

تأريخ . " تكاملات مألوفة "

$$\boxed{1} \quad \int \text{مَقَا} \left(\frac{٤+٥}{٣} \right) دس$$

$$\boxed{2} \quad \int \text{قَا} دس \text{ظَا} دس$$

$$\boxed{3} \quad \int \text{مَقَا} دس - \text{مَقَا} دس \text{ظَا} دس + \frac{1}{\text{ظَا} دس}$$

$$\boxed{4} \quad \int \text{قَا} دس - \text{جَاه} دس ، \text{هَنَاب}$$

$$\boxed{5} \quad \int ٣ \text{مَقَا} (٥+٥) \text{ظَا} (٥+٥) دس$$

* تجهيز لإحداثيات لإثباتية *

للتكامَل

إلصق بالمألوفة في تكامل صحيح .

جَا (حُجِي)

هَنَا (حُجِي)

قَا (حُجِي)

مَقَا (حُجِي)

قَا (حُجِي) ظَا (حُجِي)
 مَقَا (حُجِي) خَا (حُجِي)
 [نفس الزاوية]

حيث أن تكامل لإمتزان لإثباتية
 بالمألوفة ذو لإثباتية لخطية يتم .

بقسمه ناتج لتكامَل لنفس لإثباتية على
 معامل س .

$$\text{مثال .} \quad \int \text{جَا} (٣-٥٢) دس$$

$$= - \frac{\text{هَنَا} (٣-٥٢)}{٣} + \text{جَا}$$

$$\frac{\text{حاس}}{\text{جها}} = \text{ظاس} \quad \text{العلاقات ...}$$

$$\frac{\text{حها}}{\text{جها}} = \text{ظها} \quad \frac{\text{قاس}}{\text{جها}} = \frac{1}{\text{جها}}$$

$$\frac{\text{صها}}{\text{جها}} = \frac{1}{\text{جها}} \quad \dots \quad \frac{\text{ظها}}{\text{جها}} = \frac{1}{\text{ظاس}}$$

في حاله وجود تكامل لا مزان
داوي غير مألوف فانا نقوم
بتحويله الى شكل مألوف باستخدام
التطبيقات أو علاقات بين الإحداثيات
الداوية .

شكل مألوف

شكل غير مألوف

$$\frac{1}{x} (1 - \text{جها}^2)$$

$$\frac{1}{x} (1 + \text{جها}^2)$$

$$\text{حأ}^2$$

$$\text{جها}^2$$

$$\text{قأ}^2 - 1$$

$$\text{صها}^2 - 1$$

$$\text{ظأ}^2$$

$$\text{ظها}^2$$

$$\frac{1}{x} \text{حأ}^2$$

$$\text{حأ}^2 \text{جها}^2$$

$$\frac{1}{x} (\text{جها}^2 (0 + \square) + \text{جها}^2 (0 - \square))$$

$$\frac{1}{x} (\text{جها}^2 (0 + \square) - \text{جها}^2 (0 - \square))$$

$$\frac{1}{x} (\text{حأ}^2 (0 + \square) + \text{جها}^2 (0 - \square))$$

$$\text{جها}^2 \text{حأ}^2$$

$$\text{حأ}^2 \text{جها}^2$$

$$\text{حأ}^2 \text{جها}^2$$

$$1$$

$$\text{حأ}^2 + \text{جها}^2$$

امثلة :

$$\boxed{1} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{5}{\text{جأس} - \text{ظأس}} \end{array} \right.$$

الحل . نستخدم علاقات

$$\left\{ \begin{array}{l} 5 = \text{قأس} - \text{ظأس} \end{array} \right.$$

$$5 = \frac{\text{قأس} - \text{ظأس}}{3} + \text{ج}$$

$$\boxed{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1 + \text{عأس} + \text{جأس}}{\text{جأس}} \end{array} \right.$$

الحل . بتوزيع لبط على المقام .

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\text{جأس}} + \frac{\text{عأس}}{\text{جأس}} + \frac{\text{جأس}}{\text{جأس}} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{قأس} + \text{عأس} - \text{ظأس} + \text{ظأس} \end{array} \right.$$

$$\text{نجهز البطل} = \text{ظأس} = \text{قأس} - 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{قأس} + \text{عأس} - \text{ظأس} + \text{قأس} - 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{عأس} + \text{قأس} - \text{ظأس} - 1 \end{array} \right.$$

$$= \text{عأس} + \text{قأس} - \text{ظأس} - 1$$

$$\boxed{3} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{دس}}{\text{جأس} - 1} \end{array} \right.$$

الحل . سحب 1 من المقام وتحويله الى جأس .

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{دس}}{-(1 - \text{جأس})} \end{array} \right.$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{دس}}{-\text{جأس}} \end{array} \right.$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} -\text{جأس} \end{array} \right.$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} -(\text{ظأس} - \text{عأس}) + \text{ج} \end{array} \right.$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} -\text{ظأس} + \text{عأس} + \text{ج} \end{array} \right.$$

$$\boxed{4} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1 - \text{جأس}}{1 - \text{ظأس}} \end{array} \right.$$

الحل . تحليل البطل فوقه بن مكسبين ثم تختصر .

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(1 - \text{جأس})(1 + \text{عأس} + \text{جأس})}{(1 - \text{ظأس})} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + \text{عأس} + \text{جأس} \end{array} \right.$$

$$\text{نحول جأس الى } \frac{1}{2} (1 - \text{جأس}) .$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + \text{عأس} + \frac{1}{2} (1 - \text{جأس}) \end{array} \right.$$

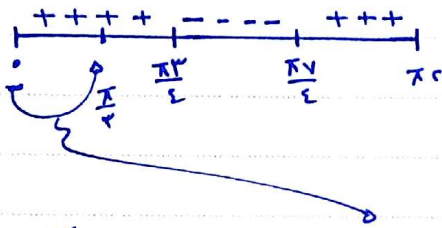
$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + \text{عأس} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{جأس} \end{array} \right.$$

$$x = \cos + \sin = 0$$

$$x = \cos - \sin$$

$$1 - x = \cos = \frac{\pi}{2} \quad \text{و} \quad 1 - x = \sin = \frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{2}, \quad x = \frac{\pi}{2}$$



في الفترة من $[0, \frac{\pi}{2}]$ يكون ما
داخل القيمة المطلقة موجب . حيث
الارتفاع في الربع الاول . وفي الربع
الاول يكون حاد موجب ، حاد موجب
وحاصل جمعها في الربع الاول يكون موجب

* نقوم بإزالة القيمة المطلقة بسبب
أن ما داخل موجب

$$x = \cos + \sin$$

$$x = \cos + \sin + \sin = \cos + 2\sin$$

$$x = \frac{3}{2} + \cos - \frac{1}{2} \sin = \cos + \frac{3 - \sin}{2}$$

$$x = \frac{3}{2} - \cos - \frac{1}{2} \sin = -\cos - \frac{1 - 3\cos}{2}$$

$$x = \frac{3}{2} - \cos - \frac{1}{2} \sin = -\cos - \frac{1 - 3\cos}{2}$$

$$x = \sqrt{1 + \cos + \sin} \quad \Delta$$

$$x \geq \frac{\pi}{3}$$

* لذا (عطافا هذا بشرط في مسألة)

الحل . نحول ما داخل الجذر إلى مربع كامل
عن طريق كتابة $1 = \cos + \sin$
 $\cos = \cos + \sin$

$$x = \sqrt{\cos + \sin + \cos + \sin} = \sqrt{2\cos + 2\sin}$$

$$x = \sqrt{\cos + \sin + \cos + \sin} = \sqrt{2\cos + 2\sin}$$

خل ما داخل الجذر

$$x = \sqrt{(\cos + \sin)(\cos + \sin)} = \sqrt{(\cos + \sin)^2}$$

$$x = \sqrt{(\cos + \sin)^2} = \cos + \sin$$

$$x = |\cos + \sin|$$

ليز صا لعادم لتقيد .

ملاحظات :

١- اذا كانت الزوايا في الربط مختلف
عن مقام فاننا نعمل على جعلها متساوية
من خلال ملاحظات .

٢- اني ما جده لصوره
 ± 1 حاس ± 1 حاس
نستخدم الضرب بالمراخه .

$$\boxed{7} \quad \left(\frac{1}{1 + \text{حاس}} \right) \text{ دس}$$

الحل . مراخه

$$\left(\frac{1}{1 + \text{حاس}} \right) \times \frac{1 - \text{حاس}}{1 - \text{حاس}} \text{ دس}$$

$$\left(\frac{1 - \text{حاس}}{1 - \text{حاس}} \right) \text{ دس} , \text{ نعمل مقام لي حاس}$$

$$\left(\frac{1 - \text{حاس}}{\text{حاس}} \right) , \text{ نوزع الربط على مقام}$$

$$\left(\frac{1}{\text{حاس}} - \frac{\text{حاس}}{\text{حاس}} \right) \text{ دس}$$

$$= \left(\frac{1}{\text{حاس}} - \text{قاس} \right) \text{ دس}$$

$$= \text{ظراس} - \text{قاس} + \text{ج}$$

$$\boxed{6} \quad \left(\frac{\text{حساء}}{\text{جاس حساء}} \right) \text{ دس}$$

الحل . نجعل الزوايا في الربط ومقام موحده
عن طريق كتابه جساء = حساء - جاس

$$\left(\frac{\text{حساء} - \text{جاس}}{\text{جاس حساء}} \right) \text{ دس} \text{ نوزع}$$

$$\left(\frac{\text{حساء}}{\text{جاس حساء}} - \frac{\text{جاس}}{\text{جاس حساء}} \right) \text{ دس}$$

$$\left(\frac{1}{\text{جاس}} - \frac{1}{\text{حساء}} \right) \text{ دس}$$

$$= \left(\text{حساء} - \text{قاس} \right) \text{ دس}$$

$$= - \text{ظراس} - \text{ظراس} + \text{ج}$$

$$\boxed{7} \quad \left(\frac{1 + \text{حساء}}{1 + \text{حساء}} \right) \text{ دس}$$

الحل .

$$1) \text{ قس } - \text{ قس } \text{ ظ } + \text{ قس } - \text{ قس } 1$$

$$1) \text{ قس } - \text{ قس } \text{ ظ } - \text{ قس } 1$$

$$= \text{ قس } + \text{ قس } \text{ ظ } + \text{ قس } 1$$

$$10) \frac{\text{قس}}{(\text{قس} + \text{ظ})}$$

$$8) \frac{1}{1 - \text{ظ}}$$

$$4) \frac{1 - \text{ظ}}{1 + \text{ظ}}$$

الحل . مراخفه للمقام و بسبب هو
احتياج التوزيع .

$$1) \frac{1 - \text{ظ}}{1 + \text{ظ}} \times \frac{1 - \text{ظ}}{1 - \text{ظ}}$$

$$1) \frac{(1 - \text{ظ})^2}{1 - \text{ظ}^2}$$

نقل البسط
و تحويل المقام

$$1) \frac{1 - \text{ظ} + \text{ظ} + \text{ظ}^2}{\text{ظ}}$$

$$1) \frac{1}{\text{ظ}} - \text{ظ} + \text{ظ} + \text{ظ}^2$$

حول ظ

$$\boxed{11} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{حيث } 3 \text{ حيث } 5 \text{ حيث } 5 \end{array} \right.$$

الحل. هنا لزيادة فصله نستخدم

$$\text{حيث } P \text{ حيث } 5 = \frac{1}{P} (\text{حيث } (P+5) + \text{حيث } (5-P))$$

$$= \left\{ \frac{1}{P} (\text{حيث } 5 + \text{حيث } 5 - \text{حيث } 5) \right.$$

$$= \left\{ \frac{1}{P} \text{ حيث } 5 + \frac{1}{P} \text{ حيث } 5 - \text{حيث } 5 \right.$$

$$= \frac{1}{P} + \frac{5}{P} - \frac{5}{P} + \frac{5}{P} = \frac{10}{P}$$

$$= \frac{1}{P} + \frac{5}{2} + \frac{5}{16} = \frac{1}{P} + \frac{17}{16}$$

$$= \frac{1}{P} + \frac{17}{16} = \frac{1}{P} + \frac{17}{16}$$

$$\underline{\text{تذكر!! حيث } 5 - \text{حيث } 5 = \text{حيث } 5}$$

$$\boxed{12} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{حيث } 5 \text{ حيث } 5 \text{ حيث } 5 \end{array} \right.$$

$$\boxed{13} \quad \text{وزارة ١٤٠٠ شتوية}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{حيث } 5 + \text{حيث } 5 \end{array} \right.$$

الحل. فك القوس ثم التبسيط.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{حيث } 5 + \text{حيث } 5 + \text{حيث } 5 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{حيث } 5 - 1 + \text{حيث } 5 + \text{حيث } 5 \end{array} \right.$$

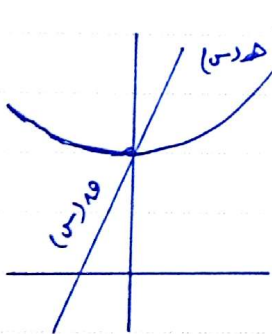
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{حيث } 5 + \text{حيث } 5 - 1 \end{array} \right.$$

$$= \text{حيث } 5 + \text{حيث } 5 - 1 = \text{حيث } 5 + \text{حيث } 5 - 1$$

٣] اذا كان $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

فأوجد $f'(1) - f'(2)$ ؟

الحل .



٣] الشكل لجدار عيني

الرسم البياني للاقتصاد

هو ، اذا علمت أن

$$f(x) = x^3 + 4x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

قيمة $f(0)$.

الحل . نجد قاعدة $f'(x)$

$$f'(x) = 3x^2 + 4$$

$$f'(x) = 3x^2 + 4$$

ولكن من الرسم يتضح ان $f'(x)$

يساوي $f'(x)$.

$$f(0) = 0$$

$$f(0) = 0 + 4(0) = 0$$

$$f(0) = 0$$

٤.

* تطبيقات على التفاضل *

عند الحدود

*] في مثل هذا النوع من الأسئلة

نستخدم قواعد وخصائص التفاضل

عند الحدود في حل الأسئلة .

١] اذا كان $f(x) = x^3 - 2x^2$

وكان $f'(1) = 1$ فأوجد قاعدة

$f'(x)$.

الحل . $f'(x) = 3x^2 - 4x$

لتفاضل بطرئين

$$f'(x) = 3x^2 - 4x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x$$

لنحسب القيمة .

$$f'(1) = 3(1)^2 - 4(1) = 3 - 4 = -1$$

$$f'(1) = -1$$

$$f'(1) = -1$$

$$f'(1) = 3(1)^2 - 4(1) = -1$$

وهذه هي قاعدة $f'(x)$ المطلوبة .

نكتب قاعدة $f(x)$ بعد معرفة p .

$$f(x) = x^5 + x^3 - 39$$

٥] جد معادلة المماس الذي ميله m له عند أي نقطة (x, y) تعطى بالعلاقة $\frac{y}{x} = \frac{x^3 + 8}{x^2 - 3x + 4}$ والذي

يقطع محور السينات عند $x = 3$.

الحل .

نكتب قاعدة $f(x)$ بعد معرفة p .

$$f(x) = x^5 + x^3 - 39$$

$$f'(x) = 5x^4 + 3x^2$$

$$71,5 = 5x^4 + 3x^2 + \frac{75}{x}$$

٤] اذا كان ميل المماس m

$f(x)$ عند نقطة (x, y) يساوي $(5x^4 + 3x^2 + \frac{75}{x})$ نجد قاعدة التقعران $f(x)$ علماً بأن $f'(x) = 3$.

الحل . ميل المماس $m = f'(x)$

$$f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + \frac{75}{x}$$

نعامل الطرفين

$$f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + \frac{75}{x}$$

$$f(x) = x^5 + x^3 - 39$$

نعوض بالمعطيات $f'(x) = 3$

$$3 = 5x^4 + 3x^2 + \frac{75}{x}$$

$$3 = 5x^4 + 3x^2 + \frac{75}{x}$$

$$39 - 3 = 5x^4 + 3x^2 + \frac{75}{x}$$

الاقتران $q(s)$ وهذا يعني أن

$$q(1) = 3. \text{ ومنها نجد قيمة } p.$$

$$q(1) = 3 = 1 \times 8 + 1 \times p + 1$$

$$3 = 1 \times p + 8 + 1$$

$$3 = 1 \times p + 9$$

$$7 = 1 \times p$$

نكتب قاعدة $q(s)$ بعد معرفة p

$$q(s) = 1 \times s^8 + 1 \times s - 7.$$

وهذا هو المطلوب .

٧] إذا كانت المشتقة الأولى للاقتران

$$q'(s) = 1 \times s - 7 \text{ وكانت}$$

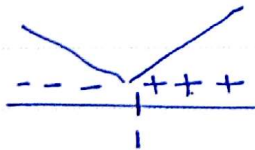
قيمة الصغرى للحل للاقتران $q(s)$

تساوي ٧ ، جد قاعدة الاقتران

١٠

الحل . نجد نقطة لمرجة لتي عندها
قيمة صغرى . ثم نكامل بطريقتين .

$$1 = s \quad 2 = 1 \times s \quad 0 = 2 - 1 \times s$$



يوجد قيمة صغرى عند $s=1$

وقبيل معطاه وهي $q(1) = 7.$

٦] إذا علمت أن المشتقة الثانية لـ

$$q''(s) = 2 \text{ عند أي نقطة } (s, q(s))$$

وكان ميل المماس عند نقطة $(1, 3)$ يساوي

١. جد قاعدة الاقتران q .

الحل . $q'(s) = 2$ نكامل

$$q'(s) = 2 \Rightarrow q(s) = 2s + c$$

$$q'(1) = 2 = 2 \times 1 + c$$

* معلومة ميل المماس عند نقطة $(1, 3)$

يساوي ١. تعني أن

$$q'(1) = 1. \text{ ومنها نجد قيمة } p.$$

$$q'(1) = 1 = 1 \times p + 1 \times c$$

$$1 = 1 \times p + c$$

$$1 = 1 \times p$$

نكتب قاعدة $q(s)$ بعد معرفة p

$$q(s) = 1 \times s + 1 \times c$$

$$q'(s) = 1 \Rightarrow q(s) = s + c$$

$$q(1) = 3 = 1 \times 1 + 1 \times c$$

لايجاد قيمة c نستخدم معلومة
نقطة الخامس $(1, 3)$ لانها تحقق

ماتخذ معلومات[١] $و(س)$ يمر بالنقطة $(ن, پ)$

$$\boxed{و(پ) = ن}$$

[٢] $و(پ)$ على المحاور $و(ن)$ عند $(ن, پ)$ يساوي $پ$ تعني أن .

$$\boxed{و(پ) = پ} \quad \boxed{و(ن) = ن}$$

[٣] $و(س)$ يقطع محور السينات عند $س = ك$ تعني .

$$\boxed{و(ك) = ٠}$$

[٤] $و(س)$ يقطع محور الصادات عند $و = ل$ تعني

$$\boxed{و(٠) = ل}$$

[٥] للمخني $و$ نقطة صفري / تعني عند $و = پ$ وقسمتها $ع$ تعني

$$\boxed{و(پ) = ع} \quad \boxed{و(پ) = ٠}$$

نكامل لطرين .

$$و(س) = س - ٢$$

$$و(س) = س - ٢$$

$$و(س) = س - ٢ + پ$$

$$و(س) = س - ٢ + پ$$

نستخدم معلومة إجابة لصغرى

عند $س = ١$ و $و(١) = ٧$ لايجاد $پ$

$$و(١) = ٧ = ١ - ٢ + پ$$

$$٧ = ١ - ٢ + پ$$

$$٨ = پ$$

نكتب قاعدة لإعدادان $و$ بعد معرفة قيمة $پ$

$$و(س) = س - ٢ + ٨$$

وهذا هو المطلوب .

اسئلة اضافية .

$$\boxed{1} \quad \text{ص} = \sqrt[3]{\text{س}^3 - \text{س}^2 + 2\text{س} - 1} \quad \text{جد}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{رص}} \quad \text{عندما} \quad \text{س} = 1 .$$

الحل . نستعمل لطريقتين .

$$\frac{\text{دص}}{\text{رص}} = \frac{\text{د}}{\text{ر}} \left(\sqrt[3]{\text{س}^3 - \text{س}^2 + 2\text{س} - 1} \right)$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{رص}} = \sqrt[3]{\text{س}^3 - \text{س}^2 + 2\text{س} - 1}$$

$$\text{نعوض} \quad \text{س} = 1$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{رص}} = \sqrt[3]{1 - 1 + 2 - 1} = 1$$

$$\text{س} = 1$$

$$\sqrt[3]{1 + 1 + 1} = \sqrt[3]{3}$$

$$\boxed{3} = \sqrt[3]{3}$$

$$\boxed{2} \quad \text{(وزارة ج.ا.ع)} \quad \text{اذا كان ص}$$

اعتد ان متصل على مجاله وكان

$$\sqrt[3]{(\text{ظأس} - \text{قأس})} . \text{ص}(\text{س}) = 3 - \text{س}^2$$

$$\text{فأوجد} \quad \text{ص}(\text{س}) .$$

الحل . نستعمل لطريقتين

$$\frac{\text{د}}{\text{ر}} \sqrt[3]{(\text{ظأس} - \text{قأس})} . \text{ص}(\text{س}) = 3 - \text{س}^2$$

$$(\text{ظأس} - \text{قأس}) \text{ص}(\text{س}) = 3 - \text{س}^2$$

$$\text{ولكن} \quad \text{قأس} - \text{ظأس} = 1$$

$$-(\text{قأس} - \text{ظأس}) \text{ص}(\text{س}) = 3 - \text{س}^2$$

$$-(\text{س}) = 3 - \text{س}^2$$

$$\boxed{(\text{س}) = 3 - \text{س}^2}$$

$$\boxed{3} \quad \text{(وزارة ج.ا.ع)} \quad \text{اذا كان ص}$$

متصلاً على ص و كان

$$\sqrt[3]{(\text{س}^3 + \text{س}^2 + 9)} = \text{ص}(\text{س} + 2)$$

$$\text{ص}(\text{س} + 2) = 9 + \text{س}^2 + \text{س}^3$$

$$\text{ص}(\text{س} + 2) = 9 + \text{س}^2 + \text{س}^3$$

الحل .

٤] اذا كان

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin(s) = 2s - \cos s + 2 \\ \cos(s) = 2s + 2 \end{array} \right.$$

أثبت أن $\sin\left(\frac{\pi}{e}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{e}\right) = 2$.

الحل .

٥] (ملاحظة : ا.هـ شتوية)

اذا كان

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin(s) + \cos(s) = 2s \\ \cos(s) = 2s + 2 \end{array} \right.$$

وكان $\sin(1) = 1$ $\cos(2) = 2$ أوجد

$\sin(-1)$.

الحل .

حل المسئلة لدرس الثاني :-

التدريبات .

تدريب ١ / ٢٢٨
جد "ك" مما يلي .

$$① \quad \begin{cases} x + y = 5 \end{cases}$$

$$② \quad \begin{cases} x + y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

تدريب ٢ / ٢٢٩

$$① \quad \begin{cases} x + y = 10 \end{cases}$$

$$② \quad \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{y} \end{cases}$$

الحل .

$$\begin{cases} x + y = \frac{1}{4} \\ x + y = \frac{1}{4} \end{cases} = \begin{cases} x + y = \frac{1}{4} \\ x + y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

تدريب ٣ / ٢٣١

$$① \quad \begin{cases} x - y = 9 \end{cases}$$

الحل . نحل ونختصر

$$\begin{cases} x(9-y) = 3-x \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x(3-y)(3+y) = 3-x \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x(3+y) = 3-x \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x + y = 3 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x + y = 3 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x + y = 3 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x + y = 3 \end{cases}$$

$$② \quad \begin{cases} x(2-y) = 3-x \end{cases}$$

الحل . نضع بقوس ليكني ثم
نوزع البسط على المقام بعد توحيد
الاسس .

$$(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$$

* حسب مثلث باسكال *

$$\begin{cases} x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \end{cases}$$

$$= \frac{(3-x-5)}{5 \times 5} + \frac{0}{5}$$

$$= \frac{(3-x-5)}{25} + \frac{0}{5}$$

تدريب ٥ م ٢٢٤

جد كلاً من التفاضلات لـ

$$(1) \left(\frac{3}{x} + \frac{4}{x^2} \right)$$

الحل.

$$= \frac{3}{x^2} - \frac{8}{x^3} + \frac{0}{x^4}$$

$$(2) \left(\frac{1}{(x^2-6)^2} \right)$$

الحل.

$$= \frac{1}{(x^2-6)^3} \left(-2(x^2-6) \cdot 2x \right)$$

$$= \frac{1}{(x^2-6)^3} (-4x(x^2-6))$$

$$= \frac{-4x(x^2-6)}{(x^2-6)^3}$$

$$= \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^5}$$

$$= \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^5}$$

$$= \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^5}$$

تدريب ٤

جد كلاً مما يلي.

$$(1) \frac{3}{x^2(5-x)}$$

الحل.

$$\frac{3}{x^2(5-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{5-x}$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{5-x}$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{5-x}$$

$$\frac{3}{x^2(5-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{5-x}$$

الحل.

$$\frac{3}{x^2(5-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{5-x}$$

$$= \frac{3}{x^2(5-x)}$$

$$(٣) \int \frac{٣٣٥}{٣٣٥} dx$$

الحل:

تدريبات ٦ / ٣٣٥
جد كلاً من التفاضلات لإدسية .

$$(١) \int (٣٣٥ + ٣٣٥) dx$$

الحل:

$$(٤) \int (٣٣٥ - ٣٣٥) dx$$

الحل:

$$(٢) \int \frac{٣}{١ - ٣٣٥} dx$$

الحل . $\int \frac{٣}{١ - ٣٣٥} = ١ - ٣٣٥$
ها هو سبب اختيار هذه للتطبيق؟

$$\int \frac{٣}{١ - (١ - ٣٣٥)} dx$$

$$= \int \frac{٣}{١ - ١ + ٣٣٥} dx$$

$$= \int \frac{٣}{٣٣٥} dx$$

$$= \frac{٣}{٣٣٥} ٣٣٥ + C$$

$$= ٣ + C$$

$$(د) \int (4x^5 + 2x^3 + 2x^2 + 2x^5) dx$$

الحل. (ليس خطي) $\Rightarrow$ هنا نحاول تبسيط المقادير ليكون خطي.

* نستفيد من أنه يجب أن يكون مربع كامل في التحليل

$$\int ((x^2 + 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)) dx$$

$$\int ((x^2 + 2x + 2)) dx$$

$$= \int (x^2 + 2x + 2) dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{2}x^2 + 2x + C = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 2x + C$$

$$(هـ) \int \frac{9 - (x^2 + 3x)}{x} dx$$

الحل. تحليل بسط مزود بين مربعين

$$\int \frac{(2 + (x^2 + 3x))(3 - (x^2 + 3x))}{x} dx$$

$$= \int \frac{(x^2 + 3x + 2)(3 - x^2 - 3x)}{x} dx$$

$$= \int (x^2 + 3x + 2)(3 - x^2 - 3x) dx$$

$$= \frac{1}{5}x^5 + 6x^4 + 7x^3 + C$$

تأريخ ومسائل / ٢٣٦ .

(١) جـ كلاً من التكمالات لديه .

$$(٢) \int (x^5 - \frac{3}{x^5} + x^7) dx$$

الحل .

$$\int x^5 - \frac{3}{x^5} + x^7 dx$$

$$= \frac{1}{6}x^6 + \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{8}x^8 + C$$

$$(٣) \int (x^3 + 5) dx$$

$$\text{الحل . } = \frac{1}{4}x^4 + 5x + C$$

$$(د) \int \frac{1 - x^2}{2 - x} dx$$

الحل .

$$(ج) \quad \left| \frac{s - \sqrt{s}}{1 - \sqrt{s}} \right|$$

الحل . نضرب بسط + بسط من بسط
ثم نختصر .

$$\left| \frac{s + (1 - \sqrt{s})}{1 - \sqrt{s}} \right|$$

$$= \left| \frac{s + 1 - \sqrt{s}}{1 - \sqrt{s}} \right| = \left| \frac{s + 1}{1 - \sqrt{s}} \right|$$

$$= \frac{s + 1}{1 - \sqrt{s}}$$

$$(ط) \quad \left| \frac{s + 1}{1 - \sqrt{s}} \right|$$

الحل .

$$(و) \quad \left| (s-1)(s-1)^5 \right|$$

الحل .

$$(ز) \quad \left| s \sqrt[3]{\frac{1}{s} - \frac{5}{s^2}} \right|$$

الحل . نكتب s على شكل $\sqrt[3]{s^3}$
ونؤخذ إشارة الجذر للمقارن

$$\left| \sqrt[3]{s^3} \sqrt[3]{\frac{1}{s} - \frac{5}{s^2}} \right|$$

$$= \left| \sqrt[3]{s^3 \left(\frac{1}{s} - \frac{5}{s^2} \right)} \right|$$

$$= \left| \sqrt[3]{\frac{s^3}{s} - \frac{5s^3}{s^2}} \right|$$

$$= \left| \sqrt[3]{s - 5s} \right|$$

$$= \left| \sqrt[3]{(s-5)s} \right|$$

$$= \frac{\sqrt[3]{(s-5)s}}{1 - \frac{2}{3}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{(s-5)s}}{\frac{1}{3}}$$

$$(٥). \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{3+x} + \sqrt{3-x}}$$

الحل. نلجأ الى بضرب الجرافة

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{3+x} + \sqrt{3-x}} \times \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3-x}}{\sqrt{3+x} - \sqrt{3-x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{3+x} - \sqrt{3-x})}{3-x - (3-x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{3+x} - \sqrt{3-x})}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3-x}}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{3+x} - \sqrt{3-x} \right) \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{3+x} - \sqrt{3-x} \right) \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{3+x} - \sqrt{3-x} \right) \cdot \frac{1}{x}$$

(٢) اذا كان x كبيراً جداً فنلاحظ ان
لناش $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ حيث ان $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$
وكانت النقطة (١٠٠) تقع على منحنى
فجد قاعدة لاغرانج

الحل

(٣) اذا كان x قريباً من 0 فنلاحظ ان
لاغرانج $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$ حيث ان
النقطة عند هذه النقطة يساوي
فجد قاعدة لاغرانج

الحل. بتفاضل الطرفين وتعويض
المعلومات المعطاة لاجاد لثوابت
حيث ان

١) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$ تعني ان
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$

٢) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$ تعني ان

يساوي ١ تعني ان
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$$

قاعدة $\frac{d}{dx}$ $\frac{d}{dx}(u \cdot v)$ بعد معرفة $\frac{d}{dx}$

$$\frac{d}{dx}(u \cdot v) = u \cdot \frac{d}{dx}v + v \cdot \frac{d}{dx}u$$

(٢) اذا كان

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dx}(u \cdot v) &= u \cdot \frac{d}{dx}v + v \cdot \frac{d}{dx}u \\ \text{وكان } \frac{d}{dx}u &= (1) \quad \frac{d}{dx}v = (2) \\ \text{فجد } \frac{d}{dx}(u \cdot v) &= (2) \end{aligned} \right.$$

الحل . نستخدم لطريقين ثم نعوض
معلومه $\frac{d}{dx}u = (1)$. لايجاد $\frac{d}{dx}(u \cdot v)$

$$\frac{d}{dx}(u \cdot v) = u \cdot \frac{d}{dx}v + v \cdot \frac{d}{dx}u$$

$$\frac{d}{dx}(u \cdot v) = u \cdot \frac{d}{dx}v + v \cdot \frac{d}{dx}u$$

$$\frac{d}{dx}(u \cdot v) = (1) \cdot \frac{d}{dx}v + v \cdot \frac{d}{dx}u$$

$$\frac{d}{dx}(u \cdot v) = (1) \cdot \frac{d}{dx}v + v \cdot \frac{d}{dx}u$$

$$u + v = 2 + 1$$

$$\boxed{u = 1}$$

قاعدة $\frac{d}{dx}$ $\frac{d}{dx}(u \cdot v)$

$$\frac{d}{dx}(u \cdot v) = u \cdot \frac{d}{dx}v + v \cdot \frac{d}{dx}u$$

في ج ١ من خلال معلومة (٢)

$$\frac{d}{dx}(u \cdot v) = (2) \cdot \frac{d}{dx}u + u \cdot \frac{d}{dx}v$$

$$\frac{d}{dx}(u \cdot v) = (2) \cdot \frac{d}{dx}u + u \cdot \frac{d}{dx}v$$

$$\frac{d}{dx}(u \cdot v) = (2) \cdot \frac{d}{dx}u + u \cdot \frac{d}{dx}v$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(u \cdot v) = 2} \quad \frac{d}{dx}(u \cdot v) = (2) \cdot \frac{d}{dx}u + u \cdot \frac{d}{dx}v$$

نكتب قاعدة $\frac{d}{dx}$ $\frac{d}{dx}(u \cdot v)$ بعد معرفة
ج ١

$$\frac{d}{dx}(u \cdot v) = (2) \cdot \frac{d}{dx}u + u \cdot \frac{d}{dx}v$$

لنامل مرة أخرى

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dx}(u \cdot v) &= u \cdot \frac{d}{dx}v + v \cdot \frac{d}{dx}u \\ \frac{d}{dx}(u \cdot v) &= (2) \cdot \frac{d}{dx}u + u \cdot \frac{d}{dx}v \end{aligned} \right.$$

$$\frac{d}{dx}(u \cdot v) = (2) \cdot \frac{d}{dx}u + u \cdot \frac{d}{dx}v$$

$$\frac{d}{dx}(u \cdot v) = (2) \cdot \frac{d}{dx}u + u \cdot \frac{d}{dx}v$$

نعوض بالمعلومة (١) وهي

$$\frac{d}{dx}(u \cdot v) = (2) \cdot \frac{d}{dx}u + u \cdot \frac{d}{dx}v$$

$$\frac{d}{dx}(u \cdot v) = (2) \cdot \frac{d}{dx}u + u \cdot \frac{d}{dx}v$$

$$\frac{d}{dx}(u \cdot v) = (2) \cdot \frac{d}{dx}u + u \cdot \frac{d}{dx}v$$

$$\frac{d}{dx}(u \cdot v) = (2) \cdot \frac{d}{dx}u + u \cdot \frac{d}{dx}v$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(u \cdot v) = 2}$$

نكامل مرة اخرى

$$\{ \text{وهذا هو} \} = 3s^2 - 4s + 4$$

$$\text{وهذا هو} = 3s^2 - 4s + 4$$

$$\text{لنحسب الجواب} = 3s^2 - 4s + 4$$

$$\text{وهذا هو} = 3s^2 - 4s + 4$$

$$\text{وهذا هو} = 3s^2 - 4s + 4$$

$$\text{وهذا هو} = 3s^2 - 4s + 4$$

$$\text{وهذا هو} = 3s^2 - 4s + 4$$

$$\text{وهذا هو} = 3s^2 - 4s + 4$$

$$\text{وهذا هو} = 3s^2 - 4s + 4$$

$$\text{وهذا هو} = 3s^2 - 4s + 4$$

$$\text{وهذا هو} = 3s^2 - 4s + 4$$

٥) اذا كان $s = 2$ فإن $3s^2 - 4s + 4 = 3(2)^2 - 4(2) + 4 = 12 - 8 + 4 = 8$
وكان للاعتدال $s = 2$ قيمة صغرى
عليه قيمته 2 عند $s = 2$ في
قاعدة الاعتدال $s = 2$.

الحل:

$$(د) \quad (طها س - قها س) دس$$

الحل .

$$\{ طها س - قها س + قها س دس$$

$$\{ قها س - ١ - قها س طها س + قها س دس$$

$$= \{ قها س - قها س طها س - ١ دس$$

$$= - قها س + ٢ قها س - س + ١$$

$$(د) \quad \frac{قها س + قها س دس}{١ - قها س}$$

$$\frac{قها س + قها س دس}{قها س} =$$

$$= \frac{قها س}{قها س} + \frac{قها س دس}{قها س}$$

$$= \{ قها س طها س + ١ دس$$

$$= قها س + س + ١$$

$$(٦) \quad جد كلاً من التكاملات لإتية .$$

$$(٢) \quad \left(\frac{٣}{قها س} - \frac{٥}{قها س} \right) دس$$

الحل .

$$(ن) \quad \frac{قها س + قها س دس}{١ + قها س}$$

الحل .

$$\{ \frac{١}{(١ + قها س) + ١} دس$$

$$= \frac{١}{١ - ١ + ٢ قها س} دس$$

$$= \{ \frac{١}{٢ قها س} دس$$

$$= \frac{١}{٢} قها س + ١$$

$$(هـ) \int \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} \times \sqrt{x+1}} dx$$

الحل .

$$\int \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} \times \sqrt{x+1}} dx = \int \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} \times \sqrt{x+1}} dx$$

$$= \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} \times \sqrt{x+1}} dx - \int \frac{1}{\sqrt{x} \times \sqrt{x+1}} dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx - \int \frac{1}{\sqrt{x} \times \sqrt{x+1}} dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx - \int \frac{1}{\sqrt{x} \times \sqrt{x+1}} dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx - \int \frac{1}{\sqrt{x} \times \sqrt{x+1}} dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx - \int \frac{1}{\sqrt{x} \times \sqrt{x+1}} dx$$

$$(و) \int \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}} dx$$

الحل .

$$\int \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}} dx = \int \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}} dx$$

$$= \int \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}} dx = \int \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}} dx$$

$$= \int \frac{(1 - \sqrt{x})(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})}{(\sqrt{x} - \sqrt{x+1})(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})} dx$$

$$= \int \frac{(1 - \sqrt{x})(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})}{x - (x+1)} dx$$

$$= \int \frac{(1 - \sqrt{x})(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})}{-1} dx$$

$$= - \int (1 - \sqrt{x})(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}) dx$$

$$(ز) \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} dx$$

$$\text{الحل .} \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} dx = \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} dx$$

$$= \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} dx = \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} dx$$

$$= \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} dx = \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} dx$$

$$= \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} dx = \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} dx$$

$$= \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} dx = \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} dx$$

$$= \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} dx = \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} dx$$

$$= \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} dx = \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} dx$$

$$= \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} dx = \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} dx$$

$$= \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} dx = \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} dx$$

$$(ط) \int قاس (ظاس + حاس) دس$$

الحل .

$$(ي) \int حاس حاس دس$$

الحل .

$$(ج) \int \frac{دس}{حاس - حاس} دس$$

الحل .

$$\int \frac{دس}{حاس (١ - حاس)} دس$$

$$= \int \frac{دس}{حاس حاس} دس$$

$$= \int \frac{دس}{(حاس حاس)}$$

$$= \int \frac{دس}{(\frac{1}{2} حاس)}$$

$$= \int \frac{دس}{\frac{1}{2} حاس} دس$$

$$= \int ٤ حاس دس$$

$$= - \frac{٤ حاس}{١} + ح$$

$$= - ٤ حاس + ح$$

$$(ن) \int \frac{1}{x^2} dx$$

الحل.

$$(ن) \int (x^{-2} - x^{-1}) dx$$

الحل.

$$\int (x^{-2} - x^{-1}) dx = \int x^{-2} dx - \int x^{-1} dx$$

$$= \int x^{-2} dx - \int \frac{1}{x} dx$$

$$= \int x^{-2} dx - \ln|x| + C$$

$$(س) \int \frac{1}{x^2 - 1} dx$$

الحل.

$$\int \frac{1}{x^2 - 1} dx = \int \frac{1}{(x-1)(x+1)} dx$$

$$= \int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{1}{x+1} dx$$

$$= \ln|x-1| - \ln|x+1| + C$$

$$= \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

$$= \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

$$= \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

$$= \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

$$= \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

$$= \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

$$(د) \int \frac{x^2 - 5}{x^2 - 1} dx$$

الحل.

$$= \int \frac{x^2 - 5}{x^2 - 1} dx$$

$$= \int \frac{x^2 - 5}{x^2 - 1} dx$$

$$= \int \frac{x^2 - 5}{x^2 - 1} dx$$

$$= \int \frac{x^2 - 5}{x^2 - 1} dx$$

$$(م) \int \frac{1}{x^2 + 1} dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \right) dx$$

$$= \int \left(x^{-2} + x^{-1} \right) dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \right) dx$$

الحل :