2017

المنهاج الجديد

الآفاق في تبسيط الرياضيات

الطبعة الجديدة

المدارس العمرية

أ. محمد الحداد

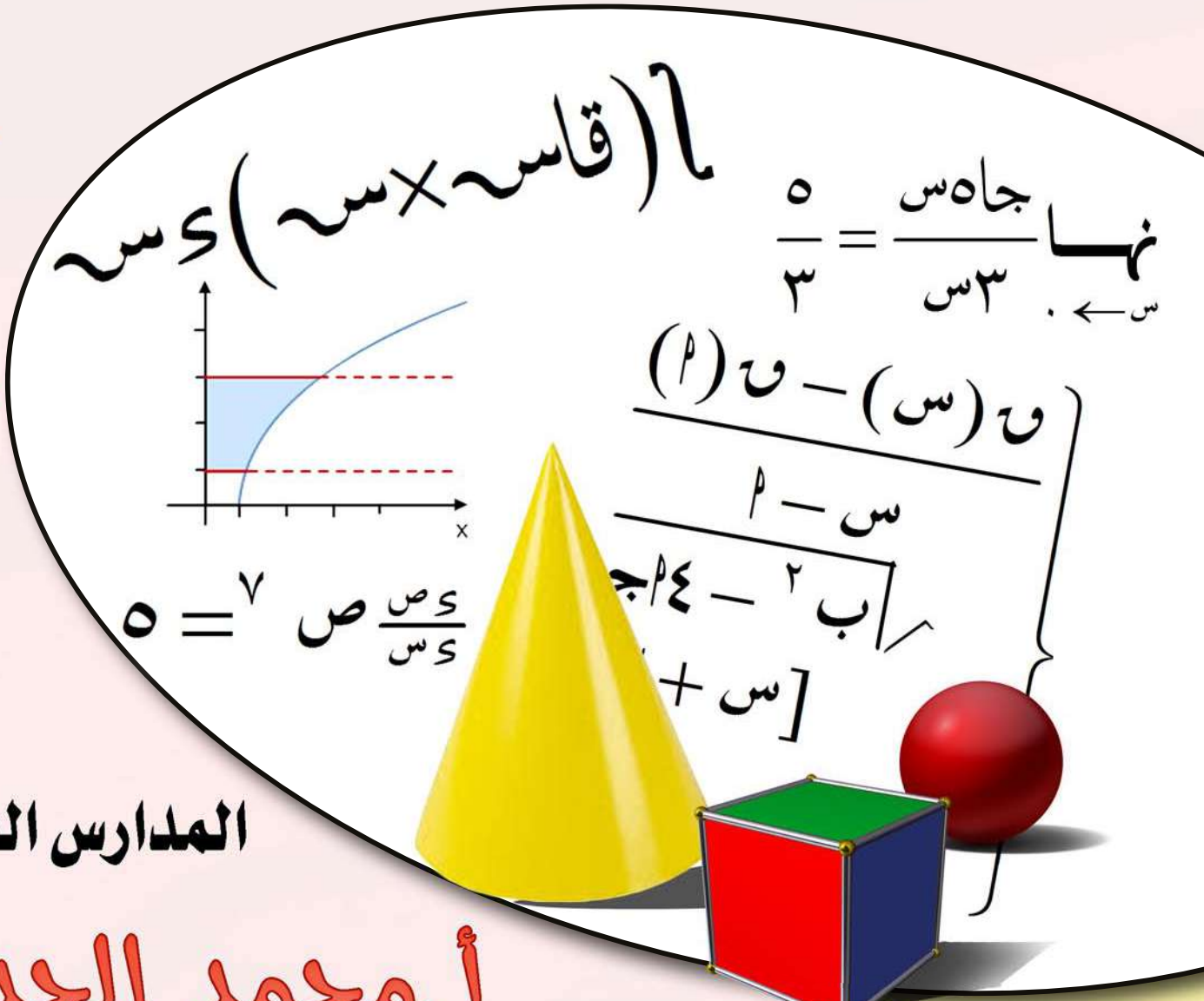
٠٧٨٦٠٧٨٧١٠

أدبي

2017

المنهاج الجديد

وحدة التكامل



الطبعة الجديدة

المدارس العمرية

أ. محمد الحداد

٠٧٨٦٠٧٨٧١٠

أدبي

التكامل

تعريف

التكامل: هو عملية عكسية للاشتقاق ويرمز له بالرمز ∫

التكامل ينقسم إلى قسمين

- التكامل غير المحدود ∫
- التكامل المحدود ∫ من أ إلى ب (تقرأ: الحد الأعلى ب، الحد الأدنى أ)

أولا: التكامل غير المحدود وقواعده:

قاعدة (١)

$\int ن'(س)\,ds = ن(س) + جـ$ (ثابت التكامل)

مثال: أوجد التكاملات الآتية:

١) $\int هـ'(س)\,ds = هـ(س) + جـ$

٢) $\int ع'(س)\,ds = ع(س) + جـ$

٣) $\int ل'(س)\,ds = ل(س) + جـ$

قاعدة (٢)

طريقة تكامل الثابت: $\int أ\,ds = أ\,س + جـ$

نفس الثابت ← نضع متغير ← + جـ

مثال: أوجد التكاملات الآتية:

١) $\int ٥\,ds = ٥س + جـ$

٢) $\int -٧\,ds = -٧س + جـ$

٣) $\int ١٢\,ds = ١٢ص + جـ$

٤) $\int ١٥\,ds = ١٥ص + جـ$

٥) $\int ٢\,dل =$

٦) $\int ٢\,dع =$

٧) $\int \frac{١}{٢}\,ds =$

٨) $\int$ صفر $ds =$

٩) $\int ds =$

١٠) $\int -ds =$

١١) $\int ٢\sqrt{}\,ds =$

١٢) $\int \frac{ds}{٣} =$

قاعدة (٣)

طريقة تكامل المتغير: $\int س^{ن}\,ds = \frac{س^{ن+١}}{ن+١} + جـ$

نفس المتغير ← نجمع للقوة (١) ← نقسم على نفس القوة ← + جـ

مثال: أوجد التكاملات الآتية:

١) $\int س^{٢}\,ds = \frac{س^{٣}}{٣} + جـ$

٢) $\int س^{٤}\,ds = \frac{س^{٥}}{٥} + جـ$

٣) $\int س\,ds = \frac{س^{٢}}{٢} + جـ$

٤) $\int ص^{٦}\,ds = \frac{ص^{٧}}{٧} + جـ$

٥) $\int ل^{٩}\,dل =$

٦) $\int ف^{٢}\,df =$

٧) $\int ف^{٢}\,ds = ف^{٢}س + جـ$ حيث (ف) ثابت

لاحظ أن الدلالة بالمتغير س إذاً يعتبر $ف^{٢}$ ثابت

مبادئ وأساسيات لحساب التكامل

• قبل التكامل

١) نتخلص من الجذور

قاعدة: $\sqrt[ن]{س^{م}} = س^{\frac{م}{ن}}$

تدريب: تخلص من الجذور فيما يلي:

أ) $\sqrt[٥]{س^{٢}} = س^{\frac{٢}{٥}}$

ب) $\sqrt[٣]{س^{٤}} = س^{\frac{٤}{٣}}$

جـ) $\sqrt[٤]{س} = س^{\frac{١}{٤}}$

د) $\sqrt{س} = س^{\frac{١}{٢}}$

٢) نتخلص من المقام إن أمكن

قاعدة:

$\frac{م}{س^{ن}} = م س^{-ن}$ ، $ن \neq ١$

تدريب: تخلص من المقام فيما يلي:

أ) $\frac{٢}{س^{٥}} = ٢س^{-٥}$

ب) $\frac{٧}{س^{٣}} = ٧س^{-٣}$

جـ) $\frac{١}{س^{٢}} = س^{-٢}$

د) $\frac{٥}{س^{٦-}} = ٥س^{٦}$

• بعد التكامل

١) نتخلص من القوة السالبة

قاعدة: $م س^{-ن} = \frac{م}{س^{ن}}$

تدريب: تخلص من القوة السالبة فيما يلي:

أ) $٢س^{-٣} = \frac{٢}{س^{٣}}$

ب) $٥س^{-٦} = \frac{٥}{س^{٦}}$

جـ) $-٧س^{-٢} = \frac{-٧}{س^{٢}}$

د) $س^{-٩} = \frac{١}{س^{٩}}$

٢) نتخلص من القوة الكسرية

قاعدة: $س^{\frac{م}{ن}} = \sqrt[ن]{س^{م}}$

تدريب: تخلص من القوة الكسرية فيما يلي:

أ) $س^{\frac{٣}{٥}} = \sqrt[٥]{س^{٣}}$

ب) $س^{\frac{٣}{٤}} = \sqrt[٤]{س^{٣}}$

جـ) $س^{\frac{١}{٣}} = \sqrt[٣]{س}$

د) $س^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{س}$

مثـــال: أوجد التكاملات الآتية:

١) $\int س^{-٥} \, دس = \frac{س^{-٤}}{-٤} + جـ = \frac{-١}{٤س^{٤}} + جـ$

٢) $\int س^{-٣} \, دس = \frac{س^{-٢}}{-٢} + جـ = \frac{-١}{٢س^{٢}} + جـ$

٣) $\int س^{-٢} \, دس =$

٤) $\int \frac{١}{س^{٧}} \, دس =$ سوف نتخلص من المقام

$\int س^{-٧} \, دس = \frac{س^{-٦}}{-٦} + جـ = \frac{-١}{٦س^{٦}} + جـ$

٥) $\int \frac{١}{س^{٦}} \, دس =$

٦) $\int \frac{١}{س^{١٢}} \, دس =$

نتيجة

تكامل القوة الكسرية

$\int س^{\frac{م}{ن}} \, دس = \frac{ن}{م+ن} س^{\frac{م+ن}{ن}} + جـ$

نفس المتغير ← القوة $\frac{\text{البسط + المقام}}{\text{المقام نفسه}}$ ← نقلب القوة أمام المتغير

٧) $\int س^{\frac{٢}{٣}} \, دس = \frac{٣س^{\frac{٥}{٣}}}{٥} + جـ = \frac{٣}{٥} \sqrt[٣]{س^{٥}} + جـ$

٨) $\int س^{\frac{١}{٢}} \, دس = \frac{٢س^{\frac{٣}{٢}}}{٣} + جـ = \frac{٢}{٣} \sqrt{س^{٣}} + جـ$

٩) $\int س^{\frac{٢}{٥}} \, دس =$

١٠) $\int \sqrt[٣]{س} \, دس =$ نتخلص من الجذر

$\int س^{\frac{١}{٣}} \, دس = \frac{٣س^{\frac{٤}{٣}}}{٤} + جـ = \frac{٣}{٤} \sqrt[٣]{س^{٤}} + جـ$

١١) $\int \sqrt{س}\, وس$ = نتخلص من الجذر

$$\int س^{\frac{١}{٢}}\, وس = \frac{٢ س^{\frac{٣}{٢}}}{٣} + جـ = \frac{٢ \sqrt{س^{٣}}}{٣} + جـ$$

١٢) $\int \sqrt[٥]{س^{٢}}\, وس =$

١٣) $\int \frac{١}{\sqrt{س}}\, وس$ = نتخلص من الجذر ثم المقام

$$\int س^{-\frac{١}{٢}}\, وس = \frac{٢ س^{\frac{١}{٢}}}{١} + جـ = ٢ \sqrt{س} + جـ$$

١٤) $\int \frac{١}{\sqrt[٣]{س^{٢}}}\, وس =$

١٥) $\int \frac{١}{\sqrt[٥]{س^{٧}}}\, وس =$

قاعدة (٤)

$\int ا ن(س)\, وس = ا ن(س) + جـ$

الثابت كما هو × تكامل الاقتران (المتغير)

مثال : أوجد التكاملات الآتية:

١) $\int ٣ س^{٤}\, وس = \frac{٣ س^{٥}}{٥} + جـ = \frac{س^{٥}}{٥} + جـ$

٢) $\int ٥ س^{٤}\, وس = \frac{٥ س^{٥}}{٥} + جـ = س^{٥} + جـ$

٣) $\int ١٢ س^{٣}\, وس = \frac{١٢ س^{٤}}{٤} + جـ = ٣ س^{٤} + جـ$

٤) $\int ١٥ س^{٤}\, وس = \frac{١٥ س^{٥}}{٥} + جـ = ٣ س^{٥} + جـ$

٥) $\int ٢ س^{٢}\, وس =$

٦) $\int ٣ س^{٤}\, وس =$

٧) $\int ٥ س^{٩}\, وس =$

٨) $\int ٢ س^{٥}\, وس =$

٩) $\int \frac{س^{٣}}{٥}\, وس =$

١٠) $\int \frac{س}{٣}\, وس =$

مثال : أوجد التكاملات الآتية:

١) $\int ٣ س^{-٤}\, وس = \frac{٣ س^{-٣}}{-٣} + جـ = \frac{-١}{س^{٣}} + جـ$

٢) $\int ٦ س^{-٣}\, وس = \frac{٦ س^{-٢}}{-٢} + جـ = \frac{-٣}{س^{٢}} + جـ$

٣) $\int ٢ \sqrt{س}\, وس$ = نتخلص من الجذر

$$\int ٢ س^{\frac{١}{٢}}\, وس = \frac{٢ \times ٢ س^{\frac{٣}{٢}}}{٣} + جـ = \frac{٤ \sqrt{س^{٣}}}{٣} + جـ$$

٤) $\int ٥\sqrt[٣]{س^{٢}}\,دس =$

٢) $\int \left(٣س^{-٥} + \sqrt[٥]{س} + ٧\right) دس$

الحل:

$$\int \left(٣س^{-٥} + س^{\frac{١}{٥}} + ٧\right) دس$$

$$= \frac{٣س^{-٤}}{-٤} + \frac{س^{\frac{٦}{٥}}}{\frac{٦}{٥}} + ٧س + جـ$$

$$= -\frac{١}{٢}س^{-٤} + \frac{٥}{٦}\sqrt[٥]{س^{٦}} + ٧س + جـ$$

٥) $\int \frac{٦}{س^{٧}}\,دس =$

٣) $\int \left(\frac{٣}{س^{٢}} + \sqrt[٣]{س}\right) دس$

الحل

٦) $\int \frac{٢}{\sqrt[٣]{س^{٥}}}\,دس =$

قاعدة (٥)

تكامل جمع وطرح أكثر من حد

$$\int \left(ن(س) \pm هـ(س)\right) دس = \int ن(س)\,دس \pm \int هـ(س)\,دس + جـ$$

نكامل كل حد لوحده

٤) $\int \left(\frac{١}{س^{٢}} + \sqrt{س}\right) دس$

الحل

مثال: أوجد التكاملات الآتية:

١) $\int (٥س^{٤} + ٢١س^{٣} - ١٥س^{٢} + ٧س - ٦)\,دس$

الحل سوف نكامل كل حد لوحده

$$\frac{٥س^{٥}}{٥} + \frac{٢١س^{٤}}{٤} - \frac{١٥س^{٣}}{٣} + \frac{٧س^{٢}}{٢} - ٦س + جـ$$

$$= س^{٥} + ٣س^{٤} - ٥س^{٣} + \frac{٧}{٢}س^{٢} - ٦س + جـ$$

٥) $\int \left(\frac{١}{س^{٣}} + \sqrt[٤]{س}\right) دس$

الحل

٦) $\int \left(\frac{٥}{س^{٦}} - \frac{٥}{س^{-٤}} \right)$ ء س

الحل

٧) $\int (٥س^{٤} - ٢)\sqrt[٣]{س + ١}$ ء س

الحل

قاعدة (٦)

تكامل المركب الخطي

$$\int (أس \pm ب)^{ن}$$ ء س $= \frac{(أس \pm ب)^{ن+١}}{أ \times (ن+١)} + ج$

مثال : أوجد التكاملات التالية ؟!

١) $\int (٢س + ٣)^{٢}$ ء س

الحل

$$= \frac{(٢س + ٣)^{٣}}{٣ \times ٢} + ج = \frac{(٢س + ٣)^{٣}}{٦} + ج$$

٢) $\int (٥س + ٤)^{-٥}$ ء س

الحل

$$= \frac{(٥س + ٤)^{-٤}}{-٤ \times ٥} + ج = \frac{-١}{٢٠(٥س + ٤)^{٤}} + ج$$

٣) $\int \sqrt{(١ - س)}$ ء س

الحل

سوف نتخلص من الجذر

$$\int (١ - س)^{\frac{١}{٢}}$$ ء س

$$= \frac{٢(١ - س)^{\frac{٣}{٢}}}{-٣ \times ١} + ج = \frac{-٢}{٣}\sqrt{(١ - س)^{٣}} + ج$$

٤) $\int \frac{٦}{(٢س + ٣)^{٧}}$ ء س

الحل

سوف نتخلص من المقام

$$\int ٦(٢س + ٣)^{-٧}$$ ء س

$$= \frac{٦(٢س + ٣)^{-٦}}{٢ \times -٦} + ج = \frac{-١}{٢(٢س + ٣)^{٦}} + ج$$

٥) $\int \frac{١}{\sqrt[٣]{(٥س + ٢)^{٧}}}$ ء س

الحل

سوف نتخلص من الجذر ثم المقام

$$\int \frac{١}{(٥س + ٢)^{\frac{٧}{٣}}}$$ ء س $= \int (٥س + ٢)^{\frac{-٧}{٣}}$ ء س

$$= \frac{-٣(٥س + ٢)^{\frac{-٤}{٣}}}{٥ \times ٤} + ج$$ نتلخص من القوة السالبة ثم الكسرية

$$= \frac{-٣}{٢٠(٥س + ٢)^{\frac{٤}{٣}}} + ج = \frac{-٣}{٢٠\sqrt[٣]{(٥س + ٢)^{٤}}} + ج$$

٦) $\int \frac{1}{(٥-٣س)^{-٣}}^{٥}$ د س

الحل

١٠) $\int (س^{٣}-٢)^{٢}$ د س

الحل

٧) $\int \frac{د س}{\sqrt[٣]{٢س+٥}}$

الحل

قاعدة (٧)

تكامل الاقتران المثلثية جا ، جتا ، قا^{٢}

الاقتران	تكامله
جا	ـ جتا
جتا	جا
قا^{٢}	ظا

طريقة تكامل الاقترانات المثلثية ذات الزاوية الخطية
نكامل المثلثي ← نفس الزاوية ← نقسم على معامل المتغير في الزاوية

٨) $\int (٤-٣س)^{٥}$ د س

الحل

مثال :أوجد التكاملات الآتية:

١) $\int جا(٢س+٣)$ د س $= \frac{-جتا(٢س+٣)}{٢} + ج$

٢) $\int جتا(٥س-٢)$ د س $= \frac{جا(٥س-٢)}{٥} + ج$

٣) $\int قا^{٢}(٧س+٣)$ د س $= \frac{ظا(٧س+٣)}{٧} + ج$

٤) $\int جاس$ د س $=$

٥) $\int جتاس$ د س $=$

٦) $\int قا^{٢}س$ د س $=$

٧) $\int جتا(٢س+٦)$ د س $=$

٨) $\int جا(٥-س)$ د س $=$

٩) $\int جا(٤-٣س)$ د س $=$

٩) $\int (س^{٢}+١)^{٢}$ د س

الحل

مثال :أوجد التكاملات الآتية:

١) $\int$ جتا$(\frac{س}{٣})$ د س $= ٣$ جا$(\frac{س}{٣})+$ جـ

٢) $\int$ قا$^{٢}(\frac{٢س}{٥})$ د س $= \frac{٥}{٢}$ ظا$(\frac{٢س}{٥})+$ جـ

٣) $\int(\frac{\text{جاس}}{٢})$ د س $= (\frac{-\text{جتاس}}{٢})+$ جـ

٤) $\int(-٣\text{جاس}+\text{قا}^{٢}\text{س})$ د س $= ٣\text{جتاس}+\text{ظاس}+$ جـ

٥) $\int(٢\text{جتاس}+\frac{\text{قا}^{٢}\text{س}}{٣})$ د س $=$

٦) $\int(٢\text{جا}٢\text{س}-٣\text{جتا}٣\text{س}+٤\text{قا}^{٢}٥\text{س})$ د س

٧) $\int(٤\text{قا}^{٢}\text{س}+٤\text{جاس})$ د س

٨) $\int(\text{جتا}٢\text{س}-٣\text{س}^{٢})$ د س

وزاري ٢٠١٢.... ٤ علامات

٩) $\int(\frac{\text{قا}^{٢}\text{س}}{٣}-٢\text{س}+١٢)$ د س

وزاري ٢٠٠٩ .... علامتان

١٠) $\int(١-\text{جتاس})$ د س

١١) $\int ٢\text{جا}(٢\text{س}-١)$ د س

الاقتران الأســـي الطـبـيـعي

قاعدة (١)

مشتقة الاقتران الأسي :

← م . القوة × نفس الاقتران

مثال :أوجد المشتقة الأولى لكل مما يلي:

١) ق$(\text{س})=\text{هـ}^{٣\text{س}}$

ق$'(\text{س})=٣\text{هـ}^{٣\text{س}}$

٢) ق $(\text{س})=\text{هـ}^{٢\text{س}^{٢}+١}$

ق$'(\text{س})=$

٣) ص $=\text{هـ}^{٣-\text{س}^{٢}}$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}=$

٤) ص $=\frac{\text{هـ}^{٣\text{س}}}{\text{س}^{٢}+١}$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}=\frac{(\text{س}^{٢}+١)\times(٣\text{هـ}^{٣\text{س}})-(\text{هـ}^{٣\text{س}})\times(٢\text{س})}{(\text{س}^{٢}+١)^{٢}}$

٥) ق$(\text{س})=\text{هـ}^{\text{جا}٣\text{س}^{٢}}$

ق$'(\text{س})=$

قاعدة (٢)

تكامل الاقتران الأسي ذات القوة الخطية :

$$\int \text{هـ}^{\text{أس}\pm\text{ب}}\ \text{د س}=\frac{\text{هـ}^{\text{أس}\pm\text{ب}}}{\text{أ}}+\text{جـ}$$

مثال :أوجد التكاملات التالية:

١) $\int هـ^{٢س}\ د س = \frac{هـ^{٢س}}{٢} + جـ$

٢) $\int هـ^{س}\ د س = هـ^{س} + جـ$

٣) $\int هـ^{-س}\ د س = \frac{هـ^{-س}}{-١} + جـ$

٤) $\int هـ^{٢س+٤}\ د س = \frac{هـ^{٢س+٤}}{٢} + جـ$

٥) $\int ١٢\ هـ^{٣س+٢}\ د س = \frac{١٢\ هـ^{٣س+٢}}{٣} + جـ = ٤ هـ^{٣س+٢} + جـ$

٦) $\int ٣هـ^{٩س-١}\ د س =$

٧) $\int هـ^{-٢س}\ د س =$

٨) $\int \sqrt{٥}هـ^{٥س}\ د س =$

٩) $\int (٣هـ^{س} - \sqrt{٢}هـ^{س})\ د س =$

١٠) $\int (٥س - ٢هـ^{٢س-٣})\ د س =$

١١) $\int (٣هـ^{-س} - قا^{٢}\ ٢س)\ د س$

١٢) $\int (هـ^{س} + قا^{٢}\ ٤س)\ د س$