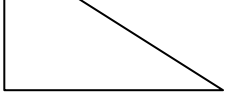
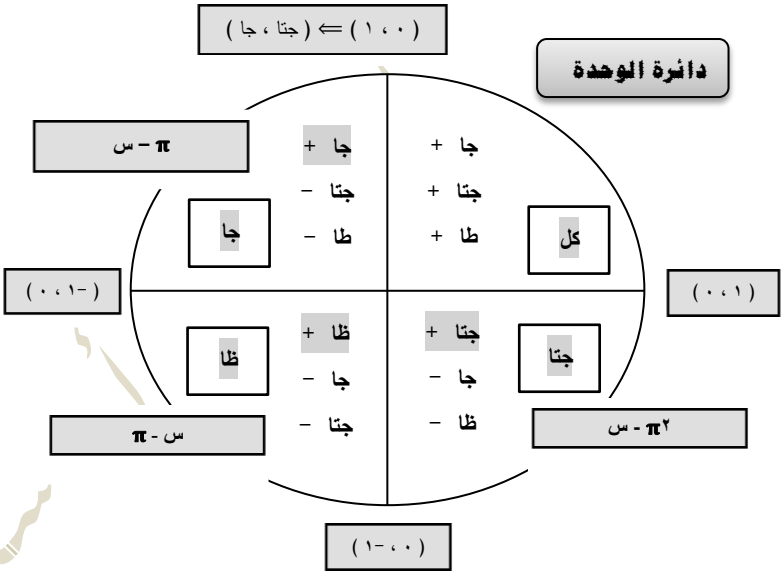
شرح بسيط : الاقترانات الدائرية

❶ جاس = المقابل / المجاور ❷ جتاس = المجاور / الوتر

❸ ظاس = المقابل / المجاور ⇐ ظا س = جا س / جتا س

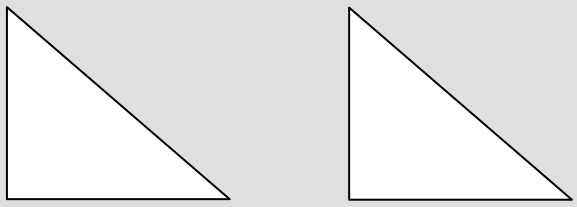


قاس = ١ / جتاس ، قتاس = ١ / جاس ، ظتا س = ١ / ظا س



	٣٠ = π/٦	٦٠ = π/٣	٤٥ = π/٤
جا	١/٢	√٣/٢	١/√٢
جتا	√٣/٢	١/٢	١/√٢
ظا	١/√٣	√٣	١

هناك طريقة اخرى لحفظ الجدول :



جا ٤٥ = ١/√٢ جا ٦٠ = جا ٣٠ =

جتا ٤٥ = ١/√٢ جتا ٦٠ = جتا ٣٠ =

ظا ٤٥ = ١ ظا ٦٠ = ظا ٣٠ =

أهم المتطابقات للحفظ :

جا٢س + جتا٢س = ١ منه جا٢س = ١ – جتا٢س ، جتا٢س = ١ – جا٢س

بقسمة المعادلة على جتا٢س	وبقسمة المعادلة على جا٢س
ظا٢س + ١ = قا٢س	١ + ظتا٢س = قتا٢س
ظا٢س – قا٢س = ١	قتا٢س – ظتا٢س = ١
ظا٢س = قا٢س – ١	ظتا٢س = قتا٢س – ١

جا٢س = ٢جاس جتاس (**المتطابقة الأب**)

مثال :

✓ جا٨س = ٢ جا٤س جتا٤س

✓ جاس = ٢جا ١/٢ س جتا ١/٢ س

العملية العكسية :

جا ٣س جتا ٣س = ١/٢ جا ٦س

جتا٢س = جتا٢س – جا٢س (**المتطابقة الام**)

جتا٢س = ١ – ٢جا٢س

جتا٢س = ٢جتا٢س – ١

١–جتا( ) = ٢جا٢(١/٢ ( )

١+جتا( ) = ٢جتا٢(١/٢ ( )

جا س + جا ص = ٢ جا (س+ص)/٢ × جتا (س–ص)/٢

جا س – جا ص = ٢ جتا (س+ص)/٢ × جا (س–ص)/٢

جتا س + جتا ص = ٢جتا (س+ص)/٢ × جتا (س–ص)/٢

جتا س – جتا ص = – ٢جا (س+ص)/٢ × جا (س–ص)/٢

جا (أ ± ب) = جا أ جتا ب ± جتا أ جا ب

جتا (أ ± ب) = جتا أ جتا ب ∓ جا أ جا ب

ظا(أ±ب) = (ظا أ ± ظا ب) / (١ – ظا أ ظا ب)

الدرس الرابع : نهاية الاقترانات الدائرية

* **عندما يكون ناتج التعويض $\frac{0}{0}$ يمكن الاعتماد على النظرية الاتية وتوابعها :-**

١) **نظرية** $\lim_{س\to 0} \frac{جاس}{س} = ١$

فقط إذا كانت تقترب من **الصفر** فإنها تساوي معامل س حيث س مقاسه **بالراديان**

ملاحظة

إذا كانت س مقاسه بالدرجات فتصبح الجواب $\frac{\pi}{١٨٠}$

أمثلة :

٤٥ درجة $\Longleftarrow$ $\frac{\pi}{٤} = \frac{\pi}{١٨٠} \times ٤٥$

نتيجة $\lim_{س\to 0} \frac{ظاس}{س} = ١$

برهان

أكثر المشاكل في الاقترانات الدائرية إن يقوم الطالب **بإخراج الزاوية كعامل مشترك**

$= \lim_{س\to 0} \frac{جاس}{\frac{جتاس}{س}}$

$= \lim_{س\to 0} \frac{جاس}{جتاس} \times \frac{١}{س}$

$= \lim_{س\to 0} \frac{جاس}{س} \times \frac{١}{جتاس}$

$= \lim_{س\to 0} \frac{جاس}{س} \times \lim_{س\to 0} \frac{١}{جتاس}$

$= \lim_{س\to 0} \frac{جاس}{س} \times \lim_{س\to 0} \frac{١}{جتاس}$

يمكن التبديل لان في الضرب خاصية تسمى بالخاصية التبديلية فقط تستخدم في الضرب

من النظرية

$= ١ \times \lim_{س\to 0} \frac{١}{جتا٠} = ١ \times ١ = ١$

*) $\lim_{س\to 0} \frac{جاس}{ب س} = \frac{١}{ب}$

**) $\lim_{س\to 0} \frac{ب س}{جاس} = \frac{ب}{١}$

*) $\lim_{س\to 0} \frac{ظاس}{ب س} = \frac{١}{ب}$

**) $\lim_{س\to 0} \frac{ب س}{ظاس} = \frac{ب}{١}$

فقط تستخدم هذه النظرية عندما تقترب النهاية من صفر $\Longleftarrow$ ٠ فقط اذا كانت جا أو ظا $\Longleftarrow$ س $\Longrightarrow$

ملاحظات :

نتائج النظرية (الاسئلة الموضوعية)

١) $\lim_{س\to 0} \frac{جاس}{جاب س} = \frac{١}{ب}$

٢) $\lim_{س\to 0} \frac{جاس}{ظاب س} = \frac{١}{ب}$

٣) $\lim_{س\to ن} \frac{جا(س-ن)}{(س-ن)} = \frac{١}{ب}$

نقوم بالاستبدال

نفرض ص = س – ن

س $\longrightarrow$ ن

ص $\longrightarrow$ ٠

$\lim_{س\to 0} \frac{جاب ص}{ب ص} = \frac{١}{ب}$

أمثلة :

١) اذا كانت س : مقاسة بالدرجات فما قيمة $\lim_{س\to 0} \frac{جاس}{س}$

الحل : نحول الزاوية س من الدرجات الى الراديان

س درجة $\Longleftarrow$ $\frac{\pi}{١٨٠} س$ راديان $= \frac{\pi}{١٨٠} \times س$

$\lim_{س\to 0} \frac{جاس}{س} = \lim_{س\to 0} \frac{جا\frac{\pi}{١٨٠} س}{س} = \frac{\pi}{١٨٠}$

أمثلة للاسئلة الموضوعية (القصيرة)

١) $\lim_{س\to 0} \frac{جا٥س}{٣س} = \frac{جا٥(٠)}{٣(٠)} = \frac{٠}{٠}$

نهتم بالتعويض حيث إن الناتج $\frac{٠}{٠}$

نستخدم **النظرية أو المتطابقات للحصول على نتيجة**

الحل :

$\lim_{س\to 0} \frac{جا٥س}{٣س} = \frac{٥}{٣}$

٢) $\lim_{س\to 0} \frac{٧س}{ظا٥س}$

الحل :التعويض المباشر

$$\lim_{س\to 0} \frac{٧س}{ظا٥س} = \frac{٧(٠)}{ظا٥(٠)} = \frac{٠}{٠}$$

من النظرية

$$\lim_{س\to 0} \frac{٧س}{ظا٥س} = \frac{٧}{٥}$$

٣) $\lim_{س\to 0} \frac{جا٥س}{ظا٤س}$

الحل : التعويض المباشر

$$\lim_{س\to 0} \frac{جا٥س}{ظا٤س} = \frac{جا٥(٠)}{ظا٤(٠)} = \frac{٠}{٠}$$

أسئلة مثل هذا النوع

$\frac{جاس}{ظاس}، \frac{ظاس}{جاس}، \frac{جاس}{ظاس}، \frac{ظاس}{جاس}$

نقسم البسط والمقام على س

$$= \lim_{س\to 0} \frac{\frac{جا٥س}{س}}{\frac{ظا٤س}{س}}$$

$$= \lim_{س\to 0} \frac{جا٥س}{س} \times \frac{س}{ظا٤س}$$

$$= \lim_{س\to 0} \frac{جا٥س}{س} \times \lim_{س\to 0} \frac{س}{ظا٤س} = ٥ \times \frac{١}{٤} = \frac{٥}{٤}$$

٤) $\lim_{س\to 0} \frac{جا^٢٣س}{٢س^٢}$

الحل : التعويض المباشر

$$\lim_{س\to 0} \frac{جا^٢٣س}{٢س^٢} = \frac{جا^٢٣(٠)}{٢(٠)^٢} = \frac{٠}{٠}$$

$$= \lim_{س\to 0} \frac{جا٣س \times جا٣س}{٢س \times س}$$

$$= \lim_{س\to 0} \frac{جا٣س}{٢س} \times \frac{جا٣س}{س}$$

$$= \lim_{س\to 0} \frac{جا٣س}{٢س} \times \lim_{س\to 0} \frac{جا٣س}{س} = \frac{٣}{١} \times \frac{٣}{٢} = \frac{٩}{٢}$$

٥) $\lim_{س\to 0} \frac{١}{٣س قتا٥س}$

تخلص من قتاس ، ظتاس ، قاس
قبل التعويض بإرجاعها إلى الأصل

الحل : التعويض المباشر

$$\lim_{س\to 0} \frac{١}{٣س قتا٥س} = \lim_{س\to 0} \frac{١}{٣س \frac{١}{جا٥س}} = \lim_{س\to 0} \frac{جا٥س}{٣س} = \frac{جا٥(٠)}{٣(٠)} = \frac{٠}{٠}$$

$$= \lim_{س\to 0} \frac{جا٥س}{٣س} = \frac{٥}{٣}$$

٦) $\lim_{س\to 0} ٣س^٢ قتا٣س ظتا٢س قا٥س$

الحل : التعويض المباشر

$$= \lim_{س\to 0} ٣س^٢ قتا٣س ظتا٢س قا٥س$$

$$= \lim_{س\to 0} ٣س^٢ \times \frac{١}{جا٣س} \times \frac{١}{ظا٢س} \times \frac{١}{جتا٥س}$$

$$٣(٠) \times \frac{١}{جا٣(٠)} \times \frac{١}{ظا٢(٠)} \times \frac{١}{جتا٥(٠)} = \frac{٠}{٠}$$

$$\frac{٣س}{جا٣س} \times \frac{س}{ظا٢س} \times \frac{١}{جتا٥س} = \frac{٣}{٣} \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{١} = \frac{١}{٢}$$

٧) $\lim_{س\to 0} \frac{جا^٢٣س}{ظا^٢٢س}$

الحل : التعويض المباشر

$$\lim_{س\to 0} \frac{جا^٢٣س}{ظا^٢٢س} = \frac{جا^٢٣(٠)}{ظا^٢٢(٠)} = \frac{٠}{٠}$$

نقسم على س^٢

$$= \lim_{س\to 0} \frac{\frac{جا^٢٣س}{س^٢}}{\frac{ظا^٢٢س}{س^٢}}$$

$$= \lim_{س\to 0} \frac{جا^٢٣س}{س^٢} \times \frac{س^٢}{ظا^٢٢س}$$

$$= \lim_{س\to 0} \frac{جا٣س}{س} \times \frac{جا٣س}{س} \times \frac{س}{ظا٢س} \times \frac{س}{ظا٢س}$$

$$= \lim_{س\to 0} \frac{جا٣س}{س} \times \lim_{س\to 0} \frac{جا٣س}{س} \times \lim_{س\to 0} \frac{س}{ظا٢س} \times \lim_{س\to 0} \frac{س}{ظا٢س}$$

$$= ٣ \times ٣ \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{٩}{٤}$$

٨) $\lim_{س\to 0} \frac{٢س^٢ + ٣س}{جا٢س}$

الحل : التعويض المباشر

$$\lim_{س\to 0} \frac{٢س^٢ + ٣س}{جا٢س} = \frac{٢(٠)^٢ + ٣(٠)}{جا٢(٠)} = \frac{٠}{٠}$$

نوزع المقام على البسط إذا ظهرت في البسط (جمع أو طرح)

$$= \lim_{س\to 0} \frac{٢س^٢}{جا٢س} + \frac{٣س}{جا٢س}$$

مركز الرونق في الرياضيات
إعداد : أ. ساند الوردات
0772044048 - 0787556274

$$= \lim_{س \to 0} \frac{٢س^{٢}}{جا٢س} + \lim_{س \to 0} \frac{٣س}{جا٢س}$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{٢س}{جا٢س} \times س + \lim_{س \to 0} \frac{٣س}{جا٢س}$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{٢س}{جا٢س} \times \lim_{س \to 0} س + \lim_{س \to 0} \frac{٣س}{جا٢س} = \frac{٣}{٢}$$

٩) $\lim_{س \to 0} \frac{٣س^{٢} + جا٤س}{٢س^{٢} + س ظا٣س}$

الحل : التعويض المباشر

$$\lim_{س \to 0} \frac{٣س^{٢} + جا٤س}{٢س^{٢} + س ظا٣س} = \frac{٣(٠)^{٢} + جا٤(٠)}{٢(٠)^{٢} + (٠) ظا٣(٠)} = \frac{٠}{٠}$$

نقسم كل حد على $س^{٢}$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{٣ + \frac{جا٤س}{س^{٢}}}{٢ + \frac{س ظا٣س}{س^{٢}}}$$

نوزع النهاية

$$= \frac{\lim_{س \to 0} ٣ + \lim_{س \to 0} \frac{جا٤س}{س^{٢}}}{\lim_{س \to 0} ٢ + \lim_{س \to 0} \frac{س ظا٣س}{س^{٢}}} = \frac{٤ + ٣}{٣ + ٠} = \frac{٧}{٣}$$

) $\frac{أ \times ب}{جـ} = \frac{أ}{جـ} \times \frac{ب}{١}$

أو $= أ \times \frac{ب}{جـ}$

وكذلك $\frac{أ}{ب \times جـ} = \frac{أ}{ب} \times \frac{١}{جـ}$

) $\frac{أ \pm ب}{جـ} = \frac{أ}{جـ} \pm \frac{ب}{جـ}$ **توزيع البسط على المقام** لان المقام وحيد

) $\frac{أ}{ب \pm جـ} \neq \frac{أ}{ب} \pm \frac{أ}{جـ}$ **لا نوزع المقام على البسط**

١٠) $\lim_{س \to 0} \frac{١ - ظتاس}{قتاس}$

الحل : التعويض المباشر

$$\lim_{س \to 0} \frac{١ - ظتاس}{قتاس} = \frac{١ - ظتا(٠)}{قتا(٠)} = \frac{١ - ١}{٠} = \frac{٠}{٠}$$

نوزع المقام على البسط

$= \lim_{س \to 0} \frac{١}{قتاس} - \frac{ظتاس}{قتاس}$ نقوم بالارجاع للاصل ظتا س و قتا س

$$= \lim_{س \to 0} \frac{١}{\frac{١}{جاس}} - \frac{\frac{جتاس}{جاس}}{\frac{١}{جاس}}$$

$= \lim_{س \to 0}$ جاس − جتاس $= ٠ - ١ = -١$

ويمكن حلها بالطريقة الثانيه

$$= \lim_{س \to 0} \frac{١ - \frac{جتاس}{جاس}}{\frac{١}{جاس}}$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{\frac{جاس}{جاس} - \frac{جتاس}{جاس}}{\frac{١}{جاس}}$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{جاس - جتاس}{جاس} \times \frac{جاس}{١}$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{جاس - جتاس}{١} \times \frac{١}{١}$$

$= \lim_{س \to 0} \frac{جا(٠) - جتا(٠)}{١} \times \frac{١}{١} = ٠ - ١ = -١$

١١) $\lim_{س \to 0} \frac{٥ - ٥جتا^{٢}٣س}{س ظا٢س}$

الحل : التعويض المباشر

$$\lim_{س \to 0} \frac{٥ - ٥جتا^{٢}٣س}{س ظا٢س} = \frac{٥ - ٥جتا^{٢}٣(٠)}{(٠) ظا٢(٠)} = \frac{٠}{٠}$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{٥ - ٥جتا^{٢}٣س}{س ظا٢س}$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{٥(١ - جتا^{٢}٣س)}{س ظا٢س}$$

$$= ٥ \lim_{س \to 0} \frac{(١ - جتا^{٢}٣س)}{س ظا٢س}$$

$$= ٥ \lim_{س \to 0} \frac{((جا^{٢}٣س + جتا^{٢}٣س) - جتا^{٢}٣س)}{س ظا٢س}$$

$$= ٥ \lim_{س \to 0} \frac{(جا^{٢}٣س + جتا^{٢}٣س - جتا^{٢}٣س)}{س ظا٢س}$$

$$= ٥ \lim_{س \to 0} \frac{جا^{٢}٣س}{س ظا٢س}$$

$$= ٥ \lim_{س \to 0} \frac{جا٣س}{س} \times \frac{جا٣س}{ظا٢س}$$

$$= ٥ \lim_{س \to 0} \frac{جا٣س}{س} \times \lim_{س \to 0} \frac{جا٣س}{ظا٢س}$$

$$= ٥ \frac{٣}{١} \times \frac{٣}{٢} = \frac{٤٥}{٢}$$

حل اخر

$$\lim_{س \to 0} \frac{٥ - ٥جتا^{٢}٣س}{س ظا٢س}$$

الحل : التعويض المباشر

$$\lim_{س \to 0} \frac{٥ - ٥جتا^{٢}٣س}{س ظا٢س} = \frac{٥ - ٥جتا^{٢}٣(٠)}{(٠) ظا٢(٠)} = \frac{٠}{٠}$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{٥ - ٥جتا^{٢}٣س}{س ظا٢س}$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{٥(١ - جتا^{٢}٣س)}{س ظا٢س}$$

$$= ٥ \lim_{س \to 0} \frac{(١ - جتا^{٢}٣س)}{س ظا٢س}$$

$$= ٥ \lim_{س \to 0} \frac{(١ - (١ - جا^{٢}٣س)}{س ظا٢س}$$

$$= ٥ \quad \text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{١ - ١ + \text{جا}^{٢} ٣س}{\text{س ظا ٢س}}$$

$$= ٥ \quad \text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{\text{جا}^{٢} ٣س}{\text{س ظا ٢س}}$$

$$= ٥ \quad \text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{س} \times \frac{\text{جا}٣س}{\text{ظا ٢س}}$$

$$= ٥ \quad \text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{س} \times \text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{\text{ظا ٢س}} = \frac{٤٥}{٢}$$

١٢) $\text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{(\sqrt{١ + س} - ١)\text{جا}س}{س^{٢}}$

إذا احتوى البسط أو المقام على جذر مضاف إليه نستخدم طريقة الضرب بالمرافق

الحل : التعويض المباشر

$$\text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{(\sqrt{١ + س} - ١)\text{جا}س}{س^{٢}} = \frac{(\sqrt{١ + ٠} - ١)\text{جا}(٠)}{(٠)^{٢}} = \frac{٠}{٠}$$

$$= \text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{(\sqrt{١ + س} - ١)\text{جا}س}{س^{٢}}$$

$$= \text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{\sqrt{١ + س} - ١}{س} \times \frac{\text{جا}س}{س}$$

$$= \text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{\sqrt{١ + س} - ١}{س} \times \text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{\text{جا}س}{س}$$

$$= \text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{\sqrt{١ + س} - ١}{س} \times \frac{\sqrt{١ + س} + ١}{\sqrt{١ + س} + ١} \times \text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{\text{جا}س}{س}$$

$$= \text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{(\sqrt{١ + س})^{٢} - (١)^{٢}}{س} \times \frac{١}{\sqrt{١ + س} + ١} \times \text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{\text{جا}س}{س}$$

$$= \text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{١ + س - ١}{س} \times \frac{١}{\sqrt{١ + س} + ١} \times \text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{\text{جا}س}{س}$$

$$= \text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{س}{س} \times \frac{١}{\sqrt{١ + س} + ١} \times \text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{\text{جا}س}{س}$$

$$= \text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{س}{س} \times \text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{١}{\sqrt{١ + س} + ١} \times \text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{\text{جا}س}{س}$$

$$= \frac{١}{١} \times \frac{١}{\sqrt{١ + ٠} + ١} \times \frac{١}{١} = \frac{١}{٢}$$

١٣) $\text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{\text{ظا}س}{\sqrt{١ + ٥س} - ١}$

الحل : التعويض المباشر

$$\text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{\text{ظا}س}{\sqrt{١ + ٥س} - ١} = \frac{\text{ظا}(٠)}{\sqrt{١ + ٥(٠)} - ١} = \frac{٠}{٠}$$

$$= \text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{\text{ظا}س}{\sqrt{١ + ٥س} - ١}$$

$$\text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{\text{ظا}س}{\sqrt{١ + ٥س} - ١} \times \frac{\sqrt{١ + ٥س} + ١}{\sqrt{١ + ٥س} + ١}$$

$$\text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{\text{ظا}س}{(\sqrt{١ + ٥س})^{٢} - (١)^{٢}} \times \sqrt{١ + ٥س} + ١$$

$$\text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{\text{ظا}س}{٥س} \times \sqrt{١ + ٥س} + ١$$

$$\text{نهـــا}_{س \to ٠} \frac{\text{ظا}س}{٥س} \times \text{نهـــا}_{س \to ٠} \sqrt{١ + ٥س} + ١$$

$$\frac{١}{٥} \times \sqrt{١ + ٥(٠)} + ١ = \frac{٦}{٥}$$

الفكرة العامة لهذه الأسئلة

نستخدم الفرض عندما تكون **الزاوية غريبة** وعندما تكون **الزاوية الموجودة في البسط والمقام متساويتان**

١٤) $\text{نهـــا}_{س \to ٢} \frac{\text{جا}(س - ٢)}{س^{٢} - ٤}$

الحل : التعويض المباشر

$$\text{نهـــا}_{س \to ٢} \frac{\text{جا}(س - ٢)}{س^{٢} - ٤} = \frac{\text{جا}(٢ - ٢)}{(٢)^{٢} - ٤} = \frac{٠}{٠}$$

الفكرة

نقسم ونضرب بالزاوية بشرط إن ناتج التعويض في الزاوية هو صفر

$$= \text{نهـــا}_{س \to ٢} \frac{\text{جا}(س - ٢)}{س^{٢} - ٤}$$

$$\text{نهـــا}_{س \to ٢} \frac{\text{جا}(س - ٢)}{س^{٢} - ٤} \times \frac{س - ٢}{س - ٢}$$

$$\text{نهـــا}_{س \to ٢} \frac{\text{جا}(س - ٢)}{س - ٢} \times \frac{س - ٢}{س^{٢} - ٤}$$

$$\text{نهـــا}_{س \to ٢} \frac{\text{جا}(س - ٢)}{س - ٢} \times \text{نهـــا}_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{س^{٢} - ٤}$$

نفرض ان ص = س – ٢

عندما س ← ٢

فان ص ← ٠

نستبدل ما قمنا بفرضه

$$\text{نهـــا}_{ص \to ٠} \frac{\text{جا}(ص)}{ص} \times \text{نهـــا}_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{س^{٢} - ٤}$$

$$\text{نهـــا}_{ص \to ٠} \frac{\text{جا}(ص)}{ص} \times \text{نهـــا}_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{(س - ٢)(س + ٢)}$$

$$\text{نهـــا}_{ص \to ٠} \frac{\text{جا}(ص)}{ص} \times \text{نهـــا}_{س \to ٢} \frac{١}{(١)(س + ٢)}$$

$$\frac{١}{١} \times \frac{١}{(٢ + ٢)(١)} = \frac{١}{٤}$$

١٥) $\text{نهـــا}_{س \to ٢} \frac{\text{جا}(س - ٢)}{س^{٢} - س - ٢}$

الحل : التعويض المباشر

$$\text{نهـــا}_{س \to ٢} \frac{\text{جا}(س - ٢)}{س^{٢} - س - ٢} = \frac{\text{جا}(٢ - ٢)}{(٢)^{٢} - ٢ - ٢} = \frac{٠}{٠}$$

$$= \text{نهـــا}_{س \to ٢} \frac{\text{جا}(س - ٢)}{س^{٢} - س - ٢}$$

$$= \text{نهـــا}_{س \to ٢} \frac{\text{جا}(س - ٢)}{س^{٢} - س - ٢} \times \frac{س - ٢}{س - ٢}$$

$$= \text{نهـــا}_{س \to ٢} \frac{\text{جا}(س - ٢)}{س - ٢} \times \text{نهـــا}_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{س^{٢} - س - ٢}$$

نفرض ان ص = س – ٢

عندما س ← ٢

فان ص ← ٠

نستبدل ما قمنا بفرضة

$= \lim_{س \to ٠} \frac{جا(ص)}{ص} \times \lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{س^{٢} - س - ٢}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{جا(ص)}{ص} \times \lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{(س + ١)(س - ٢)}$

$= \frac{١}{١} \times \frac{١}{(١)(١ + ٢)} = \frac{١}{٣}$

١٦) $\lim_{س \to ٣} \frac{جا(٢س - ٦)}{٣ - س}$

الحل : التعويض المباشر

$\lim_{س \to ٣} \frac{جا(٢س - ٦)}{٣ - س} = \frac{جا(٢)(٣) - ٦)}{٣ - ٣} = \frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{جا(٢س - ٦)}{٣ - س}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{جا(٢س - ٦)}{٣ - س} \times \frac{٢س - ٦}{٢س - ٦}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{جا(٢س - ٦)}{٢س - ٦} \times \lim_{س \to ٣} \frac{٢س - ٦}{٣ - س}$

نفرض ان ص = ٢س – ٦

عندما س ← ٣

فان ص ← ٠

نستبدل ما قمنا بفرضه

$= \lim_{س \to ٠} \frac{جا(ص)}{ص} \times \lim_{س \to ٣} \frac{٢س - ٦}{٣ - س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{جا(ص)}{ص} \times \lim_{س \to ٣} \frac{٢(س - ٣)}{٣ - س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{جا(ص)}{ص} \times \lim_{س \to ٣} \frac{٢(١)}{-١}$

$= \frac{١}{١} \times \frac{٢(١)}{-١} = -٢$

١٧) $\lim_{س \to ٠} \frac{جاس^{٢}}{س}$

الحل : التعويض المباشر

$\lim_{س \to ٠} \frac{جاس^{٢}}{س} = \frac{جا(٠)^{٢}}{٠} = \frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{جاس^{٢}}{س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{جاس^{٢}}{س} \times \frac{س^{٢}}{س^{٢}}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{جاس^{٢}}{س^{٢}} \times \lim_{س \to ٠} \frac{س^{٢}}{س}$

نفرض ان ص = س^٢

عندما س ← ٠

فان ص ← ٠

نستبدل ما قمنا بفرضه

$= \lim_{س \to ٠} \frac{جاص}{ص} \times \lim_{س \to ٠} \frac{س^{٢}}{س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{جاص}{ص} \times \lim_{س \to ٠} \frac{س}{١}$

$= \frac{١}{١} \times \lim_{س \to ٠} \frac{س}{١} = ١ \times ٠ = ٠$

١٩) $\lim_{س \to ٠} \frac{جا(ظاس)}{س}$

الحل : التعويض المباشر

$\lim_{س \to ٠} \frac{جا(ظاس)}{س} = \frac{جا(ظا(٠))}{٠} = \frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{جا(ظاس)}{س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{جا(ظاس)}{س} \times \frac{ظاس}{ظاس}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{جا(ظاس)}{ظاس} \times \frac{ظاس}{س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{جا(ظاس)}{ظاس} \times \lim_{س \to ٠} \frac{ظاس}{س}$

نفرض ان ص = ظاس

عندما س ← ٠

فان ص ← ٠

نستبدل ما قمنا بفرضه

$= \lim_{س \to ٠} \frac{جا(ص)}{ص} \times \lim_{س \to ٠} \frac{ظاس}{س}$

$= \frac{١}{١} \times \frac{١}{١} = \frac{١}{١}$

٢٠) $\lim_{س \to ٢} \frac{جا(س^{٢} - ٤)}{ظا(س^{٣} - ٨)}$

الحل : التعويض المباشر

$\lim_{س \to ٢} \frac{جا(س^{٢} - ٤)}{ظا(س^{٣} - ٨)} = \frac{جا((٢)^{٢} - ٤)}{ظا((٢)^{٣} - ٨)} = \frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{جا(س^{٢} - ٤)}{ظا(س^{٣} - ٨)}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{جا(س^{٢} - ٤)}{١} \times \frac{١}{ظا(س^{٣} - ٨)}$

$$= \text{نهـا}_{س\to ٢} \frac{\text{جا}(س^{٢}-٤)}{١} \times \text{نهـا}_{س\to ٢} \frac{١}{\text{ظا}(س^{٣}-٨)}$$

$$= \text{نهـا}_{س\to ٢} \frac{\text{جا}(س^{٢}-٤)}{١} \times \text{نهـا}_{س\to ٢} \frac{س^{٢}-٤}{س^{٢}-٤} \times \text{نهـا}_{س\to ٢} \frac{١}{\frac{\text{ظا}(س^{٣}-٨)}{س^{٣}-٨}}$$

$$= \text{نهـا}_{س\to ٢} \frac{\text{جا}(س^{٢}-٤)}{س^{٢}-٤} \times \text{نهـا}_{س\to ٢} \frac{س^{٢}-٤}{١} \times \text{نهـا}_{س\to ٢} \frac{س^{٣}-٨}{\text{ظا}(س^{٣}-٨)} \times \frac{١}{س^{٣}-٨}$$

$$= \text{نهـا}_{س\to ٢} \frac{\text{جا}(س^{٢}-٤)}{س^{٢}-٤} \times \text{نهـا}_{س\to ٢} \frac{س^{٣}-٨}{\text{ظا}(س^{٣}-٨)} \times \frac{س^{٢}-٤}{س^{٣}-٨}$$

$$= \text{نهـا}_{س\to ٢} \frac{\text{جا}(س^{٢}-٤)}{س^{٢}-٤} \times \text{نهـا}_{س\to ٢} \frac{س^{٣}-٨}{\text{ظا}(س^{٣}-٨)} \times \text{نهـا}_{س\to ٢} \frac{س^{٢}-٤}{س^{٣}-٨}$$

نفرض ان ص = س^{٢} − ٤ | نفرض ان ع = س^{٣} − ٨

عندما س ← ٢ | عندما س ← ٢

فان ص ← ٠ | فان ع ← ٠

نستبدل ما قمنا بفرضه

$$= \text{نهـا}_{ص\to ٠} \frac{\text{جا}(ص)}{ص} \times \text{نهـا}_{ع\to ٠} \frac{ع}{\text{ظا}(ع)} \times \text{نهـا}_{س\to ٢} \frac{س^{٢}-٤}{س^{٣}-٨}$$

$$= \text{نهـا}_{ص\to ٠} \frac{\text{جا}(ص)}{ص} \times \text{نهـا}_{ع\to ٠} \frac{ع}{\text{ظا}(ع)} \times \text{نهـا}_{س\to ٢} \frac{(س-٢)(س+٢)}{(س-٢)(س^{٢}+٢س+٤)}$$

$$= \text{نهـا}_{ص\to ٠} \frac{\text{جا}(ص)}{ص} \times \text{نهـا}_{ع\to ٠} \frac{ع}{\text{ظا}(ع)} \times \text{نهـا}_{س\to ٢} \frac{(١)(س+٢)}{(١)(س^{٢}+٢س+٤)}$$

$$= \frac{١}{١} \times \frac{١}{١} \times \frac{(١)(٢+٢)}{(١)(٢)^{٢}+(٢)٢+٤} = \frac{١}{٣}$$

٢١) $\text{نهـا}^{**}_{س\to ٠^{+}} \frac{\text{ظا}^{٢}\,٥س}{س}$

الحل : نهتم اولا بالتعويض داخل الجذر

$٥س = ٥ \times ٠ = ٠$ يجب تحديد المجال

$٥س = ٠ \Longleftarrow س = ٠$

+ + + + + + + | - - - - - - - - - - - -

٠

نقطة تحول ولكن يريد السؤال فقط من جهة اليمين وهنا المجال معرف

لكن لو طلب السؤال من جهة اليسار نقول إن $\text{نهـا}^{**}_{س\to ٠^{-}} \frac{\text{ظا}^{٢}\,٥س}{س}$ غ . م

$$= \text{نهـا}_{س\to ٠^{+}} \frac{\text{ظا}^{٢}\,٥س}{س}$$

$$= \text{نهـا}_{س\to ٠^{+}} \frac{\text{ظا}\,٥س \times \text{ظا}\,٥س}{س}$$

$$= \text{نهـا}_{س\to ٠^{+}} \frac{\text{ظا}\,٥س}{١} \times \frac{\text{ظا}\,٥س}{س} \times \frac{١}{س}$$

$$= \text{نهـا}_{س\to ٠^{+}} \frac{\text{ظا}\,٥س}{١} \times \text{نهـا}_{س\to ٠^{+}} \frac{\text{ظا}\,٥س}{١} \times \text{نهـا}_{س\to ٠^{+}} \frac{١}{س}$$

$$= \text{نهـا}_{س\to ٠^{+}} \frac{\text{ظا}\,٥س}{٥س} \times \frac{٥س}{١} \times \text{نهـا}_{س\to ٠^{+}} \frac{\text{ظا}\,٥س}{٥س} \times \text{نهـا}_{س\to ٠^{+}} \frac{١}{س}$$

$$= \text{نهـا}_{س\to ٠^{+}} \frac{\text{ظا}\,٥س}{٥س} \times \text{نهـا}_{س\to ٠^{+}} \frac{\text{ظا}\,٥س}{٥س} \times \text{نهـا}_{س\to ٠^{+}} \frac{٥}{س}$$

$$= \text{نهـا}_{س\to ٠^{+}} \frac{\text{ظا}\,٥س}{٥س} \times \text{نهـا}_{س\to ٠^{+}} \frac{\text{ظا}\,٥س}{٥س} \times \text{نهـا}_{س\to ٠^{+}} \frac{٥}{س}$$

$$= \text{نهـا}_{س\to ٠^{+}} \frac{٥}{س}$$

نفرض ان ص = ٥س

عندما س ← ٠$^{+}$

فان ص ← ٠$^{+}$

نستبدل ما قمنا بفرضه

$$= \text{نهـا}_{ص\to ٠^{+}} \frac{٥}{ص}$$

$$= \frac{٥}{١}$$

٢٢) $\text{نهـا}^{***}_{س\to ٠} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{٢}+س)}{(\frac{\pi}{٢}+س)}$

الحل : التعويض المباشر

$$= \text{نهـا}_{س\to ٠} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{٢}+س)}{(\frac{\pi}{٢}+س)} = \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{٢}+٠)}{(\frac{\pi}{٢}+٠)} = \frac{٢}{\pi}$$

هذه النهاية تعويض مباشر لانها ليست $\frac{٠}{٠}$

٢٣) $\text{نهـا}_{س\to \frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{٢}+س)}{(\frac{\pi}{٢}+س)}$

الحل : التعويض المباشر

$$= \text{نهـا}_{س\to \frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{٢}+س)}{(\frac{\pi}{٢}+س)} = \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{٢}+\frac{\pi}{٢}-)}{(\frac{\pi}{٢}+\frac{\pi}{٢}-)} = \frac{٠}{٠}$$

$$= \text{نهـا}_{س\to \frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{٢}+س)}{(\frac{\pi}{٢}+س)}$$

السبب بعدم القسمة وضرب على نفس الزاوية لان ــــــــــ

نفرض ان ص = $\frac{\pi}{٢}$ + س

عندما س ← $\frac{\pi}{٢}$ −

فان ص ← ٠

نستبدل ما قمنا بفرضه

$$= \text{نهـا}_{ص\to ٠} \frac{\text{جا}(ص)}{(ص)} = ١$$

سوف يتم حل هذه الأسئلة باستخدام هذه المتطابقات لذلك يجب حفظها

١) جا أ − جا ب = ٢ جتا$(\frac{أ+ب}{٢})$ جا$(\frac{أ-ب}{٢})$

٢) جتا أ − جتا ب = − ٢ جا$(\frac{أ+ب}{٢})$ جا$(\frac{أ-ب}{٢})$

٣) جا$(أ \pm ب)$ = جا أ جتا ب ± جتا أ جا ب نفس

٤) جتا$(أ \pm ب)$ = جتا أ جتا ب ∓ جا أ جا ب عكس

لا ننسى الهدف من كل هذه الامور استخدامنا للمتطابقات اما الاختصار أو الحصول على الشكل المالوف

٢٤) $\lim_{س \to ٠} \frac{جتا٣س - جتاس}{س^{٢}}$

الحل : التعويض المباشر

$= \lim_{س \to ٠} \frac{جتا٣س - جتاس}{س^{٢}} = \frac{جتا٣(٠) - جتا(٠)}{(٠)^{٢}} = \frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{جتا٣س - جتاس}{س^{٢}}$

باستخدام المتاطبقة

جتا أ − جتا ب = − ٢ جا$(\frac{أ+ب}{٢})$ جا$(\frac{أ-ب}{٢})$

جتا٣س − جتاس = − ٢ جا$(\frac{٣س+س}{٢})$ جا$(\frac{٣س-س}{٢})$

= − ٢ جا$(\frac{٤س}{٢})$ جا$(\frac{٢س}{٢})$

= − ٢ جا$(\frac{٢س}{١})$ جا$(\frac{س}{١})$ = − ٢ جا(٢ س) جا(س)

نرجع للحل ونقوم باستبدال المتطابقة

$= \lim_{س \to ٠} \frac{جتا٣س - جتاس}{س^{٢}}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{- ٢ جا(٢س) جاس}{س^{٢}}$

$= - ٢ \lim_{س \to ٠} \frac{جا(٢س) جاس}{س \times س}$

$= - ٢ \lim_{س \to ٠} \frac{جا(٢س)}{س} \times \frac{جاس}{س}$

$= - ٢ \lim_{س \to ٠} \frac{جا(٢س)}{س} \times \lim_{س \to ٠} \frac{جاس}{س}$

$= - ٢ \times \frac{٢}{١} \times \frac{١}{١} = - ٤$

٢٥) وزاري

$\lim_{س \to ٠} \frac{س جتا٢س - س جتا٤س}{س^{٣}}$

الحل : التعويض المباشر

$\lim_{س \to ٠} \frac{س جتا٢س - س جتا٤س}{س^{٣}} = \frac{(٠) جتا٢(٠) - (٠) جتا٤(٠)}{(٠)^{٣}} = \frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{س جتا٢س - س جتا٤س}{س^{٣}}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{س(جتا٢س - جتا٤س)}{س^{٣}}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{جتا٢س - جتا٤س}{س^{٢}}$

استخدم المتطابقة

جتا أ − جتا ب = − ٢ جا$(\frac{أ+ب}{٢})$ جا$(\frac{أ-ب}{٢})$

جتا٢س − جتا٤س = − ٢ جا$(\frac{٢س+٤س}{٢})$ جا$(\frac{٢س-٤س}{٢})$

= − ٢ جا$(\frac{٦س}{٢})$ جا$(\frac{-٢س}{٢})$

= − ٢ جا$(\frac{٣س}{١})$ جا$(\frac{-س}{١})$

= − ٢ جا(٣ س) جا(− س)

= − ٢ جا(٣ س) × − جا(س) = ٢ جا(٣ س) جا(س)

تذكر ان

جا(− أ) = − جا أ

جتا(− أ) = جتا أ

ظا(− أ) = − ظا أ

نرجع للحل ونقوم باستبدال المتطابقة

$= \lim_{س \to ٠} \frac{جتا٢س - جتا٤س}{س^{٢}}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٢ جتا(٣س) جاس}{س^{٢}}$

$= ٢ \lim_{س \to ٠} \frac{جتا(٣س) جاس}{س \times س}$

$= ٢ \lim_{س \to ٠} \frac{جتا(٣س)}{س} \times \lim_{س \to ٠} \frac{جاس}{س}$

$= ٢ \times \frac{٣}{١} \times \frac{١}{١} = ٦$

٢٦) $\lim_{س \to ٠} \frac{جا(س + \pi)}{س}$

الحل : التعويض المباشر

$\lim_{س \to ٠} \frac{جا(س + \pi)}{س} = \frac{جا(٠ + \pi)}{٠} = \frac{٠}{٠}$

باستخدام المتطابقة

جا$(أ \pm ب)$ = جا أ جتا ب ± جتا أ جا ب

جا$(س + \pi)$ = جاس جتاπ + جتاس جاπ

= جاس × − ١ + جتاس × ٠ = − جاس

نرجع للحل ونقوم باستبدال المتطابقة

$= \lim_{س \to 0} \frac{جا(س + \pi)}{س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{-جاس}{س} = -١$

٢٧) $\lim_{س \to 0} \frac{(جا٢\pi - ٢س)}{-٥س}$

الحل : التعويض المباشر

$\lim_{س \to 0} \frac{(جا٢\pi - ٢س)}{-٥س} = \frac{(جا٢\pi - ٢((٠))}{-٥(٠)} = \frac{٠}{٠}$

باستخدام المتطابقة

$جا(أ \pm ب) = جاأجتاب \pm جتاأجاب$

$جا(٢\pi - ٢س) = جا٢\pi جتا٢س - جتا٢\pi جا٢س$

$= ٠ \times جتا٢س - ١ \times جا٢س = -جا٢س$

نرجع للحل ونقوم باستبدال المتطابقة

$= \lim_{س \to 0} \frac{(جا٢\pi - ٢س)}{-٥س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{-جا٢س}{-٥س} = \frac{٢}{٥}$

سوف تيم حل هذه الأمثلة باستخدام هذه المتطابقات لذلك يجب حفظها

١) $جا^٢س + جتا^٢س = ١$ ⟨ $جا^٢س = ١ - جتا^٢س$ ، $جتا^٢س = ١ - جا^٢س$

٢) $١ + ظا^٢س = قا^٢س$

٣) $١ + ظتا^٢س = قتا^٢س$

٤) $جا٢س = ٢جاسجتاس$

٥) $جتا٢س = جتا^٢س - جا^٢س$

$= ٢جتا^٢س - ١$

$= ١ - ٢جا^٢س$

كيفية استخدام المتطابقات ؟

٢٨) $\lim_{س \to 0} \frac{١ - جا٢س - جتا^٢س}{٤س}$

الحل : التعويض المباشر

$\lim_{س \to 0} \frac{١ - جا٢س - جتا^٢س}{٤س} = \frac{١ - جا٢(٠) - جتا^٢(٠)}{٤(٠)} = \frac{٠}{٠}$

استخدام التطابقة

$جتا^٢س = ١ - جا^٢س$

$= \lim_{س \to 0} \frac{١ - جا٢س - جتا^٢س}{٤س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{١ - جا٢س - (١ - جا^٢س)}{٤س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{١ - جا٢س - ١ + جا^٢س}{٤س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{-جا٢س + جا^٢س}{٤س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{-جا٢س}{٤س} + \frac{جا^٢س}{٤س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{-جا٢س}{٤س} + \lim_{س \to 0} \frac{جا^٢س}{٤س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{-جا٢س}{٤س} + \lim_{س \to 0} \frac{جاس \times جاس}{٤س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{-جا٢س}{٤س} + \lim_{س \to 0} \frac{جاس}{٤س} \frac{جاس}{١}$

إعداد : أ . ساند الوردات
0772044048 - 0787556274

D

$= \lim_{س \to 0} \frac{-جا٢س}{٤س} + \lim_{س \to 0} \frac{جاس}{٤س} \lim_{س \to 0} \frac{جاس}{١}$

$= \frac{-٢}{٤} + \frac{١}{٤} \lim_{س \to 0} \frac{جا(٠)}{١} = \frac{-٢}{٤} + \frac{١}{٤} \times ٠ = \frac{-١}{٢}$

٢٩) $\lim_{س \to 0} \frac{٥ - ٥جتا^٢س}{س^٢ - س^٣}$

الحل : التعويض المباشر

$\lim_{س \to 0} \frac{٥ - ٥جتا^٢س}{س^٢ - س^٣} = \frac{٥ - ٥جتا^٢(٠)}{(٠)^٢ - (٠)^٣} = \frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{٥ - ٥جتا^٢س}{س^٢ - س^٣}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{٥(١ - جتا^٢س)}{س^٢ - س^٣}$

$= ٥ \lim_{س \to 0} \frac{(جا^٢س)}{س^٢ - س^٣}$

$= ٥ \lim_{س \to 0} \frac{(جا^٢س)}{س^٢(١ - س)}$

$= ٥ \lim_{س \to 0} \frac{(جا^٢س)}{س^٢} \times \frac{١}{(١ - س)}$

$= ٥ \lim_{س \to 0} \frac{جاس \times جاس}{س \times س} \times \lim_{س \to 0} \frac{١}{(١ - س)}$

$= ٥ \lim_{س \to 0} \frac{جاس}{س} \times \frac{جاس}{س} \times \lim_{س \to 0} \frac{١}{(١ - س)}$

$= ٥ \times \frac{١}{١} \times \frac{١}{١} \times \lim_{س \to 0} \frac{١}{(١ - ٠)}$

$= ٥ \times \frac{١}{١} \times \frac{١}{١} \times \frac{١}{١} = ٥$

٣٠) $\lim_{س \to 0} \frac{قا^٢٥س + جتا^٢٣س - ٢}{س^٢}$

الحل : التعويض المباشر

$\lim_{س \to 0} \frac{قا^٢٥س + جتا^٢٣س - ٢}{س^٢} = \frac{قا^٢٥(٠) + جتا^٢٣(٠) - ٢}{(٠)^٢} = \frac{٠}{٠}$

استخدم المتطابقة

$قا^٢س = ١ + ظا^٢س$

$جتا^٢٣س = ١ - جا^٢٣س$

نرجع للحل ونقوم باستبدال المتطابقة

$= \lim_{س \to 0} \frac{قا^٢٥س + جتا^٢٣س - ٢}{س^٢}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{(١ + ظا^٢٥س) + (١ - جا^٢٣س) - ٢}{س^٢}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{١ + ظا^٢٥س + ١ - جا^٢٣س - ٢}{س^٢}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{١ + ظا^٢٥س + ١ - جا^٢٣س - ٢}{س^٢}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{ظا^٢٥س - جا^٢٣س - ٢ + ٢}{س^٢}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{ظا^٢٥س - جا^٢٣س}{س^٢}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{ظا^٢٥س}{س} \times \frac{-جا^٢٣س}{س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{ظا^٢٥س}{س^٢} \times \lim_{س \to 0} \frac{-جا^٢٣س}{س^٢}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{ظا٥س}{س} \times \frac{ظا٥س}{س} \times \lim_{س \to 0} \frac{-جا٣س}{س} \times \frac{جا٣س}{س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{ظا٥س}{س} \times \lim_{س \to 0} \frac{ظا٥س}{س} \times \lim_{س \to 0} \frac{-جا٣س}{س} \times \lim_{س \to 0} \frac{جا٣س}{س}$

$= \frac{٥}{١} \times \frac{٥}{١} \times \frac{-٣}{١} \times \frac{٣}{١} = ١٦$

٣١) $\lim_{س \to 0} \frac{١ + جتا٤س - ٢جتا^٢س}{س^٢}$

الحل : التعويض المباشر

$\lim_{س \to 0} \frac{١ + جتا٤س - ٢جتا^٢س}{س^٢} = \frac{١ + جتا٤(٠) - ٢جتا^٢(٠)}{(٠)^٢} = \frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{١ + جتا٤س - ٢جتا^٢س}{س^٢}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{١ - ٢جتا^٢س + جتا٤س}{س^٢}$

استخدم المتطابقة

$جتا٢س = ٢جتا^٢س - ١$

$-١(جتا٢س = ٢جتا^٢س - ١)$

$-جتا٢س = ١ - ٢جتا^٢س$

نرجع للحل ونقوم باستبدال المتطابقة

$= \lim_{س \to 0} \frac{١ - ٢جتا^٢س + جتا٤س}{س^٢}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{-٢جتاس + جتا٤س}{س^٢}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{جتا٤س - ٢جتاس}{س^٢}$

استخدم المتطابقة

$جتاأ - جتاب = -٢جا(\frac{أ + ب}{٢})جا(\frac{أ - ب}{٢})$

$جتا٤س - جتا٢س = -٢جا(\frac{٤س + ٢س}{٢})جا(\frac{٤س - ٢س}{٢})$

$= -٢جا(\frac{٦س}{٢})جا(\frac{٢س}{٢})$

$= -٢جا(٣س)جا(س)$

نرجع للحل ونقوم باستبدال المتطابقة

إعداد : أ. سائد الوردات
0772044048 - 0787556274

$= \lim_{س \to 0} \frac{جتا٤س - ٢ جتاس}{س^{٢}}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{-٢ جا٣س جاس}{س^{٢}}$

$= -٢ \lim_{س \to 0} \frac{جا٣س}{س} \times \frac{جاس}{س}$

$= -٢ \lim_{س \to 0} \frac{جا٣س}{س} \times \lim_{س \to 0} \frac{جاس}{س}$

$= -٢ \times \frac{٣}{١} \times \frac{١}{١} = -٦$

٣٢) $\lim_{س \to 0} \frac{١ - ٣س جتا٤س - جتا٢س}{س ظا٢س}$

الحل : التعويض المباشر

$\lim_{س \to 0} \frac{١ - ٣س جتا٤س - جتا٢س}{س ظا٢س} = \frac{١ - ٣(٠) جتا٤(٠) - جتا٢(٠)}{(٠) ظا٢(٠)} = \frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{١ - ٣س جتا٤س - جتا٢س}{س ظا٢س}$

استخدم المتطابقة

$جتا٢س = ١ - جا^{٢}٢س$

نرجع للحل ونقوم باستبدال المتطابقة

$= \lim_{س \to 0} \frac{١ - ٣س جتا٤س - جتا٢س}{س ظا٢س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{١ - ٣س جتا٤س - (١ - ٢ جا^{٢}س)}{س ظا٢س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{١ - ٣س جتا٤س - ١ + ٢ جا^{٢}س}{س ظا٢س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{-٣س جتا٤س + ٢ جا^{٢}س}{س ظا٢س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{-٣س جتا٤س}{س ظا٢س} + \frac{٢ جا^{٢}س}{س ظا٢س}$

$= -٣ \lim_{س \to 0} \frac{جتا٤س}{ظا٢س} + ٢ \lim_{س \to 0} \frac{جا^{٢}س}{س ظا٢س}$

$= -٣ \lim_{س \to 0} \frac{جتا٤س}{ظا٢س} + ٢ \lim_{س \to 0} \frac{جاس}{س} \times \frac{جاس}{ظا٢س}$

$= -٣ \lim_{س \to 0} \frac{جتا٤س}{ظا٢س} + ٢ \lim_{س \to 0} \frac{جاس}{س} \times \lim_{س \to 0} \frac{جاس}{ظا٢س}$

$= -٣ \times \frac{٤}{٢} + ٢ \times \frac{١}{١} \times \frac{١}{٢} = -\frac{١}{٢}$

نهايات تحتوي

١ – جتا(ز وجي)

أو جتا(ز وجي) – ١

نستخدم متطابقة $جتا٢س = ١ - ٢ جا^{٢}س$

أو $-جتا٢س = ٢ جا^{٢}س - ١$

٣٣) $\lim_{س \to 0} \frac{جتا٢س - ١}{س^{٢}}$

ننتبه إلى إن العدد داخل جتا زوجي لذلك نستخدم هذه الطريقة

الحل : التعويض المباشر

$\lim_{س \to 0} \frac{جتا٢س - ١}{س^{٢}} = \frac{جتا٢(٠) - ١}{(٠)^{٢}} = \frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{جتا٢س - ١}{س^{٢}}$

استخدم متطابقة

$جتا٢س = ١ - ٢ جا^{٢}س$

نرجع للحل ونقوم باستبدال المتطابقة

$= \lim_{س \to 0} \frac{جتا٢س - ١}{س^{٢}}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{١ - ٢ جا^{٢}س - ١}{س^{٢}}$

$= -٢ \lim_{س \to 0} \frac{جا^{٢}س}{س^{٢}}$

$= -٢ \lim_{س \to 0} \frac{جاس}{س} \times \frac{جاس}{س}$

$= -٢ \lim_{س \to 0} \frac{جاس}{س} \times \lim_{س \to 0} \frac{جاس}{س}$

$= -٢ \times \frac{١}{١} \times \frac{١}{١} = -٢$

٣٤) $\lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{١ - جتا٢س}}{\sqrt{٢}س}$

الحل : التعويض المباشر

$\lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{١ - جتا٢س}}{\sqrt{٢}س} = \frac{\sqrt{١ - جتا٢(٠)}}{\sqrt{٢}(٠)} = \frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{١ - جتا٢س}}{\sqrt{٢}س}$

استخدم المطابقة

$جتا٢س = ١ - ٢ جا^{٢}س$

نرجع للحل ونقوم باستبدال المتطابقة

$= \lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{١ - جتا٢س}}{\sqrt{٢}س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{١ - (١ - ٢ جا^{٢}س)}}{\sqrt{٢}س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{١ - ١ + ٢ جا^{٢} س}}{\sqrt{٢} س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{٢ جا^{٢} س}}{\sqrt{٢} س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{٢} \sqrt{جا^{٢} س}}{\sqrt{٢} س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{جا^{٢} س}}{س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{|جاس|}{س}$

تذكر

$\sqrt{س} = |س|$

$(\sqrt{س})^{٢} = س$

التعويض المباشر داخل القيمة المطلقة

$|جاس| = |جا(٠)| = |٠|$

يجب اعادة تعريف $|جاس|$

جاس = صفر $\Leftarrow$ س = ٠ أو س = ١٨٠ أو س = ٣٦٠

بما ان النهاية تقترب من صفر ناخذ س = صفر

	جاس	- جاس
	+ + + + +	- - - - - - -

٠ نقطة تحول

$= \lim_{س \to 0^{+}} \frac{جاس}{س} = ١$

$= \lim_{س \to 0^{-}} \frac{-جاس}{س} = -١$

بما ان

$\lim_{س \to 0^{+}} ق(س) \neq \lim_{س \to 0^{-}} ق(س)$

$\therefore \lim_{س \to 0} ق(س)$ غ م

باستخدام المرافق

نستخدم المرافق إذا كانت النهاية تحوي أحد الإشكال الآتية

*) ١ ± جا أو جا ± ١

**) ١ ± جتا (فردي) أو جتا (فردي) ± ١

***) ١ ± قا أو قا ± ١

****) جا ± جتا أو جتا ± جا

٣٥) $\lim_{س \to 0} \frac{١ - جتاس}{س^{٢}}$

الحل : التعويض المباشر

$\lim_{س \to 0} \frac{١ - جتاس}{س^{٢}} = \frac{١ - جتا(٠)}{(٠)^{٢}} = \frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{١ - جتاس}{س^{٢}}$

نضرب بالمرافق

وهنا الزاوية جتا (فردي)

$= \lim_{س \to 0} \frac{١ - جتاس}{س^{٢}} \times \frac{١ + جتاس}{١ + جتاس}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{(١)^{٢} - (جتاس)^{٢}}{س^{٢}} \times \frac{١}{١ + جتاس}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{١ - جتا^{٢} س}{س^{٢}} \times \lim_{س \to 0} \frac{١}{١ + جتاس}$

استخدم المتطابقة

$١ - جتا^{٢} س = جا^{٢} س$

نرجع للحل ونقوم باستبدال المتطابقة

$= \lim_{س \to 0} \frac{١ - جتاس^{٢}}{س^{٢}} \times \lim_{س \to 0} \frac{١}{١ + جتاس}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{جا^{٢} س}{س^{٢}} \times \lim_{س \to 0} \frac{١}{١ + جتاس}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{جاس}{س} \times \frac{جاس}{س} \times \lim_{س \to 0} \frac{١}{١ + جتاس}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{جاس}{س} \times \lim_{س \to 0} \frac{جاس}{س} \times \lim_{س \to 0} \frac{١}{١ + جتاس}$

$= \frac{١}{١} \times \frac{١}{١} \times \frac{١}{١ + جتا(٠)} = \frac{١}{٢}$

٣٦) $\lim_{س \to 0} \frac{١ - جتا٥س}{جتا٤س - ١}$

الحل : التعويض المباشر

$\lim_{س \to 0} \frac{١ - جتا٥س}{جتا٤س - ١} = \frac{١ - جتا٥(٠)}{جتا٤(٠) - ١} = \frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{١ - جتا٥س}{جتا٤س - ١}$

يتم استخدام المرافق في جتا ٥س لان جتا (فردي)

اما جتا ٤س نستخدم متطابقة لان جتا (زوجي)

استخدام مطابقة

$جتا٤س = ١ - ٢جا^{٢}٢س$

نرجع للحل ونقوم باستبدال المتطابقة

$= \lim_{س \to .} \frac{١ - جتا٥س}{١ - ٢جا^{٢}٢س - ١}$

$= \frac{١}{-٢} \lim_{س \to .} \frac{١ - جتا٥س}{جا^{٢}٢س}$

$= \lim_{س \to .} \frac{١ - جتا٥س}{-٢جا^{٢}٢س} \times \frac{١ + جتا٥س}{١ + جتا٥س}$

$= \frac{١}{-٢} \lim_{س \to .} \frac{(١)^{٢} - (جتا٥س)^{٢}}{جا^{٢}٢س} \times \frac{١}{١ + جتا٥س}$

$= \frac{١}{-٢} \lim_{س \to .} \frac{١ - جتا^{٢}٥س}{جا^{٢}٢س} \times \lim_{س \to .} \frac{١}{١ + جتا٥س}$

$= \frac{١}{-٢} \lim_{س \to .} \frac{١ - جتا^{٢}٥س}{جا^{٢}٢س} \times \lim_{س \to .} \frac{١}{١ + جتا٥س}$

استخدم المتطابقة

$١ - جتا^{٢}٥س = جا^{٢}٥س$

نرجع للحل ونقوم باستبدال المتطابقة

$= \frac{١}{-٢} \lim_{س \to .} \frac{١ - جتا^{٢}٥س}{جا^{٢}٢س} \times \lim_{س \to .} \frac{١}{١ + جتا٥س}$

$= \frac{١}{-٢} \lim_{س \to .} \frac{جا^{٢}٥س}{جا^{٢}٢س} \times \lim_{س \to .} \frac{١}{١ + جتا٥س}$

$= \frac{١}{-٢} \lim_{س \to .} \frac{جا^{٢}٥س}{جا^{٢}٢س} \times \lim_{س \to .} \frac{١}{١ + جتا٥س}$

$= \frac{١}{-٢} \lim_{س \to .} \frac{جا٥س}{جا٢س} \times \frac{جا٥س}{جا٢س} \times \lim_{س \to .} \frac{١}{١ + جتا٥س}$

$= \frac{١}{-٢} \lim_{س \to .} \frac{جا٥س}{جا٢س} \times \lim_{س \to .} \frac{جا٥س}{جا٢س} \times \lim_{س \to .} \frac{١}{١ + جتا٥س}$

$= \frac{١}{-٢} \times \frac{٥}{٢} \times \frac{٥}{٢} \times \lim_{س \to .} \frac{١}{١ + جتا(٠)} = \frac{-٢٥}{١٦}$

٣٧) $\lim_{س \to .} \frac{جا٢س - ٢جاس}{س^{٣}}$

الحل : التعويض المباشر

$\lim_{س \to .} \frac{جا٢س - ٢جاس}{س^{٣}} = \frac{جا٢(٠) - ٢جا(٠)}{(٠)^{٣}} = \frac{٠}{٠}$

استخدم المتطابقة

$جا٢س = ٢جاسجتاس$

نرجع للحل ونقوم باستبدال المتطابقة

$= \lim_{س \to .} \frac{جا٢س - ٢جاس}{س^{٣}}$

$= \lim_{س \to .} \frac{٢جاسجتاس - ٢جاس}{س^{٣}}$

$= \lim_{س \to .} \frac{٢جاس(جتاس - ١)}{س^{٣}}$

$= ٢ \lim_{س \to .} \frac{جاس}{س} \times \lim_{س \to .} \frac{(جتاس - ١)}{س^{٢}}$

$= ٢ \lim_{س \to .} \frac{جاس}{س} \times \lim_{س \to .} \frac{جتاس - ١}{س^{٢}} \times \frac{جتاس + ١}{جتاس + ١}$

$= ٢ \lim_{س \to .} \frac{جاس}{س} \times \lim_{س \to .} \frac{(جتاس)^{٢} - (١)^{٢}}{س^{٢}} \times \frac{١}{جتاس + ١}$

$= ٢ \lim_{س \to .} \frac{جاس}{س} \times \lim_{س \to .} \frac{جتا^{٢}س - ١}{س^{٢}} \times \lim_{س \to .} \frac{١}{جتاس + ١}$

استخدام مطابقة

$جتا^{٢}س - ١ = -جا^{٢}س$

نرجع للحل ونقوم باستبدال المتطابقة

$= ٢ \lim_{س \to .} \frac{جاس}{س} \times \lim_{س \to .} \frac{جتا^{٢}س - ١}{س^{٢}} \times \lim_{س \to .} \frac{١}{جتاس + ١}$

$= ٢ \lim_{س \to .} \frac{جاس}{س} \times \lim_{س \to .} \frac{-جا^{٢}س}{س^{٢}} \times \lim_{س \to .} \frac{١}{جتاس + ١}$

$= ٢ \lim_{س \to .} \frac{جاس}{س} \times \lim_{س \to .} \frac{-جاس}{س} \times \frac{جاس}{س} \times \lim_{س \to .} \frac{١}{جتاس + ١}$

$= ٢ \lim_{س \to .} \frac{جاس}{س} \times \lim_{س \to .} \frac{-جاس}{س} \times \lim_{س \to .} \frac{جاس}{س} \times \lim_{س \to .} \frac{١}{جتاس + ١}$

$= ٢ \times \frac{١}{١} \times \frac{١}{١} \times \lim_{س \to .} \frac{١}{جتا(٠) + ١} = -١$

٣٨) $\lim_{س \to .} \frac{ظاس - جاس}{س^{٣}}$

الحل : التعويض المباشر

$\lim_{س \to .} \frac{ظاس - جاس}{س^{٣}} = \frac{ظا(٠) - جا(٠)}{(٠)^{٣}} = \frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س \to .} \frac{ظاس - جاس}{س^{٣}}$

$= \lim_{س \to .} \frac{\frac{جاس}{جتاس} - جاس}{س^{٣}}$

$= \lim_{س \to .} \frac{\frac{جاس}{جتاس} - \frac{جاسجتاس}{جتاس}}{س^{٣}}$

$= \lim_{س \to .} \frac{جاس - جاسجتاس}{\frac{جتاس}{س^{٣}}}$

$= \lim_{س \to .} \frac{جاس - جاسجتاس}{جتاس} \times \frac{١}{س^{٣}}$

$= \lim_{س \to .} \frac{جاس(١ - جتاس)}{جتاس} \times \frac{١}{س^{٣}}$

$= \lim_{س \to .} \frac{جاس}{جتاس} \times \frac{(١ - جتاس)}{١} \times \frac{١}{س^{٣}}$

$= \lim_{س \to .} ظاس \times \frac{(١ - جتاس)}{س^{٣}}$

$= \lim_{س \to .} \frac{ظاس}{س} \times \frac{(١ - جتاس)}{س^{٢}}$

$= \lim_{س \to .} \frac{ظاس}{س} \times \lim_{س \to .} \frac{١ - جتاس}{س^{٢}} \times \frac{١ + جتاس}{١ + جتاس}$

$= \lim_{س \to .} \frac{ظاس}{س} \times \lim_{س \to .} \frac{(١)^{٢} - (جتاس)^{٢}}{س^{٢}} \times \frac{١}{١ + جتاس}$

يفضل في هذه الأسئلة إرجاع ظاس لأطلها

وهي $\frac{جاس}{جتاس}$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{ظاس}{س} \times \lim_{س \to 0} \frac{١ - جتا^{٢}س}{س^{٢}} \times \lim_{س \to 0} \frac{١}{١ + جتاس}$$

استخدم المطابقة

$$١ - جتا^{٢}س = جا^{٢}س$$

نرجع للحل ونقوم باستبدال المتطابقة

$$= \lim_{س \to 0} \frac{ظاس}{س} \times \lim_{س \to 0} \frac{١ - جتا^{٢}س}{س^{٢}} \times \lim_{س \to 0} \frac{١}{١ + جتاس}$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{ظاس}{س} \times \lim_{س \to 0} \frac{جا^{٢}س}{س^{٢}} \times \lim_{س \to 0} \frac{١}{١ + جتاس}$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{ظاس}{س} \times \lim_{س \to 0} \frac{جاس}{س} \times \frac{جاس}{س} \times \lim_{س \to 0} \frac{١}{١ + جتاس}$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{ظاس}{س} \times \lim_{س \to 0} \frac{جاس}{س} \times \lim_{س \to 0} \frac{جاس}{س} \times \lim_{س \to 0} \frac{١}{١ + جتاس}$$

$$= \frac{١}{١} \times \frac{١}{١} \times \frac{١}{١} \times \lim_{س \to 0} \frac{١}{١ + جتا(٠)} = \frac{١}{٢}$$

٣٩) $\lim_{س \to 0} \frac{قا٢س - ١}{س^{٢}}$

الحل : التعويض المباشر

$$\lim_{س \to 0} \frac{قا٢س - ١}{س^{٢}} = \frac{قا٢(٠) - ١}{(٠)^{٢}} = \frac{٠}{٠}$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{قا٢س - ١}{س^{٢}}$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{قا٢س - ١}{س^{٢}} \times \frac{قا٢س + ١}{قا٢س + ١}$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{(قا٢س)^{٢} - (١)^{٢}}{س^{٢}} \times \frac{١}{قا٢س + ١}$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{(قا٢س)^{٢} - (١)^{٢}}{س^{٢}} \times \frac{١}{قا٢س + ١}$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{قا^{٢}٢س - ١}{س^{٢}} \times \lim_{س \to 0} \frac{١}{قا٢س + ١}$$

استخدم المتطابقة

$$قا^{٢}٢س = ١ + ظا^{٢}٢س$$

نرجع للحل ونقوم باستبدال المتطابقة

$$= \lim_{س \to 0} \frac{١ + ظا^{٢}٢س - ١}{س^{٢}} \times \lim_{س \to 0} \frac{١}{قا٢س + ١}$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{ظا^{٢}٢س}{س^{٢}} \times \lim_{س \to 0} \frac{١}{قا٢س + ١}$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{ظا٢س}{س} \times \frac{ظا٢س}{س} \times \lim_{س \to 0} \frac{١}{قا٢س + ١}$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{ظا٢س}{س} \times \lim_{س \to 0} \frac{ظا٢س}{س} \times \lim_{س \to 0} \frac{١}{قا٢س + ١}$$

$$= \frac{٢}{١} \times \frac{٢}{١} \times \lim_{س \to 0} \frac{١}{قا٢(٠) + ١} = ٢$$

٤٠) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{١ + جتا٢س}{١ - جاس}$

الحل : التعويض المباشر

$$\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{١ + جتا٢س}{١ - جاس} = \frac{١ + جتا٢(\frac{\pi}{٢})}{١ - جا(\frac{\pi}{٢})} = \frac{٠}{٠}$$

$$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{١ + جتا٢س}{١ - جاس}$$

بما إن الزاوية زوجية نستخدم المتطابقة

استخدم المتطابقة

$$جتا٢س = ٢جتا^{٢}س - ١$$

نرجع للحل ونقوم باستبدال المتطابقة

$$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{١ + جتا٢س}{١ - جاس}$$

$$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{١ + ٢جتا^{٢}س - ١}{١ - جاس}$$

$$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{٢جتا^{٢}س}{١ - جاس}$$

استخدم المتطابقة

$$جتا^{٢}س = ١ - جا^{٢}س$$

نرجع للحل ونقوم باستبدال المتطابقة

$$= ٢ \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{جتا^{٢}س}{١ - جاس}$$

$$= ٢ \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{(١ - جا^{٢}س)}{١ - جاس}$$

$$= ٢ \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{(١ - جا^{٢}س)}{١ - جاس}$$

$$= ٢ \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{(١ - جاس)(١ + جاس)}{١ - جاس}$$

$$= ٢ \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{(١ + جاس)}{١}$$

$$= ٢ \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{(١ + جا(٠))}{١} = ٤$$

الورنوق في الرياضيات
إعداد : أ . سائد الوردات
0772044048 - 0787556274

في هذه الأمثلة

سوف نستخدم المتممة والمكملة

أولا : شرح المتممه

تكون الزاويتان متتامتان اذا كان مجموعها يساوي ٩٠

المتممة = $\frac{\pi}{٢}$ ـ الزاوية

متممة (س) $\Longleftarrow \frac{\pi}{٢} - س$

متممه (٣س) $\Longleftarrow \frac{\pi}{٢} - ٣س$

قواعد المتممة

١) جا الزاوية = جتا الزاوية $\leftarrow$ جا س = جتا $(\frac{\pi}{٢} - س)$

٢) جتا الزاوية = جا المتممة $\leftarrow$ جتا س = جا $(\frac{\pi}{٢} - س)$

٣) ظا الزاوية = ظتا المتممة $\leftarrow$ ظا س = ظتا $(\frac{\pi}{٢} - س)$

ثانيا : شرح المكملة

تكون الزاويتان متكاملتان اذا كان مجموعها يساوي ١٨٠

المتممة = π ـ الزاوية

مكملة (س) $\Longleftarrow \pi - س$

متممه (٣س) $\Longleftarrow \pi - ٣س$

قواعد المتممة

١) جا الزاوية = جتا المكملة $\leftarrow$ جا س = جتا $(\pi - س)$

٢) جتا الزاوية = جا المتممة $\leftarrow$ جتا س = جا $(\pi - س)$

٣) ظا الزاوية = ظتا المكملة $\leftarrow$ ظا س = ظتا $(\pi - س)$

٤) ظتا الزاوية = ظا المكملة $\leftarrow$ ظتا س = ظا $(\pi - س)$

٤٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{جتا(\frac{\pi}{٢} - ٢س)}{س} = \lim_{س \to ٠} \frac{جا٢س}{س} = ٢$

٤٣) $\lim_{س \to ٠} \frac{جتا(\frac{\pi}{٢} - ٥س)}{ظتا(\frac{\pi}{٢} - ٣س)} = \lim_{س \to ٠} \frac{جا٥س}{ظا٣س} = \lim_{س \to ٠} \frac{\frac{جا٥س}{س}}{\frac{ظا٣س}{س}} = \frac{٥}{٣}$

٤٤) $\lim_{س \to ٠} \frac{جا(\pi - ٣س)}{٤س} = \lim_{س \to ٠} \frac{جا٣س}{٤س} = \frac{٣}{٤}$

٤٥) $\lim_{س \to ٠} \frac{ظا(\pi - ٥س)}{جتا(\frac{\pi}{٢} - ٣س)} = \lim_{س \to ٠} \frac{-ظا٥س}{جتا٣س} = \lim_{س \to ٠} \frac{\frac{-ظا٥س}{س}}{\frac{ظا٣س}{س}} = \frac{-٥}{٣}$

الورق في الرياضيات
ساند الوردات
0772044048 - 0787556274

هام جدا :

عندما يكون جا ، جتا ، ظا ، ظتا **وحيد** (**حد واحد فقط**)

نستخدم المتممة أو المكملة حيث نستخدم

جا ، ظا ← مكملة

جتا ، ظتا ← متممة

واذا فشلت هذة الطريقة نلجأ الى طريقة الفرض

٤٦) وزاري $\lim_{س\to\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتاس}}{\pi - ٢س}$

الحل : التعويض المباشر

$$\lim_{س\to\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتاس}}{\pi - ٢س} = \frac{\text{جتا}(\frac{\pi}{2})}{\pi - ٢(\frac{\pi}{2})} = \frac{٠}{٠}$$

$$= \lim_{س\to\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتاس}}{\pi - ٢س}$$

متممة جتاس=جا$(\frac{\pi}{2} - س)$

$$= \lim_{س\to\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{2} - س)}{\pi - ٢س}$$

$$= \lim_{س\to\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{2} - س)}{٢(\frac{\pi}{2} - س)}$$

$$= \lim_{س\to\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{2} - س)}{-٢(\frac{\pi}{2} - س)}$$

$$= \frac{١}{-٢} \lim_{س\to\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{2} - س)}{(\frac{\pi}{2} - س)}$$

نفرض ان ص $= \frac{\pi}{2} - س$

عندما س $\to \frac{\pi}{2}$

فان ص $\to$ ٠

نستبدل ما قمنا بفرضه

$$= \frac{١}{-٢} \lim_{س\to\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{2} - س)}{(\frac{\pi}{2} - س)}$$

$$= \frac{١}{-٢} \lim_{ص\to٠} \frac{\text{جا}(ص)}{(ص)}$$

$$= \frac{١}{-٢} \times \frac{١}{١} = \frac{١}{-٢}$$

٤٧) $\lim_{س\to\frac{\pi}{6}} \frac{\text{جتا}٣س}{\pi - ٦س}$

الحل : التعويض المباشر

$$\lim_{س\to\frac{\pi}{6}} \frac{\text{جتا}٣س}{\pi - ٦س} = \frac{\text{جتا}٣(\frac{\pi}{6})}{\pi - ٦(\frac{\pi}{6})} = \frac{٠}{٠}$$

$$= \lim_{س\to\frac{\pi}{6}} \frac{\text{جتا}٣س}{\pi - ٦س}$$

جتا٣س=جا$(\frac{\pi}{2} - ٣س)$

متممة

$$= \lim_{س\to\frac{\pi}{6}} \frac{\text{جتا}٣س}{\pi - ٦س}$$

$$= \lim_{س\to\frac{\pi}{6}} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{2} - ٣س)}{\pi - ٦س}$$

$$= \lim_{س\to\frac{\pi}{6}} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{2} - ٣س)}{٢(\frac{\pi}{2} - ٣س)}$$

$$= \frac{١}{٢} \lim_{س\to\frac{\pi}{6}} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{2} - ٣س)}{(\frac{\pi}{2} - ٣س)}$$

$ص = \frac{\pi - س\pi}{س}$

نفرض أن

عندما س $\to$ ١

فان ص$\to$ ٠

نستبدل ما قمنا بفرضه

$$= \frac{١}{٢} \lim_{س\to\frac{\pi}{6}} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{2} - ٣س)}{(\frac{\pi}{2} - ٣س)}$$

$$= \frac{١}{٢} \lim_{ص\to٠} \frac{\text{جا}(ص)}{(ص)}$$

$$= \frac{١}{٢} \times \frac{١}{١} = \frac{١}{٢}$$

إعداد : أ . سائد الورداني
0772044048

٤٨) $\lim_{س\to\pi} \frac{جاس}{س^{٢}-\pi^{٢}}$

الحل : التعويض المباشر

$$\lim_{س\to\pi} \frac{جاس}{س^{٢}-\pi^{٢}} = \frac{جا(\pi)}{(\pi)^{٢}-\pi^{٢}} = \frac{٠}{٠}$$

$$= \lim_{س\to\pi} \frac{جاس}{س^{٢}-\pi^{٢}}$$

مكملة جاس=جا$(\pi - س)$

$$= \lim_{س\to\pi} \frac{جاس}{س^{٢}-\pi^{٢}}$$

$$= \lim_{س\to\pi} \frac{جا(\pi-س)}{س^{٢}-\pi^{٢}}$$

$$= \lim_{س\to\pi} \frac{جا(\pi-س)}{س-\pi} \times \frac{١}{\pi+س}$$

$$= \lim_{س\to\pi} \frac{جا(\pi-س)}{-(س-\pi)} \times \lim_{س\to\pi} \frac{١}{\pi+س}$$

نفرض ان ص = $\pi - س$

عندما س $\to \pi$

فان ص $\to$ ٠

نستبدل ما قمنا بفرضه

$$= \lim_{ص\to٠} \frac{جا(ص)}{-(ص)} \times \lim_{س\to\pi} \frac{١}{\pi+س}$$

$$= \frac{١}{-١} \times \lim_{س\to\pi} \frac{١}{\pi+\pi} = \frac{-١}{\pi٢}$$

٤٩) وزاري $\lim_{س\to١} \frac{س جا\frac{\pi}{س}}{س-١}$

الحل : التعويض المباشر

$$\lim_{س\to١} \frac{س جا\frac{\pi}{س}}{س-١} = \frac{(١)جا\frac{\pi}{(١)}}{(١)-١} = \frac{٠}{٠}$$

$$= \lim_{س\to١} \frac{س جا\frac{\pi}{س}}{س-١}$$

مكملة جا$\frac{\pi}{س}$=جا$(\pi - \frac{\pi}{س})$

$$= \lim_{س\to١} \frac{س جا(\pi-\frac{\pi}{س})}{س-١}$$

$$= \lim_{س\to١} \frac{س جا(\frac{س\pi}{س}-\frac{\pi}{س})}{س-١}$$

$$= \lim_{س\to١} \frac{س جا(\frac{س\pi-س}{س})}{س-١}$$

$$= \lim_{س\to١} \frac{\pi س جا(\frac{س\pi-س}{س})}{\pi(س-١)}$$

نضرب البسط والمقام ب $\frac{\pi}{س}$

$$= \lim_{س\to١} \frac{س جا(\frac{س\pi-س}{س})}{(\frac{س\pi-\pi}{س})}$$

$$= \lim_{س\to١} \frac{\pi س جا(\frac{س\pi-س}{س})}{\pi(س-١)}$$

$$= \lim_{س\to١} \frac{س جا(\frac{س\pi-س}{س})}{س-١}$$

$$= \lim_{س\to١} \frac{س جا(\frac{س\pi}{س}-\frac{\pi}{س})}{س-١}$$

$$= \lim_{س\to١} \frac{س جا(\pi-\frac{\pi}{س})}{س-١}$$

$$= \lim_{س\to١} \frac{س جا(\frac{\pi}{س})}{س-١}$$

نفرض ان ص = $\frac{\pi س - \pi}{س}$

عندما س $\to$ ١

فان ص $\to$ ٠

نستبدل ما قمنا بفرضه

$$= \pi \lim_{ص\to٠} \frac{جا(ص)}{(ص)}$$

$$= \pi = \frac{١}{١} \times \pi$$

٥٠) $\lim_{س\to\frac{\pi}{٤}} \frac{جتاس-جاس}{س-\frac{\pi}{٤}}$

الحل : التعويض المباشر

$$\lim_{س\to\frac{\pi}{٤}} \frac{جتاس-جاس}{س-\frac{\pi}{٤}} = \frac{جتا(\frac{\pi}{٤})-جا(\frac{\pi}{٤})}{\frac{\pi}{٤}-(\frac{\pi}{٤})} = \frac{٠}{٠}$$

$$= \lim_{س\to\frac{\pi}{٤}} \frac{جتاس-جاس}{س-\frac{\pi}{٤}}$$

$$= \lim_{س\to\frac{\pi}{٤}} \frac{جتاس-جاس}{س-\frac{\pi}{٤}} \times \frac{جتاس+جاس}{جتاس+جاس}$$

$$= \lim_{س\to\frac{\pi}{٤}} \frac{(جتاس)^{٢}-(جاس)^{٢}}{س-\frac{\pi}{٤}} \times \lim_{س\to\frac{\pi}{٤}} \frac{١}{جتاس+جاس}$$

$$= \lim_{س\to\frac{\pi}{٤}} \frac{جتا^{٢}س-جا^{٢}س}{س-\frac{\pi}{٤}} \times \lim_{س\to\frac{\pi}{٤}} \frac{١}{جتاس+جاس}$$

استخدم المتطابقة

جتا^{٢}س$-$جا^{٢}س =جتا٢س

نرجع للحل ونقوم باستبدال المتطابقة

$$= \lim_{س\to\frac{\pi}{٤}} \frac{جتا٢س}{س-\frac{\pi}{٤}} \times \lim_{س\to\frac{\pi}{٤}} \frac{١}{جتاس+جاس}$$

متملة جتا٢س=جا$(\frac{\pi}{٢}-٢س)$

$$= \lim_{س\to\frac{\pi}{٤}} \frac{جا(\frac{\pi}{٢}-٢س)}{س-\frac{\pi}{٤}} \times \lim_{س\to\frac{\pi}{٤}} \frac{١}{جتاس+جاس}$$

نضرب البسط والمقام ب $\frac{٢}{٢}$

$$= \text{نهـــا}_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{\text{٢جا}(\frac{\pi}{٢} - \text{٢س})}{\text{٢}(\frac{\pi}{٤} - \text{س})} \times \text{نهـــا}_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{١}{\text{جتاس} + \text{جاس}}$$

$$= \text{٢نهـــا}_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{٢} - \text{٢س})}{\frac{\pi}{٢} - \text{٢س}} \times \text{نهـــا}_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{١}{\text{جتاس} + \text{جاس}}$$

$$= \text{٢نهـــا}_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{٢} - \text{٢س})}{-(\frac{\pi}{٢} - \text{٢س})} \times \text{نهـــا}_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{١}{\text{جتاس} + \text{جاس}}$$

نفرض ان $\text{ص} = \frac{\pi}{٢} - \text{٢س}$

عندما $\text{س} \to \frac{\pi}{٤}$

فان $\text{ص} \to ٠$

نستبدل ما قمنا بفرضه

$$= \text{٢نهـــا}_{ص \to ٠} \frac{\text{جا}(\text{ص})}{-(\text{ص})} \times \text{نهـــا}_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{١}{\text{جتاس} + \text{جاس}}$$

$$= \text{٢} \frac{١}{-١} \times \text{نهـــا}_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{١}{\text{جتا}(\frac{\pi}{٤}) + \text{جا}(\frac{\pi}{٤})} = -\sqrt{٢}$$

نهايات باستخدام الفرض

إذا **فشلت** طريقة المتممة أو مكملة نلجأ لطريقة **الفرض** ويشترط بطريقة الفرض ان تكون :

*) الزاوية **اقتران خطي**

**) الاقتران **الأخر أيضا خطي**

حيث نفرض ص = الاقتران الأخر

في حالة إن الزاوية ليست اقتران نستخدم الفرض مرتين

المرة الأولى نفرض ص = الزاوية

المرة الثانية نفرض ع = الاقتران الآخر

٥١) $\text{نهـــا}_{س \to -٢} \frac{\text{جتا} \frac{\pi}{٤} \text{س}}{\text{س} + ٢}$

الحل : التعويض المباشر

$$\text{نهـــا}_{س \to -٢} \frac{\text{جتا} \frac{\pi}{٤} \text{س}}{\text{س} + ٢} = \frac{\text{جتا} \frac{\pi}{٤} (-٢)}{٢ + (-٢)} = \frac{٠}{٠}$$

$$= \text{نهـــا}_{س \to -٢} \frac{\text{جتا} \frac{\pi}{٤} \text{س}}{\text{س} + ٢}$$

تفشل طريقة المتممة والمكملة

نستخدم طريقة الفرض

نفرض ص = س + ٢ $\Longleftarrow$ س = ص – ٢

عندما س $\to$ – ٢

فان ص $\to$ ٠

نستبدل ما قمنا بفرضه

$$= \text{نهـــا}_{ص \to ٠} \frac{\text{جتا} \frac{\pi}{٤} (\text{ص} - ٢)}{\text{ص}}$$

$$= \text{نهـــا}_{ص \to ٠} \frac{\text{جتا}(\frac{\pi}{٤} \text{ص} - \frac{\pi}{٤} ٢)}{\text{ص}}$$

$$= \text{نهـــا}_{ص \to ٠} \frac{\text{جتا}(\frac{\pi}{٤} \text{ص} - \frac{\pi}{٢})}{\text{ص}}$$

$$= \text{نهـــا}_{ص \to ٠} \frac{-\text{جتا}(\frac{\pi}{٢} - \frac{\pi}{٤} \text{ص})}{\text{ص}}$$

$$= \text{نهـــا}_{ص \to ٠} \frac{-\text{جتا}(\frac{\pi}{٢} - \frac{\pi}{٤} \text{ص})}{\text{ص}}$$

متممة $-\text{جتا}(\frac{\pi}{٢} - \frac{\pi}{٤} \text{ص}) = \text{جا} \frac{\pi}{٤} \text{ص}$

$$= \text{نهـــا}_{ص \to ٠} \frac{\text{جا} \frac{\pi}{٤} \text{ص}}{\text{ص}} = \frac{\pi}{٤}$$

٥٢) $\lim_{س\to-١} \frac{جا\pi س}{س+١}$

الحل : التعويض المباشر

$$\lim_{س\to-١} \frac{جا\pi س}{س+١} = \frac{جا\pi(-١)}{١+(-١)} = \frac{٠}{٠}$$

$$= \lim_{س\to-١} \frac{جا\pi س}{س+١}$$

نفرض ص = س + ١ $\Longleftarrow$ س = ص – ١

عندما س $\to$ – ١

فان ص $\to$ ٠

نستبدل ما قمنا بفرضه

$$= \lim_{ص\to٠} \frac{جا\pi(ص-١)}{ص}$$

$$= \lim_{ص\to٠} \frac{جا\pi ص - \pi}{ص}$$

$$= \lim_{ص\to٠} \frac{جا-(\pi - \pi ص)}{ص}$$

$$= \lim_{ص\to٠} \frac{-جا(\pi - \pi ص)}{ص}$$

مكملة $-جا(\pi - \pi ص) = -جا\pi ص$

$$= \lim_{ص\to٠} \frac{-جا\pi ص}{ص} = -\pi$$

٥٣) $\lim_{س\to\pi٣} \frac{جاس}{\pi - \frac{س}{٣}}$

الحل : التعويض المباشر

$$\lim_{س\to\pi٣} \frac{جاس}{\pi - \frac{س}{٣}} = \frac{جا(\pi٣)}{\pi - \frac{(\pi٣)}{٣}} = \frac{٠}{٠}$$

$$= \lim_{س\to\pi٣} \frac{جاس}{\pi - \frac{س}{٣}}$$

نفرض ص $= \pi - \frac{س}{٣}$ $\Longleftarrow$ س $= ٣ص + \pi٣$

عندما س $\to \pi٣$

فان ص $\to$ ٠

نستبدل ما قمنا بفرضه

$$= \lim_{ص\to٠} \frac{جا(٣ص + \pi٣)}{ص}$$

استخدم المتطابقة

جا(أ +ب) =جاأجتاب+جتاأجاب

جا(٣ص + π٣) =جا٣صجتا٣π+جتا٣صجا٣π

=جا٣ص×–١+جتا٣ص×٠

=–جا٣ص

نرجع للحل ونقوم باستبدال المتطابقة

$$= \lim_{ص\to٠} \frac{-جا(٣ص)}{ص} = -٣$$

٥٤) وزاري

$$\lim_{س\to\frac{\pi-}{٢}} \frac{١+جتا٢س}{(\pi + ٢س)^{٢}}$$

الحل : التعويض المباشر

$$\lim_{س\to\frac{\pi-}{٢}} \frac{١+جتا٢س}{(\pi + ٢س)^{٢}} = \frac{١+جتا٢(\frac{\pi-}{٢})}{(\pi + ٢(\frac{\pi-}{٢}))^{٢}} = \frac{٠}{٠}$$

$$= \lim_{س\to\frac{\pi-}{٢}} \frac{١+جتا٢س}{(\pi + ٢س)^{٢}}$$

استخدم المتطابقة

جتا٢س $= ٢جتا^{٢}س - ١$

نرجع للحل ونقوم باستبدال المتطابقة

$$= \lim_{س\to\frac{\pi-}{٢}} \frac{١+(٢جتا^{٢}س-١)}{(\pi + ٢س)^{٢}}$$

$$= \lim_{س\to\frac{\pi-}{٢}} \frac{١+٢جتا^{٢}س-١}{(\pi + ٢س)^{٢}}$$

$$= \lim_{س\to\frac{\pi-}{٢}} \frac{٢جتا^{٢}س}{(\pi + ٢س)^{٢}}$$

$$= \lim_{س\to\frac{\pi-}{٢}} (\frac{٢جتاس}{\pi + ٢س})^{٢}$$

نفرض ص $= \pi + ٢س$ $\Longleftarrow$ س $= \frac{ص}{٢} - \frac{\pi}{٢}$

عندما س $\to \frac{\pi-}{٢}$

فان ص $\to$ ٠

نستبدل ما قمنا بفرضه

$$= \lim_{ص\to٠} (\frac{٢جتا(\frac{ص}{٢} - \frac{\pi}{٢})}{ص})^{٢}$$

الورنوق في الرياضيات
إعداد : أ . ساند الوردات
0772044048 - 0787556274

٥٥) ** $\lim_{س\to ٢} \frac{\text{جتا}\frac{\pi ٣}{س}}{س - ٢}$

هنا الزاوية ليست خطية

الحل : التعويض المباشر

$$\lim_{س\to ٢} \frac{\text{جتا}\frac{\pi ٣}{س}}{س - ٢} = \frac{\text{جتا}\frac{\pi ٣}{(٢)}}{٢ - (٢)} = \frac{٠}{٠}$$

$$= \lim_{س\to ٢} \frac{\text{جتا}\frac{\pi ٣}{س}}{س - ٢}$$

نفرض ص $= \frac{\pi ٣}{س}$ $\Leftarrow$ س $= \frac{\pi ٣}{ص}$

عندما س $\to ٢$

فان ص $\to ٠$

نستبدل ما قمنا بفرضه

$$= \lim_{ص\to \frac{\pi ٣}{٢}} \frac{\text{جتا}ص}{٢ - \frac{\pi ٣}{ص}}$$

$$= \lim_{ص\to \frac{\pi ٣}{٢}} \frac{\text{جتا}ص}{\frac{٢ص}{ص} - \frac{\pi ٣}{ص}}$$

$$= \lim_{ص\to \frac{\pi ٣}{٢}} \frac{\text{جتا}ص}{\frac{٢ص - \pi ٣}{ص}}$$

$$= \lim_{ص\to \frac{\pi ٣}{٢}} \frac{\text{جتا}ص}{١} \times \frac{ص}{٢ص - \pi ٣}$$

$$= \lim_{ص\to \frac{\pi ٣}{٢}} \frac{\text{جتا}ص}{٢ص - \pi ٣} \times \lim_{ص\to \frac{\pi ٣}{٢}} \frac{ص}{١}$$

$$= \lim_{ص\to \frac{\pi ٣}{٢}} \frac{\text{جتا}ص}{٢ص - \pi ٣} \times \lim_{ص\to \frac{\pi ٣}{٢}} \frac{ص}{١}$$

نفرض ع $= ٢ص - \pi ٣$ $\Leftarrow$ ص $= \frac{ع}{٢} - \frac{\pi ٣}{٢}$

عندما ص $\to \frac{\pi ٣}{٢}$

فان ع $\to ٠$

نستبدل ما قمنا بفرضه

$$= \lim_{ع\to ٠} \frac{\text{جتا}(\frac{ع}{٢} - \frac{\pi ٣}{٢})}{ع} \times \lim_{ص\to \frac{\pi ٣}{٢}} \frac{ص}{١}$$

استخدم المتطابقة

جتا(أ ± ب) = جتاأجتاب ∓ جتاأجاب

$$\text{جتا}(\frac{\pi ٣}{٢} - \frac{ع}{٢}) = \text{جتا}\frac{\pi ٣}{٢}\text{جتا}\frac{ع}{٢} + \text{جتا}\frac{\pi ٣}{٢}\text{جا}\frac{ع}{٢}$$

$$= ٠ \times \text{جتا}\frac{ع}{٢} + -١ \times \text{جا}\frac{ع}{٢}$$

$$= -\text{جا}\frac{ع}{٢}$$

نرجع للحل ونقوم باستبدال المتطابقة

$$= \lim_{ع\to ٠} \frac{-\text{جا}\frac{ع}{٢}}{ع} \times \lim_{ص\to \frac{\pi ٣}{٢}} \frac{ص}{١}$$

$$= -\frac{١}{٢} \times \frac{\frac{\pi ٣}{٢}}{١} \lim_{ص\to \frac{\pi ٣}{٢}} = \frac{\pi ٣}{٤}$$

اسئلة الثوابت

٥٥)

ق (س) = $\begin{cases} \frac{\text{ظا}أس}{٥س} & ، \quad س > ٠ \\ \frac{\sqrt{أس^{٢} + ١} - ١}{س^{٢}} & ، \quad س < ٠ \end{cases}$

اذا علمت $\lim_{س\to ٠}$ ق(س) موجودة

جد قيمة أ

الحل : بما ان $\lim_{س\to ٠}$ ق(س) موجودة

هذا يدل على ان

$$\lim_{س\to ٠^{+}} \text{ق}(س) = \lim_{س\to ٠^{-}} \text{ق}(س)$$

$$\lim_{س\to ٠^{+}} \frac{\sqrt{أس^{٢} + ١} - ١}{س^{٢}} = \lim_{س\to ٠^{-}} \frac{\text{ظا}أس}{٥س}$$

$$\lim_{س\to ٠^{+}} \frac{\sqrt{أس^{٢} + ١} - ١}{س^{٢}} \times \frac{١ + \sqrt{أس^{٢} + ١}}{١ + \sqrt{أس^{٢} + ١}} = \frac{أ}{٥}$$

$$\lim_{س\to ٠^{+}} \frac{(\sqrt{أس^{٢} + ١})^{٢} - (١)^{٢}}{س^{٢}} \times \lim_{س\to ٠^{+}} \frac{١}{١ + \sqrt{أس^{٢} + ١}} = \frac{أ}{٥}$$

$$\lim_{س\to ٠^{+}} \frac{س^{٢}أ + ١ - ١}{س^{٢}} \times \lim_{س\to ٠^{+}} \frac{١}{١ + \sqrt{أس^{٢} + ١}} = \frac{أ}{٥}$$

$$\lim_{س\to ٠^{+}} \frac{س^{٢}أ}{س^{٢}} \times \lim_{س\to ٠^{+}} \frac{١}{١ + \sqrt{أس^{٢} + ١}} = \frac{أ}{٥}$$

$$\lim_{س\to ٠^{+}} ١أ \times \lim_{س\to ٠^{+}} \frac{١}{١ + \sqrt{أ(٠)^{٢} + ١}} = \frac{أ}{٥} \Leftarrow أ = \frac{٥}{٢}$$

٥٧) $\lim_{س\to ٠} \frac{١ - \text{جتا}ب س}{س^{٢}} = ٨$

احسب قيمة أ و ب

٥٨) $\lim_{س\to ١} \frac{\text{جا}س - \text{جا}١}{س - ١} = \frac{١}{٢}$

احسب قيمة الثابت أ

تم توزيع في الرياضيات
إعداد : أ . سائد الوردات
0772044048 - 0787556274

٥٩) $\lim_{س\to ١} \frac{ظا\pi س}{١-س} = \lim_{س\to ٢} \frac{اس-١٢}{جا\pi س}$

فجد قيمة الثابت أ

الحل :

$\lim_{س\to ١} \frac{ظا\pi س}{١-س} = \lim_{س\to ٢} \frac{اس-١٢}{جا\pi س}$

متممة $ظا\pi س = -ظا(\pi - \pi س)$

$= \lim_{س\to ١} \frac{-ظا(\pi - \pi س)}{(١-س)}$

نضرب البسط والمقام ب $\frac{\pi}{\pi}$

$= \lim_{س\to ١} \frac{\pi \times -ظا(\pi - \pi س)}{\pi(١-س)}$

$= \lim_{س\to ١} \frac{\pi ظا(\pi - \pi س)}{\pi - \pi س}$

$= -\pi \lim_{س\to ١} \frac{ظا(\pi - \pi س)}{\pi - \pi س}$

نفرض ص $= \pi - \pi س$

عندما س $\to ١$

فان ص $\to ٠$

نستبدل ما قمنا بفرضه

$= -\pi \lim_{ص\to ٠} \frac{ظا(ص)}{ص} = -\pi$

$\Leftarrow \lim_{س\to ١} \frac{ظا\pi س}{١-س} = \lim_{س\to ٢} \frac{اس-١٢}{جا\pi س}$

$= \pi - \lim_{س\to ٢} \frac{اس-١٢}{جا\pi س}$

$= \pi - \lim_{س\to ٢} \frac{ا(س-٢)}{جا\pi س}$

$= \pi - ا \lim_{س\to ٢} \frac{(س-٢)}{جا\pi س}$

نفرض ص $= س - ٢ \Leftarrow س = ص + ٢$

عندما س $\to ٢$

فان ص $\to ٠$

نستبدل ما قمنا بفرضه

$= \pi - ا \lim_{ص\to ٠} \frac{(ص)}{جا\pi(ص+٢)}$

استخدم المتطابقة

جا(ا + ب) =جاا جتاب+جتاا جاب

جا(π ص + ٢π) =جاπ ص جتا٢π +جتاπ ص جا٢π

=جاπ ص ×١ +جتاπ ص ×٠

=جاπ ص

نرجع للحل ونقوم باستبدال المتطابقة

$= \pi - ا \lim_{ص\to ٠} \frac{(ص)}{جا\pi ص} \Leftarrow ا = -\pi^{٢}$

المرونق في الرياضيات
إعداد : أ . سائد الوردات
0772044048 - 0787556274