ثالثا :- حساب النهاية بالتعويض .

طرق حساب النهاية للاقتران **كثير الحدود**	طرق حساب النهاية للاقتران **الكسري نسبي**

أولا : **طرق حساب النهاية للاقتران كثير الحدود**

هي عبارة عن **التعويض المباشر** وناتج التعويض هو **قيمة النهاية**

بمعنى إذا كانت $ق$ كثير حدود حيث أ $\in$ ح

فان $\lim_{س \to أ} ق(س) = ق(أ)$

مثال لتوضيح :-

إذا كانت ق(س)= $س^2$ + ٥س فان $\lim_{س \to 2} ق(س)$

الحل :-

$\lim_{س \to 2} س^2 + 5س = (2)^2 + 5 \times 2 = 14$

كل س في النهاية يتم تعويضها العدد ٢

أمثلة :- جد كل من النهايات الآتية .

١) $\lim_{س \to 2} 3س = 3 \times 2 = 6$

٢) $\lim_{س \to 2} (3+س)^2 = (3+2)^2 = (5)^2 = 25$

٣) $\lim_{س \to 2} \sqrt{س+7} = \sqrt{2+7} = \sqrt{9} = \pm 3$

٤) $\lim_{س \to أ} 3أ = 3أ$

٥) $\lim_{س \to -2} (\frac{3}{4})^{س} = (\frac{3}{4})^{-2} = (\frac{4}{3})^{2} = \frac{16}{9}$

ثانيا : طرق حساب نهاية للاقتران الكسري (نسبي)

هي عبارة عن التعويض المباشر

١) عدد حقيقي (**نهاية موجودة**) ← **تكون قيمة النهاية**

٢) كمية غير معرفة (**نهاية غير موجودة**) ← $\frac{0}{ع}$ **و جذر سالب**

٣) البحث عن النهاية ← $\frac{0}{0}$ أو $\frac{ع}{0} \pm \frac{ع}{0}$

أمثلة ذلك :- جد كل من النهايات الآتية

١) $\lim_{س \to 1} \frac{2س-3}{س-2} = \frac{2\times 1-3}{1-2} = \frac{-1}{-1} = 1$

٢) $\lim_{س \to 0} \frac{س^3-3س-5}{س+5} = \frac{(0)^3-3(0)-5}{0+5} = \frac{-5}{5} = -1$

٣) $\lim_{س \to 5} \frac{س^2-5س}{2س+1} = \frac{(5)^2-5\times 5}{2\times 5+1} = \frac{0}{11} = 0$

٤) $\lim_{س \to 1} \frac{2س-3}{س-1} = \frac{2\times 1-3}{1-1} = \frac{2-3}{0} =$ غ.م

٥) $\lim_{س \to 4} \frac{س^3-3س-4}{س-4} = \frac{(4)^3-3(4)-4}{4-4} = \frac{32-16}{0} =$ غ.م

٦) $\lim_{س \to 2} \sqrt{س-7} = \sqrt{2-7} = \sqrt{-5} =$ غ.م

ملخص

$\lim_{س \to أ} ق(س) =$

تعويض مباشر	عندما ق(أ) ≠ صفر
غير موجودة	عندما ق(أ) = أو
البحث عن النهاية	عندما ق(أ) = أو

بلش الجد

ناتج التعويض في النهاية يساوي $\frac{٠}{٠}$ أو $\frac{ع}{٠} \pm \frac{ع}{٠}$

مثال ذلك :- جد ناتج قيمة النهاية

$$\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢}$$

الحل :- **تعويض مباشر**

$$\frac{(٢)^{٢} - ٤}{٢ - ٢} = \frac{٤ - ٤}{٢ - ٢} = \frac{٠}{٠}$$

ما دام **جواب النهاية** $\frac{٠}{٠}$ أو $\frac{ع}{٠} \pm \frac{ع}{٠}$

يتم البحث عن **مشكلة النهاية ويحل ب ٦ طرق** :

- التحليل
- القسمة التركيبية
- توحيد المقام
- الضرب بالمرافق (التربيعي و التكعيبي)
- الاستبدال
- التجزئة

سؤال سوف يخطر في بالك :-

كيف اعرف ما هو العنصر أو المسبب **لمشكلة** $\frac{٠}{٠}$ ؟

لتوضيح نرجع للمثال السابق

$\lim_{\boxed{س \to ٢}} \frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢}$ **وكان ناتج التعويض** $\frac{٠}{٠}$

هي تكون مسبب المشكلة

$س \to ٢ \Leftarrow س = ٢$

$\Leftarrow$ إما $س - ٢ =$ صفر

أو $٢ - س =$ صفر

$$\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢}$$

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(س + ٢)}{س - ٢}$$

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{(س + ٢)\cancel{(س - ٢)}}{\cancel{س - ٢}}$$

$$= \lim_{س \to ٢} (س + ٢) = ٢ + ٢ = ٤$$

في هذه الأمثلة تحل بالتحليل :

١) الفرق بين مربعين ٢) الفرق بين مكعبين

٣) مجموع مكعبين ٤) إخراج عامل مشترك

٥) مفكوك القوس ٦) تحليل ثلاثي الحدود

شرح بسيط : التحليل الى العوامل

الفرق بين مربعين $س^{٢} - أ^{٢}$

$س^{٢} - أ^{٢} = (س - أ) (س + أ)$

أي بمعنى $س^{٢} - أ^{٢} =$ (الجذر − الجذر) (الجذر + الجذر)

أمثلة :-

✓ $س^{٢} - ١٦ = (س - ٤)(س + ٤)$

✓ $١٦ - س^{٢} = (٤ - س)(٤ + س)$

✓ $٤٩ م^{٢} - ل^{٢} = (٧م - ل)(٧م + ل)$

✓ $(س + ١)^{٢} - ١ = ((س + ١) - ١)((س + ١) + ١)$

✓ $س - ٤ = (\sqrt{س} - ٢)(\sqrt{س} + ٢)$

لتذكير :- $س = \sqrt{س} \times \sqrt{س}$

تدريب :-

❖ $٢٥ - س^{٢} =$

❖ $١ - س^{٢} =$

❖ $ن^{٢} - ٦٤س^{٢} =$

مجموع مربعين $س^{٢} + أ^{٢}$ **لا تحلل**

مثال :-

✓ $س^{٢} + ٤ =$ لا يوجد لها تحليل " لان مميزها سالب "

الفرق بين مكعبين $س^{٣} - أ^{٣}$

$س^{٣} - أ^{٣} = (س - أ) (س^{٢} + أس + أ^{٢})$

أي بمعنى (قوس له نفس الإشارة) (قوس كبير الأولى العكس و الثانية دائما موجبة)

العبارة التربيعية التي تنتج من تحليل تكون **دائما** أولية أي لا تحلل (مميزها سالب)

امثلة :-

✓ $س^{٣} - ٨ = (س - ٢) (س^{٢} + ٢س + ٤)$

✓ $٦٤ - ٢١٦ص^{٣} = (٤ - ٦ص)(١٦ + ٢٤ص + ٣٦ص^{٢})$

✓ $س^{٣} - ٢٧ =$ -

✓ $س - ١ = (\sqrt[٣]{س} - ١)((\sqrt[٣]{س})^{٢} + \sqrt[٣]{س} + ١)$ ✓ $(\sqrt[٣]{س})^{٢} = \sqrt[٣]{س^{٢}}$

تدريب :-

❖ $٦٤ س^{٣} - ١٢٥ =$

❖ $٢٧ - س^{٣} =$

مجموع مكعبين س^{٣} + أ^{٣}

س^{٣} + أ^{٣} = (س + أ) (س^{٢} – أس + أ^{٢})

(الحد الاول + الحد الثاني) (مربع الحد الاول – الحد الاول×الحد الثاني + الحد الثاني)

أي بمعنى (قوس صغير له نفس الإشارة) (قوس كبير الاولى العكس والثانية دائما موجبة)

أمثلة :-

٢٧س^{٣} + ٨ص^{٣} =(٣س + ٢ص)(٩س^{٢} – ٦س ص + ٤ ص٢)

٦٤+ ص^{٣} = (٤ + ص)(١٦ – ٤ص + ص^{٢})

تدريب :-

ص^{٣} + ل^{٣} =

١٢٥ + ن^{٣} =

اخراج عامل مشترك

العامل المشترك قد يكون **رقم او متغير (س ، ص) او كلاهما**

أمثلة :-

✓ ٣س^{٢} + ٩ = ٣ (س^{٢} + ٣)

✓ س^{٢} – ٤س = س(س – ٤)

✓ ٣س^{٣} – ٣س=٣س (س- ١)

✓ س^{٣} + س^{٢} – ٢س = س(س^{٢} + س – ٢) = س(س + ٢)(س – ١)

✓ ٨س^{٥} + ٢٧س^{٢} = س^{٢} (٨س^{٣} + ٢٧) = س^{٢} (٢س + ٣)(٤س^{٢} – ٦س + ٩)

✓ $\frac{١}{٣}$س^{٢} – ٣ = ٣(س^{٢} – ٩) = ٣((س – ٣)(س + ٣))

✓ $\frac{١}{٦}$س – $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٦}$(س – ٣)

✓ (س – ٢)^{٣} ٤(س – ٢) = (س – ٢)((س – ٢)^{٢} – ٤) = (س – ٢)((س – ٢) – ٢)((س – ٢) + ٢))

✓ س^{٣} – ٣س^{٢} – ٩س – ٢٧ =

تدريب :-

❖ ١٢٥ع + ٣ع^{٤} + ٢ع^{٤} =

❖ ٢٧س^{٣} + ٩س^{٢} =

تحليل ثلاثي الحدود

الشكل العام ← أس^{٢} ± ب س ± جـ = صفر

هناك ثلاثة حالات

الحالة الاولى :- أس^{٢} + ب س + جـ = صفر

✓ س^{٢} + ٥س + ٦ = صفر

طريقة الحل :-

نفتح قوسين ونضع (س) (س)

نضع اشارتي الموجب (س +) (س +)

ثم نأخذ الثابت س^{٢} + ٥س + ٦ = صفر

عددين اذا ضربتهم في بعضهم يعطوني الحد الثابت ٦

١ × ٦ = ٦ أو ٢ × ٣ = ٦

واذا جمعتهم يعطوني الحد الاوسط ٥ ٢ + ٣ = ٥

(س + ٣)(س + ٢) = ٠

الحالة الثانية :- أس^{٢} – ب س + جـ = صفر

مثال :-

✓ س^{٢} - ٧ س + ١٠ = صفر

نفتح قوسين ونضع (س) (س)

نضع اشارتي السالب (س -) (س -)

ثم نأخذ الثابت س^{٢} - ٧ س + ١٠ = صفر

عددين اذا ضربتهم في بعضهم يعطوني الحد الثابت ١٠

١ × ١٠ = ١٠ أو ٢ × ٥ = ١٠

واذا جمعتهم يعطوني الحد الاوسط ٧ ٢ + ٥ = ٧

(س - ٥)(س – ٢) = صفر

الحالة الثالثة :- أس^{٢} ± ب س - جـ = صفر

مثال :-

✓ س^{٢} - ٣س - ١٠ = صفر

نفتح قوسين ونضع (س) (س)

نضع اشارتي موجب وسالب (س +) (س -)

ثم نأخذ الثابت س^{٢} - ٣ س - ١٠ = صفر

عددين اذا ضربتهم في بعضهم يعطوني الحد الثابت ١٠

١ × ١٠ = ١٠ أو ٢ × ٥ = ١٠

واذا طرحتهم يعطوني الحد الاوسط ٣ ٥ – ٢ = ٣

وحسب اشارة الحد الاوسط توضع للرقم الاكبر وهنا بما ان اشارة الحد الاوسط سالبة توضع لرقم ٥

(س + ٢)(س – ٥) = صفر

تدريب :-

❖ س^{٢} + ٩س +١٤ = (س + ٢) (س + ٧)

❖ س^{٢} -٢س +١ = (س – ١) (س – ١)

❖ س^{٢} + ٣س – ١٠ = (س + ٥)(س – ٣)

لتسهيل الحل : اذا كان معامل $س^2$ سالبا فانه يؤخذ عاملا مشتركا من بداية الحل

أمثلة : حلل المعادلات التالية :

1) $6 + 7س - س^2 = 0$

2) $4 + 5س - س^2 = 0$

اذا كانت $س^2$ معاملها ليس (1) كيف يتم الحل ؟

أمثلة :

1) $6 + 7س - 3س^2 = 0$

2) $4 + 5س - 2س^2 = 0$

مقادير تحلل بنفس طريقة التربيعي (شبيه التربيعي)

أ) **المقدار ثلاثي الحدود** اذا ربعت حده الأوسط بدون المعامل ونتج الحد الأول هذا يحلل بنفس طريقة تحليل التربيعي .

أمثلة : حلل المقادير الاتية

1) $س^4 - 13س^2 + 36 = (س^2 - 9)(س^2 - 4)$

$= (س - 3)(س + 3)(س - 2)(س + 2)$

2) $س - 5\sqrt{س} + 6 = (\sqrt{س} - 2)(\sqrt{س} - 3)$

3) $3س + 10\sqrt{س} - 8 = (3\sqrt{س} - 2)(\sqrt{س} + 4)$

4) $18 + 5\sqrt{س} - 2س = -(2س - 5\sqrt{س} - 18)$

$= (2\sqrt{س} - 9)(\sqrt{س} + 2)$

ب) الاقتران الاسي

1) $9^س = (3^2)^س = 3^{2س} = 3^س \times 3^س$

2) في **حالة الضرب** اذا كان الأساس موحدا فان الأساس يثبت والاسس تجمع .

3) في **حالة القسمة** اذا كان الأساس موحدا فان الأساس يثبت والاسس تطرح .

4) $\sqrt{س^5} = (\sqrt{س})^5$

لتسهيل الحل :

*) المقادير التي تحتوي $(25)^س$ أو $\sqrt{س^4} = (\sqrt{س})^4$ يمكن ان نستخدم الفرض

$25^س = (5^س)^2 \Leftarrow ص = 5^س$

$\sqrt{س^2} = (\sqrt{س})^2 \Leftarrow ص = \sqrt{س}$

**) اذا استطعت ان تحلل بدون فرض فلا مانع من ذلك .

أمثلة :

1) $25^س - 36 = (5^س)^2 - 36$ ✓ $\boxed{ص = 5^س}$

$= ص^2 - 36$

$= (ص - 6)(ص + 6)$

$= (5^س - 6)(5^س + 6)$

2) $8 - 27^س = 8 - (3^س)^3$ ✓ $\boxed{ص = 3^س}$

$= 8 - ص^3$

$= (2 - ص)(4 + 2ص + ص^2)$

$= (2 - 3^س)(4 + 2 \times 3^س + 3^{2س})$

3) $(125)^س - 25^س = (5^س)^3 - (5^س)^2$ ✓ $\boxed{ص = 5^س}$

$= ص^3 - ص^2$

$= ص^2(ص - 1)$

$= 5^{2س}(5^س - 1)$

4) $\sqrt{س^2} - 4\sqrt{س} - 21 = (\sqrt{س})^2 - 4(\sqrt{س}) - 21$ ✓ $\boxed{ص = \sqrt{س}}$

$= ص^2 - 4ص - 21$

$= (ص - 7)(ص + 3)$

$= (\sqrt{س} - 7)(\sqrt{س} + 3)$

6) $4^س - 17 \times 2^س + 16 =$ **تدريب**

مفكوك القوس

الحالة الاولى :- القوس التربيعي (المربع الكامل)

(س ± أ)^{٢} = س^{٢} ± ٢ أس + أ^{٢}

أمثلة :-

- (س + ٥)^{٢} = س^{٢} + ١٠س + ٢٥
- (س – ٥)^{٢} = س^{٢} – ١٠س + ٢٥
- (٤ + ٥ص)^{٢} =
- (-٣ + ٤أ)^{٢} =
- ٥ (٢س -١)^{٢} =

الحالة الثانية :- القوس التكعيبي

(أ ± ب)^{٣} = س^{٣} ± ٣أ^{٢}س + ٣أس^{٢} ± ب^{٣}

- (٣س + ١)^{٣} = (٣س)^{٣} + ٣ (٣س)^{٢}(١) + ٣(٣س)(١)^{٢} +(١)
  = ٢٧س^{٣} + ٢٧ س^{٢} + ٩س + ١
- (٢ – ٣س)^{٣} = (٢)^{٣} – ٣(٢)^{٢}(٣س) + ٣(٢)(٣س)^{٢} – (٣س)^{٣}
  = ٨ – ٣٦س + ٥٤س^{٢} – ٢٧س^{٣}
- (٤ + ٢س)^{٣} =
- (٢س – ٤)^{٣} =

الحالة الثالثة :-

س(س ± أ) = س^{٢} ± أس

أمثلة :-

- ٢(س + ٣) = ٢س + ٦
- ٧(س – ٤) = ٧س – ٢٨
- س(س + ٥) = س^{٢} + ٥س
- س(س – ٨) = س^{٢} - ٨س
- ٧ (س – ٧) =
- س (٩ – س) =

الحالة الرابعة :-

(س + أ) (س + ب) = س(س+ ب) + أ (س + ب)

= س^{٢} + ب س + أس + أب

(س – أ) (س + ب) = س(س + ب) – أ (س + ب)

= س^{٢} + ب س – أس – أب

أمثلة :-

- (س + ٢)(س + ٤) = س(س + ٤) + ٢ (س + ٤)
  = س^{٢} + ٤س + ٢س + ٨ = س^{٢} + ٦س + ٨
- (س – ٥)(س + ٣) = س(س + ٣) – ٥ (س + ٣)
  = س^{٢} + ٣ س – ٥س – ١٥ = س^{٢} – ٢س – ١٥

الحالة الرابعة :-

(أ – ب) (أ + ب) = (أ)^{٢} – (ب)^{٢}

(أ – ب) (أ – ب) = (أ – ب)^{٢}

أمثلة :-

- (س – ٣) (س + ٣) = (س)^{٢} – (٣)^{٢} = س^{٢} – ٩
- (س – ٣) (س – ٣) = (س – ٣)^{٢} = س^{٢} – ٦س + ٩
- (٣ – ٥س) (٣ + ٥س) = ٣^{٢} – (٥س)^{٢} = ٩ – ٢٥س^{٢}
- (٣ – ٥س) (٣ – ٥س) = (٣ – ٥س)^{٢} = ٩ – ٣٠س + ٢٥س^{٢}
- (جاس–جتاس) (جاس+جتاس) = جا^{٢}س–جتا^{٢}س
- (جاس–جتاس) (جاس–جتاس) = (جاس–جتاس)^{٢} = جا^{٢}س + ٢جاس جتاس+جتا^{٢}س

اضف الى معلوماتك :

$(\text{أ}-\text{ب})^{\text{ن}}\,(\text{أ}+\text{ب})^{\text{ن}} = (\text{أ}^2-\text{ب}^2)^{\text{ن}}$

$(\text{أ}\pm\text{ب})^{\text{ن}}\,(\text{أ}\pm\text{ب})^{\text{ن}} = (\text{أ}\pm\text{ب})^{\text{ن}+\text{ن}}$

أمثلة :

✓ $(\text{س}-3)^4\,(\text{س}+3)^4 = \left((\text{س})^2-(3)^2\right)^4 = (\text{س}^2-9)^4$

✓ $(1-\text{جتاس})^2\,(1+\text{جتاس})^2 = \left((1)^2-(\text{جتاس})^2\right)^2 = (1-\text{جتا}^2\text{س})^2$

✓ $\sqrt{1+4\text{أ}}\,\sqrt{1-4\text{أ}} = (1+4\text{أ})^{\frac{1}{2}}\,(1-4\text{أ})^{\frac{1}{2}}$

$= \left((1)^2-(4\text{أ})^2\right)^{\frac{1}{2}} = (1-16\text{أ}^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1-16\text{أ}^2}$

✓ $\sqrt[3]{\text{س}+2}\,\sqrt[3]{\text{س}-2} = (\text{س}+2)^{\frac{1}{3}}\,(\text{س}-2)^{\frac{1}{3}}$

$= \left((\text{س})^2-(2)^2\right)^{\frac{1}{3}} = (\text{س}^2-4)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\text{س}^2-4}$

✓ $(\text{س}+1)\,(\text{س}+1) = (\text{س}+1)^{1+1} = (\text{س}+1)^2$

✓ $(2-\text{س})^{-2}\,(2-\text{س})^4 = (2-\text{س})^{-2+4} = (2-\text{س})^2$

✓ $\left(\frac{1}{4}+9\text{س}\right)^8\left(\frac{1}{4}+9\text{س}\right)^{-6} = \left(\frac{1}{4}+9\text{س}\right)^{8+-6} = \left(\frac{1}{4}+9\text{س}\right)^2$

✓ $(\text{س}-19)^5\,(\text{س}-19)^4 = (\text{س}-19)^{5+4} = (\text{س}-19)^9$

التحليل

خطوات الحل :

١) التعويض المباشر $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\text{ع}}{0} \pm \frac{\text{ع}}{0}$

٢) التحليل إلى العوامل (**بهدف الوصول إلى الاختصار**)

٣) **الاختصار** بين البسط والمقام (**تنتهي المشكلة**)

٤) التعويض المباشر وتكون **النهاية**

موجودة   **غير موجودة**

مثال: جد قيمة النهايات التالية

١) $\lim\limits_{\text{س}\to 2} \frac{\text{س}^2-4}{\text{س}-2}$

الحل : التعويض المباشر

$\lim\limits_{\text{س}\to 2} \frac{\text{س}^2-4}{\text{س}-2} = \frac{(2)^2-4}{2-2} = \frac{0}{0}$

مسبب المشكلة (الذي سوف نقوم بحذفه)

س ← ٢   س = ٢   ⇐   س – ٢ = ٠

أو   ٢ – س = ٠

$= \lim\limits_{\text{س}\to 2} \frac{\text{س}^2-4}{\text{س}-2}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 2} \frac{\cancel{(\text{س}-2)}\,(\text{س}+2)}{\cancel{\text{س}-2}}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 2} \text{س}+2 = 2+2 = 4$

٢) $\lim\limits_{\text{س}\to 1} \frac{\text{س}^2-1}{\text{س}^2+2\text{س}-3}$

الحل : التعويض المباشر

$\lim\limits_{\text{س}\to 1} \frac{\text{س}^2-1}{\text{س}^2+2\text{س}-3} = \frac{(1)^2-1}{(1)^2+2(1)-3} = \frac{0}{0}$

مسبب المشكلة (الذي سوف نقوم بحذفه)

س ← ١   س = ١   ⇐   س – ١ = ٠

١ – س = ٠

$= \lim\limits_{\text{س}\to 1} \frac{\cancel{(\text{س}-1)}\,(\text{س}+1)}{(\text{س}+3)\,\cancel{(\text{س}-1)}} = \lim\limits_{\text{س}\to 1} \frac{\text{س}+1}{\text{س}+3} = \frac{1+1}{1+3} = \frac{2}{4}$

٣) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{١ - س^{٣}}{س^{٢} - س}$

الحل : التعويض المباشر

$\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{١ - س^{٣}}{س^{٢} - س} = \frac{١ - (١)^{٣}}{(١)^{٢} - ١} = \frac{٠}{٠}$

مسبب المشكلة (الذي سوف نقوم بحذفه)

س ← ١   س = ١ ⇐ س − ١ = ٠

١ − س = ٠

$= \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{\cancel{(١ - س)}^{-١} (١ + س + س^{٢})}{س \cancel{(س - ١)}}$

$= \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{-١(١ + س + س^{٢})}{س} = \frac{-١(١ + ١ + ١^{٢})}{١} = -٣$

٤) $\underset{س \to -٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٤} + ٨س}{٢س + ٤}$

الحل :

٥) $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{س^{٣} - ٢٧}{س^{٢} - ٤س + ٣}$

الحل : التعويض المباشر

$\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{س^{٣} - ٢٧}{س^{٢} - ٤س + ٣} = \frac{(٣)^{٣} - ٢٧}{(٣)^{٢} - ٤(٣) + ٣} = \frac{٠}{٠}$

مسبب المشكلة (الذي سوف نقوم بحذفه)

س ← ٣   س = ٣ ⇐ س − ٣ = ٠

٣ − س = ٠

$= \underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{س^{٣} - ٢٧}{س^{٢} - ٤س + ٣}$

$= \underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{\cancel{(س - ٣)} (س^{٢} + ٣س + ٩)}{\cancel{(س - ٣)} (س - ١)}$

$= \underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{(س^{٢} + ٣س + ٩)}{(س - ١)} = \frac{(٣)^{٢} + ٣(٣) + ٩}{٣ - ١} = \frac{٢٧}{٢}$

٦) $\underset{س \to -٤}{\text{نهـا}} \frac{\frac{١}{٢}س + ٢}{س^{٣} + ٦٤}$

الحل :التعويض المباشر

$= \underset{س \to -٤}{\text{نهـا}} \frac{\frac{١}{٢}س + ٢}{س^{٣} + ٦٤} = \frac{\frac{١}{٢}(-٤) + ٢}{(-٤)^{٣} + ٦٤} = \frac{٠}{٠}$

مسبب المشكلة (الذي سوف نقوم بحذفه)

س ← −٤   س = −٤ ⇐ س + ٤ = ٠

− س − ٤ = ٠

$= \underset{س \to -٤}{\text{نهـا}} \frac{\frac{١}{٢}س + ٢}{س^{٣} + ٦٤}$

$= \underset{س \to -٤}{\text{نهـا}} \frac{\frac{١}{٢} \cancel{(س + ٤)}}{\cancel{(س + ٤)} (س^{٢} - ٤س + ٦)}$

$= \underset{س \to -٤}{\text{نهـا}} \frac{\frac{١}{٢}}{(س^{٢} - ٤س + ٦)} = \frac{\frac{١}{٢}}{((-٤)^{٢} - ٤(-٤) + ٦)} = \frac{١}{٩٦}$

٧) $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{٢س^{٢} - ٥س - ٣}{٢س^{٢} - ١٨}$

الحل :

٨) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{(س + ١)^{٣} - ٨}{س^{٢} + ٣س - ٤}$

الحل : التعويض المباشر

$\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{(س + ١)^{٣} - ٨}{س^{٢} + ٣س - ٤} = \frac{(١ + ١)^{٣} - ٨}{(١)^{٢} + ٣(١) - ٤} = \frac{٠}{٠}$

مسبب المشكلة (الذي سوف نقوم بحذفه)

س ← ١   س = ١ ⇐ س − ١ = ٠

١ − س = ٠

$= \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{(س + ١)^{٣} - ٨}{س^{٢} + ٣س - ٤}$

$= \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{((س + ١) - ٢)((س + ١)^{٢} + ٢(س + ١) + ٤)}{(س - ١)(س + ٤)}$

$= \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{\cancel{(س - ١)} ((س + ١)^{٢} + ٢(س + ١) + ٤)}{\cancel{(س - ١)} (س + ٤)}$

$= \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{(س + ١)^{٢} + ٢(س + ١) + ٤}{(س + ٤)} = \frac{(١ + ١)^{٢} + ٢(١ + ١) + ٤}{١ + ٤} = \frac{١٢}{٥}$

٩) $\underset{\text{س}\to \frac{٩}{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{(٢\text{س}-٥)^{٢}-١٦}{٢\text{س}-٩}$

الحل :

١٠) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س}^{٢}-٣)^{٢}-١}{(\text{س}^{٣}-٧)^{٢}-١}$

الحل : التعويض المباشر

$$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س}^{٢}-٣)^{٢}-١}{(\text{س}^{٣}-٧)^{٢}-١} = \dfrac{((٢)^{٢}-٣)^{٢}-١}{((٢)^{٣}-٧)^{٢}-١} = \dfrac{٠}{٠}$$

مسبب المشكلة (الذي سوف نقوم بحذفه)

س ← ٢   س = ٢ $\Leftarrow$ س − ٢ = ٠

٢ − س = ٠

$$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س}^{٢}-٣)^{٢}-١}{(\text{س}^{٣}-٧)^{٢}-١}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{((\text{س}^{٢}-٣)-١)((\text{س}^{٢}-٣)+١)}{((\text{س}^{٣}-٧)-١)((\text{س}^{٣}-٧)+١)}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س}^{٢}-٤)(\text{س}^{٢}-٢)}{((\text{س}^{٣}-٨)(\text{س}^{٣}-٦)}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س}+٢)\cancel{(\text{س}-٢)}(\text{س}^{٢}-٢)}{\cancel{(\text{س}-٢)}(\text{س}^{٢}+٢\text{س}+٤)(\text{س}^{٣}-٦)}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س}+٢)(\text{س}^{٢}-٢)}{(\text{س}^{٢}+٢\text{س}+٤)(\text{س}^{٣}-٦)} = \dfrac{(٢+٢)((٢)^{٢}-٢)}{((٢)^{٢}+٢(٢)+٤)((٢)^{٣}-٦)} = \dfrac{١}{٣}$$

١١) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{(٢\text{س}+١)^{٣}-١٢٥}{(٢\text{س}^{٢}-٤)^{٢}-١٦}$

الرونق في الرياضيات
إعداد : أ. سائد الوردات
0772044048 - 0787556274

شرح بسيط : القسمة التركيبية

تعريف :

تحليل كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة فأكثر الى عواملها الاولية .

متى تستخدم ؟

تستخدم فقط عندما يكون المقسوم عليه على شكل س – أ

مثال :

ق(س) = $س^{٣}$ - ٢$س^{٢}$ - ٥س + ٦ مقسوم

ع(س) = س – ١ مقسوم عليه

طريقة الحل :

① نساوي المقسوم عليه بالصفر

س – ١ = صفر   س = ١ جذر المقسوم عليه

لتأكد ان س = ١ وهو جذر المقسوم عليه يجب ان يظهر ناتج

ق(س) = صفر

ق(س) = $س^{٣}$ - ٢$س^{٢}$ - ٥س + ٦

ق(١)= $(١)^{٣}$ – ٢ $(١)^{٢}$ – ٥(١) + ٦ = صفر

② نأخذ معاملات المقسوم

	$س^{٣}$	$س^{٢}$	س	ثابت
	١	-٢	-٥	٦
١		١	-١	-٦
	١	-١	-٦	صفر (اجباري)

ق(س)= $س^{٢}$ – س – ٦

ملاحظه مهمه :

نضع صفرا بدلا من معامل الحد الغير موجود

القسمة التركيبية

متى تستخدم هذه الطريقة ؟

عند ما يكون كثير حدود من الدرجة الثالثة فأكثر

القسمة التركيبية لا تحلل كفرق بين مربعين أو مجموع مكعبين

خطوات الحل :

١) التعويض المباشر $\frac{٠}{٠}$ أو $\frac{ع}{٠} \pm \frac{ع}{٠}$

٢) ابحث عن **مسبب المشكلة النهاية** وتكون هي جزء من الحل .

٣) استخدم القسمة التركيبية بسبب احتواء النهاية على **كثير حدود من الدرجة الثالثة** .

٤) **اختصار** بين البسط والمقام (**تنتهي المشكلة**)

٥) التعويض المباشر وتكون **النهاية** اما

موجودة   **غير موجودة**

أمثلة : جد قيمة النهايات التالية

١) $\underset{س\to١}{\text{نها}} \frac{س^{٣}+٥س^{٢}+٣س-٩}{س-١}$

الحل : التعويض المباشر

$\underset{س\to١}{\text{نها}} \frac{س^{٣}+٥س^{٢}+٣س-٩}{س-١} = \frac{(١)^{٣}+٥(١)^{٢}+٣(١)-٩}{١-١} = \frac{٠}{٠}$

مسبب المشكلة (**الذي سوف نقوم بحذفه**)

س →١ ⟸ س = ١ ⟸ س – ١ = ٠

١ – س = ٠

$= \underset{س\to١}{\text{نها}} \frac{س^{٣}+٥س^{٢}+٣س-٩}{س-١}$

س =١ جذر البسط ⟸ عامل البسط

القسمة التركيبية

	$س^{٣}$	$س^{٢}$	س	ثابت
	١	٥	٣	٩-
$\boxed{١}$		١	٦	٩
	١	٦	٩	صفر

الناتج $س^{٢}+٦س+٩$

$= \underset{س\to١}{\text{نها}} \frac{\cancel{(س-١)}(س^{٢}+٦س+٩)}{\cancel{(س-١)}}$

$= \underset{س\to١}{\text{نها}} س^{٢}+٦س+٩ = (١)^{٢}+٦(١)+٩ = ١٦$ #

$$\text{٢)}\quad \lim_{س\to ٢} \frac{(٢س+١)^{٣} - ١٢٥}{٢ + س^{٣}(س-٢) - س}$$

الحل : التعويض المباشر

$$\lim_{س\to ٢} \frac{(٢س+١)^{٣} - ١٢٥}{٢ + س^{٣}(س-٢) - س} = \frac{(٢(٢)+١)^{٣} - ١٢٥}{٢ + (٢)^{٣}(٢-٢) + ٢} = \frac{٠}{٠}$$

مسبب المشكلة (الذي سوف نقوم بحذفه)

س ← ٢   س = ٢   ⟸   س − ٢ = ٠

٢ − س = ٠

$$= \lim_{س\to ٢} \frac{(٢س+١)^{٣} - ١٢٥}{٢ + س^{٣}(س-٢) - س}$$

$$= \lim_{س\to ٢} \frac{((٢س+١)-٥)((٢س+١)^{٢} + ٥(٢س+١) + ٢٥)}{س^{٤} - ٢س^{٣} - س + ٢}$$

س= ٢ جذر االمقام ⟸ عامل للمقام

القسمة التركيبية

	س^٤	س^٣	س^٢	س	ثابت
	١	٢-	٠	١-	٢
$\boxed{٢}$		٢	٠	٠	٢-
	١	٠	٠	١-	٠

الناتج $س^{٣} - ١$

$$= \lim_{س\to ٢} \frac{٢\cancel{(س-٢)}((٢س+١)^{٢} + ٥(٢س+١) + ٢٥)}{\cancel{(س-٢)}(س^{٣} - ١)}$$

$$= \lim_{س\to ٢} \frac{٢((٢س+١)^{٢} + ٥(٢س+١) + ٢٥)}{(س^{٣} - ١)}$$

$$= \frac{٢((٢)٢+١)^{٢} + ٥((٢)٢+١) + ٢٥)}{(٢)^{٣} - ١} = \frac{١٥٠}{٧}$$

$\boxed{\text{الحد الثابت يتكرر على عدد الحدود}}$

توحيد المقام

متى تستخدم هذه الطريقة ؟

عندما يكون هناك **جمع الكسور أو طرحها** .

خطوات الحل :

١) التعويض المباشر $\frac{٠}{٠}$ أو $\frac{ع}{٠} \pm \frac{ع}{٠}$

٢) ابحث عن **مسبب المشكلة النهاية** وتكون جزء من الحل .

٣) استخدم توحيد المقامات (**بسبب وجود جمع وطرح الكسور**)

٤) **الاختصار** بين البسط والمقام (**تنتهي المشكلة**)

٥) التعويض المباشر وتكون **النهاية** اما

موجودة   **غير موجودة**

تذكر دائما عند توحيد المقامات يجب استخدام هذه القاعدة :

$$\frac{\text{بسط الاول} \times \text{مقام الثاني} \pm \text{بسط الثاني} \times \text{مقام الاول}}{\text{مقام الاول} \times \text{مقام الثاني}}$$

أهم الملاحظات :

١) اذا كان التوحيد في البسط ....

٢) اذا كان التوحيد في المقام ....

٣) اذا كان التوحيد جاهز ....

أمثلة : جد قيمة النهايات التالية .

$$\text{١)}\quad \lim_{س\to ٣} \frac{\frac{١}{س} - \frac{١}{٣}}{س - ٣}$$

الحل : التعويض المباشر

$$\lim_{س\to ٣} \frac{\frac{١}{س} - \frac{١}{٣}}{س - ٣} = \frac{\frac{١}{٣} - \frac{١}{٣}}{٣ - ٣} = \frac{٠}{٠}$$

مسبب المشكلة (الذي سوف نقوم بحذفه)

س ←٣   س = ٣   ⟸   س − ٣ = ٠

٣ − س = ٠

$$= \lim_{س\to ٣} \frac{\frac{١}{س} - \frac{١}{٣}}{س - ٣}$$

$$= \lim_{س\to ٣} \left(\frac{١}{س} - \frac{١}{٣}\right)\frac{١}{س - ٣}$$

$$= \lim_{س\to ٣} \left(\frac{١\times ٣ - س \times ١}{٣ \times س}\right)\frac{١}{س - ٣}$$

$$= \lim_{س\to ٣} \frac{\cancel{٣ - س}^{\,-١}}{٣س} \times \frac{١}{\cancel{س - ٣}}$$

$$= \lim_{س\to ٣} \frac{-١}{٣س} \times \frac{١}{١} = \frac{-١}{٣(٣)} \times \frac{١}{١} = \frac{١}{-٩}$$

٢) $\lim\limits_{\text{س}\to 4} \dfrac{\text{س}-4}{\frac{1}{\text{س}}-\frac{1}{4}}$

الحل : التعويض المباشر

$$\lim\limits_{\text{س}\to 4} \frac{\text{س}-4}{\frac{1}{\text{س}}-\frac{1}{4}} = \frac{4-4}{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}} = \frac{0}{0}$$

مسبب المشكلة (الذي سوف نقوم بحذفه)

س ← ٤ س = ٤ ⟸ س − ٤ = ٠

٤ − س = ٠

$$= \lim\limits_{\text{س}\to 4} \frac{\text{س}-4}{\frac{1}{\text{س}}-\frac{1}{4}}$$

$$= \lim\limits_{\text{س}\to 4} \frac{\text{س}-4}{\frac{4-\text{س}}{4\text{س}}}$$

$$= \lim\limits_{\text{س}\to 4} \left(\frac{\text{س}-4}{1}\right)\left(\frac{4\text{س}}{4-\text{س}}\right)$$

$$= \lim\limits_{\text{س}\to 4} \left(\frac{\cancel{\text{س}-4}}{1}\right)\left(\frac{4\text{س}}{\underset{-1}{\cancel{4-\text{س}}}}\right)$$

$$= \lim\limits_{\text{س}\to 4} \frac{1}{1}\times\frac{4\text{س}}{1} = \frac{1}{1}\times\frac{4(4)}{-1} = -16$$

٣) $\lim\limits_{\text{س}\to 3} \dfrac{\text{س}}{\text{س}-3}-\dfrac{18}{\text{س}^2-9}$

الحل : التعويض المباشر

$$\lim\limits_{\text{س}\to 3} \frac{\text{س}}{\text{س}-3}-\frac{18}{\text{س}^2-9} = \frac{3}{3-3}-\frac{18}{(3)^2-9} = \frac{3}{0}-\frac{18}{0}$$

مسبب المشكلة (الذي سوف نقوم بحذفه)

س ← ٣ س = ٣ ⟸ س − ٣ = ٠

٣ − س = ٠

$$= \lim\limits_{\text{س}\to 3} \frac{\text{س}}{\text{س}-3}-\frac{18}{\text{س}^2-9}$$

$$= \lim\limits_{\text{س}\to 3} \left[\frac{\text{س}}{\text{س}-3}-\frac{18}{\text{س}^2-9}\right]^{\text{س}+3}$$

$$= \lim\limits_{\text{س}\to 3} \frac{\text{س}(\text{س}+3)}{(\text{س}-3)(\text{س}+3)}-\frac{18}{\text{س}^2-9}$$

$$= \lim\limits_{\text{س}\to 3} \frac{\text{س}(\text{س}+3)-18}{(\text{س}-3)(\text{س}+3)}$$

$$= \lim\limits_{\text{س}\to 3} \frac{\text{س}^2+3\text{س}-18}{(\text{س}-3)(\text{س}+3)}$$

$$= \lim\limits_{\text{س}\to 3} \frac{(\text{س}-3)(\text{س}+6)}{(\text{س}-3)(\text{س}+3)}$$

$$= \lim\limits_{\text{س}\to 3} \frac{(\text{س}+6)}{(\text{س}+3)} = \frac{3+6}{3+3} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

٤) $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{1}{\text{س}}\left(\dfrac{1}{(\text{س}+1)^2}-1\right)$

الحل : التعويض المباشر

$$= \lim\limits_{\text{س}\to 0} \frac{1}{\text{س}}\left(\frac{1}{(\text{س}+1)^2}-1\right) = \frac{1}{0}\left(\frac{1}{(0+1)^2}-1\right) = \frac{1}{0}-\frac{1}{0}$$

مسبب المشكلة (الذي سوف نقوم بحذفه)

س ←٠ س = ٠ ⟸ س − ٠ = ٠

٠ − س = ٠

$$= \lim\limits_{\text{س}\to 0} \frac{1}{\text{س}}\left(\frac{1}{(\text{س}+1)^2}-1\right)$$

$$= \lim\limits_{\text{س}\to 0} \frac{1}{\text{س}}\left(\frac{1}{(\text{س}+1)^2}-\frac{1}{1}\right)$$

$$= \lim\limits_{\text{س}\to 0} \frac{1}{\text{س}}\left(\frac{1-(1+\text{س})^2}{(\text{س}+1)^2}\right)$$

$$= \lim\limits_{\text{س}\to 0} \frac{1}{\text{س}}\left(\frac{(1-(1+\text{س}))(1+(1+\text{س}))}{(\text{س}+1)^2}\right)$$

$$= \lim\limits_{\text{س}\to 0} \frac{1}{\text{س}}\left(\frac{-\text{س}(2+\text{س})}{(\text{س}+1)^2}\right)$$

$$= \lim\limits_{\text{س}\to 0} \frac{1}{1}\left(\frac{-1(2+\text{س})}{(\text{س}+1)^2}\right) = \frac{-1(2+0)}{(0+1)^2} = -2$$

٥) $\lim\limits_{\text{س}\to 3} \dfrac{\frac{3}{\text{س}+3}-\frac{\text{س}}{6}}{\text{س}^3-6\text{س}-9}$

الحل : التعويض المباشر

$$= \lim\limits_{\text{س}\to 3} \frac{\frac{3}{\text{س}+3}-\frac{\text{س}}{6}}{\text{س}^3-6\text{س}-9} = \frac{\frac{3}{3+3}-\frac{3}{6}}{(3)^3-6(3)-9} = \frac{0}{0}$$

مسبب المشكلة (الذي سوف نقوم بحذفه)

س ←٣ س = ٣ ⟸ س − ٣ = ٠

٣ − س = ٠

$$= \lim\limits_{\text{س}\to 3} \frac{\frac{3}{\text{س}+3}-\frac{\text{س}}{6}}{\text{س}^3-6\text{س}-9}$$

$$= \lim\limits_{\text{س}\to 3} \left(\frac{18-\text{س}^2-3\text{س}}{6(\text{س}+3)}\right)\boxed{\frac{1}{\text{س}^3-6\text{س}-9}}$$

اذا $\text{س}^3 - 6\text{س} - 9$ كثير حدود من الدرجة الثالثة نستخدم القسمة التركيبية

س = ٣ جذر المقام ⟸ س-٣ عامل للمقام

القسمة التركيبية

	س^3	س^2	س	ثابت
	١	٠	٦-	٩-
$\boxed{3}$		٣	٩	٩
	١	٣	٣	٠

الناتج $\text{س}^2 + 3\text{س} + 9$

$$= \lim\limits_{\text{س}\to 3} \frac{18-\text{س}^2-3\text{س}}{6(\text{س}+3)} \times \frac{1}{(\text{س}-3)(\text{س}^2+3\text{س}+3)}$$

$$= \lim_{\text{س}\to ٣} \frac{-(\text{س}^٢ + ٣\text{س} - ١٨)}{٦(\text{س}+٣)} \times \frac{١}{(\text{س}-٣)(\text{س}^٢+٣\text{س}+٣)}$$

$$= \lim_{\text{س}\to ٣} \frac{-(\text{س}-٣)(\text{س}+٦)}{٦(\text{س}+٣)} \times \frac{١}{(\text{س}-٣)(\text{س}^٢+٣\text{س}+٣)}$$

$$= \lim_{\text{س}\to ٣} \frac{-(\text{س}+٦)}{٦(\text{س}+٣)} \times \frac{١}{(\text{س}^٢+٣\text{س}+٣)} = \frac{-(٣+٦)}{٦(٣+٣)} \times \frac{١}{((٣)^٢+٣(٣)+٣)} \frac{-١}{٨٤}$$

٦) $\lim_{\text{س}\to ٢} \dfrac{\dfrac{٩}{٣\text{س}-١} - \dfrac{٩}{٥}}{\dfrac{٧}{٥} - \dfrac{٧}{٢\text{س}+١}}$

الحل :

٧) $\lim_{\text{س}\to ٣} \left(\dfrac{١}{\text{س}-٣} - \dfrac{٢٧}{\text{س}^٣-٢٧}\right)$

الحل :-

٨) $\lim_{\text{س}\to ٢} \dfrac{\text{س}^{-٢} - \dfrac{١}{٤}}{\text{س}^٣-٨}$

الحل : التعويض المباشر

$$\lim_{\text{س}\to ٢} \frac{\text{س}^{-٢} - \frac{١}{٤}}{\text{س}^٣-٨} = \frac{\frac{١}{\text{س}^٢} - \frac{١}{٤}}{\text{س}^٣-٨} = \frac{\frac{١}{(٢)^٢} - \frac{١}{٤}}{(٢)^٣-٨} = \frac{٠}{٠}$$

مسبب المشكلة (الذي سوف نقوم بحذفه)

س ←٢ س = ٢ ⟸ س – ٢ = ٠

٢ – س = ٠

$$= \lim_{\text{س}\to ٢} \frac{\frac{١}{\text{س}^٢} - \frac{١}{٤}}{\text{س}^٣-٨}$$

الضرب بالمرافق التربيعي

الحالة الاولى — حدين

الحالة الثانية — ثلاث حدود

متى تستخدم ؟

عندما يكون في البسط والمقام **جذر تربيعي مضاف اليه قيمة أو الاثنين معا**

يكون المقدار المرافق **عكس اشارة** الفاصلة بين الحدين

لتوضيح ذلك

المقدار	المرافق	ضربهم
١) $\sqrt{\text{س}} - أ$	$\sqrt{\text{س}} + أ$	$(\sqrt{\text{س}} - أ)(\sqrt{\text{س}} + أ) = (\sqrt{\text{س}})^٢ - (أ)^٢ = \text{س} - أ^٢$

مثال ذلك

$\sqrt{\text{س}} - ٤$

المقدار	المرافق	ضربهم
$\sqrt{\text{س}} - ٤$	$\sqrt{\text{س}} + ٤$	$(\sqrt{\text{س}} - ٤)(\sqrt{\text{س}} + ٤) = (\sqrt{\text{س}})^٢ - (٤)^٢ = \text{س} - ١٦$

المقدار	المرافق	ضربهم
٢) $أ - \sqrt{\text{س}}$	$أ + \sqrt{\text{س}}$	$(أ - \sqrt{\text{س}})(أ + \sqrt{\text{س}}) = أ^٢ - (\sqrt{\text{س}})^٢ = أ^٢ - \text{س}$

مثال ذلك :

$٤ - \sqrt{\text{س}}$

المقدار	المرافق	ضربهم
$٤ - \sqrt{\text{س}}$	$٤ + \sqrt{\text{س}}$	$(٤ - \sqrt{\text{س}})(٤ + \sqrt{\text{س}}) = (٤)^٢ - (\sqrt{\text{س}})^٢ = ١٦ - \text{س}$

المقدار	المرافق	ضربهم
٣) $\sqrt{\text{س}} + أ$	$\sqrt{\text{س}} - أ$	$(\sqrt{\text{س}} + أ)(\sqrt{\text{س}} - أ) = (\sqrt{\text{س}})^٢ - أ^٢$

مثال ذلك :

$\sqrt{\text{س}} + ٥$

المقدار	المرافق	ضربهم
$\sqrt{\text{س}} + ٥$	$\sqrt{\text{س}} - ٥$	$(\sqrt{\text{س}} + ٥)(\sqrt{\text{س}} - ٥) = (\sqrt{\text{س}})^٢ - (٥)^٢ = \text{س} - ٢٥$

المقدار	المرافق	ضربهم
٤) $أ + \sqrt{\text{س}}$	$أ - \sqrt{\text{س}}$	$(أ + \sqrt{\text{س}})(أ - \sqrt{\text{س}}) = (أ)^٢ - (\sqrt{\text{س}})^٢ = أ^٢ - \text{س}$

مثال ذلك

المقدار	المرافق	ضربهم
$٥ + \sqrt{\text{س}}$	$٥ - \sqrt{\text{س}}$	$(٥ - \sqrt{\text{س}})(٥ + \sqrt{\text{س}}) = (٥)^٢ - (\sqrt{\text{س}})^٢ = ٢٥ - \text{س}$

أمثلة توضيحه أكثر

١) مرافق $\sqrt{\text{س}+٥} - ٢$ هو $\sqrt{\text{س}+٥} + ٢$

ضربهم $(\sqrt{\text{س}+٥} - ٢)(\sqrt{\text{س}+٥} + ٢) = ((\sqrt{\text{س}+٥})^٢ - (٢)^٢) = \text{س} + ٥ - ٤ = \text{س} + ١$

٢) مرافق $3+\sqrt{س+2}$ **تدريب**

خطوات الحل :

١) التعويض المباشر $\frac{0}{0}$ أو $\pm\frac{ع}{0}$

٢) ابحث عن **مسبب المشكلة النهاية** وتكون جزء من الحل .

٣) استخدم الضرب بالمرافق التربيعي (**بسبب وجود جذر تربيعي مضاف اليه قيمة او الاثنين معا**)

٤) **الاختصار** بين البسط والمقام (**تنتهي المشكلة**)

٥) التعويض المباشر وتكون **النهاية** اما

موجودة **غير موجودة**

أمثلة : جد قيمة النهايات التالية .

هذه الامثلة على الحالة الاولى

اذا احتواء البسط أو المقام على حدين فقط

١) $\lim_{س \to 4} \frac{\sqrt{س^2+9}-5}{س-4}$

الحل : التعويض المباشر

$$\lim_{س \to 4} \frac{\sqrt{س^2+9}-5}{س-4} = \frac{\sqrt{(4)^2+9}-5}{4-4} = \frac{0}{0}$$

مسبب المشكلة (الذي سوف نقوم بحذفه)

س ← ٤ س = ٤ ⇐ س − ٤ = ٠

٤ − س = ٠

$$= \lim_{س \to 4} \frac{\sqrt{س^2+9}-5}{س-4}$$

$$= \lim_{س \to 4} \frac{\sqrt{س^2+9}-5}{س-4} \times \frac{\sqrt{س^2+9}+5}{\sqrt{س^2+9}+5}$$

$$= \lim_{س \to 4} \frac{(\sqrt{س^2+9})^2-(5)^2}{س-4} \times \frac{1}{\sqrt{س^2+9}+5}$$

$$= \lim_{س \to 4} \frac{س^2+9-25}{س-4} \times \frac{1}{\sqrt{س^2+9}+5}$$

$$= \lim_{س \to 4} \frac{س^2-16}{س-4} \times \frac{1}{\sqrt{س^2+9}+5}$$

$$= \lim_{س \to 4} \frac{(س+4)(س-4)}{س-4} \times \frac{1}{\sqrt{س^2+9}+5}$$

$$= \lim_{س \to 4} (س+4) \times \frac{1}{\sqrt{س^2+9}+5} = (4+4) \times \frac{1}{\sqrt{4^2+9}+5} = \frac{4}{5}$$

تذكران

١) $\sqrt{س^2} = |س|$

٢) $(\sqrt{س})^2 = س$

٢) $\lim_{س \to 2} \frac{1-\sqrt{س-1}}{س-2}$

الحل : التعويض المباشر

$$= \lim_{س \to 2} \frac{1-\sqrt{س-1}}{س-2} = \frac{1-\sqrt{2-1}}{2-2} = \frac{0}{0}$$

مسبب المشكلة (الذي سوف نقوم بحذفه)

س ← ٢ س = ٢ ⇐ س − ٢ = ٠

٢ − س = ٠

$$= \lim_{س \to 2} \frac{1-\sqrt{س-1}}{س-2}$$

$$= \lim_{س \to 2} \frac{1-\sqrt{س-1}}{س-2} \times \frac{1+\sqrt{س-1}}{1+\sqrt{س-1}}$$

$$= \lim_{س \to 2} \frac{(1)^2-(\sqrt{س-1})^2}{س-2} \times \frac{1}{1+\sqrt{س-1}}$$

$$= \lim_{س \to 2} \frac{1-(س-1)}{س-2} \times \frac{1}{1+\sqrt{س-1}}$$

$$= \lim_{س \to 2} \frac{1-س+1}{س-2} \times \frac{1}{1+\sqrt{س-1}}$$

$$= \lim_{س \to 2} \frac{2-س}{س-2} \times \frac{1}{1+\sqrt{س-1}}$$

$$= \lim_{س \to 2} \frac{-1}{1} \times \frac{1}{1+\sqrt{س-1}} = \frac{-1}{1} \times \frac{1}{1+\sqrt{2-1}} = \frac{-1}{2}$$

٣) $\lim_{س \to 3} \frac{س^2-2س-3}{2-\sqrt{س+1}}$

الحل : التعويض المباشر

$$\lim_{س \to 3} \frac{س^2-2س-3}{2-\sqrt{س+1}} = \frac{(3)^2-2س-3}{2-\sqrt{3+1}} = \frac{0}{0}$$

مسبب المشكلة (الذي سوف نقوم بحذفه)

س ← ٣ س = ٣ ⇐ س − ٣ = ٠

٣ − س = ٠

$$= \lim_{س \to 3} \frac{س^2-2س-3}{2-\sqrt{س+1}}$$

$$= \lim_{س \to 3} \frac{س^2-2س-3}{2-\sqrt{س+1}} \times \frac{2+\sqrt{س+1}}{2+\sqrt{س+1}}$$

$$= \lim_{س \to 3} \frac{س^2-2س-3}{(2)^2-(\sqrt{س+1})^2} \times 2+\sqrt{س+1}$$

$$= \lim_{س \to 3} \frac{س^2-2س-3}{4-(س+1)} \times 2+\sqrt{س+1}$$

$$= \lim_{س \to 3} \frac{س^2-2س-3}{4-س-1} \times 2+\sqrt{س+1}$$

$$= \lim_{س \to 3} \frac{س^2-2س-3}{3-س} \times 2+\sqrt{س+1}$$

$$= \lim_{س \to 3} \frac{(س-3)(س+1)}{3-س} \times 2+\sqrt{س+1}$$

$$= \lim_{س \to 3} -1(س+1) \times (2+\sqrt{س+1}) = (3+1) \times (2+\sqrt{3+1}) = -16$$

٤) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهــا}} \dfrac{\sqrt{٥\text{س}-١}-\sqrt{\text{س}+٣}}{\text{س}-١}$

الحل : التعويض المباشر

$$\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهــا}} \dfrac{\sqrt{٥\text{س}-١}-\sqrt{\text{س}+٣}}{\text{س}-١} = \dfrac{\sqrt{٥(١)-١}-\sqrt{١+٣}}{١-١} = \dfrac{٠}{٠}$$

مسبب المشكلة (الذي سوف نقوم بحذفه)

س ← ١ س = ١ ⟸ س − ١ = ٠

١ − س = ٠

$$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهــا}} \dfrac{\sqrt{٥\text{س}-١}-\sqrt{\text{س}+٣}}{\text{س}-١}$$

$$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهــا}} \dfrac{\sqrt{٥\text{س}-١}-\sqrt{\text{س}+٣}}{\text{س}-١} \times \dfrac{\sqrt{٥\text{س}-١}+\sqrt{\text{س}+٣}}{\sqrt{٥\text{س}-١}+\sqrt{\text{س}+٣}}$$

$$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهــا}} \dfrac{(\sqrt{٥\text{س}-١})^{٢}-(\sqrt{\text{س}+٣})^{٢}}{\text{س}-١} \times \dfrac{١}{\sqrt{٥\text{س}-١}+\sqrt{\text{س}+٣}}$$

$$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهــا}} \dfrac{٥\text{س}-١-(\text{س}+٣)}{\text{س}-١} \times \dfrac{١}{\sqrt{٥\text{س}-١}+\sqrt{\text{س}+٣}}$$

$$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهــا}} \dfrac{٥\text{س}-١-\text{س}-٣}{\text{س}-١} \times \dfrac{١}{\sqrt{٥\text{س}-١}+\sqrt{\text{س}+٣}}$$

$$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهــا}} \dfrac{٤\text{س}-٤}{\text{س}-١} \times \dfrac{١}{\sqrt{٥\text{س}-١}+\sqrt{\text{س}+٣}}$$

$$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهــا}} \dfrac{٤(\text{س}-١)}{\text{س}-١} \times \dfrac{١}{\sqrt{٥\text{س}-١}+\sqrt{\text{س}+٣}}$$

$$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهــا}} ٤ \times \dfrac{١}{\sqrt{٥\text{س}-١}+\sqrt{\text{س}+٣}} = ٤ \times \dfrac{١}{\sqrt{٥(١)-١}+\sqrt{١+٣}} = ١$$

٥) $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{س}^{٢}+٢\text{س}-١٥}{\sqrt{\text{س}^{٣}-٢}-\sqrt{٢\text{س}^{٢}+٧}}$

الحل :

٦) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهــا}} \dfrac{\sqrt{٣\text{س}+١}-٢}{١-\sqrt{\text{س}}}$

الحل :

٧) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهــا}} \dfrac{٣-\sqrt{\text{س}+٨}}{\sqrt{\text{س}}-١}$

الحل :

٨) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهــا}} \dfrac{\dfrac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}}}-\dfrac{١}{٢}}{\text{س}-١}$

٩) $\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س^{٢}+٧} - \sqrt{س+١٣}}{\sqrt{س+١} - ٢}$

الحل :

٩) $\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س+٧} - ٣}{س^{٣} - ٦٤}$

الحل :

هذه الامثلة على الحالة الثانية

اذا احتوا البسط والمقام على ثلاث حدود

الفكرة : نجزء الثلاثة حدود إلى حدين بحيث نجعل الجزء الذي يحوي الجذر حد والباقي حد

مثال لتوضيح :

١) $\sqrt{س+٧} + ٢س - ١٠ = \sqrt{س+٧} + (٢س - ١٠)$

مرافق $= \sqrt{س+٧} + (٢س - ١٠)$ **هو** $= \sqrt{س+٧} - (٢س - ١٠)$

ضربهم

$(\sqrt{س+٧} + (٢س - ١٠)) \times (\sqrt{س+٧} + (٢س - ١٠)) = (\sqrt{س+٧})^{٢} + (٢س - ١٠)^{٢}$

$= س + ٧ - (٢س)^{٢} - ٤٠س + ١٠٠ = ٤س^{٢} - ٣٩س + ١٠٧$

٢) $س + ٤\sqrt{س} + ٣$

أمثلة : جد قيمة النهايات التالية .

١) $\lim_{س \to ٣} \frac{س - \sqrt{س+١} - ١}{س - ٣}$

الحل : التعويض المباشر

$\lim_{س \to ٣} \frac{س - \sqrt{س+١} - ١}{س - ٣} = \frac{٣ - \sqrt{٣+١} - ١}{٣ - ٣} = \frac{٠}{٠}$

مسبب المشكلة (**الذي سوف نقوم بحذفه**)

$س \to ٣ \quad س = ٣ \Leftarrow س - ٣ = ٠$

$٣ - س = ٠$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{س - \sqrt{س+١} - ١}{س - ٣}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س - ١) - \sqrt{س+١}}{س - ٣}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س - ١) - \sqrt{س+١}}{س - ٣} \times \frac{(س - ١) + \sqrt{س+١}}{(س - ١) + \sqrt{س+١}}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س - ١)^{٢} - (\sqrt{س+١})^{٢}}{س - ٣} \times \frac{١}{(س - ١) + \sqrt{س+١}}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢} - ٢س + ١ - (س + ١)}{س - ٣} \times \frac{١}{(س - ١) + \sqrt{س+١}}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢} - ٢س + ١ - س - ١}{س - ٣} \times \frac{١}{(س - ١) + \sqrt{س+١}}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢} - ٣س}{س - ٣} \times \frac{١}{(س - ١) + \sqrt{س+١}}$

$$= \lim_{س \to ٣} \frac{س(س - ٣س)}{س - ٣} \times \frac{١}{(س-١) + \sqrt{س+١}}$$

$$= \lim_{س \to ٣} س \times \frac{١}{(س-١) + \sqrt{س+١}} = ٣ \times \frac{١}{(٣-١) + \sqrt{٣+١}} = \frac{٣}{٤}$$

٢) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ - ٤}{\sqrt{س+١} - ٢س + ١}$

الضرب بالمرافق التكعيبي

الحالة الاولى	الحالة الثانية
حدين	ثلاثة حدود

متى تستخدم ؟

عندما يكون في البسط والمقام **جذر تكعيبي** مضاف اليه قيمة أو الاثنين معا .

شرح بسيط لتوضيح

المقدار	المرافق	ضربهم
١) $\sqrt[3]{س} - أ$	$(\sqrt[3]{س})^٢ + أ\sqrt[3]{س} + أ^٢$	$س - أ^٣$

مثال ذلك :

المقدار	المرافق	ضربهم
$\sqrt[3]{س} - ٣$	$(\sqrt[3]{س})^٢ + ٣\sqrt[3]{س} + (٣)^٢$	$س - (٣)^٣ = س - ٢٧$

> **ملاحظة**
>
> الإشارة في حاصل ضربهم **تكون نفس الإشارة الأصلية** .

المقدار	المرافق	ضربهم
٢) $أ - \sqrt[3]{س}$	$أ^٢ + أ\sqrt[3]{س} + (\sqrt[3]{س})^٢$	$أ^٣ - س$

مثال ذلك :

المقدار	المرافق	ضربهم
$٣ - \sqrt[3]{س}$	$٣^٢ + ٣\sqrt[3]{س} + (\sqrt[3]{س})^٢$	$(٣)^٣ - س = ٢٧ - س$

المقدار	المرافق	ضربهم
٣) $\sqrt[3]{س} + أ$	$(\sqrt[3]{س})^٢ - أ\sqrt[3]{س} + أ^٢$	$س + أ^٣$

مثال ذلك :

المقدار	المرافق	ضربهم
$\sqrt[3]{س} + ٢$	$(\sqrt[3]{س})^٢ - ٢\sqrt[3]{س} + ٢^٢$	$س + ٢^٣ = س + ٨$

المقدار	المرافق	ضربهم
٤) $أ + \sqrt[3]{س}$	$أ^٢ - أ\sqrt[3]{س} + (\sqrt[3]{س})^٢$	$أ^٣ + س$

مثال ذلك :

المقدار	المرافق	ضربهم
$٢ + \sqrt[3]{س}$	$٢^٢ - ٢\sqrt[3]{س} + (\sqrt[3]{س})^٢$	$٢^٢ + س = ٨ + س$

أمثلة توضيحية أكثر

١) $\sqrt[3]{س+١} + ٢$ هو $(\sqrt[3]{س+١})^٢ - ٢\sqrt[3]{س+١} + ٢^٢$

ضربهم $\sqrt[3]{س+١} + ٢ \times \left((\sqrt[3]{س+١})^٢ - ٢\sqrt[3]{س+١} + ٢^٢\right) = (\sqrt[3]{س+١})^٣ + ٢^٣$

$= س + ١ + ٨ = س + ٩$

الرونق في الرياضيات
إعداد : أ . سائد الوردات
0772044048 - 0787556274

أمثلة : جد قيمة النهايات التالية

١) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[3]{\text{س}}-١}{\text{س}^٢-١}$

الحل : التعويض المباشر

$$\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[3]{\text{س}}-١}{\text{س}^٢-١} = \frac{\sqrt[3]{١}-١}{(١)^٢-١} = \frac{٠}{٠}$$

مسبب المشكلة (الذي سوف نقوم بحذفه)

س ←١ س = ١ ⇐ س − ١ = ٠

١ − س = ٠

$$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[3]{\text{س}}-١}{\text{س}^٢-١}$$

$$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[3]{\text{س}}-١}{\text{س}^٢-١} \times \frac{(\sqrt[3]{\text{س}})^٢+\sqrt[3]{\text{س}}+(١)^٢}{(\sqrt[3]{\text{س}})^٢+\sqrt[3]{\text{س}}+(١)^٢}$$

$$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{(\sqrt[3]{\text{س}})^٣-(١)^٣}{\text{س}^٢-١} \times \frac{١}{(\sqrt[3]{\text{س}})^٢+\sqrt[3]{\text{س}}+(١)^٢}$$

$$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}-١}{\text{س}^٢-١} \times \frac{١}{(\sqrt[3]{\text{س}})^٢+\sqrt[3]{\text{س}}+(١)^٢}$$

$$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}-١}{(\text{س}+١)(\text{س}-١)} \times \frac{١}{(\sqrt[3]{\text{س}})^٢+\sqrt[3]{\text{س}}+(١)^٢}$$

$$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{١}{(\text{س}+١)} \times \frac{١}{(\sqrt[3]{\text{س}})^٢+\sqrt[3]{\text{س}}+(١)^٢} = \frac{١}{(١+١)} \times \frac{١}{(\sqrt[3]{١})^٢+\sqrt[3]{١}+(١)^٢} = \frac{١}{٦}$$

٢) $\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[3]{\text{س}+٤}-٢}{\text{س}^٢-٦\text{س}+٨}$

الحل :

٣) $\underset{\text{س}\to -٧}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[3]{٢\text{س}+٦}+٢}{\text{س}^٢+٤\text{س}-٢١}$

الحل :

٤) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٣-٣\text{س}-٢}{\sqrt[3]{\text{س}+٦}-٢}$

الحل : التعويض المباشر

$$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٣-٣\text{س}-٢}{\sqrt[3]{\text{س}+٦}-٢} = \frac{(٢)^٣-٣(٢)-٢}{\sqrt[3]{٢+٦}-٢} = \frac{٠}{٠}$$

مسبب المشكلة (الذي سوف نقوم بحذفه)

س ←٢ س = ٢ ⇐ س − ٢ = ٠

٢ − س = ٠

$$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٣-٣\text{س}-٢}{\sqrt[3]{\text{س}+٦}-٢}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٣-٣\text{س}-٢}{\sqrt[3]{\text{س}+٦}-٢} \times \frac{(\sqrt[3]{\text{س}+٦})^٢+٢\sqrt[3]{\text{س}+٦}+(٢)^٢}{(\sqrt[3]{\text{س}+٦})^٢+٢\sqrt[3]{\text{س}+٦}+(٢)^٢}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٣-٣\text{س}-٢}{(\sqrt[3]{\text{س}+٦})^٣-(٢)^٣} \times \frac{(\sqrt[3]{\text{س}+٦})^٢+٢\sqrt[3]{\text{س}+٦}+(٢)^٢}{١}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٣-٣\text{س}-٢}{\text{س}+٦-٨} \times \frac{(\sqrt[3]{\text{س}+٦})^٢+٢\sqrt[3]{\text{س}+٦}+(٢)^٢}{١}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٣-٣\text{س}-٢}{\text{س}-٢} \times \frac{(\sqrt[3]{\text{س}+٦})^٢+٢\sqrt[3]{\text{س}+٦}+(٢)^٢}{١}$$

نستخدم القسمة التركيبية لتحليل المقام

س = ٢ جذر البسط ⇐ (س – ٢) عامل البسط

	$\text{س}^٣$	$\text{س}^٢$	س	ثابت
	١	٠	٣-	٢-
$\boxed{٢}$		٢	٤	٢
	١	٢	١	صفر

الناتج $\text{س}^٢ + ٢\text{س} + ١$

$$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س}-٢)(\text{س}^٢+٢\text{س}+١)}{\text{س}-٢} \times \frac{(\sqrt[3]{\text{س}+٦})^٢+٢\sqrt[3]{\text{س}+٦}+(٢)^٢}{١}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س}^٢+٢\text{س}+١)}{١} \times \frac{(\sqrt[3]{\text{س}+٦})^٢+٢\sqrt[3]{\text{س}+٦}+(٢)^٢}{١}$$

$$= \frac{(٢-٢)((٢)^٢+٢(٢)+١)}{٢-٢} \times \frac{(\sqrt[3]{٢+٦})^٢+٢\sqrt[3]{٢+٦}+(٢)^٢}{١} = ١٠٨$$

٥) $$\underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{٢س-٢}{٣-\sqrt[3]{٢٦+س}}$$

الحل : التعويض المباشر

$$\underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{٢س-٢}{٣-\sqrt[3]{٢٦+س}} = \frac{٢(١)-٢}{٣-\sqrt[3]{٢٦+١}} = \frac{٠}{٠}$$

مسبب المشكلة (الذي سوف نقوم بحذفه)

س ←١ ⟸ س = ١ ⟸ س − ١ = ٠

١ − س = ٠

$$= \underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{٢س-٢}{٣-\sqrt[3]{٢٦+س}}$$

$$= \underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{٢س-٢}{٣-\sqrt[3]{٢٦+س}} \times \frac{(٣)^٢+٣\sqrt[3]{٢٦+س}+(\sqrt[3]{٢٦+س})^٢}{(٣)^٢+٣\sqrt[3]{٢٦+س}+(\sqrt[3]{٢٦+س})^٢}$$

$$= \underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{٢س-٢}{(٣)^٣-(\sqrt[3]{٢٦+س})^٣} \times \frac{(٣)^٢+٣\sqrt[3]{٢٦+س}+(\sqrt[3]{٢٦+س})^٢}{١}$$

$$= \underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{٢س-٢}{٢٧-(٢٦+س)} \times \frac{(٣)^٢+٣\sqrt[3]{٢٦+س}+(\sqrt[3]{٢٦+س})^٢}{١}$$

$$= \underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{٢س-٢}{٢٧-٢٦-س} \times \frac{(٣)^٢+٣\sqrt[3]{٢٦+س}+(\sqrt[3]{٢٦+س})^٢}{١}$$

$$= \underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{٢س-٢}{١-س} \times \frac{(٣)^٢+٣\sqrt[3]{٢٦+س}+(\sqrt[3]{٢٦+س})^٢}{١}$$

$$= \underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{٢(س-١)}{١-س} \times \frac{(٣)^٢+٣\sqrt[3]{٢٦+س}+(\sqrt[3]{٢٦+س})^٢}{١}$$

$$= \underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{٢\times-١}{١} \times \frac{(٣)^٢+٣\sqrt[3]{٢٦+س}+(\sqrt[3]{٢٦+س})^٢}{١}$$

$$= \frac{٢\times-١}{١} \times \frac{(٣)^٢+٣\sqrt[3]{٢٦+١}+(\sqrt[3]{٢٦+١})^٢}{١} = -٥٤$$

٦) $$\underset{س \to -٨}{\text{نها}} \frac{\sqrt{١-س}-٣}{٢+\sqrt[3]{س}}$$

الحل : التعويض المباشر

$$\underset{س \to -٨}{\text{نها}} \frac{\sqrt{١-س}-٣}{٢+\sqrt[3]{س}} = \frac{\sqrt{١--١}-٣}{٢+\sqrt[3]{-١}} = \frac{٠}{٠}$$

مسبب المشكلة (الذي سوف نقوم بحذفه)

س ← −٨ ⟸ س = −٨ ⟸ س + ٨ = ٠

− س − ٨ = ٠

$$= \underset{س \to -٨}{\text{نها}} \frac{\sqrt{١-س}-٣}{٢+\sqrt[3]{س}}$$

$$= \underset{س \to -٨}{\text{نها}} \frac{\sqrt{١-س}-٣}{٢+\sqrt[3]{س}} \times \frac{\sqrt{١-س}+٣}{\sqrt{١-س}+٣} \times \frac{(٢)^٢-٢\sqrt[3]{س}+(\sqrt[3]{س})^٢}{(٢)^٢-٢\sqrt[3]{س}+(\sqrt[3]{س})^٢}$$

$$= \underset{س \to -٨}{\text{نها}} \frac{(\sqrt{١-س})^٢-(٣)^٢}{(٢)^٣+(\sqrt[3]{س})^٣} \times \frac{١}{\sqrt{١-س}+٣} \times \frac{(٢)^٢-٢\sqrt[3]{س}+(\sqrt[3]{س})^٢}{١}$$

$$= \underset{س \to -٨}{\text{نها}} \frac{١-س-٩}{٨+س} \times \frac{١}{\sqrt{١-س}+٣} \times \frac{(٢)^٢-٢\sqrt[3]{س}+(\sqrt[3]{س})^٢}{١}$$

$$= \underset{س \to -٨}{\text{نها}} \frac{-س-٨}{س+٨} \times \frac{١}{\sqrt{١-س}+٣} \times \frac{(٢)^٢-٢\sqrt[3]{س}+(\sqrt[3]{س})^٢}{١}$$

$$= \underset{س \to -٨}{\text{نها}} \frac{-(س+٨)}{س+٨} \times \frac{١}{\sqrt{١-س}+٣} \times \frac{(٢)^٢-٢\sqrt[3]{س}+(\sqrt[3]{س})^٢}{١}$$

$$= \underset{س \to -٨}{\text{نها}} \frac{-١}{١} \times \frac{١}{\sqrt{١-س}+٣} \times \frac{(٢)^٢-٢\sqrt[3]{س}+(\sqrt[3]{س})^٢}{١}$$

$$= \frac{-١}{١} \times \frac{١}{\sqrt{١-(-٨)}+٣} \times \frac{(٢)^٢-٢\sqrt[3]{-٨}+(\sqrt[3]{-٨})^٢}{١} = -٢$$

٧) $$\underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{س-١}{\sqrt[3]{\sqrt{س}+٧}-٢}$$

الحل : التعويض المباشر

$$\underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{س-١}{\sqrt[3]{\sqrt{س}+٧}-٢} = \frac{١-١}{\sqrt[3]{\sqrt{١}+٧}-٢} = \frac{٠}{٠}$$

مسبب المشكلة (الذي سوف نقوم بحذفه)

س ←١ ⟸ س = ١ ⟸ س − ١ = ٠

١ − س = ٠

$$= \underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{س-١}{\sqrt[3]{\sqrt{س}+٧}-٢}$$

$$= \underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{س-١}{\sqrt[3]{\sqrt{س}+٧}-٢} \times \frac{(\sqrt[3]{\sqrt{س}+٧})^٢+٢\sqrt[3]{\sqrt{س}+٧}+(٢)^٢}{(\sqrt[3]{\sqrt{س}+٧})^٢+٢\sqrt[3]{\sqrt{س}+٧}+(٢)^٢}$$

$$= \underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{س-١}{(\sqrt[3]{\sqrt{س}+٧})^٣-(٢)^٣} \times \frac{(\sqrt[3]{\sqrt{س}+٧})^٢+٢\sqrt[3]{\sqrt{س}+٧}+(٢)^٢}{١}$$

$$= \underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{س-١}{\sqrt{س}+٧-٨} \times \frac{(\sqrt[3]{\sqrt{س}+٧})^٢+٢\sqrt[3]{\sqrt{س}+٧}+(٢)^٢}{١}$$

$$= \underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{س-١}{\sqrt{س}-١} \times \frac{(\sqrt[3]{\sqrt{س}+٧})^٢+٢\sqrt[3]{\sqrt{س}+٧}+(٢)^٢}{١}$$

$$= \underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{س-١}{\sqrt{س}-١} \times \frac{(\sqrt[3]{\sqrt{س}+٧})^٢+٢\sqrt[3]{\sqrt{س}+٧}+(٢)^٢}{١} \times \frac{\sqrt{س}+١}{\sqrt{س}+١}$$

$$= \underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{س-١}{(\sqrt{س})^٢-(١)^٢} \times \frac{(\sqrt[3]{\sqrt{س}+٧})^٢+٢\sqrt[3]{\sqrt{س}+٧}+(٢)^٢}{١} \times \frac{\sqrt{س}+١}{١}$$

$$= \underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{س-١}{س-١} \times \frac{(\sqrt[3]{\sqrt{س}+٧})^٢+٢\sqrt[3]{\sqrt{س}+٧}+(٢)^٢}{١} \times \frac{\sqrt{س}+١}{١}$$

$$= \underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{١}{١} \times \frac{(\sqrt[3]{\sqrt{س}+٧})^٢+٢\sqrt[3]{\sqrt{س}+٧}+(٢)^٢}{١} \times \frac{\sqrt{س}+١}{١}$$

$$= \frac{١}{١} \times \frac{(\sqrt[3]{\sqrt{١}+٧})^٢+٢\sqrt[3]{\sqrt{١}+٧}+(٢)^٢}{١} \times \frac{\sqrt{١}+١}{١} = ٢٤$$

هذه الامثلة على الحالة الثانية

اذا احتوا البسط أو المقام على **ثلاثة حدود**

الفكرة :

نفس فكرة الضرب بالمرافق ألتربيعي لثلاثة حدود

(نجزئ ثلاثة حدود إلى حدين فقط حيث نجعل الجزء الذي يحوي الجذر حد والباقي حد)

مثال توضيحي

١) $\sqrt[3]{س+٧} + ٢س - ١٠ = \left(\sqrt[3]{س+٧}\right) + (٢س-١٠)$

مرافق هو $\left(\sqrt[3]{س+٧}\right)^{٢} + (٢س-١٠)\ \sqrt[3]{س+٧} + (٢س-١٠)^{٢}$

$= \left(\sqrt[3]{س+٧}\right)^{٣} + (٢س-١٠)^{٣}$

٢) $س - \sqrt[3]{س+٥} - ٣$ **تدريب**

أمثلة : جد قيمة النهايات التالية

١) $\underset{س\leftarrow٣}{\text{نهـا}} \dfrac{س-٣}{س - \sqrt[3]{س+٥} - ١}$

الحل : التعويض المباشر

$\underset{س\leftarrow٣}{\text{نهـا}} \dfrac{س-٣}{س - \sqrt[3]{س+٥} - ١} = \dfrac{٣-٣}{٣ - \sqrt[3]{٣+٥} - ١} = \dfrac{٠}{٠}$

مسبب المشكلة (الذي سوف نقوم بحذفه)

$س \leftarrow ٣ \quad س = ٣ \quad \Leftarrow \quad س - ٣ = ٠$

$٣ - س = ٠$

$= \underset{س\leftarrow٣}{\text{نهـا}} \dfrac{س-٣}{س - \sqrt[3]{س+٥} - ١}$

$= \underset{س\leftarrow٣}{\text{نهـا}} \dfrac{س-٣}{(س-١) - \sqrt[3]{س+٥}}$

$= \underset{س\leftarrow٣}{\text{نهـا}} \dfrac{س-٣}{(س-١) - \sqrt[3]{س+٥}} \times \dfrac{(س-١)^{٢} - (س-١)\sqrt[3]{س+٥} + \left(\sqrt[3]{س+٥}\right)^{٢}}{(س-١)^{٢} - (س-١)\sqrt[3]{س+٥} + \left(\sqrt[3]{س+٥}\right)^{٢}}$

$= \underset{س\leftarrow٣}{\text{نهـا}} \dfrac{س-٣}{(س-١)^{٣} - \left(\sqrt[3]{س+٥}\right)^{٣}} \times \dfrac{(س-١)^{٢} - (س-١)\sqrt[3]{س+٥} + \left(\sqrt[3]{س+٥}\right)^{٢}}{١}$

$= \underset{س\leftarrow٣}{\text{نهـا}} \dfrac{س-٣}{س^{٣} - ٣س^{٢} + ٣س - ١ - (س+٥)} \times \dfrac{(س-١)^{٢} - (س-١)\sqrt[3]{س+٥} + \left(\sqrt[3]{س+٥}\right)^{٢}}{١}$

$= \underset{س\leftarrow٣}{\text{نهـا}} \dfrac{س-٣}{س^{٣} - ٣س^{٢} + ٢س - ٦} \times \dfrac{(س-١)^{٢} - (س-١)\sqrt[3]{س+٥} + \left(\sqrt[3]{س+٥}\right)^{٢}}{١}$

القسمة التركيبية

$س=٣$ جذر للمقام $\Leftarrow$ $س - ٣$ عامل للمقام

	$س^{٣}$	$س^{٢}$	س	ثابت
	١	٣-	٢	٦-
$\boxed{٣}$		٣	٠	٦
	١	٠	٢	صفر

الناتج $س^{٢} + ٢$

$= \underset{س\leftarrow٣}{\text{نهـا}} \dfrac{س-٣}{(س-٣)(س^{٢}+٢)} \times \dfrac{(س-١)^{٢} - (س-١)\sqrt[3]{س+٥} + \left(\sqrt[3]{س+٥}\right)^{٢}}{١}$

$= \underset{س\leftarrow٣}{\text{نهـا}} \dfrac{١}{(س^{٢}+٢)} \times \dfrac{(س-١)^{٢} - (س-١)\sqrt[3]{س+٥} + \left(\sqrt[3]{س+٥}\right)^{٢}}{١}$

$= \underset{س\leftarrow٣}{\text{نهـا}} \dfrac{١}{((٣)^{٢}+٢)} \times \dfrac{(٣-١)^{٢} - (٣-١)\sqrt[3]{٣+٥} + \left(\sqrt[3]{٣+٥}\right)^{٢}}{١} = \dfrac{١٢}{١١}$

الاستبدال

متى تستخدم هذه الحالة ؟

اذا كان الجذر **غير تربيعي أو تكعيبي بشرط ان تكون ما داخل ه اقتران خطي أو مرفوع لقوى .**

خطوات الحل :

١) التعويض المباشر $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\text{ع}}{0} \pm \frac{\text{ع}}{0}$

٢) ابحث عن **مسبب المشكلة النهاية** وتكون هي جزء من الحل .

٣) استخدم الاستبدال بسبب احتواء النهاية على **جذر غير تربيعي أو تكعيبي بشرط ان يكون ما داخله اقتران خطي أو مرفوع لقوة**

٤) **اختصار** بين البسط والمقام (**تنتهي المشكلة**)

٥) التعويض المباشر وتكون **النهاية** اما

موجودة   **غير موجودة**

أمثلة : جد قيمة النهايات التالية .

١) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[4]{\text{س}+16}-2}{\text{س}}$

الحل : التعويض المباشر

$\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[4]{\text{س}+16}-2}{\text{س}} = \frac{\sqrt[4]{0+16}-2}{0} = \frac{0}{0}$

مسبب المشكلة (الذي سوف نقوم بحذفه)

س ←٠   س = ٠ $\Leftarrow$ س = ٠

– س = ٠

$= \underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[4]{\text{س}+16}-2}{\text{س}}$

نفرض ان $\text{ص} = \sqrt[4]{\text{س}+16}$ عندما س ←٠

$\text{ص}^4 = (\sqrt[4]{\text{س}+16})$ فأن $\text{ص} = \sqrt[4]{\text{س}+16}$

$\text{ص}^4 = \text{س}+16$ $\text{ص} = \sqrt[4]{0+16} = 2$

∴ فان ص ←٢

$\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[4]{\text{س}+16}-2}{\text{س}}$

نستبدل ما قمنا بفرضه

$= \underset{\text{ص}\to 2}{\text{نهـا}} \frac{\text{ص}-2}{\text{ص}^4-16}$

$= \underset{\text{ص}\to 2}{\text{نهـا}} \frac{\text{ص}-2}{(\text{ص}^2-4)(\text{ص}^2+4)}$

$= \underset{\text{ص}\to 2}{\text{نهـا}} \frac{\text{ص}-2}{(\text{ص}+2)(\text{ص}-2)(\text{ص}^2+4)}$

$= \underset{\text{ص}\to 2}{\text{نهـا}} \frac{1}{(\text{ص}+2)(\text{ص}^2+4)} = \frac{1}{(2+2)((2)^2+4)} = \frac{1}{32}$

٢) $\underset{\text{س}\to 5}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}-5}{\sqrt[5]{\text{س}+27}-2}$

الحل : التعويض المباشر

$\underset{\text{س}\to 5}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}-5}{\sqrt[5]{\text{س}+27}-2} = \frac{5-5}{\sqrt[5]{5+27}-2} = \frac{0}{0}$

مسبب المشكلة (الذي سوف نقوم بحذفه)

س ←٥   س = ٥ $\Leftarrow$ س – ٥ = ٠

٥ – س = ٠

$\underset{\text{س}\to 5}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}-5}{\sqrt[5]{\text{س}+27}-2}$

نفرض ان $\text{ص} = \sqrt[5]{\text{س}+27}$ عندما س ←

$(\text{ص})^5 = (\sqrt[5]{\text{س}+27})^5$ فان $\text{ص} = \sqrt[5]{\text{س}+27}$

$\text{ص}^5 = \text{س}+27$ $\text{ص} = \sqrt[5]{5+27} = 2$

∴ فان ص ← ٢

$\underset{\text{س}\to 5}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}-5}{\sqrt[5]{\text{س}+27}-2}$

نستبدل ما قمنا بفرضه

$\underset{\text{ص}\to 2}{\text{نهـا}} \frac{\text{ص}^5-27-5}{\text{ص}-2}$

$= \underset{\text{ص}\to 2}{\text{نهـا}} \frac{\text{ص}^5-32}{\text{ص}-2}$

نستخدم القسمة التركيبية

ص = ٢ جذر البسط $\Leftarrow$ ص – ٢ عامل البسط

	ص⁵	ص⁴	ص³	ص²	ص	ثابت
	١	٠	٠	٠	٠	-٢٣
$\boxed{2}$		٢	٤	٨	١٦	٣٢
	١	٢	٤	٨	١٦	صفر

الناتج $\text{ص}^4+2\text{ص}^3+4\text{ص}^2+8\text{ص}+16$

$= \underset{\text{ص}\to 2}{\text{نهـا}} \frac{(\text{ص}-2)(\text{ص}^4+2\text{ص}^3+4\text{ص}^2+8\text{ص}+16)}{\text{ص}-2}$

$= \underset{\text{ص}\to 2}{\text{نهـا}} \frac{(\text{ص}^4+2\text{ص}^3+4\text{ص}^2+8\text{ص}+16)}{1}$

$= \frac{((2)^4+2(2)^3+4(2)^2+8(2)+16)}{1} = 96$

0772044048 - 0787556274
إعداد : أ . سائد الوردات

٣) $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{(٤٩)^{\text{س}} - (٧)^{\text{س}}}{١ - (٧)^{\text{س}}}$

الحل : التعويض المباشر

$$\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{(٤٩)^{\text{س}} - (٧)^{\text{س}}}{١ - (٧)^{\text{س}}} = \frac{(٤٩)^{٠} - (٧)^{٠}}{١ - (٧)^{٠}} = \frac{٠}{٠}$$

مسبب المشكلة (الذي سوف نقوم بحذفه)

س ← ٠ س = ٠ ⇐ س = ٠

س = ٠

$$\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{(٤٩)^{\text{س}} - (٧)^{\text{س}}}{١ - (٧)^{\text{س}}}$$

$$= \lim_{\text{س} \to ٠} \frac{((٧)^{٢})^{\text{س}} - (٧)^{\text{س}}}{١ - (٧)^{\text{س}}}$$

$$= \lim_{\text{س} \to ٠} \frac{((٧)^{\text{س}})^{٢} - (٧)^{\text{س}}}{١ - (٧)^{\text{س}}}$$

نفرض ان ص $= ٧^{\text{س}}$ عندما س ←٠

فان ص $= ٧^{\text{س}}$

ص $= ٧^{٠} = ١$

∴ فان ص ←١

$$= \lim_{\text{س} \to ٠} \frac{((٧)^{\text{س}})^{٢} - (٧)^{\text{س}}}{١ - (٧)^{\text{س}}}$$

نستدل ما قمنا بفرضه

$$= \lim_{\text{ص} \to ١} \frac{(\text{ص})^{٢} - \text{ص}}{١ - \text{ص}}$$

$$= \lim_{\text{ص} \to ١} \frac{\text{ص}(\text{ص} - ١)}{١ - \text{ص}}$$

$$= \lim_{\text{ص} \to ١} \frac{\text{ص} \times -١}{١} = \frac{١ \times -١}{١} = -١$$

٤) $\lim_{\text{س} \to ١} \frac{١٦^{\text{س}} - ٣ \times ٤^{\text{س}} - ٤}{٤^{\text{س}} - ٤}$

الحل : التعويض المباشر

$$\lim_{\text{س} \to ١} \frac{١٦^{\text{س}} - ٣ \times ٤^{\text{س}} - ٤}{٤^{\text{س}} - ٤} = \frac{١٦^{١} - ٣ \times ٤^{١} - ٤}{٤^{١} - ٤} = \frac{٠}{٠}$$

مسبب المشكلة (الذي سوف نقوم بحذفه)

س ←٤ س = ٤ ⇐ س - ٤ = ٠

٤ - س = ٠

$$\lim_{\text{س} \to ١} \frac{(٤^{\text{س}})^{٢} - ٣ \times ٤^{\text{س}} - ٤}{٤^{\text{س}} - ٤}$$

$$\lim_{\text{س} \to ١} \frac{(٤^{٢})^{\text{س}} - ٣ \times ٤^{\text{س}} - ٤}{٤^{\text{س}} - ٤}$$

نفرض ان ص $= ٤^{\text{س}}$ عندما س ←٠

فان ص $= ٤^{\text{س}}$

ص $= ٤^{\text{س}} = ٤^{١}$

$$\lim_{\text{س} \to ١} \frac{(٤^{٢})^{\text{س}} - ٣ \times ٤^{\text{س}} - ٤}{٤^{\text{س}} - ٤}$$

نستبدل ما قمنا بفرضه

$$\lim_{\text{ص} \to ٤} \frac{(\text{ص})^{٢} - ٣ \times \text{ص} - ٤}{\text{ص} - ٤}$$

$$\lim_{\text{ص} \to ٤} \frac{(\text{ص} - ٤)(\text{ص} + ١)}{\text{ص} - ٤}$$

$$\lim_{\text{ص} \to ٤} \frac{(\text{ص} + ١)}{١} = \frac{(١ + ١)}{١} = ٢$$

التجزئة

اولا

فصل حدين في نفس المقدار بينهما ان كان جمع أو طرح

ثانيا

فصل حدين بينهما اشارة ضرب

أولا : فصل حدين في نفس المقدار بينهما إشارة جمع وطرح

خطوات الحل :

١) التعويض المباشر $\frac{٠}{٠}$ أو $\frac{ع}{٠} \pm \frac{ع}{٠}$

٢) ابحث عن **مسبب المشكلة النهاية** وتكون هي جزء من الحل .

٣) استخدم التجزئة بسبب احتواء النهاية على ....

٤) **اختصار** بين البسط والمقام (**تنتهي المشكلة**)

٥) التعويض المباشر وتكون **النهاية** اما

موجودة

غير موجودة

أمثلة : جد قيمة النهايات التالية

١) $\lim\limits_{س \to ١} \frac{\sqrt{س+٣} - \sqrt[٣]{س+٧}}{س-١}$

الحل : التعويض المباشر

$\lim\limits_{س \to ١} \frac{\sqrt{س+٣} - \sqrt[٣]{س+٧}}{س-١} = \frac{\sqrt{١+٣} - \sqrt[٣]{١+٧}}{١-١} = \frac{٠}{٠}$

مسبب المشكلة (الذي سوف نقوم بحذفه)

$س \to ١ \quad س = ١ \Leftarrow س - ١ = ٠$

$١ - س = ٠$

$= \lim\limits_{س \to ١} \frac{\sqrt{س+٣} - \sqrt[٣]{س+٧}}{س-١}$

فكرة السؤال

إن هنا جذرين ليس معهم مضاف إليه

$\lim\limits_{س \to ١} \frac{\sqrt{س+٣} - ٢ + ٢ - \sqrt[٣]{س+٧}}{س-١}$

عبارة عن التعويض قيمة التي يقترب منها النهاية في الجذور

وكل جذر ناتجة يضاف إليه مع إشارة

وشرط هنا بسبب عدم وجود مضاف إليه إن يكون ناتج جمعهم يساوي صفر

كيفية التوزيع

$\lim\limits_{س \to أ}$ الاقتران الاصلي مع المضاف اليه + $\lim\limits_{س \to أ}$ مضاف اليه مع الاقتران الاصلي

$= \lim\limits_{س \to ١} \frac{\sqrt{س+٣} - ٢}{س-١} + \lim\limits_{س \to ١} \frac{٢ - \sqrt[٣]{س+٧}}{س-١}$

شرط بعد التوزيع ان يكون ناتج التعويض $\frac{٠}{٠} \pm \frac{٠}{٠}$

$= \lim\limits_{س \to ١} \frac{\sqrt{س+٣} - ٢}{س-١} \times \frac{\sqrt{س+٣} + ٢}{\sqrt{س+٣} + ٢} + \lim\limits_{س \to ١} \frac{٢ - \sqrt[٣]{س+٧}}{س-١} \times \frac{(٢)^٢ + ٢\sqrt[٣]{س+٧} + (\sqrt[٣]{س+٧})^٢}{(٢)^٢ + ٢\sqrt[٣]{س+٧} + (\sqrt[٣]{س+٧})^٢}$

$= \lim\limits_{س \to ١} \frac{(\sqrt{س+٣})^٢ - (٢)^٢}{س-١} \times \frac{١}{\sqrt{س+٣} + ٢} + \lim\limits_{س \to ١} \frac{(٢)^٣ - (\sqrt[٣]{س+٧})^٣}{س-١} \times \frac{١}{(٢)^٢ + ٢\sqrt[٣]{س+٧} + (\sqrt[٣]{س+٧})^٢}$

$= \lim\limits_{س \to ١} \frac{س+٣-٤}{س-١} \times \frac{١}{\sqrt{س+٣} + ٢} + \lim\limits_{س \to ١} \frac{٨-(س+٧)}{س-١} \times \frac{١}{(٢)^٢ + ٢\sqrt[٣]{س+٧} + (\sqrt[٣]{س+٧})^٢}$

$= \lim\limits_{س \to ١} \frac{س-١}{س-١} \times \frac{١}{\sqrt{س+٣} + ٢} + \lim\limits_{س \to ١} \frac{٨-س-٧}{س-١} \times \frac{١}{(٢)^٢ + ٢\sqrt[٣]{س+٧} + (\sqrt[٣]{س+٧})^٢}$

$= \lim\limits_{س \to ١} \frac{س-١}{س-١} \times \frac{١}{\sqrt{س+٣} + ٢} + \lim\limits_{س \to ١} \frac{١-س}{س-١} \times \frac{١}{(٢)^٢ + ٢\sqrt[٣]{س+٧} + (\sqrt[٣]{س+٧})^٢}$

$= \lim\limits_{س \to ١} \frac{١}{١} \times \frac{١}{\sqrt{س+٣} + ٢} + \lim\limits_{س \to ١} \frac{-١}{١} \times \frac{١}{(٢)^٢ + ٢\sqrt[٣]{س+٧} + (\sqrt[٣]{س+٧})^٢}$

$= \frac{١}{١} \times \frac{١}{\sqrt{١+٣} + ٢} + \frac{-١}{١} \times \frac{١}{(٢)^٢ + ٢\sqrt[٣]{١+٧} + (\sqrt[٣]{١+٧})^٢} = \frac{١}{٦}$

٢) $\lim\limits_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س^٢+٩} + \sqrt[٣]{٢س} - ٧}{س-٤}$

الحل : التعويض المباشر

$\lim\limits_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س^٢+٩} + \sqrt[٣]{٢س} - ٧}{س-٤} = \frac{\sqrt{٤^٢+٩} + \sqrt[٣]{٢(٤)} - ٧}{٤-٤} = \frac{٠}{٠}$

مسبب المشكلة (الذي سوف نقوم بحذفه)

$س \to ٤ \quad س = ٤ \Leftarrow س - ٤ = ٠$

$٤ - س = ٠$

$= \lim\limits_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س^٢+٩} + \sqrt[٣]{٢س} - ٧}{س-٤}$

فكرة السؤال

هنا في السؤال مضاف إليه وقيمته ‎-٧

ننتبه إلى إن التعويض قيمة التي يقترب منها النهاية في الجذر الأول

$\sqrt{س^٢+٩} = \sqrt{(٤)^٢+٩} = \sqrt{٢٥} = ٥$

لذلك نطرح ونضيف العدد ٥

وأيضا ناتج التعويض قيمة التي يقترب منها النهاية في الجذر الثاني

$\sqrt[٣]{٢س} = \sqrt[٣]{٢(٤)} = \sqrt[٣]{٨} = ٢$

لذلك نطرح ونضيف العدد ٢

فيصبح شكل النهاية

$$=\lim_{س\to٤}\frac{\sqrt{س^{٢}+٩}-٥+٥+\sqrt[٣]{٢س}-٢+٢-٧}{س-٤}$$

$$=\lim_{س\to٤}\frac{\sqrt{س^{٢}+٩}-٥+\sqrt[٣]{٢س}-٢}{س-٤}$$

$$=\lim_{س\to٤}\frac{\sqrt{س^{٢}+٩}-٥}{س-٤}+\lim_{س\to٤}\frac{\sqrt[٣]{٢س}-٢}{س-٤}$$

$$=\lim_{س\to٤}\frac{\sqrt{س^{٢}+٩}-٥}{س-٤}\times\frac{\sqrt{س+٩}+٥}{\sqrt{س+٩}+٥}+\lim_{س\to٤}\frac{\sqrt[٣]{٢س}-٢}{س-٤}\times\frac{(\sqrt[٣]{٢س})^{٢}+٢\sqrt[٣]{٢س}+(٢)^{٢}}{(\sqrt[٣]{٢س})^{٢}+٢\sqrt[٣]{٢س}+(٢)^{٢}}$$

$$=\lim_{س\to٤}\frac{(\sqrt{س^{٢}+٩})^{٢}-(٥)^{٢}}{س-٤}\times\frac{١}{\sqrt{س+٩}+٥}+\lim_{س\to٤}\frac{(\sqrt[٣]{٢س})^{٣}-(٢)^{٣}}{س-٤}\times\frac{١}{(\sqrt[٣]{٢س})^{٢}+٢\sqrt[٣]{٢س}+(٢)^{٢}}$$

$$=\lim_{س\to٤}\frac{س^{٢}+٩-٢٥}{س-٤}\times\frac{١}{\sqrt{س+٩}+٥}+\lim_{س\to٤}\frac{٢س-٨}{س-٤}\times\frac{١}{(\sqrt[٣]{٢س})^{٢}+٢\sqrt[٣]{٢س}+(٢)^{٢}}$$

$$=\lim_{س\to٤}\frac{س^{٢}-١٦}{س-٤}\times\frac{١}{\sqrt{س+٩}+٥}+\lim_{س\to٤}\frac{٢س-٨}{س-٤}\times\frac{١}{(\sqrt[٣]{٢س})^{٢}+٢\sqrt[٣]{٢س}+(٢)^{٢}}$$

$$=\lim_{س\to٤}\frac{(س+٤)(س-٤)}{س-٤}\times\frac{١}{\sqrt{س+٩}+٥}+\lim_{س\to٤}\frac{٢(س-٤)}{س-٤}\times\frac{١}{(\sqrt[٣]{٢س})^{٢}+٢\sqrt[٣]{٢س}+(٢)^{٢}}$$

$$=\lim_{س\to٤}\frac{(س+٤)}{١}\times\frac{١}{\sqrt{س+٩}+٥}+\lim_{س\to٤}\frac{٢}{١}\times\frac{١}{(\sqrt[٣]{٢س})^{٢}+٢\sqrt[٣]{٢س}+(٢)^{٢}}$$

$$=\frac{(٤+٤)}{١}\times\frac{١}{\sqrt{٤+٩}+٥}+\frac{٢}{١}\times\frac{١}{(\sqrt[٣]{٢(٤)})^{٢}+٢\sqrt[٣]{٢(٤)}+(٢)^{٢}}=\frac{٢٥}{٠٠}$$

ملاحظة

في عملية التجزئة إذا لم يكن هناك مضاف إليه ناتج الجمع التعويض هو نفسه لكن عكس الناتج أي عكس الإشارة كما في المثال الأول

في عملية التجزئة إذا لم يكن هناك مضاف إليه ناتج الجمع ليس نفسه لكن مجموعهن هو عكس ناتج المضاف إليه حتى يتم حذفه كما في المثال الثاني

٣) $\lim_{س\to٣}\frac{٢س^{٢}+\sqrt{س+٦}-٢١}{س-٣}$

الحل : التعويض المباشر

$$\lim_{س\to٣}\frac{٢س^{٢}+\sqrt{س+٦}-٢١}{س-٣}=\frac{٢(٣)^{٢}+\sqrt{٣+٦}-٢١}{٣-٣}=\frac{٠}{٠}$$

مسبب المشكلة (الذي سوف نقوم بحذفه)

س ← ٣   س = ٣ $\Leftarrow$ س − ٣ = ٠

٣ − س = ٠

$$\lim_{س\to٣}\frac{٢س^{٢}+\sqrt{س+٦}-٢١}{س-٣}$$

نعوض قيمة النهاية في الاقترانين

الاقتران الاول $٢س^{٢}=٢(٣)^{٢}=١٨$

نطرح وونضيف العدد ١٨

الاقتران الثاني $\sqrt{س+٦}=\sqrt{٣+٦}=\sqrt{٩}=٣$

نطرح ونضيف العدد ٣

$$=\lim_{س\to٣}\frac{٢س^{٢}-١٨+١٨+\sqrt{س+٦}-٢١-٣+٣}{س-٣}$$

$$=\lim_{س\to٣}\frac{٢س^{٢}-١٨+\sqrt{س+٦}-٣}{س-٣}$$

$$=\lim_{س\to٣}\frac{٢س^{٢}-١٨}{س-٣}+\lim_{س\to٣}\frac{\sqrt{س+٦}-٣}{س-٣}$$

$$=\lim_{س\to٣}\frac{٢س^{٢}-١٨}{س-٣}+\lim_{س\to٣}\frac{\sqrt{س+٦}-٣}{س-٣}\times\frac{\sqrt{س+٦}+٣}{\sqrt{س+٦}+٣}$$

$$=\lim_{س\to٣}\frac{٢س^{٢}-١٨}{س-٣}+\lim_{س\to٣}\frac{(\sqrt{س+٦})^{٢}-(٣)^{٢}}{س-٣}\times\frac{١}{\sqrt{س+٦}+٣}$$

$$=\lim_{س\to٣}\frac{٢(س^{٢}-٩)}{س-٣}+\lim_{س\to٣}\frac{س+٦-٩}{س-٣}\times\frac{١}{\sqrt{س+٦}+٣}$$

$$=\lim_{س\to٣}\frac{٢(س-٣)(س+٣)}{س-٣}+\lim_{س\to٣}\frac{س-٣}{س-٣}\times\frac{١}{\sqrt{س+٦}+٣}$$

$$=\lim_{س\to٣}\frac{٢(س+٣)}{١}+\lim_{س\to٣}\frac{١}{١}\times\frac{١}{\sqrt{س+٦}+٣}$$

$$=\frac{٢(٣+٣)}{١}+\frac{١}{١}\times\frac{١}{\sqrt{٣+٦}+٣}=\frac{٧٣}{٦}$$

٤) $\lim_{س\to١}\frac{\sqrt{س+٣}-\sqrt{س}-١}{س-١}$

الحل :

ثانيا : فصل حدين بينهما اشارة ضرب (صاحل ضرب اقترانين)

فكرة هذه الحالة

يكون الحد الأول هو حاصل ضرب اقترانيين يتم تعويض القيمة التي يقترب منه النهاية في احدهما فقط والأخر يترك دون تعويض

خطوات الحل :

١) التعويض المباشر $\frac{\cdot}{\cdot}$ أو $\frac{\text{ع}}{\cdot} \pm \frac{\text{ع}}{\cdot}$

٢) ابحث عن **مسبب المشكلة النهاية** وتكون هي جزء من الحل .

٣) استخدم التجزئة بسبب احتواء النهاية على ....

٤) **اختصار** بين البسط والمقام (**تنتهي المشكلة**)

٥) التعويض المباشر وتكون **النهاية** اما

موجودة **غير موجودة**

أمثلة : جد قيمة النهايات التالية

١) $\underset{\text{س}\to 8}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{2}\sqrt[3]{\text{س}} - 128}{\text{س} - 8}$

الحل : التعويض المباشر

$$\underset{\text{س}\to 8}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{2}\sqrt[3]{\text{س}} - 128}{\text{س} - 8} = \frac{(8)^{2}\sqrt[3]{8} - 128}{8 - 8} = \frac{\cdot}{\cdot}$$

مسبب المشكلة (الذي سوف نقوم بحذفه)

س ← ٨ س = ٨ ⟸ س − ٨ = ٠

٨ − س = ٠

$$= \underset{\text{س}\to 8}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{2}\sqrt[3]{\text{س}} - 128}{\text{س} - 8}$$

تعويض قيمة التي يقترب منها النهاية في احد الاقترانيين فقط والأخر يترك دون تعويض ويفضل إن تختار الأصعب في عملية التعويض

$\text{س}^{2}\sqrt[3]{\text{س}} = \text{س}^{2}\sqrt[3]{8} = 2\text{س}^{2}$

نطرح ونضيف (2س^{2})

$$= \underset{\text{س}\to 8}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{2}\sqrt[3]{\text{س}} - 128 - 2\text{س}^{2} + 2\text{س}^{2}}{\text{س} - 8}$$

كيفية التوزيع

$\underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نهـا}}$ الحد الاول مع المضاف اليه + $\underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نهـا}}$ مضاف اليه مع الحد الثاني

$$= \underset{\text{س}\to 8}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{2}\sqrt[3]{\text{س}} - 2\text{س}^{2}}{\text{س} - 8} + \underset{\text{س}\to 8}{\text{نهـا}} \frac{2\text{س}^{2} - 128}{\text{س} - 8}$$

دائما بعد عملية التجزئه هناك اخراج عامل مشترك

$$= \underset{\text{س}\to 8}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{2}(\sqrt[3]{\text{س}} - 2)}{\text{س} - 8} + \underset{\text{س}\to 8}{\text{نهـا}} \frac{2(\text{س}^{2} - 64)}{\text{س} - 8}$$

$$= \underset{\text{س}\to 8}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{2}(\sqrt[3]{\text{س}} - 2)}{(\sqrt[3]{\text{س}} - 2)((\sqrt[3]{\text{س}})^{2} + 2\sqrt[3]{\text{س}} + (2)^{2})} + \underset{\text{س}\to 8}{\text{نهـا}} \frac{2(\text{س} + 8)(\text{س} - 8)}{\text{س} - 8}$$

$$= \underset{\text{س}\to 8}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{2}}{((\sqrt[3]{\text{س}})^{2} + 2\sqrt[3]{\text{س}} + (2)^{2})} + \underset{\text{س}\to 8}{\text{نهـا}} \frac{2(\text{س} + 8)}{1}$$

$$= \frac{(8)^{2}}{((\sqrt[3]{8})^{2} + 2\sqrt[3]{8} + (2)^{2})} + \frac{2(8 + 8)}{1} = \frac{112}{3}$$

٢) $\underset{\text{س}\to 2}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{2}\sqrt{\text{س} + 2} - 8}{\text{س} - 2}$

الحل :

٣) $\underset{\text{س}\to 4}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س} + 2)^{2}\sqrt{\text{س}} - 72}{\text{س} - 4}$

الحل :

٤) $\lim\limits_{س \to ١} \frac{\sqrt{س}\,\sqrt[٣]{س}-١}{س-١}$

الحل : التعويض المباشر

$$\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س}\,\sqrt[٣]{س}-١}{س-١} = \frac{\sqrt{١}\,\sqrt[٣]{١}-١}{١-١} = \frac{٠}{٠}$$

مسبب المشكلة (الذي سوف نقوم بحذفه)

س ← ١   س = ١ $\Leftarrow$ س − ١ = ٠

١ − س = ٠

$$= \lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س}\,\sqrt[٣]{س}-١}{س-١}$$

$$\sqrt{س}\,\sqrt[٣]{س} = \sqrt{س}\,\sqrt[٣]{١} = \sqrt{س}$$

نطرح ونضيف ($\sqrt{س}$)

$$= \lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س}\,\sqrt[٣]{س}-١-\sqrt{س}+\sqrt{س}}{س-١}$$

$$= \lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س}\,\sqrt[٣]{س}-\sqrt{س}}{س-١} + \lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س}-١}{س-١}$$

$$= \lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س}(\sqrt[٣]{س}-١)}{س-١} + \lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س}-١}{س-١}$$

$$= \lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س}(\sqrt[٣]{س}-١)}{(\sqrt[٣]{س}-١)((\sqrt[٣]{س})^٢+\sqrt[٣]{س}(١)+(١)^٢)} + \lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س}-١}{(\sqrt{س}-١)(\sqrt{س}+١)}$$

$$= \lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س}}{((\sqrt[٣]{س})^٢+\sqrt[٣]{س}+(١)^٢)} + \lim_{س \to ١} \frac{١}{(\sqrt{س}+١)}$$

$$= \frac{\sqrt{١}}{((\sqrt[٣]{١})^٢+\sqrt[٣]{١}+(١)^٢)} + \frac{١}{(\sqrt{١}+١)} = \frac{٥}{٦}$$

الرونق في الرياضيات
إعداد : أ. سائد الوردات
0772044048 - 0787556274

نهاية الاقترانات المتشعبة

(نهاية الاقترانات المعرفة على اكثر من قاعدة)

صريح   قيمة مطلقة   أكبر عدد صحيح

أولا : نهاية الاقتران المتشعب " صريح "

أهم الملاحظات سوف نواجهها في **الاقترانات المتشعبة ثلاثة نقاط** :

١) **النقطة العادية** : عندها نعوض مباشرة في القاعدة المناسبة ونقطة غير موجودة في الفترات .

مثال ذلك :

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س}^{٢} & ، \; ٠ \leq \text{س} < ٢ \\ ٤ - \text{س} & ، \; ٢ \leq \text{س} < ٤ \end{cases}$$

جد $\lim_{\text{س} \to ٣} \text{ق(س)}$

تسمى نقطة عادية ونعوضها في الاقتران المناسب

$$\lim_{\text{س} \to ٣} ٤ - \text{س} = ٤ - ٣ = ١$$

٢) **نقطة التحول** : عندها نجد النهاية من اليمين ومن اليسار .

مثال ذلك :

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س}^{٢} & ، \; ٠ \leq \text{س} < ٢ \\ ٤ - \text{س} & ، \; ٢ \leq \text{س} < ٤ \end{cases}$$

جد $\lim_{\text{س} \to ٢} \text{ق(س)}$

نقطة التحول

$$\lim_{\text{س} \to ٢^{+}} \text{ق(س)} = \lim_{\text{س} \to ٢^{+}} ٤ - \text{س} = ٤ - ٢ = ٢$$

$$\lim_{\text{س} \to ٢^{-}} \text{ق(س)} = \lim_{\text{س} \to ٢^{-}} \text{س}^{٢} = ٢^{٢} = ٤$$

بما ان

$$\lim_{\text{س} \to ٢^{+}} \text{ق(س)} \neq \lim_{\text{س} \to ٢^{-}} \text{ق(س)}$$

$$\therefore \lim_{\text{س} \to ٢} \text{ق(س)} \; \text{غ . م}$$

٣) **نقاط الاطراف** : عندها نجد النهاية من جهة واحده فقط .

ملاحظة
النهاية بشكل عام عند الإطراف أو الفترات تكون دائما (غير موجودة)

مثال ذلك :

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س}^{٢} & ، \; ٠ \leq \text{س} < ٢ \\ ٤ - \text{س} & ، \; ٢ \leq \text{س} < ٤ \end{cases}$$

جد $\lim_{\text{س} \to ٠^{+}} \text{ق(س)}$

$$\lim_{\text{س} \to ٠^{+}} \text{ق(س)} = \lim_{\text{س} \to ٠^{+}} \text{س}^{٢} = (٠)^{٢} = ٠$$

الصورة فقط عند إشارة المساواة

س > أ $\Leftarrow$ **النهاية من اليمين** $\lim_{\text{س} \to \text{أ}^{+}} \text{ق(س)}$

س < أ $\Leftarrow$ **النهاية من اليسار** $\lim_{\text{س} \to \text{أ}^{-}} \text{ق(س)}$

أمثلة : جد قيمة النهايات التالية .

١)

$$ق(س) = \begin{cases} ٢س + ١ & ، \ ١ < س < ٣ \\ ٣ - ٢س & ، \ ٣ \le س < ٥ \\ -٧ & ، \ س \ge ٥ \end{cases}$$

جد

١) $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}}\ ق(س)$ ٢) $\underset{س \to ٥}{\text{نهـا}}\ ق(س)$ ٣) $\underset{س \to ٤}{\text{نهـا}}\ ق(س)$

٤) $\underset{س \to ٩}{\text{نهـا}}\ ق(س)$ ٥) ق(١) ٦) ق(٣)

٧) ق(٥) ٨) $\underset{س \to ١^{+}}{\text{نهـا}}\ ق(س)$

الحل :

١) $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}}\ ق(س)$

$\underset{س \to ٣^{+}}{\text{نهـا}}\ ق(س) = \underset{س \to ٣^{+}}{\text{نهـا}}\ ٣ - ٢س = ٣ - ٢(٣) = -٣$

$\underset{س \to ٣^{-}}{\text{نهـا}}\ ق(س) = \underset{س \to ٣^{-}}{\text{نهـا}}\ ٢س + ١ = ٢(٣) + ١ = ٧$

بما ان $\underset{س \to ٣^{+}}{\text{نهـا}}\ ق(س) \ne \underset{س \to ٣^{-}}{\text{نهـا}}\ ق(س)$

$\therefore \underset{س \to ٣}{\text{نهـا}}\ ق(س)$ غ.م

٢) $\underset{س \to ٥}{\text{نهـا}}\ ق(س)$

$\underset{س \to ٥^{+}}{\text{نهـا}}\ ق(س) = \underset{س \to ٥^{+}}{\text{نهـا}}\ -٧ = -٧$

$\underset{س \to ٥^{-}}{\text{نهـا}}\ ق(س) = \underset{س \to ٥^{-}}{\text{نهـا}}\ ٣ - ٢س = ٣ - ٢(٥) = -٧$

بما ان $\underset{س \to ٥^{+}}{\text{نهـا}}\ ق(س) = \underset{س \to ٥^{-}}{\text{نهـا}}\ ق(س)$

$\therefore \underset{س \to ٥}{\text{نهـا}}\ ق(س) = -٧$

٣) $\underset{س \to ٤}{\text{نهـا}}\ ق(س)$

$\underset{س \to ٤}{\text{نهـا}}\ ق(س) = \underset{س \to ٤}{\text{نهـا}}\ ٣ - ٢س = ٣ - ٢ \times ٤ = -٥$

٤) $\underset{س \to ٩}{\text{نهـا}}\ ق(س)$

$\underset{س \to ٩}{\text{نهـا}}\ ق(س) = \underset{س \to ٩}{\text{نهـا}}\ -٧ = -٧$

٥) ق(١) = غ . م (**عدم وجود اشارة مساواه**)

٦) ق(٣) = ٣ − ٢س = ٣ − ٢ × ٣ = −٣

٧) ق(٥) = −٧

٨) $\underset{س \to ١^{+}}{\text{نهـا}}\ ق(س)$

$\underset{س \to ١^{+}}{\text{نهـا}}\ ق(س) = \underset{س \to ١^{+}}{\text{نهـا}}\ ٢س + ١ = ٢(١) + ١ = ٣$

٢)

$$ق(س) = \begin{cases} ٢س^{٢} - ١ & ، \ س \le ١ \\ ٥س - ٤ & ، \ س > ١ \end{cases}$$

جد

١) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}}\ ق(س)$ ٢) ق(١)

الحل :

١) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}}\ ق(س)$

$\underset{س \to ١^{+}}{\text{نهـا}}\ ق(س) = \underset{س \to ١^{+}}{\text{نهـا}}\ ٢س^{٢} - ١ = ٢(١)^{٢} - ١ = ١$

$\underset{س \to ١^{-}}{\text{نهـا}}\ ق(س) = \underset{س \to ١^{-}}{\text{نهـا}}\ ٥س - ٤ = ٥(١) - ٤ = ١$

بما ان $\underset{س \to ١^{+}}{\text{نهـا}}\ ق(س) = \underset{س \to ١^{-}}{\text{نهـا}}\ ق(س)$

$\therefore \underset{س \to ١}{\text{نهـا}}\ ق(س) = ١$

٢) ق(١) = $٢س^{٢} - ١ = ٢(١)^{٢} - ١ = ١$

نقول إن هذا الاقتران متصل لأن

النهاية بشكل عام تساوي الصورة

$\underset{س \to ١}{\text{نهـا}}\ ق(س) = ق(١)$

" **إن أرضيناك فتحدث عنا،**

وإن لم نرضك فتحدث إلينا "

٣) $\text{ق(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٢} - ٩}{\text{س} - ٣} & ، \text{ س} \neq ٣ \\ ٦ & ، \text{ س} = ٣ \end{cases}$

س ≠ ٣ النهاية من اليمين
وأيضا من اليسار

جد ١) $\text{نهـا}_{\text{س}\to ٣}\ \text{ق(س)}$ ٢) ق (٢)

الحل :

١) $\text{نهـا}_{\text{س}\to ٣}\ \text{ق(س)} = \text{نهـا}_{\text{س}\to ٣}\ \dfrac{\text{س}^{٢} - ٩}{\text{س} - ٣}$

بما إن الاقتران كسري (نسبي)

يجب علينا التعويض المباشر

إما إن يكون ناتج التعويض

قيمة (موجودة) $\dfrac{٠}{٠}$ **(تحل بالطرق الستة)**

$= \text{نهـا}_{\text{س}\to ٣}\ \dfrac{\text{س}^{٢} - ٩}{\text{س} - ٣}$

التعويض المباشر

$\text{نهـا}_{\text{س}\to ٣}\ \dfrac{\text{س}^{٢} - ٩}{\text{س} - ٣} = \dfrac{(٣)^{٢} - ٩}{(٣) - ٣} = \dfrac{٠}{٠}$

مسبب المشكلة (الذي سوف نقوم بحذفه)

س ← ٣   س = ٣ $\Leftarrow$ س − ٣ = ٠

٣ − س = ٠

$= \text{نهـا}_{\text{س}\to ٣}\ \dfrac{(\text{س}+٣)(\text{س}-٣)}{\text{س} - ٣}$

$= \text{نهـا}_{\text{س}\to ٣}\ \dfrac{(\text{س}+٣)}{١} = \dfrac{(٣+٣)}{١} = ٦$

إذا النهاية بكل عام
موجودة وتساوي ٦

$\therefore \text{نهـا}_{\text{س}\to ٣^{+}}\ \text{ق(س)} = \text{نهـا}_{\text{س}\to ٣^{-}}\ \text{ق(س)}$

٢) ق(٣) = ٦

ثانيا : اقتران القيمة المطلقة

ناتج التعويض (داخل القيمة الطلقة)

موجب   **سالب**   **صفر**

١) **موجبه** : نهمل القيمة المطلقة ثم نحسب النهاية .

مثال ذلك :

$\text{نهـا}_{\text{س}\to ٩}\ |\text{س} - ٦| = |٩ - ٦| = |٣| = ٣$

بما ان ناتج التعويض موجب نهمل القيمة المطلقة

$\text{نهـا}_{\text{س}\to ٩}\ \text{س} - ٦ = ٩ - ٦ = ٣$

٢) **سالبه** : نهمل القيمة المطلقة **ونضرب ما داخل القيمة المطلقة بالسالب** ثم نحسب قيمة النهاية .

مثال ذلك :

$\text{نهـا}_{\text{س}\to ٣}\ |\text{س} - ٥| = |٣ - ٥| = |-٢| = ٢$

بما ان ناتج التعويض سالبة نهمل القيمة المطلقة

$\text{نهـا}_{\text{س}\to ٣}\ ٥ - \text{س} = ٥ - ٣ = ٢$

٣) **صفر** : اعادة التعريف اجباري أو بمعنى **البحث عن قاعدتي الاقتران**

مثال ذلك :

$\text{نهـا}_{\text{س}\to ٢}\ |\text{س} - ٢| = |٢ - ٢| = |٠|$

بما ان ناتج التعويض صفر يجب علينا اعادة التعريف

شرح اعادة تعريف القيمة المطلقة

بداخله

اقتران خطي — اقتران تربيعي

اولا : اعادة تعريف القيمة المطلقة **بداخله (اقتران خطي)**

خطوات الحل

١) نساوي ما داخل القيمة المطلقة بالصفر (لايجاد جذور أو اصفار المقام)

مثال ذلك :

نهــا (س←٢) |س − ٢| = |٢ − ٢| = |٠|

بما ان ناتج التعويض صفر يجب علينا اعادة التعريف

س − ٢ = صفر ⟸ س = ٢

٢) نرسم خط الاعداد

٣) نعين على خط الاعداد الجذور أو اصفار الفترات من السؤال

+ ∞ ٢ - ∞

٤) نفحص الاشارة على خط الاعداد

نفس اشارة معامل س — عكس اشارة معامل س

س = أصفار الاقتران

تذكر

*** إشارة السالب على خط الإعداد تعني ضرب القاعدة التي تحتها إشارة سالب (بالسالب)**

**** الإشارة الموجبة تعني القاعدة كما هي**

س − ٢ — - (س − ٢) = ٢ − س

+ + + + + + + + + + — - - - - - - - - - - - - - - -

٢

ق(س) = { س − ٢ ، س ≥ ٢ ؛ ٢ − س ، س < ٢ }

إشارة المساواة تم وضعها على س أكبر لان معامل س في الاقتران الأصلي **إشارة موجبه**

بعد عملية التعريف المطلق تبين لي ان النقطة (٢) التي يقترب عندها النهاية اصبحت **نقطة تحول**

نهــا (س←٢) |س − ٢|

نهــا (س←٢⁺) س − ٢ = ٢ − ٢ = ٠ ، نهــا (س←٢⁻) ٢ − س = ٢ − ٢ = ٠

بما ان

نهــا (س←٢⁺) س − ٢ = نهــا (س←٢⁻) ٢ − س

∴ نهــا (س←٢) |س − ٢| = ٠

الرونق في الرياضيات إعداد : أ. سائد الوردات 0772044048 - 07

ثانيا :اعادة تعريف القيمة المطلقة **بداخلة (اقتران تربيعي)**

خطوات الحل

١) نساوي ما داخل القيمة المطلقة بالصفر (لايجاد جذور أو اصفار المقام)

مثال ذلك :

نهـا$_{س \leftarrow ٠}$ |س − س^{٢}| = |٠ − (٠)| = |٠|

بما ان ناتج التعويض صفر يجب علينا اعادة التعريف

س − س^{٢} = صفر ⟸ س (١ − س) = صفر

س = صفر أو س = ١

ملاحظة

إجباري بما إن الاقتران تربيعي سوف يظهر صفري اقتران

٢) نرسم خط الاعداد

٣) نعين على خط الاعداد اصفار الاقتران أو جذور الاقتران و الفترات

٠ ١

٤) كيفية فحص اشارة خط الاعداد للاقتران التربيعي

هناك مجموعة حالات الخط الاعداد :

أ) اذا كان المميز ب^{٢} − ٤أجـ < صفر

فان للمعادلة جذرين حقيقيين مختلفين (له حلان)

نفس اشارة معامل س^{٢} عكس اشارة معامل س^{٢} نفس اشارة معامل س^{٢}

م ن

ب) اذا كان المميز ب^{٢} − ٤أجـ > صفر

فان للمعادلة جذرين حقيقيين متشابهين (له حل واحد)

نفس اشارة معامل س^{٢} نفس اشارة معامل س^{٢}

م

جـ) اذا كان المميز ب^{٢} − ٤أجـ = صفر

فان للمعادلة ليس لها حل

نفس معامل س^{٢}

نرجع لسؤال السابق

- (س − س^{٢})   س − س^{٢} - (س − س^{٢})

---------   +++++   --------

١ ٠

ق(س) =
- س^{٢} − س ، س > ١
- س − س^{٢} ، ٠ < س ≤ ١
- س^{٢} − س ، س ≤ صفر

يفضل ترتيب الاقتران المتشعب بعد تجهيز من اجل عدم الخربطة ترتيب الفترات من الأصغر إلى الأكبر

ق (س) =
- س^{٢} − س ، س ≤ صفر
- س − س^{٢} ، ٠ < س ≤ ١
- س^{٢} - س ، س > ١

كيفية وضع إشارة المساواة للاقتران

نهـا$_{س \leftarrow ٠}$ |س − س^{٢}|

نهـا$_{س \leftarrow ٠^{-}}$ س^{٢} − س = (٠)^{٢} − ٠ = ٠ − ٠ = ٠ ، نهـا$_{س \leftarrow ٠^{+}}$ س − س^{٢} = ٠ − (٠)^{٢} = ٠

بما ان نهـا$_{س \leftarrow ٠^{+}}$ ق(س) = نهـا$_{س \leftarrow ٠^{-}}$ ق(س)

∴ نهـا$_{س \leftarrow ٠}$ ق(س) = ٠

النهاية داخل القيمة المطلقة

أمثلة : جد قيمة النهايات التالية .

١) $\underset{س \to ٤}{\text{نهـا}} \frac{|س - ٤|}{س - ٤}$

الحل : التعويض المباشر

$\underset{س \to ٤}{\text{نهـا}} \frac{|س - ٤|}{س - ٤} = \frac{|٤ - ٤|}{٤ - ٤} = \frac{|٠|}{٠}$

بسبب ان داخل القيمة المطلقة بعد التعويض صفر

يجب علينا اعادة التعريف

ما داخل القيمة الطلقة اقتران خطي يحل بطريقة اعادة تعريف المطلق بداخله (اقتران خطي)

خطوات الحل :

١) نساوي ما داخل القيمة المطلقة بالصفر لايجاد اصفار الاقتران أو جذور الاقتران

س − ٤ = صفر   س = ٤

٢) **نعين** على خط اصفار الاقتران وان وجدت ايضا الفترات تعين

نفس اشارة معامل س   عكس اشارة معامل س

٤

س − ٤   - (س − ٤) = ٤ − س

++++++ ++   ---------- --

٤ **نقطة تحول**

$ق(س) = \begin{cases} \frac{س - ٤}{س - ٤} & ، \ س \geq ٤ \\ \frac{٤ - س}{س - ٤} & ، \ س < ٤ \end{cases}$

وضعت إشارة المساواة بسبب
معامل س الموجبة

$\underset{س \to ٤}{\text{نهـا}} \frac{|س - ٤|}{س - ٤}$

$\underset{س \to ٤^+}{\text{نهـا}} \frac{س - ٤}{س - ٤} = \underset{س \to ٤^+}{\text{نهـا}} \frac{١}{١} = ١$

$\underset{س \to ٤^-}{\text{نهـا}} \frac{٤ - س}{س - ٤} = \underset{س \to ٤^-}{\text{نهـا}} \frac{-١}{١} = -١$

بما ان $\underset{س \to ٤^+}{\text{نهـا}} ه(س) = \underset{س \to ٤^-}{\text{نهـا}} ه(س)$

$\therefore \underset{س \to ٤}{\text{نهـا}} ه(س) = ١$

٢) $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{|س - ٣| - ١}{س - ٢}$

الحل : التعويض المباشر

$\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{|س - ٣| - ١}{س - ٢} = \frac{|٢ - ٣| - ١}{٢ - ٢} = \frac{|-١| - ١}{٢ - ٢}$

بما ان ما داخل القيمة المطلقة ناتجه بعد التعويض سالب نضرب الاقتران القيمة المطلقة فقط بالسالب

لكن لتوضيح سوف يتم اعادة التعريف

اعادة تعريف القيمة المطلقة

س − ٣ = صفر $\Leftarrow$ س = ٣

س − ٣   - (س − ٣) = ٣ − س

++++++++++   --------------

٣   ٢

$\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{|س - ٣| - ١}{س - ٢}$

$= \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{٣ - س - ١}{س - ٢}$

$= \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{٢ - س}{س - ٢}$

$= \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{-١}{١} = -١$

سوف نستخدم القاعدة ٣ − س وسبب
لأنه نهاية تقترب من العدد ٢ فقط
والعدد ٢ نقطة عادية
ولو انه طلب نهاية تقترب من العدد ٣ سوف
نستخدم القاعدتين لان العدد ٣ نقطة تحول

٣) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{|س^{٢} - ٢س|}{س}$

الحل : التعويض المباشر

$$\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{|س^{٢} - ٢س|}{س} = \frac{|(٠)^{٢} - ٢(٠)|}{٠} = \frac{|٠|}{٠}$$

اعادة تعريف $|س^{٢} - ٢س|$

$س^{٢} - ٢س = \text{صفر} \Leftarrow س(س - ٣) = \text{صفر}$

$س = \text{صفر}$ أو $س = ٣$

يجب إن يظهر حلان بسبب إن الاقتران التربيعي

نعين على خط الاعداد اصفار الاقتران أو جذور الاقتران

نفس اشارة معامل $س^{٢}$ عكس اشارة معامل $س^{٢}$ نفس اشارة معامل $س^{٢}$

٠   ٣

$س^{٢} - ٣س$ $-(س^{٢} - ٣س)$ $س^{٢} - ٣س$

++++++++   ------------   +++++++++

٠   ٣

دائما

انتبه بعد التعريف القيمة المطلقة إلى خط الإعداد وانتبه بعدها إلى ما يقترب إليه النهاية

$$\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{|س^{٢} - ٢س|}{س}$$

$$\underset{س \to ٠^{+}}{\text{نهـا}} \frac{٣س - س^{٢}}{س} = \underset{س \to ٠^{+}}{\text{نهـا}} \frac{س(٣ - س)}{س} = \underset{س \to ٠^{+}}{\text{نهـا}} \frac{(٣ - س)}{١} = \frac{(٣ - ٠)}{١} = ٣$$

$$\underset{س \to ٠^{-}}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} - ٣س}{س} = \underset{س \to ٠^{-}}{\text{نهـا}} \frac{س(س - ٣)}{س} = \underset{س \to ٠^{-}}{\text{نهـا}} \frac{(س - ٣)}{١} = \frac{(٠ - ٣)}{١} = -٣$$

بما ان $\underset{س \to ٠^{+}}{\text{نهـا}} ق(س) \neq \underset{س \to ٠^{-}}{\text{نهـا}} ق(س)$

$\therefore \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} ق(س)$ غ . م

٤) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{|س - ٣| - |٢س - ٣|}{س}$

الحل : التعويض المباشر

$$\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{|س - ٣| - |٢س - ٣|}{س} = \frac{|٠ - ٣| - |٢(٠) - ٣|}{٠} = \frac{|-٣| - |-٣|}{٠}$$

داخل القيمة المطلقة ناتجه سالب نضرب كل اقتران بالسالب

يفضل ان يحل باعادة التعريف

اعادة التعريف $|س - ٣|$

$س - ٣ = \text{صفر} \Leftarrow س = ٣$

$س - ٣$ $-(س - ٣) = ٣ - س$

++++++   ------------

٣

اعادة تعريف $|٢س - ٣|$

$٢س - ٣ = \text{صفر} \Leftarrow س = \frac{٣}{٢}$

$٢س - ٣$ $-(٢س - ٣) = ٣ - ٢س$

++++ ++++   ---------------

$\frac{٣}{٢}$

ننتبه الى ما تقترب اليه النهاية

تقترب الى الصفر والصفر هنا نقطة عادية

$$\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{|س - ٣| - |٢س - ٣|}{س}$$

$$\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٣ - س - (٣ - ٢س)}{س}$$

$$\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٣ - س - ٣ + ٢س}{س}$$

$$\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{س}{س} = \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{١} = ١$$

٥) $\underset{س\to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{|س-٢|-١}{|س^{٢}-٧س+١٢|}$

الحل : التعويض المباشر

$\underset{س\to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{|س-٢|-١}{|س^{٢}-٧س+١٢|} = \dfrac{|٣-٢|-١}{|(٣)^{٢}-٧(٣)+١٢|} = \dfrac{|١|-١}{|٠|}$

هنا ناتج التعويض في القيمة المطلقة ناتجه موجب

اذن يبقى ما داخل القيمة المطلقة كما هو

ولكن لتوضيح سوف يتم اعادة التعريف

اعادة تعريف $|س-٢|$

$س-٢ = \text{صفر} \Leftarrow س = ٢$

- (س - ٢)　　　　س − ٢

- - - - - - - - - -　　　+ + + + + + +

٢

اعادة تعريف $|س^{٢}-٧س+١٢|$

$س^{٢}-٧س+١٢ = \text{صفر}$

$(س-٤)(س-٣) = \text{صفر}$

$س = ٤$ أو $س = ٣$

$س^{٢}-٧س+١٢$　　- ($س^{٢}-٧س+١٢$)　　$س^{٢}-٧س+١٢$

+ + + + + + + + +　　- - - - - - - - - - -　　+ + + + + + + +

٣　　　　٤

ننتبه الى ما تقترب اليه النهاية

تقترب من العدد (٣) بعد اعادة التعريف تبين الي ان الاقتران $س-٢$ **نقطة عادية**

واما الاقتران $س^{٢}-٧س+١٢$ **نقطة تحول**

$= \underset{س\to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{|س-٢|-١}{|س^{٢}-٧س+١٢|}$

$= \underset{س\to ٣^{+}}{\text{نهـا}} \dfrac{س-٢-١}{-(س^{٢}-٧س+١٢)}$

$= \underset{س\to ٣^{+}}{\text{نهـا}} \dfrac{س-٣}{-س^{٢}+٧س-١٢}$

$= \underset{س\to ٣^{+}}{\text{نهـا}} \dfrac{س-٣}{(-س+٤)(س-٣)}$

$= \underset{س\to ٣^{+}}{\text{نهـا}} \dfrac{١}{(-س+٤)} = \dfrac{١}{(-٣+٤)} = ١$

$= \underset{س\to ٣^{-}}{\text{نهـا}} \dfrac{س-٢-١}{(س^{٢}-٧س+١٢)}$

$= \underset{س\to ٣^{-}}{\text{نهـا}} \dfrac{س-٣}{(س-٣)(س-٤)}$

$= \underset{س\to ٣^{-}}{\text{نهـا}} \dfrac{١}{(س-٤)} = \dfrac{١}{٣-٤} = -١$

بما ان $\underset{س\to ٣^{+}}{\text{نهـا}} ق(س) \neq \underset{س\to ٣^{-}}{\text{نهـا}} ق(س)$

$\therefore \underset{س\to ٣}{\text{نهـا}} ق(س)$ غ.م

٦) $\underset{س\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\left|\dfrac{١}{س+٣}\right|-\dfrac{١}{٤}}{|س-١|}$

الحل : التعويض المباشر

$\underset{س\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\left|\dfrac{١}{س+٣}\right|-\dfrac{١}{٤}}{|س-١|} = \dfrac{\left|\dfrac{١}{١+٣}\right|-\dfrac{١}{٤}}{|١-١|} = \dfrac{\left|\dfrac{١}{٤}\right|-\dfrac{١}{٤}}{|٠|} = \dfrac{٠}{٠}$

الفكرة

توزيع القيمة المطلقة على البسط والمقام وهي أحدا خواص القيمة المطلقة

$= \underset{س\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\dfrac{|١|}{|س+٣|}-\dfrac{١}{٤}}{|س-١|} = \underset{س\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\dfrac{١}{|س+٣|}-\dfrac{١}{٤}}{|س-١|}$

$= \underset{س\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\dfrac{١}{|س+٣|}-\dfrac{١}{٤}}{|س-١|}$

اعادة تعريف $|س+٣|$

$س+٣ = \text{صفر} \Leftarrow س = -٣$

- (س + ٣)　　　　س + ٣

- - - - - - - - - -　　　+ + + + +

- ٣

اعادة تعريف $|س-١|$

$س-١ = \text{صفر} \Leftarrow س = ١$

- (س − ١)　　　　س − ١

- - - - - - - - - - - -　　　+ + + + +

$= \underset{س\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\dfrac{١}{|س+٣|}-\dfrac{١}{٤}}{|س-١|}$

$= \underset{س\to ١^{+}}{\text{نهـا}} \dfrac{\dfrac{١}{س+٣}-\dfrac{١}{٤}}{س-١}$

$= \underset{س\to ١^{+}}{\text{نهـا}} \dfrac{\dfrac{١\times٤-١\times(س+٣)}{٤(س+٣)}}{س-١}$

$= \underset{س\to ١^{+}}{\text{نهـا}} \dfrac{١\times٤-١\times(س+٣)}{٤(س+٣)} \times \dfrac{١}{س-١}$

$= \underset{س\to ١^{+}}{\text{نهـا}} \dfrac{٤-س-٣}{٤(س+٣)} \times \dfrac{١}{س-١}$

$= \underset{س\to ١^{+}}{\text{نهـا}} \dfrac{١-س}{٤(س+٣)} \times \dfrac{١}{س-١}$

$= \underset{س\to ١^{+}}{\text{نهـا}} \dfrac{\overset{-١}{\cancel{١-س}}}{٤(س+٣)} \times \dfrac{١}{\cancel{س-١}}$

$= \underset{س\to ١^{+}}{\text{نهـا}} \dfrac{-١}{٤(س+٣)} = \dfrac{-١}{٤(١+٣)} = \dfrac{-١}{١٦}$

$= \underset{س\to ١^{-}}{\text{نهـا}} \dfrac{\dfrac{١}{|س+٣|}-\dfrac{١}{٤}}{|س-١|}$

$$= \lim_{\text{س}\to ١^-} \frac{\frac{١}{\text{س}+٣}-\frac{١}{٤}}{١-\text{س}}$$

$$= \lim_{\text{س}\to ١^-} \frac{\frac{١\times٤-١\times(\text{س}+٣)}{٤(\text{س}+٣)}}{١-\text{س}}$$

$$= \lim_{\text{س}\to ١^-} \frac{١\times٤-١\times(\text{س}+٣)}{٤(\text{س}+٣)} \times \frac{١}{١-\text{س}}$$

$$= \lim_{\text{س}\to ١^-} \frac{٤-\text{س}-٣}{٤(٣+\text{س})} \times \frac{١}{١-\text{س}}$$

$$= \lim_{\text{س}\to ١^-} \frac{١-\text{س}}{٤(٣+\text{س})} \times \frac{١}{١-\text{س}}$$

$$= \lim_{\text{س}\to ١^-} \frac{\cancel{١-\text{س}}}{٤(٣+\text{س})} \times \frac{١}{\cancel{١-\text{س}}}$$

$$= \lim_{\text{س}\to ١^-} \frac{١}{٤(٣+\text{س})} = \frac{١}{٤(٣+١)} = \frac{١}{١٦}$$

بما ان $\lim_{\text{س}\to ١^+} \text{ق(س)} \neq \lim_{\text{س}\to ١^-} \text{ق(س)}$

$\therefore \lim_{\text{س}\to ١} \text{ق(س)}$ غ . م .

تحديد اتجاه النهاية

ما دام طلب في السؤال نهاية بتحديد اتجاهها فقط أجد الاتجاه المطلوب

أمثلة جد قيمة النهايات التالية

١) $\lim_{\text{س}\to ٤^+} \frac{\text{س}^٢-٤\text{س}}{|١٦-\text{س}^٢|}$

الحل : التعويض المباشر

$$\lim_{\text{س}\to ٤^+} \frac{\text{س}^٢-٤\text{س}}{|١٦-\text{س}^٢|} = \frac{(٤)^٢-٤(٤)}{|١٦-(٤)^٢|} = \frac{٠}{|٠|}$$

يجب اعادة تعريف $|١٦-\text{س}^٢|$

$١٦-\text{س}^٢ =$ صفر $\Leftarrow$ $\text{س} = \pm ٤$

$-(١٦-\text{س}^٢)$ $١٦-\text{س}^٢$ $-(١٦-\text{س}^٢)$

- - - - - - - - -   ++ ++++++   - - - - - - - - -

-٤ ٤

نقطة تحول فقط أجدها من اليمين
لان السؤال طلب ذلك

$$= \lim_{\text{س}\to ٤^+} \frac{\text{س}^٢-٤\text{س}}{|١٦-\text{س}^٢|}$$

$$= \lim_{\text{س}\to ٤^+} \frac{\text{س}^٢-٤\text{س}}{-(١٦-\text{س}^٢)}$$

$$= \lim_{\text{س}\to ٤^+} \frac{\text{س}^٢-٤\text{س}}{-١٦+\text{س}^٢}$$

$$= \lim_{\text{س}\to ٤^+} \frac{\text{س}(\text{س}-٤)}{(\text{س}-٤)(\text{س}+٤)}$$

$$= \lim_{\text{س}\to ٤^+} \frac{\text{س}}{(\text{س}+٤)} = \frac{٤}{(٤+٤)} = \frac{١}{٢}$$

٢) $\lim_{\text{س}\to ٧^+} \frac{|٧-\text{س}|}{\text{س}-٧} + ١٠$

الحل : التعويض المباشر

$$\lim_{\text{س}\to ٧^+} \frac{|٧-\text{س}|}{\text{س}-٧}+١٠ = \frac{|٧-٧|}{٧-٧}+١٠ = \frac{|٠|}{٠}+١٠$$

يجب اعادة تعريف $|٧-\text{س}|$

$٧-\text{س} =$ صفر $\Leftarrow$ $\text{س} = ٧$

$\text{س}-٧$ $-(٧-\text{س})$

+++++   - - - - - - - - -

٧

$$= \lim_{\text{س}\to ٧^+} \frac{|٧-\text{س}|}{\text{س}-٧}+١٠$$

$$= \lim_{\text{س}\to ٧^+} \frac{-(٧-\text{س})}{\text{س}-٧}+١٠$$

$$= \lim_{\text{س}\to ٧^+} \frac{-٧+\text{س}}{\text{س}-٧}+١٠$$

$$= \lim_{\text{س}\to ٧^+} \frac{١}{١}+١٠ = ١+١٠ = ١١$$

٣) $\underset{\text{س}\to ٢^+}{\text{نهـا}} |\text{س} - ٣| - |٤ - \text{س}|$

الحل : التعويض المباشر

$$\underset{\text{س}\to ٢^+}{\text{نهـا}} |\text{س} - ٣| - |٤ - \text{س}| = |٢ - ٣| - |٤ - ٢| = |-١| - |٢|$$

بما إن قيمة المطلق **سالب** يضرب اقترانه فقط بالسالب

ولكن لتوضيح أكثر سيتم إعادة التعريف

بما إن قيمة المطلق **موجبة** يبقى كما هو ولكن لتوضيح أكثر سيتم إعادة التعريف

اعادة تعريف $|\text{س} - ٣|$

س − ٣ = صفر ⇐ س = ٣

س − ٣　　　- (س − ٣)

- - - - - - - - -　　+ + + + + + +

٣

اعادة تعريف $|٤ - \text{س}|$

4 − س = صفر ⇐ س = ٤

- (٤ − س)　　　٤ - س

+ + + + + + +　　- - - - - - - - -

٤

$$= \underset{\text{س}\to ٢^+}{\text{نهـا}} |\text{س} - ٣| - |٤ - \text{س}|$$

$$\underset{\text{س}\to ٢^+}{\text{نهـا}} ٣ - \text{س} - (٤ - \text{س})$$

$$\underset{\text{س}\to ٢^+}{\text{نهـا}} ٣ - \text{س} - ٤ + \text{س}$$

$$\underset{\text{س}\to ٢^+}{\text{نهـا}} -١ = -١$$

٤) $\underset{\text{س}\to ٢^-}{\text{نهـا}} \dfrac{\left|\dfrac{-٦}{\text{س}+١}\right| - \dfrac{\text{س}+٢}{٢}}{|\text{س}^٢ - ٤|}$　　**تدريب**

الحل :

خصائص القيمة المطلقة

مما تعلمناه سابقا من الأساسيات

A) $\sqrt{\text{س}^٢} = |\text{س}|$

أمثلة :

١) $\sqrt{(\text{س}^٢ - ١)^٢} = |\text{س}^٢ - ١|$

٢) $\sqrt{\text{س}^٢ + ٢\text{س} + ١} = \sqrt{(\text{س}+١)(\text{س}+١)} = \sqrt{(\text{س}+١)^٢} = |\text{س}+١|$

ملاحظة : الفكرة بشكل عام

اذا ظهرت $\text{س}^٢$ تحت الجذر التربيعي نفكر بالمطلق بعد التحليل أو توحيد المقام أو باخراج عامل مشترك

أمثلة :

١) $\underset{\text{س}\to -٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س}^٢ + ٤\text{س} + ٤}}{\text{س}+٢}$

الحل : التعويض المباشر

$$\underset{\text{س}\to -٢}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\text{س}^٢ + ٤\text{س} + ٤}}{\text{س}+٢} = \frac{\sqrt{(-٢)^٢ + ٤(-٢) + ٤}}{-٢ + ٢} = \frac{\sqrt{٠}}{٠}$$

بما ان ما تحت الجذر التربيعي $\text{س}^٢$ نفكر بالمطلق

$$= \underset{\text{س}\to -٢}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\text{س}^٢ + ٤\text{س} + ٤}}{\text{س}+٢}$$

$$= \underset{\text{س}\to -٢}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{(\text{س}+٢)(\text{س}+٢)}}{\text{س}+٢}$$

$$= \underset{\text{س}\to -٢}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{(\text{س}+٢)^٢}}{\text{س}+٢}$$

$$= \underset{\text{س}\to -٢}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{(\text{س}+٢)^{\cancel{٢}}}}{\text{س}+٢}$$

$$= \underset{\text{س}\to -٢}{\text{نهـا}} \frac{|\text{س}+٢|}{\text{س}+٢}$$

٢) $\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \dfrac{\sqrt{\text{س}^{٢} - ٤\text{س}^{٣}}}{\text{س}}$

الحل :

٣) $\lim\limits_{\text{س}\to ٢} \dfrac{\text{س}^{٢} - ٤}{\sqrt{\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٤}}$

الحل :

المطلقة داخل اقتران متشعب

أمثلة : جد قيمة النهايات التالية

١)
$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \dfrac{|\text{س}|}{\text{س}} & \text{، س} \neq \text{صفر} \\ ٢ & \text{، س = صفر} \end{cases}$$

جد $\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \text{ق(س)}$

الحل :

$\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \dfrac{|\text{س}|}{\text{س}}$

تعويض المباشر

$\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \dfrac{|\text{س}|}{\text{س}} = \dfrac{|٠|}{٠}$

اعادة تعريف $|\text{س}|$

س = ٠ $\Leftarrow$ س = ٠

س   - س

+++++   ----------

٠

نقطة تحول

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{س}}{\text{س}} & \text{، س} > ٠ \\ \dfrac{-\text{س}}{\text{س}} & \text{، س} < ٠ \\ ٢ & \text{، س} = ٠ \end{cases}$$

$= \lim\limits_{\text{س}\to ٠} \dfrac{|\text{س}|}{\text{س}}$

$\lim\limits_{\text{س}\to ٠^{+}} \dfrac{\text{س}}{\text{س}} = \dfrac{١}{١} = ١$ $\lim\limits_{\text{س}\to ٠^{-}} \dfrac{-\text{س}}{\text{س}} = \dfrac{-١}{١} = -١$

بما ان $\lim\limits_{\text{س}\to ٠^{+}} \text{ق(س)} \neq \lim\limits_{\text{س}\to ٠^{-}} \text{ق(س)}$

$\therefore \lim\limits_{\text{س}\to ٠^{+}} \text{ق(س)}$

الرونق في الرياضيات
إعداد : أ. سائد الوردات
0772044048 - 0787556274

٢)

$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{س^{٢} - ١}{|س + ١|} & ، \quad س \neq -١ \\ ٧ & ، \quad س = -١ \end{cases}$$

جد $\lim\limits_{س \to -١} ق(س)$

الحل :

$$\lim\limits_{س \to -١} ق(س) = \lim\limits_{س \to -١} \frac{س^{٢} - ١}{|س + ١|}$$

تعويض المباشر

$$\lim\limits_{س \to -١} \frac{س^{٢} - ١}{|س + ١|} = \frac{(-١)^{٢} - ١}{|-١ + ١|} = \frac{٠}{|٠|}$$

اعادة تعريف $|س + ١|$

س + ١ = صفر ⟸ س = -١

$$\begin{array}{ccc} -(س + ١) & & س + ١ \\ - - - - - - - - - - - - & & + + + + + \\ \longleftarrow\!\!\!\!-\!\!\!\longrightarrow \\ & -١ & \end{array}$$

$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{س^{٢} - ١}{س + ١} & ، \quad س > -١ \\ \dfrac{س^{٢} - ١}{-(س + ١)} & ، \quad س < -١ \\ ٧ & ، \quad س = -١ \end{cases}$$

$\lim\limits_{س \to -١} ق(س)$

$$\lim\limits_{س \to -١^{+}} \frac{س^{٢} - ١}{س + ١} = \lim\limits_{س \to -١^{+}} \frac{(س - ١)(س + ١)}{س + ١}$$

$$= \lim\limits_{س \to -١^{+}} \frac{(س - ١)}{١} = (-١ - ١) = -٢$$

$$\lim\limits_{س \to -١^{-}} \frac{س^{٢} - ١}{-(س + ١)} = \lim\limits_{س \to -١^{-}} \frac{(س - ١)(س + ١)}{-(س + ١)}$$

$$= \lim\limits_{س \to -١^{-}} \frac{(س - ١)(س + ١)}{-(س + ١)} = \lim\limits_{س \to -١^{-}} \frac{(س - ١)}{-١} = -(-١ - ١) = ٢$$

بما ان $\lim\limits_{س \to -١^{+}} ق(س) \neq \lim\limits_{س \to -١^{-}} ق(س)$

$\therefore \lim\limits_{س \to -١} ق(س)$ غ.م

أهم الملاحظات

١) س ≠ صفر

أي ان س > صفر و س < صفر

وتكون الاجابة حسب تعريف الاقتران

٢) **س > أ يعني النهاية من اليمين**

٣) **س < أ تعني النهاية من اليسار**

ملاحظة مهمة

ننتبه جيدا إلى العدد الذي يقترب منه النهاية بعد إعادة التعريف

في الأسئلة الموضوعية يجب إعادة التعريف

إما بالأسئلة الضع دائرة **لا يجب إعادة التعريف**

حساب النهاية للاقتران الاكبر عدد صحيح

متى يتم استخدام هذه الطريقة ؟

عند ظهور رمز الاكبر عدد صحيح [ ]

تذكر

الاعداد الصحيحة = ص = { ....، ٢ ، ١ ، ٠ ، -١ ، -٢ ، .... }

ص ∋ **تعني انها** تنتمي للاعداد الصحيحة

ص ∌ **تعني انها** لا تنتمي للاعداد الصحيحة

خطوات الحل

١) نجد طول الفترة أو درجة الاقتران

$$ل = \frac{١}{|م \cdot س|}$$

$\boxed{\text{م. س تعني معامل س}}$

٢) اعادة تعرويف **حول العدد الذي يقترب منه النهاية**

٣) اقوم برسم خط الاعداد

٤) اقوم بالعد من الصفر (**اذا كان عدد صحيح ما داخل الاكبر عدد صحيح**) حسب طول الفترة الى ان اصل الى **العدد المراد اعادة التعريف حوله**

أمثلة : **جد قيمة النهايات التالية**

١) $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \left[\frac{س}{٣}+١\right]$

الحل : التعويض المباشر

$$\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \left[\frac{س}{٣}+١\right] = \left[\frac{٣}{٣}+١\right] = [٢]$$

ناتج التعويض داخل الاكبر عدد صحيح ∋ للاعداد الصحيحة **يجب اعادة التعريفه**

اعادة تعريف $\left[\frac{س}{٣}+١\right]$

$$\text{طول التفرة} = \frac{١}{|م \cdot س|} = \frac{١}{\left|\frac{١}{٣}\right|} = ٣$$

٠ ٣ ٦

هنا النهاية تقترب من العدد ٣ وتبين الي بعد اعادة التعريف ان العدد ٣ نقطة تحول

٠ ≤ س < ٣

وضعت اشارة المساواة لان معامل س موجب

وتم تعويض هذا الرقم (٠) التي توجد عنده إشارة المساواة داخل الأكبر غدد صحيح

$$\left[\frac{٠}{٣}+١\right] = [١] = ١$$

٣ ≤ س < ٦

$$\left[\frac{٣}{٣}+١\right] = [٢] = ٢$$

$$\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \left[\frac{س}{٣}+١\right]$$

$$\underset{س \to ٣^{+}}{\text{نهـا}}\ ٢ = ٢ \qquad \underset{س \to ٣^{-}}{\text{نهـا}}\ ١ = ١$$

بما ان

$$\underset{س \to ٣^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(س) \neq \underset{س \to ٣^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(س)$$

$$\therefore \underset{س \to ٣}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(س)\ \text{غ . م}$$

الرونق في الرياضيات إعداد : أ . سائد الوردات 0772044048 - 0787556274

٢) $\lim_{س \to ٢} \left[\frac{س}{٢} + ٤ \right]$

الحل : التعويض المباشر

$\lim_{س \to ٢} \left[\frac{س}{٢} + ٤ \right] = \left[\frac{٢}{٢} + ٤ \right] = [٥] \in ص$

اعادة تعريف $\left[\frac{س}{٢} + ٤ \right]$

طول الفترة = $\frac{١}{|م.س|} = \frac{١}{\left|\frac{١}{٢}\right|} = ٢$

٠ ٢ ٤

$٠ \le س < ٢$ $\frac{٠}{٢} + ٤ = ٤$

$٠ \le س < ٢$ $\frac{٢}{٢} + ٤ = ٥$

$\lim_{س \to ٢} \left[\frac{س}{٢} + ٤ \right]$

$\lim_{س \to ٢^{+}} = ٥$ $\lim_{س \to ٢^{-}} = ٤$

بما ان $\lim_{س \to ٢^{+}} ق(س) \neq \lim_{س \to ٢^{-}} ق(س)$

$\lim_{س \to ٢} ق(س)$ غ.م

٣) $\lim_{س \to ١} \left[\boxed{٠.٦} - ٢س \right]$

داخل القيمة المطلقة ليس عدد صحيحا

الحل: التعويض المباشر

$\lim_{س \to ١} [٠.٦ - ٢س] = [٠.٦ - ٢(١)] = [-١.٤]$

ناتج التعويض داخل القيمة الطقلة $\notin$ ص

هنا لا نقوم بعملية اعادة التعريف فقط بل نقوم بما تعلمناه سابقا من الاساسيات

١) اذا اعطيت عدد عشريا موجبا تكون قيمة العدد الصحيح واهمال الكسر

مثال ذلك :

$[٣.٣] = ٣$

٢) اذا اعطيت عدد عشريا سالبا تكون نتيجة العدد الصحيح الذي هو اصغر من العدد العشري

مثال ذلك :

$[-٣.٣] = -٤$

$\lim_{س \to ١} [٠.٦ - ٢س] = [٠.٦ - ٢(١)] = [-١.٤] = -٢$

سوف اقوم بالشرح من اجل التوضيح فقط

اعادة تعريف $[٠.٦ - ٢س]$

طول الفترة = $\frac{١}{|م.س|} = \frac{١}{|-٢|} = \frac{١}{٢}$

بما ان ما داخل الاكبر عدد صحيح ليش عدد صحيحا اقوم باخذ الرقم ٠.٦ وتقريبه الى اقرب اكبر عدد صحيح

$[٠.٦] = ٠$

٠.٦ − ٢س = صفر $\Leftarrow$ س = ٠.٣

٠.٣ ٠.٨ ١.٣

هنا العدد الذي يقترب اليه النهاية ليس نقطة تحول بل نقطة عادية

$٠.٣ < س \le ٠.٨$

$٠.٦ - ٢ (٠.٨) = - ١$

$٠.٨ < س \le ١.٣$

$٠.٦ - ٢ (١.٣) = -٢$

$\therefore \lim_{س \to ١} [٠.٦ - ٢س] = -٢$

0772044048 - 0787556274

٤) $\underset{س \to ٤}{\text{نهـا}} \left[\boxed{٨.٢} - \frac{١}{٣}س \right]$

الحل :

يمكن **تلخيص** ما استنتجناه من الامثلة السابقة

اكبر عدد صحيح

اذا كان ناتج التعويض داخل الاكبر عدد صحيح

$\in$ ص (ينتمي للاعداد الصحيحه)

اعادة تعريف

" النهاية دائما غير موجودة لان النقطة في هذه الحالة هي نقطة تحول "

$\underset{س \to أ^+}{\text{نهـا}} ق(س) \neq \underset{س \to أ^-}{\text{نهـا}} ق(س)$

$\therefore \underset{س \to أ}{\text{نهـا}} ق(س)$ غ.م

*$\underset{س \to أ^+}{\text{نهـا}} ق(س)$ **يكون ناتج التعويض كما هو**

*$\underset{س \to أ^-}{\text{نهـا}} ق(س)$ **يكون ناتج التعويض كما هو لكن نطرح منه واحد**

اذا كان ناتج التعويض داخل الاكبر عدد صحيح

$\notin$ ص (لا ينتمي للاعداد الصحيحه)

من المراجعة التي تعلمناها سابقا من الاساسيات اذا

أ) اذا اعطيت عددا عشريا موجبا تكون نتيجة العدد الصحيح واهمال الكسر

مثال ذلك :

١) $[٣.٣] = ٣$

ب) اذا اعطيت عددا عشريا سالبا تكون نتيجة العدد الصحيح الذي هو اصغر من العدد العشري

مثال ذلك :

١) $[-٣.٣] = -٤$

$\underset{س \to أ^+}{\text{نهـا}} ق(س) = \underset{س \to أ^-}{\text{نهـا}} ق(س)$

$\therefore \underset{س \to أ}{\text{نهـا}} ق(س)$ موجودة

فقط هذه التلخيص اذا كان معامل س داخل الاكبر عدد صحيح

موجب اما اذا كان معامل س سالب ....

تستخدم هذه الطريقة فقط عندما يكون الاكبر عدد صحيح لوحده

أو في الضع دائرة

هنا الامثلة لتوضيح التلخيص

٥) $\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نهـا}}[\text{س}]$

الحل : التعويض المباشر

$\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نهـا}}[\text{س}] = [٤] \in \text{ص}$

$\underset{\text{س}\to ٤^{+}}{\text{نهـا}}[\text{س}] = [٤] = ٤$

يبقى ناتج التعويض كما هو لان النهاية من اليمين

$\underset{\text{س}\to ٤^{-}}{\text{نهـا}}[\text{س}] = [٤]^{-} = ٤ - ١ = ٣$

بما ان النهاية من اليسار تبقى ناتج التعويض كما هو لكن نطرح منه ١

بما ان $\underset{\text{س}\to ٤^{+}}{\text{نهـا}}\text{ق(س)} \neq \underset{\text{س}\to ٤^{-}}{\text{نهـا}}\text{ق(س)}$

$\therefore \underset{\text{س}\to ٤}{\text{نهـا}}\text{ق(س)}$ غ . م

٦) $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}}\left[\frac{\text{س}}{٢} + ٤\right]$

الحل : التعويض المباشر

$\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}}\left[\frac{\text{س}}{٢} + ٤\right] = \left[\frac{٣}{٢} + ٤\right] = [٥,٥] \in \text{ص}$

$\therefore \underset{\text{س}\to ٣^{+}}{\text{نهـا}}\text{ق(س)} = \underset{\text{س}\to ٣^{-}}{\text{نهـا}}\text{ق(س)}$

$\therefore \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}}\text{ق(س)} = ٥$

اذا كان الاقتران الاكبر عدد صحيح معه اقتران

اذا كان ناتج التعويض داخل الاكبر عدد صحيح $\in$ ص

يجب اعادة التعريف

اذا كان ناتج التعويض داخل الاكبر عدد صحيح $\notin$ ص

نقربه الى ما تعلمناه سابقا

$[٣.٣] = ٣$

$[-٣.٣] = -٣$

اشكال الاقترانات

اقتران × اقتران أو اقتران × $\frac{١}{\quad}$

أمثلة : جد قيمة النهايات التالية

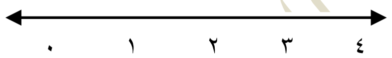
١) $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}}(\text{س} + ٢)[\text{س} - ١]$

الحل : التعويض المباشر فقط داخل الاكبر عدد صحيح اما

$\in$ ص أو $\notin$ ص

$[\text{س} - ١] = [٣ - ١] = [٢] \in \text{ص}$

اعادة تعريف $[\text{س} - ١]$



اقتراب النهاية من العدد ٣ والعدد ٣ نقطة تحول

$٠ \le \text{س} < ١$

$١ \le \text{س} < ٢$

$٢ \le \text{س} < ٣$

$٣ \le \text{س} < ٤$

$\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}}(\text{س} + ٢)[\text{س} - ١]$

$\underset{\text{س}\to ٣^{+}}{\text{نهـا}}(\text{س} + ٢) \times ٢ = (٣ + ٢) \times ٢ = ١٠$

$\underset{\text{س}\to ٣^{-}}{\text{نهـا}}(\text{س} + ٢) \times ١ = (٣ + ٢) \times ١ = ٥$

بما ان $\underset{\text{س}\to ٣^{+}}{\text{نهـا}}\text{ق(س)} \neq \underset{\text{س}\to ٣^{-}}{\text{نهـا}}\text{ق(س)}$

$\therefore \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}}\text{ق(س)}$ غ . م

٢) $$\lim_{\text{س}\to ٢} \frac{\left[٤-\frac{٢}{\text{س}}\right]}{\text{س}^{٢}+١}$$

الحل : التعويض فقط داخل الاكبر عدد صحيح

$$\left[٤-\frac{٢}{\text{س}}\right]=\left[٤-\frac{٢}{٢}\right]=[٣]\in \text{ص}$$

اعادة التعريف $\left[٤-\frac{٢}{\text{س}}\right]$

طول الفترة = $\frac{١}{|\text{م.س}|}=\frac{١}{|-١|}=١$

٠ ١ ٢ ٣

نقطة تحول

$٠ < \text{س} \leq ١$

$١ < \text{س} \leq ٢$

$٢ < \text{س} \leq ٣$

$$\lim_{\text{س}\to ٢} \frac{\left[٤-\frac{٢}{\text{س}}\right]}{\text{س}^{٢}+١}$$

$$\lim_{\text{س}\to ٢^{+}} \frac{٠}{\text{س}^{٢}+١}=\frac{٠}{(٢)^{٢}+١}=٠ \qquad \lim_{\text{س}\to ٢^{-}} \frac{١}{\text{س}^{٢}+١}=\frac{١}{(٢)^{٢}+١}=\frac{١}{٥}$$

بما ان $\lim_{\text{س}\to ٢^{+}} \text{ق(س)} \neq \lim_{\text{س}\to ٢^{-}} \text{ق(س)}$

$\therefore \lim_{\text{س}\to ٢} \text{ق(س)}$ غ.م

٣) $$\lim_{\text{س}\to ٠} (\text{س}+٣)^{[\text{س}]}$$

الحل : التعويض داخل الاكبر عدد صحيح

$[\text{س}]=[٠]\in \text{ص}$

اعادة تعريف $[\text{س}]$

طول الفترة = $\frac{١}{|\text{م.س}|}=\frac{١}{|١|}=١$

−١ ٠ ١

بسب اقتراب النهاية من الصفر يجب ان احصر العدد صفر بين رقمين لانها نقطة تحول

$$\lim_{\text{س}\to ٠} (\text{س}+٣)^{[\text{س}]}$$

$$\lim_{\text{س}\to ٠^{+}} (\text{س}+٣)^{٠}=(٠+٣)^{٠}=١$$

$$\lim_{\text{س}\to ٠^{-}} (\text{س}+٣)^{-١}=(٠+٣)^{-١}=\frac{١}{٣}$$

بما ان $\lim_{\text{س}\to ٠^{+}} \text{ق(س)} \neq \lim_{\text{س}\to ٠^{-}} \text{ق(س)}$

$\therefore \lim_{\text{س}\to ٠} \text{ق(س)}$ غ.م

٤) $$\lim_{\text{س}\to ٠} (\text{س}^{٢}[\text{س}]-٢)$$

الحل : التعويض داخل الاكبر عدد صحيح

$[\text{س}]=[٠]\in \text{ص}$

اعادة التعريف $[\text{س}]$

طول الفترة = $\frac{١}{|\text{م.س}|}=\frac{١}{|١|}=١$

−١ ٠ ١

$$\lim_{\text{س}\to ٠} (\text{س}^{٢}[\text{س}]-٢)$$

$$\lim_{\text{س}\to ٠^{+}} (\text{س}^{٢}\times(٠)-٢)=((٠)^{٢}\times(٠)-٢)=-٢$$

$$\lim_{\text{س}\to ٠^{+}} (\text{س}^{٢}\times(-١)-٢)=((٠)^{٢}\times(-١)-٢)=-٢$$

بما ان $\lim_{\text{س}\to ٠^{+}} \text{ق(س)} = \lim_{\text{س}\to ٠^{-}} \text{ق(س)}$

$\therefore \lim_{\text{س}\to ٠} \text{ق(س)}=-٢$

تحديد الاتجاه في الأكبر عدد صحيح

أمثلة : جد قيمة النهايات التالية

١) $\lim_{س \to ٢^+} \frac{[١ - س]}{س + ١}$

الحل : تعويض داخل الاكبر عدد صحيح

$[١ - س] = [١ - ٢] = [-١] \in ص$

اعادة تعريف $[١ - س]$

طول الفترة $= \frac{١}{|م.س|} = \frac{١}{|-١|} = ١$

$٠ \quad ١ \quad ٢ \quad ٣$

$١ \geq س > ٠$

$= \lim_{س \to ٢^+} \frac{[١ - س]}{س + ١}$

$\lim_{س \to ٢^+} \frac{-٢}{س + ١} = \frac{-٢}{٢ + ١} = \frac{-٢}{٣}$

٢) $\lim_{س \to ٢^+} \frac{س^٣ - ٢٧}{س - [س]}$

الحل : التعويض داخل الاكبر عدد صحيح

$[س] = [٣] \in ص$

اعادة تعريف $[س]$

طول الفترة $= \frac{١}{|م.س|} = \frac{١}{|١|} = ١$

$٠ \quad ١ \quad ٢ \quad ٣ \quad ٤$

$١ > س \geq ٠$

$= \lim_{س \to ٢^+} \frac{س^٣ - ٢٧}{س - [س]}$

$= \lim_{س \to ٣^+} \frac{س^٣ - ٢٧}{س - ٣}$

$= \lim_{س \to ٣^+} \frac{(س - ٣)(س^٢ + ٣س + ٩)}{(س - ٣)}$

$= \lim_{س \to ٣^+} \frac{(س^٢ + ٣س + ٩)}{١} = (٣)^٢ + ٣(٣) + ٩ = ٢٧$

٣) $\lim_{س \to ٥^-} \left[\frac{س}{٣} + ٢\right](س + ١)$

الحل : التعويض داخل الاكبر عدد صحيح

$\left[\frac{س}{٥} + ٢\right] = \left[\frac{٥}{٣} + ٢\right] = \left[\frac{١١}{٣}\right] \notin ص$

$\therefore \lim_{س \to ٥^-} (٣)(س + ١) = (٣)(٥ + ١) = ١٨$

٤) $\lim_{س \to ٢^+} \frac{\left[\frac{٤س}{٣}\right] - س}{س^٢ - ٤}$

الحل : تعويض داخل الاكبر عدد صحيح

$\left[\frac{٤س}{٣}\right] = \left[\frac{٤(٢)}{٣}\right] = \left[\frac{٨}{٣}\right] \notin ص$

$= \lim_{س \to ٢^+} \frac{\left[\frac{٤س}{٣}\right] - س}{س^٢ - ٤}$

$= \lim_{س \to ٢^+} \frac{٢ - س}{س^٢ - ٤}$

$= \lim_{س \to ٢^+} \frac{٢ - س}{(س + ٢)(س - ٢)}$

$= \lim_{س \to ٢^+} \frac{-١}{(س + ٢)} = \frac{-١}{٢ + ٢} = \frac{-١}{٤}$

اهم خصائص الاكبر عدد صحيح

١) [أس ± ب] = [أس] ± ب شرط ان يكون ب ∋ ص

أمثلة : جد قيمة النهايات التالية

١) نهـا (س←٠) ([٢س + ١] − [٢س − ٣])

الحل :

الطريقة الاولى

= [٢س] + ١ − ([٢س] − ٣)

= [٢س] + ١ − [٢س] + ٣ = ٤

طريقة الثانية

اعوض اداخل الاكبر عدد صحيح النهاية التي يقترب منها اما ∋ ص أو ∌ ص

طريقة الثالثة استخدم

نهـا (س←أ⁺) [س أ ± ب]⁺

نهـا (س←أ⁻) [س أ ± ب]⁻

٢) نهـا (س←٧) [س + ٤] − [س + ١]

الحل :

= [س] + ٤ − ([س] + ١)

= [س] + ٤ − [س] − ١ = ٣

متى تستخدم هذه الخاصيه ؟

عندما يكون معامل س في الاقترانين لهما نفس المعامل اما اذا كان يختلف فيحل بالطريقة الثانية

٣) نهـا (س←٢) ([٣ − س] − [٢س])

الحل : **بما ان معامل س هنا يختلف نستخدم الطريقة الثانية**

تعويض ادخل كل اقتران الاكبر عدد صحيح

[٣ − س] = [٣ − ٢] = [١] ∋ ص

اعادة تعريف [٣ − س]

طول الفترة = ١ / |م.س| = ١ / |−١| = ١

٠ ١ ٢ ٣

نقطة تحول

٠ > س ≥ ١

[٢س] = [٢ × ٢] = [٤] ∋ ص

طول الفترة = ١ / |م.س| = ١ / |٢| = ١/٢

٠ ٠.٥ ١ ١.٥ ٢ ٢.٥

نقطة تحول

٠ ≥ س > ٠.٥

نهـا (س←٢) ([٣ − س] − [٢س])

= نهـا (س←٢⁺) ([٣ − س] − [٢س])

= نهـا (س←٢⁺) (٠ − ٤) = −٤

= نهـا (س←٢⁻) ([٣ − س] − [٢س])

= نهـا (س←٢⁻) (١ − ٣) = −٢

بما ان نهـا (س←٢⁺) ق(س) ≠ نهـا (س←٢⁻) ق(س)

∴ نهـا (س←٢) ق(س) غ.م

في حالة وجود اكبر صحيح مع قيمة مطلقة

فكرة هذا الموضوع

ننتبه الى ناتج التعويض داخل الاكبر عدد صحيح والقمية المطلقه

يتم اعادة تعريف الاكبر عدد صحيح $\in$ ص

يتم اعادة تعريف القيمة المطلقه اذا كان ناتج التعويض يساوي صفر

أمثلة : جد القيمة النهايات التالية

١) $\lim\limits_{س \to ١} \frac{[س - ١]}{|س - ١|}$

الحل : التعويض داخل كل اقتران وننتبه الى ناتج ما داخل الاقترانيين

$[س - ١] = [١ - ١] = [٠] \in ص$

اعادة تعريف $[س - ١]$

طول الفترة $= \frac{١}{|م.س|} = \frac{١}{|١|} = ١$

٠ ، ١ ، ٢

$٠ \le س < ١$

نقطة تحول

$|س - ١| = |١ - ١| = |٠|$

اعادة تعريف $|س - ١|$

$س - ١ = ٠ \Leftarrow س = ١$

س − ١ : + + + + + + + + + + +

− (س − ١) = − س + ١ : − − − − − − − − − − − − − − − −

١

$$= \lim\limits_{س \to ١} \frac{[س - ١]}{|س - ١|}$$

$$= \lim\limits_{س \to ١^{+}} \frac{٠}{س - ١} = \frac{٠}{١ - ١} = \frac{٠}{٠} = ٠$$

$$= \lim\limits_{س \to ١^{-}} \frac{-١}{-(س - ١)} = \lim\limits_{س \to ١^{-}} \frac{-١}{١ - س} = \frac{-١}{١ - ١} = \frac{-١}{٠} = \text{غ.م}$$

بما ان $\lim\limits_{س \to ١^{+}} ق(س) \ne \lim\limits_{س \to ١^{-}} ق(س)$

$\therefore \lim\limits_{س \to ١} ق(س)$ غ.م

٢) $\lim\limits_{س \to ٣} \frac{\left[\frac{س}{٢} + ١\right] + س}{|س - ٥|}$

الحل : التعويض داخل كل اقتران من اجل الناتج الداخلي

$\left[\frac{س}{٢} + ١\right] = \left[\frac{٣}{٢} + ١\right] = \left[\frac{٥}{٢}\right] \notin ص = ٢$

$|س - ٥| = |٣ - ٥| = |-٢|$

بما ان ناتجه سالب فقط نضرب الاقتران بالسالب فتصبح − (س − ٥)

$$= \lim\limits_{س \to ٣} \frac{\left[\frac{س}{٢} + ١\right] + س}{|س - ٥|}$$

$$= \lim\limits_{س \to ٣} \frac{٢ + س}{-(س - ٥)}$$

$$= \lim\limits_{س \to ٣} \frac{٢ + س}{٥ - س} = \frac{٢ + ٣}{٥ - ٣} = \frac{٥}{٢}$$

٣) $\lim\limits_{س \to ٢} \left[\frac{س}{٣}\right] + |س - ٢|$

الحل : التعويض داخل كل اقتران

$\left[\frac{س}{٣}\right] = \left[\frac{٢}{٣}\right] \notin ص = ١$

$|س - ٢| = |٢ - ٢| = |٠|$

اعادة تعريف $|س - ٢|$

$س - ٢ = ٠ \Leftarrow س = ٢$

س − ٢ : + + + + + +

− (س − ٢) : − − − − − − −

٢ نقطة تحول

$$= \lim\limits_{س \to ٢} \left[\frac{س}{٣}\right] + |س - ٢|$$

$$= \lim\limits_{س \to ٢^{+}} ١ + (س - ٢) = ١ + (٢ - ٢) = ١$$

$$= \lim\limits_{س \to ٢^{-}} ١ - (س - ٢) = ١ - (٢ - ٢) = ١$$

بما ان $\lim\limits_{س \to ٢^{+}} ق(س) = \lim\limits_{س \to ٢^{-}} ق(س)$

$\therefore \lim\limits_{س \to ٢} ق(س) = ١$

نهاية الاكبر عدد صحيح في حالة التشعب

تذكر

ان الصورة تختلف عن النهاية

النهاية لا علاقة لها بوجود مساواه أو عدم وجودها لكن المساواة للصورة فقط

س > أ تعني نهاية من اليمين

س > أ تعني نهاية من اليسار

أمثلة : جد قيمة النهايات التالية

١) $\text{ق(س)} = \begin{cases} |\text{س}+٢| & ، \ ٣ \le \text{س} < ٥ \\ [\text{س}-١] & ، \ ٥ \le \text{س} < ٧ \end{cases}$

جد $\lim\limits_{\text{س}\to ٥} \text{ق(س)}$

الحل :

$\lim\limits_{\text{س}\to ٥^{+}} [\text{س}-١]$

$[\text{س}-١] = [٥-١] = [٤] \in \text{ص}$

بما ان الاقتران لوحده وناتج التعويض داخله $\in$ ص

ونهاية من اليمين ومعامل س موجب يبقى كما هو

$\Leftarrow \lim\limits_{\text{س}\to ٥^{+}} ٤ = ٤$

$\lim\limits_{\text{س}\to ٥^{-}} |\text{س}+٢|$

$|\text{س}+٢| = |٥+٢| = |٧|$

ناتج التعويض داخل القيمة المطلقة موجب يعني يبقى الاقتران كما هو

$\lim\limits_{\text{س}\to ٥^{-}} ٧ = ٧$

بما ان $\lim\limits_{\text{س}\to ٥^{+}} \text{ق(س)} \ne \lim\limits_{\text{س}\to ٥^{-}} \text{ق(س)}$

$\lim\limits_{\text{س}\to ٥} \text{ق(س)}$ غ.م

٢) $\text{ق(س)} = \begin{cases} |٢\text{س}-١| & ، \ ٠ \le \text{س} < ٢ \\ [\text{س}+٢] & ، \ ٢ \le \text{س} < ٣ \end{cases}$

جد $\lim\limits_{\text{س}\to \frac{١}{٢}} \text{ق(س)}$

الحل :

نقطة عادية نختار الاقتران الواقع عليه العدد ٠.٥

$\lim\limits_{\text{س}\to \frac{١}{٢}} |٢\text{س}-١|$

$|٢\text{س}-١| = \left|٢\times\frac{١}{٢}-١\right| = |٠|$

اعادة تعرف $|٢\text{س}-١|$

$٢\text{س} - ١ = ٠ \Leftarrow \text{س} = \frac{١}{٢}$

- (٢س − ١)　　　　٢س − ١

- - - - - - - - - - -　　　+ + + + +

نقطة تحول　٠.٥

$\lim\limits_{\text{س}\to \frac{١}{٢}^{+}} ٢\text{س}-١ = ٢(\frac{١}{٢})-١ = ٠$

$\lim\limits_{\text{س}\to \frac{١}{٢}^{-}} -(٢\text{س}-١) = ١-٢(\frac{١}{٢}) = ٠$

بما ان $\lim\limits_{\text{س}\to \frac{١}{٢}^{+}} \text{ق(س)} \ne \lim\limits_{\text{س}\to \frac{١}{٢}^{-}} \text{ق(س)}$

$\therefore \lim\limits_{\text{س}\to \frac{١}{٢}} |٢\text{س}-١|$ غ.م

٣)

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ٤ &، \quad \text{س} < ١ \\ ٤ - |\text{س}| &، \quad ١ \leq \text{س} \leq ٥ \\ \dfrac{|٢٥ - \text{س}^{٢}|}{\text{س} - ٥} &، \quad \text{س} > ٥ \end{cases}$$

جد

١) $\lim\limits_{\text{س} \to ٥} \text{ق}(\text{س})$ ٢) $\lim\limits_{\text{س} \to ٢.٥} \text{ق}(\text{س})$ ٣) ق(١)   ٤) ق(٥)

الحل :

الجذور

الجذور الفردية   **الجذور الزوجية**

أولا : الجذور الفردية : لا يوجد فيها مشكلة فهي دائما سواء كان بداخلها ناتج (موجب أو سالب أو صفر) معنى ذلك التعويض يكون مباشر

أمثلة : جد قيمة النهايات التالية

١) $\lim\limits_{\text{س} \to -٦} \sqrt[٣]{\text{س} - ٢} + \text{س} = \sqrt[٣]{-٨} + -٦ = -٢ + -٦ = -٨$

٢) $\lim\limits_{\text{س} \to ٣٢} \dfrac{\sqrt[٥]{\text{س}} + ٨}{\text{س} - ٢} = \dfrac{\sqrt[٥]{٣٢} + ٨}{٣٢ - ٢} = \dfrac{١٠}{٣٠} = \dfrac{١}{٣}$

٣) $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \sqrt[٧]{\text{س} - ٣} = \sqrt[٧]{٠} = ٠$

أهم الملاحظات :

١) $\sqrt[٢]{\dfrac{\text{أ}}{\text{ب}}} = \dfrac{\sqrt[٢]{\text{أ}}}{\sqrt[٢]{\text{ب}}}$ أ ، ب > ٠

٢) $\dfrac{\text{أ}}{\sqrt[٢]{\text{أ}}} = \dfrac{\sqrt[٢]{\text{أ}} \times \sqrt[٢]{\text{أ}}}{\sqrt[٢]{\text{أ}}} = \sqrt[٢]{\text{أ}}$ أ > ٠

---

١) $\sqrt[٣]{\dfrac{\text{أ}}{\text{ب}}} = \dfrac{\sqrt[٣]{\text{أ}}}{\sqrt[٣]{\text{ب}}}$

٢) $\dfrac{\text{أ}}{\sqrt[٢]{\text{أ}}} = \dfrac{\sqrt[٣]{\text{أ}} \times \sqrt[٣]{\text{أ}}}{\sqrt[٣]{\text{أ}}} = \sqrt[٣]{\text{أ}}$

ثانيا : الجذور الزوجية

التعويض المباشر

اذا كان ناتج التعويض داخل الجذور (**موجب**)
الجذر معرف نكمل الحل
مثال :

$\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \sqrt{\text{س}^{٢} + ٥}$

$= \sqrt{(٢)^{٢} + ٥} = \sqrt{٩} = \pm ٣$

اذا كان ناتج التعويض داخل الجذور (**سالب**)
الجذر غير معرف (غ.م)
مثال :

$\lim\limits_{\text{س} \to ١} \sqrt{\text{س}^{٢} - ٢٦}$

$= \sqrt{(٢)^{٢} - ٢٦} = \sqrt{-٢٥} =$ غ.م

اذا كان ناتج التعويض داخل الجذر (صفر) أقوم بتحديد المجال

كيف نقوم بتحديد المجال :

١) نساوي ما داخل الجذر بالصفر
٢) نرسم خط الاعداد
٣) نعين اصفار المجال ونعين إشارات
٤) فوق خط الاعداد موجب (+) النهاية معرفة
فوق خط الاعداد سالب (-) النهاية غير معرفة

الرونق في الرياضيات
إعداد : أ . سائد الوردات
0772044048 – 0787556274

أمثلة : **جد قيمة النهايات التالية (أن وجدت)**

إيجاد النهاية بشكل عام

١) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س}+٢} = \sqrt{٤} = ±٢$

٢) $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س}-٥} = \sqrt{٣-٥} = \sqrt{-٢} = \text{غ.م}$

٣) $\underset{\text{س}\to ٥}{\text{نهـا}} \boxed{\sqrt{\text{س}-٥}} = \sqrt{٥-٥} = \boxed{\sqrt{٠}}$

الحل :

بما ان ناتج التعويض داخل الجذر صفر يجب علينا تحديد المجال $\sqrt{\text{س}-٥}$

$\text{س} - ٥ = ٠ \Leftarrow \text{س} = ٥$

(غ.م)   (م)

------   ++++++

٥

$\underset{\text{س}\to ٥}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س}-٥}$:

$\underset{\text{س}\to ٥^{+}}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س}-٥} = \sqrt{٥-٥} = \sqrt{٠} = ٠$

$\underset{\text{س}\to ٥^{-}}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س}-٥} \quad \text{غ.م}$

$\underset{\text{س}\to ٥^{+}}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س}-٥} \neq \underset{\text{س}\to ٥^{-}}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س}-٥}$

$\therefore \underset{\text{س}\to ٥}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س}-٥} \quad \text{غ.م}$

٤) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س}-٢}$

الحل :

٥) $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \sqrt{٩-٣\text{س}}$

الحل :

٦) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س}^{٢}-١}$

الحل :

٧) $\underset{\text{س}\to ٥}{\text{نهـا}} \sqrt{٥\text{س}-\text{س}^{٢}}$

الحل :

٨) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \sqrt{٣\text{س}^{٢}+٣\text{س}^{٣}}$

الحل : **التعويض المباشر**

$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \sqrt{٣\text{س}^{٢}+٣\text{س}^{٣}} = \sqrt{٣(٠)^{٢}+٣(٠)^{٣}} = \sqrt{٠}$

ما دام تحت الجذر اقتران تربيعي نفكر بالقيمة المطلقة

$= \sqrt{\text{س}^{٢}(٣+٣\text{س})}$

$= \sqrt{\text{س}^{٢}} \sqrt{(٣+٣\text{س})}$

$= |\text{س}| \sqrt{(٣+٣\text{س})}$

٩) $\underset{س \to ٣}{\text{نهــا}} \sqrt{\frac{س - ٣}{س + ٣}}$

الحل :

$\underset{س \to ٣}{\text{نهــا}} \frac{\sqrt{س - ٣}}{\sqrt{س + ٣}}$

التعويض

$\underset{س \to ٣}{\text{نهــا}} \frac{\sqrt{س - ٣}}{\sqrt{س + ٣}} = \frac{\sqrt{٣ - ٣}}{\sqrt{٣ + ٣}} = \frac{٠}{\sqrt{٦}}$

نحدد مجال $\sqrt{س - ٣}$

$س - ٣ = ٠ \Leftarrow س = ٣$

$- - - - - \quad + + + + + +$

٣

$\underset{س \to ٣^+}{\text{نهــا}} \frac{\sqrt{س - ٣}}{\sqrt{س + ٣}} = \frac{\sqrt{٣ - ٣}}{\sqrt{٣ + ٣}} = \frac{٠}{\sqrt{٦}} = ٠$

$\underset{س \to ٣^-}{\text{نهــا}} \frac{\sqrt{س - ٣}}{\sqrt{س + ٣}} = \text{غ.م}$

$\underset{س \to ٣^+}{\text{نهــا}} \text{ق}(س) \neq \underset{س \to ٣^-}{\text{نهــا}} \text{ق}(س)$

$\underset{س \to ٣}{\text{نهــا}} \text{ق}(س) \text{ غ.م}$

١٠) $\underset{س \to ٤}{\text{نهــا}} \frac{\sqrt{س - ٤} + ٣}{١٠}$

الحل :

فكرة "ممنوع الضرب بالمرافق لان ناتج ما تحت الجذر صفر "

١١) $\underset{س \to ٤}{\text{نهــا}} \frac{\sqrt{س^٢ - ١٦}}{\sqrt{س - ٤}}$

الحل :

الفكرة " لا يمكن ان نختصر حتى نعرف اذا كان معرف أم لا "

تحديد الاتجاه

١٢) $\underset{س \to ٢^+}{\text{نهــا}} \frac{\sqrt{س^٢ - ٤} + \sqrt{س - ٢}}{\sqrt{س - ٢}}$

الحل :

١٣) $\underset{س \to ١^+}{\text{نهــا}} \frac{\sqrt{س^٢ - ١} + \sqrt{س - ١}}{\sqrt{س - ١}}$

الحل :

١٤) $\underset{س \to ٧^-}{\text{نهــا}} \frac{\sqrt{س^٢ - ٤٩}}{\sqrt{س - ٧}}$

الحل :

١٥) $\underset{س \to ٠^-}{\text{نهــا}} س \sqrt{\frac{١}{س^٢} + ٣}$

الحل :