الدرس الاول

نهايه الاقتران عند نقطه

يرمز لها بالرمز" نهـــا " وتعني دراسه سلوك الاقتران عند نقطه

أولا : حساب النهايه عن طريق الجداول

مثـــال : ليكن ق(س) = $\frac{س^{٢} - ١}{س - ١}$ ا درس سلوك الاقتران ق عندما تقترب س من العدد١

س	١,١	١,٠١	١,٠٠١	١	٠,٩٩٩	٠,٩٩	٠,٩
ق(س)	٢,١	٢,٠١	٢,٠٠١	غير معرفه	١,٩٩٩	١,٩٩	١,٩

- نلاحظ كلما اقتربت قيم س من العدد ١ من جهة اليمين (س> ١) فان قيم س تقترب من العدد ٢ ويعبر عنها بالرموز: نهـــا (س←١⁺) ق(س) = ٢

  ((تقرأ نهايه الاقتران ق(س) عندما تقترب س من العدد ١ من جهه اليمين تساوي ٢))

- نلاحظ كلما اقتربت قيم س من العدد ١ من جهه اليسار (س< ١) فان قيم س تقترب من العدد ٢ ويعبر عنها بالرموز نهـــا (س←١⁻) ق(س) = ٢

  ((تقرأ نهايه الاقتران ق(س) عندما تقترب س من العدد ١ من جهه اليسار تساوي ٢))

*** في حاله نهـــا (س←١⁺) ق(س)= نهـــا (س←١⁻) ق(س) نقول ان النهايه موجوده عندما تقترب من العدد ١ وتساوي ٢ ***

مثال :من خلال الجدول التالي ادرس سلوك الاقترن ق عندما تقترب س من العدد ٥

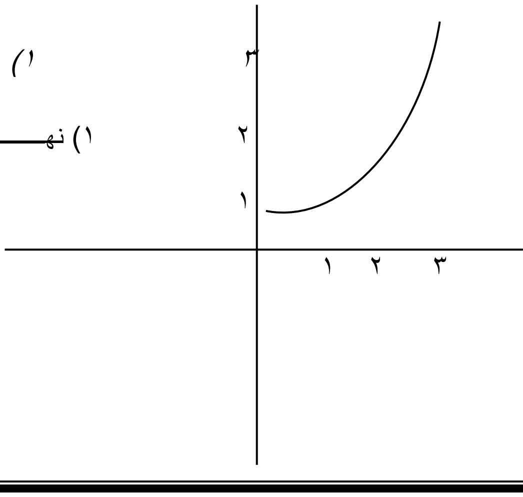
س	٥,٠١	٥,٠٠١	٥,٠٠٠١	٥	٤,٩٩٩	٤,٩٩	٤,٩
ق(س)	٦,٠١	٦,٠٠١	٦,٠٠٠١		٣,٩٩٩	٣,٩٩	٣,٩

الحل:

ثانيا : حساب النهايه بالرسم :

١) من خلال الشكل المجاور

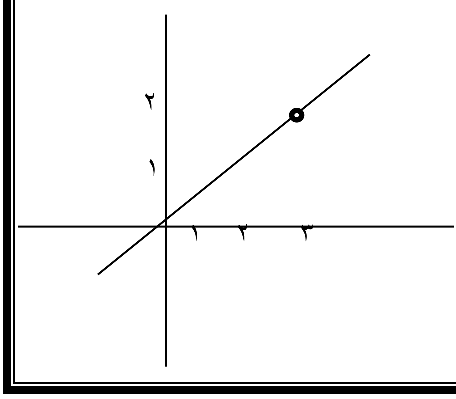
١) نهـــا ق(س) ٢) ق(٢)



٢) جد

١) نهـا ق(س)

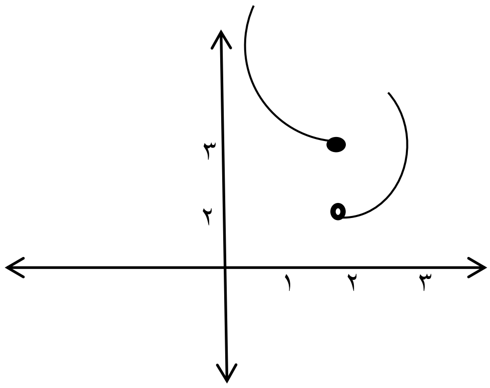
٢) ق(٣)



٣) جد ما يلي

١) ق (٢)

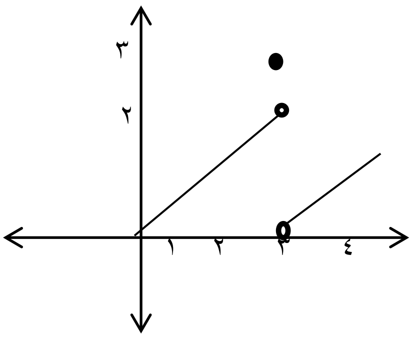
٢) نهـــا ق(س)



٤)جد

١) ق(٣)

٢) نهـــا ق(س)



٥) معتمدا على الشكل ق(س):

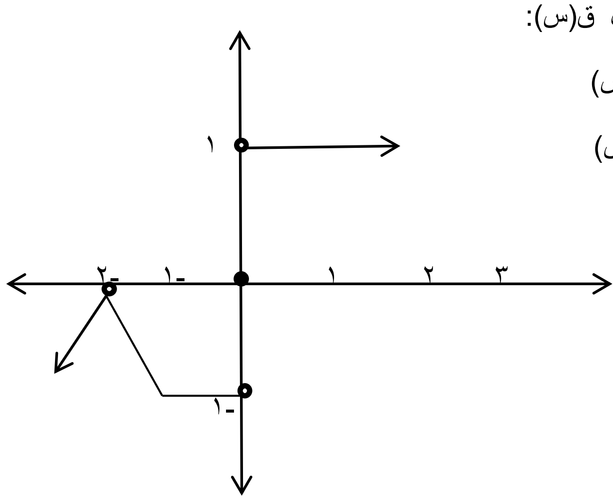
جد:١) نهـــا ق(س)

٢) نها ق(س)

٣) نها ق(س)

٤) ق(٠)

٥) ق(-٢)



٦) معتمدا على الشكل جد:

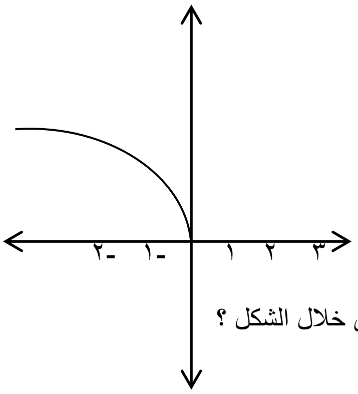
١)نها ل(س)

٢) نها ل(س)

٣) نها ل(س)

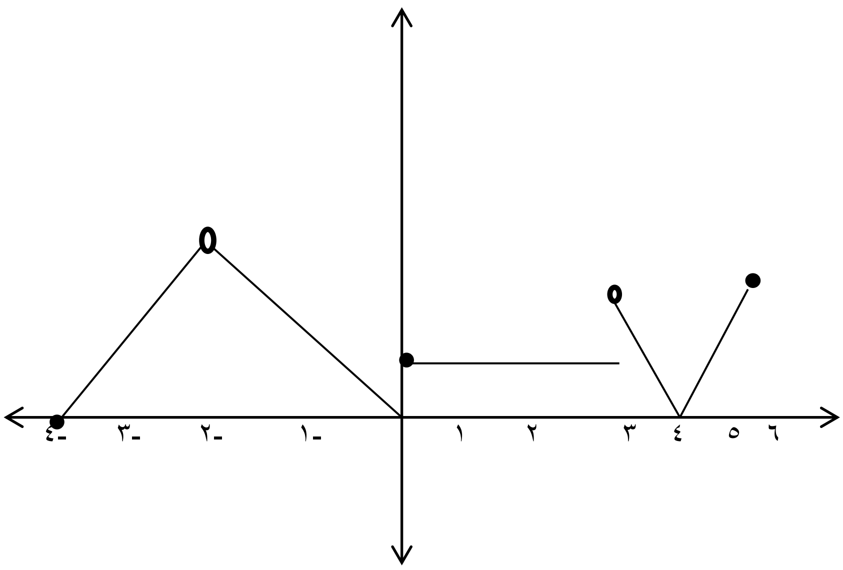
٤) نها ل(س)

٥) نهـــا ل(س)



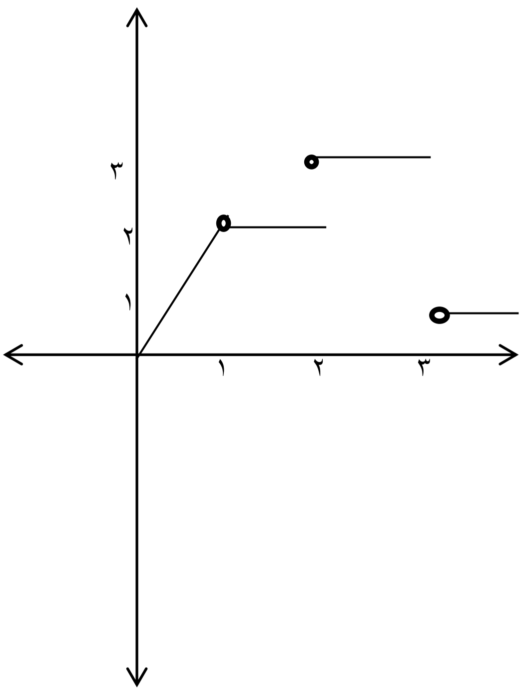
**ما مجال الاقتران من خلال الشكل ؟

٧) معتمدا على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى ق(س) المعرف على [-٤ ،٦] جد قيمه الثابت أ بحيث نهـــا ق(س) = غير موجوده



٨) معتمدا على الشكل المجاور جد١) نهـــا ق(س)=٢ جد أ

٢) نهـــا ق(س) = ٣ جد ب

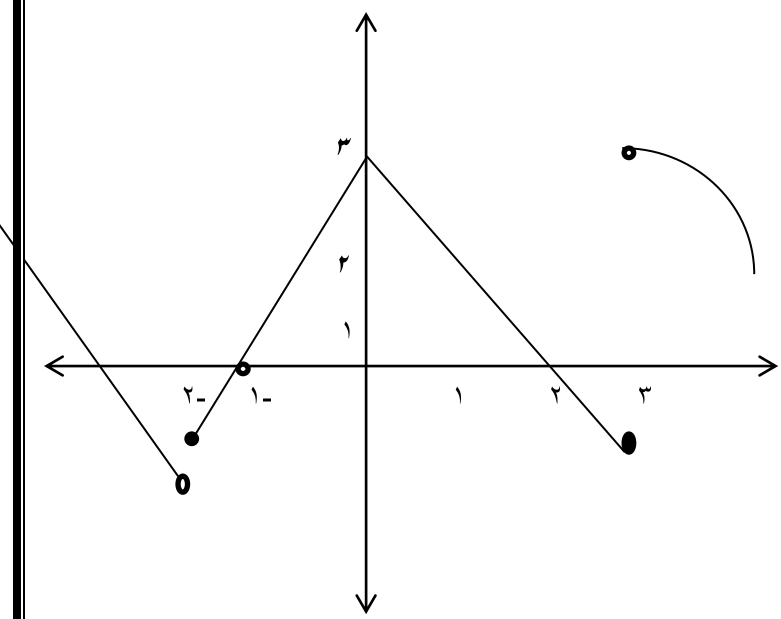


******ملحوظه: أطراف الفترات المغلقه تكون النـهايه غير موجوده******

تمارين :

من خلال الشكل المجاور اجب عما يلي :

1) ***نهـــا ق(س)***
2) ***نهـــا ق(س)***
3) ***مجموعه قيم أ حيث نهـــا ق(س) = ٣***
4) ***مجموعه قيم ب التي تجعل نهـــا ق(س) = غير موجوده***



---

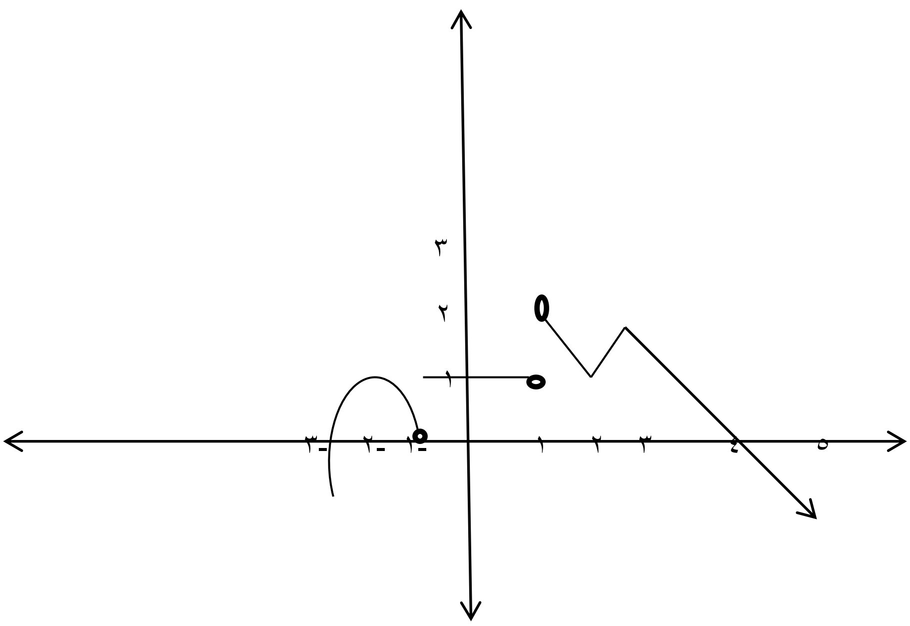
٢) معتمدا على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ع جد كلا مما ياتي

أ) مجموعه قيم أ حبث نهـــا ع (س) = ١

ب)مجموعه قيم جـ حيث نهـــا ع(س) = ١

ج) مجموعه قيم ك حيث نهـــا ع(س) = غير موجوده

د) مجموعه قيم ل حيث نهـــا ع(س) = صفر



الدرس الثاني

نظريات في النهايات

- **نظريه** $\lim_{س \to أ} جـ = جـ$ حيث جـ : عدد ثابت " نهايه الثابت الثابت نفسه "

- **نظريه :** اذا كان ق(س) كثير حدود فان $\lim_{س \to أ} ق(س) = ق(أ)$ " الاصل التعويض المباشر "

- **نظريه :** اذا كان ق ، هـ اقترانين حيث أ ، ب ، جـ أعداد حقيقيه وكان :
$\lim_{س \to أ} ق(س) = ب$ ، $\lim_{س \to أ} هـ(س) = جـ$ فان :

١) $\lim_{س \to أ} (ق(س) \pm هـ(س)) = \lim_{س \to أ} ق(س) \pm \lim_{س \to أ} هـ(س) = ب + جـ$ "توزع النهايه في حاله الجمع والطرح"

٢) $\lim_{س \to أ} م\, ق(س) = م \times \lim_{س \to أ} ق(س) = م \times ب$

٣) $\lim_{س \to أ} (ق(س) \times هـ(س)) = \lim_{س \to أ} ق(س) \times \lim_{س \to أ} هـ(س) = ب \times جـ$

٤) $\lim_{س \to أ} \frac{ق(س)}{هـ(س)} = \frac{\lim_{س \to أ} ق(س)}{\lim_{س \to أ} هـ(س)} = \frac{ب}{جـ}$ ، $جـ \neq ٠$

٥) $\lim_{س \to أ} \sqrt[ن]{ق(س)} = \sqrt[ن]{\lim_{س \to أ} ق(س)} = \sqrt[ن]{ب}$

مثال: اذا كان $ق(س) = س^٢ + ٢\,س + ٣$ جد ١) $\lim_{س \to ٢} ق(س)$ ٢) ق (٢)

الحل:

مثال : اذا كان $\lim_{س \to ٢} ق(س) = ٥$ ، $\lim_{س \to ٢} هـ(س) = ٣$ فجد :

١) $\lim_{س \to ٢} (٢\, ق(س) - هـ(س))$ ٢) $\lim_{س \to ٢} (ق(س)^٢ \times هـ(س) - ٢)$ ٣) $\lim_{س \to ٢} \frac{ق(س)}{هـ(س)}$

الحل:

الاستاذ : يحيى فواخره 0789032445

مثال : اذا كان $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ ق(س) ، جد ١) $\sqrt[٣]{\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}}\ ٢\ \text{ق(س)}}$ ٢) $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \left(\text{س}^{٢}\ \text{ق(س)} - \text{ق(س)}^{٢} + ٢\text{س}\right)$

الحل:

مثال : اذا كانت ق(س) = ٢ س ، هـ (س) = س^{٣} + س فجد كلا مما يلي :

١) $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \left(\text{ق(س)} + \text{هـ(س)} \times \text{س}\right)$ ، ٢) $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \left(\sqrt{\text{ق(س)}} + ٣\sqrt{\text{هـ(س)}}\right) + ١٥$

الحل:

مثال: اذا كان $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \left(٢\ \text{ع(س)}\right) = ١٠$ ، $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ ٣\ \text{ل(س)} + ١ = ٧$ فجد كلا مما يأتي :

١) $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \left(٢\ \text{ع(س)} + \text{ل(س)}\right)$ ٢) $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \left(\text{ع}^{٣}\text{(س)} - \text{ل}^{٢}\text{(س)}\right)$ ٣) $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{ل(س)}}{\text{ع(س)}}$

الحل :

مثال : اذا كانت $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{هـ(س)} + \text{س}} = ٢$ ، وكانت $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق(س)} + \text{هـ(س)}}{\sqrt{\text{س}^{٢} + ٥}} = \frac{٤}{٣}$ جد

$\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٢}}{\text{ق(س)}}$

الحل :

مثال : اذا كان ق كثير حدود يمر بالنقطه (-٣ ، ٤) وكانت $\underset{\text{س}\leftarrow -٣}{\text{نهـا}}$ (س – ل(س)) = -١ فجد

$\underset{\text{س}\leftarrow -٣}{\text{نهـا}}$ (ق(س)^{٢}- ل(س))

الحل :

مثال : اذا كان ع كثير حدود باقي قسمته على(س -٢) يساوي ٥ فجد $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ (٣ ع(س) + ٤ س^{٢})

الحل:

- نهـــــايه الجذور:

** اذا كان ناتج تعويض الجذر الزوجي = صفر عندها ندرس مجال الاقتران :

١) $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \sqrt{٦\text{س} - ١٢}$

٢) $\lim_{س \to ٤} \sqrt{٨ - ٢س}$

---

٣) $\lim_{س \to ٥} \sqrt{س^{٢} - ٢٥}$

---

٤) جد قيم جـ التي تجعل $\lim_{س \to جـ} \sqrt{٦ - س}$ غير موجوده

القيمه المطلقه :

نهـــا | ق(س) | ⟵ نعوض قيمه أ داخل المطلقه فاذا كان الناتج :

١) موجب ....> يبقى كما هو

٢) سالب ....> نغير اشاره الاقتران

٣) صفر .....> نفحص الاشاره على خط الاعداد

امثلــــــــــــــه : جد كلا من النهايات :

- ١) $\lim_{س \to ٢} |س - ٢|$

الحل :

- ٢) $\underset{س \leftarrow ٥}{نهـا} |س^٢ - ٢٥|$

الحل :

- ٣) $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـا} |جتا س - ١|$

الحل :

- ٤) $\underset{س \leftarrow -٢}{نهـا} \sqrt{س^٢ + ٤ س + ٤}$

الحل:

- ٥) $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} \sqrt{س^٢ - ٦س + ٩}$

الحل :

اقتران اكبر عدد صحيح :

نهـا [ق(س)] نعوض فيه قيمه(أ) اذا كـان الجواب عدد صحيح تكون النهايه غير موجوده والعكس صحيح .

الاستاذ : يحيى فواخره 0789032445

أمثلــــــه:

١) $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}}$ [٢ س + ١]   ٢) $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}}$ [٠,٣ س]   ٣) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}}$ [جتا س]

- اذا كان أ ∈ ص فان $\underset{س \to أ^{+}}{\text{نهـا}}$ [س] = أ ، $\underset{س \to أ^{-}}{\text{نهـا}}$ [س] = أ – ١ **بشرط أن يكون معامل س موجب
- اذا كان أ ∈ ص فان $\underset{س \to أ^{+}}{\text{نهـا}}$ [س] = أ - ١ ، $\underset{س \to أ^{-}}{\text{نهـا}}$ [س] = أ ** بشرط ان يكون معامل س سالب

أمثلـــــــــــــه :

١) $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}}$ [س + ١]

الحل:

٢) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}}$ [٣ – س]

الحل :

٣) $\underset{س \to ٤}{\text{نهـا}}$ [٨ - ٢ س]

الحل :

٤) $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}}$ [٣س – ٢]

الحل :

- اذا كان أ ∉ ص فان $\underset{س \to أ^{+}}{\text{نهـا}}$ [أ] = $\underset{س \to أ^{-}}{\text{نهـا}}$ [أ] = $\underset{س \to أ}{\text{نهـا}}$ [أ]

أمثلـــــــه : جد كلا من النهايات :

- $\underset{س \to ٢,٥}{\text{نهـا}}$ [س + ٤]
- $\underset{س \to \frac{١}{٣}}{\text{نهـا}}$ [١ + ٢س]

- * نهـــا (س←$\frac{١}{٢}$) [٤س + ٢]

مثال: اذا كان ق(س) = [٢ – س] اجب عما يلي :

١) جد قيم أ التي تجعل نهـــا (س←أ) ق(س) غير موجوده

٢) جد قيم جـ التي تجعل نهـــا (س←جـ) ق(س) = -١

الحل:

مثال : اذا كان ق(س) = [٢ , ٠ س] فجد قيم جـ التي تجعل نهـــا (س←جـ) [٢ , ٠ س]= -١

الحل :

الاقتران المتشعب :

١) ليكن ق(س) =
- **س^{٢} + ٩ ، س> ١**
- **٩ س +١ ، س≥ ١**

جد ١) ق(١) ٢) ق(-١) ٣) نهـــا (س←١) ق(س)

الحل :

الاستاذ : يحيى فواخره 0789032445

٢) ليكن ق(س) = $\begin{cases} \text{س}^3 & ، \text{س} \leq -1 \\ \text{س}^2 & ، -1 \leq \text{س} \leq 2 \\ 5\text{س} & ، \text{س} > 2 \end{cases}$

جد : ١) $\lim\limits_{\text{س} \to 0}$ ق(س) ٢) $\lim\limits_{\text{س} \to 3^-}$ ق(س) ٣) $\lim\limits_{\text{س} \to -1}$ ق(س)

الحل :

٣) ليكن ق(س) = $\begin{cases} \text{س}^2 + \text{س} & ، \text{س} \neq 1 \\ 4 - \text{س} & ، \text{س} = 1 \end{cases}$

جد ١) ق(١) ٢) $\lim\limits_{\text{س} \to 1}$ ق(س)

الحل :

٤) اذا كان ل(س) = $\begin{cases} 2\text{س} + 1 & ، \text{س} \in \text{ص} \\ \text{س}^2 + 4 & ، \text{س} \notin \text{ص} \end{cases}$

حيث ص مجموعه الاعداد الصحيحه فجد $\lim\limits_{\text{س} \to 2}$ ل(س)

الحل :

٥) ليكن ق(س) = $\begin{cases} |\text{س} - 2| & ، \text{س} \leq 2 \\ [6 - \text{س}] & ، \text{س} > 2 \end{cases}$

فجد $\lim\limits_{\text{س} \to 2}$ ق(س)

الحل :

٦) ليكن ق(س) =
- ٥ س – ٩ ، س ≤ ٢
- [٢ – ٥,٠ س] ، ٢ < س ≤ ٤
- | س – ٤ | ، س > ٤

جد ١) نهـا ق(س) (س←٢) ٢) نهـا ق(س) (س←٤)

الحل :

**مثال : ليكن ق(س) =
- س^{٢} + ١ ، س < ٢
- ٣ س ، س > ٢

جد ١) نهـا ق(س + ٣) (س←٢) ٢) نهـا ق(٧ – س) (س←٥$^{+}$)

الحل :

مثال : اذا كان ق(س) =
- س^{٢} + جتا $\frac{\pi}{}$ ، س < ٢
- (أ – ١) س + ٥ ، س ≥ ٢

جد قيمة أ التي تجعل نهـا ق(س) (س←٢) موجوده

الحل :

مثال : اذا كان ق(س) =
- س^{٢} – ٤ أ ، س ≤ ٣
- [٦ – س] ، س > ٣

وكانت نهـا ق(س) (س←٣) موجوده ، فجد قيمه الثابت أ

الحل :

مثال : اذا كان ق (س) = [س + ٥]   هـ (س) = [٤ – س] جد ١) نهـا ق(س) (س←٢)   ٢) نهـا هـ (س) (س←٢)

٣) نهـا (ق(س) + هـ(س)) (س←٢)

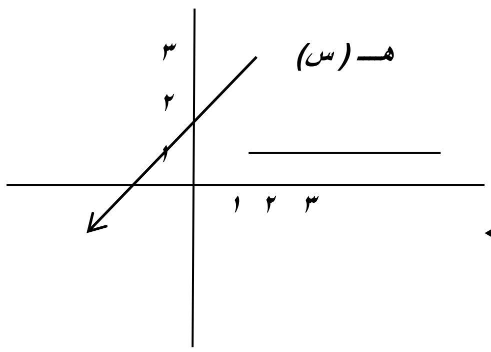
الحل :

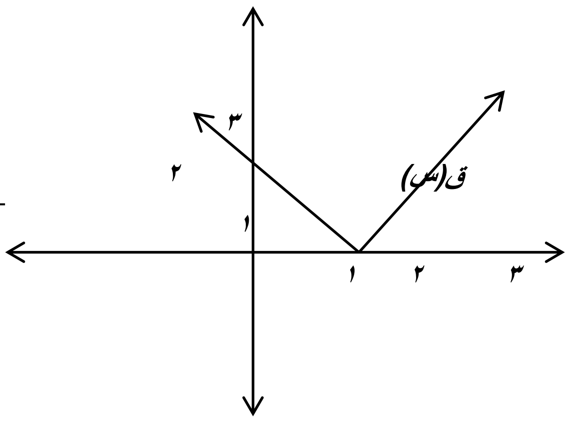
مثال : من خلال الشكل المجاور الذي يمثل منحى الاقترانين ق(س) و هـ(س) جد كلا مما يأتي :

١) نهـا ق(٢ س +١)

٢) نهـا ق(س) × هـ(س)

٣) نها(٢ ق(س-١) +هـ(س)





مثال : اذا كانت نهـا ق(س) = ٤ (س←٣) ، ق(٣) = ٦ فجد قيمه نهـا (ق ^٢ (٢س + ١) – س + ٢) (س←١)

الاستاذ : يحيى فواخره 0789032445

تمارين : ١) جد نهـــا (س [س] + اس ا)
س←١

٢) اذا كان ق (س)= { (٣ – س) / |س – ٣| ، س> ٣
جـ س٢ - ٤ ، س < ٣ }
وكانت نهـــا ق(س) موجوده فما قيمه الثابت جـ

٣)اذا كانت نهـــا (س٣ + أ س٢)٣ = نهـــا (س٢ -١) جد قيمه الثابت أ

الدرس الثالث
نهايه اقترانات كسريه

الاصل في النهايه التعويض المباشر

١- $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢} - س - ٦}{٩ - س^{٢}} =$

٢- $\lim_{س \to ١-} \frac{س^{٣} - س}{س^{٢} - س} =$

٣- $\lim_{س \to ٥} \frac{٥س + ٢}{س^{٢} - ٩} =$

- في حاله الجواب كان ($\frac{٠}{٠}$) هنا نحتاج الى حل وهنالك عده طرق :

١) التحليل واخراج العامل المشترك :

أمثله :جد حل كلا من النهايات التاليه :

١) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢} - ٤}{٢س - س^{٢}}$

٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{س^{٣} - ٥س^{٢} + س}{س}$

٣) $\lim_{س \to ٢-} \frac{س^{٢} - ٢س - ٨}{٦س + ٣س^{٢}}$

٤) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢} - س - ٦}{٩ - س^{٢}}$

٥) $\lim_{س \to ٣} \frac{٥س^{٢} - ١٢س - ٩}{٢س^{٢} - ٥س - ٣}$

٦) $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{(س - ٢)^{٢} - ١}{س^{٢} - ٣س}$

٧) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(س + ٣)^{٢} - ٩}{٢٥ - (٢س + ٥)^{٢}}$

٨) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{(س + ١)^{٤} - ١٦}{٩س^{٢} - ٧س - ٢}$

٩) $\underset{س \to ٤}{\text{نهـا}} \dfrac{٤٨ - ٣س^{٢}}{س^{٣} - ٦٤}$

١٠) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٤} - ١}{س - ١}$

ملاحظه : اذا كان $\underset{س \to أ}{\text{نهـا}} \dfrac{ق(س)}{هـ(س)} = \dfrac{٠}{٠}$ **فان العامل المشترك بين البسط والمقام** $(س - أ)$ **او** $(أ - س)$

١١) $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٣} - س^{٢} - س - ٢}{س - ٢}$

١٢) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٣} + ٣س - ٤}{س^{٢} - ١}$

١٣) $\underset{\text{س}\to\frac{1}{3}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{27\text{س}^{3}-1}{\text{س}-\frac{1}{3}}$

١٤) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}}\ \dfrac{9^{\text{س}}-3^{\text{س}}}{1-3^{\text{س}}}$

١٥) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}}\ \dfrac{2^{\text{س}+1}-2}{2^{\text{س}}-1}$

١٦) $\underset{\text{س}\to 1}{\text{نهـا}}\ \dfrac{9^{\text{س}}-4\times 3^{\text{س}+1}+27}{3^{\text{س}}-3}$

١٧) اذا كان ل(س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{س}^{3}-27}{2\text{س}^{2}+6\text{س}+18} & \text{، س} \le \text{ع} \\ \text{س}+5 & \text{، س} > \text{ع} \end{cases}$ فجد قيمة الثابت التي تجعل $\underset{\text{س}\to\text{ع}}{\text{نهـا}}\ \text{ل(س)}$ موجوده

الاستاذ : يحيى فواخره 0789032445

أسئله الثوابت على التحليل :

١) اذا كانت $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{3}-\text{أ}^{3}}{\text{س}-\text{أ}} = \underset{\text{س}\to 1}{\text{نهـا}} \dfrac{5\text{س}^{2}+2\text{س}-7}{\text{س}-1}$ **جد قيمه أ**

٢) اذا كانت $\underset{\text{س}\to 2}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{أس}^{2}+\text{س}-12}{5\text{س}-10}$ **موجوده جد قيمه أ**

٣) اذا كانت $\underset{\text{س}\to 1}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{أس}^{2}+(\text{أ}+\text{ب})\text{س}-2}{\text{س}-1} = 5$

٤) اذا كان هـ كثير حدود وكانت $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{هـ}(\text{س})+5}{\text{س}} = \dfrac{1}{2}$ وكانت $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} (\text{هـ}(\text{س})-5+3\text{جـ}) = 2$ فجد قيمه الثابت جـ

٥) اذا كان ق(س) كثير حدود ، وكانت $\underset{\text{س}\to 3}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(\text{س})+5}{\text{س}-3} = 4$ ، $\underset{\text{س}\to 3}{\text{نهـا}} (\text{ق}(\text{س})-2\text{س}+3\text{ب}) = 7$ ، فجد قيمه الثابت ب

٦) اذا كانت $\lim_{س \leftarrow ١} \frac{ق(س) - ٦}{س - ١} = ٨$ فما قيمه $\lim_{س \leftarrow ١} \frac{س^{٢} + ٢س - ٣}{ق(س) - ٦}$

٧) اذا كان $\lim_{س \leftarrow ٢} \frac{ق(س)}{س^{٢} - ٤} = ٣$ فجد $\lim_{س \leftarrow ٢} \frac{ق(س)}{س - ٢}$

٨) اذا كان ق(س) اقران كثير حدود وكانت $\lim_{س \leftarrow ٢} \frac{ق(س)}{س} = ٣$ فجد $\lim_{س \leftarrow ٢} \frac{ق(س)^{٢}}{س}$

الحاله الثانيه :توحيد المقامات

أمثلــــــــــــــــــــــه : جد حل كل من النهايات التاليه :

١- $\lim_{س \leftarrow ٣} \frac{\frac{٢}{س + ٥} - \frac{١}{٤}}{س - ٣}$

٢- $\lim_{س \leftarrow ٠} \frac{١}{س} \left(\frac{١}{س + ٢} - \frac{١}{٢ - س} \right)$

الاستاذ : يحيى فواخره 0789032445

٣- $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \left(\dfrac{\text{س}}{٩ - \text{س}^{٢}} + \dfrac{٣\text{س}}{\text{س}^{٣} - ٩\text{س}} \right)$

الثوابت :

١) اذا كانت $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \dfrac{\dfrac{\text{أ}}{\text{س} + \text{ب}} - ١}{\text{س} - ١} = \dfrac{-١}{٢}$ جد أ، ب

٢) اذا كانت $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \dfrac{\text{ق(س)} - ٢}{\text{س}^{٢} - ١} = ٣$ جد $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \dfrac{\dfrac{١}{\text{س} + ١} - \dfrac{١}{٢}}{٢ - \text{ق(س)}} = ٣$

الاستاذ :يحيى فواخره 0789032445

الحاله الثالثه: الضرب بالمرافق اما تربيعي $\sqrt{\ }$ او تكعيبي $\sqrt[3]{\ }$

أمثلــــــــــــــه : جد كلا من النهايات التاليـــــــه :

١- $\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س^{٢} - ٥} - ٢}{س - ٣}$

٢- $\lim_{س \to ١} \frac{٢س - \sqrt{س + ٣}}{س - ١}$

٣- $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{١ + س^{٢}} - \sqrt{١ - س^{٢}}}{س^{٢}}$

٤- $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢} - س - ٢}{\sqrt{س^{٣} + ١} - ٣}$

٥- $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢} - ٣س}{س - \sqrt{س + ١} - ١}$

الاستاذ : يحيى فواخره 0789032445

المرافق التكعيبي

١- $\lim_{س\to ٨} \frac{\sqrt[٣]{س} - ٢}{س - ٨}$

٢- $\lim_{س\to -٣} \frac{\sqrt[٣]{س - ٥} + ٢}{س^{٣} + ٢٧}$

٣- $\lim_{س\to ١} \left(\frac{١}{\sqrt[٣]{س}} - ١\right)\left(\frac{١}{س - ١}\right)$

٤- $\lim_{س\to ٠} \frac{\sqrt[٣]{س + ٨} - ٢}{\sqrt{س + ٤} - ٢}$

الحاله الرابعه: الاستبدال أو الفرض

١- $\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}} \dfrac{\text{س} - \sqrt{\text{س}} - ٢}{\text{س} - ٤}$

٢- $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٢}\sqrt{\text{س} + ٢} - ٨}{\text{س} - ٢}$

٣- $\underset{\text{س}\to ٨}{\text{نها}} \dfrac{\text{س} + \sqrt[٣]{\text{س}} - ١٠}{\text{س} - ٨}$

٤- $\underset{\text{س}\to ٨}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}\sqrt[٣]{\text{س}} - ١٦}{\text{س} - ٨}$

٤- $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{(٢٥)^{\text{س}} + ٢(٥)^{\text{س}+١} - ١١}{٥^{\text{س}} - ١}$

٥- $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٣} - \text{س}^{٢}}{\text{س} + \sqrt{\text{س} + ٣} - ٣}$

الحاله الخامسه : تجزئه البسط (الاضافه و الطرح)

& عند وجود حدين أو أكثر تصعب معالجتهم (في البسط) باستخدام الحالات السابقه مع العلم يجب المحافظه على التجزئه على أن تبقى ($\frac{٠}{٠}$)

أمثلـــــــــــــــــــــه : جد كلا من النهايات التاليـــــــه :

١- $\underset{\text{س}\to ٩}{\text{نها}} \dfrac{\text{س} + \sqrt{\text{س}} - ١٢}{\text{س} - ٩}$

٢- $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{\text{س} + ٢} - \sqrt[٣]{\text{س} + ٦}}{\text{س} - ٢}$

٣- $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٢}\sqrt{\text{س} + ٢} - ٨}{\text{س} - ٢}$

الحاله السادسه : نهـــاية الجذور

١ - أ $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^2 - 4\text{س}}{\sqrt[3]{\text{س}^3 - 2\text{س}^4}}$

٢ - $\underset{\text{س}\to \frac{1}{2}}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{4\text{س}^2 - 4\text{س} + 1}}{\text{س} - \frac{1}{2}}$

٣ - $\underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt[3]{\text{س}^2 - 1}}{\sqrt[3]{1 - \text{س}}}$

٤ - $\underset{\text{س}\to 1^+}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{\text{س}^2 - 1} - \sqrt{1 - \text{س}}}{\sqrt{\text{س}^3 - 1}}$

٥- $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \dfrac{٣\text{س}}{|\text{س}|}$

٦- $\underset{\text{س}\to ٠^-}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}}{\text{س} - |\text{س}|}$

٧- $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ١}}{|٢ - ٢\text{س}|}$

٨- $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{|\text{س}^{٢} - ٢\text{س}|}{|٢ - \text{س}|}$

أمثلـــــــــــــــه: جد كلا مما يلي

١- $\underset{\text{س}\to ٣^-}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٢} + [\text{س}] - ١١}{|\text{س} - ٣|}$

٢- اذا كان ق(س)= $\begin{cases} \dfrac{|\text{س}^{2}-25|}{|25-5\text{س}|} & ، \text{س}<5 \\ \left[\dfrac{\text{س}}{2}\right]\times[\text{س}] & ، \text{س}>5 \end{cases}$ جد $\lim\limits_{\text{س}\to 5}$ ق(س)

٣- اذا كان ق(س)= $\begin{cases} \dfrac{4-\text{س}}{|\text{س}-4|} & ، \text{س}>4 \\ \text{أس}^{2}-9 & ، \text{س}<4 \end{cases}$ وكانت $\lim\limits_{\text{س}\to 4}$ ق(س) موجوده فما قيمه أ

٤- اذا كان أ، ب $\in$ ح وكان ل (س)= $\begin{cases} \dfrac{\text{س}^{3}-\text{أس}+3}{\text{س}-1} & ، \text{س}>1 \\ \text{ب س}-5 & ، \text{س}<1 \end{cases}$ فجد قيمه أ، ب التي تجعل $\lim\limits_{\text{س}\to 1}$ ل(س) موجوده

٥- اذا كان ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{س}^{2}-4}{\text{س}+2} & ، \text{س}>\text{ك} \\ 3\text{س} & ، \text{س}<\text{ك} \end{cases}$ فما مجموعه قيم ك التي تجعل $\lim\limits_{\text{س}\to \text{ك}}$ ق(س) موجوده

٦- اذا كان $\underset{\text{س}\leftarrow ٣^{+}}{\text{نها}} \dfrac{|\text{س}^{٢} - ٩|}{|\text{س}^{٢} - \text{س} - ٦|} = \underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نها}} \dfrac{|٣\text{س} + ٢\text{أ}|}{٥}$ فما قيمه الثابت أ

٧- اذا كانت $\underset{\text{س}\leftarrow \text{أ}}{\text{نها}} [٢\text{س}] = ٣$ جد مجموعه قيم أ التي تجعل النهايه موجوده

تمارين :

١) جد $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٤} - ٥\text{س}^{٢} + \text{س} + ٢}{\text{س}^{٣} - \text{س}^{٢} - ٤}$

٢) اذا كانت $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نها}} \dfrac{\text{أس}^{٢} + (\text{أ} + \text{ب})\text{س} - ٦}{\text{س} - ٢} = ١٠$ فجد قيمه أ، ب

٣) جد $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نها}} \left(\dfrac{١٢}{\text{س}^{٣} - ٨} - \dfrac{١}{\text{س} - ٢}\right)$

٤) جد $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{١}{\text{س}} \left(\dfrac{١}{\sqrt{\text{س} + ١}} - ١\right)$

٥) $\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{٣\text{س} + ١} - ٢}{١ - \sqrt{\text{س}}}$

٦) $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{(٦٤)^{\text{س}} - (٨)^{\text{س}}}{١ - ٨^{\text{س}}}$

٧) $\underset{\text{س}\leftarrow ٢{,}٥}{\text{نها}} \dfrac{٢\text{س} - [٢\text{س}]}{٤\text{س}^{٢} - ٢٥}$

٨) $\underset{\text{س}\leftarrow ٨}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt[٣]{\text{س}} - ٢}{\dfrac{\text{س}}{٢} - ٤}$

٩) $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نها}} \dfrac{١}{\text{س}} \left(\dfrac{١}{(\text{س} + ٢)^{٢}} - \dfrac{١}{٤}\right)$

الدرس الرابع

& نهايات اقترانات مثلثيه &

قاعده :1) $\text{جتاس} - \text{جتاص} = -2\,\text{جا}\frac{\text{س}+\text{ص}}{2}\ \text{جا}\frac{\text{س}-\text{ص}}{2}$

2) $\lim\limits_{\text{س}\to\text{أ}} \text{جتاس} = \text{جتاأ}$

3) $\lim\limits_{\text{س}\to\text{أ}} \text{ظاس} = \text{ظاأ}$ $\quad \text{أ} \in \text{ح} - \left\{\frac{\text{ن}}{2}\pi ،\ \underline{\text{ن} = 1،3،5...}\right\}$

أمثـــله:

1) $\lim\limits_{\text{س}\to 0} (\text{جاس} + \text{جتاس})$

2) $\lim\limits_{\text{س}\to \frac{\pi}{2}} (2\,\text{جاس} - \text{ظا}\frac{\text{س}}{2})$

نظريــــه : $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \frac{\text{جاس}}{\text{س}} = 1$ حيث س ، بالتقدير الدائري ، $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \frac{\text{س}}{\text{جاس}} = 1$

$\lim\limits_{\text{س}\to 0} \frac{\text{ظاس}}{\text{س}} = 1$ حيث س، بالتقدير الدائري ، $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \frac{\text{س}}{\text{ظاس}} = 1$

نتائج :

1- $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \frac{\text{أس}}{\text{جاب س}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$

2- $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \frac{\text{جاأس}}{\text{ب س}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$

3- $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \frac{\text{أس}}{\text{ظاب س}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$

4- $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \frac{\text{ظاأس}}{\text{ب س}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$

أمثلـــــه :

1) $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \frac{\text{جا}2\text{س}}{5\text{س}}$

2) $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \frac{2\,\text{ظا}3\text{س}}{7\text{س}}$

3) $\lim\limits_{\text{س}\to 0} 3\text{س}\,\text{ظتاس}$

4) $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \frac{5\text{س} + \text{ظا}7\text{س} + \text{جا}2\text{س}}{2\text{س}}$

5) $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \text{س}(\text{قتاس} - 2\,\text{ظتا}3\text{س})$

٦) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س جاس} - \text{ظا٢س}}{\text{٤س} - \text{جا٣س}}$

٧) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}^{٢}\text{٣س}}{\text{٥س}^{٢}}$

٨) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{٣س}^{٢} + \text{جا}^{٢}\text{٤س}}{\text{٢س}^{٣} + \text{س ظا٣س}}$

٩) $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا(٢س} - \text{٦)}}{٣ - \text{س}}$

١٠) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا(ظا٣س)}}{\text{س}}$

١١) $\underset{\text{س}\to -٤}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا(س} + \text{٤)}}{\text{س}^{٢} - ١٦}$

١٢) $\underset{\text{س}\to \pi}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا(س} - \pi)}{\pi - \text{س}}$

١٣) $\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا(س}^{٣} - \text{٦٤)}}{\text{س} - ٤}$

متطابقات للحفظ :

١) $\text{جا}^{٢}\text{س} + \text{جتا}^{٢}\text{س} = ١$

٢) $١ + \text{ظا}^{٢}\text{س} = \text{قا}^{٢}\text{س}$

٣) $١ + \text{ظتا}^{٢}\text{س} = \text{قتا}^{٢}\text{س}$

٤) $\text{جا}٢\text{س} = ٢\,\text{جاس}\,\text{جتاس}$

٥) $\text{جتا}٢\text{س} = \begin{cases} ٢\text{جتا}^{٢}\text{س} - ١ \\ ١ - ٢\text{جا}^{٢}\text{س} \\ \text{جتا}^{٢}\text{س} - \text{جا}^{٢}\text{س} \end{cases}$

٦) $\text{جا}^{٢}\text{س} = \frac{١}{٢}(١ - \text{جتا}٢\text{س})$

٧) $\text{جتا}^{٢}\text{س} = \frac{١}{٢}(١ + \text{جتا}٢\text{س})$

٨) $\text{جا}(\text{س} \pm \text{ص}) = \text{جاس}\,\text{جتاص} \pm \text{جتاس}\,\text{جاص}$

٩) $\text{جتا}(\text{س} \pm \text{ص}) = \text{جتاس}\,\text{جتاص} \mp \text{جاس}\,\text{جاص}$

١٠) $\text{ظا}(\text{أ} - \text{ب}) = \frac{\text{ظاأ} - \text{ظاب}}{١ + \text{ظاأ}\,\text{ظاب}}$

١١) $\text{ظا}(\text{أ} + \text{ب}) = \frac{\text{ظاأ} + \text{ظاب}}{١ - \text{ظاأ}\,\text{ظاب}}$

١٢) $\text{جاس} - \text{جاص} = ٢\,\text{جتا}\frac{\text{س} + \text{ص}}{٢}\;\text{جا}\frac{\text{س} - \text{ص}}{٢}$

١٣) $\text{جتاس} - \text{جتاص} = -٢\,\text{جا}\frac{\text{س} + \text{ص}}{٢}\;\text{جا}\frac{\text{س} - \text{ص}}{٢}$

١٤) $\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢} - \text{هـ}\right) = \text{جتاهـ}$

١٥) $\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢} + \text{هـ}\right) = \text{جتاهـ}$

١٦) $\text{جا}(٢\pi - \text{هـ}) = -\text{جاهـ}$

١٧) $\text{جا}(\pi - \text{هـ}) = \text{جاهـ}$

١٨) $\text{جا}(\pi + \text{هـ}) = -\text{جاهـ}$

١٩) $\text{جتا}(\pi + \text{هـ}) = -\text{جتاهـ}$

٢٠) $\text{جتا}(\pi - \text{هـ}) = -\text{جتاهـ}$

٢١) $\text{جتا}\left(\frac{\pi}{٢} - \text{هـ}\right) = \text{جاهـ}$

٢٢) $\text{جتا}\left(\frac{\pi}{٢} + \text{هـ}\right) = -\text{جاهـ}$

 الاستاذ : يحيى فواخره 0789032445

أمثلـــــــــــه على المتطابقات :

جد حل كل من النهايات التاليه :

١) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \dfrac{1 - \text{جتا}^{2}\,5\text{س}}{\text{جتا}^{2}\,8\text{س} - 1}$

٢) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \dfrac{1 - \text{جتا}^{4}\,\text{س}}{5\text{س}\,\text{جاس}}$

٣) $\underset{\text{س}\to \frac{\pi}{6}}{\text{نها}} \dfrac{1 - 2\,\text{جاس}}{3 - 4\,\text{جتا}^{2}\,\text{س}}$

٤) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \dfrac{\text{قا}^{2}\,5\text{س} - 1}{\text{س}\,\text{جا}\,2\text{س}}$

٥) $\underset{\text{س}\to \frac{\pi}{4}}{\text{نها}} \dfrac{\text{جتا}\,2\text{س}}{1 - \sqrt{2}\,\text{جاس}}$

٦) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \dfrac{2 - \text{جتا}\,2\text{س} - \text{جتا}\,4\text{س}}{\text{س}^{2}}$

٧) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{1 - \text{جتاس}}}{\text{س}}$

٨) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{قا}^{4}\text{س} - ١}{\text{س}^{2}}$

٩) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{١ - \text{جتا}٥\text{س}}{٤\text{س}^{2}}$

١٠) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{١ + \text{س جا}٥\text{س} - \text{قا}^{2}\text{س}}{\text{س ظاس}}$

١١) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}٣\text{س} - ٣\text{جاس}}{\text{س}^{3}}$

١٢) $\underset{\text{س}\to \frac{\pi}{2}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جتاس}}{٢\text{س} - \pi}$

١٣) $\underset{\text{س}\to \frac{\pi}{2}}{\text{نهـا}} \dfrac{١ - \text{جاس}}{\left(\frac{\pi}{2} - \text{س}\right)^{2}}$

١٤) $\underset{س \leftarrow ١}{نهـا} \dfrac{جتا \frac{\pi}{٢} س}{س - ١}$

١٥) $\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٤}}{نهـا} \dfrac{جاس - جتاس}{س - \frac{\pi}{٤}}$

١٦) $\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٤}}{نهـا} \dfrac{جا٢س - جتا٢س - ١}{جتاس - جاس}$

١٧) $\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٢}}{نهـا} \dfrac{ظتاس}{\pi - ٢س}$

١٨) اذا كان $ق(س) = \dfrac{جا(٢\pi - ٢س)}{- ٥س}$ فجد $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـا} ق(س)$

الاستاذ : يحيى فواخره 0789032445

الثوابـــــــــــت:

1) جد $\lim\limits_{\text{س}\to\text{أ}} \dfrac{\text{جاس} - \text{جاأ}}{\text{س} - \text{أ}}$

2) اذا كانت $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\text{جاأس}}{\text{٦س}} = \lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\text{ظا٥س}}{\text{ب س} - \text{س}} = 2$ جد أ ، ب

3) اذا كانت $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\text{٤س}^2 - \text{جاب س}}{\text{ب س} - \text{ظا٤س}} = \dfrac{1}{4}$ فجد قيمه الثابت ب

***<u>تمارين</u>*: جد كلا من النهايات التاليه**

1) $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\text{س} + \text{جا٢س}}{\text{٣س}}$

2) $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\frac{1}{2} - \text{جتا}\left(\frac{\pi}{3} + \text{هـ}\right)}{\text{هـ}}$

3) $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\text{جتاس} - \sqrt{3}\,\text{جاس}}{\text{٦س} - \pi}$

4) $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\text{س} - \text{جاس}}{\sqrt{1 - \text{جتا٢س}}}$

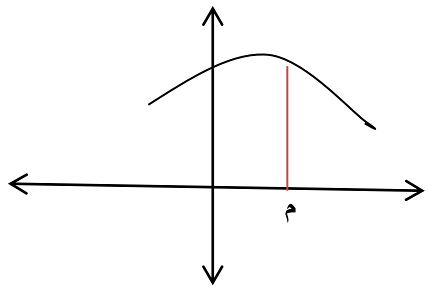
5) $\lim\limits_{\text{س}\to 2} \dfrac{\text{س} - 2}{\text{ظا}\,\pi\,\text{س}}$

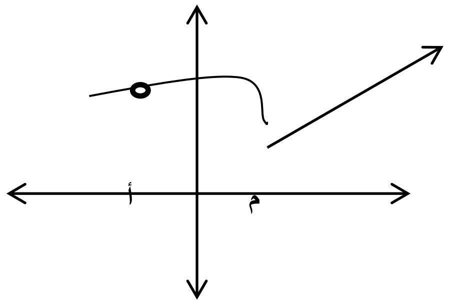
6) $\lim\limits_{\text{س}\to 1} \dfrac{\text{س جا}\frac{\pi}{\text{س}}}{\text{س} - 1}$

الدرس الخامس

&الاتصــــــــــال عند نقطه&

نقول ان الاقتران ق متصل عند س = م اذا كان منحنى الاقتران ق ليسفيه فجوه او انقطاع عند س = م " اي انك تستطيع رسم منحنى اقتران بالقلم حول (م، ق(م)) ومروا بهـا دون ان ترفع القلم .





***نلاحظ من الشكل:**

ليس في الاقتران فجوه او انقطاع عند س = م

ويكون الاقتران ق متصلا عند س = م

***نلاحظ من الشكل :**

&وجود فجوه في منحنى الاقتران ق عند س= أ ووجود انقطاع في المنحنى نفسه عند س= م

فالاقتران ق غير متصل عند س= م ، س = أ

تعميــــــم :

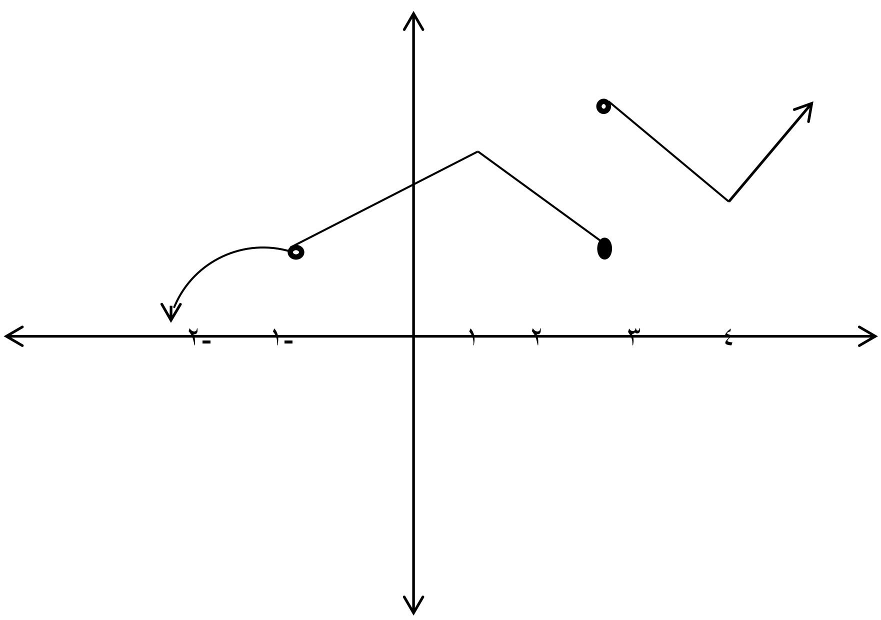
يكون ق(س) متصل عند النقطه س= أ اذا تحقق :

١) ق(س) معرف عند س = أ

٢) $\lim_{س \to أ} ق(س) = ق(أ)$ $\lim_{س \to أ} ق(س)$ موجوده

٣) $\lim_{س \to أ} ق(س) = ق(أ)$

مثال : من خلال الشكل التالي جد قيم س التي يكون عندها الاقتران ق(س) غير متصــل



الاستاذ :يحيى فواخره 0789032445

مثال : اذا كان $ق(س) = \frac{س^{٣} - ٨}{س - ٢}$ ، س $\neq$ ٢ ابحث في اتصال ق(س) عند س = ٢

مثال :اذا كان ق(س)=

$$ق(س) = \begin{cases} ٢ - ٣س & ، س > ٢ \\ ٣ & ، س = ٢ \\ س^{٢} - ٨ & ، س > ٢ \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق(س) عند س = ٢

مثال : اذا كان ق(س)=

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{|ظاس|}{س} & ، س > ٠ \\ ٢^{س} & ، س = ٠ \\ \frac{جا\sqrt{س^{٢}}}{-س} & ، س < ٠ \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق(س)عند س = ٠

مثال : اذا كان ق (س)=

$$ق(س) = \begin{cases} \sqrt{س - ٢} & ، س > ٢ \\ |٢س - س^{٢}| & ، س \geq ٢ \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق(س) عند س = ٢

مثال :اذا كان ق(س) =
$$\begin{cases} [س - ٥] & ، س \le ٥ \\ \frac{|س - ٥|}{س - ٥} & ، س > ٥ \end{cases}$$
ابحث في اتصال ق(س)عند س = ٥

مثال :اذا كان ق (س)=
$$\begin{cases} \frac{جا^{٢}س}{س^{٢}} & ، س < ٠ \\ [س + ١] & ، س = ٠ \\ \frac{|س|}{س} & س > ٠ \end{cases}$$
ابحث في اتصال ق(س) عند س = ٠

مثال : ابحث في اتصال ق(س) =
$$\begin{cases} \sqrt{س^{٢} + ٦س + ٩} & ، س \ne -٣ \\ جتا(س+٣) & ، س = -٣ \end{cases}$$
ابحث في اتصال ق(س) عند س = -٣

مثال : اذا كان ق(س)= $\begin{cases} \left|\dfrac{س}{٢} - ١\right| & ، -١ \leq س < ٣ \\ \left[\dfrac{١}{٢}س + ٣\right] & ، ٣ \leq س < ٤ \end{cases}$ ابحث في اتصال ق(س) عند س = ٣

مثال : اذا كان ق(س) = $\left[\dfrac{١}{٢}س - ٤\right]$ ابحث في اتصال ق عند س= ٧

مثال : اذا كان ق(س)= $[س]$ ، فما مجموعه قيم س التي يكون عندها ق اقتران غير متصل ؟

مثال : اذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٣س+٥ & ، س \in ص \\ ٢س^{٢} - ٤ & ، س \notin ص \end{cases}$ حيث ص مجموعه الاعداد الصحيحه فابحث في اتصال ق عند س = ٣

الثوا بـــــــــــت :

مثال : ليكن ل(س) =
- [س] + أ ، س ≤ ٢
- أس ، س > ٢

جد قيمه الثابت أ التي تجعل ل(س) متصلا عند س = ٢

مثال : اذا كان ق(س) =
- أس^{٢} + ب س − ٢ ، س < ١
- أ − ٣ ، س = ١
- ب س − ٣أ ، س > ١

وكان ق(س)متصلا عند س = ١ جد أ ، ب

مثال : اذا كان ق(س)=
- أ س^{٣} − ب س +١ ، س < ١
- ٥ ، س = ١
- س^{٢} − (أ + ب) س + ٢ ، س > ١

جد أ، ب اذا كان ق(س) متصلا عند س = ١

مثال : اذا كان ع(س) =
- $\frac{أ}{س}$ + س^{٢} ، ٠< س ≤ ٢
- [س] + ٣ ، ٢ < س < ٣

وكان ع (س) متصلا عند س = ٢

مثال : اذا كان ق اقترانا متصلا عند س = ٤ وكانت ٣ ق(٤)= ٦ ، وكانت $\underset{س \leftarrow ٤^+}{نهـــا} ق(س) = ٤ب$ فان قيمه الثابت ب تساوي :

نظريـــــــات في الاتصـــــال:

نظريه :اذا كان ق اقتران كثير حدود فان ق متصل على ح

نظريه : اذا كان ق ، ل اقترانين متصلين عند س = أ فان :

1) **الاقتران ق + ل متصل عند س = أ**
2) **الاقتران ق – ل متصل عند س =أ**
3) **الاقتران ق ×ل متصل عند س = أ**
4) **$\frac{ق}{ل}$ متصل عند س = أ بشرط ل(أ) ≠ ٠**

البرهان :

افرض هـ = ق + ل

هـ (أ)= ق (أ)+ ل (أ) من تعريف الاقتران هـ

بحيث ق ، ل متصلان عند س = أ

$\underset{س \leftarrow أ}{نهـــا} هـ(س) = \underset{س \leftarrow أ}{نهـــا} ق(س) + \underset{س \leftarrow أ}{نهـــا} ل(س)$

= ق(أ) + ل(أ) وعليه فان الاقتران هـ متصل عند س= أ

نظريـــه : اذا كان ق اقترانا متصلا عند س= أ ، ق(س) ≥ ٠ في فتره مفتوحه تحتوي أ ، فان الاقتران $هـ(س) = \sqrt[ن]{ق(س)}$ متصل عند س=أ

مثال : اذا كان ق(س)= $\begin{cases} س^٢+٤ & ، س> ٢ \\ س+ ٦ & ، س\leq ٢ \end{cases}$ **ع(س) =** $\begin{cases} س^٣- ٢ & ، س > ٢ \\ ٣ س & ، س \leq ٢ \end{cases}$

ابحث في اتصال الاقتران (ق + ع) عند س = ٢

مثال : اذا كان ق(س) = $\begin{cases} ١ + ٢\text{ س} & \text{، س} < ١ \\ ٣\text{س}^٢ & \text{، س} \geq ١ \end{cases}$ **ع(س) =** $\begin{cases} \text{س}^٢ & \text{، س} < ١ \\ |\text{س}| & \text{، س} \geq ١ \end{cases}$ **فابحث في اتصال الاقتران (ق ×ع) عند س = ١**

مثال : اذا كان ق(س) = (س- ١)^٢ ، ل(س)= $[٢ - \text{س}]$ ، فابحث في اتصال ق×ل عند س = ٣

مثال : اذا كان ق(س)= (س- ٥)^٣ ، هـ (س)=$[\text{س} + ٢]$ فابحث في اتصال الاقتران (ق × هـ) عند كل من س= -٢ ، س= ٥

مثال : اذا كان ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{\text{س}^٢}}{\text{س}} + ٢\text{س} & \text{، س} \neq ٠ \\ \text{جتاس} & \text{، س} = ٠ \end{cases}$ هـ(س) = $\begin{cases} ٥ - \text{س}^٢ & \text{، س} \geq ٠ \\ ٣ & \text{، س} < ٠ \end{cases}$ هل ق× هـ متصل عند س = ٠

تمارين :

١) اذا كان ل(س)=

$$\text{ل(س)} = \begin{cases} \frac{1}{3}\ 2\text{جتا}^2\text{س} & ،\ \text{س} < \frac{\pi}{2} \\ \text{أس}^2 + \pi^2 & ،\ \text{س} \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

فان قيمه أ التي تجعل الاقتران ل متصلا عند س = $\frac{\pi}{2}$

٢) اذا كان ق اقتران متصلا عند س = ١ وكان ق(١)= ٤ فان $\underset{\text{س}\to 1^+}{\text{نهـا}} \left(\frac{|\text{س} - 1|}{\text{س} - 1} + \text{ق(س)} \right)$

٣) اذا كان ل(س)=

$$\text{ل(س)} = \begin{cases} \frac{9\text{س}^2 - 1}{\sqrt{1 - 6\text{س} + 9\text{س}^2}} & ،\ \frac{-1}{3} < \text{س} < \frac{1}{3} \\ -2 & ،\ \text{س} = \frac{1}{3} \\ -6\text{س} - [\text{س}] & ،\ \frac{1}{3} < \text{س} < \frac{4}{3} \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق(س) عند س = $\frac{1}{3}$

٤) اذا كان ق(س)=

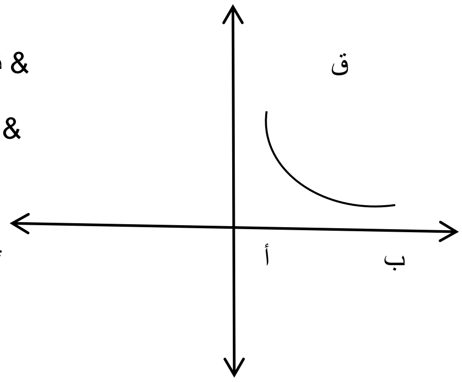
$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \frac{|\text{س}^2 - 4|}{\text{س} - 2} & ،\ \text{س} \neq 2 \\ 2 + \text{س} & ،\ \text{س} = 2 \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق (س)=٢

الاستاذ : يحيى فواخره 0789032445

الدرس السادس

&الاتصـــــــال على فتره&



& نلاحظ الاقتران متصل عند س = أ من جهه اليمين

& نلاحظ ان القتران متصل عند س= ب من جهه ايسار

& الاقتران ق متصل عند كل س تنتمي للفتره (أ ، ب)

** في هذه الحاله نقول الاقتران ق متصل على الفتره [أ ، ب]

تعريف:

اذا كان ق اقترانا معرفا على الفتره [أ ، ب] فان :

١) ق يكون متصلا عند س = أ من اليمين ، اذا كانت $\underset{س \to أ^{+}}{نهـــا} ق(س) = ق(أ)$

٢) ق يكون متصلا عند س = ب من اليسار ، اذا كانت $\underset{س \to ب^{-}}{نهـــا} ق(س) = ق(ب)$

٣) ق يكون متصلا على الفتره (أ ، ب) اذا كان متصلا عند كل س ∋ (أ ، ب)

٤) ق يكون متصلا على الفتره [أ ، ب] اذا كان متصلا على الفتره (أ ، ب) ومتصلا عند س = أ من اليمين ، ومتصلا عند س = ب من اليسار

ملاحظه:

١) يكون الاقتران ق متصلا على الفتره [أ ، ب) ، اذا كان متصلا عند كل س ∋ (أ ، ب) ومتصلا عند س = أ من اليمين

٢) يكون الاقتران ق متصلا على الفتره (أ ، ب] ، اذا كان متصلا عند كل من س ∋ (أ ، ب) ومتصلا عند س = ب من اليسار

٣) يكون الاقتران ق متصلا على ح اذا كان متصلا عند كل س ∋ ح

** كثير الحدود متصـــــــــــل على ح

** الاقتران النسبي يكون متصل على اي فتره يكون معرف عليها الاقتران

** اذا كان الاقتران متصلا على ح فانه يكون متصلا على اي فتره جزئيه منها

مثال :

اذا كان ق(س)= $\begin{cases} ٢ س + ٢ & ، -٢ \leq س < ١ \\ س + ٤ & ، ١ \leq س \leq ٥ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ق على الفتره [-٢، ٥]

مثال : اذا كان ق(س) =

$$ق(س) = \begin{cases} س^٢ & ، ٣ \leq س < ٥ \\ س + ٢٠ & ، ٥ \leq س < ٧ \\ ٩ & ، س = ٧ \end{cases}$$

ابحث في اتصال الاقتران ق على الفتره ق [٣ ، ٧] ، والفتره [٣ ، ٧)

مثال : اذا كان ق(س) =

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{س^٣ - ٨}{س - ٢} & ، س < ٢ \\ ٣ س + ٦ & ، س \geq ٢ \end{cases}$$

ابحث في اتصال الاقتران على ح

مثال : اذا كان ق(س) = | ٢س – ٦ | ابحث في اتصال الاقتران على الفتره [٠ ، ٤]

مثال : اذا كان ل(س) =

$$\begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٢} - ٢٥}{\text{س} - ٥} & \text{، س} \neq ٥ \\ \text{س} + ٥ & \text{، س} = ٥ \end{cases}$$

ابحث في اتصال الاقتران ل على مجاله

مثال :اذا كان ق(س) =

$$\begin{cases} [\text{س}] & \text{، } ١ < \text{س} < ٢ \\ |\text{س} - ٣| & \text{، } ٢ \leq \text{س} \leq ٥ \end{cases}$$

ابحث في اتصال الاقتران على الفتره (١ ، ٥]

مثال : ابحث في اتصال الاقتران ع(س) = $\sqrt{\text{س} + ١}\ \sqrt{[\text{س}] + \text{س}}$ على الفتره (١، ٢]

مثال : اذا كان ق(س)= $\begin{cases} س^{3} &، س < ١ \\ ٢س\sqrt{س} - ١ &، س \geq ١ \end{cases}$

ابحث في اتصال الاقتران على ح

مثال : اذا كان ق(س)= $\begin{cases} س + ٢ &، |س| \leq ٢ \\ س^{٢} &، |س| > ٢ \end{cases}$

ابحث في اتصال ق(س) على مجاله

مثال : اذا كان ق(س) = $\begin{cases} |س + ٢| &، -٤ \leq س < ١ \\ [\frac{١}{٢}س + ٤] &، ١ \leq س \leq ٦ \end{cases}$

ابحث في اتصاله على الفتره [- ٤ ، ٦]

مثال : اذا كان ل(س)= $\frac{س^{٢} - ١}{س + ٢}$ هـ (س) = [س] ، ابحث في اتصال الاقتران ل × هـ على الفتره [٠، ٢]

الثوابت :

مثال : اذا كان ق(س) = $\begin{cases} \frac{س^{٣} - أ^{٣}}{س - أ} & ، س < أ \\ ٢ب + ١ & ، س = أ \\ \sqrt{س} + ٢ب & ، س > أ \end{cases}$

وكان ق(س) متصل على ح

مثال : اذا كان هـ (س) = $\begin{cases} \frac{س^{٢} - س - ٣٠}{أس - ٣٦} & ، س > ٦ \\ ١ & ، س = ٦ \\ ب س & ، س < ٦ \end{cases}$

متصلا على ح ، فجد قيمه كل من الثابتين أ ، ب

مثال : اذا كان ع(س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{جا}أس}{٥س} &، -\pi \le س < ٠ \\ ٢ &، س = ٠ \\ ب (٢ + س) &، ٠ < س \le \pi \end{cases}$

متصلا على الفتره $[-\pi ، \pi]$ ، فجد قيمه كل من الثابتين أ ، ب

مثال : اذا كان الاقتران ع (س) = $\begin{cases} \dfrac{س^٢ + ٢(هـ - ١)س - ٤هـ}{س - ٢} &، س \ne ٢ \\ ٥ + س &، س = ٢ \end{cases}$

متصلا على ح ، فجد قيمه الثابت هـ

مثال : اذا كان ق(س) = $\dfrac{س^٢ + ٥س + ٢}{أس^٢ + س + ٣}$ ، فما قيم أ التي تجعل الاقتران ق متصلا على مجموعه الاعداد الحقيقيه

مثال : اذا كان ق(س) = $\dfrac{س^٢ - ٣س - ٥}{س^٢ - أس + ٣}$ ، فما قيم الثابت أ التي تجعل الاقتران ق متصلا على مجموعه الاعداد الحقيقيه

تمارين :

١) اذا كان ق(س) =

$$\begin{cases} [\text{س}] + \text{س} & ، -١ \le \text{س} < ٠ \\ \frac{٣\text{س}^٢}{٥} + \sqrt{\text{س}} & ، ٠ \le \text{س} \le ٢ \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق على الفتره [-١ ، ٢]

٢) اذا كان ق(س) =

$$\begin{cases} ٢\,\text{س} & ، \text{س} < ٢ \\ [٠,٥\,\text{س} + ٢] & ، ٢ \le \text{س} < ٤ \\ \frac{٥\text{س}}{\text{س}^٢ - ٣٦} & ، \text{س} \ge ٤ \end{cases}$$

ابحث في اتصال الاقتران ق على جميـــع الاعداد الحقيقيه

٣) اذا كان ق(س)=

$$\begin{cases} \sqrt{\text{س} + ١} & ، ٠ \le \text{س} < ٣ \\ [٠,٢٥\,\text{س} + ٢] & ، ٣ \le \text{س} < ٦ \\ |\,٩ - \text{س}\,| & ، \text{س} = ٦ \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق على الفتره [٠ ، ٦]

٤) اذا كان ل(س) = | ٢ س – ١٠ | ابحث في اتصال الاقتران على الفتره [-١٠ ، ٨]