الدرس الثاني : نظريات النهايات

١) اذا كان أ وب عددان حقيقان وكان **ق(س) = ب** فان

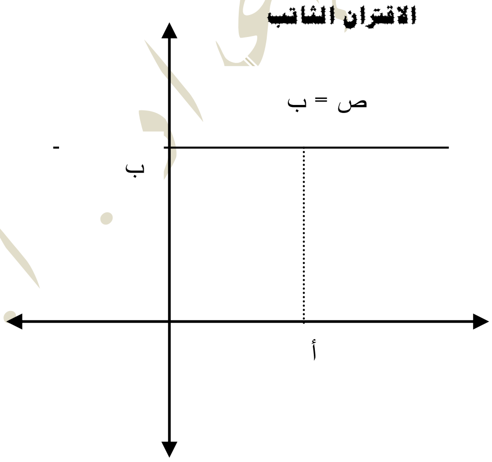
$\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = \text{ب}$ (**نهـا الثابت = الثابت نفسه**)

امثلة : جد قيمة النهايات التالية

١) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ ٤ = ٤$ ٢) $\underset{\text{س}\to \sqrt{٥}}{\text{نهـا}}\ ٧ = ٧$

٣) $\underset{\text{س}\to -٥}{\text{نهـا}}\ ٠ = ٠$

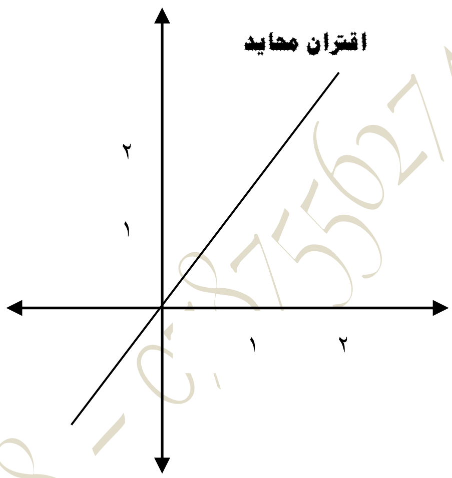
الاقتران الثابت



٢) اذا كان **ق(س)= س** فان $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = \text{أ}$ حيث أ ∈ ح

أمثلة :

١)



٣) اذا كان **ق** و **هـ** اقترانيين أ ، **ب** ، **جـ** ∈ ح

حيث $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = \text{ب}$ و $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{هـ}(\text{س}) = \text{جـ}$ فأن

١) $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ (\text{ق}(\text{س}) \pm \text{هـ}(\text{س}))$

$\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) \pm \underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{هـ}(\text{س}) = \text{ب} \pm \text{جـ}$

٢) $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ (\text{ق}(\text{س}) \times \text{هـ}(\text{س}))$

$\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) \times \underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{هـ}(\text{س}) = \text{ب} \times \text{جـ}$

٣) $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}(\text{س})}$

$\dfrac{\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س})}{\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{هـ}(\text{س})} = \dfrac{\text{ب}}{\text{جـ}}$ حيث جـ ≠ صفر

٤) $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \sqrt[\text{ن}]{\text{ق}(\text{س})} = \sqrt[\text{ن}]{\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س})} = \sqrt[\text{ن}]{\text{ب}}$

شرط ان ب > صفر و ن عدد زوجي

٥) $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{ك}\,\text{ق}(\text{س}) = \text{ك}\,\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = \text{ك} \times \text{ب}$ **حيث ان ك ثابت**

❖ **نتيجة**

أ) اذا كان ق **اقتران كثير حدود** حيث ان أ ∈ ح

فان $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(\text{أ})$

ب) اذا كانت $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = \text{ب}$

فان $\left(\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س})\right)^{\text{ن}} = (\text{ب})^{\text{ن}}$ **حيث ان ن عدد طبيعي**

تلخيص

تتوزع النهاية على العمليات الاربعة **بشرط** ان تكون **موجوده**

وفي **القسمة بشرط** ان لا يكون ناتج التعويض المقام يساوي صفر

أمثلة : **جد قيمة النهايات التالية**

١) $\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نهـا}}\ ٢\text{س}+١ = ٢\times ٤ + ١ = ٩$

٢) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \sqrt[٣]{\text{س}^{٢} - ١٢}$

$= \sqrt[٣]{\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \text{س}^{٢} - ١٢} = \sqrt[٣]{(٢)^{٢} - ١٢} = \sqrt[٣]{-٨} = -٢$

٣) **اذا كانت** $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = ٣$ و $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \text{هـ}(\text{س}) = ٤$

جد ١) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ (٢\text{ق}(\text{س}) + \text{هـ}^{٢}(\text{س}) - ٥\text{س})$

٢) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \dfrac{٢\text{س} + \text{ق}(\text{س})}{\sqrt[٣]{٢\text{هـ}(\text{س})} + ١}$

الحل :

١) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ (٢\text{ق}(\text{س}) + \text{هـ}^{٢}(\text{س}) - ٥\text{س})$

$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ ٢\text{ق}(\text{س}) + \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \text{هـ}^{٢}(\text{س}) - \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ ٥\text{س}$

$= ٢\ \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) + \left(\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \text{هـ}(\text{س})\right)^{٢} - ٥\ \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \text{س}$

$= ٢\times ٣ + (٤)^{٢} - ٥\times ٢ = ١٢$

٢) $\underset{س\to٢}{\text{نهــا}} \dfrac{٢س + ع(س)}{\sqrt[٣]{٢هـ(س)} + ١}$

$= \dfrac{\underset{س\to٢}{\text{نهــا}} ٢س + \underset{س\to٢}{\text{نهــا}} ع(س)}{\underset{س\to٢}{\text{نهــا}} \sqrt[٣]{٢هـ(س)} + \underset{س\to٢}{\text{نهــا}} ١}$

$= \dfrac{٢ \underset{س\to٢}{\text{نهــا}} س + \underset{س\to٢}{\text{نهــا}} ع(س)}{\sqrt[٣]{\underset{س\to٢}{\text{نهــا}} ٢هـ(س)} + \underset{س\to٢}{\text{نهــا}} ١}$

$= \dfrac{٢ \underset{س\to٢}{\text{نهــا}} س + \underset{س\to٢}{\text{نهــا}} ع(س)}{\sqrt[٣]{٢ \underset{س\to٢}{\text{نهــا}} هـ(س)} + \underset{س\to٢}{\text{نهــا}} ١}$

$= \dfrac{٢ \times ٢ + ٣}{\sqrt[٣]{٢ \times ٤} + ١} = \dfrac{٧}{٣}$

٤) **اذا كانت** ق(٢) = ٧ و $\underset{س\to٢}{\text{نهــا}} ع(س) = ٥$ و هـ(س) = ٣

$\underset{س\to٢}{\text{نهــا}} (٢س + هـ(س)) = ٥$

جد ١) $\underset{س\to٢}{\text{نهــا}} (٢ ع(س) - ٣هـ(س) - ٦)$

2) $\underset{س\to٢}{\text{نهــا}} \left(\dfrac{س + ع^٢(س)}{٢ - هـ(س)}\right)$

3) $\underset{س\to٢}{\text{نهــا}} \sqrt{ع(س) + ٤هـ(س)}$

٤) $\underset{س\to١}{\text{نهــا}} (ع(٣س - ١) + س^٢)$

٥) $\underset{س\to٠}{\text{نهــا}} (هـ^٣(٢س + ٢) - ٣س + ١)$

الحل :

١) $\underset{س\to٢}{\text{نهــا}} (٢ ع(س) - ٣هـ(س) - ٦)$

$= \underset{س\to٢}{\text{نهــا}} ٢ ع(س) - \underset{س\to٢}{\text{نهــا}} ٣هـ(س) - \underset{س\to٢}{\text{نهــا}} ٦$

$= ٢ \underset{س\to٢}{\text{نهــا}} ع(س) - ٣ \underset{س\to٢}{\text{نهــا}} هـ(س) - \underset{س\to٢}{\text{نهــا}} ٦$

$= ٢ \times ٥ - ٣ - ٦ = ١$

٢) $\underset{س\to٢}{\text{نهــا}} \left(\dfrac{س + ع^٢(س)}{٢ - هـ(س)}\right)$

$= \dfrac{\underset{س\to٢}{\text{نهــا}} س + \underset{س\to٢}{\text{نهــا}} ع^٢(س)}{\underset{س\to٢}{\text{نهــا}} ٢ - \underset{س\to٢}{\text{نهــا}} هـ(س)}$

$= \dfrac{\underset{س\to٢}{\text{نهــا}} س + (\underset{س\to٢}{\text{نهــا}} ع(س))^٢}{\underset{س\to٢}{\text{نهــا}} ٢ - \underset{س\to٢}{\text{نهــا}} هـ(س)}$

$\dfrac{٢ + (٥)^٢}{٢ - \underset{س\to٢}{\text{نهــا}} هـ(س)}$

يجب علينا تجهيز لكي نظهر الناتج $\underset{س\to٢}{\text{نهــا}} هـ(س)$

تجهيز المعطيات

$\underset{س\to٢}{\text{نهــا}} (٢س + هـ(س)) = ٥$

$\underset{س\to٢}{\text{نهــا}} ٢س + \underset{س\to٢}{\text{نهــا}} هـ(س) = ٥$

$٢ \times ٢ + \underset{س\to٢}{\text{نهــا}} هـ(س) = ٥$

$\underset{س\to٢}{\text{نهــا}} هـ(س) = ٥ - ٤$

$\therefore \underset{س\to٢}{\text{نهــا}} هـ(س) = ١$

نرجع لنكمل السؤال

$= \dfrac{٢ + (٥)^٢}{٢ - \underset{س\to٢}{\text{نهــا}} هـ(س)}$

$= \dfrac{٢ + (٥)^٢}{٢ - ١} = ٢٧$

٣) $\underset{س\to٢}{\text{نهــا}} \sqrt{ع(س) + ٤هـ(س)}$

$= \sqrt{\underset{س\to٢}{\text{نهــا}} ع(س) + \underset{س\to٢}{\text{نهــا}} ٤هـ(س)}$

$= \sqrt{\underset{س\to٢}{\text{نهــا}} ع(س) + ٤ \underset{س\to٢}{\text{نهــا}} هـ(س)}$

$= \sqrt{٥ + ٤ \times ١} = \sqrt{٩} = \pm ٣$

٤) $\underset{س\to١}{\text{نهــا}} (ع(٣س - ١) + س^٢)$

$= \underset{س\to١}{\text{نهــا}} ع(٣س - ١) + \underset{س\to١}{\text{نهــا}} س^٢$

$= \underset{س\to١}{\text{نهــا}} ع(٣س - ١) + (١)^٢$

$= \underset{س\to١}{\text{نهــا}} ع(٣س - ١) + ١$

نوزع النهاية ثم **الانتباه** إلى ما داخل الاقتران من ق أو هـ أو .. الخ

إذا لم يكن ما داخل الاقتران غير س يجب إن نقوم **بعملية الاستبدال** ثم نكمل الحل

ما داخل ق (٣س – ١) **وليس س لوحدها**

نقوم بالاستبدال

نفرض ص = ٣س – ١ ما داخل ق

عندما س ← ١

فان ص ← ٢

$= \underset{س\to١}{\text{نهــا}} ع(٣س - ١) + ١$

نقوم باستبدال ما قمنا بفرضه

$= \underset{ص\to٢}{\text{نهــا}} ع(ص) + ١$

$= ٥ + ١ = ٦$

٥) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\left(\text{هـ}^{٣}(٢\text{س}+٢)-٣\text{س}+١\right)$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \text{هـ}^{٣}(٢\text{س}+٢)-\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\ ٣\text{س}+\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\ ١$

$= \left(\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \text{هـ}(٢\text{س}+٢)\right)^{٣}-٣\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \text{س}+\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\ ١$

$= \left(\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \text{هـ}(٢\text{س}+٢)\right)^{٣}-٣\times ٠+١$

$= \left(\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \text{هـ}(٢\text{س}+٢)\right)^{٣}+١$

نقوم باستبدال ما داخل هـ و **السبب** إن س ليست لوحدها

نفرض ص = ٢س + ٢

عندما س ← ٠

فان ص ← ٢

$= \left(\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \text{هـ}(٢\text{س}+٢)\right)^{٣}+١$

نقوم باستبدال ما قمنا بفرضه

$= \left(\underset{\text{ص}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \text{هـ}(\text{ص})\right)^{٣}+١$

$= (١)^{٣}+١=٢$

٥) اذا كانت $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س})=٣$ و $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \text{هـ}(\text{س})=-١$

جد أ) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\left(\text{ق}(\text{س})+٤\,\text{هـ}(\text{س})\right)$

ب) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\left(\text{ق}(\text{س})\times\text{هـ}(\text{س})+\text{س}^{٢}\right)$

جـ) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\left(٣\text{ق}(\text{س})-٦\text{س}^{٢}+٤\right)$

د) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\left(\dfrac{\text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}(\text{س})}-\dfrac{٦}{\text{ق}(\text{س})}\right)$

هـ) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\left(٢\text{ق}(\text{س})-\sqrt[٣]{٨\,\text{هـ}(\text{س})}\right)$

و) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\left(\text{ق}^{٢}(\text{س})-\text{هـ}^{٣}(\text{س})\right)$

ز) $\underset{\text{س}\to ٢^{+}}{\text{نهـا}}\left(\dfrac{|\text{س}-٢|}{\text{س}-٢}+\sqrt{٣\,\text{ق}(\text{س})}\right)$

حـ) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\left(٣\text{هـ}(\text{س})-\left[\dfrac{\text{س}}{٣}\right]+١\right)$

الحل :

أ) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\left(\text{ق}(\text{س})+٤\,\text{هـ}(\text{س})\right)$

$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س})+\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ ٤\,\text{هـ}(\text{س})$

$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س})+٤\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \text{هـ}(\text{س})$

$= ٣+٤\times -١=-١$

ب) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\left(\text{ق}(\text{س})\times\text{هـ}(\text{س})+\text{س}^{٢}\right)$

$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س})\times\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \text{هـ}(\text{س})+\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \text{س}^{٢}$

$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س})\times\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \text{هـ}(\text{س})+\left(\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \text{س}\right)^{٢}$

$= ٣\times -١+(٢)^{٢}=١$

جـ) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\left(٣\text{ق}(\text{س})-٦\text{س}^{٢}+٤\right)$

$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ ٣\text{ق}(\text{س})-\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ ٦\text{س}^{٢}+\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ ٤$

$= ٣\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س})-٦\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \text{س}^{٢}+\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ ٤$

$= ٣\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س})-٦\left(\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \text{س}\right)^{٢}+\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ ٤$

$= ٣\times ٣-٦(٢)^{٢}+٤=-١١$

د) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\left(\dfrac{\text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}(\text{س})}-\dfrac{٦}{\text{ق}(\text{س})}\right)$

$= \dfrac{\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س})}{\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \text{هـ}(\text{س})}-\dfrac{\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ ٦}{\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س})}$

$= \dfrac{٣}{-١}-\dfrac{٦}{٣}=-٥$

هـ) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\left(٢\text{ق}(\text{س})-\sqrt[٣]{٨\,\text{هـ}(\text{س})}\right)$

$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ ٢\text{ق}(\text{س})-\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \sqrt[٣]{٨\,\text{هـ}(\text{س})}$

$= ٢\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س})-\sqrt[٣]{٨\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \text{هـ}(\text{س})}$

$= ٢\times ٣-\sqrt[٣]{٨\times -١}=٨$

و) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\left(\text{ق}^{٢}(\text{س})-\text{هـ}^{٣}(\text{س})\right)$

$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \text{ق}^{٢}(\text{س})-\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \text{هـ}^{٣}(\text{س})$

$= \left(\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س})\right)^{٢}-\left(\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \text{هـ}(\text{س})\right)^{٣}$

$= (٣)^{٢}-(-١)^{٣}=١٠$

ز) $\lim_{\text{س}\to 2^+}\left(\frac{|2-\text{س}|}{\text{س}-2}+\sqrt{3\,\text{ق}(\text{س})}\right)$

$= \lim_{\text{س}\to 2^+}\frac{|2-\text{س}|}{\text{س}-2}+\lim_{\text{س}\to 2^+}\sqrt{3\,\text{ق}(\text{س})}$

التعويض المباشر داخل القيمة المطلقة

$|2-\text{س}| = |2-2| = |0|$

يجب إعادة التعريف

اعادة تعريف $|2-\text{س}|$

$2-\text{س}=0 \Leftarrow \text{س}=2$

$-(2-\text{س})$ $2-\text{س}$

$- - - - - - - -$ $+ + + + + + +$

2

$= \lim_{\text{س}\to 2^+}\frac{-(2-\text{س})}{\text{س}-2}+\lim_{\text{س}\to 2^+}\sqrt{3\,\text{ق}(\text{س})}$

$= \lim_{\text{س}\to 2^+}\frac{\text{س}-2}{\text{س}-2}+\lim_{\text{س}\to 2^+}\sqrt{3\,\text{ق}(\text{س})}$

$= \lim_{\text{س}\to 2^+}\frac{1}{1}+\lim_{\text{س}\to 2^+}\sqrt{3\,\text{ق}(\text{س})}$

$= \lim_{\text{س}\to 2^+}\frac{1}{1}+\sqrt{3\lim_{\text{س}\to 2^+}\text{ق}(\text{س})}$

$= \lim_{\text{س}\to 2^+}\frac{1}{1}+\sqrt{3\times 3}$

$= 1+\sqrt{3\times 3} = 1\pm 3$

ح) $\lim_{\text{س}\to 2}\left(3\,\text{ه}(\text{س})-\left[\frac{\text{س}}{3}\right]+1\right)$

$= \lim_{\text{س}\to 2}3\,\text{ه}(\text{س})-\lim_{\text{س}\to 2}\left[\frac{\text{س}}{3}\right]+\lim_{\text{س}\to 2}1$

$= 3\lim_{\text{س}\to 2}\text{ه}(\text{س})-\lim_{\text{س}\to 2}\left[\frac{\text{س}}{3}\right]+\lim_{\text{س}\to 2}1$

التعويض المباشر داخل الأكبر عدد صحيح

إن كان ناتجة $\in$ **ص** أو $\in$ **ص** ونحل كما تعلمناه سابقا

$\left[\frac{\text{س}}{3}\right]=\left[\frac{2}{3}\right]=[0.6] \notin \text{ص} = 0$

$= 3\times -1 - 0 + 1 = -2$

٦) اذا كانت $\lim_{\text{س}\to 1}\text{ق}(2\text{س}+1)=5$ و ق (٣) = ٤

جد $\lim_{\text{س}\to 3}\left(3\,\text{ق}^2(\text{س})-2\text{س}+1\right)$

الحل: المطلوب

$\lim_{\text{س}\to 3}\left(3\,\text{ق}^2(\text{س})-2\text{س}+1\right)$

$= \lim_{\text{س}\to 3}3\,\text{ق}^2(\text{س})-\lim_{\text{س}\to 3}2\text{س}+\lim_{\text{س}\to 3}1$

$= 3\left(\lim_{\text{س}\to 3}\text{ق}(\text{س})\right)^2-2\lim_{\text{س}\to 3}\text{س}+\lim_{\text{س}\to 3}1$

$= 3\left(\lim_{\text{س}\to 3}\text{ق}(\text{س})\right)^2-2\lim_{\text{س}\to 3}\text{س}+\lim_{\text{س}\to 3}1$

نحتاج إلى $\lim_{\text{س}\to 3}\text{ق}(\text{س})$ ليست معنا

نقوم بتجهيز المعطيات

$\lim_{\text{س}\to 1}\text{ق}(2\text{س}+1)=5$

نقوم باستبدال ما داخل ق لان س ليست لوحدها

نفرض ص = ٢س + ١

عندما س ← ١

فان ص ← ٣

$\therefore \lim_{\text{ص}\to 3}\text{ق}(\text{ص})=5$

نرجع لسؤال

$= 3\left(\lim_{\text{س}\to 3}\text{ق}(\text{س})\right)^2-2\lim_{\text{س}\to 3}\text{س}+\lim_{\text{س}\to 3}1$

$= 3\left(\lim_{\text{س}\to 3}\text{ق}(\text{س})\right)^2-2\lim_{\text{س}\to 3}\text{س}+\lim_{\text{س}\to 3}1$

$= 3(5)^2-2\times 3+1=70$

٧) **اذا علمت ان** $\lim_{\text{س}\to 3}\left(4\,\text{ق}(2-\text{س})+7\text{س}\right)=\lim_{\text{س}\to 1}\text{ق}(\text{س}-2)$

جد $\lim_{\text{س}\to -1}\text{ق}(\text{س})$

الحل :تجهيز المعطيات

$\lim_{\text{س}\to 3}\left(4\,\text{ق}(2-\text{س})+7\text{س}\right)=\lim_{\text{س}\to 1}\text{ق}(\text{س}-2)$

$= \lim_{\text{س}\to 3}4\,\text{ق}(2-\text{س})+\lim_{\text{س}\to 3}7\text{س}=\lim_{\text{س}\to 1}\text{ق}(\text{س}-2)$

نقوم باستبدال ما داخل ق لان ما داخل ق ليس س لوحدها

نفرض ص = ٢ − س	**نفرض** ان ع = س − ٢
عندما س ← ٣	**عندما** س ← ١
فان ص ← -١	**فان** ع ← -١

نرجع للحل ونقوم باستبدال ما قمنا بفرضه

$= \underset{س\to٣}{\text{نهـا}}\ ٤\text{ق}(٢-س) + \underset{س\to٣}{\text{نهـا}}\ ٧س = \underset{س\to١}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(س-٢)$

$= ٤\ \underset{ص\to١}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(ص) + ٧\ \underset{س\to٣}{\text{نهـا}}\ س = \underset{ع\to١}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(ع)$

$= ٤\ \underset{ص\to١}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(ص) + ٧ \times ٣ = \underset{ع\to١}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(ع)$

$= ٤\ \underset{ص\to١}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(ص) - \underset{ع\to١}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(ع) + ٢١ = ٠$

$= ٣\ \underset{ص\to١}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(ص) = -٢١$

$= \underset{ص\to١}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(ص) = -٧$

$\therefore \underset{ص\to١}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(ص) = -٧$

٨) ق(س) = [٤ + س] ، هـ(س) = [٥ – س]

جد $\underset{س\to٢}{\text{نهـا}}\ (\text{ق}(س) + \text{هـ}(س))$

الحل :

صيغة الامثلة تختلف ولكن على نفس الموضوع

أمثلة جد قيمة النهايات التالية

١) $\text{ق}(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٦ \text{ ، } س < ٣ \\ ٢س \text{ ، } س > ٣ \end{cases}$

جد أ) $\underset{س\to٣}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(س+٢)$ ب) $\underset{س\to١}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(٤)$ جـ) $\underset{س\to٤^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(٧-س)$

الحل :

أ) $\underset{س\to٣}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(س+٢)$

نفرض ان ص = س + ٢

عندما س ← ٣

فان ص ← ٥

$= \underset{س\to٣}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(س+٢)$

$= \underset{ص\to٥}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(ص) = \underset{س\to٥}{\text{نهـا}}\ ٢س = ٢ \times ٥ = ١٠$

ب) $\underset{س\to١}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(٤)$

جـ) $\underset{س\to٤^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(٧-س)$

نفرض ص = ٧ – س

عندما س ← ٤^{+}

فان ص ← ٣^{-}

$= \underset{س\to٤^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(٧-س)$

$\underset{ص\to٣^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(ص) = \underset{س\to٣^{-}}{\text{نهـا}}\ س^{٢} + ٦ = ٩ + ٦ = ١٥$

ملاحظه على الفرع أ

١) إذا فرضنا مقدار ٢س – ٣ = ص

وكانت س ← ٧

فان ص ← ١١

واذا كانت س ← ٧^{+}

فان ص ← ١١^{+}

واذا كانت س ← ٧^{-}

فان ص ← ١١^{-}

هذه الحالة فقط اذا كان معامل س موجب

٢) اذا فرضنا مقدار ٥ – ٢س = ص

وكانت س ← ١

فان ص ← ٣

وإذا كانت س ← ١^{+}

فان ص ← ٣^{-}

واذا كانت س ← ١^{-}

فان ص ← ٣^{+}

هذه الحالة فقط اذا كان معامل س سالب

نطبق هذه الملاحظة عند فرض ما داخل ق ويكون ما داخلها **على شكل**

ص = أس ± ب (**اقتران خطي**)

٢)

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ١ &، \ \text{س} \le ٢ \\ ٣\text{س} + ١ &، \ \text{س} > ٢ \end{cases}$$

جد $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \text{ق}(٣ - \text{س})$

الحل :

$\lim\limits_{\text{س} \to ١} \text{ق}(٣ - \text{س})$

نفرض ان ص = ٣- س

عندما س ← ١

فان ص ←٢

$= \lim\limits_{\text{س} \to ١} \text{ق}(٣ - \text{س})$

$= \lim\limits_{\text{س} \to ٢} \text{ق}(\text{ص})$ نقطة تحول

$= \lim\limits_{\text{س} \to ٢^{+}} \text{ق}(\text{ص}) = \lim\limits_{\text{س} \to ٢^{+}} \text{س}^{٢} + ١ = (٢)^{٢} + ١ = ٥$

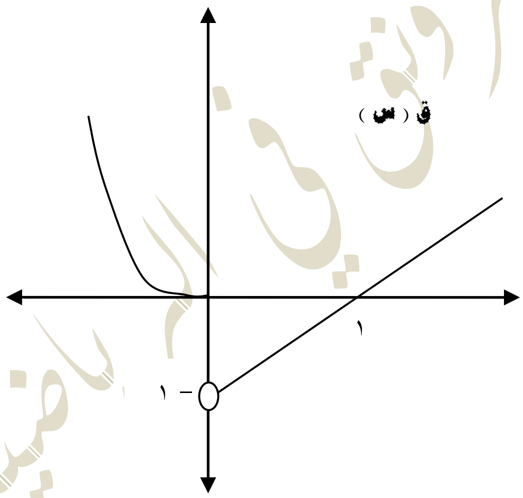
$= \lim\limits_{\text{س} \to ٢^{-}} \text{ق}(\text{ص}) = \lim\limits_{\text{س} \to ٢^{-}} ٣\text{س} + ١ = ٣ \times ٢ + ١ = ٧$

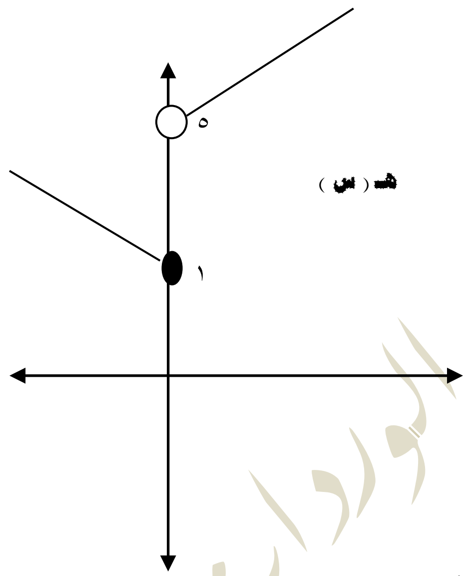
بما ان $\lim\limits_{\text{س} \to ٢^{+}} \text{ق}(\text{ص}) \ne \lim\limits_{\text{س} \to ٢^{-}} \text{ق}(\text{ص})$

$\therefore \lim\limits_{\text{س} \to ٢} \text{ق}(\text{ص})$ غ٠م

٣) اعتمادا على الشكل المجاور احسب

$\lim\limits_{\text{س} \to ٠^{+}} (٢\text{ق}(\text{س}) - ٣\text{هـ}(\text{س}) + ٤)$





الحل :

$\lim\limits_{\text{س} \to ٠^{+}} (٢\text{ق}(\text{س}) - ٣\text{هـ}(\text{س}) + ٤)$

$= \lim\limits_{\text{س} \to ٠^{+}} ٢\text{ق}(\text{س}) - \lim\limits_{\text{س} \to ٠^{+}} ٣\text{هـ}(\text{س}) + \lim\limits_{\text{س} \to ٠^{+}} ٤$

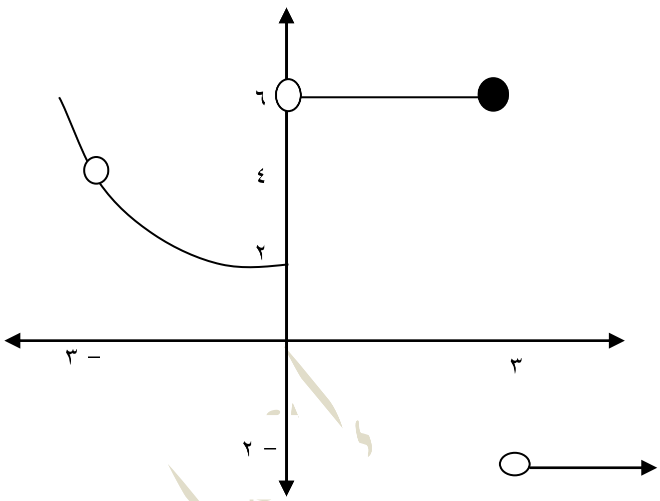
$= ٢ \lim\limits_{\text{س} \to ٠^{+}} \text{ق}(\text{س}) - ٣ \lim\limits_{\text{س} \to ٠^{+}} \text{هـ}(\text{س}) + \lim\limits_{\text{س} \to ٠^{+}} ٤$

من الشكل نستخرج $\lim\limits_{\text{س} \to ٠^{+}} \text{ق}(\text{س}) = -١$

$\lim\limits_{\text{س} \to ٠^{+}} \text{هـ}(\text{س}) = ٥$

$= ٢ \times -١ - ٣ \times ٥ + ٤ = -١٣$

٤) اعتمادا على الرسم



جد أ) قيم أ حيث ان $\lim\limits_{س \to أ} و(س)$ غ.م

ب) $\lim\limits_{س \to ٣^-} \left(س^٢ و(س) + \sqrt{س^٢ + ٧}\right)$

جـ) قيم أ حيث ان $\lim\limits_{س \to أ} (و(س)) = -٢$

د) $\lim\limits_{س \to -٤^-} \left(٦و(س+٤) + س^٢\right)$

هـ) $\lim\limits_{س \to ٢^+} ٤\, و(٥ - س)$

الحل :

أ) قيم أ حيث ان $\lim\limits_{س \to أ} و(س)$ غ.م

$أ = (٣،٠)$

ب) $\lim\limits_{س \to ٣^-} \left(س^٢ و(س) + \sqrt{س^٢ + ٧}\right)$

$= \lim\limits_{س \to ٣^-} س^٢ و(س) + \lim\limits_{س \to ٣^-} \sqrt{س^٢ + ٧}$

$= \lim\limits_{س \to ٣^-} س^٢ \times \lim\limits_{س \to ٣^-} و(س) + \sqrt{\lim\limits_{س \to ٣^-} (س^٢ + ٧)}$

من الشكل نحضر $\lim\limits_{س \to ٣^-} و(س) = ٤$

انتبه إن $\lim\limits_{س \to ٣^-} و(س)$

$= \lim\limits_{س \to ٣^-} س^٢ \times \lim\limits_{س \to ٣^-} و(س) + \lim\limits_{س \to ٣^-} \sqrt{س^٢ + ٧}$

$= (-٣)^٢ \times ٤ + \sqrt{(-٣)^٢ + ٧} = ٣٢$

جـ) قيم أ حيث ان $\lim\limits_{س \to أ} (و(س)) = -٢$

$أ = (∞،٣)$

د) $\lim\limits_{س \to -٤^-} \left(٦و(س+٤) + س^٢\right)$

$= \lim\limits_{س \to -٤^-} ٦و(س+٤) + \lim\limits_{س \to -٤^-} س^٢$

$= ٦ \lim\limits_{س \to -٤^-} و(س+٤) + \lim\limits_{س \to -٤^-} س^٢$

نفرض ان ص = س + ٤

عندما س ← -٤^-

فان ص ← ٠^-

$= ٦ \lim\limits_{س \to -٤^-} و(س+٤) + \lim\limits_{س \to -٤^-} س^٢$

$= ٦ \lim\limits_{ص \to ٠^-} و(ص) + \lim\limits_{س \to -٤^-} س^٢$

$= ٦ \times ٢ + (-٤)^٢ = ٢٨$

هـ) $\lim\limits_{س \to ٢^+} ٤\, و(٥ - س)$

$= ٤ \lim\limits_{س \to ٢^+} و(٥ - س)$

نفرض ان ص = ٥- س

عندما س ← ٢^+

فان ص ← ٣^-

$= ٤ \lim\limits_{س \to ٢^+} و(٥ - س)$

$= ٤ \lim\limits_{ص \to ٣^-} و(ص) = ٤ \times ٦ = ٢٤$

٥) اذا كان هـ (س) كثير حدود وكانت

$$\lim_{س \to ٠} \frac{هـ(س) + ٥}{س} = \frac{١}{٢٠}$$

احسب $\lim\limits_{س \to ٠} (هـ(س) - ٥)$

الحل :

$\lim\limits_{س \to ٠} (هـ(س) - ٥)$

$= \lim\limits_{س \to ٠} هـ(س) - \lim\limits_{س \to ٠} ٥$

من المعطيات يمكن إحضار $\lim\limits_{س \to ٠} هـ(س)$

تجهيز المعطيات

$$\lim_{س \to ٠} \frac{هـ(س) + ٥}{س} = \frac{١}{٢٠}$$ **توزيع النهاية والضرب التبادلي**

$\lim\limits_{س \to ٠} هـ(س) + ٥ = \frac{١}{٢٠} \times \lim\limits_{س \to ٠} س$

$\lim\limits_{س \to ٠} هـ(س) + ٥ = \frac{١}{٢٠} \times ٠$

$\lim\limits_{س \to ٠} هـ(س) + ٥ = ٠$

$\therefore \lim\limits_{س \to ٠} هـ(س) = -٥$

نرجع للحل

$$= \underset{س \to ٠}{\text{نها}}\ \text{هـ}(س) - \underset{س \to ٠}{\text{نها}}\ ٥$$

$$= -٥ - ٥ = -١٠$$

٦) ق(س) كثير حدود $\underset{س \to -٢}{\text{نها}} \dfrac{\text{ق}(س)+٥}{س+٢} = ٩$

احسب $\underset{س \to -٢}{\text{نها}} \left(٢\text{ق}(س) + \left[\dfrac{س}{٣}+٢\right]\right) = -٩$

الحل :

$$\underset{س \to -٢}{\text{نها}} \left(٢\text{ق}(س) + \left[\dfrac{س}{٣}+٢\right]\right) = -٩$$

$$= \underset{س \to -٢}{\text{نها}}\ ٢\text{ق}(س) + \underset{س \to -٢}{\text{نها}} \left[\dfrac{س}{٣}+٢\right] = -٩$$

$$= ٢\ \underset{س \to -٢}{\text{نها}}\ \text{ق}(س) + \underset{س \to -٢}{\text{نها}} \left[\dfrac{س}{٣}+٢\right] = -٩$$

من المعطيات يمكن إحضار $\underset{س \to -٢}{\text{نها}}\ \text{ق}(س)$

تجهيز المعطيات

$\underset{س \to -٢}{\text{نها}} \dfrac{\text{ق}(س)+٥}{س+٢} = ٩$ توزيع النهاية وضرب التبادلي

$$\underset{س \to -٢}{\text{نها}}\ \text{ق}(س) + ٥ = ٩ \times \underset{س \to -٢}{\text{نها}} (س+٢)$$

$$\therefore \underset{س \to -٢}{\text{نها}}\ \text{ق}(س) = -٥$$

نرجع للحل

$$= ٢\ \underset{س \to -٢}{\text{نها}}\ \text{ق}(س) + \underset{س \to -٢}{\text{نها}} \left[\dfrac{س}{٣}+٢\right] = -٩$$

ناتج التعويض داخل الأكبر عدد ليس صحيح

$$\underset{س \to -٢}{\text{نها}} \left[\dfrac{س}{٣}+٢\right] = \left[\dfrac{-٢}{٣}+٢\right] = \left[\dfrac{٤}{٣}\right] \notin ص = ١$$

$$= ٢ \times -٥ + ١ = -٩$$

$$-٩ = -٩$$

طريقة حل مثل هذه الأمثلة

نقارن المطلوب بالمعطيات بعد ذلك نقوم بحل المطلوب ب**استخدام الطرق الستة التي تم حلها في الدرس الثالث**

ثم نقارن الناتج بالمعطى إما إن يكون له نفس الجواب أو مقلوبة أو ما يمكن استخدامه للوصول إلى الشكل المطلوب

٧) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{٢\text{ق}(س)-٦}{س-٢} = ١٠$ **المعطى**

احسب $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{س+٢}-٢}{\text{ق}(س)-٣}$ **المطلوب**

الحل :

$$\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{س+٢}-٢}{\text{ق}(س)-٣}$$

$$= \underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{س+٢}-٢}{\text{ق}(س)-٣} \times \dfrac{\sqrt{س+٢}+٢}{\sqrt{س+٢}+٢}$$

$$= \underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\left(\sqrt{س+٢}\right)^{٢} - (٢)^{٢}}{\text{ق}(س)-٣} \times \dfrac{١}{\sqrt{س+٢}+٢}$$

$$= \underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{س+٢-٤}{\text{ق}(س)-٣} \times \dfrac{١}{\sqrt{س+٢}+٢}$$

$$= \underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{س-٢}{\text{ق}(س)-٣} \times \dfrac{١}{\sqrt{س+٢}+٢}$$

من المعطيات $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{٢\text{ق}(س)-٦}{س-٢} = ١٠$

$$\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{٢(\text{ق}(س)-٣)}{س-٢} = ١٠$$

$\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\text{ق}(س)-٣}{س-٢} = ٥$ لكن المطلوب

$\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{س-٢}{\text{ق}(س)-٣}$ نقوم **بقلب** الناتج فيصبح $\dfrac{١}{٥}$

نرجع للحل

$$= \underset{س \to ٢}{\text{نها}} \dfrac{س-٢}{\text{ق}(س)-٣} \times \dfrac{١}{\sqrt{س+٢}+٢}$$

$$= \dfrac{١}{٥} \times \dfrac{١}{\sqrt{س+٢}+٢} = \dfrac{١}{٥} + \dfrac{١}{٤} = \dfrac{١}{٢٠}$$

٨) $\lim_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ٣}{س^{٢} - ٤} = ٥$

احسب $\lim_{س \to ٢} \frac{٢س^{٣} + س - ١٨}{ق(س) - ٣}$

الحل :

$\lim_{س \to ٢} \frac{٢س^{٣} + س - ١٨}{ق(س) - ٣}$

نقوم بتحليل البسط باستخدام القسمة التركيبية (**لانها من الدرجة الثالثة**)

س = ٢ جذر البسط ⇐ س – ٢ عامل البسط

	$س^{٣}$	$س^{٢}$	س	ثابت
	٢	٠	١	١٨ -
$\boxed{٢}$		٤	٨	١٨
	٢	٤	٩	٠

الناتج $٢س^{٢} + ٤س + ٩$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(٢س^{٢} + ٤س + ٩)}{ق(س) - ٣}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)}{ق(س) - ٣} \times (٢س^{٢} + ٤س + ٩)$

من المعطيات $\lim_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ٣}{س^{٢} - ٤} = ٥$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ٣}{(س + ٢)(س - ٢)} = ٥$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)}{ق(س) - ٣} \times (٢س^{٢} + ٤س + ٩)$

ننتبه إلى إننا بحاجه إلى (س + ٢)

نضربها في $= \lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)}{ق(س) - ٣} \times (٢س^{٢} + ٤س + ٩)$

فتصبح $= \lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)}{ق(س) - ٣} \times (٢س^{٢} + ٤س + ٩) \times \frac{س + ٢}{س + ٢}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(س + ٢)}{ق(س) - ٣} \times (٢س^{٢} + ٤س + ٩) \times \frac{١}{س + ٢}$

لكن مهنا من المعطيات $\lim_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ٣}{(س + ٢)(س - ٢)} = ٥$

$\therefore \lim_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ٣}{(س + ٢)(س - ٢)} = \frac{١}{٥}$

نرجع للحل

$= \lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(س + ٢)}{ق(س) - ٣} \times (٢س^{٢} + ٤س + ٩) \times \frac{١}{س + ٢}$

$= \frac{١}{٥} \times \lim_{س \to ٢} (٢س^{٢} + ٤س + ٩) \times \frac{١}{س + ٢} = \frac{١}{٥} \times \frac{٢(٢)^{٢} + ٤(٢) + ٩}{٢ + ٢} = \frac{٢٥}{٢٠}$

٩) $\lim_{س \to ١} \frac{٢ - ق(س)}{س - ١} = ٣$

احسب $\lim_{س \to ١} \frac{٢س - ق(س)}{س - ١}$

الحل :

$\lim_{س \to ١} \frac{٢س - ق(س)}{س - ١}$

من المعطيات $\lim_{س \to ١} \frac{٢ - ق(س)}{س - ١} = ٣$

$\lim_{س \to ١} ٢ - ق(س) = ٣(س - ١)$

$= \lim_{س \to ١} ٢ - ق(س) = ٣س - ٣$

$= \lim_{س \to ١} -ق(س) = ٣س - ٥$ **نضيف لطرفين ٢س**

$= \lim_{س \to ١} ٢س - ق(س) = ٣س - ٥ + ٢س$

$= \lim_{س \to ١} ٢س - ق(س) = ٥س - ٥$ **نقسم الكل على س -١**

$= \lim_{س \to ١} \frac{٢س - ق(س)}{س - ١} = \frac{٥س - ٥}{س - ١}$

نرجع للحل

$\lim_{س \to ١} \frac{٢س - ق(س)}{س - ١}$

$\therefore \lim_{س \to ١} \frac{٢س - ق(س)}{س - ١} = ٥$

اسئلة الثواتب على الدرس الثاني والثالث

في هذه الاسئلة يجب تكوين معادلات **بعدد الثواتب** بحيث بحصول على المعادلة من المعطيات اما بصورة مباشرة أو غير مباشرة

ملاحظات

١) اذا كانت

النهاية موجودة اذن $\underset{\text{س}\to \text{أ}^+}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = \underset{\text{س}\to \text{أ}^-}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}$

$\therefore\ \underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}$ **موجودة**

٢) **نهاية المقام تساوي صفر** (تعويض المقام بالصفر)

البسط كثير حدود تعويض البسط يساوي صفر

أمثلة :

١)

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س} + ٣\text{أ} & ، \text{س} > ١ \\ \text{س}^٢ + ٤ & ، \text{س} \le ١ \end{cases}$$

فما قيمة الثابت أ

علما بان $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}$ موجودة

الحل :

بما ان $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}$ موجودة

هذا يدل على ان $\underset{\text{س}\to ١^+}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = \underset{\text{س}\to ١^-}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}$

$$\underset{\text{س}\to ١^+}{\text{نهـا}}\ \text{س}^٢ + ٤ = \underset{\text{س}\to ١^-}{\text{نهـا}}\ \text{س} + ٣\text{أ}$$

$$(١)^٢ + ٤ = ١ + ٣\text{أ}$$

$$\text{أ} = \frac{٤}{٣}$$

٢)

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^٢ - ٤}{\text{س} + ٢} & ، \text{س} < \text{م} \\ ٣\text{س} & ، \text{س} > \text{م} \end{cases}$$

احسب قيمة الثابت م

علما بان $\underset{\text{س}\to \text{م}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}$ موجودة

الحل :

بما إن $\underset{\text{س}\to \text{م}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}$ موجودة

هذا يدل على إن $\underset{\text{س}\to \text{م}^+}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = \underset{\text{س}\to \text{م}^-}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}$

$$\underset{\text{س}\to \text{م}^+}{\text{نهـا}}\ ٣\text{س} = \underset{\text{س}\to \text{م}^-}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}^٢ - ٤}{\text{س} + ٢}$$

$$\underset{\text{س}\to \text{م}^+}{\text{نهـا}}\ ٣\text{س} = \underset{\text{س}\to \text{م}^-}{\text{نهـا}}\ \frac{(\text{س} + ٢)(\text{س} - ٢)}{\text{س} + ٢}$$

$$\underset{\text{س}\to \text{م}^+}{\text{نهـا}}\ ٣\text{س} = \underset{\text{س}\to \text{م}^-}{\text{نهـا}}\ \frac{(\text{س} - ٢)}{١}$$

$$٣ \times \text{م} = \text{م} - ٢ \Leftarrow \text{م} = -١$$

٣)

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} [\text{س} + ٢] & ، \text{س} > \text{أ} \\ ٨ - [\text{س}] & ، \text{س} < \text{أ} \end{cases}$$

فما قيمة الثابت أ حيث ان أ ∈ ص

علما بان $\underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}$ موجودة

ملاحظة

اذا كان أ ∉ ص فانه لا يحتاج إلى إعادة تعريف

إما إذا كانت أ ∈ ص فاننا يجب اعادة التعريف

الحل :

بما إن $\underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}$ موجودة

هذا يدل على إن $\underset{\text{س}\to \text{أ}^+}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = \underset{\text{س}\to \text{أ}^-}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}$

$$\underset{\text{س}\to \text{أ}^+}{\text{نهـا}}\ [\text{س} + ٢] = \underset{\text{س}\to \text{أ}^-}{\text{نهـا}}\ ٨ - [\text{س}]$$

$$\underset{\text{س}\to \text{أ}^+}{\text{نهـا}}\ [\text{س} + ٢]^+ = \underset{\text{س}\to \text{أ}^-}{\text{نهـا}}\ ٨ - [\text{س}]^-$$

$$[\text{أ} + ٢]^+ = ٨ - [\text{أ}]^-$$

$$[\text{أ}]^- + ٢ = ٨ - [\text{أ}]^- \Leftarrow \text{أ} = ٣$$

٤)

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} |\text{س}| + ٤ & ، \text{س} \le \text{أ} \\ [\text{س}] + ٢\text{أ} & ، \text{س} > \text{أ} \end{cases}$$

ما قيمة العدد الصحيح أ علما بان $\underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}$ موجودة

الحل :

بما إن $\underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}$ موجودة

هذا يدل على إن $\underset{\text{س}\to \text{أ}^+}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = \underset{\text{س}\to \text{أ}^-}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}$

$$\underset{\text{س}\to \text{أ}^+}{\text{نهـا}}\ [\text{س}] + ٢\text{أ} = \underset{\text{س}\to \text{أ}^-}{\text{نهـا}}\ |\text{س}| + ٤$$

$$[\text{أ}]^+ + ٢\text{أ} = |\text{أ}| + ٤$$

بما إن $[\ \ ]^+$ من اليمين يبقى الناتج كما

$\text{أ} + \text{أ}^{2} = |\text{أ}| + ٤$

$\text{أ}^{3} = |\text{أ}| + ٤$

اعادة تعريف $|\text{أ}|$

	$-\text{أ}$	أ
$\text{أ} = \text{صفر}$	- - - - - - - - - -	+ + + + + + +
	أ	

عندما $\text{أ} > \text{صفر}$

$\text{أ}^{3} = \text{أ} + ٤ \Leftarrow \text{أ} = ٢$

عندما $\text{أ} < \text{صفر}$

$\text{أ}^{3} = -\text{أ} + ٤ \Leftarrow \text{أ} = ١$

٥)

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \dfrac{|\text{س} - ٣|}{\text{س} - ٣} & \text{،} \quad \text{س} < ٣ \\[2ex] \text{أس}^{2} + ٣ & \text{،} \quad \text{س} > ٣ \end{cases}$$

جد قيمة أ التي تجعل $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \text{ق(س)}$ موجودة

الحل :

بما إن $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \text{ق(س)}$ موجودة

هذا يدل على إن $\lim\limits_{\text{س} \to ٣^{+}} \text{ق(س)} = \lim\limits_{\text{س} \to ٣^{-}} \text{ق(س)}$

$$\lim_{\text{س} \to ٣^{+}} \text{أس}^{2} + ٣ = \lim_{\text{س} \to ٣^{-}} \frac{|\text{س} - ٣|}{\text{س} - ٣}$$

التعويض المباشر **داخل القيمة المطلقة**

$|\text{س} - ٣| = |٣ - ٣| = |٠|$

يجب إعادة التعريف $|\text{س} - ٣|$

$\text{س} - ٣ = \text{صفر} \Leftarrow \text{س} = ٣$

$-(\text{س} - ٣)$	$\text{س} - ٣$
- - - - - - - - -	+ + + + + + +
٣	

لكن نريد النهاية من **اليسار**

$$\lim_{\text{س} \to ٣^{-}} \frac{-(\text{س} - ٣)}{\text{س} - ٣}$$

$$\therefore \lim_{\text{س} \to ٣^{-}} \frac{٣ - \text{س}}{\text{س} - ٣}$$

نرجع للحل

$$\lim_{\text{س} \to ٣^{+}} \text{أس}^{2} + ٣ = \lim_{\text{س} \to ٣^{-}} \frac{|\text{س} - ٣|}{\text{س} - ٣}$$

$$\lim_{\text{س} \to ٣^{+}} \text{أس}^{2} + ٣ = \lim_{\text{س} \to ٣^{-}} \frac{٣ - \text{س}}{\text{س} - ٣}$$

ناتج تعويضه $\frac{٠}{٠}$ يجب استخدام الطرق الستة الموجودة في الدرس الثالث

$$\lim_{\text{س} \to ٣^{+}} \text{أس}^{2} + ٣ = \lim_{\text{س} \to ٣^{-}} \frac{-١}{١}$$

$$\text{أ}(٣)^{2} + ٣ = \frac{-١}{١} \Leftarrow \text{أ} = \frac{-٤}{٩}$$

٦)

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{أ} - \text{س}^{2}}{\text{س}} & \text{،} \quad \text{س} \geq ٣ \\[2ex] \dfrac{|٢\text{س} - ٤| - ٢}{٦\text{س} - ١٨} & \text{،} \quad \text{س} < ٣ \end{cases}$$

جد قيمة أ التي تجعل $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \text{ق(س)}$ موجودة

الحل :

بما إن $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \text{ق(س)}$ موجودة

هذا يدل على إن $\lim\limits_{\text{س} \to ٣^{+}} \text{ق(س)} = \lim\limits_{\text{س} \to ٣^{-}} \text{ق(س)}$

$$\lim_{\text{س} \to ٣^{+}} \frac{\text{أ} - \text{س}^{2}}{\text{س}} = \lim_{\text{س} \to ٣^{-}} \frac{|٢\text{س} - ٤| - ٢}{٦\text{س} - ١٨}$$

التعويض المباشر **داخل القيمة المطلقة**

$|٢\text{س} - ٤| = |٢(٣) - ٤| = |٢|$

ناتج التعويض داخل القيمة المطلقة موجبة إذن يبقى الاقتران كما هو

$$\lim_{\text{س} \to ٣^{+}} \frac{\text{أ} - \text{س}^{2}}{\text{س}} = \lim_{\text{س} \to ٣^{-}} \frac{|٢\text{س} - ٤| - ٢}{٦\text{س} - ١٨}$$

$$\lim_{\text{س} \to ٣^{+}} \frac{\text{أ} - \text{س}^{2}}{\text{س}} = \lim_{\text{س} \to ٣^{-}} \frac{٢\text{س} - ٤ - ٢}{٦\text{س} - ١٨}$$

$$\lim_{\text{س} \to ٣^{+}} \frac{\text{أ} - \text{س}^{2}}{\text{س}} = \lim_{\text{س} \to ٣^{-}} \frac{٢\text{س} - ٦}{٦\text{س} - ١٨}$$

$$\lim_{\text{س} \to ٣^{+}} \frac{\text{أ} - \text{س}^{2}}{\text{س}} = \lim_{\text{س} \to ٣^{-}} \frac{٢(\text{س} - ٣)}{٦(\text{س} - ٣)}$$

$$\frac{\text{أ} - (٣)^{2}}{٣} = \frac{٢}{٦} \Leftarrow \text{أ} = ١٠$$

٧) اذا كانت $\lim\limits_{\text{س}\to ٢} \frac{\sqrt{\text{س}+٧} - \sqrt{٣+\text{أ}}}{\text{س}-٢}$ موجودة

جد الثابت أ

الحل :

المقام يساوي صفر

والبسط كثير حدود يساوي صفر

خذ البسط وساويه بالصفر

$$\lim_{\text{س}\to ٢} \sqrt{\text{س}+٧} - \sqrt{٣+\text{أ}} = ٠$$

$$\sqrt{٢+٧} - \sqrt{٣+\text{أ}} = ٠$$

$$\sqrt{٩} - \sqrt{٣+\text{أ}} = ٠$$

$$\pm ٣ - \sqrt{٣+\text{أ}} = ٠$$

اما

$$٣ - \sqrt{٣+\text{أ}} = ٠ \Leftarrow \text{أ} = ٦$$

او

$$-٣ - \sqrt{٣+\text{أ}} = ٠ \Leftarrow \text{أ} = ٦$$

٨) $\lim\limits_{\text{س}\to ٣} \frac{\text{س}^{٢} + \text{ب}\text{س} - ١٥}{\text{س} - ٣}$ موجودة

جد الثابت ب

الحل :

$$\lim_{\text{س}\to ٣} \text{س}^{٢} + \text{ب}\text{س} - ١٥ = ٠$$

$$(٣)^{٢} + \text{ب}(٣) - ١٥ = ٠ \Leftarrow \text{ب} = ٢$$

٩) **اذا كانت** $\lim\limits_{\text{س}\to ٢} \frac{٣\text{س}^{٢} - (٦ - \text{أ})\text{س} - ٢\text{أ}}{\text{س} - ٢} = ١١$

جد الثابت أ

الحل :

بما إن ناتج النهاية عدد تعني إن النهاية بشكل عام موجودة

نستخدم القسمة التركيبية لتحليل البسط

س = ٢ جذر البسط ⟸ س – ٢ عامل البسط

	س³	س²	س	ثابت
	٠	٣	٦ _ أ	ـ ٢أ
٢		٠	٦	٢أ
	٠	٣	أ	٠

الناتج ٣س + أ

$$\lim_{\text{س}\to ٢} \frac{(\text{س}-٢)(٣\text{س}+\text{أ})}{\text{س}-٢} = ١١$$

$$\lim_{\text{س}\to ٢} \frac{(٣\text{س}+\text{أ})}{١} = ١١$$

$$\lim_{\text{س}\to ٢} (٣\text{س}+\text{أ}) = ١١$$

$$٣(٢)+\text{أ} = ١١ \Leftarrow \text{أ} = ٥$$

١٠) $\lim\limits_{\text{س}\to ٣} \frac{٢\text{س}+١}{|\text{س}-٤|+\text{أ}} = ٢$

احسب قيمة الثابت أ

الحل :

$$\lim_{\text{س}\to ٣} \frac{٢\text{س}+١}{|\text{س}-٤|+\text{أ}} = ٢$$

التعويض المباشر **داخل القيمة المطلقة**

$|\text{س} - ٤| = |٣ - ٤| = |-١|$

ناتج التعويض داخل المطلق عدد سالب نضرب ما داخل القيمة المطلقة بالسالب فتصبح

$$\lim_{\text{س}\to ٣} \frac{٢\text{س}+١}{٤-\text{س}+\text{أ}} = ٢$$

$$= \lim_{\text{س}\to ٣} \frac{٢\text{س}+١}{٤-\text{س}+\text{أ}} = ٢$$

$$\frac{٢(٣)+١}{٤-٣+\text{أ}} = ٢ \Leftarrow \text{أ} = \frac{٥}{٢}$$

١١) $\lim\limits_{\text{س}\to ٢} \frac{(\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٤)^{\text{ن}}}{(\text{س}^{٢} - ٤)^{٢\text{ن}}} = ١٦$

احسب قيمة الثابت ن

الحل :

$$\lim_{\text{س}\to ٢} \frac{(\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٤)^{\text{ن}}}{(\text{س}^{٢} - ٤)^{٢\text{ن}}} = ١٦$$

ناتج التعويض $\frac{٠}{٠}$ يجب استخدام الطرق الستة الموجودة في الدرس الثالث

$$= \lim_{\text{س}\to ٢} \frac{((\text{س}-٢)(\text{س}-٢))^{\text{ن}}}{((\text{س}-٢)(\text{س}+٢))^{٢\text{ن}}} = ١٦$$

$$= \lim_{\text{س}\to ٢} \frac{(\text{س}-٢)^{٢\text{ن}}}{(\text{س}-٢)^{٢\text{ن}}(\text{س}+٢)^{٢\text{ن}}} = ١٦$$

$$= \lim_{\text{س}\to ٢} \frac{١}{(\text{س}+٢)^{٢\text{ن}}} = ١٦$$

$$\frac{١}{(٢+٢)^{٢\text{ن}}} = ١٦ \Leftarrow \text{ن} = -١$$

١٢) احسب $\lim\limits_{\text{س}\to ٣} \frac{\text{س}^{٢} + ٣\text{س} - \text{أ}}{\text{س} - ٣} = ٩$

احسب قيمة الثابت أ

الحل :

$$\lim_{\text{س}\to ٣} \text{س}^{٢} + ٣\text{س} - \text{أ} = ٩$$

$$(٣)^{٢} + ٣(٣) - \text{أ} = ٩ \Leftarrow \text{أ} = ١٨$$

١٣) $\underset{س\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{٣س^{٢}-٩أس-٣س+٩أ}{٣س-٣}=-١١$

احسب قيمة الثابت أ

الحل : المقام ناتجة صفر والبسط كثير حدود تساوي صفر

اخذ البسط وأساويه بالصفر

لكن لن نأخذ البسط ونساويه بالصفر

والسبب انه سيتم حذف الثابت أ ولن نستفيد شيئا

سوف نستخدم الطريقة **التجزئه لان البسط مكون من ٤ حدود**

$\underset{س\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{٣س^{٢}-٩أس-٣س+٩أ}{٣س-٣}=-١١$

$\underset{س\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{٣س^{٢}-٣س}{٣س-٣}+\underset{س\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{٩أ-٩أس}{٣س-٣}=-١١$

$\underset{س\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{٣س(س-١)}{٣(س-١)}+\underset{س\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{٩أ(١-س)}{٣(س-١)}=-١١$

$\underset{س\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{٣س}{٣}+\underset{س\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{-٩أ}{٣}=-١١$

$\dfrac{٣(١)}{٣}+\dfrac{-٩أ}{٣}=-١١ \Leftarrow أ=-٤$

١٤) $\underset{ص\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{ص^{ن}-١}{ص-١}=ن$ وكانت $\underset{س\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[ن]{٣س-٢}-١}{س^{٣}-س^{٢}+٥س-٥}=\dfrac{١}{١٠}$

الحل:

نفرض ان $ص=\sqrt[ن]{٣س-٢} \Leftarrow س=\dfrac{ص^{ن}+٢}{٣}$

عندما $س \leftarrow ١$

فان $ص \leftarrow ١$

$\underset{ص\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{ص-١}{س^{٣}-س^{٢}+٥س-٥}=\dfrac{١}{١٠}$

نحلل المقام بالقسمة التركيبية

$\underset{ص\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{ص-١}{(س-١)(س^{٢}+٥)}=\dfrac{١}{١٠}$

$\underset{ص\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{ص-١}{(س-١)}=\dfrac{١}{١٠}\times(س^{٢}+٥)$

$\underset{ص\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{ص-١}{\left(\dfrac{ص^{ن}-٢}{٣}-١\right)}=\dfrac{١}{١٠}\times((١)^{٢}+٥)$

$\underset{ص\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{ص-١}{ص^{ن}-١}=\dfrac{١}{٥}$

$\underset{ص\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{١}{ن}=\dfrac{١}{٥} \Leftarrow ن=٥$

١٥) اذا كانت $\underset{س\to ك}{\text{نهـا}} [٢س]=٣$

احسب قيم مجموعة ك

الحل :

نبحث عن ناتج التعويض داخلها يساوي العدد ٣

اعادة تعريف $[٢س]$

طول الفترة $=\dfrac{١}{|٢س|}=\dfrac{١}{٢}$

٠   ٠.٥   ١   ١.٥   ٢   ٢.٥

$٠ \le س < ٠.٥$

تكون قيم ك محصورة بين $١.٥ < س < ٢$

$\therefore ك=(١.٥ ، ٢)$

١٦) $\underset{س\to ٢^{+}}{\text{نهـا}} [أس+١]=٤$

احسب قيم أ

الحل :

$\underset{س\to ٢^{+}}{\text{نهـا}} [أس+١]=٤$

$\underset{س\to ٢^{+}}{\text{نهـا}} [أس+١]^{+}=٤$

$[٢أ+١]^{+}=٤$

$[٢أ]^{+}+١=٤$

خواص الأكبر عدد صحيح

$٣ \le ٢أ < ٣+١$

نزيد واحد

يتم وضع إشارة المساواة على اليمين لان معامل س موجب

$٣ \le ٢أ < ٤$

$\dfrac{٣}{٢} \le أ < \dfrac{٤}{٢} \Leftarrow أ \in \left[\dfrac{٣}{٢} ، ٢\right)$

قانون

$[س]=أ \Leftarrow أ \le س < أ+١$

١٧) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س} - |\text{س} - ٤|} = \underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٢} - \text{أ}^{٢}}{\text{أ} - \text{س}}$

احسب قيمة أ

الحل :

$$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س} - |\text{س} - ٤|} = \underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٢} - \text{أ}^{٢}}{\text{أ} - \text{س}}$$

ناتج التعويض داخل القيمة المطلقة عدد سالب نضرب ما داخل القيمة المطلقة بالسالب

$$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س} - (\text{س} - ٤)} = \underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٢} - \text{أ}^{٢}}{\text{أ} - \text{س}}$$

$$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س} - ٤ + \text{س}} = \underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٢} - \text{أ}^{٢}}{\text{أ} - \text{س}}$$

$$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٢} - ٤}{٢\text{س} - ٤} = \underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٢} - \text{أ}^{٢}}{\text{أ} - \text{س}}$$

$$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{(\text{س} + ٢)(\text{س} - ٢)}{٢(\text{س} - ٢)} = \underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نها}} \frac{(\text{س} - \text{أ})(\text{س} - \text{أ})}{\text{أ} - \text{س}}$$

$$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{(\text{س} + ٢)}{٢} = \underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نها}} \frac{(\text{س} - \text{أ})}{١}$$

$$\frac{(٢ + ٢)}{٢} = \frac{-(\text{أ} - \text{أ})}{١} \Leftarrow \text{أ} = -١$$

١٨) $\underset{\text{س}\to ١^{-}}{\text{نها}} \left[\frac{\text{س}}{٢} + ٣\right] = \underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٣} - \text{أ}^{٣}}{\text{س} - \text{أ}}$

احسب قيمة الثابت أ

الحل :

$$\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \left[\frac{\text{س}}{٢} + ٣\right] = \underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٣} - \text{أ}^{٣}}{\text{س} - \text{أ}}$$

ناتج تعويض داخل الأكبر عدد صحيح ∋ ص

$$\left[\frac{\text{س}}{٢} + ٣\right] = \left[\frac{١}{٢} + ٣\right] = \left[\frac{٧}{٢}\right] \not\ni \text{ص} = ٣$$

$$\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \left[\frac{\text{س}}{٢} + ٣\right] = \underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٣} - \text{أ}^{٣}}{\text{س} - \text{أ}}$$

$$\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} ٣ = \underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٣} - \text{أ}^{٣}}{\text{س} - \text{أ}}$$

$$\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} ٣ = \underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نها}} \frac{(\text{س} - \text{أ})(\text{س}^{٢} + \text{أس} + \text{أ}^{٢})}{\text{س} - \text{أ}}$$

$$\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} ٣ = \underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نها}} \frac{(\text{س}^{٢} + \text{أس} + \text{أ}^{٢})}{١}$$

$$٣ = \frac{((\text{أ})^{٢} + \text{أ}(\text{أ}) + \text{أ}^{٢})}{١} \Leftarrow \text{أ} = \pm ١$$

١٩) $\underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نها}} \frac{\text{س} + ٣}{\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٣}$ غ . م

جد الثابت أ

الحل :

بما إن نـهاية غ . م فيكون ناتج التعويض $\frac{\cdot}{\cdot}$

أي إن التعويض في المقام يساوي صفر

وفي البسط لا يساوي صفر

$$\underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نها}} \text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٤ = ٠$$

$$(\text{أ})^{٢} + ٤(\text{أ}) + ٤ = ٠$$

$$(\text{أ} + ٣)(\text{أ} + ١) = ٠$$

اما أ = ـ ٣ او أ = ـ ١

٢٠) $\text{ق(س)} = \begin{cases} ٢\text{أس} + ٣\text{ب} &، \text{س} \le ١ \\ ٣\text{س}^{٢} + \text{ب} &، \text{س} > ١ \end{cases}$

ما قيمة الثوابت أ و ب علما بان $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \text{ه(س)} = ٥$

الحل :

ما دام في السؤال مجهولين سوف تحتاج إلى **معادلتين**

بما إن $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \text{ه(س)} = ٥$ موجودة

هذا يدل على إن $\underset{\text{س}\to ١^{+}}{\text{نها}} \text{ه(س)} = \underset{\text{س}\to ١^{-}}{\text{نها}} \text{ه(س)} = ٥$

$$\underset{\text{س}\to ١^{+}}{\text{نها}} ٣\text{س}^{٢} + \text{ب} = \underset{\text{س}\to ١^{-}}{\text{نها}} ٢\text{أس} + ٣\text{ب} = ٥$$

$$\Leftarrow \underset{\text{س}\to ١^{+}}{\text{نها}} ٣\text{س}^{٢} + \text{ب} = ٥$$

$$٣(١)^{٢} + \text{ب} = ٥ \Leftarrow \text{ب} = ٢$$

$$\Leftarrow \underset{\text{س}\to ١^{-}}{\text{نها}} ٢\text{أس} + ٣\text{ب} = ٥$$

$$٢\text{أ}(١) + ٣(٢) = ٥ \Leftarrow \text{أ} = \frac{-١}{٢}$$

٢١)
$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٣} - \text{أس} + ٣}{\text{س} - ١} & \text{، س} > ١ \\ \text{ب س} - ٥ & \text{، س} \leq ١ \end{cases}$$

احسب قيمة الثوابت أ ، ب علما بان $\lim\limits_{\text{س}\to ١} \text{ق(س)}$ موجودة

الحل :

٢٢) $$\lim_{\text{س}\to -٢} \frac{\text{س}^{٤} + \text{س}^{٣} + \text{أ}}{\text{س} + ٢} = \text{ب}$$

احسب قيمة الثوابت أ ، ب

الحل :

$$\lim_{\text{س}\to -٢} \frac{\text{س}^{٤} + \text{س}^{٣} + \text{أ}}{\text{س} + ٢} = \text{ب}$$

تعويض العدد (− ٢) في المقام يساوي صفر

والبسط صفر خذ البسط وأساويه بالصفر

$$\lim_{\text{س}\to -٢} \text{س}^{٤} + \text{س}^{٣} + \text{أ} = ٠$$

$$(-٢)^{٤} + (-٢)^{٣} + \text{أ} = ٠ \Leftarrow \text{أ} = -٨$$

نرجع لسؤال ونعوض قيمة الثابت أ

$$\lim_{\text{س}\to -٢} \frac{\text{س}^{٤} + \text{س}^{٣} + (-٨)}{\text{س} + ٢} = \text{ب}$$

$$\lim_{\text{س}\to -٢} \frac{\text{س}^{٤} + \text{س}^{٣} - ٨}{\text{س} + ٢} = \text{ب}$$

$$\lim_{\text{س}\to -٢} \frac{(\text{س} + ٢)(\text{س}^{٣} - \text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٤)}{\text{س} + ٢} = \text{ب}$$

$$\lim_{\text{س}\to -٢} \frac{(\text{س}^{٣} - \text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٤)}{١} = \text{ب}$$

$$\frac{((-٢)^{٣} - (-٢)^{٢} + ٢(-٢) + ٤)}{١} = \text{ب} \Leftarrow \text{ب} = -٢٠$$

٢٣) $$\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\sqrt{\text{أس} + \text{ب}} - ٢}{٥\text{س}} = ١$$

جد قيمة الثواتب أ ، ب

الحل :

$$\lim_{\text{س}\to ٠} \sqrt{\text{أس} + \text{ب}} - ٢ = ٠$$

$$\sqrt{\text{أ}(٠) + \text{ب}} - ٢ = ٠$$

$$\sqrt{\text{ب}} - ٢ = ٠ \Leftarrow \text{ب} = ٤$$

نرجع لسؤال ونقوم باستبدال قيمة الثابت ب

$$\Leftarrow \lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\sqrt{\text{أس} + ٤} - ٢}{٥\text{س}} = ١$$

$$\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\sqrt{\text{أس} + ٤} - ٢}{٥\text{س}} \times \frac{\sqrt{\text{أس} + ٤} + ٢}{\sqrt{\text{أس} + ٤} + ٢} = ١$$

$$\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{(\sqrt{\text{أس} + ٤})^{٢} - (٢)^{٢}}{٥\text{س}} \times \frac{١}{\sqrt{\text{أس} + ٤} + ٢} = ١$$

$$\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{أس} + ٤ - ٤}{٥\text{س}} \times \frac{١}{\sqrt{\text{أس} + ٤} + ٢} = ١$$

$$\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{أ}}{٥} \times \frac{١}{٢ + ٢} = ١$$

$$\frac{\text{أ}}{٥} \times \frac{١}{٤} = ١ \Leftarrow \text{أ} = ٢٠$$

٢٤) $$\lim_{\text{س}\to ٤} \frac{\text{س} - ٤}{\text{س}^{٢} + \text{أس} + \text{ب}} = \text{غ.م}$$

احسب قيمة الثواتب أ ، ب

الحل :

٢٥) **اذا كانت** $$\lim_{\text{س}\to ٣} \left(\frac{\text{أ}}{\text{س} - ٣} + \frac{\text{ب}}{\text{س}^{٢} - ٩}\right) = \frac{١}{٦}$$

٢٦) **اذا كانت** $$\lim_{\text{س}\to ٤} \left(\frac{\text{أ}}{\text{س}^{٢} - ١٦} + \frac{\text{ب}}{\text{س} - ٤}\right) = \frac{-١}{٤}$$