{٢} س$) فان ق′(س) يساوي

٥) جد ق′(س) للاقتران ق(س) = $\sqrt[٣]{س - ١}$

٦) جد $\frac{دص}{دس}$ للاقتران ص = $س^{٢} - \frac{٤}{س}$

الدرس الثالث

الاتصال والاشتقاق

نظريه :
اذا كان ق اقترانا قابلا للاشتقاق عند س = أ فانه يكون متصلا عند س = أ

البرهان :

مثال : اذا كان ق(س)= $\begin{cases} \frac{٥}{س} - ٢ & ، س \le ١ \\ ٤ س - ١ & ، س > ١ \end{cases}$

١) ابحث في اتصال الاقتران ق عند س= ١

٢) ابحث في قابليه الاشتقاق ق عند س = ١

مثال : اذا كان ق(س)= $\begin{cases} ٢س + أ & ، س > ٠ \\ س^٢ + ٢س - ٣ & ، س \le ٠ \end{cases}$ قابلا للاشتقاق عند س = ٠ فجد قيمه الثابت أ

مثال : اذا كان ق(س)= | $س^٢$ | [س] ابحث في قابليه الاشتقاق عند س = ٠

نظريه :
اذا كان ق(س) غير متصل عند س = أ فان ق(س) يكون غير قابل للاشتقاق عند س = أ

مثال : ابحث في قابليه اشتقاق الاقتران ق(س) = $\frac{[\text{س} + ٥]}{|\text{س} - ٢|}$ عند س = ٤

مثال : ابحث في قابليه اشتقاق الاقتران ق(س)= $\frac{\text{س}}{\text{س} - ٣}$ عند س = ٣

مثال : اذا كان ق(س) = { س^{٢} + ١ ، س ≥٤ ١) ابحث في اتصال ق(س) عند س = ٤
{ ٣س – ١ ، س > ٤ ٢) ابحث في قابليه اشتقاق ق(س) عند س = ٤

مثال : اذا كان ق(س) = { $\sqrt{\text{س} + ١}$ ، ٠ ≥ س < ٢
{ س^{٢} – ١ ، ٢ ≥ س ≥٥ ابحث في قابليه الاقتران ق للاشتقاق عند س = ٢ ، س = ٤

مثال : اذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{٠} & \text{، س} \le \text{٠} \\ \text{٥} - \text{س} & \text{، ٠} < \text{س} < \text{٤} \\ \dfrac{\text{١}}{\text{٥} - \text{س}} & \text{، س} \ge \text{٤} \end{cases}$ ابحث في قابليه الاقتران ق للاشتقاق على مجاله

واكتب قاعده $\text{ق}'(\text{س})$

مثال : اذا كان ق(س) = $\begin{cases} [\,\text{س}\,] & \text{، ١} \le \text{س} < \text{٢} \\ |\,\text{س} - \text{٣}\,| & \text{، ٢} \le \text{س} \le \text{٤} \end{cases}$ ابحث في قابليه الاشتقاق على مجاله ، واكتب قاعده $\text{ق}'(\text{س})$

مثال : اذا كانت $\text{ق}'(\text{٥}) = \text{٢}$ ، ق (٥)= -١ جد $\underset{\text{س}\to\text{٥}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{\text{٢}}\,\text{ق(س)} - \text{٢٥ ق(٥)}}{\text{س} - \text{٥}}$

تمارين :

١) اذا كان ق(س) = (س – ٢) [س] ، ابحث في قابليه الاشتقاق عند س = ٢

٢) اذا كان ل(س) = [٣ – ٢ س] ابحث في قابليه الاشتقاق عند س = -١ ، س = $\frac{1}{4}$

٣) اذا كان ق(س) = $\begin{cases} \frac{\text{س} - 9}{\sqrt{\text{س}} - 3} & \text{، س} \neq 9 \\ 6 & \text{، س} = 9 \end{cases}$ جد $ق'(9)$ ان وجدت

٤) ليكن ق(س) = $\begin{cases} (\text{س} + 1)^4 & \text{، س} \leq 0 \\ (\text{س} - 1)^4 & \text{، س} > 0 \end{cases}$ بين ان ق اقتران غير قابل للاشتقاق عند س = ٠

٥) ليكن ق(س) = $\begin{cases} \text{س}^2 + 2\text{س} + 2 & \text{، } 0 \leq \text{س} \leq 1 \\ [\text{س}] + 4\text{س} & \text{، } 1 \leq \text{س} \leq 3 \end{cases}$ جد

$$ق'(\text{س}) = \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{ق(\text{ع}) - ق(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}} = \frac{\text{جـ} - \text{جـ}}{\text{ع} - \text{س}} = 0$$

الدرس الرابع

قواعد الاشتقاق (١)

قاعدة : اذا كان ق(س) = جـ حيث جـ: ثابت فإن ق′(س)= صفر

البرهان : $ق'(س) = \lim\limits_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س} = \frac{جـ - جـ}{ع - س} = ٠$

أمثله:

١) ق(س)=٤

٢) ق(س)= -٣

٣) ق(س)= $\frac{\pi}{٢}$

قاعده: اذا كان ق(س)= $س^{ن}$ حيث ن عدد صحيح فان ق′(س)= ن $س^{ن-١}$

البرهان :

امثله: جد مشتقه كل من الاقترانات :

١) ق(س)= $س^{٢}$

٢) ق(س)= س

٣) ق(س)= $س^{٨}$

٤) ق(س) = $س^{-٥}$

٥) ق(س)= $س^{-٣}$

٦) ق(س) = $س^{\frac{٣}{٢}}$

٧) ق(س) = $س^{\frac{١}{٢}}$

٨) ق(س)= $س^{\frac{-٢}{٥}}$

٩) ق(س) = $س^{\frac{-٤}{٧}}$

١٠)ق(س) = $\frac{١}{س^{٥}}$

١١)ق(س) = $\frac{١}{س^{-٦}}$

١٢) ق(س) = $\sqrt[٣]{س^{٢}}$

١٣) ق(س) = $\sqrt[٣]{س^{٢}}$

★

$\frac{١}{س^{م}} = س^{-م}$

$\sqrt[ن]{س^{م}} = س^{\frac{م}{ن}}$

قاعده : اذا كان ق(س) = جـ هـ(س) فان $ق'(س) = جـ هـ'(س)$

البرهان :

أمثله :جد المشتقه الاولى لكل من الاقترانات :

١) ق(س)= ٣ $س^{٥}$
٢) ق(س)= - $س^{٤}$
٣) ق(س)= $\frac{س^{٣}}{٢}$
٤) ق(س)= $\frac{٧}{س^{٥}}$
٥) ق(س)= ٥ $\sqrt[٣]{س}$
٦) اذا كان ل(س)= ٤ ق(س) وكان ق(س) قابلا للاشتقاق ، $ق'(٥) = ٢$ فجد $ل'(٥)$

٧) اذا كان ق(س)= $س^{٣}$ | س | فجد $ل'(٥)$

قاعده :
اذا كان ق(س)= ل(س) ± هـ (س) فان $ق'(س) = ل'(س) \pm هـ'(س)$

البرهان :

امثلـــــــــــــــه : جد المشتقه الاولى لكل من الاقترانات

١) $\text{ق}(\text{س}) = ٣\text{س}^{٥} - ٦\text{س}^{٢} + ٧\text{س} + ٦$

٢) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{٤}{\text{س}^{٣}} + ٢\text{س} - ٥$

٣) $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}^{٣}} - ٧\text{س} + ١$

٤) $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢}(\text{س}^{٣} - ٢)$ جد $\text{ق}'(١)$

نتيجه:

اذا كان ص = $\frac{\text{ق}(\text{س})}{\text{جـ}}$ فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{جـ}}$

امثله: جد المشتقه الاولى لكل من الاقترانات :

١) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٤} - ٣\text{س}^{٢}}{٨}$

٢) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{٣\text{س}^{٤} - ٦\text{س} + ١}{٥}$

مثال : اذا كان ق(س)= س^{٤} – ٦س^{٢} + ٤ فجد ١) ق$'$(س) ٢) قيم التي يكون عندها لمنحنى الاقتران ق مماس افقي؟

مثال : اذا كان ق(س) = ٤س^{٢} - [٢س+١] فجد ق$'$(٠.٦)

مثال : اذا كان ق(س)= [٣ س + ١]+ |س| فجد ق$'$(٠.٤)

مثال : اذا كان ق(س) = س+ [س+٠,٢]- |س| عند س = -١

مثال : اذا كان ل ، هـ اقترانين قابلين للاشتقاق وكان ل$'$(-٢)=٤ ، هـ$'$(-٢) = -٣ فجد ق$'$(-٢) فجد كلا مما يلي :

١) ق(س)= ٦ ل(س) – ٢ هـ (س)
٢) ق(س)= $\frac{١}{٢}$ ل(س) + هـ (س) + س^{٣}

مثال : اذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{ل(س)} & \text{، س} \geq \text{جـ} \\ \text{ل}'(\text{جـ})(\text{س}-\text{جـ}) & \text{، س} > \text{جـ} \end{cases}$

وكان ق(س) اقترانا متصلا عند س =جـ ، وكان ل(س) اقترانا قابلا للاشتقاق عند س= جـ ، فاثبت ان الاقتران ق قابل للاشتقاق عند س = جـ ، ثم جد $\text{ق}'(\text{جـ})$؟

مثال : اذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{أ س}^{٢} + \text{ب س} & \text{، س} \geq ١ \\ ٤ - \text{ب س}^{٢} + \text{أس} & \text{، س} > ١ \end{cases}$ وكان $\text{ق}'(١)$ موجوده ، فان قيمه كل من الثابتين أ ، ب ؟

تمارين :

١) اذا كان ق(س)= $\left[\tfrac{١}{٢}\text{س} + ٥\right] - ٤\text{س}^{٢}$ جد المشتقه الاولى عند س= ٢,٤

٢) اذا كان ق(س)= $٥\text{س}^{٤}\left(٢\text{س} - \frac{٣}{\text{س}}\right)$ جد $\text{ق}'(-١)$

الدرس الخامس
قواعد الاشتقاق (٢)

قاعده الضرب :
اذا كان ق(س)= ل(س) × م(س) فإن
$$ق'(س) = ل(س) \times م'(س) + م(س) \times ل'(س)$$
اي ان مشتقه حاصل ضرب اقترانين
الاقتران الاول × مشتقه الثاني + الثاني ×مشتقه الاول

امثلـــــــــه : جد $ق'(س)$ لكل من الاقترانات التاليه :

١) ق(س) = (س^{٢} – ٢) (٣س + س^{٣})

٢) ق(س) = (س^{٣} – س^{٢}) (س^{٤} – ٣) عند س = ١

٣) ق(س) = س (س^{٢} – ٣س) (س^{٣} – ٢) عند س = صفر

قاعده: مشتقه القسمه
اذ كان $ق(س) = \frac{ل(س)}{م(س)}$ فإن :
$$ق'(س) = \frac{ل'(س) \times م(س) - م'(س) \times ل(س)}{(م(س))^{٢}}$$

امثلـــه : جد $ق'(س)$ لكل من الاقترانات :

١) اذا كان $ق(س) = \frac{س^{٢} - ٣}{س^{٣} + ٤}$

٢) اذا كان $ق(س) = \frac{س^{٣} + س^{٢} + ٢س}{٣س + ١}$ عند س = صفر

٣) اذا كان $ق(س) = \frac{س^{٣} + ١}{س^{٢} + ١}$ عند س = ٢

نتيجه :

اذا كان $ق(س) = \frac{جـ}{م(س)}$ فإن :

$$ق'(س) = \frac{-جـ \times م'(س)}{(م(س))^{٢}}$$

أمثلـــــــــه : جد المشتقه الاولى لكل من الاقترانات التاليه :

١) $ق(س) = \frac{١}{س}$

٢) $ق(س) = \frac{٤}{س^{٢} + ٢س}$ عند س = ٢

٣) اذا كان $ق(س) = \frac{٦}{س - هـ(س)}$ جد $ق'(٠)$ حيث $هـ'(٠) = ٣$ ، ق(٠) = -٣

٤) اذا كان $ق(س) = \frac{٨}{س^{٥}} - \frac{٧}{س^{٢}}$

٥) أثبت انه اذا كان ق(س) = $س^{ن}$ حيث س : عدد صحيح سالب فإن $ق'(س) = ن س^{ن-١}$

٦) اذا كان $ق(س) = \frac{٥}{(أس - ٣)}$ وكانت $ق'(٢) = ١٠$ جد قيمه الثابت أ

<u>مشتقه الاقترانات المتشعبه :</u>

***** عند اشتقاق اي اقتران متشعب يجب التأكد من إتصاله :***

مثال : اذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^{٥} + س + ٥ & ، س < ١ \\ ٣س^{٢} + ٤ & ، س \geq ١ \end{cases}$ جد $\frac{س}{٢}$

مثال : اذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{س}^٢ - ٥\text{س} &، \text{س} < ٠ \\ ٢\text{س}^٣ + ٢\text{س} + ١ &، \text{س} \geq ٠ \end{cases}$ جد ق′(س)

مثال : اذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{س}^٥ + \text{س}^٢ &، \text{س} \leq ١ \\ \text{س}^٧ + ٦ &، \text{س} > ١ \end{cases}$ جد ق′₊(١) ، ق′₋(١) ، ق′(١)

مثال : اذا كان ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{٢}{\text{س}} &، \text{س} \leq ١ \\ \text{س} + ١ &، \text{س} > ١ \end{cases}$ فجد ق′(س)

١) اذا علمت ان هـ (س) قابل للاشتقاق وان هـ (٢) = ٣ ، هـ′(٢) = −١ فجد ق′(٢) في كل مما يأتي

أ) ق(س)= س هـ (س)		ب) ق(س)= ٣س^{٢} هـ (س) − ٥س

ج) ق(س)= هـ (س) - $\dfrac{١}{\text{هـ(س)}}$		د) ق(س) = $\dfrac{\text{٢س} + ١}{\text{٣هـ(س)}}$

مشتقه الاقتران المتشعب على مجاله :

مثال : اذا كان

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} |\text{س}^{٢} - \text{س}| & ، \quad ٠ \le \text{س} < ١ \\ \text{س}^{٣}[\text{س}] - ١ & ، \quad ١ \le \text{س} \le ٢ \end{cases}$$

س ∈ [٠ ، ٢] جد ق′(س)

مثال: إذا كان ق(س)= ⎧ س^{٣} + [$\frac{س}{٢}$] + ١ ، ١≤ س< ٢
⎩ | س^{٣}| + | س^{٣} - ٨ | ، س ≥ ٢ س∈ [١ ، ∞) جد ق′(س)

مثال: ق(س)= | س^{٣} – ٥س – ٢ | جد ق′(١) ، ق′(٣)

مثال: ق(س) = $\frac{|س^{٢} - ٤س + ٣|}{س(س - ١)}$ س∈ (١ ، ٤]

مثال: ق(س) = $\frac{\left[\frac{س}{٢}+١\right]}{|٢س-١|}$ جد $ق'(٣)$

مثال : اذا كان ق(س)= | س | (س^{٢} + ٦س) ، فابحث في قابليه الاقتران ق للاشتقاق لجميع قيم س ∈ ح

الثوابت :

مثال: ق(س) = $\begin{cases} أس^{٢} - بس & ، س \geq ٢ \\ بس^{٣} + أ س - ٤ & ، س < ٢ \end{cases}$ جد أ ، ب اذا كان $ق'(٢)$ موجودة

مثال : اذا كان ق(س)= $\begin{cases} ٣س^{٢} & ، س \geq ١ \\ أس + ب & ، س < ١ \end{cases}$ قابلا للاشتقاق عند س=١ فجد كلا من أ ، ب

مثال : اذا كان هـ (س) = س^{٢} ق(س) وكان ق(٣)= ٦ ، ق$'$(٣) = ٥ فجد هـ$'$(٣)

مثال : اذا كان ل ، م ، هـ اقترانات قابله للاشتقاق عند س ، فاستخدم قاعده مشتقه حاصل ضرب اقترانين لاثبات :

$$\frac{د}{دس} (ل(س) \times م(س) \times هـ(س)) =$$

$$= ل(س) \times م(س) \times هـ'(س) + ل(س) \times هـ(س) \times م'(س) + م(س) \times هـ(س) \times ل'(س)$$

الحالات التي يكون عندها الاقتران غير قابل للاشتقاق :

١) عند نقاط عدم الاتصال
٢) عند أطراف الفترات المغلقه
٣) من لرسم عند : عند الاطراف ونقاط عدم الاتصال وعن الرؤوس المدببه

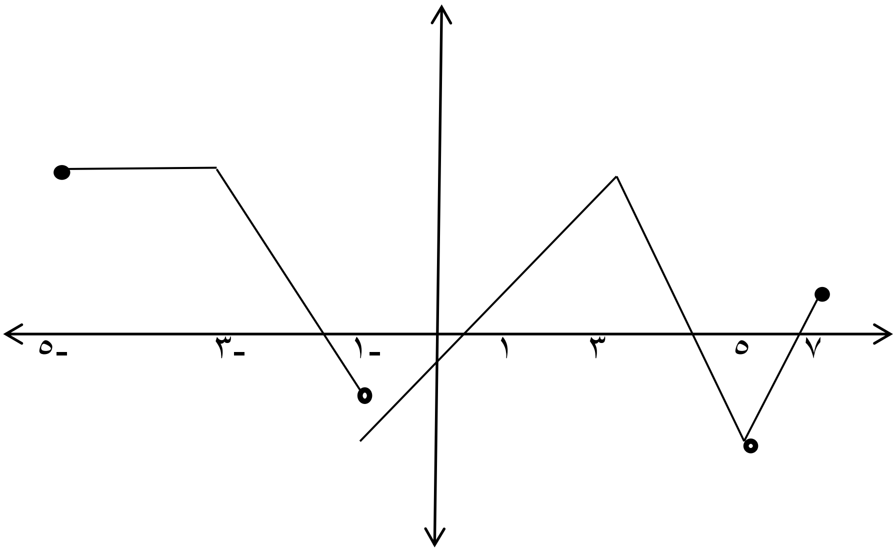
ومن الامثله على الرأس المدبب : اقتران القيمه المطلقه الخطيه

مثال : جد قيم س التي يكون عندها ق(س) غير قابل للاشتقاق :

١) ق(س) = $\frac{س}{س^{٢} - ٩}$ س ∋ [١،٥]

٢) ق(س) = | $س^{٢}$ – ٨ س | س ∋ [٢،∞)

مثال : من الشكل المجاور جد قيم س التي يكون عندها ق(س) غير قابل للاشتقاق مع ذكر السبب :



تمارين :

١) اذا كان ق(س) = $س^{٢}$ - [٢س +١] ، عند س = ١,٤

٢) اذا كان ل ، هـ اقترانين قابلين للاشتقاق وكان ل(-٢)= ٣ ، ل′(-٢) = -١ ، هـ (-٢) = ٤ ، هـ′(-٢) = -٦

فجد هـ′(-٢) = -٦ ، في كل مما يأتي :

أ) ق(س)= ل(س) × هـ (س) ، ب) ق(س) = $\frac{هـ(س)}{ل(س)+١}$

٣) اذا كان ق(س) =
$$\begin{cases} \frac{٤}{س+١} & ،\ س \geq ١ \\ س + ١ & ،\ س < ١ \end{cases}$$

فابحث في قابليه الاقتران ق للاشتقاق على ح

الدرس السادس

المشتقات العليا

١) ق′(س) = ص′ = $\frac{ىص}{ىس}$ = $\frac{ى}{ىس}$(ق(س)) ⟵ جميعها تعني المشتقه الاولى

٢) ق″(س) = ص″ = $\frac{ى^{٢}ص}{ىس^{٢}}$ = $\frac{ى}{ىس}$(ق′(س)) ⟵ جميعها تعني المشتقه الثانيه

٣) ق‴(س) = ص‴ = $\frac{ى^{٣}ص}{ىس^{٣}}$ = $\frac{ى}{ىس}$(ق″(س)) ⟵ جميعها تعني المشتقه الثالثه ..... وهكذا

مثال : اذا كان ق(س)= س^{٤} – س^{٢} جد ق″(س)

مثال : اذا كان ق(س) = س^{٤} + ٣س^{٣} + ٢س جد ق″(٠)؟

مثال : اذا كانت ص = س^{٣} – ٢ هـ′(س) جد $\frac{ى^{٢}ص}{ىس^{٢}}\Big|_{س=٣}$ = 　حيث هـ‴(٣) = ٢

مثال : اذا كان ق(س) = (٢س^{٤} -٣س +١) (س^{٢} + ٧) جد ق″(–١)

مثال : اذا كان ق(س) = $\frac{١}{١٠}$س^{٧} ، وكان ∋ [٢،∞) ق‴(س) = أس^{٢} فجد قيمه الثابت أ

مثال : اذا كان ق(س) = ٣س^{ن} ، ق$^{(٣)}$(س) = ٤ أس^{٢} جد قيمه أ ، ن

مثال : اذا كان ق(س)= أس^{٤} + $\frac{١٦}{س}$ ، أ ثابت ، وكان ق‴(٢) = ٩٠ فجد قيمه الثابت أ

مثال : اذا كان ق(س) = ٨س – ٤(م -٣)س^{٢} ، فجد قيم الثابت م التي تجعل ق″(س) ≻ ٠

مثال : جد قاعده كثير حدود ق من الدرجه الثانيه الذي فيه ق(١)=٣ ، ق′(١) = –٢ ، ق″(١) = ٤

مثال : اذا كان ق(س) = س^{٤} + ٣س^{٣} – ٦س^{٢} – س ، فجد قيم س التي تحقق ما يأتي :

أ) ق″(س) = ٠ ب) ق″(س) ≥ ٠ جـ) ق″(س) ≻ ٠

مثال : اذا كان ص = $\frac{٢}{س}$ فأثبت ان ص″ = $\frac{١}{٢}$ص^{٣}

مثال : اذا كان ق(س) = | س^{٣} | جد ق″(٠) ، ق‴(٠)

ملحوظه : اذا كان $ق^{ن}$(أ) موجوده فان جميع المشتقات الادنى منها موجوده عند س = أ
اذا كان $ق^{ن}$(أ) غير موجوده فان جميع المشتقات الاعلى منها تكون غير موجوده عند س = أ

مثال : اذا كان ق(س) = (٣$س^{٢}$ +٢) ($س^{٣}$ – ٢س + ١) فأثبت ان $ق'(١) \times ق''(١) = ٢١٠$

مثال : اذا كان ق(س) = $س^{٣}$ +٤س +٢ جد $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(٢+هـ) - ق(٢)}{هـ}$

مثال : اذا كان ق(س) = $س^{٤}$ +٢$س^{٢}$ +١ جد $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق'(١+هـ) - ق'(١)}{هـ}$

مثال : اذا كان ق(س) = $س^{٣}$ – أ$س^{٢}$ +٣ وكانت $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق'(٢+هـ) - ق'(٢)}{هـ} = ٦$

مثال : اذا كان ك من الاقترانين ل ، هـ قابلا للاشتقاق مرتين فأثبت أن :

$$(ل \times هـ)''(س) = (ل'' \times هـ)(س) + ٢(ل' \times هـ')(س) + (ل \times هـ'')(س)$$

مثال : اذا كان كل من الاقترانين ل ، هـ قابلا للاشتقاق رتين فأثبت ان :

$$ل(س)هـ''(س) - ل''(س)هـ(س) = \frac{ى}{ىس}\left(ل(س)هـ'(س) - ل'(س)هـ(س)\right)$$

مثال : اذا كان $ق(س) = \begin{cases} أس^٢ + ب\,س + جـ &، س < ١ \\ س^٣ &، س \geq ١ \end{cases}$ جد أ ، ب ، جـ التي تجعل $ق''(١)$ موجوده

مثال : اذا كان ق(٥)= ٣ ، هـ (٥)= -١ ، ق′(٥) = ٢ ، هـ′(٥) = ٤ جد:

١) (٢ق + ٣هـ)′(٥)

٢) (٤ − ٨ق)′(٥)

٣) (هـ(١) + ٣ق′(١) − ٢ق)′(٥)

٤) $(\frac{ق(٧)}{ق})'(٥)$

٥) $(\frac{ق}{٢} + \frac{٢}{ق})'(٥)$

٦) $(\frac{ق}{هـ})'(٥)$

٧) (٣ق × هـ)′(٥)

٨) ((ق × هـ)(٥))′

تمارين :

١) اذا كان ق(س)= $\frac{٢}{س}$ أثبت أن $ق'(١) = ٤ق''(٢)$

٢) اذا كان ص = | س| (س^{٢} + س) جد المشتقه الثانيه

٣) اذا كان كل من ل،ل′،ل″ قابلا للاشتقاق عند س وكان ق(س)= س^{٢} ل(س) فجد $ق'''(س)$

٤) اذا كانت ل ، ق ، هـ اقترانات قابله للاشتقاق حتى المشتقه الثالثه وكان

$هـ(س) = ل(س) \times ق(س)،$ $هـ(س) = ل'(س) \times ق'(س) =$ جـ حيث جـ عدد ثابت اثبت ان:

$هـ'''(س) = ل(س) \times ق'''(س) + ق(س) \times ل'''(س)$

الدرس السابع
مشتقه الاقترانات الدائريه

قاعده :
اذا كان ق(س)= جاس ، س ∈ ح فان ق'(٧) ق'(س) =جتاس

البرهان :

قاعده :
اذا كان ق(س)= جتاس س ∈ ح فان ق'(س) =-جاس

البرهان :

نتيجه :
اذا كان ق(س) = ظاس فإن ق'(س) =قا^{٢}س

البرهان :

نتيجه :
اذا كان قاس = ظاس فإن ق'(س) =قاس ظاس

البرهان :

ق(س)	ق'(س)
جاس	جتاس
جتاس	-جاس
ظاس	قا^{٢}س
ظتاس	- قتا^{٢}س
قاس	قاس ظاس
قتاس	-قتاس ظتاس

مثال : جد ق′(س) لكل من الاقترانات :

١) ق(س) = ٢ جاس + ٤ جتاس

٢) ق(س)=٤س ^٣^ – ٤قتاس+جا^٢^ $\frac{\pi}{9}$

٣) ق(س)= جا^٢^٥س+٩ظاس+جتا^٢^٥س

٤) ق(س) = ظاس ظتاس + جاس قتاس لكل س ∋ $(\cdot,\frac{\pi}{2})$

٥) ق(س) = جاس ظاس

٦) ق(س)= س ظتاس

٧) اذا كان ق(س) = $\frac{\text{ظاس}}{\text{س}}$ جد ق′(π)

٨) اذا كان ق(س) = قاس + ظاس فجد ق′$(\frac{\pi}{6})$

٩) ق (س) = $\frac{\text{ظاس+س}}{\text{جاس}}$ فجد ق′$(\frac{\pi}{3})$

١٠)ق(س) = جا(- س) + جتا(- س) فجد ق′$(\frac{\pi}{4})$

مثال : اذا كان ق(س) = | س | × | جتا س | جد $ق'(\pi)$

مثال : اذا كان ق(س) = س جاس + جتاس جد $ق''(\frac{\pi}{2})$

مثال : اذا كان ق(س) = | جاس| ، ابحث في قابليه الاقتران ق للاشتقاق عند س = π

مثال : اذا كان ق(س) = (| س | + [س + ١]) جاس جد $ق'(\pi)$

مثال : اذا كان ص = جاس + $\sqrt{٣}$ جتاس س $\in$ [٠، π] جد أصفار $ق'(س)$ ؟

مثال : اذا كان ق(س) =جاس - $\frac{١}{٢}$ س س$\in$ [٠، ٢π] فجد قيم س التي تجعل المماس لمنحنى ق افقيا ؟

مثال : جد قيم س في الفتره $[-٢\pi، ٢\pi]$ التي تحقق المعادله $ق'(س)=٠$ في كل مما يأتي :

١) ق(س) = س + جتاس ٢) ق(س) = قاس

مثال : اذا كان ص= جتا (س + $\frac{\pi}{٢}$) بين أن ص من حلول المعادله $ص'' + ص = ٠$

مثال : إذا كان ص= $\frac{جاس}{١+جتاس}$ أثبت أن $\frac{ص''}{ص'} = ص$

مثال : اذا كان ص = $\frac{جاس-جتاس}{جاس+جتاس}$ اثبت أن $ص' - ص^٢ = ١$

مثال : اذا كان ص = أ جاس + ب جتاس   أثبت أن $(ص')^{٢} + ص^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢}$

مثال : اذا كان ص= جاس فجد $(ص'') + ٦ص$ بدلاله ص ؟

مثال : اذا كان ق(س) = { جتاس ، س ≤٠
أس + ب ، س < ٠   فجد قيمه كل من الثابتين أ ، ب التي تجعل ق قابلا للاشتقاق عند س=٠

تمارين :

١) اذا علمت أن ص = س ظاس ، فأثبت أن : $ص'' = ٢قا^{٢}س(١ + ص)$

٢) اذا كان ص = س^{٢} جاس   جد المشتقه الثانيه

٣) اذا كان جا^{٢}س + جتا^{٢}س   جد المشتقه الاولى

٤) اذا كان ص = قتاس – س ظتاس جد المشتقه الاولى

الدرس الثامن

قاعدة السلسلة

إذا كان هـ (س) قابل للاشتقاق عند س وكان ق(س) قابل للاشتقاق عند هـ(س) فإن:

$$(ق \circ هـ)'(س) = ق'(هـ(س)) \times هـ'(س)$$

تطبيق:

١) $(ق \circ هـ)'(أ)$

٢) $(ق' \circ هـ)'(أ)$

٣) $(هـ' \circ ق'')(أ)$

٤) $(ق \circ ق)'(أ)$

مثال: إذا كانت ق(٧)=٩ ، $(هـ)'(٩)$=٣ ، $(ق)'(٧)$=٤ جد $(هـ \circ ق)'(٧)$؟

مثال: إذا كانت ق(٦)=٥ ، $ق''(٥) = \frac{٣}{٢}$ ، $ق'(٦)$ =٨ جد $(ق' \circ ق)'(٦)$؟

مثال: إذا كانت $ق'(-١)$=٩ ، $هـ''(٩) = \frac{١}{٢}$ ، $ق''(-١) = ١٤$ جد $(هـ' \circ ق')'(-١)$؟

مثال: إذا كانت $(ق \circ هـ)'(أ)$=٣٢ ، هـ(أ)=$ن^{٢}$ ، $ق'(ن^{٢}) = \frac{١}{٢}جـ$ ، $هـ'(أ) = جـ^{٢}$ جد جـ؟

مثال: إذا كانت $\left(ق \circ هـ^{\prime}\right)^{\prime}(١)=١$ ، $هـ^{\prime\prime}(١)=٨$ ، $هـ^{\prime}(١)=٣$ جد $ق^{\prime}(٣)$؟

مثال: إذا كانت $\left(هـ \circ ق\right)^{\prime}(٣)=١٨$ ، $ق^{\prime}(٣)=٢$ ، $هـ^{\prime}(س)=٥-س$ ، جد ق(٣) ؟

مثال: إذا كان $\left(ق \circ هـ\right)(س)=س$ جد $هـ^{\prime}(س)$ إذا كانت $ق^{\prime}(س)=س$؟

مثال : اذا كان ق(س) = $س^{٢}+٥$ ، هـ(س) = $\frac{١}{س}$ أوجد $(ق \circ هـ)(\frac{\pi}{٤})=-١٦$ $(ق \circ هـ)^{\prime}(س)$

مثال : اذا كانت $(ق \circ هـ)(س)=س^{٤}$ ، هـ(س) = $س^{٢}$ جد $ق^{\prime}(٨)$

مثال : اذا كان ق(س) = س^{٢} + ١ ، هـ (س) = أ ظتاس ، جد مجموعه قيم أ التي تجعل $(ق \circ هـ)(\frac{\pi}{٤}) = -١٦$

قاعده: اذا كان ق، هـ قابلين للاشتقاق وكانت ص = ق(ع) ، ع = هـ (س) فإن :
$(ص')^{٢} + ص^{٢} = \frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس}$

مثال : اذا كان ص = ع^{٧} ، ع = س^{٢} + ١ جد $\frac{ءص}{ءس}$

مثال : اذا كانت ص = هـ^{٣} + ١ ، هـ = س^{٢} +٢ جد $\frac{ءص}{ءس}$

مثال : اذا كان ص = ٢ن^{٤} + ٣ن ، ن = س^{٢} – ٢س +١ جد $\frac{ءص}{ءس}$

مثال : اذا كان ص = ظاع ، ع = ٤ س^{٣} + ١ جد $\frac{ءص}{ءس}$

مثال : اذا كان ص = ن^{٢} ، ن = س^{٢} جد $\frac{ءص}{ءس}$ عند س = ٣

مثال : اذا كان ص = م^{٢} + م ، س=٣م -١ جد $\frac{ءص}{ءس}$ عند م = ٢

مثال: اذا كانت ص = م^{٢} + ٢ ، م = س^{٢} ، ل $= \frac{س}{٢}$ جد $\frac{ءل}{ءص}$

مثال : اذا كان ص = ظان ، ن=١٢س ، عندما س $= \frac{\pi}{٦}$

مثال : اذا كان س = أ ن ظان ، $\frac{ءص}{ءن} = \frac{٥\pi}{٢}$ ، $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢}$ عندما س = π جد أ

مثال : اذا كانت ص = ن^{٣} ، س= ٢ن جد $\left.\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}\right|_{ن=٣}$

مثال : اذا كان ص= م^{٤} + ٧ ، $\frac{ءس}{ءم}$ = ٢ جد $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$

مثال : اذا كانت ص = (س^{٢} + ١)^{٧} فاستخدم قاعده السلسله لايجاد $\frac{ءص}{ءس}$

مثال : اذا كان ص= (س^{٢} – س + ١) فجد $\frac{ءص}{ءس}$ باستخدام قاعده السلسله

مثال : استخدم قاعده السلسله لحساب $\frac{ءص}{ءس}$ للاقتران ص= (س^{٢} + جتاس)^{٥}

مثال : استخدم قاعده السلسله لحساب $\frac{ءص}{ءس}$ للاقتران ص= ظا(هـ (س))

نتيجه : اذا كان هـ (س) قابلا للاشتقاق عند س وكان ص = (هـ (س))^{ن} حيث ن: عدد صحيح
$\frac{ءص}{ءس}$ = ن (هـ (س))$^{ن-١}$ × هـ$'$(س)

البرهان :

أمثله : جد $\frac{ءص}{ءس}$ لكل من الاقترانات :

١) ص = (س^{٥} – س^{٩})^{٤}

٢) ص = (س^{٢} + ظاس)^{٦}

٣) ص= (هـ (س))^{٥}

٤) ص= (جتاس)^{٧}

٥) ص= قا^{٤}(س)

قاعده : اذا كان ص = جا^{ن}(هـ(س)) حيث ن عدد ضحيح موجب فإن :
$\frac{ءص}{ءس}$ = ن جا$^{ن-١}$ هـ(س) × جتا هـ(س) × هـ$'$(س)

البرهان :

أمثلـــــه : جد $\frac{دص}{دس}$ لكل مما يلي :

١) ص= ظتا^{٨}(٧س^{٢})

٢) ص= جا^{٣}ق(٥س)

٣) ص =ظا^{٩}(ظا٤س)

٤) ص= قا^{٣}(س ق(س))

٥) ص = (س ظاس + ٥)^{٣}

٦) ص = $\left(\frac{\sqrt{٥}}{س^{٢} + ٧}\right)^{٩}$

٧) ص = (جا^{٣}س + ٧)^{١٢}

٨) ص = $\frac{ق'(٤س)}{جا٢س}$

٩) ص= ق^{٣}(س)× ق(س^{٣})

أمثلـــه :جد $\frac{ءص}{ءس}$ لكل مما يلي :

١) ص = جا ٥س + جتا ٩س

٢) ص = ظتا(س^{٣} + ٤)

٣) ص = ق(هـ (س^{٢}))

٤) اذا كان ص = س^{٢}× ق^{٥}(س^{٣}) جد $\left.\frac{ءص}{ءس}\right|_{س=١}$ حيث ق(١) = ١ ، ق$'$(١) = ١

٥) اذا كان ق(س) = | ٥س^{٢} – ٩ | جد $\left(ق^{٢}\right)'(١)$

٦) اذا كان ص = (أس + ب)^{٣} جد أ ، ب التي تجعل ص$''$ = ٤٨س + ٢٤

٧) اذا كان ص= (قاس + ظاس)^{ن} حيث ن : عدد صحيح موجب أثبت أن $\frac{ءص}{ءس}$ = ن × ص ×قاس

مثال: اذا كان ق(س^{٣})= س^{٢} + ٦س جد ق$'$(٨)

مثال :اذا كان ق(٤س)= $\frac{ء}{ءس}$(س^{٢} + ٢س) فجد ق$'$(٤)

مثال : اذا كان ص = $\sqrt{\text{س}^{٢} + \sqrt{\text{٣س}}}$ جد $\frac{ءص}{ءس}$

مثال : اذا كان ص = ظاس + $\frac{١}{٣}$ظا^{٣}س أثبت أن $\frac{ءص}{ءس}$ =قا^{٤}س

مثال : ص= جا^{٤}س – جتا^{٤}س جد $\frac{ءص}{ءس}$

مثال : اذا كان ص = قاس + ظاس ، أثبت ان $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ =قاس × ص^{٢}

مثال : اذا كان ص = ٣ جا٥س + ٢جتا٥س جد $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ عندما ص = ٦

مثال : يقال للاقتران ق بأنه زوجي اذا كان ق(- س) = ق(س) لجميع قيم س ، وأنه فردي اذا كان ق(- س)= - ق(س) لجميع قيم س أثبت أن :

١) اذا كان ق(س) اقترانا فرديا قابلا للاشتقاق ،فإن ق′(س) اقتران زوجي

٢) اذا كان ق(س) اقترانا زوجيا قابلا للاشتقاق ، فإن ق′(س) اقتران فردي

<u>تمارين</u> :

١) اذا كان ق(س)= س^٣ + ٢س ، هـ (س) = ٣ س^٢ فجد كلا مما يأتي :

أ) (ق′∘هـ)′(١) ب) (ق′∘هـ′)′(٢)

جـ) (ق′∘هـ′)″(٣)

٢) اذا كان ص = جتا(س+$\frac{\pi}{٢}$) أثبت أن ص + ص″ = ٠

٣) استخدم قاعده السلسله لايجاد $\frac{ءص}{ءس}$ ص= $\frac{س^٤}{(١-س^٣)^٤}$

٤) اذا كان ق، هـ اقترانين معرفين على ح وقابلين للاشتقاق على مجاليهما وكان هـ(٢)= ٣ ، ق′(٣) = ٤ هـ′(٢) = -٦ فجد كلا مما يلي :

أ) (ق∘هـ)′(٢)

ب) ق′(س^٢) عند س = $\sqrt{٣}$

٥) اذا كان ق ، هـ اقترانين قابليت للاشتقاق بحيث كان هـ′(س) = ق(س) ، ق′(س) = -هـ(س) وكان ل(س) = (هـ (س))^٢ + (ق(س))^٢ ، فجد ل′(س)

الدرس التاسع

الاشتقاق الضمني

العلاقة نوعان :

١)صريحة : يمكن فصل السينات عن الصادات بسهولة ، مثال : ص= س^{٢}- ٣ص

٢) ضمنية : لا يمكن فصل السينات عن الصادات بسهولة ، مثال: س^{٣}+٤س^{٢}ص=٥س+٦ص^{٣}

مع الاشتقاق الضمني وعند حساب $\frac{ءص}{ءس}$= صَ نضع مع كل اشتقاق ص الرمز $\frac{ءص}{ءس}$ أو صَ

خطوات الحل :

١) نشتق جميع الحدود وعند وجود ص نشتقه مع $\frac{ءص}{ءس}$

٢) تجميع الحدود التي تحتوي $\frac{ءص}{ءس}$ على طرف والتي لا تحتويه على الطرف الآخر

٣) نقسم على المقدار المطلوب مع $\frac{ءص}{ءس}$

أمثلة :

جد $\frac{ءص}{ءس}$ لكل من الاقترانات التالية :

١) س^{٢}+ ٣ص^{٣}=٨

٢) س^{٥}- ص^{٨} + ص^{٦} = ٣

٣) س^{٣}+ ص= جا^{٢}ص

٤) اذا كان س^{٥} ص^{٢} – س^{٣} = ٣ جد $\frac{ءص}{ءس}$ عند النقطة (١ ، ٢)

٥) جا(س ص) = ص عند النقطة $(\frac{\pi}{٢}، ١)$

٦) س+ ص^{٣} = س ص عند النقطة (٨ ، ٢)

٧) إذا كان $(\text{جاص}+\text{جتاص})^{٣}$ = س جد $\frac{ءص}{ءس}$ عند النقطة (١ ، ٠)

٨) ق(ص^{٢}) = س وكان ق$'$(١) = ٣ عند ص=١

٩) س = ق(ص^{٢} + ١) وكان ق$'$(٥) = ٤ عند ص=٢

١٠) $\sqrt{\text{س ص}}$ = ١ عند س=٢

١١)٢ص= ق(٢س^{٢} – س) ، ق$'$(٦) = ٤ ، س= ٢

١٢) ق(ص+١) = س ^٣^ ، ق′(٥) = ٤ ، ق(٥) = ٨ عند ص= ٤

١٣) اذا كان ص = ق(س) ، ص^٣^= ق(٢س^٢^- س) ، ق′(٦) = ٤ ، ق(٦)= -٨ ، فجد $\frac{دص}{دس}$ عند س=٢

نظرية : إذا كان ص = س $^{\frac{م}{ن}}$ حيث $\frac{م}{ن}$ عدد نسبي فإن

$$\frac{دص}{دس} = \frac{م}{ن} س^{\frac{م}{ن}-1}$$

البرهان:

تعميم : إذا كان ص = (هـ(س))^{ن} حيث ن عدد نسبي فإن :

$\frac{دص}{دس}$ = ن(هـ(س))$^{ن-1}$ × هـ′(س) شرط نحول الجذور إلى أسس

أمثلة: جد $\frac{دص}{دس}$ لكل مما يلي:

١) ص = $\sqrt[5]{س^7} + \frac{9}{\sqrt[3]{س^4}}$

٢) ص = $\sqrt[\gamma]{(س^{٢}+جا٥س)^{٩}}$

٣) ص^{٢}= $\sqrt{س^{٣}+٤س^{٢}}$

٤) $\frac{٤}{س}+\frac{٢}{ص}=٣$ عند (٤ ، ١)

٥) (س ص)^{٣}= ٤س

٦) ص جتا٢س = س جا٢ص ، فجد $\frac{ءص}{ءس}$ عند النقطه $(\frac{\pi}{٤}،\frac{\pi}{٢})$

مثال : اذا كان ص= $\sqrt{٢+جاس}$ أثبت أن ٢ص ص $''$ + ٢(ص$'$)^{٢} + ص^{٢} = ٢

مثال : اذا كان ص – س ص = جاس أثبت أن ص $''$ + ص = $\frac{٢ص'}{١-س}$ س≠١

مثال : اذا كان ص = $\sqrt{س+ص}$ أثبت أن ص$'$$(٢ص-١)^{٣}$ = –٢

حاله خاصه للجذر التربيعي :

ص = $\sqrt{هـ(س)}$ فإن ص$'$ = $\frac{هـ'(س)}{٢\sqrt{هـ(س)}}$

مثال : جد النقطه على المنحنى العلاقه $\sqrt{س}+\sqrt{ص}=٣$ التي يكون عندها المماس أفقيا

مثال : اذا كان ص = $\sqrt{ن^٢ + ٣ن}$ ، س = $\sqrt[٣]{٢ن - ١}$ جد $\frac{ءص}{ءس}$ عندما ن = ١

مثال : اذا كان $\sqrt[٣]{٥س^٢ + ٣ص} = \sqrt{س} + \sqrt{ص}$ جد $\frac{ءص}{ءس}$ عندما (١ ، ١)

مثال : اذا كان ص = $\sqrt{٤ + ٣جاس}$ فأثبت أن $٢صص'' + ٢(ص')^٢ + ص^٢ = ٤$

مثال : اذا كان س ص = جاس فأثبت أن $سص'' + ٢ص' + سص = ٠$

تمارين :

١) **اذا كان جاص = ظاس أثبت أن** $ظاص = \frac{ص''}{٢قا^{٢}س + (ص')^{٢}}$

٢) **اذا كان ص =** $\sqrt{س + \sqrt{١ + س^{٢}}}$ **أثبت أن** $٢\sqrt{١ + س^{٢}} \times ص' = ص$

٣) اذا كان جتاص – س ص = ٢ س ، فأثبت أن $ص''(س + جاص) + ص'(٢ + ص'جتاص) = ٠$

٤) اذا كانت ص = أجاس – ب جتاس ، أ ، ب ثابتان فأثبت أن :

$(ص')^{٢} + ص^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢}$