الوحدة الرابعة

التكامل وتطبيقاته

ناجح الجمزاوي

٠٧٩٥٦٥٦٨٨١ ٠٧٨٨٦٥٦٠٥٧

الدرس الأول

معكوس المشتقة

تعريف:

اذا كان ق اقتراناً متصلاً على الفترة [أ، ب] فإن م(س) يسمى معكوساً لمشتقة الاقتران ق(س) اذا كان

م′(س) = ق(س) لكل س ∈ (أ، ب)

ويسمى معكوس المشتقة بالتكامل غير المحدود ويرمز له بالرمز

$\int$ ق(س) . دس ونقرأ

تكامل ق(س) دس

والصورة العامة لقاعدة معكوس المشتقة هي

م(س) + جـ حيث جـ عدد ثابت

وبالرموز فإن

م(س) = $\int$ ق(س) . دس أو

$\int$ ق(س) . دس = م(س) + جـ

مثال للتدريب

ماهو معكوس مشتقة الاقتران ق(س) = ٢س

الحل

س^{2} ، س^{2} + ١ ، س^{2} + ...

بشكل عام الجواب س^{2} + جـ

مثال ①

بين فيما اذا كان م(س) معكوس المشتقة ق(س) فيما يلي

١- م(س) = س^{3} + ٤س

ق(س) = ٣س^{2} + ٤

الحل

ق(س) متصل على مجاله كثير حدود

م′(س) = ٣س^{2} + ٤ = ق(س)

وبما ان م′(س) = ق(س)

فإن م(س) معكوس مشتقة ق(س)

٢- م(س) = $\sqrt{\text{س}^{2} + 6\text{س}}$

ق(س) = $\dfrac{\text{س} + 3}{\sqrt{\text{س}^{2} + 6\text{س}}}$

يتبع ←

الحل

ق(س) متصل على مجاله

م$'$(س) = (٢س + ٦) / (٢ √(س^2 + ٦س))

= ٢(س + ٣) / (٢ √(س^2 + ٦س)) = (س + ٣) / √(س^2 + ٦س)

= ق(س)

وبما أن م$'$(س) = ق(س)

فإن م(س) معكوس مشتقة ق(س)

٣- م(س) = جا^3 ٢س + س^2 − ١

ق(س) = ٣ جا^2 ٢س × جتا٢س + ٢س

الحل

ق(س) متصل على مجاله

م$'$(س) = ٣ جا^2 ٢س × جتا٢س × ٢ + ٢س

= ٦ جا^2 ٢س جتا٢س + ٢س

≠ ق(س)

← م(س) ليس معكوس مشتقة الاقتران ق(س)

مثال ②

جد معكوس مشتقة الاقتران

ق(س) = ٣س^2 + جاس − ٤س + ٧

الحل

م(س) = س^3 − جتاس − ٢س^2 + ٧س + جـ

ملاحظة هامة

نلاحظ من الأمثلة السابقة

١) أن هناك عدد غير نهائي من معكوس المشتقة للاقتران ق(س)

٢) الفرق بين أي معكوس مشتقة لنفس الاقتران يساوي دائماً مقداراً ثابتاً

مثلاً

ق(س) = ٢س

م$_1$(س) = س^2 + ٥

م$_2$(س) = س^2 + ٩ فلاحظ أن

م$_2$(س) − م$_1$(س) = ~~س^2~~ + ٩ − ~~س^2~~ − ٥

= ٤

الفرق بينهما ثابت

مثال ③

اذا كان م$_1$، م$_2$ معكوسين لمشتقة الاقتران ق(س) المتصل على ح

وكان هـ(س) = م$_1$(س) − م$_2$(س)

فاوجد هـ$'$(س)

← يتبع

الحل

هـ(س) = ثابت لأن الفرق بين أي معكوسين يساوي ثابت

هـ(س) = جـ ⟸ هـ'(س) = صفر

مثال ٤

اذا كان م(س) معكوس مشتقة ق(س) المتصل على مجاله حيث م(س) = س^3 + أ س^2 − ١ وكان ق(٢) = ٢٤ فأوجد أ ؟

أ) ٢٤ ب) −٣ جـ) ٣ د) ١

الحل

م'(س) = ق(س) = ٣س^2 + ٢أ س

ق(٢) = ٢٤ = ٣(٢)^2 + ٢أ × ٢

← ١٢ + ٤أ = ٢٤

٤أ = ١٢ ⟸ أ = ٣

الجواب جـ

مثال ٥

اذا كان م(س) معكوس مشتقة ق(س) المتصل على مجاله حيث م(س) = س^2 + أ س^3 − ٢

وكان ق'(٢) = ٥ ، جد الثابت أ

أ) ٥ ب) ٣ جـ) ٤ د) $\frac{1}{4}$

الحل

م'(س) = ق(س)

ق(س) = ٢س + ٣أ س^2

ق'(س) = ٢ + ٦أ س

ق'(٢) = ٢ + ٦أ × ٢ = ٥

← ١٢أ = ٣ ⟸ أ = $\frac{1}{4}$

د

مثال ٦

اذا كان ∫ق(س) . دس = س^4 + ٥س + ٣

وكان م(١) = ٧ ، أوجد م'(٢)

أ) ٥ ب) ٣٥ جـ) ٣٧ د) ٢٧

الحل

م(س) + جـ = س^4 + ٥س + ٣

م(س) = س^4 + ٥س + ٣ − جـ

م(١) = ١^4 + ٥ × ١ + ٣ − جـ = ٧

٩ − جـ = ٧ ⟸ جـ = ٢

م(س) = س^4 + ٥س + ١

م'(س) = ٤س^3 + ٥

م'(٢) = ٤(٢)^3 + ٥ = ٣٧ جـ

مثال ٧

اذا كان ∫ق'(س) دس

= ٣س^2 − ٤س + ٥

وكان ق(٢) = ٧ جد قيمة ق(١)

أ) ٢ ب) −٢ جـ) ١٠ د) ٧

الحل

∫ق'(س) . دس = ق(س) + جـ

∴ ق(س) = ٣س^2 − ٤س + ٥ + جـ

ق(٢) = ٧ ⟸ ١٢ − ٨ + ٥ + جـ = ٧

← جـ = −٢ ⟸ ق(س) = ٣س^2 − ٤س + ٣

ق(١) = ٣(١)^2 − ٤ × ١ + ٣ = ٢ أ

ملاحظة هامة

① ∫ ق′(س) . دس = ق(س) + جـ

② $\frac{د}{دس}$ ∫ ق(س) . دس = ق(س)

مثال ⑧

اذا كان ∫ ق(س) . دس = س^{٤} + س + ٤

اوجد ق(١) ، ق′(١) ؟

الحل

نشتق الطرفين

ق(س) = ٤س^{٣} + ١

ق(١) = ٤(١)^{٣} + ١ = ٥

ق′(س) = ١٢س^{٢}

ق′(١) = ١٢(١)^{٢} = ١٢

مثال ⑨

اذا كان

∫ (ق′(س) + ٢س) . دس = س^{٣} + ن س^{٢} + ١

وكان ق′(١) = ٥ ، ق(٢) = ٧

اوجد ن ، ق(٠) ، ق′(٤)

الحل

ق(س) + س^{٢} = س^{٣} + ن س^{٢} + ١ + جـ

ق(٢) + ٢^{٢} = ٢^{٣} + ن(٢)^{٢} + ١ + جـ

٧ + ٤ = ٨ + ٤ن + ١ + جـ

٤ن + جـ = ١١ − ٩ = ٢

٤ن + جـ = ٢ --- ①

ق′(س) + ٢س = ٣س^{٢} + ٢ن س

ق′(١) + ٢×١ = ٣(١)^{٢} + ٢ن×١

٥ + ٢ = ٣ + ٢ن

٢ن = ٤ ⟵ ن = ٢

بالتعويض ⟵ جـ = −٦

ق(٠) + (٠)^{٢} = (٠)^{٣} + ن(٠)^{٢} + ١ − ٦

ق(٠) = −٥

ق′(٤) + ٢(٤) = ٣(٤)^{٢} + ٢×٢×٤

ق′(٤) = ٥٦

مثال ⑩

اذا كان ق كثير حدود من الدرجة الثالثة بحيث ان ق′(س) = ٣س^{٢} − ٢ وكانت النقطة (٠ ، ١) تقع على منحناه فجد قاعدة الاقتران ق

الحل

بأخذ تكامل الطرفين

ق(س) = س^{٣} − ٢س + جـ

لكن ق(٠) = ١

⟵ جـ = ١

ق(س) = س^{٣} − ٢س + ١

مثال (١١)

اذا كان ق(س) = أس + ب وكان م(س) معكوس مشتقة ق(س) حيث م′(٢) = ٧ ، م″(٢) = ٢ جد قيمة الثابتين أ ، ب ؟

الحل

م′(س) = ق(س)

م′(٢) = ق(٢) = ٧ بالتعويض

٢أ + ب = ٧ ---- (١)

م″(س) = ق′(س)

م″(٢) = ق′(٢)

م″(س) = أ ⟸ م″(٢) = أ

← أ = ٢ بالتعويض في (١)

٢ × ٢ + ب = ٧ ⟸ ب = ٣

مثال (١٢)

اذا كان $\text{ق(س)} = \int \frac{1}{\text{س}+4}\,\text{دس}$

جد ق″(٢) ؟

الحل

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{1}{\text{س}+4}$$

$$\text{ق}''(\text{س}) = \frac{-1\times 1}{(\text{س}+4)^2}$$

$$\text{ق}''(2) = \frac{-1}{(2+4)^2} = \frac{-1}{36}$$

تدريبات الكتاب

تدريب ① ص ٢٣

بين ان الاقتران $م(س) = س^٤ - جاس + \frac{١}{٣}$ هو معكوس لمشتقة الاقتران $ق(س) = ٤س^٣ - جتاس$

الحل

ق(س) اقتران متصل

$م'(س) = ٤س^٣ - جتاس$

$م'(س) = ق(س)$

∴ م(س) معكوس لمشتقة ق(س)

تدريب ② ص ٢٤

اذا كان الاقترانان م(س)، هـ(س) معكوسين لمشتقة الاقتران المتصل ق(س)، وكان $ل(س) = ٣م(س) - ٥هـ(س)$ فجد $ل'(س)$ بدلالة ق(س)

الحل

$ل'(س) = ٣م'(س) - ٥هـ'(س)$

لكن $م'(س) = ق(س)$

$هـ'(س) = ق(س)$

$\Leftarrow$

$ل'(س) = ٣ق(س) - ٥ق(س)$

$= -٢ق(س)$

تدريب ③ ص ٢٦

اذا كان ق اقتراناً متصلاً على مجاله وكان $\int ق(س)\, جا\frac{٣\pi}{٢}\, دس = ١ + س^٣$

جد ق(س)

الحل

باشتقاق الطرفين

$ق(س) \times -١ = ٣س^٢$

$-ق(س) = ٣س^٢$

$ق(س) = -٣س^٢$

تدريب ④ ص ٢٦

اذا كان $\int ق'(س) . دس = جا^٢س - أ جتاس ٢٠٣٥$

$ق'(\frac{\pi}{٤}) =$ صفر جد قيمة أ

الحل

باشتقاق الطرفين

$ق'(س) = ٢جاس جتاس + أ جاس$

$ق'(\frac{\pi}{٤}) = ٢ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} + أ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = ٠$

$٢ \times \frac{١}{٢} + \frac{أ}{\sqrt{٢}} = ٠$

$١ + \frac{أ}{\sqrt{٢}} = ٠ \Leftarrow أ = -\sqrt{٢}$

تمارين ومسائل

ص ٢٢٦

١) بين أن الاقتران م(س) = $\frac{س}{س+١}$ هو معكوس لمشتقة الاقتران ق(س) = $(س+١)^{-٢}$ ، س ≠ −١

الحل

$$م'(س) = \frac{(س+١)\times ١ - س \times ١}{(س+١)^{٢}}$$

$$= \frac{س+١-س}{(س+١)^{٢}} = \frac{١}{(س+١)^{٢}}$$

$$= (س+١)^{-٢} = ق(س)$$

٢) بين ان الاقتران م(س) = $جا^{٢}س$ هو معكوس لمشتقة ق(س) = جا٢س

الحل

$$م'(س) = ٢ جاس جتاس = جا٢س = ق(س)$$

٣) اذا كان م(س) = $س^{٣} + ٥س^{٢} - ٣س + جـ$ معكوساً لمشتقة ق ، جد ق(−٢)

الحل

$$م'(س) = ق(س) = ٣س^{٢} + ١٠س - ٣$$

$$ق(-٢) = ٣(-٢)^{٢} + ١٠\times(-٢) - ٣$$

$$= ١٢ - ٢٠ - ٣ = -١١$$

٤) اذا كان م(س) = $٢س^{٤} + \sqrt{س^{٢}+٣}$ معكوساً لمشتقة ق ، جد ق(١)

الحل

$$م'(س) = ٨س^{٣} + \frac{٢س}{٢\sqrt{س^{٢}+٣}} = ق(س)$$

$$ق(١) = ٨ + \frac{١}{\sqrt{٤}} = ٨ + \frac{١}{٢}$$

$$= \frac{١٧}{٢}$$

٥) اذا كان ق(س) = $٣س^{٢}$ ، جد م(س) معكوساً لمشتقة ق علماً بأن م(٢) = ٥

$$م(س) = س^{٣} + جـ$$

$$م(٢) = ٨ + جـ = ٥$$

$$جـ = -٣$$

$$م(س) = س^{٣} - ٣$$

٦) اذا كان الاقترانان $م_١(س)$ ، $م_٢(س)$ معكوسين لمشتقة الاقتران ق وكان $م_١(س) = ٣س^{٢} - ٢س + ٥$ ، $م_٢(٢) = ٤$ جد قاعدة $م_٢(س)$

الحل

$$م_٢(س) = ٣س^{٢} - ٢س + جـ$$

لأن الفرق بين اي معكوسين = ثابت

يتبع

$م(٢) = ٤$

$٣(٢)^٢ - ٢ \times ٢ + جـ = ٤$

$١٢ - ٤ + جـ = ٤$

$٨ + جـ = ٤$

$\boxed{جـ = -٤}$

$م(س) = ٣س^٢ - ٢س - ٤$

٧) اذا كان

$ص = \int \sqrt[٥]{٣س^٢ - ٤س + ١٢}\, دس$

جد $\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س = -٢}$

الحل

$\frac{دص}{دس} = \sqrt[٥]{٣س^٢ - ٤س + ١٢}$

$\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س = -٢} = \sqrt[٥]{٣(-٢)^٢ - ٤ \times -٢ + ١٢}$

$= \sqrt[٥]{١٢ + ٨ + ١٢} = \sqrt[٥]{٣٢} = ٢$

٨) اذا كان

$\int ق(س)\, دس = س^٣ - س^٢ + ٢س + ١$

جد $ق'(-٣)$.

باشتقاق الطرفين

$ق(س) = ٣س^٢ - ٢س + ٢$

واشتقاق مرة أخرى

$ق'(س) = ٦س - ٢$

$ق'(-٣) = ٦ \times -٣ - ٢ = -٢٠$

٩) اذا كان

$\int ق(س)\, دس = جاس - جتاس + ٣$

فاثبت ان

$ق(\frac{\pi}{٢}) - ق'(\frac{\pi}{٢}) = ٢$

الحل

بالاشتقاق

$ق(س) = جتاس + جاس$

$ق(\frac{\pi}{٢}) = جتا\frac{\pi}{٢} + جا\frac{\pi}{٢} = ٠ + ١ = ١$

نشتقه

$ق'(س) = -جاس + جتاس$

$ق'(\frac{\pi}{٢}) = -جا\frac{\pi}{٢} + جتا\frac{\pi}{٢} = -١ + ٠ = -١$

$ق(\frac{\pi}{٢}) - ق'(\frac{\pi}{٢}) = ١ - (-١) = ٢$

١٠) جد معكوساً لمشتقة كل من الاقترانات الآتية.

أ) $ق(س) = \frac{-١}{س^٢}$

$م(س) = \frac{١}{س} + جـ$

ب) $ق(س) = قاس\, جتاس$

$= \frac{١}{جتاس} \times \cancel{جتاس} = ١$

$م(س) = س + جـ$

يتبع ←

ج) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{1}{2\sqrt{\text{س}}}$

$\text{م}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}} + \text{ج}$

د) $\text{ق}(\text{س}) = 5 + 5\,\text{ظا}^2\text{س}$

$= 5(1 + \text{ظا}^2\text{س})$

$= 5\,\text{قا}^2\text{س}$

$\text{م}(\text{س}) = 5\,\text{ظاس} + \text{ج}$

١١) اذا كانت م(س) معكوساً لمشتقة الاقتران ق حيث $\text{ق}(\text{س}) = \text{ظتاس} + 1$ جد $\text{م}''\left(\frac{\pi}{4}\right)$

الحل

$\text{م}'(\text{س}) = \text{ق}(\text{س})$

$= \text{ظتاس} + 1$

$\text{م}''(\text{س}) = -\text{قتا}^2\text{س}$

$\text{م}''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\text{قتا}^2\frac{\pi}{4}$

$= -\frac{1}{\text{جا}^2\frac{\pi}{4}}$

$= -\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = -2$

اسئلة الوزارة

وزارة (٢٠٠٨) شتوية

اذا كان ق اقتراناً متصلاً على مجاله وكان ∫ ق(س) دس = جتا²س − ٢س + جـ فان ق′($\frac{\pi}{2}$) =

أ) ٢ ب) صفر جـ) −٢ د) ٣ − π

الحل

ق(س) = ٢ جتاس × −جاس − ٢

= −٢جاس جتاس − ٢

= − جا٢س − ٢

ق′(س) = −٢ جتا٢س

ق′($\frac{\pi}{2}$) = −٢ × −١ = +٢

الجواب أ

وزارة (٢٠٠٨) صيفية

اذا كان ق اقتراناً متصلاً على ح وكان ∫ ق(س) دس = س² − جتاس + جـ فان ق′(٠) =

أ) ٣ ب) ٢ جـ) ١ د) صفر

الحل

ق(س) = ٢س + جاس

ق′(س) = ٢ + جتاس

ق′(٠) = ٢ + جتا٠

= ٢ + ١ = ٣

وزارة (٢٠٠٩) شتوية

اذا كان ق اقتراناً متصلاً على مجاله وكان ∫ (ظا²س − قا²س) ق(س) دس = ٣ − س² فان ق(س) =

أ) −٢س ب) ٣ − س² جـ) ٢س د) س³ − ٣

الحل

باشتقاق الطرفين

(ظا²س − قا²س) ق(س) = −٢س

لكن ١ + ظا²س = قا²س

⇐ ظا²س − قا²س = −١

⇐ −١ × ق(س) = −٢س

⇐ ق(س) = ٢س جـ

وزارة (٢٠١٠) شتوية

اذا كان ق اقتراناً متصلاً على مجاله وكان ∫ جا($\frac{3\pi}{2}$) ق(س) دس = ١ + س² فان ق(س) =

أ) ٢س ب) ١ + س² جـ) −٢س د) ١ − س²

الحل

باشتقاق الطرفين

جا($\frac{3\pi}{2}$) ق(س) = ٢س

−١ × ق(س) = ٢س

ق(س) = −٢س جـ

وزارة (٢٠١٠) صيفية

اذا كان ل ، ق ، هـ ثلاث اقترانات متصلة بحيث ل′(س) = ق(س) ، ق′(س) = هـ(س) فاي العبارات التالية صحيحة .

أ) ∫ ل″(س) دس = هـ(س) + جـ

ب) ∫ هـ(س) دس = ل′(س) + جـ

جـ) ∫ ل(س) دس = ق(س) + جـ

د) ل(س) − هـ(س) = جـ

الحل

ل″(س) = ق′(س) = هـ(س)

∫ ل″(س) دس = ∫ هـ(س)

ل′(س) + جـ = ∫ هـ(س) دس

(ب)

وزارة (٢٠١١) شتوية

اذا كان م(س) ، هـ(س) معكوسان لمشتقة الاقتران ق فان (٢م − هـ)′(س) =

أ) ق(س) ب) ق′(س) جـ) صفر د) ٢

الحل

٢م′(س) − هـ′(س)

= ٢ق(س) − ق(س)

= ق(س)

(أ)

وزارة (٢٠١٢) شتوية

اذا كان ق اقتراناً متصلاً على ح وكان ∫ (ق(س) + ٢) دس = س³ + أس² + ٩ ، ق(١) = ٧ فان قيمة الثابت أ تساوي

أ) −١ ب) ٢ جـ) ٦ د) ٣

الحل

اشتقاق الطرفين

ق(س) + ٢ = ٣س² + ٢أس

ق(١) + ٢ = ٣ + ٢أ

٧ + ٢ = ٣ + ٢أ

٩ = ٣ + ٢أ ⇐ ٢أ = ٦ أ = ٣

(د)

وزارة (٢٠١٢) صيفية

اذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً ، م(س) معكوس مشتقة ق(س) وكان أ ، جـ ثابتين أ ≠ ٠ فان ∫ ق(أس) دس

أ) م(أس) + جـ ب) $\frac{1}{أ}$ م(أس) + جـ

جـ) م(س) + جـ د) $\frac{1}{أ}$ م(س) + جـ

(ب) $\frac{1}{أ}$ م(أس) + جـ

ص = أس $\frac{دص}{دس}$ = أ

$\frac{1}{أ}$ ∫ ق(ص) دص = $\frac{1}{أ}$ م(ص) + جـ

وزارة (٢٠١٣) شتوية

اذا كان م(س) معكوس مشتقة ق(س) بحيث م(س) = ظتاس + ١ فان ق($\frac{\pi}{٤}$) =

أ) -٤ ب) -٢ ج) ٣ د) ٤

الحل

م′(س) = - قتا²س = ق(س)

ق($\frac{\pi}{٤}$) = - قتا² $\frac{\pi}{٤}$ = -٢

وزارة (٢٠١٣) صيفية

اذا كان ∫ ق(س) دس = س² + ٤س - ٤ فان ق′(٢) تساوي

أ) ٢ ب) ٤ ج) ٨ د) $\frac{٥٦}{٣}$

الحل

اشتقاق

ق(س) = ٢س + ٤

ق′(س) = ٢

ق′(٢) = ٢

(أ)

وزارة (٢٠١٦) صيفية

اذا كان

∫ ٢ ق′(س) دس = ٢س + جاس - ∫ جتاس ق′(س) دس

جد ق′(٠)

الحل

باشتقاق الطرفين

٢ق′(س) = ٢ + جتاس - جتاس ق′(س)

٢ق′(٠) = ٢ + جتا٠ - جتا(٠) ق′(س)

٢ق′(٠) = ٢ + ١ - ق′(س)

٣ق′(٠) = ٣

ق′(٠) = ١

وزارة ٢٠١٧ شتوية

اذا كان

س ق(س) - ∫ ٣س ق(س) دس = ∫ ق′(س) دس

وكان ق(٢) = ٤ جد ق′(٢)

الحل باشتقاق الطرفين

س ق′(س) + ق(س) × ١ - ٣س ق(س) = ق′(س)

٢ق′(٢) + ق(٢) - ٦ ق(٢) = ق′(٢)

٢ق′(٢) + ٤ - ٦ × ٤ = ق′(٢)

٢ق′(٢) - ٢٠ = ق′(٢)

ق′(٢) = ٢٠

وزارة (٢٠١٨) شتوية

اذا كان

$\int (ق(س) - ١)\, دس = س \, جا\left(\frac{\pi}{٢} س\right)$

فان ق(٢) تساوي

أ) $١ - \pi$ ب) $١ + \pi$ ج) $-\pi$ د) ٢

الحل

باشتقاق الطرفين

$ق(س) - ١ = س \times جتا\left(\frac{\pi}{٢} س\right) \times \frac{\pi}{٢}$

$+ جا\left(\frac{\pi}{٢} س\right) \times ١$

$ق(٢) - ١ = ٢ \, جتا \pi \times \frac{\pi}{٢} + جا\left(\frac{\pi}{٢} \times ٢\right)$

$ق(٢) - ١ = ٢ \times -١ \times \frac{\pi}{٢} + ٠$

$ق(٢) - ١ = -\pi$

$ق(٢) = ١ - \pi$

الجواب (أ)

الدرس الثاني

التكامل غير المحدود

التكامل هو عملية عكسية للتفاضل

$\int ٢س \cdot ءس = س^{٢} + جـ$

لأن مشتقة $(س^{٢} + جـ)$ تساوي $٢س$

$\int ٣س^{٢} \cdot ءس = س^{٣} + جـ$

لأن مشتقة $(س^{٣} + جـ) = ٣س^{٢}$

$\int جاس \cdot ءس = -جتاس + جـ$

لأن مشتقة $(-جتاس + جـ) = جاس$

الجزء الأول

قواعد التكامل غير المحدود

قاعدة ١

$\int أ \cdot ءس = أس + جـ$

حيث أ ثابت

$\int ثابت = ثابت \times متغير + جـ$

أمثلة

١. $\int ٧ \, ءس = ٧س + جـ$

٢. $\int \frac{١}{٤} \cdot ءس = \frac{١}{٤}س + جـ$

٣. $\int \pi^{٢} \cdot ءس = \pi^{٢}س + جـ$

٤. $\int ءن = ن + جـ$

قاعدة ٢

$$\int س^{ن} \cdot ءس = \frac{س^{ن+١}}{ن+١} + جـ$$

حيث $ن \in ح$ ، $ن \neq -١$

أمثلة

$\int س^{٣} \cdot ءس = \frac{س^{٤}}{٤} + جـ$

$\int س \cdot ءس = \frac{س^{٢}}{٢} + جـ$

$\int س^{-٥} \, ءس = \frac{س^{-٤}}{-٤} + جـ$

$\int س^{\frac{٤}{٣}} \, ءس = \frac{٣}{٧} س^{\frac{٧}{٣}} + جـ$

$\int س^{\frac{-٣}{٢}} \, ءس = \frac{-٢}{١} س^{\frac{-١}{٢}} + جـ$

ملاحظة

تذكر ان $\frac{1}{س^{ن}} = س^{-ن}$

$\sqrt[ن]{س^{م}} = س^{\frac{م}{ن}}$

أمثلة

1) $\int \frac{1}{س^{-5}} = \int س^{5}\, ءس = \frac{س^{6}}{6} + جـ$

2) $\int \frac{1}{س^{7}}\, ءس = \int س^{-7}\, ءس = \frac{س^{-6}}{-6} + جـ$

3) $\int \sqrt[3]{س^{4}}\, ءس = \int س^{\frac{4}{3}}\, ءس$

$= \frac{3}{7} س^{\frac{7}{3}} + جـ$

4) $\int \sqrt{س}\, ءس = \int س^{\frac{1}{2}}\, ءس = \frac{2}{3} س^{\frac{3}{2}} + جـ$

5) $\int \frac{1}{\sqrt{س}}\, ءس = \int س^{-\frac{1}{2}}\, ءس = 2 س^{\frac{1}{2}} + جـ$

6) $\int \frac{1}{\sqrt[5]{س^{3}}}\, ءس = \int \frac{1}{س^{\frac{3}{5}}}$

$= \int س^{-\frac{3}{5}}\, ءس = \frac{5}{2} س^{\frac{2}{5}} + جـ$

7) $\int س \sqrt{س}\, ءس = \int س \times س^{\frac{1}{2}}\, ءس$

$= \int س^{\frac{3}{2}}\, ءس = \frac{2}{5} س^{\frac{5}{2}} + جـ$

8) $\int \frac{س^{3}\sqrt{س}}{س}\, ءس = \int س^{2}\sqrt{س}\, ءس$

$= \int س^{2} س^{\frac{1}{2}}\, ءس = \int س^{\frac{5}{2}}\, ءس$

$= \frac{2}{7} س^{\frac{7}{2}} + جـ$

بشكل عام

$\int س^{\frac{م}{ن}}\, ءس = \frac{ن}{م+ن} س^{\frac{م+ن}{ن}} + جـ$

تذكر أن

في الأمثلة السابقة يمكن ان يكون المطلوب جد معكوس مشتقة الاقتران هـ(س)

م(س) نجري التكامل

نتائج هامة

1. $\int ق''(س)\, ءس = ق'(س) + جـ$
2. $\int ق'(س)\, ءس = ق(س) + جـ$
3. $\int ق(س)\, ءس = م(س) + جـ$

قاعدة ٣

$$\int \text{أ}\,\text{ق}(\text{س})\cdot\text{دس} = \text{أ}\int \text{ق}(\text{س})\cdot\text{دس}$$

أي أن تكامل ثابت × اقتران = يبقى الثابت × تكامل الاقتران

أمثلة

١. $\int ٣\text{س}^{٤}\cdot\text{دس} = \frac{٣}{٥}\text{س}^{٥} + \text{جـ}$

٢. $\int \frac{-٥}{٣}\text{س}^{٤}\cdot\text{دس} = \frac{-٥}{٣} \times \frac{\text{س}^{٥}}{٥} + \text{جـ}$

٣. $\int ٤\sqrt[٥]{\text{س}^{٢}} = ٤\int \text{س}^{\frac{٢}{٥}}\cdot\text{دس}$

$= ٤ \times \frac{٥}{٧}\text{س}^{\frac{٧}{٥}} + \text{جـ}$

$= \frac{٢٠}{٧}\text{س}^{\frac{٧}{٥}} + \text{جـ}$

٤. $\int \frac{٣}{\text{س}^{٨}}\cdot\text{دس} = \int ٣\text{س}^{-٨}\,\text{دس}$

$= \frac{-٣}{٧}\text{س}^{-٧} + \text{جـ}$

قاعدة ٤

$$\int (\text{ق}(\text{س}) \mp \text{هـ}(\text{س}))\cdot\text{دس} = \int \text{ق}(\text{س})\cdot\text{دس} \mp \int \text{هـ}(\text{س})\cdot\text{دس}$$

يوزع التكامل على الجمع والطرح ولا يوزع على الضرب والقسمة

أمثلة

١. $\int (٤\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٥)\,\text{دس}$

$= ٤\frac{\text{س}^{٣}}{٣} + \frac{٢\text{س}^{٢}}{٢} + ٥\text{س} + \text{جـ}$

٢. $\int (\sqrt[٣]{\text{س}} + \sqrt{\text{س}})\cdot\text{دس}$

$= \int (\text{س}^{\frac{١}{٣}} + \text{س}^{\frac{١}{٢}})\cdot\text{دس} = \frac{٣}{٤}\text{س}^{\frac{٤}{٣}} + \frac{٢}{٣}\text{س}^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}$

٣. $\int (\text{س}^{٦} + \frac{١}{\text{س}^{٣}} - \sqrt[٥]{\text{س}^{٢}})\cdot\text{دس}$

$= \int (\text{س}^{٦} + \text{س}^{-٣} - \text{س}^{\frac{٢}{٥}})\,\text{دس}$

$= \frac{\text{س}^{٧}}{٧} + \frac{\text{س}^{-٢}}{-٢} - \frac{٥}{٧}\text{س}^{\frac{٧}{٥}} + \text{جـ}$

٤. $\int (\text{س}^{٢} + ٢\text{س})^{٢}\cdot\text{دس}$ فك القوس

$= \int (\text{س}^{٤} + ٤\text{س}^{٣} + ٤\text{س}^{٢})\,\text{دس}$

$= \frac{\text{س}^{٥}}{٥} + \frac{٤\text{س}^{٤}}{٤} + \frac{٤\text{س}^{٣}}{٣} + \text{جـ}$

(٥) $\int \text{س}^3(\text{س}+3)\,\text{دس}$

$= \int (\text{س}^4 + 3\text{س}^3)\,\text{دس}$

$= \frac{\text{س}^5}{5} + \frac{3\text{س}^4}{4} + \text{جـ}$

(٦) $\int \frac{\text{س}^2+4\text{س}+3}{\text{س}+1}\,\text{دس}$

$= \int \frac{(\text{س}+3)\cancel{(\text{س}+1)}}{\cancel{\text{س}+1}}\,\text{دس}$

$= \int (\text{س}+3)\,\text{دس} = \frac{\text{س}^2}{2} + 3\text{س} + \text{جـ}$

(٧) $\int \frac{\text{س}^3+5\text{س}^2-4}{\text{س}^2}\,\text{دس}$

$= \int \left(\frac{\text{س}^3}{\text{س}^2} + \frac{5\cancel{\text{س}^2}}{\cancel{\text{س}^2}} - \frac{4}{\text{س}^2}\right)\text{دس}$

$= \int (\text{س} + 5 - 4\text{س}^{-2})\,\text{دس}$

$= \frac{\text{س}^2}{2} + 5\text{س} - \frac{4\text{س}^{-1}}{-1} + \text{جـ}$

(٨) $\int \frac{\text{س}-1}{\sqrt[3]{\text{س}}}\,\text{دس} = \int \frac{\text{س}-1}{\text{س}^{\frac{1}{3}}}\,\text{دس}$

$= \int \frac{\text{س}}{\text{س}^{\frac{1}{3}}} - \int \frac{1}{\text{س}^{\frac{1}{3}}}\,\text{دس}$

$= \int \text{س}^{\frac{2}{3}} - \int \text{س}^{-\frac{1}{3}}$

$= \frac{3}{5}\text{س}^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{2}\text{س}^{\frac{2}{3}} + \text{جـ}$

(٩) $\int \text{س}^5 \left(\frac{2\text{س}+1}{\text{س}}\right)^5 \text{دس}$

$= \int \cancel{\text{س}^5}\, \frac{(2\text{س}+1)^5}{\cancel{\text{س}^5}}\,\text{دس}$

$= \int (2\text{س}+1)^5\,\text{دس}$

$= \frac{(2\text{س}+1)^6}{2 \times 6} + \text{جـ}$

ملاحظة هامة

$\int (\text{أس}+\text{ب})^{\text{ن}}\,\text{دس} = \frac{(\text{أس}+\text{ب})^{\text{ن}+1}}{\text{أ}(\text{ن}+1)} + \text{جـ}$

مثال

(١) $\int (4\text{س}+7)^7\,\text{دس}$

$= \frac{(4\text{س}+7)^8}{4 \times 8} + \text{جـ}$

(٢) $\int (-3\text{س}+6)^{-5}\,\text{دس}$

$= \frac{(-3\text{س}+6)^{-4}}{-3 \times -4} + \text{جـ}$

(١٠) $\int س^{6}\left(1-\frac{2}{س}\right)^{6} دس$

الحل

$\int س^{6}\left(\frac{س-2}{س}\right)^{6} دس$

$= \int \cancel{س^{6}} \times \frac{(س-2)^{6}}{\cancel{س^{6}}} دس$

$= \frac{(س-2)^{7}}{7} + ج$

(١١) $\int \frac{س^{\frac{3}{2}}-27}{\sqrt{س}-3} دس$

الحل

$\int \frac{\cancel{(س^{\frac{1}{2}}-3)}\left((س^{\frac{1}{2}})^{2}+3س^{\frac{1}{2}}+9\right)}{\cancel{\sqrt{س}-3}}$

$= \int (س + 3س^{\frac{1}{2}} + 9)$

$= \frac{س^{2}}{2} + 3 \times \frac{2}{3} س^{\frac{3}{2}} + 9س + ج$

(١٢) $\int \sqrt[3]{2س^{3}+18س^{2}+54س+54}\ دس$

الحل

$\int \sqrt[3]{2(س^{3}+9س^{2}+27س+27)}$

$\int \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{س^{3}+9س^{2}+27س+27}$

$= \int \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{(س+3)^{3}}\ دس$

$= \int \sqrt[3]{2}\,(س+3)\ دس$

$= \sqrt[3]{2}\left(\frac{س^{2}}{2}+3س\right) + ج$

(١٣) $\int \frac{4}{\sqrt[3]{6س+5}} دس$

الحل:

$= \int 4\,(6س+5)^{-\frac{1}{3}} دس$

$= \frac{3}{2} \times 4 \frac{(6س+5)^{\frac{2}{3}}}{6} + ج$

$= 6\frac{(6س+5)^{\frac{2}{3}}}{\cancel{6}} + ج$

$= (6س+5)^{\frac{2}{3}} + ج$

(١٤) $\int (س-7)(7-س)^{8} دس$

الحل

$= -\int (س-7)(س-7)^{8} دس$

$\int (س-7)^{9} دس$

$= -\frac{(س-7)^{10}}{10} + ج$

(١٥) $\int \frac{\text{٧س}}{\sqrt{\text{٨س}+1} + \sqrt{\text{٩س}+1}} \, \text{دس}$

الحل

$\int \frac{\text{٧س}}{\sqrt{\text{٨س}+1} + \sqrt{\text{٩س}+1}} \times \frac{\sqrt{\text{٨س}+1} - \sqrt{\text{٩س}+1}}{\sqrt{\text{٨س}+1} - \sqrt{\text{٩س}+1}}$

$= \int \frac{\text{٧س}\left(\sqrt{\text{٨س}+1} - \sqrt{\text{٩س}+1}\right)}{\cancel{1}+\text{٨س} - \text{٩س} - \cancel{1}}$

$= \int \frac{\text{٧}\cancel{\text{س}}\left(\sqrt{\text{٨س}+1} - \sqrt{\text{٩س}+1}\right)}{-\cancel{\text{س}}}$

$= -7 \int (\text{٨س}+1)^{\frac{1}{2}} - (\text{٩س}+1)^{\frac{1}{2}}$

$= -7\left(\frac{(\text{٨س}+1)^{\frac{3}{2}}}{8} \cdot \frac{2}{3} - \frac{(\text{٩س}+1)^{\frac{3}{2}}}{9} \cdot \frac{2}{3} \right)$

(١٦) $\int \text{س} \sqrt[5]{\frac{2}{\text{س}^5} - \frac{3}{\text{س}^4}}$

الحل

$= \int \text{س} \sqrt[5]{\frac{2 - \text{٣س}}{\text{س}^5}}$ توحيد مقام

$= \int \frac{\cancel{\text{س}}}{\cancel{\text{س}}} \sqrt[5]{2 - \text{٣س}}$

$= \int (2 - \text{٣س})^{\frac{1}{5}}$

$= \frac{5}{6} \frac{(2 - \text{٣س})^{\frac{6}{5}}}{-3}$

$= -\frac{5}{18} (2 - \text{٣س})^{\frac{6}{5}} + \text{ج}$

(١٩) $\int \frac{(\text{س}+3)^2 - (\text{٢س}+3)^2}{\text{س}} \, \text{دس}$

الحل

$\int \frac{\text{س}^2 + \text{٦س} + 9 - (\text{٤س}^2 + \text{١٢س} + 9)}{\text{س}}$

$= \int \frac{\text{س}^2 + \text{٦س} + \cancel{9} - \text{٤س}^2 - \text{١٢س} - \cancel{9}}{\text{س}}$

$= \int \frac{-\text{٣س}^2 - \text{٦س}}{\text{س}} \, \text{دس}$

$= \int \frac{-\text{٣س}^2}{\text{س}} - \frac{\text{٦س}}{\text{س}} \, \text{دس}$

$= \int -\text{٣س} - 6 \, \text{دس}$

$= -\frac{3}{2}\text{س}^2 - \text{٦س} + \text{ج}$

(٢٠) $\int (\text{س}+1)(\text{س}^2 + \text{٢س} + 1)^8 \, \text{دس}$

الحل

$= \int (\text{س}+1)\left((\text{س}+1)^2\right)^8 \, \text{دس}$

$= \int (\text{س}+1)(\text{س}+1)^{16} = \int (\text{س}+1)^{17} \, \text{دس}$

$= \frac{(\text{س}+1)^{18}}{18} + \text{ج}$

الجزء الثاني

تكامل الاقترانات المثلثية

متطابقات هامة جداً للتكامل

① حا^2 س = $\frac{1}{2}$ (١ − جتا ٢س)

② جتا^2 س = $\frac{1}{2}$ (١ + جتا ٢س)

③ حا^2 س + جتا^2 س = ١

④ ظا^2 س = قا^2 س − ١

⑤ ظتا^2 س = قتا^2 س − ١

⑥ حا ٢س = ٢ حا س جتا س

⑦ جتا ٢س = جتا^2 س − حا^2 س
= ١ − ٢ حا^2 س
= ٢ جتا^2 س − ١

⑧ جتا م جتا ن = $\frac{1}{2}$ (جتا (م + ن) + جتا (م − ن))

⑨ حا م حا ن = $\frac{1}{2}$ (جتا (م − ن) − جتا (م + ن))

⑩ حا م جتا ن = $\frac{1}{2}$ (حا (م + ن) + حا (م − ن))

⑪ حا س جتا س = $\frac{1}{2}$ حا ٢س

تكامل الاقترانات المثلثية

① ∫ حا س ء س = − جتا س + جـ

② ∫ جتا س ء س = حا س + جـ

③ ∫ قا^2 س ء س = ظا س + جـ

④ ∫ قتا^2 س ء س = − ظتا س + جـ

⑤ ∫ قا س ظا س ء س = قا س + جـ

⑥ ∫ قتا س ظتا س ء س = − قتا س + جـ

ملاحظة هامة

اذا كانت الزاوية خطية فاننا نقسم على معامل س أي أن

∫ حا (م س + ن) ء س

= $\frac{-\text{جتا}(\text{م س} + \text{ن})}{\text{م}}$ + جـ

مثال ①

1. $\int \text{جا}\,\frac{3}{4}\text{س}\;\text{ءس} = \dfrac{-\text{جتا}\,\frac{3}{4}\text{س}}{\frac{3}{4}} + \text{جـ}$
2. $\int \text{قا}^2(3\text{س}-1)\;\text{ءس} = \frac{1}{3}\,\text{ظا}(3\text{س}-1) + \text{جـ}$
3. $\int \text{قتا}^2\left(\frac{4\text{س}+2}{3}\right)\text{ءس} = -\frac{3}{4}\,\text{ظتا}\left(\frac{4\text{س}+2}{3}\right) + \text{جـ}$
4. $\int \text{قا}\,6\text{س}\;\text{ظا}\,6\text{س}\;\text{ءس} = \frac{1}{6}\,\text{قا}\,6\text{س} + \text{جـ}$

مثال ②

جد قيمة التكاملات التالية

① $\int (3\,\text{جا}\,\text{س} + 2\text{س})\,\text{ءس} = -3\,\text{جتا}\,\text{س} + \text{س}^2 + \text{جـ}$

② $\int (3 + \text{قا}\,\text{س}\,\text{ظا}\,\text{س})\,\text{ءس} = 3\text{س} + \text{قا}\,\text{س} + \text{جـ}$

③ $\int (\text{قتا}^2\text{س} - 7\,\text{قتا}\,\text{س}\,\text{ظتا}\,\text{س})\,\text{ءس}$

$= -\text{ظتا}\,\text{س} + 7\,\text{قتا}\,\text{س} + \text{جـ}$

④ $\int (2\,\text{قا}^2\text{س} - \text{جا}\,\text{هـ})\,\text{ءس}$ هـ ثابت

$= 2\,\text{ظا}\,\text{س} - \text{جا}\,\text{هـ}\,\text{س} + \text{جـ}$

⑤ $\int 2\,\text{جا}\,3\text{س}\;\text{ءس} = \dfrac{-2\,\text{جتا}\,3\text{س}}{3} + \text{جـ}$

⑥ $\int \text{قا}^2\left(\frac{\text{س}}{3}-1\right)\text{ءس} = 3\,\text{ظا}\left(\frac{\text{س}}{3}-1\right) + \text{جـ}$

⑦ $\int \text{قا}(\text{أس}+\text{ب})\,\text{ظا}(\text{أس}+\text{ب})\,\text{ءس}$

$= \frac{1}{\text{أ}}\,\text{قا}(\text{أس}+\text{ب}) + \text{جـ}$

⑧ $\int \text{جا}^2\text{س}\,\text{ءس} = \int \frac{1}{2}(1 - \text{جتا}\,2\text{س})\,\text{ءس}$

$= \frac{1}{2}\left(\text{س} - \frac{1}{2}\,\text{جا}\,2\text{س}\right) + \text{جـ}$

⑨ $\int \text{جا}^2 3\text{س}\,.\,\text{ءس}$

$= \int \frac{1}{2}(1 - \text{جتا}\,6\text{س})\,\text{ءس} = \frac{1}{2}\left(\text{س} - \frac{1}{6}\,\text{جا}\,6\text{س}\right) +$

⑩ $\int \text{جتا}^2\text{س}\,\text{ءس} = \int \frac{1}{2}(1 + \text{جتا}\,2\text{س})\,\text{ءس}$

$= \frac{1}{2}\left(\text{س} + \frac{1}{2}\,\text{جا}\,2\text{س}\right) + \text{جـ}$

⑪ $\int \text{جتا}^2\frac{\text{س}}{2}\,\text{ءس} = \int \frac{1}{2}(1 + \text{جتا}\,\text{س})\,\text{ءس}$

$= \frac{1}{2}(\text{س} + \text{جا}\,\text{س}) + \text{جـ}$

⑫ $\int (3 + \text{ظا}^2\text{س})\,\text{ءس}$

$= \int (3 + \text{قا}^2\text{س} - 1)\,\text{ءس}$

$= \int (2 + \text{قا}^2\text{س})\,\text{ءس} = 2\text{س} + \text{ظا}\,\text{س} + \text{جـ}$

⑬ $\int \text{ظا}^2 7\text{س}\,\text{ءس} = \int (\text{قا}^2 7\text{س} - 1)\,\text{ءس}$

$= \frac{1}{7}\,\text{ظا}\,7\text{س} - \text{س} + \text{جـ}$

⑭ $\int \text{ظتا}^2\text{س}\,\text{ءس} = \int (\text{قتا}^2\text{س} - 1)\,\text{ءس}$

$= -\text{ظتا}\,\text{س} - \text{س} + \text{جـ}$

(١٥) ∫ (٣ + ٣ ظا²س) دس = ∫ ٣ (١ + ظا²س)

= ∫ ٣ قا²س دس = ٣ ظاس + جـ

(١٦) ∫ (قا²س − ظا²س) دس = ∫ ١ . دس

= س + جـ

(١٧) ∫ (٤ جتا²س − ٢) دس

= ∫ (٤ × ½ (١ + جتا٢س) − ٢) دس

= ∫ (~~٢~~ + ٢ جتا٢س ~~− ٢~~) دس

= ٢ جا٢س / ٢ + جـ = جا٢س + جـ

(١٨) ∫ (٣ − ٦ جا² (س/٢)) دس

= ∫ (٣ − ٦ (½) (١ − جتاس)) دس

= ∫ (~~٣ − ٣~~ + ٣ جتاس) دس

= ∫ ٣ جتاس دس = ٣ جاس + جـ

ملاحظة هامة

قاس = ١ / جتاس ← جتاس = ١ / قاس

قتاس = ١ / جاس ← جاس = ١ / قتاس

ظتاس = ١ / ظاس ← ظاس = ١ / ظتاس

ظاس = جاس / جتاس ، ظتاس = جتاس / جاس

مثال (٣)

جد قيمة التكاملات التالية

(١) ∫ ٢ / قا٤س دس = ∫ ٢ جتا٤س دس

= ٢/٤ جا٤س + جـ

(٢) ∫ ٥ / (جتا٣س ظتا٣س) دس

أ) ٣/٥ قا٣س + جـ ب) ٣/٥ قا٣س + جـ

جـ) ٥/٣ قا٣س + جـ د) −٥/٣ قا٣س + جـ

الحل = ∫ ٥ قا٣س ظا٣س دس

= ٥/٣ قا٣س + جـ الجواب (جـ)

(٣) ∫ ظاس / جتاس دس =

أ) قتاس + جـ ب) قاس + جـ

جـ) −قتاس + جـ د) قتاس + جـ

الحل = ∫ قاس ظاس = قاس + جـ

(ب)

(٤) ∫ ظتاس جاس . دس يساوي

أ) جاس + جـ ب) جتاس + جـ

جـ) −جتاس + جـ د) −جاس + جـ

الحل = ∫ (جتاس / جاس) × جاس دس

= ∫ جتاس دس = جاس + جـ (أ)

⑤ ∫ ٥/جا^{2}س دس يساوي

أ) ظتا س + جـ   ب) −٥ ظتا س + جـ

جـ) − ظتا س + جـ   د) ٥ ظتا س + جـ

الحل = ∫ ٥ قتا^{2}س دس

= −٥ ظتا س + جـ   (ب)

⑥ ∫ (١ + ٢جا س + جا^{2}س)/جتا^{2}س . دس

بتوزيع البسط على المقام

= ∫ (١/جتا^{2}س + ٢جا س/جتا^{2}س + جا^{2}س/جتا^{2}س) دس

= ∫ (قا^{2}س + ٢قا س ظا س + ظا^{2}س) دس

= ∫ قا^{2}س + ٢ قا س ظا س + قا^{2}س − ١

= ∫ ٢ قا^{2}س + ٢ قا س ظا س − ١

= ٢ ظا س + ٢ قا س − س + جـ

⑦ ∫ دس/(جتا^{2}س − ١) = ∫ دس/(−جا^{2}س)

= − ∫ قتا^{2}س دس

= ظتا س + جـ

مثال ④

جد قيمة التكاملات التالية

① ∫ (٢ جا^{2}س + ٢ جتا^{2}س) دس يساوي

أ) جتا س + جـ   ب) جا س + جـ

جـ) ٢س + جـ   د) −٢س + جـ

الحل

∫ ٢ (جا^{2}س + جتا^{2}س) دس

∫ ٢ . ١ دس = ٢س + جـ   (جـ)

② قيمة التكامل

∫ (٥ − ٥ جتا^{2}٣س) دس =

أ) ٥/٢ (س + ١/٦ جا٦س) + جـ

ب) ٥/٢ (س − ١/٦ جا٦س) + جـ

جـ) −٥/٢ (س + ١/٦ جا٦س) + جـ

د) −٥/٢ (−س − ١/٦ جا٦س) + جـ

الحل = ∫ ٥ (١ − جتا^{2}٣س) دس

= ∫ ٥ جا^{2}٣س دس

= ٥ ∫ ١/٢ (١ − جتا٦س) دس

= ٥/٢ (س − جا٦س/٦) + جـ   (ب)

③ $\int \frac{قا^2س - ظا^2س}{\sqrt{س}}\, دس =$

أ) $٢س^{\frac{3}{2}} + جـ$ ب) $٢\sqrt{س} + جـ$

جـ) $-٢\sqrt{س} + جـ$ د) $-٢س^{\frac{3}{2}} + جـ$

الحل

متطابقة

$= \int \frac{1}{\sqrt{س}}\, دس = \int س^{-\frac{1}{2}}\, دس$

$= ٢س^{\frac{1}{2}} + جـ = ٢\sqrt{س} + جـ$ (ب)

④ $\int \frac{١ - جا^3س}{١ - جاس}\, دس$

الحل

$\int \frac{\cancel{(١ - جاس)}(١ + جاس + جا^2س)}{\cancel{١ - جاس}}$

$= \int ١ + جاس + \frac{1}{2}(١ - جتا٢س)\, دس$

$= س - جتاس + \frac{1}{2}\left(س - \frac{جا٢س}{٢}\right)$

⑤ $\int جا^4س\, دس$

الحل

$\int (جا^2س)^2\, دس$

$= \int \left(\frac{1}{2}(١ - جتا٢س)\right)^2 دس$

$= \int \frac{1}{4}(١ - ٢جتا٢س + جتا^2٢س)$

$= \frac{1}{4}\int \left(١ - ٢جتا٢س + \frac{1}{2}(١ + جتا٤س)\right)$

$= \frac{1}{4}\left(س - ٢\frac{جا٢س}{٢} + \frac{1}{2}\left(س + \frac{جا٤س}{٤}\right)\right)$

⑥ $\int \frac{١ + جا٢س}{جاس + جتاس}\, دس$

الحل

$= \int \frac{جا^2س + جتا^2س + ٢جاس\, جتاس}{جاس + جتاس}$

تحليل $س^2 + ٢س ص + ص^2$

$= (س + ص)^2$

$= \int \frac{(جاس + جتاس)^{\cancel{2}}}{\cancel{جاس + جتاس}}\, دس$

$= \int (جاس + جتاس)\, دس$

$= - جتاس + جاس + جـ$

⑦ $\int \frac{٥ - جا^3س}{١ - جتا^2س}\, دس$

الحل $= \int \frac{٥ - جا^3س}{جا^2س}\, دس$

$= \int \frac{٥}{جا^2س} - \frac{جا^3س}{جا^2س} = \int ٥قتا^2س - جاس$

$= -٥ظتاس + جتاس + جـ$

ملاحظة هامة

التكامل لـ جا²س ، جتا²س ، ظا²س ، ظتا²س غير مباشر حيث نستخدم المتطابقات

ظا²س = قا²س − ١

جا²س = ½ (١ − جتا٢س)

ظتا²س = قتا²س − ١

جتا²س = ½ (١ + جتا٢س)

مثال ٥

جد التكامل ∫ √(١ + جا٢س) ءس ، ٠ ≤ س ≤ $\frac{\pi}{3}$

الحل

= ∫ √(جا²س + جتا²س + ٢ جاس جتاس) ءس

= ∫ √((جاس + جتاس)²) ءس

= ∫ |جاس + جتاس| ءس

على الفترة تكون موجبة

= ∫ (جاس + جتاس) ءس

= − جتاس + جاس + ج

مثال ٦

اوجد ∫ √(١ + جاس) ءس ، ٠ ≤ س ≤ $\frac{\pi}{2}$

الحل

= ∫ √(١ + ٢ جا½س جتا½س)

= ∫ √(جا²½س + ٢ جا½س جتا½س + جتا²½س)

= ∫ √((جا½س + جتا½س)²)

= ∫ |جا½س + جتا½س|

الفترة موجبة

= −٢ جتا½س + ٢ جا½س + ج

مثال ٧

اوجد ∫ √(٨ − ٨ جتا٢س) ءس ، ٠ ≤ س ≤ $\frac{\pi}{2}$

الحل

= ∫ √(٨ (١ − جتا٢س)) ءس

= ∫ √(٨ (١ − (١ − ٢جا²س)))

= ∫ √(٨ × ٢ جا²س)

= ∫ √(١٦ جا²س) = ∫ ٤ |جاس|

على الفترة موجبة

= ∫ ٤ جاس ءس = −٤ جتاس + ج

مثال (٨)

$$\int \frac{\text{جتا}^3\text{س} - ٥}{١ - \text{حا}^2\text{س}} =$$

أ) حاس − ٥ظاس + جـ   ب) جتاس − ٥ظاس + جـ

جـ) ٥حاس − ظاس + جـ   د) ٥جتاس − ظاس + جـ

الحل

$$\int \frac{\text{جتا}^3\text{س} - ٥}{١ - \text{حا}^2\text{س}} = \int \frac{\text{جتا}^3\text{س} - ٥}{\text{جتا}^2\text{س}}$$

$$= \int \left(\frac{\text{جتا}^3\text{س}}{\text{جتا}^2\text{س}} - \frac{٥}{\text{جتا}^2\text{س}}\right) \text{د س}$$

$$= \int (\text{جتاس} - ٥\,\text{قا}^2\text{س})\ \text{د س}$$

$$= \text{حاس} - ٥\text{ظاس} + \text{جـ}$$ (أ)

مثال (٩)

$$\int \text{حا٥س جتا٥س د س} =$$

أ) $\frac{١}{٢}$ جتا٥س + جـ   ب) $\frac{-١}{٢٠}$ جتا١٠س + جـ

جـ) $\frac{١}{٢}$ جتا٥س + جـ   د) $\frac{١}{٢٠}$ حا١٠س + جـ

الحل

متطابقة

$$= \int \frac{١}{٢}\ \text{حا١٠س د س}$$

$$= \frac{١}{٢} \times -\frac{\text{جتا١٠س}}{١٠}$$

$$= \frac{-١}{٢٠}\ \text{جتا١٠س} + \text{جـ}$$ (ب)

مثال (١٠)

$$\int (\text{حاس} + \text{جتاس})^2\ \text{د س}$$

الحل

$$= \int (\text{حا}^2\text{س} + ٢\,\text{حاس جتاس} + \text{جتا}^2\text{س})$$

$$= \int (١ + ٢\,\text{حاس جتاس})\ \text{د س}$$

$$= \int (١ + \text{حا٢س})\ \text{د س}$$

$$= \text{س} - \frac{\text{جتا٢س}}{٢} + \text{جـ}$$

مثال (١١)

أوجد $$\int \frac{\text{جتا}^2\text{س}}{\left(\text{حا}\frac{\text{س}}{٢}\ \text{جتا}\frac{\text{س}}{٢}\right)^2}\ \text{د س}$$

الحل

$$= \int \frac{\text{جتا}^2\text{س}}{\left(\frac{١}{٢}\text{حاس}\right)^2} = \int \frac{\text{جتا}^2\text{س}}{\frac{١}{٤}\text{حا}^2\text{س}}$$

$$= \int ٤\,\text{ظتا}^2\text{س د س} = ٤\int (\text{قتا}^2\text{س} - ١)\ \text{د س}$$

$$= ٤(-\text{ظتاس} - \text{س}) + \text{جـ}$$

مثال (١٢)

$$\int (\text{جتا}^2\text{س} - \text{حا}^2\text{س})\ \text{د س}$$

$$= \int \text{جتا٢س د س} = \frac{\text{حا٢س}}{٢} + \text{جـ}$$

مثال (١٣)

أوجد $\int \frac{\text{جتا}2\text{س}}{(\text{جاس جتاس})^2}\,\text{ءس}$

الحل

$\int \frac{\text{جتا}2\text{س}}{(\frac{1}{2}\text{جا}2\text{س})^2}\,\text{ءس} = \int \frac{\text{جتا}2\text{س}}{\frac{1}{4}\text{جا}^2 2\text{س}}\,\text{ءس}$

$= 4\int \frac{\text{جتا}2\text{س}}{\text{جا}2\text{س}} \times \frac{1}{\text{جا}2\text{س}}\,\text{ءس}$

$= 4\int \text{ظتا}2\text{س}\ \text{قتا}2\text{س}\,\text{ءس}$

$= \frac{-4}{2}\,\text{قتا}2\text{س} + \text{جـ}$

مثال (١٤)

أوجد $\int (\text{جتا}^4\text{س} - \text{جا}^4\text{س})\,\text{ءس}$

الحل

$= \int (\text{جتا}^2\text{س} - \text{جا}^2\text{س})(\text{جتا}^2\text{س} + \text{جا}^2\text{س})$

$= \int \text{جتا}2\text{س} \times 1\,\text{ءس} = \frac{\text{جا}2\text{س}}{2} + \text{جـ}$

مثال (١٥)

$\int \frac{2}{1+\text{جتا}2\text{س}}\,\text{ءس} = \int \frac{2}{1+2\text{جتا}^2\text{س}-1}$

$= \int \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\text{جتا}^2\text{س}} = \int \frac{1}{\text{جتا}^2\text{س}}$

$= \int \text{قا}^2\text{س}\,\text{ءس} = \text{ظاس} + \text{جـ}$

مثال (١٦)

أوجد $\int \frac{1}{\text{جتا}2\text{س} + \text{جا}^2\text{س}}\,\text{ءس}$

الحل

$= \int \frac{1}{\text{جتا}^2\text{س} \cancel{- \text{جا}^2\text{س} + \text{جا}^2\text{س}}}$

$= \int \frac{1}{\text{جتا}^2\text{س}}\,\text{ءس} = \int \text{قا}^2\text{س}\,\text{ءس}$

$= \text{ظاس} + \text{جـ}$

مثال (١٧)

أوجد $\int \frac{1+\text{جتا}^3\text{س}}{1+\text{جتا}2\text{س}}\,\text{ءس}$

الحل

$= \int \frac{1+\text{جتا}^3\text{س}}{\cancel{1}+2\text{جتا}^2\text{س}\cancel{-1}}\,\text{ءس}$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\text{جتا}^2\text{س}} + \frac{\text{جتا}^3\text{س}}{\text{جتا}^2\text{س}}$

$= \frac{1}{2}\int (\text{قا}^2\text{س} + \text{جتاس})\,\text{ءس}$

$= \frac{1}{2}(\text{ظاس} + \text{جاس}) + \text{جـ}$

مثال (١٨)

اوجد $\int \frac{1+جتا^3 س}{1+جتاس}$ دس   مجموع مكعبين

$= \int \frac{\cancel{(1+جتاس)}(1-جتاس+جتا^2 س)}{\cancel{1+جتاس}}$

$= \int (1-جتاس+جتا^2 س)$ دس

$= \int 1-جتاس+\frac{1}{2}(1+جتا2س)$ دس

$=$ س $-$ جاس $+\frac{1}{2}($س$+\frac{جا2س}{2})+$ جـ

ملاحظه هامه

اذا كانت الزوايا في البسط مختلفه عن المقام اولاً نعمل على ان نجعلها متساويه باستخدام المتطابقات كما في الأمثله السابقه.

ملاحظه هامه

اين ما نجد الصورة $1 \mp$ جاس ، $1 \mp$ جتاس

نضرب في المرافق

مثال (١٩)

جد قيمة كل من التكاملات التاليه

(١) $\int \frac{1}{1+جاس}$. دس

الحل

$= \int \frac{1}{1+جاس} \times \frac{1-جاس}{1-جاس}$. دس

$= \int \frac{1-جاس}{1-جا^2 س}$ دس

$= \int \frac{1-جاس}{جتا^2 س}$ توزيع البسط على المقام

$= \int \frac{1}{جتا^2 س} - \frac{جاس}{جتا^2 س}$ دس

$= \int ($قا^{2}س $-$ ظاس قاس$)$ دس

$=$ ظاس $-$ قاس $+$ جـ

(٢) $\int \frac{1-جتاس}{1+جتاس}$. دس

الحل

$= \int \frac{1-جتاس}{1+جتاس} \times \frac{1-جتاس}{1-جتاس}$

$= \int \frac{(1-جتاس)^2}{1-جتا^2 س}$ دس

يتبع ←

$$= \int \frac{1 - 2\,\text{جتاس} + \text{جتا}^2\text{س}}{\text{جا}^2\text{س}}\ \text{دس}$$

$$= \int \frac{1}{\text{جا}^2\text{س}} - \frac{2\,\text{جتاس}}{\text{جا}^2\text{س}} + \frac{\text{جتا}^2\text{س}}{\text{جا}^2\text{س}}$$

$$= \int \text{قتا}^2\text{س} - 2\,\text{ظتاس قتاس} + \text{ظتا}^2\text{س}$$

$$= \int \text{قتا}^2\text{س} - 2\,\text{ظتاس قتاس} + \text{قتا}^2\text{س} - 1$$

$$= -\text{ظتاس} - 2\,\text{قتاس} - \text{ظتاس} - \text{س}$$

$$= -2\,\text{ظتاس} - 2\,\text{قتاس} - \text{س}$$

③

$$\int \frac{\text{دس}}{(\text{جتاس} + \text{جاس})^2}$$

$$= \int \frac{\text{دس}}{\text{جتا}^2\text{س} + 2\,\text{جاس جتاس} + \text{جا}^2\text{س}}$$

$$= \int \frac{\text{دس}}{1 + \text{جا}2\text{س}} \times \frac{1 - \text{جا}2\text{س}}{1 - \text{جا}2\text{س}}$$

$$= \int \frac{1 - \text{جا}2\text{س}}{1 - \text{جا}^2 2\text{س}} = \int \frac{1 - \text{جا}2\text{س}}{\text{جتا}^2 2\text{س}}$$

$$= \int \frac{1}{\text{جتا}^2 2\text{س}} - \frac{\text{جا}2\text{س}}{\text{جتا}^2 2\text{س}}$$

$$= \int \text{قا}^2 2\text{س} - \text{ظا}2\text{س قا}2\text{س}$$

$$= \frac{1}{2}\,\text{ظا}2\text{س} - \frac{\text{قا}2\text{س}}{2} + \text{ج}$$

④

$$\int \frac{(\text{جاس} + \text{جتاس})^6}{\text{جا}^4\left(\text{س} + \frac{\pi}{4}\right)} .\ \text{دس}$$

الحل

$$\int \frac{(\text{جاس} + \text{جتاس})^6}{\left(\text{جا}\left(\text{س} + \frac{\pi}{4}\right)\right)^4}\ \text{دس}$$

$$= \int \frac{(\text{جاس} + \text{جتاس})^6}{\left(\text{جاس جتا}\frac{\pi}{4} + \text{جتاس جا}\frac{\pi}{4}\right)^4}$$

متطابقة جا(م + ن)

$$= \int \frac{(\text{جاس} + \text{جتاس})^6}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\text{جاس} + \frac{1}{\sqrt{2}}\text{جتاس}\right)^4}\ \text{دس}$$

$$= \int \frac{(\text{جاس} + \text{جتاس})^6}{\frac{1}{4}(\text{جاس} + \text{جتاس})^4}$$

$$= \int 4\,(\text{جاس} + \text{جتاس})^2 .\ \text{دس}$$

$$= \int 4\,(\text{جا}^2\text{س} + 2\,\text{جاس جتاس} + \text{جتا}^2\text{س})$$

$$= \int 4\,(1 + \text{جا}2\text{س}) .\ \text{دس}$$

$$= 4\left(\text{س} - \frac{\text{جتا}2\text{س}}{2}\right) + \text{ج}$$

ملاحظة هامة

اذا كانت الزوايا مختلفة في عملية الضرب نستخدم القوانين التالية:-

1. حاأ جتاب $= \frac{1}{2}$ (حا(أ+ب) + حا(أ−ب))
2. جتاأ جتاب $= \frac{1}{2}$ (جتا(أ+ب) + جتا(أ−ب))
3. حاأ حاب $= \frac{1}{2}$ (جتا(أ−ب) − جتا(أ+ب))

مثال (٢٠)

جد التكاملات التالية:-

① $\int$ حا٣س جتا٥س . دس

الحل — متطابقة (١)

$\int \frac{1}{2}$ (حا(٣س+٥س) + حا(٣س−٥س))

$= \int \frac{1}{2}$ (حا٨س + حا−٢س) دس

$= \frac{1}{2} \left(-\frac{\text{جتا٨س}}{8} + \frac{\text{جتا٢س}}{2} \right) +$ جـ

② $\int$ جتا٢س حا٥س . دس

الحل

$= \int$ حا٥س جتا٢س دس

$= \frac{1}{2} \int$ (حا٧س + حا٣س) دس

$= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{7} \text{جتا٧س} - \frac{1}{3} \text{جتا٣س} \right) +$ جـ

③ $\int$ جتا٨س جتا٣س دس

الحل

$= \int \frac{1}{2}$ (جتا١١س + جتا٥س) دس

$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{11} \text{حا١١س} + \frac{1}{5} \text{حا٥س} \right) +$ جـ

④ $\int$ حا٤س حا٥س . دس

$= \int \frac{1}{2}$ (جتا−س − جتا٩س) . دس

جتا−س = جتاس

$= \frac{1}{2} \int$ (جتاس − جتا٩س) . دس

$= \frac{1}{2} \left(\text{حاس} - \frac{\text{حا٩س}}{9} \right) +$ جـ

⑤ $\int$ ٦ حا٣س (جتا٢س جتاس − حا٢س حاس) دس

الحل

جتا(أ+ب) = جتاأ جتاب − حاأ حاب

$= \int$ ٦ حا٣س (جتا(٢س+س)) دس

$= \int$ ٦ حا٣س جتا٣س

$= \int ٣ \times \underbrace{\text{٢حا٣س جتا٣س}}_{\text{متطابقة}}$

$= \int$ ٣ حا٦س دس

$= -\frac{\text{٣ جتا٦س}}{6} +$ جـ

$= -\frac{1}{2}$ جتا٦س + جـ

مثال (٢١)

$$\int \frac{\text{جتا}٣\text{س}}{\text{جتا}\text{س}}\, \text{ءس}$$

الحل

$$= \int \frac{\text{جتا}(\text{س} + ٢\text{س})}{\text{جتا}\text{س}}\, \text{ءس}$$

المتطابقة

$$\text{جتا}(\text{أ}+\text{ب}) = \text{جتا}\text{أ}\,\text{جتا}\text{ب} - \text{جا}\text{أ}\,\text{جا}\text{ب}$$

$$= \int \frac{\text{جتا}\text{س}\,\text{جتا}٢\text{س} - \text{جا}\text{س}\,\text{جا}٢\text{س}}{\text{جتا}\text{س}}$$

$$= \int \frac{\cancel{\text{جتا}\text{س}}\,\text{جتا}٢\text{س}}{\cancel{\text{جتا}\text{س}}} - \frac{\text{جا}\text{س} \times ٢\,\text{جا}\text{س}\,\cancel{\text{جتا}\text{س}}}{\cancel{\text{جتا}\text{س}}}$$

$$= \int \text{جتا}٢\text{س} - \int ٢\,\text{جا}^{٢}\text{س}\ \text{ءس}$$

$$= \frac{\text{جا}٢\text{س}}{٢} - \int \cancel{٢}\ \frac{١}{\cancel{٢}}(١ - \text{جتا}٢\text{س})\ \text{ءس}$$

$$= \frac{\text{جا}٢\text{س}}{٢} - \left(\text{س} - \frac{\text{جا}٢\text{س}}{٢}\right) + \text{ج}$$

الجزء الثالث

إيجاد قاعدة ق(س) إذا علمت قَ أو قً

ملاحظة هامة

$\int$ قَ(س) . دس = ق(س) + ج

$\int$ قً(س) . دس = قَ(س) + ج

$\int$ قً'(س) . دس = قً(س) + ج

ق $\leftarrow$ قَ $\leftarrow$ قً اشتقاق

قً $\leftarrow$ قَ $\leftarrow$ ق تكامل

مثال ①

اذا كان قَ(س) = ٣س^{٢} − ٢ وكان ق(١) = ١ فاوجد قاعدة ق(س)

الحل

قَ(س) = $\int$ ٣س^{٢} − ٢ دس

ق(س) = $\frac{\cancel{٣}س^{٣}}{\cancel{٣}}$ − ٢س + ج

ق(١) = (١)^{٣} − ٢ × ١ + ج = ١

−١ + ج = ١ $\Leftarrow$ ج = ٢

$\Leftarrow$ ق(س) = س^{٣} − ٢س + ٢

مثال ②

اذا كان قَ(س) = س^{٣} − س^{٢} + ١ فاوجد ق(٣) − ق(١)؟

أ) $\frac{٤٠}{٣}$ ب) $\frac{-٤٠}{٣}$ ج) ٤٠ د) −٤٠

الحل

ق(س) = $\int$ (س^{٣} − س^{٢} + ١) دس

= $\frac{س^{٤}}{٤} - \frac{س^{٣}}{٣}$ + س + ج

ق(١) = $\frac{١}{٤} - \frac{١}{٣}$ + ١ + ج

= $-\frac{١}{١٢} + \frac{١٢}{١٢}$ + ج = $\frac{١١}{١٢}$ + ج

ق(٣) = $\frac{٨١}{٤} - \frac{٢٧}{٣}$ + ٣ + ج

= $\frac{٨١}{٤}$ − ٦ + ج = $\frac{٥٧}{٤}$ + ج

ق(٣) − ق(١) = $\frac{٥٧}{٤}$ + ج − ($\frac{١١}{١٢}$ + ج)

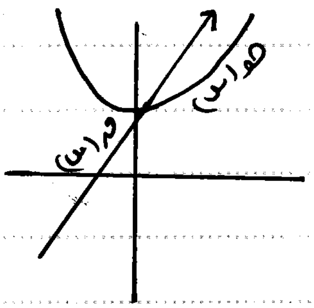
= $\frac{٥٧}{٤} - \frac{١١}{١٢}$ =

= $\frac{١٦٠}{١٢} = \frac{٤٠}{٣}$ (أ)

مثال (٣)

الشكل المجاور يمثل بياني الاقترانين ق ، هـ اذا علمت ان ق(س) = ٢س + ٤ ، هـَ(س) = ٢س − ٣ فما قيمة هـ(٥) ؟

أ) −١٤ ب) ٢٠ ج) ١٣ د) ١٤



الحل

هـ(س) = ∫ هـَ(س) . دس = ∫ (٢س − ٣) . دس

هـ(س) = $\frac{٢س^{٢}}{٢}$ − ٣س + جـ

= س^{٢} − ٣س + جـ

ق ، هـ تتقاطعان في محور الصادات عند س = ٠ ⟸ ق(٠) = ٤ بالتعويض

← (٠ ، ٤) نقطة التقاطع

هـ(٠) = ٤

← هـ(٠) = (٠)^{٢} − ٣×٠ + جـ = ٤

هـ(س) = س^{٢} − ٣س + ٤

هـ(٥) = ٢٥ − ١٥ + ٤ = ١٤

(د)

مثال (٤)

اذا كان ميل المماس لمنحنى ق(س) عند النقطة (س ، ص) يساوي (٥س^{٤} + ٢س + ٣) فجد قاعدة الاقتران ق(س) علماً بان ق(٢) = ٣

الحل

ميل المماس = قَ(س) = ٥س^{٤} + ٢س + ٣

ق(س) = ∫ (٥س^{٤} + ٢س + ٣) دس

= س^{٥} + س^{٢} + ٣س + جـ

لكن ق(٢) = ٣

٢^{٥} + ٤ + ٦ + جـ = ٣

٤٢ + جـ = ٣ ← جـ = −٣٩

ق(س) = س^{٥} + س^{٢} + ٣س − ٣٩

مثال (٥)

جد معادلة المنحنى الذي ميل المماس له عند اي نقطة (س ، ص) تعطى بالعلاقة $\frac{دص}{دس} = \frac{س^{٣} + ٨}{س^{٢} − ٢س + ٤}$

والذي يقطع محور السينات عند س = ٣

الحل

قَ(س) = $\frac{س^{٣} + ٨}{س^{٢} − ٢س + ٤}$

ق(س) = ∫ $\frac{س^{٣} + ٨}{س^{٢} − ٢س + ٤}$ دس

= ∫ $\frac{(س + ٢)\cancel{(س^{٢} − ٢س + ٤)}}{\cancel{س^{٢} − ٢س + ٤}}$

= $\frac{س^{٢}}{٢}$ + ٢س + جـ

← تتبع الحل

لكن (٣،٠) نقطة التقاطع مع محور السينات ← ق(٣) = ٠

ق(٣) = $\frac{٩}{٢}$ + ٦ + جـ = ٠

$\frac{٢١}{٢}$ + جـ = ٠ جـ = $\frac{-٢١}{٢}$

ق(س) = $\frac{س^٢}{٢}$ + ٢س − $\frac{٢١}{٢}$

مثال (٦)

اذا علمت ان ق''(س) = ٣س + ١
جد ق(٢) علماً بان ق(٠) = ١
ق'(٠) = صفر

الحل

∫ ق''(س) = ∫ (٣س + ١) دس

ق'(س) = $\frac{٣س^٢}{٢}$ + س + جـ

ق'(٠) = ٠ ⇐ جـ = ٠

ق'(س) = $\frac{٣}{٢}$ س² + س

∫ ق'(س) = ∫ ($\frac{٣}{٢}$ س² + س) دس

ق(س) = $\frac{٣}{٢} \times \frac{س^٣}{٣}$ + $\frac{س^٢}{٢}$ + جـ

ق(٠) = ١ ⇐ جـ = ١

ق(س) = $\frac{١}{٢}$ س³ + $\frac{١}{٢}$ س² + ١

ق(٢) = $\frac{١}{٢}$ × ٨ + $\frac{١}{٢}$ × ٤ + ١

٤ + ٢ + ١ = ٧

مثال (٧)

اذا كانت ق''(س) = ٢ عند أي نقطة (س، ص)، وكان ميل المنحنى عند النقطة (١،٣) يساوي ١٠ جد قاعدة الاقتران ق ؟

الحل

∫ ق''(س) دس = ∫ ٢ دس

ق'(س) = ٢س + جـ

لكن ميل المماس عند (١،٣)
تعني أن ق'(١) = ١٠

ق'(١) = ٢ × ١ + جـ = ١٠

جـ = ٨

ق'(س) = ٢س + ٨

∫ ق'(س) = ∫ (٢س + ٨) دس

ق(س) = $\frac{\cancel{٢}س^٢}{\cancel{٢}}$ + ٨س + جـ

لكن ق(١) = ٣

ق(١) = (١)² + ٨ × ١ + جـ = ٣

٩ + جـ = ٣ ⇐ جـ = ٦

⇐

ق(س) = س² + ٨س + ٦

مثال (٨)

اذا كانت المشتقة الأولى للأقتران ق هي (٢س − ٢) ، وكانت القيمة الصغرى المحلية (٧) جد قاعدة ق

الحل

ق′(س) = ٢س − ٢

∫ ق′(س) = ∫ (٢س − ٢) دس

ق(س) = س^2 − ٢س + جـ

لكن له قيمة صغرى محلية عند ق′(س) = ٠ ، ٢س − ٢ = ٠

س = ١ ⟸ ق(١) = ٧

ق(١) = ١^2 − ٢ + جـ = ٧

جـ = ٨

ق(س) = س^2 − ٢س + ٨

مثال (٩)

اذا كانت ق′(س) = ٢س − جاس وكان ق(π) = ٣ جد قاعدة ق

الحل

∫ ق′(س) = ∫ ٢س − جاس

ق(س) = س^2 + جتاس + جـ

ق(π) = π^2 + جتاπ + جـ = ٣

π^2 − ١ + جـ = ٣ ⟸

جـ = ٢ − π^2

ق(س) = س^2 + جتاس + ٢ − π^2

مثال (١٠)

اذا كان ق(س) = √(٢ − س) ، هـ″(س) = ٢ جد هـ(٢) علماً بان ق ، هـ متعامدان عند س = ١ ؟

الحل

∫ هـ″(س) دس = ∫ ٢ دس

هـ′(س) = ٢س + جـ

ق′(س) = $\frac{-١}{٢\sqrt{٢-س}}$ ق′(١) = $\frac{-١}{٢}$

ق ، هـ متعامدان

ق′(١) × هـ′(١) = −١

$-\frac{١}{٢}$ × هـ′(١) = −١ ⟸ هـ′(١) = ٢

⟸ هـ′(١) = ٢ + جـ = ٢

⟵ جـ = صفر

هـ′(س) = ٢س

∫ هـ′(س) = ∫ ٢س دس

هـ(س) = س^2 + جـ

لكن هـ(١) = ق(١) نقطة التعامد نقطة مشتركة

= √(٢ − ١)

= ١

هـ(١) = ١^2 + جـ = ١

جـ = ٠

هـ(س) = س^2

هـ(٢) = ٤

مثال (١١)

اذا كان ميل المماس لمنحنى ص = ق(س) عند اي نقطة عليه يساوي (أ س^{2} + ٥س − ٢) حيث أ ثابت وكان ق(٠) = ١٨ ، ق(٢) = صفر جد قيمة أ ؟

الحل

$$\text{ق}'(\text{س}) = \text{أ}\,\text{س}^{2} + 5\text{س} - 2$$

$$\int \text{ق}'(\text{س})\,\text{ءس} = \int \text{أ}\,\text{س}^{2} + 5\text{س} - 2$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{أ}\,\text{س}^{3}}{3} + \frac{5\text{س}^{2}}{2} - 2\text{س} + \text{جـ}$$

$$\text{ق}(0) = 18 \Leftarrow \text{جـ} = 18$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{أ}}{3}\text{س}^{3} + \frac{5}{2}\text{س}^{2} - 2\text{س} + 18$$

$$\text{ق}(2) = \frac{\text{أ}}{3} \times 8 + \frac{5}{2} \times 4 - 4 + 18 = 0$$

$$\frac{8\text{أ}}{3} + 10 + 14 = 0$$

$$\frac{8\text{أ}}{3} = -24$$

$$\cancel{8}\text{أ} = \frac{-24 \times 3}{8}$$

$$\text{أ} = -9$$

تدريبات الكتاب

تدريب ① ص٢٢٨

جد كلاً مما يأتي

① $\int \text{دس} = \text{س} + \text{ج}$

② $\int -\frac{1}{4}\,\text{دل} = -\frac{1}{4}\,\text{ل} + \text{ج}$

تدريب ② ص٢٢٩

① $\int 10\,\text{دس} = 10\text{س} + \text{ج}$

② $\int \frac{1}{\sqrt[7]{\text{س}^2}}\,\text{دس} = \int \text{س}^{-\frac{2}{7}}\,\text{دس}$

$= \frac{7}{5}\,\text{س}^{\frac{5}{7}} + \text{ج}$

تدريب ③ ص٢٣١

جد كلاً مما يأتي

① $\int \frac{\text{س}^2 - 9\text{س}}{\sqrt{\text{س}} - 3}\,\text{دس}$

الحل

$\int \frac{\text{س}(\text{س} - 9)}{\sqrt{\text{س}} - 3}\,\text{دس}$

$= \int \frac{\text{س}(\sqrt{\text{س}} - 3)(\sqrt{\text{س}} + 3)}{\sqrt{\text{س}} - 3}\,\text{دس}$

$= \int (\text{س}^{\frac{3}{2}} + 3\text{س})\,\text{دس}$

$= \frac{2}{5}\,\text{س}^{\frac{5}{2}} + \frac{3}{2}\,\text{س}^2 + \text{ج}$

② $\int \frac{(2 - \text{س})^3}{\text{س}\sqrt{\text{س}}}\,\text{دس}$ حلك الأقواس

$= \int \frac{8 - 12\text{س} + 6\text{س}^2 - \text{س}^3}{\text{س}^{\frac{3}{2}}}$

$= \int \frac{8}{\text{س}^{\frac{3}{2}}} - \frac{12\text{س}}{\text{س}^{\frac{3}{2}}} + \frac{6\text{س}^2}{\text{س}^{\frac{3}{2}}} - \frac{\text{س}^3}{\text{س}^{\frac{3}{2}}}$

$= \int 8\text{س}^{-\frac{3}{2}} - 12\text{س}^{-\frac{1}{2}} + 6\text{س}^{\frac{1}{2}} - \text{س}^{\frac{3}{2}}\,\text{دس}$

$= 8 \times \frac{\text{س}^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} - 12 \times \frac{\text{س}^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + 6 \times \frac{2}{3}\,\text{س}^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}\,\text{س}^{\frac{5}{2}} + \text{ج}$

$= -16\,\text{س}^{-\frac{1}{2}} - 24\,\text{س}^{\frac{1}{2}} + 4\,\text{س}^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}\,\text{س}^{\frac{5}{2}} + \text{ج}$

$= \frac{-16}{\sqrt{\text{س}}} - 24\sqrt{\text{س}} + 4\sqrt{\text{س}^3}$

$- \frac{2}{5}\sqrt{\text{س}^5} + \text{ج}$

تدريب ٤ ص٣٢

جد كلاً مما يأتي

١) $\int \frac{٣}{(٧س+٥)^{٤}}\, دس$

الحل

$= \int ٣\,(٧س+٥)^{-٤}\, دس$

$= \frac{\cancel{٣}\,(٧س+٥)^{-٣}}{٧ \times \cancel{-٣}} + جـ$

$= -\frac{١}{٧}\,(٧س+٥)^{-٣} + جـ$

٢) $\int س^{٤}\left(٥ - \frac{٣}{س}\right)^{٤} دس$

الحل

$\int س^{٤}\left(\frac{٥س-٣}{س}\right)^{٤} دس$

$= \int \cancel{س^{٤}}\,\frac{(٥س-٣)^{٤}}{\cancel{س^{٤}}}\, دس$

$= \int (٥س-٣)^{٤}\, دس$

$= \frac{(٥س-٣)^{٥}}{٥ \times ٥} + جـ$

$= \frac{(٥س-٣)^{٥}}{٢٥} + جـ$

تدريب ٥ ص٣٤

جد كلاً من التكاملات الآتية

١) $\int (قتا٤س\, ظتا٤س + قتا^{٢}٣س)\, دس$

$= \frac{-قتا٤س}{٤} - \frac{ظتا٣س}{٣} + جـ$

٢) $\int \left(جتا٤س\, ظا٤س + \frac{١}{جتا^{٢}٦س}\right) دس$

$= \int \left(\frac{جتا٤س \times جا٤س}{جتا٤س} + قا^{٢}٦س\right)$

$= \int (جا٤س + قا^{٢}٦س)\, دس$

$= \frac{-جتا٤س}{٤} + \frac{ظا٦س}{٦} + جـ$

تدريب ٦ ص٣٥

جد التكاملات الآتية

١) $\int (قاس + ظاس)^{٢}\, دس$

الحل

$= \int قا^{٢}س + ٢ظاس\, قاس + ظا^{٢}س$

$= \int قا^{٢}س + ٢ظاس\, قاس + قا^{٢}س - ١$

$= ظاس + ٢قاس + ظاس - س$

$= ٢ظاس + ٢قاس - س + جـ$

٢) $\int \frac{3}{1-\text{جتا}2\text{س}}\,\text{دس}$

الحل

$= \int \frac{3}{1-(1-2\text{جا}^2\text{س})}\,\text{دس}$

$= \int \frac{3}{\cancel{1}-\cancel{1}+2\text{جا}^2\text{س}}\,\text{دس}$

$= \int \frac{3}{2}\,\text{قتا}^2\text{س}\,\text{دس}$

$= -\frac{3}{2}\,\text{ظتا س} + \text{جـ}$

٣) $\int \frac{\text{جتا}2\text{س}}{\text{جا}^2\text{س}\ \text{جتا}^2\text{س}}\,\text{دس}$

$= \int \frac{\text{جتا}2\text{س}}{(\text{جاس جتاس})^2}\,\text{دس}$

$= \int \frac{\text{جتا}2\text{س}}{(\frac{1}{2}\text{جا}2\text{س})^2} = \int \frac{\text{جتا}2\text{س}}{\frac{1}{4}\text{جا}^2 2\text{س}}$

$= \int 4\,\text{ظتا}2\text{س}\ \text{قتا}2\text{س}\,\text{دس}$

$= -4\,\frac{\text{قتا}2\text{س}}{2} + \text{جـ}$

حل آخر $= \int \frac{\text{جتا}^2\text{س} - \text{جا}^2\text{س}}{\text{جا}^2\text{س}\ \text{جتا}^2\text{س}}$

$= \int \frac{\text{جتا}^2\text{س}}{\text{جا}^2\text{س}\ \text{جتا}^2\text{س}} - \frac{\text{جا}^2\text{س}}{\text{جا}^2\text{س}\ \text{جتا}^2\text{س}}$

$= \int \frac{1}{\text{جا}^2\text{س}} - \int \frac{1}{\text{جتا}^2\text{س}}$

$= \int \text{قتا}^2\text{س} - \int \text{قا}^2\text{س}\,\text{دس} = -\text{ظتاس} - \text{ظاس} + \text{جـ}$

٤) $\int (\text{جتاس} - \text{جاس})^2\,\text{دس}$

$= \int \text{جتا}^2\text{س} - 2\text{جاس جتاس} + \text{جا}^2\text{س}$

$= \int (1 - \text{جا}2\text{س})\,\text{دس}$

$= \text{س} + \frac{\text{جتا}2\text{س}}{2} + \text{جـ}$

تمارين ومسائل

ص ٢٣٦

(٢) جد كلاً من التكاملات الآتية

أ) $\int (س^{٦} + \frac{٣}{س^{٥}} - \sqrt[٥]{س^{٢}})\, دس$

$= \int (س^{٦} + ٣س^{-٥} - س^{\frac{٢}{٥}})\, دس$

$= \frac{س^{٧}}{٧} - \frac{٣}{٤} س^{-٤} - \frac{٥}{٧} س^{\frac{٧}{٥}} + جـ$

ب) $\int (٥ + ٣ص)^{٤}\, دص$

$= \frac{(٥ + ٣ص)^{٥}}{٣ \times ٥} + جـ$

جـ) $\int \frac{س^{٣} - ٨}{س - ٢} =$

$= \int \frac{\cancel{(س - ٢)}(س^{٢} + ٢س + ٤)}{\cancel{س - ٢}}$

$= \frac{س^{٣}}{٣} + س^{٢} + ٤س + جـ$

د) $\int (٤س^{٢} + ٢٠س + ٢٥)^{٥}\, دس$

$= \int ((٢س + ٥)^{٢})^{٥}\, دس$

$= \int (٢س + ٥)^{١٠} = \frac{(٢س + ٥)^{١١}}{٢٢} + جـ$

هـ) $\int \frac{(س + ٣)^{٢} - ٩}{س}\, دس$

$= \int \frac{(س \cancel{+ ٣ - ٣})(س + ٣ + ٣)}{س}$

$= \int \frac{\cancel{س}(س + ٦)}{\cancel{س}} = \frac{س^{٢}}{٢} + ٦س + جـ$

و) $\int (١ - س)(١ - س)^{٥}\, دس$

$= \int (١ - س)^{٦}\, دس$

$= \frac{(١ - س)^{٧}}{-٧} + جـ$

ز) $\int س \sqrt[٣]{\frac{٥}{س^{٣}} - \frac{١}{س^{٢}}}\, دس$

$= \int س \sqrt[٣]{\frac{٥ - س}{س^{٣}}}$

$= \int \cancel{س} \sqrt[٣]{\frac{٥ - س}{\cancel{س}}}$

$= \int (٥ - س)^{\frac{١}{٣}}\, دس$

$= \frac{٣}{-٤} \times (٥ - س)^{\frac{٤}{٣}} + جـ$

ع) $\int \frac{س - \sqrt{س}}{\sqrt{س} - 1} \, دس$

$= \int \frac{\sqrt{س}\,\cancel{(\sqrt{س} - 1)}}{\cancel{\sqrt{س} - 1}} \, دس$

$= \int س^{\frac{1}{2}} \, دس$

$= \frac{2}{3} س^{\frac{3}{2}} + جـ$

ط) $\int \sqrt[3]{س} \left(\sqrt[3]{س} + \frac{5}{\sqrt[3]{س}} \right) دس$

فك القوس

$= \int \left(س^{\frac{2}{3}} + 5 \right) دس$

$= \frac{3}{5} س^{\frac{5}{3}} + 5س + جـ$

ي) $\int \frac{5س}{\sqrt{7س+3} + \sqrt{2س+3}} \, دس$

ضرب بالمرافق

$\int \frac{5س}{\sqrt{7س+3} + \sqrt{2س+3}} \times \frac{\sqrt{7س+3} - \sqrt{2س+3}}{\sqrt{7س+3} - \sqrt{2س+3}}$

$= \int \frac{5س \left(\sqrt{7س+3} - \sqrt{2س+3} \right)}{7س + \cancel{3} - 2س - \cancel{3}}$

$= \int \frac{\cancel{5س} \left(\sqrt{7س+3} - \sqrt{2س+3} \right)}{\cancel{5س}}$

$= \int (7س+3)^{\frac{1}{2}} - (2س+3)^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{(7س+3)^{\frac{3}{2}}}{7 \times \frac{3}{2}} - \frac{(2س+3)^{\frac{3}{2}}}{2 \times \frac{3}{2}}$

(٢) اذا كان ق كثير حدود من الدرجة الثالثة بحيث ان $ق'(س) = 3س^2 - 2$ وكانت النقطة (٠، ١) تقع على منحنى ق، جد قاعدة الاقتران ق

الحل

$ق'(س) = 3س^2 - 2$

$ق(س) = \int (3س^2 - 2س) \, دس$

$ق(س) = س^3 - س^2 + جـ$

$ق(0) = 1$

$ق(0) = 0 - 0 + جـ = 1$

$\Leftarrow جـ = 1$

$ق(س) = س^3 - س^2 + 1$

(٣) اذا كان $ق''(س) = \frac{6}{\sqrt{س}}$ ومنحنى ق يمر بالنقطة (٤، ٦) وميل المماس عند هذه النقطة يساوي (١) جد قاعدة ق(س).

الحل

$ق''(س) = \frac{6}{\sqrt{س}}$

$ق'(س) = \int 6 س^{-\frac{1}{2}} \, دس$

$ق'(س) = 2 \times 6 س^{\frac{1}{2}} + جـ$

$= 12\sqrt{س} + جـ$

$ق'(4) = 1$

$12\sqrt{4} + جـ = 1$ ⟸ يتبع

$\Leftarrow$ ٢٤ + ج = ١

$\Leftarrow$ ج = -٢٣

ق′(س) = $١٢ س^{\frac{1}{2}} - ٢٣$

ق(س) = $\int (١٢ س^{\frac{1}{2}} - ٢٣)$ دس

$= \frac{١٢}{٣} \times ٢ س^{\frac{3}{2}} - ٢٣س +$ ج

$= ٨ س^{\frac{3}{2}} - ٢٣س +$ ج

ق(٤) = ٠

$٨(٤)^{\frac{3}{2}} - ٢٣ \times ٤ +$ ج = ٠

٦٤ − ٩٢ + ج = ٠

ج = ٢٨

$\Leftarrow$ ق(س) = $٨\sqrt{س^٣} - ٢٣س + ٢٨$

④ اذا كان

$\int$ (ق′(س) + ٢س) دس = $س^٣ + ب س^٢ + ١$

وكان ق′(١) = ٥ ، ق(٢) = ٧ ، جد ق(-٢)

الحل

باشتقاق الطرفين

ق′(س) + ٢س = $٣س^٢ + ٢ب س$

ق′(١) = ٥

ق′(١) + ٢ = ٣ + ٢ب ←

٥ + ٢ = ٣ + ٢ب

٢ب = ٤ ← ب = ٢

$\Leftarrow$ ق′(س) + ٢س = $٣س^٢ + ٤س$

ق′(س) = $٣س^٢ + ٢س$

بتكامل الطرفين

$\int$ ق′(س) دس = $\int (٣س^٢ + ٢س)$ دس

ق(س) = $س^٣ + س^٢ +$ ج

لكن ق(٢) = ٧

ق(٢) = ٨ + ٤ + ج = ٧

ج = -٥

$\Leftarrow$ قاعدة ق(س) هي

ق(س) = $س^٣ + س^٢ - ٥$

ق(-٢) = -٨ + ٤ − ٥ = -٩

⑤ اذا كان ق″(س) = -٤ جتا٢س
وكان للاقتران ق(س) قيمة صغرى محلية قيمتها (-٢) عند س = $\frac{\pi}{٢}$
جد قاعدة ق.

الحل

ق″(س) = -٤ جتا٢س

بتكامل الطرفين

ق′(س) = $\int$ -٤ جتا٢س دس

$= -٤ \frac{جا٢س}{٢} +$ ج = -٢ جا٢س + ج

ق′($\frac{\pi}{٢}$) = صفر قيمة صغرى عند $\frac{\pi}{٢}$

$\Leftarrow$ -٢ جاπ + ج = ٠ ← ٠ + ج = ٠

← ج = ٠

← ق′(س) = -٢ جا٢س

$\int$ ق′(س) = $\int$ -٢ جا٢س دس

ق(س) = $-٢ \times \frac{-جتا٢س}{٢} +$ ج

ق(س) = جتا٢س + ج

ق($\frac{\pi}{٢}$) = -٢ $\Leftarrow$ جتاπ + ج = -٢

← ج = -١ ← ق(س) = جتا٢س − ١

٦) جد كلاً من التكاملات التالية

أ) $\int \left(\frac{٥}{\text{حا}^2\text{س}} - \frac{٣}{\text{حتا}^2\text{س}}\right) \text{دس}$

$= \int (٥\ \text{قتا}^2\text{س} - ٣\ \text{قا}^2\text{س})\ \text{دس}$

$= -٥\ \text{ظتاس} - ٣\ \text{ظاس} + \text{جـ}$

ب) $\int \frac{\text{حا}^2\text{س} + \text{حتا}^2\text{س}}{١ + \text{حتا}٢\text{س}}\ \text{دس}$

$= \int \frac{١}{\cancel{١} + ٢\ \text{حتا}^2\text{س} - \cancel{١}} = \frac{١}{٢} \int \frac{١}{\text{حتا}^2\text{س}}$

$= \frac{١}{٢} \int \text{قا}^2\text{س}\ \text{دس} = \frac{١}{٢}\ \text{ظاس} + \text{جـ}$

جـ) $\int (\text{ظتاس} - \text{قتاس})^2\ \text{دس}$

$= \int \text{ظتا}^2\text{س} - ٢\ \text{قتاس ظتاس} + \text{قتا}^2\text{س}$

$= \int \text{قتا}^2\text{س} - ١ - ٢\ \text{قتاس ظتاس} + \text{قتا}^2\text{س}$

$= -\text{ظتاس} - \text{س} + ٢\ \text{قتاس} - \text{ظتاس}$

$= -٢\ \text{ظتاس} - \text{س} + ٢\ \text{قتاس}$

د) $\int \frac{\text{حاس} + \text{حتا}^2\text{س}}{١ - \text{حا}^2\text{س}}\ \text{دس}$

$= \int \frac{\text{حاس} + \text{حتا}^2\text{س}}{\text{حتا}^2\text{س}}\ \text{دس}$

$= \int \left(\frac{\text{حاس}}{\text{حتا}^2\text{س}} + \frac{\text{حتا}^2\text{س}}{\text{حتا}^2\text{س}}\right) \text{دس}$

$= \int (\text{قاس ظاس} + ١)\ \text{دس}$

$= \text{قاس} + \text{س} + \text{جـ}$

هـ) $\int \frac{١ - \text{حا}^2\text{س}}{\text{حا}^2\frac{\text{س}}{٢} \times \text{حتا}^2\frac{\text{س}}{٢}}\ \text{دس}$

$= \int \frac{\text{حتا}^2\text{س}}{(\text{حا}\frac{\text{س}}{٢}\ \text{حتا}\frac{\text{س}}{٢})^2}$

$= \int \frac{\text{حتا}^2\text{س}}{(\frac{١}{٢}\text{حاس})^2}\ \text{دس} = ٤ \int \frac{\text{حتا}^2\text{س}}{\text{حا}^2\text{س}}$

$= ٤ \int \text{ظتا}^2\text{س}\ \text{دس}$

$= ٤ \int (\text{قتا}^2\text{س} - ١)\ \text{دس}$

$= -٤\ \text{ظتاس} - ٤\text{س} + \text{جـ}$

و) $\int \frac{١ - \text{حا}٢\text{س}}{\text{حاس} - \text{حتاس}}$

$= \int \frac{\text{حا}^2\text{س} + \text{حتا}^2\text{س} - ٢\ \text{حاس حتاس}}{\text{حاس} - \text{حتاس}}$

$= \int \frac{\cancel{(\text{حاس} - \text{حتاس})}(\text{حاس} - \text{حتاس})}{\cancel{\text{حاس} - \text{حتاس}}}$

$= -\text{حتاس} - \text{حاس} + \text{جـ}$

ز) ٢٠١٥

$$\int \frac{\text{جتا}٣\text{س}}{\text{جتا}\text{س}}\, \text{دس}$$

$$= \int \frac{\text{جتا}(\text{س}+٢\text{س})}{\text{جتا}\text{س}}\, \text{دس}$$

$$= \int \frac{\text{جتا}\text{س}\ \text{جتا}٢\text{س} - \text{جا}\text{س}\ \text{جا}٢\text{س}}{\text{جتا}\text{س}}$$

$$= \int \frac{\cancel{\text{جتا}\text{س}}\ \text{جتا}٢\text{س}}{\cancel{\text{جتا}\text{س}}} - \frac{\text{جا}\text{س}\ \text{جا}٢\text{س}}{\text{جتا}\text{س}}$$

$$= \int \text{جتا}٢\text{س} - \frac{\text{جا}\text{س} \times ٢\text{جا}\text{س}\ \cancel{\text{جتا}\text{س}}}{\cancel{\text{جتا}\text{س}}}$$

$$= \int \text{جتا}٢\text{س} - ٢\text{جا}^٢\text{س}$$

$$= \int \text{جتا}٢\text{س} - ٢ \times \tfrac{١}{٢}(١ - \text{جتا}٢\text{س})$$

$$= \frac{\text{جا}٢\text{س}}{٢} - \left(\text{س} - \frac{\text{جا}٢\text{س}}{٢}\right)$$

$$= \frac{\text{جا}٢\text{س}}{٢} - \text{س} + \frac{\text{جا}٢\text{س}}{٢}$$

$$= \text{جا}٢\text{س} - \text{س} + \text{ج}$$

ح)

$$\int \frac{\text{دس}}{\text{جا}^٢\text{س} - \text{جا}^٤\text{س}}\, \text{دس}$$

$$= \int \frac{\text{دس}}{\text{جا}^٢\text{س}(١ - \text{جا}^٢\text{س})}\, \text{دس}$$

$$= \int \frac{\text{دس}}{\text{جا}^٢\text{س}\ \text{جتا}^٢\text{س}}\, \text{دس}$$

$$= \int \frac{\text{دس}}{(\text{جا}\text{س}\ \text{جتا}\text{س})^٢} = \int \frac{\text{دس}}{(\tfrac{١}{٢}\text{جا}٢\text{س})^٢}$$

$$= ٤\int \frac{١}{\text{جا}^٢ ٢\text{س}} = ٤\int \text{قتا}^٢ ٢\text{س}$$

$$= -٤\ \frac{\text{ظتا}٢\text{س}}{٢} + \text{ج}$$

ط)

$$\int \text{قا}\text{س}(\text{ظا}\text{س} + \text{جتا}\text{س})$$

$$= \int (\text{قا}\text{س}\ \text{ظا}\text{س} + \text{قا}\text{س}\ \text{جتا}\text{س})$$

$$= \int (\text{قا}\text{س}\ \text{ظا}\text{س} + \frac{١}{\text{جتا}\text{س}} \times \text{جتا}\text{س})$$

$$= \text{قا}\text{س} + \text{س} + \text{ج}$$

ي) $\int \text{جا٦س جا٤س ءس}$

$= \int \frac{1}{2}\left(\text{جتا٢س} - \text{جتا١٠س}\right)\text{ءس}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{\text{جا٢س}}{2} - \frac{\text{جا١٠س}}{10}\right) + \text{ج}$

ك) $\int \text{جتا}^2\text{س ءس}$

$= \int \frac{1}{2}\left(1 + \text{جتا٢س}\right)\text{ءس}$

$= \frac{1}{2}\left(\text{س} + \frac{\text{جا٢س}}{2}\right) + \text{ج}$

ل) $\int \frac{\text{جتا}^3\text{س} - 5}{1 - \text{جا}^2\text{س}}\,\text{ءس}$

$= \int \frac{\text{جتا}^3\text{س} - 5}{\text{جتا}^2\text{س}}\,\text{ءس}$

$= \int \left(\frac{\text{جتا}^3\text{س}}{\text{جتا}^2\text{س}} - \frac{5}{\text{جتا}^2\text{س}}\right)\text{ءس}$

$= \int \left(\text{جتاس} - 5\,\text{قا}^2\text{س}\right)\text{ءس}$

$= \text{جاس} - 5\,\text{ظاس} + \text{ج}$

م) $\int \text{جتا٣س جتا٧س ءس}$

$= \int \frac{1}{2}\left(\text{جتا١٠س} + \text{جتا}(-\text{٤س})\right)\text{ءس}$

$\text{جتا}(-\text{٤س}) = \text{جتا٤س}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{\text{جا١٠س}}{10} + \frac{\text{جا٤س}}{4}\right) + \text{ج}$

ن) $\int \left(\text{جتا}^4\text{س} - \text{جا}^4\text{س}\right)\text{ءس}$

$= \int \left(\text{جتا}^2\text{س} - \text{جا}^2\text{س}\right)\left(\text{جتا}^2\text{س} + \text{جا}^2\text{س}\right)$

$= \int \text{جتا٢س} \times 1\ \text{ءس}$

$= \frac{\text{جا٢س}}{2} + \text{ج}$

س) $\int \frac{1}{\text{قاس} - 1} = \int \frac{1}{\frac{1}{\text{جتاس}} - 1}$

$= \int \frac{\text{جتاس}}{1 - \text{جتاس}} \times \frac{1 + \text{جتاس}}{1 + \text{جتاس}}$

$= \int \frac{\text{جتاس}\left(1 + \text{جتاس}\right)}{1 - \text{جتا}^2\text{س}}$

$= \int \frac{\text{جتاس} + \text{جتا}^2\text{س}}{\text{جا}^2\text{س}}\,\text{ءس}$

$= \int \frac{\text{جتاس}}{\text{جا}^2\text{س}} + \frac{\text{جتا}^2\text{س}}{\text{جا}^2\text{س}}$

$= \int \text{قتاس ظتاس} + \text{ظتا}^2\text{س}$

$= \int \text{قتاس ظتاس} + \text{قتا}^2\text{س} - 1$

$= -\text{قتاس} - \text{ظتاس} - \text{س} + \text{ج}$

ع) $\int \frac{\text{جاس}}{1 - \text{جاس}} \times \frac{1 + \text{جاس}}{1 + \text{جاس}}$

$= \int \frac{\text{جاس}\left(1 + \text{جاس}\right)}{1 - \text{جا}^2\text{س}}$ ... أكمل الحل ؟

الجواب $= \text{قاس} + \text{ظاس} - \text{س} + \text{ج}$

أسئلة الوزارة

وزارة (٢٠٠٨) شتوية

$\int \frac{2}{1+\text{جتا}2\text{س}}\,\text{دس} =$

أ) $\text{قاس} + \text{جـ}$ ب) $\text{ظاس} + \text{جـ}$

جـ) $-\text{قتاس} + \text{جـ}$ د) $-\text{ظتاس} + \text{جـ}$

الحل $= \int \frac{2}{\cancel{1}+2\text{جتا}^2\text{س}\cancel{-1}}$

$= \int \frac{1}{\text{جتا}^2\text{س}}\,\text{دس} = \int \text{قا}^2\text{س}\,\text{دس}$

$= \text{ظاس} + \text{جـ}$ الجواب (ب)

وزارة (٢٠٠٨) صيفية

$\int \frac{\text{د(س)}}{\text{جتا}^2\text{س} - 1}$

أ) $-\text{ظتاس} + \text{جـ}$ ب) $\text{ظاس} + \text{جـ}$

جـ) $\text{ظتاس} + \text{جـ}$ د) $-\text{ظاس} + \text{جـ}$

الحل

$= \int -\frac{1}{\text{جا}^2\text{س}}\,\text{دس} = -\int \text{قتا}^2\text{س}\,\text{دس}$

$= +\text{ظتاس} + \text{جـ}$ الجواب (جـ)

وزارة (٢٠١٩) شتوية

$\int \frac{\text{ظاس}}{\text{جتاس}}\,\text{دس} =$

أ) $-\text{قاس} + \text{جـ}$ ب) $\text{قاس} + \text{جـ}$

جـ) $-\text{قتاس} + \text{جـ}$ د) $\text{قتاس} + \text{جـ}$

الحل $= \int \frac{\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}}{\text{جتاس}} = \int \frac{\text{جاس}}{\text{جتا}^2\text{س}}$

$= \int \text{قاس ظاس} = \text{قاس} + \text{جـ}$

وزارة (٢٠١٠) شتوية

$\int \frac{\text{د(س)}}{\text{جا}^2\text{س} - 1} =$

أ) $\text{ظاس} + \text{جـ}$ ب) $-\text{ظاس} + \text{جـ}$

جـ) $-\text{ظتاس} = \text{س} + \text{جـ}$ د) $-\text{ظتاس} + \text{جـ}$

الحل $= \int \frac{1}{-\text{جتا}^2\text{س}} = -\int \text{قا}^2\text{س}\,\text{دس}$

$= -\text{ظاس} + \text{جـ}$ الجواب (ب)

وزارة (٢٠١٤) شتوية

(١) اذا كان $\text{ق}''(\text{س}) = \text{جاس}$
$\text{ق}'(\pi) = -1$ ، $\text{ق}(\pi) = \text{صفر}$
جد قاعدة ق(س) ؟

الحل

$\text{ق}'(\text{س}) = \int \text{جاس}\,\text{دس}$

$= -\text{جتاس} + \text{جـ}$

$\text{ق}'(\pi) = -\text{جتا}\pi + \text{جـ} = -1$

$\boxed{\text{جـ} = -2} \Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = -\text{جتاس} - 2$

$\text{ق}(\text{س}) = \int -\text{جتاس} - 2\,\text{دس}$ ⟸ يتبع

ق(س) = − جاس − جتاس + جـ

ق(π) = صفر

− جاπ − π × ٢ + جـ = صفر

⟸ جـ = ٢π

ق(س) = − جاس − جتاس + ٢π

② ∫ (ظاس + قاس)^{٢}

الحل = ∫ ظا^{٢}س + ٢قاس ظاس + قا^{٢}س

= ∫ قا^{٢}س − ١ + ٢قاس ظاس + قا^{٢}س

= ∫ ٢قا^{٢}س − ١ + ٢قاس ظاس

= ٢ظاس − س + ٢قاس + جـ

وزارة (٢٠١٥) شتوية

① اذا كان

∫ (ق'(س) + س^{٢}) دس = ٢س^{٣} + جـس^{٢} + ٢

وكان ق'(١) = ٤ ، ق(٢) = ٦ جد ق(−١)

الحل

باشتقاق الطرفين

ق'(س) + س^{٢} = ٦س^{٢} + ٢جـس

ق'(١) + ١ = ٦ + ٢جـ

٤ + ١ = ٦ + ٢جـ

٢جـ = −١ ⟵ جـ = $-\frac{١}{٢}$

ق'(س) = ٥س^{٢} − س

ق(س) = ∫ (٥س^{٢} − س) دس

ق(س) = $\frac{٥}{٣}$ س^{٣} − $\frac{س^{٢}}{٢}$ + جـ

ق(٢) = $\frac{٥}{٣}$ × ٨ − $\frac{٤}{٢}$ + جـ = ٦

$\frac{٤٠}{٣}$ − $\frac{٤}{٢}$ + جـ = ٦

⟵ ٨ = $\frac{٤٠}{٣}$ + جـ ⟸ جـ = $\frac{-١٦}{٣}$

ق(س) = $\frac{٥}{٣}$ س^{٣} − $\frac{س^{٢}}{٢}$ − $\frac{١٦}{٣}$

ق(−١) = $\frac{٥}{٣}$ (−١)^{٣} − $\frac{(−١)^{٢}}{٢}$ − $\frac{١٦}{٣}$

= $\frac{-٥}{٣}$ − $\frac{١}{٢}$ − $\frac{١٦}{٣}$ = $\frac{-١٥}{٢}$

② ∫ $\frac{٥ جا^{٢}س + ٥ جتا^{٢}س}{٣ + ٣ جتا٢س}$ دس

الحل = $\frac{٥}{٣}$ ∫ $\frac{جا^{٢}س + جتا^{٢}س}{١ + جتا٢س}$

= $\frac{٥}{٣}$ ∫ $\frac{١}{١ + جتا٢س}$

= $\frac{٥}{٣}$ ∫ $\frac{١}{\cancel{١} + ٢جتا^{٢}س \cancel{−١}}$

= $\frac{٥}{٦}$ ∫ قا^{٢}س دس

= $\frac{٥}{٦}$ ظاس + جـ

وزارة (٢٠١٥) صيفية

$\int \frac{\text{جتا٣س}}{\text{جتاس}}$ دس

الحل

$= \int \frac{\text{جتا(س + ٢س)}}{\text{جتاس}}$ دس   متطابقة جتا(أ+ب)

$= \int \frac{\text{جتاس جتا٢س}}{\text{جتاس}} - \frac{\text{جاس جا٢س}}{\text{جتاس}}$

$= \int \text{جتا٢س} - \frac{\text{جاس} \times \text{٢جاس جتاس}}{\text{جتاس}}$

$= \int (\text{جتا٢س} - \text{٢جا}^2\text{س})$ دس

$= \int \text{جتا٢س} - ٢\left(\frac{١}{٢}(١ - \text{جتا٢س})\right)$

$= \frac{\text{جا٢س}}{٢} - \left(\text{س} - \frac{\text{جا٢س}}{٢}\right) + \text{جـ}$

$= \frac{\text{جا٢س}}{٢} - \text{س} + \frac{\text{جا٢س}}{٢} + \text{جـ}$

$=$ جا٢س − س + جـ

وزارة (٢٠١٦) صيفية

اذا كان $\int$ ٢ ق'(س) دس = ٢س + جاس − $\int$ جتاس ق'(س) دس

جد ق'(٠)

الحل باشتقاق الطرفين

٢ق'(س) = ٢ + جتاس − جتاس ق'(س)

٢ق'(س) + جتاس ق'(س) = ٢ + جتاس

ق'(س) (٢ + جتاس) = ٢ + جتاس

$\text{ق'(س)} = \frac{\text{٢ + جتاس}}{\text{٢ + جتاس}} = ١$

$\Leftarrow$ ق'(٠) = ١

ورقة عمل

① اذا كان ق(س) = $\int$ (-س^2 + ٥س + ١) فان ق$'$(١) =

أ) ١ ب) ٣ ج) ٥ د) ٧

② اذا كان منحنى الاقتران ق(س) يمر بالنقطة (١، ٤) وكان ق$'$(س) = ٢س + ٥ فان قاعدة الاقتران ق هي:

أ) ق(س) = س^2 + ٥س - ٢ ب) ق(س) = س^2 - ٥

ج) ق(س) = س^2 + ٥س + ٢ د) ق(س) = س^2 + ٥

③ $\int \pi^2$ دس =

أ) صفر ب) ٢π + جـ ج) π^2س + جـ

د) $\frac{\pi^3}{3}$ + جـ

④ اذا كان $\int$ ق$'$(س) دس = ٣س^2 - ٥س + جـ

فان ق$'$(٢) =

أ) -٢ ب) صفر ج) ٢ د) ٧

⑤ اذا كان م$_1$(س) ، م$_2$(س) معكوسين لمشتقة الاقتران ق(س) الذي فيه ق(١) = ٥

هـ(س) = م$_1$(س) - م$_2$(س) ، فان هـ$'$(١) =

أ) ٥ ب) صفر ج) -٥ د) ١

⑥ اذا كان م ، ل معكوسين لمشتقة الاقتران ق(س) وكان

م(س) = س^2 - ٤س + ٦ وكان

ل(٣) = ٤ ، فان ل(١) =

أ) ٣ ب) ٤ ج) -٢ د) ٢

⑦ اذا كان

$\int$ ق(س) دس = س جا πس جد ق($\frac{1}{2}$)

أ) π ب) -π ج) ٠ د) ١

⑧ اذا كان م(س) معكوس لمشتقة الاقتران ق(س) المتصل على مجاله حيث م(س) = ٤$\sqrt{س}$ - ٢س فان ق(٤) =

أ) -١ ب) ١ ج) ١٢ د) -١٢

⑨ اذا كان م ، هـ اقترانين معكوسين لمشتقة الاقتران ق(س) المتصل على مجاله وكان

ل(س) = م(س) - ٢ ظتا $\frac{س}{2}$ - هـ(س)

فان ل$'$(π) =

أ) -١ ب) ١ ج) $\frac{1}{2}$ د) -$\frac{1}{2}$

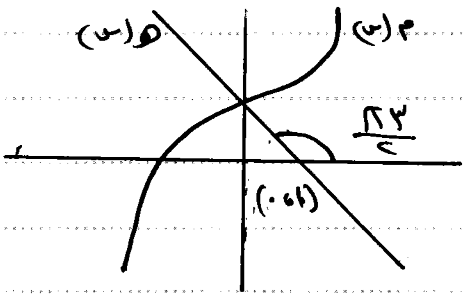
⑩ ق(س) = ظا^{2}س وكان م(س) معكوس مشتقة ق(س) أوجد م(س)

أ) ظا^{2}س + جـ ب) ظا س + جـ

ج) ظا س - س + جـ د) ظا س + س + جـ

(١١) اذا كان ق(س) كثير حدود من الدرجة الثانية وكان هـ(س) = ∫ ق(س) دس وكان ق(١) = −٥ ، هـَ(٢) = ١ ، هـً(٣) = ٦ أوجد ق(س)

(١٢) الشكل المجاور يمثل منحنى م(س) ، هـ(س) حيث م(س) اقتران معكوس مشتقة ق(س) = ٣س٢ جد م(−١)؟



(١٣) جد قاعدة الاقتران ق(س) علماً بان قً(س) = قَ(س)
قَ(٠) = ١ ، ق(٠) = ١

(١٤) اذا كان ق(س) = أس + ب وكان م(س) معكوس لمشتقة ق(س) بحيث ان مَ(٢) = ٧ ، مً(٢) = ٢ أوجد أ ، ب ؟

(١٥) اذا كانت قً(س) = ٦س − ٤ وكان للاقتران ص = ق(س) قيمة صغرى محلية تساوي ٥ عندما س = ١ جد معادلة المنحنى

(١٦) اذا كان ميل المماس لمنحنى ق(س) عند (١،٨) الواقعة عليه يساوي (٤) أوجد معادلة هذا المنحنى علماً بان قً(س) = ١٢س − ١٠

(١٧) اذا كان معدل تغير ميل المماس لمنحنى يساوي جتا٢س ، وكان المستقيم س − ص + ١ = ٠ مماساً لهذا المنحنى عند النقطة (٠،١) فاوجد معادلة هذا المنحنى

(١٨) اذا كان ميل المماس لمنحنى ق(س) هو ٢جاس جتاس وكان منحنى ق(س) يمر بالنقطة (٠،٢) جد قاعدة الاقتران

(١٩) تتحرك نقطة في الربع الأول بحيث ميل المماس للمنحنى هو قا٢س جد قاعدة المنحنى ق(س) المار بالنقطة ($\frac{\pi}{4}$ ، ٣)

(٢٠) اوجد معادلة المنحنى ص = ق(س) اذا علمت ان قً(س) = أس + ب وان (٠،١) صغرى محلية ، (١،١) نقطة انعطاف

٢١) اذا كان ميل المماس لمنحنى ص = ق(س) عند النقطة (١، -١) يساوي (١٠) فاوجد معادلة هذا المنحنى علماً بأن

$$\frac{د^2ص}{دس^2} = 18س - 8$$

٢٢) اذا كانت ق''(س) = ٦ جد ق(٢) علماً بأن منحنى ق(س) يمر بالنقطتين (-١، ٥)، (١، ٣)

٢٣) اذا كانت ق''(س) = ٦س وكان ٢ص + س = ٥ عمودياً على منحنى ق(س) عند س = -١ جد ق(س)

٢٤) اذا كانت ق''(س) = $\frac{6}{س^3}$ وكان لمنحنى ق(س) مماساً عند النقطة (-١، ٥) ميله = ٢ اوجد ق(س)

٢٥) اوجد التكاملات الآتية

١) $\int \frac{دس}{س^2+4س+4}$

٢) $\int س\sqrt{\frac{3}{س^2}-\frac{1}{س}}\ دس$

٣) $\int \sqrt{س\sqrt{س\sqrt{س}}}\ دس$

٤) $\int س^{10}\left(\frac{3}{س}-5\right)^{10} دس$

٥) $\int \frac{2س^3+16}{5س+10}\ دس$

٦) $\int س\sqrt[3]{\frac{2}{س^3}+\frac{5}{س^4}}$

٧) $\int \frac{س-2\sqrt{س}+1}{1-\sqrt{س}}$

٨) $\int \frac{جتا^4س}{جا^2س}\ دس$

٩) $\int \left(\frac{1}{قا^2س}+\frac{1}{قتا^2س}\right) دس$

١٠) $\int \frac{جا^2س - جاس - 2}{2 - جاس}\ دس$

١١) $\int \frac{جا^3س - جتا^3س}{جاس - جتاس}\ دس$

١٢) $\int \frac{1-جا2س}{جاس - جتاس}$

١٣) $\int جتا3س\,(جتاس\,جتا2س - جا2س\,جاس)$

(١٤) $\int \frac{٢ + ٢\,\text{حتا}^{٣}\text{س}}{١ + \text{حتا س}}$

(١٥) $\int \frac{٢\,\text{حا}٣\text{س}\ \text{حاس} + \text{حتا}٤\text{س}}{\text{حتا}^{٢}\text{س} - \text{حا}^{٢}\text{س}}$

(١٦) $\int \text{حا}٤\text{س}\ \text{حتا}٨\text{س}\ ء\text{س}$

(١٧) $\int (٦ - \text{ظا}^{٢}\text{س})\ ء\text{س}$

(١٨) $\int \left(\text{حا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢} - \text{حتا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}\right)$

(١٩) $\int ٤\,\text{حا}٣\text{س}\ \text{حتا}٣\text{س}\ ء\text{س}$

(٢٠) $\int \text{ظا}(٢\text{س}-١)\ \text{قا}(٢\text{س}-١)\ ء\text{س}$

(٢١) $\int \sqrt[٣]{\text{س}\sqrt{\text{س}\sqrt{\text{س}}}}\ ء\text{س}$

(٢٢) $\int \text{ظاس}(\text{ظاس} + \text{قاس})\ ء\text{س}$

(٢٣) $\int \frac{١}{(\text{حتا}٤\text{س} - \text{حا}٤\text{س})^{٢}}$

(٢٤) $\int \frac{\text{حا}^{٣}\text{س} - ٧}{١ - \text{حتا}^{٢}\text{س}}\ ء\text{س}$

الدرس الثالث

التكامل المحدود

تعريف

اذا كان م(س) معكوساً لمشتقة الاقتران ق ، يسمى $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س)}\, \text{دس}$ بالتكامل المحدود

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س)} \cdot \text{دس} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{م}'\text{(س)} \cdot \text{دس}$$

$$= \text{م(س)} \Big]_{\text{أ}}^{\text{ب}}$$

$$= \text{م(ب)} - \text{م(أ)}$$

ب : الحد العلوي أ : الحد السفلي

وهنا نقوم بإجراء التكامل تماماً كما في التكامل غير المحدود ولكن بدون ان نكتب ثابت التكامل (جـ) بل نقوم هنا بالتعويض .

التكامل المحدود للأقتران ق'(س) في الفترة [أ ، ب] هو

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}'\text{(س)} \cdot \text{دس} = \text{ق(س)} \Big]_{\text{أ}}^{\text{ب}}$$

$$= \text{ق(ب)} - \text{ق(أ)}$$

ملاحظة هامة

① في التكامل المحدود لا نكتب جـ لأنه يتم حذفها دائماً

② دائماً تعويض الحد الأعلى − تعويض الحد الأدنى

③ قواعد التكامل المحدود هي نفس قواعد التكامل غير المحدود

مثال ①

اذا كان ق(٣) = ٥ ، ق(٤) = ١٠

اوجد $\int_{3}^{4} \text{ق}'\text{(س)} \cdot \text{دس}$

أ) −٥ ب) ٥ جـ) ١٠ د) ٤

الحل

$$= \text{ق(س)} \Big]_{3}^{4} = \text{ق(٤)} - \text{ق(٣)}$$

$$= ١٠ - ٥ = ٥$$

الجواب (ب)

مثال ②

$$\int_{-٣}^{٦} (٢\text{س} - ٦)\, \text{ءس} = \left[\frac{٢\text{س}^٢}{٢} - ٦\text{س}\right]_{-٣}^{٦}$$

$$= (٣٦ - ٣٦) - (٩ + ١٨) = ٢٧$$

مثال ③

$$\int_{٣}^{١} ٢\text{س}\, \text{ءس} = \text{س}^٢ \Big]_{٣}^{١} = ١ - ٩ = -٨$$

مثال ④

$$\int_{١}^{٣٢} \frac{٤}{\sqrt[٥]{\text{س}^٣}} = \int_{١}^{٣٢} ٤\text{س}^{\frac{-٣}{٥}}\, \text{ءس}$$

$$= ٤ \times \frac{٥}{٢} \text{س}^{\frac{٢}{٥}} \Big]_{١}^{٣٢} = ١٠ \sqrt[٥]{\text{س}^٢} \Big]_{١}^{٣٢}$$

$$= ١٠ \left((\sqrt[٥]{٣٢})^٢ - (\sqrt[٥]{١})^٢ \right) = ١٠(٤ - ١) = ٣٠$$

مثال ⑤

اذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً على مجاله $\int \text{ق(س)}\, \text{ءس} = \text{قا}^٢\text{س} - \text{ظا}^٢\text{س} + \text{س}^٢$ فإن $\int_{-١}^{٢} \text{ق}'(\text{س}) =$

أ) ٢ ب) ٣ ج) ٧ د) ٦

الحل

$\int \text{ق(س)} =$ لكن $\int \text{ق(س)}\, \text{ءس} = ١ + \text{س}^٢$ متطابقة

باشتقاق الطرفين

$$\text{ق(س)} = ٢\text{س}$$

$$= \text{ق}(٢) - \text{ق}(-١) = ٤ + ٢ = ٦$$

مثال ⑥

قاعدة كثير الحدود ق(س) من الدرجة الأولى بحيث ق'(١) = ٢ ، $\int_{٠}^{١} \text{ق(س)}\, \text{ءس} = \frac{١}{٢}$ هي

أ) $٢\text{س} + \frac{١}{٢}$ ب) $٢\text{س} + \frac{٣}{٢}$

ج) $٢\text{س} - \frac{١}{٢}$ د) $٢\text{س} - \frac{٣}{٢}$

الحل

$$\text{ق(س)} = \text{أس} + \text{ب}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \text{أ} \Leftarrow \text{ق}'(١) = ٢$$

$$\Leftarrow \text{أ} = ٢$$

$$\int_{٠}^{١} ٢\text{س} + \text{ب}\, \text{ءس} = \frac{١}{٢}$$

$$\left[\frac{٢\text{س}^٢}{٢} + \text{بس}\right]_{٠}^{١} = \frac{١}{٢}$$

$$١ + \text{ب} = \frac{١}{٢}$$

$$\text{ب} = -\frac{١}{٢}$$

$$\text{ق(س)} = ٢\text{س} - \frac{١}{٢} \quad \text{(ج)}$$

مثال ⑦

$$\int_{١}^{١٦} \frac{١}{\sqrt{\text{س}^٣}}\, \text{ءس} = \int_{١}^{١٦} \text{س}^{\frac{-٣}{٢}}\, \text{ءس}$$

$$= \left[-٢\text{س}^{\frac{-١}{٢}} \right]_{١}^{١٦} = \left[\frac{-٢}{\sqrt{\text{س}}} \right]_{١}^{١٦}$$

$$= \frac{-٢}{٤} - \left(\frac{-٢}{١} \right) = -\frac{١}{٢} + ٢$$

$$= \frac{٣}{٢}$$

مثال (8)

$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}$ قتاس ظتاس دس =

أ) $2-\frac{2}{\sqrt{3}}$ ب) $-2-\frac{2}{\sqrt{3}}$

ج) $-2+\frac{2}{\sqrt{3}}$ د) $2+\frac{2}{\sqrt{3}}$

الحل

$= -$ قتاس $\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} =$

$= -($ قتا $\frac{\pi}{6} -$ قتا $\frac{\pi}{3})$

$= -\left(\frac{1}{\text{جا}\frac{\pi}{6}} - \frac{1}{\text{جا}\frac{\pi}{3}}\right) = -\left(\frac{1}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)$

$= -\left(2 - \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -2 + \frac{2}{\sqrt{3}}$

(ج)

مثال (9)

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ جاس جتاس =

أ) $\frac{1}{2}$ ب) -2 ج) 2 د) $-\frac{1}{2}$

الحل $= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}$ جا٢س دس

$= \left(\frac{1}{2} \times - \frac{\text{جتا}2س}{2}\right)\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$

$= -\frac{1}{4}($ جتا $\pi -$ جتا $0)$

$= -\frac{1}{4}(-1-1) = -\frac{1}{4} \times -2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

(أ)

مثال (10)

جد $\int_{1}^{3} \left(س^2 + \int_{1}^{2} 2ص \, دص\right) دس$

الحل

$\int_{1}^{3} \left(س^2 + 2\frac{ص^2}{2}\Big]_{1}^{2}\right) دس$

$\int_{1}^{3} \left(س^2 + 2\left(2 - \frac{1}{2}\right)\right) دس$

$\int_{1}^{3} \left(س^2 + 3\right) دس$

$= \frac{س^3}{3} + 3س\Big]_{1}^{3} = 18 - \left(\frac{1}{3} + 3\right)$

$= \frac{44}{3}$

مثال (11)

اذا كان

$\int_{1}^{3} \left(3س^2 - 2\int_{0}^{ج} 3م \, دم\right) دس = -20$

جد قيمة الثابت ج ؟

نجد $\int_{0}^{ج} 3م \, دم = \frac{3م^2}{2}\Big]_{0}^{ج}$

$= \frac{3ج^2}{2}$

$\int_{1}^{3} 3س^2 - 3ج^2 = -20$

$= س^3 - 3ج^2س\Big]_{1}^{3} = -20$

$(27 - 9ج^2) - (-1 + 3ج^2) = -20$

$28 - 12ج^2 = -20$

$12ج^2 = 48$ $ج^2 = 4$

$ج = \pm 2$

مثال (١٢)

اذا كان ن عدداً صحيحاً موجباً فما هي مجموعة قيم ن ، بحيث أن

$\int_{-1}^{1} س^{ن} ءس = ٢ \int_{0}^{1} س^{ن} ءس$

الحل

الطرف الايمن $= \int_{-1}^{1} س^{ن} . ءس$

$= \left[\frac{س^{ن+1}}{ن+1}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{ن+1} - \frac{(-1)^{ن+1}}{ن+1}$

الطرف الايسر

$= ٢ \left[\frac{س^{ن+1}}{ن+1}\right]_{0}^{1} = \frac{2}{ن+1}$

$\Leftarrow \frac{1}{ن+1} - \frac{(-1)^{ن+1}}{ن+1} = \frac{2}{ن+1}$

$\frac{1-(-1)^{ن+1}}{ن+1} = \frac{2}{ن+1}$

$\Leftarrow 1-(-1)^{ن+1} = 2$

$(-1)^{ن+1} = -1$

$\Leftarrow$ ن + ١ عدد فردي ← ن زوجي

ن ∈ {٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ---}

مثال (١٣)

اذا كان ق(٢) = ٧ ، ق(٦) = ١٠

فاوجد $\int_{2}^{6} (ق'(س) + ٢) ءس$

أ) ١١ ب) -١١ جـ) ٢٢ د) -٢٢

الحل

$\int_{2}^{6} (ق'(س) + 2) ءس = \left[ق(س) + ٢س\right]_{2}^{6}$

$= (ق(٦) + ٢×٦) - (ق(٢) + ٤)$

$= (١٠ + ١٢) - (٧ + ٤) = ٢٢ - ١١$

$= ١١$ (أ)

قاعدة

$\int_{أ}^{ب} جـ \, ءس = جـ (ب - أ)$

= ثابت (الاعلى - الأدنى)

مثال (١٤)

جد قيمة التكاملات التالية

١) $\int_{2}^{5} ٣ ءس = ٣(٥-٢) = ٩$

٢) $\int_{-2}^{3} -٤ ءس = -٤(٣ - -٢)$

$= -٤ × ٥ = -٢٠$

مثال (١٥)

اوجد قيمة م فيما يلي

① $\int_{1}^{3} م \, دس = 8$

$م(3-1) = 8 \Leftarrow 2م = 8$

$م = 4$

② $\int_{م}^{2م} 3 \, دس = 6$

$3(2م - م) = 6 \Leftarrow 3م = 6$

$م = 2$

③ $\int_{م+1}^{2+3م} 5 \, دس = 40$

$5(2 + 3م - 1 - م) = 40$

$5(1 + 2م) = 40$

$1 + 2م = 8 \Leftarrow 2م = 7$

$م = \frac{7}{2}$

مثال (١٦)

اذا كان $م = \int_{0}^{\frac{\pi}{8}} جا^2 س \, دس$

$ن = \int_{0}^{\frac{\pi}{8}} جتا^2 س \, دس$ جد قيمة

① م + ن ② ن − م

الحل

$م + ن = \int_{0}^{\frac{\pi}{8}} جا^2 س + \int_{0}^{\frac{\pi}{8}} جتا^2 س \, دس$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{8}} جا^2 س + جتا^2 س$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{8}} 1 \, دس = 1(\frac{\pi}{8} - 0) = \frac{\pi}{8}$

② $ن - م = \int_{0}^{\frac{\pi}{8}} (جتا^2 س - جا^2 س) \, دس$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{8}} جتا ٤س$

$= \frac{1}{4} جا ٤س \Big]_{0}^{\frac{\pi}{8}} = \frac{1}{4}(جا \frac{\pi}{4} - صفر)$

$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4\sqrt{2}}$

مثال (١٧)

اذا كان م(س) ، هـ(س) اقترانين معكوسين لمشتقة ق(س) المتصل على [٣ ، ٥] وكان $\int_{3}^{5} م(س) - هـ(س) = 8$

فاوجد $\int_{1}^{4} (س \, م(س) - س \, هـ(س)) \, دس$

الحل

الفرق بين اي معكوسين = ثابت

$\int_{3}^{5} جـ \, دس = 8 \Leftarrow جـ(5-3) = 8$

$\leftarrow 2جـ = 8 \Leftarrow جـ = 4$

اي ان م(س) − هـ(س) = ٤

$\Leftarrow \int_{1}^{4} س(م(س) - هـ(س)) \, دس$

$= \int_{1}^{4} س \times 4 \, دس = \int_{1}^{4} 4س \, دس$

$= \frac{4س^2}{2} \Big]_{1}^{4}$

$= 32 - 2 = 30$

مثال (١٨)

اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \int_{١}^{٥} \sqrt{\text{س}^2+١}\ \text{دس}$ فان $\text{ق}'(٢)$

أ) ٢ ب) $\sqrt{٥}$ ج) صفر د) ١

الحل

$\text{ق}'(\text{س}) = $ صفر لأن الناتج من التكامل المحدود ثابت ومشتقة الثابت = صفر

$\text{ق}'(٢) = $ صفر (ج)

ملاحظة هامة

مشتقة التكامل المحدود = صفر

$$\frac{\text{د}}{\text{دس}}\left(\int_{\text{م}}^{\text{ل}} \text{ق}(\text{س})\ \text{دس}\right) = \text{صفر}$$

مثال (١٩)

اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^3 + \int \frac{٣\text{س}}{\text{س}+٢}\ \text{دس} - \int_{-١}^{٤} \frac{\text{س}^2}{\text{س}+٧}$

جد $\text{ق}'(١)$

الحل

$\text{ق}'(\text{س}) = ٣\text{س}^2 + \frac{٣\text{س}}{\text{س}+٢} - \text{صفر}$

$\text{ق}'(١) = ٣ + \frac{٣}{٣} = ٣ + ١$

$= ٤$

مثال (٢٠)

اذا كان $\text{م}(\text{س}) = ٢\text{س}^2 - ٤\text{س} + \text{جـ}$ مقلوباً لمشتقة $\text{ق}(\text{س})$ المتصل على $[١ ، ٣]$ اوجد $\int_{١}^{٣} \text{ق}(\text{س})\ \text{دس}$

الحل

$\int_{١}^{٣} \text{ق}(\text{س})\ \text{دس} = \text{م}(٣) - \text{م}(١)$

$= ٢(٣)^2 - ٤\times٣ + \text{جـ} - (٢(١)^2 - ٤\times١ + \text{جـ})$

$= ١٨ - ١٢ + \cancel{\text{جـ}} - ٢ + ٤ - \cancel{\text{جـ}}$

$= ٦ + ٢ = ٨$

مثال (٢١)

اذا كان

$\int \text{ق}(\text{س})\ \text{دس} = \text{س}^2 + \int \left(٥\text{س} - \int_{٠}^{١} ٢\text{ص}\ \text{دص}\right) \text{دس}$

اوجد $\text{ق}(-١)$

الحل

باشتقاق الطرفين

$\text{ق}(\text{س}) = ٢\text{س} + ٥\text{س} - \int_{٠}^{١} ٢\text{ص}\ \text{دص}$

$= ٧\text{س} - [\text{ص}^2]_{٠}^{١} = ٧\text{س} - ١$

مثال (٢٢)

اذا كان $\int \text{ق}(\text{س})\ \text{دس} = \text{س}^2 - ٤\text{س} + ٩$

وكان $\int_{-١}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\ \text{دس} = ٧$ اوجد قيمة ب؟

الحل

$\int_{-١}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\ \text{دس} = [\text{س}^2 - ٤\text{س} + ٩]_{-١}^{\text{ب}}$

$(\text{ب}^2 - ٤\text{ب} + ٩) - (١+٤+٩) = ٧$

$\Leftarrow \text{ب}^2 - ٤\text{ب} - ١٢ = ٠$

$(\text{ب} - ٦)(\text{ب} + ٢) = ٠$

$\text{ب} = ٦$ ، $\text{ب} = -٢$

مثال (٢٣)

اذا كان $\int_{0}^{1} \left(س^{م} - س^{\frac{1}{م}}\right) دس = ٢$

جد قيمة م ؟

الحل

$$\left[\frac{س^{م+1}}{1+م} - \frac{س^{\frac{م+1}{م}}}{\frac{م+1}{م}}\right]_{0}^{1} = ٢$$

$$\frac{(1)^{1+م}}{1+م} - \frac{م\,(1)^{\frac{م+1}{م}}}{1+م} - 0 = ٢$$

$$\frac{1}{1+م} - \frac{م}{1+م} = ٢$$

$$\frac{1-م}{1+م} = ٢$$

$\Leftarrow$ $1 - م = ٢م + ٢$

$٣م = -1 \quad , \quad م = \frac{-1}{٣}$

مثال (٢٤)

بين ان $\int_{0}^{1} س^{ن}\, دس + \int_{0}^{1} س^{\frac{1}{ن}}\, دس = 1$

الحل

$$= \left[\frac{س^{ن+1}}{ن+1}\right]_{0}^{1} + \left[\frac{ن\, س^{\frac{ن+1}{ن}}}{ن+1}\right]_{0}^{1}$$

$$= \frac{1}{ن+1} + \frac{ن}{ن+1}$$

$$= \frac{ن+1}{ن+1} = 1$$

مثال (٢٥)

جد $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1 + جتا٢س}{٢}}\, دس$

الحل

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\cancel{1} + ٢جتا^{2}س \cancel{-1}}{\cancel{٢}}} = \int_{0}^{\pi} \sqrt{جتا^{2}س}$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} |جتاس|$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} جتاس\, دس$$

$$= \left[جاس\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 1 - 0 = 1$$

خواص التكامل المحدود

خاصية ١

١) $\int_{أ}^{ب} جـ \times ق(س)\, دس = جـ \int_{أ}^{ب} ق(س)\, دس$

اخراج الثابت خارج التكامل

٢) $\int_{أ}^{ب} \left(ق(س) \mp هـ(س)\right) .\, دس$

$= \int_{أ}^{ب} ق(س) .\, دس \mp \int_{أ}^{ب} هـ(س) .\, دس$

توزيع التكامل على الجمع والطرح

مثال ١

اذا كان $\int_{١}^{٥} ق(س) .\, دس = ١٤$

$\int_{١}^{٥} هـ(س) .\, دس = ٩$ اوجد مايلي

١) $\int_{١}^{٥} ٣ ق(س)\, دس + \int_{١}^{٥} ٢ هـ(س)\, دس$

الحل $٣ \times ١٤ + ٢ \times ٩ = ٦٠$

٢) $\int_{١}^{٥} \left(٢ق(س) + هـ(س) + ٣س^{٢}\right) دس$

$= ٢ \times ١٤ + ٩ + س^{٣} \Big]_{١}^{٥}$

$= ٣٧ + ١٢٥ - ١$

$= ١٦١$

مثال ٢

اذا كان $\int_{٥}^{٧} ق(س) .\, دس = ٧$

$\int_{٥}^{٧} ٣ هـ(س)\, دس = ٩$ أوجد مايلي

١) $\int_{٥}^{٧} \left(ق(س) + هـ(س)\right) دس$

$= ٧ + ٣ = ١٠$

٢) $\int_{٥}^{٧} \left(هـ(س) + ٢س + ٤\right) دس$

$= ٣ + \left(س^{٢} + ٤س \Big]_{٥}^{٧}\right)$

$= ٣ + (٤٩ + ٢٨) - (٢٥ + ٢٠)$

$= ٣ + ٧٧ - ٤٥$

$= ٨٠ - ٤٥ = ٣٥$

مثال ٣

اذا كان $\int_{١}^{٣} \left(٢ق(س) + \frac{١}{س^{٢}} - ٦\right) دس = ١٢$

فاوجد $\int_{١}^{٣} \left(\frac{ق(س)}{٢} - ٣س^{٢}\right) دس$

الحل

$٢\int_{١}^{٣} ق(س) + \int_{١}^{٣} \frac{١}{س^{٢}} - \int_{١}^{٣} ٦\, دس = ١٢$

$٢\int_{١}^{٣} ق(س) + \int_{١}^{٣} س^{-٢} - ٦(٣ - ١) = ١٢$

$٢\int_{١}^{٣} ق(س) + \frac{س^{-١}}{-١}\Big]_{١}^{٣} - ١٢ = ١٢$

يتبع ←

$\int_{1}^{3} \text{ق}(\text{س}) = -\frac{1}{\text{س}}\Big]_{1}^{3} = ٢٤$

$٢\int_{1}^{3} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} \quad -\frac{1}{٣} + ١ = ٢٤$

$٢\int_{1}^{3} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٢٤ - \frac{٢}{٣} = \frac{٧٠}{٣}$

$\int_{1}^{3} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \frac{٧٠}{٦} = \frac{٣٥}{٣}$

جد $\int_{1}^{3} \left(\frac{\text{ق}(\text{س})}{٢} - ٣\text{س}^{2}\right)\text{دس}$

$= \frac{1}{2}\int_{1}^{3} \text{ق}(\text{س}) - \frac{\cancel{٣}\text{س}^{3}}{\cancel{٣}}\Big]_{1}^{3}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{٣٥}{٣} - (٢٧ - ١)$

$= \frac{٣٥}{٦} - ٢٦ = \frac{-١٢١}{٦}$

مثال ٤

اذا كان $\int_{-2}^{5} \text{ق}(\text{س}) + ٢\,\text{هـ}(\text{س})\,\text{دس} = ١٧$

وكان $\int_{-2}^{5} \text{هـ}(\text{س})\,.\,\text{دس} = ٦$ فأوجد

$\int_{-2}^{5} (٣ - \text{ق}(\text{س}))\,.\,\text{دس}$

الحل

من المعطيات $\Leftarrow$

$\int_{-2}^{5} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + ٢\int_{-2}^{5} \text{هـ}(\text{س})\,.\,\text{دس} = ١٧$

$\Leftarrow \int_{-2}^{5} \text{ق}(\text{س})\,.\,\text{دس} + ٢ \times ٦ = ١٧$

$\Leftarrow \int_{-2}^{5} \text{ق}(\text{س})\,.\,\text{دس} = ٥$

$\int_{-2}^{5} (٣ - \text{ق}(\text{س}))\,.\,\text{دس} = \int_{-2}^{5} ٣\,.\,\text{دس} - \int_{-2}^{5} \text{ق}(\text{س})\,.\,\text{دس}$

$= ٣ \times ٧ - ٥ = ٢١ - ٥ = ١٦$

مثال ٥

اذا كان $\int_{0}^{3} \text{ن}(\text{س}+١)^{\text{ن}-١}\,\text{دس} = ١٥$

$\text{ن} \neq ٠$ ، فإن قيمة ن تساوي

أ) ٨ ب) ٦ ج) ٤ د) ٢

الحل

$\frac{(\text{س}+١)^{\text{ن}}\cancel{\text{ن}}}{\cancel{\text{ن}}}\Big]_{0}^{3} = (٣+١)^{\text{ن}} - (١)^{\text{ن}} = ١٥$

$\Leftarrow ٤^{\text{ن}} - ١ = ١٥ \Leftarrow ٤^{\text{ن}} = ١٦$

$٤^{\text{ن}} = ٤^{٢} \Leftarrow \text{ن} = ٢$

خاصية ②

① $\int_{\text{أ}}^{\text{أ}} \text{ق}(\text{س}) \cdot \text{د}\text{س} = \text{صفر}$

② $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س}) \cdot \text{د}\text{س} = -\int_{\text{ب}}^{\text{أ}} \text{ق}(\text{س}) \cdot \text{د}\text{س}$

ملاحظة هامة

① اذا تساوى حدا التكامل فأن التكامل = صفر ، والعكس غير صحيح أي انه اذا كان جواب التكامل يساوي صفر فليس شرطاً أن الحدين (الاعلى والادنى) متساويان

② عند قلب حدود التكامل فان اشارة التكامل تتغير

مثال:

$\int_{٢}^{٣} ٥ \cdot \text{د}\text{س} = ٥(٣-٢) = ٥$

$\Leftarrow$

$\int_{٣}^{٢} ٥ \cdot \text{د}\text{س} = ٥(٢-٣) = -٥$

مثال ①

جد قيمة التكاملات التالية

① $\int_{٣}^{٣} (\text{س}^{٣} - ٥\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ١)\, \text{د}\text{س} = \text{صفر}$

② $\int_{٦}^{٦} \frac{٣\text{س} - ١}{\text{س}^{٢} + ٥} \cdot \text{د}\text{س} = \text{صفر}$

③ اذا كان $\int_{\text{أ}}^{٢} \text{ق}(\text{س})\, \text{د}\text{س} = \text{صفر}$

فاوجد قيمة أ (احد القيم المتوقعة)

أ = ٢ لأن $\int_{٢}^{٢} \text{ق}(\text{س})\, \text{د}\text{س} = \text{صفر}$

④ اذا كان $\int_{-١}^{\text{جـ}} \text{س}\, \text{د}\text{س} = \text{صفر}$

فاوجد قيم جـ؟

الحل

$\int_{-١}^{\text{جـ}} \text{س}\, \text{د}\text{س} = \frac{\text{س}^{٢}}{٢}\Big]_{-١}^{\text{جـ}} = \text{صفر}$

$\frac{\text{جـ}^{٢}}{٢} - \frac{١}{٢} = \text{صفر}$

$\text{جـ}^{٢} = ١ \Longrightarrow \text{جـ} = \pm ١$

⑤ اذا كان $\int_{٣}^{٤} \text{ق}(\text{س})\, \text{د}\text{س} = ٥$

جد $\int_{٤}^{٣} \text{ق}(\text{س})\, \text{د}\text{س} = -٥$

مثال ٢

إذا كان $\int_{١}^{جـ} (٣س^{٢} + ٦س)\,ءس = صفر$ فأوجد قيم الثابت جـ؟

الحل

$\int_{١}^{جـ} (٣س^{٢} + ٦س)\,ءس = [س^{٣} + ٣س^{٢}]_{١}^{جـ} = صفر$

$\leftarrow جـ^{٣} + ٣جـ^{٢} - (١ + ٣) = صفر$

$جـ^{٣} + ٣جـ^{٢} - ٤ = صفر$

نستخدم القسمة التركيبية

	$جـ^{٣}$	$جـ^{٢}$	جـ	حد ثابت
$\boxed{١}$	١	٣	٠	−٤
		١	٤	٤
	١	٤	٤	٠

$(جـ - ١)(جـ^{٢} + ٤جـ + ٤) = ٠$

$(جـ - ١)(جـ + ٢)(جـ + ٢) = ٠$

$جـ = ١$ ، $جـ = -٢$

مثال ٣

جد قيمة م حيث $\int_{م}^{م} ق(س)\,ءس = صفر$

$\int_{٢}^{س} ق(س)\,ءس = م س^{٢} + ٢س - ٥$

الحل نضع مساواة بين حدود التكامل س = ٢

$\int_{٢}^{٢} ق(س)\,ءس = م(٢)^{٢} + ٢ \times ٢ - ٥ = ٠$

$٤م + ٤ - ٥ = صفر$ ، $م = \frac{١}{٤}$

مثال ٤

إذا كان $\int_{٢}^{٥} ٢ق(س)\,ءس = ٦$

فإن $\int_{٥}^{٢} (ق(س) - ٢)\,ءس =$

أ) −٣ ب) ٣ جـ) ٩ د) −٩

الحل

$\int_{٢}^{٥} ق(س)\,ءس = \frac{٦}{٢} = ٣$

$\int_{٥}^{٢} ق(س) - \int_{٥}^{٢} ٢\,ءس = -٣ - ٢(٢ - ٥)$

$= -٣ - ٢ \times -٣$

$= -٣ + ٦ = ٣$ ب

مثال ٥

إذا كان $\int_{١}^{٣} ق(س)\,ءس = ٦$

$\int_{١}^{٣} ٢هـ(س)\,ءس = ١٠$ فأوجد

$\int_{٣}^{١} (هـ(س) - ٢ق(س) + ٢س - ٤)\,ءس$

الحل: من المعطيات

$\int_{١}^{٣} هـ(س)\,ءس = \frac{١٠}{٢} = ٥$

$\int_{٣}^{١} هـ(س) - ٢\int_{٣}^{١} ق(س) + \int_{٣}^{١} (٢س - ٤)\,ءس$

$-٥ - ٢ \times -٦ + [س^{٢} - ٤س]_{٣}^{١}$

$-٥ + ١٢ + (١ - ٤) - (٩ - ١٢)$

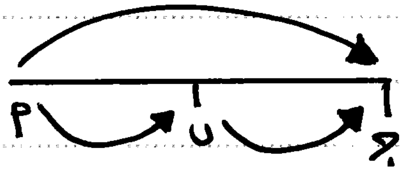
$-٥ + ١٢ \cancel{-٣} \cancel{+٣}$

$= ٧$

خاصية ③

خاصية الأضافة

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س)}\,\text{دس} = \int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{ق(س)}\,\text{دس} + \int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} \text{ق(س)}\,\text{دس}$$



أمثلة

① $\int_{2}^{4} \text{ق(س)}\,\text{دس} + \int_{4}^{9} \text{ق(س)}\,\text{دس} = \int_{2}^{9} \text{ق(س)}\,\text{دس}$

② $\int_{-1}^{5} \text{ق(س)}\,\text{دس} + \int_{7}^{-1} \text{ق(س)}\,\text{دس}$

$= \int_{7}^{-1} \text{ق(س)}\,\text{دس} + \int_{-1}^{5} \text{ق(س)}\,\text{دس} = \int_{7}^{5} \text{ق(س)}$

③ $\int_{2}^{5} \text{ق(س)}\,\text{دس} - \int_{8}^{5} \text{ق(س)}\,\text{دس}$

$= \int_{2}^{5} \text{ق(س)}\,\text{دس} + \int_{5}^{8} \text{ق(س)}\,\text{دس}$

$= \int_{2}^{8} \text{ق(س)}\,\text{دس}$

مثال ①

اذا كان $\int_{1}^{3} \text{ق(س)}\,\text{دس} = 5$ وكان

$\int_{3}^{5} \text{ق(س)}\,\text{دس} = 6$ فأوجد

$\int_{1}^{5} \text{ق(س)}\,\text{دس}$

الحل

$\int_{1}^{5} \text{ق(س)}\,\text{دس} = \int_{1}^{3} \text{ق(س)}\,\text{دس} + \int_{3}^{5} \text{ق(س)}\,\text{دس}$

$= 5 + 6 = 11$

مثال ②

اذا كان $\int_{6}^{1} 3\,\text{ق(س)}\,\text{دس} = 9$

$\int_{1}^{4} 2\,\text{ق(س)}\,\text{دس} = 4$ فأوجد

$\int_{4}^{6} (3\,\text{ق(س)} - 2)\,\text{دس}$

الحل

$\int_{6}^{1} \text{ق(س)}\,\text{دس} = \frac{9}{3} = 3$

$\int_{1}^{4} \text{ق(س)}\,\text{دس} = \frac{4}{2} = 2$

$3\int_{4}^{6} \text{ق(س)} - \int_{4}^{6} 2\,\text{دس}$

$= 3\left(\int_{4}^{1} \text{ق(س)}\,\text{دس} + \int_{1}^{6} \text{ق(س)}\,\text{دس}\right) - 2(6-4)$

$= 3(-2 + -3) - 4$

$= 3 \times -5 - 4$

$= -15 - 4 = -19$

مثال (3)

اذا كان $\int_{0}^{2} 2\text{ق(س)}\,\text{.دس} = 6$

$\int_{5}^{2} \left(3\text{ق(س)} + 2\text{س}\right)\text{دس} = 15$

أوجد $\int_{0}^{5} \text{ق(س)}\,\text{.دس}$

الحل

$\int_{0}^{2} \text{ق(س)}\,\text{.دس} = \frac{6}{2} = 3$

$3\int_{5}^{2} \text{ق(س)}\,\text{دس} + \int_{5}^{2} 2\text{س}\,\text{دس} = 15$

$3\int_{5}^{2} \text{ق(س)}\,\text{دس} + \left[\text{س}^2\right]_{5}^{2} = 15$

$3\int_{5}^{2} \text{ق(س)}\,\text{دس} + (4 - 25) = 15$

$3\int_{5}^{2} \text{ق(س)}\,\text{دس} = 15 + 21 = 36$

$\Leftarrow \int_{5}^{2} \text{ق(س)}\,\text{دس} = \frac{36}{3} = 12$

$\therefore \int_{0}^{5} \text{ق(س)}\,\text{دس} = \int_{0}^{2} \text{ق(س)}\,\text{دس} + \int_{2}^{5} \text{ق(س)}\,\text{دس}$

$= 3 + -12 = -9$

مثال (4)

اذا كان ق اقتراناً قابلاً للتكامل على الفترة التي تنتمي اليها الاعداد أ، ب، جـ فاوجد

$\int_{أ}^{جـ} \text{ق(س)}\,\text{.دس} - \int_{أ}^{ب} \text{ق(س)}\,\text{دس}$

أ) $\int_{ب}^{جـ} \text{ق(س)}\,\text{دس}$ ب) $-\int_{أ}^{جـ} \text{ق(س)}\,\text{دس}$

جـ) $\int_{ب}^{جـ} \text{ق(س)}\,\text{دس}$ د) $-\int_{ب}^{جـ} \text{ق(س)}\,\text{.دس}$

الحل

$\int_{أ}^{جـ} \text{ق(س)}\,\text{.دس} + \int_{ب}^{أ} \text{ق(س)}\,\text{دس}$

حسب خاصية الاضافة $= \int_{ب}^{جـ} \text{ق(س)}\,\text{دس}$

(جـ)

مثال (5)

اذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً على ح وكان

$\int_{أ}^{ب} \text{ق(س)}\,\text{.دس} - \int_{5}^{3} \text{ق(س)}\,\text{دس} = \int_{3}^{1} \text{ق(س)}\,\text{.دس}$

فاوجد قيمة أ ، ب

الحل

$\int_{أ}^{ب} \text{ق(س)}\,\text{دس} = \int_{3}^{1} \text{ق(س)}\,\text{دس} + \int_{5}^{3} \text{ق(س)}$

$= \int_{5}^{1} \text{ق(س)}\,\text{دس}$

أ $= 5$ ب $= 1$

ملاحظة هامة

يشترط في خاصية الأضافة ان يكون ما داخل التكامل نفس المقدار

مثال ⑥

اذا كان $\int_{1}^{8} ق(س)\,دس = 10$ فأوجد

$\int_{1}^{5} ق(س)\,دس - \int_{8}^{5} ق(س)\,دس$

الحل

$\int_{1}^{5} ق(س)\,دس - \int_{8}^{5} ق(س)\,دس$

$= \int_{1}^{5} ق(س)\,دس + \int_{5}^{8} ق(س)\,دس$

$= \int_{1}^{8} ق(س)\,دس = 10$

مثال ⑦

اذا كان $\int_{3}^{5} \left(\frac{ق(س)}{2} - 3\right) دس = 4$

$\int_{8}^{5} ق(س)\,دس = 6$ نجد

$\int_{3}^{8} \left(ق(س) + 4س\right) دس$

الحل

$\frac{1}{2}\int_{3}^{5} ق(س) - \int_{3}^{5} 3\,دس = 4$

$\frac{1}{2}\int_{3}^{5} ق(س)\,دس - 3(5-3) = 4$

$\frac{1}{2}\int_{3}^{5} ق(س)\,دس = 10$

$\int_{3}^{5} ق(س)\,دس = 20$

$\int_{3}^{8} ق(س) + \int_{3}^{8} 4س\,دس$

$= \int_{3}^{8} ق(س) + \left[2س^{2}\right]_{3}^{8}$

$= \int_{3}^{5} ق(س)\,دس + \int_{5}^{8} ق(س)\,دس + (128 - 18)$

$= (20 - 6) + 110$

$= 124$

مثال ⑧

اوجد قيمة المقدار

$\int_{2}^{3} (3س^{2}+5)\,دس + \int_{3}^{4} (3س^{2}+5)\,دس$

الحل

حسب خاصية الاضافة.

$= \int_{2}^{4} (3س^{2}+5)\,دس$

$= \left[س^{3} + 5س\right]_{2}^{4}$

$= (64 + 20) - (8 + 10)$

$= 84 - 18 = 66$

تكامل الاقترانات المتشعبة

ملاحظة هامة

في الاقترانات المتشعبه نستخدم خاصية الاضافه اذا لزم الأمر ويجب اعادة تعريف القيمة المطلقة وأكبر عدد صحيح.

مثال ①

اذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٣س^٢ & ١ \le س \le ٣ \\ ٤س & ٣ < س \le ٥ \end{cases}$

اوجد

① $\int_{١}^{٥} ق(س)\, دس$ ② $\int_{٢}^{٤} ق(س)\, دس$

الحل

① $\int_{١}^{٥} ق(س)\, دس = \int_{١}^{٣} ٣س^٢\, دس + \int_{٣}^{٥} ٤س\, دس$

$= س^٣\Big]_{١}^{٣} + ٢س^٢\Big]_{٣}^{٥} = ٢٦ + ٢٢ = ٤٨$

② $\int_{٢}^{٤} ق(س)\, دس = \int_{٢}^{٣} ق(س)\, دس + \int_{٣}^{٤} ق(س)\, دس$

$= \int_{٢}^{٣} ٣س^٢\, دس + \int_{٣}^{٤} ٤س\, دس$

$= س^٣\Big]_{٢}^{٣} + ٢س^٢\Big]_{٣}^{٤}$

$= ١٩ + ١٤ = ٣٣$

مثال ②

جد قيمة $\int_{-١}^{٢} |١-٢س|\, دس$

الحل

نعيد تعريف القيمة المطلقة

$١ - ٢س = ٠ \Leftarrow س = \frac{١}{٢}$

$١-٢س$ (+ + +) ، $٢س-١$ عند -١ ، $\frac{١}{٢}$ ، ٢

$\int_{-١}^{٢} |١-٢س| = \int_{-١}^{\frac{١}{٢}} (١-٢س)\, دس + \int_{\frac{١}{٢}}^{٢} (٢س-١)\, دس$

$= [س - س^٢]_{-١}^{\frac{١}{٢}} + [س^٢ - س]_{\frac{١}{٢}}^{٢}$

$= ٤ + \frac{١}{٢} = \frac{٩}{٢}$

مثال ③

جد $\int_{١}^{٤} |س^٢ - ٩|\, دس$

الحل

$س^٢-٩$ (+ + +) ، $٩-س^٢$ (− −) ، $س^٢-٩$ (+ + +) عند -٣ ، ٣ ، ① ، ④

$= \int_{١}^{٣} (٩-س^٢)\, دس + \int_{٣}^{٤} (س^٢-٩)\, دس$

$= \left[٩س - \frac{س^٣}{٣}\right]_{١}^{٣} + \left[\frac{س^٣}{٣} - ٩س\right]_{٣}^{٤}$

$= \frac{٣٨}{٣}$

مثال (٤)

جد $\int_{1}^{2} \sqrt{\text{س}^2 - 2\text{س} + 1}\ \text{دس}$

الحل

$\int_{1}^{2} \sqrt{\text{س}^2 - 2\text{س} + 1}\ \text{دس} = \int_{1}^{2} \sqrt{(\text{س}-1)^2}\ \text{دس}$

$= \int_{1}^{2} |\text{س}-1|\ \text{دس}$

$-\text{س}+1 \quad | \quad \text{س}-1$ (at 1)

$= \int_{1}^{2} (\text{س}-1)\ \text{دس} = \left[\frac{\text{س}^2}{2} - \text{س}\right]_{1}^{2}$

$= (2-2) - (\frac{1}{2} - 1) = \frac{1}{2}$

مثال (٥)

قيمة التكامل $\int_{3}^{1} |2\text{س} - 4|\ \text{دس}$

أ) -2 ب) 2 ج) 14 د) 7

الحل

$4 - 2\text{س} \quad | \quad 2\text{س} - 4$ (1, 2, 3)

$\int_{3}^{1} |2\text{س}-4| = -\left(\int_{1}^{3} |2\text{س}-4|\ \text{دس}\right)$

$= -\left(\int_{1}^{2} (4 - 2\text{س}) + \int_{2}^{3} (2\text{س}-4)\ \text{دس}\right)$

$= -\left([4\text{س} - \text{س}^2]_{1}^{2} + [\text{س}^2 - 4\text{س}]_{2}^{3}\right)$

$= -\left((8-4) - (4-1) + (9-12) - (4-8)\right)$

$= -\left((4-3) + (-3) + 4\right)$

$= -(1 - 3 + 4) = -2$ (أ)

مثال (٦)

جد $\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} |\text{حاس}|\ \text{دس}$

الحل

$\text{حاس} = 0 \Longrightarrow \text{س} = 0 ، \pi ، 2\pi$

حاس (+++) on $[0, \pi]$ ، $-$حاس on $[\pi, 2\pi]$ ، $\frac{3\pi}{2}$

$= \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} -\text{حاس دس} = \text{جتاس}\Big]_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}$

$= \text{جتا}\frac{3\pi}{2} - \text{جتا}\pi = 0 - -1 = 1$

مثال (٧)

او جد $\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1 - \text{جتا}^2\text{س}}\ \text{دس}$

الحل

$\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1 - \text{جتا}^2\text{س}}\ \text{دس} = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\text{حا}^2\text{س}}$

$= \int_{-\pi}^{\pi} |\text{حاس}|\ \text{دس}$

$\text{حاس} = 0$: $-$حاس on $[-\pi, 0]$ ، حاس on $[0, \pi]$

$= \int_{-\pi}^{0} -\text{حاس دس} + \int_{0}^{\pi} \text{حاس دس}$

$= \text{جتاس}\Big]_{-\pi}^{0} - \text{جتاس}\Big]_{0}^{\pi}$

$= \text{جتا}0 - \text{جتا}(-\pi) - (\text{جتا}\pi - \text{جتا}0)$

$= 1 + -1 - (-1 - 0)$

$= 0 + 1 = 1$

مثال (8)

أوجد $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+جتا2س}$

الحل

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+جتا2س}\ دس = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+2جتا^2س-1}$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}\ |جتاس|\ دس$

$\Leftarrow$ جتاس $= 0 \Leftarrow$ س $= \frac{\pi}{2}$ ، $\frac{3\pi}{2}$

جتاس: $+ + + + +$ (من 0 إلى $\frac{\pi}{2}$)

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}\ جتاس = \sqrt{2}\ (جاس)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \sqrt{2} \times \left(جا\frac{\pi}{2} - جا0\right)$

$= \sqrt{2} \times 1 = \sqrt{2}$

مثال (9)

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+جا2س}\ \ دس$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{جا^2س+جتا^2س+2جاس\ جتاس}$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(جاس+جتاس)^2}$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |جاس+جتاس|$

جاس + جتاس $= 0$

جاس $= -$ جتاس $\Leftarrow$ س $= \frac{3\pi}{4}$

س $= \frac{7\pi}{4}$

الربع الأول جا ، جتا موجب

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (جاس+جتاس)\ دس$

$= -جتاس + جاس\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \left(-جتا\frac{\pi}{2} + جا\frac{\pi}{2}\right) - \left(-جتا0 + جا0\right)$

$= (-0+1) - (-1+0)$

$= 1 + 1 = 2$

مثال (10)

جد $\int_{-1}^{1} س|س|\ دس$

الحل

|س|: $-س$ ، س (-1 ، 0 ، 1)

$= \int_{-1}^{0} -س^2 + \int_0^1 س^2\ دس$

$= \left[\frac{-س^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{س^3}{3}\right]_0^{1}$

$=$ صفر $- \frac{1}{3} + \frac{1}{3} =$ صفر

مثال (11)

اذا كانت $ق(س) = \begin{cases} |٢س - ٢| & ، ٠ \le س \le ٤ \\ ٢أ & ، ٤ < س \le ٥ \end{cases}$

وكان $\int_{٠}^{٥} ق(س)\, دس = ٢$ جد قيمة أ ؟

الحل

$٢س - ٢ = ٠$

$س = ١$

$٢ - ٢س \quad | \quad ٢س - ٢$

$٠ \quad ١ \quad ٤ \quad ٥$

$= \int_{٠}^{١} (٢ - ٢س)\, دس + \int_{١}^{٤} (٢س - ٢)\, دس + \int_{٤}^{٥} ٢أ\, دس$

$= \left[٢س - س^{٢}\right]_{٠}^{١} + \left[س^{٢} - ٢س\right]_{١}^{٤} + ٢أ(٥ - ٤) = ٢$

$= (٢ - ١) + (١٦ - ٨) - (١ - ٢) + ٢أ = ٢$

$١ + ٨ + ١ + ٢أ = ٢$

$١٠ + ٢أ = ٢$

$٢أ = -٨ \Leftarrow أ = -٤$

مثال (12)

أوجد $\int_{٢}^{٤} \frac{|س^{٢} - ٤س + ٣|}{س - ١}$

الحل

$س^{٢} - ٤س + ٣ = ٠ = (س - ٣)(س - ١)$

$س^{٢} - ٤س + ٣ \quad | \quad -س^{٢} + ٤س - ٣ \quad | \quad س^{٢} - ٤س + ٣$

$١ \quad ٢ \quad ٣ \quad ٤$

$= \int_{٢}^{٣} (-س^{٢} + ٤س - ٣)\, دس + \int_{٣}^{٤} (س^{٢} - ٤س + ٣)\, دس$

$= \left[-\frac{س^{٣}}{٣} + ٢س^{٢} + ٣س\right]_{٢}^{٣} + \left[\frac{س^{٣}}{٣} - ٢س^{٢} + ٣س\right]_{٣}^{٤}$

$= (\cancel{-٩} + ١٨ + \cancel{٩}) - (-\frac{٨}{٣} + ٨ + ٦)$

$+ (\frac{٦٤}{٣} - ٣٢ + ١٢) - (\cancel{٩} - \cancel{١٨} + \cancel{٩})$

$= ١٨ + \frac{٨}{٣} - ١٤ + \frac{٦٤}{٣} - ٢٠$

$= -١٦ + \frac{٧٢}{٣}$

مثال (13)

أوجد $\int_{١}^{٣} [٤ - \frac{١}{٢}س]\, دس$

الحل

طول الدرجة = ٢ $\qquad ٤ - \frac{١}{٢}س = ٠$

$\Leftarrow س = ٨$

$٤ \quad ٣ \quad ٢ \quad ١ \quad ٠$

$-٢ \quad ٠ \quad ١ \quad ٢ \quad ٣ \quad ٤ \quad ٦ \quad ٨$

$= \int_{١}^{٢} ٣\, دس + \int_{٢}^{٣} ٢\, دس$

$= ٣(٢ - ١) + ٢(٣ - ٢) = ٣ + ٢ = ٥$

مثال (14)

أوجد $\int_{-٣}^{٠} س\left[\frac{س}{٢}\right] دس$

طول الدرجة = ٢ $\qquad \frac{س}{٢} = ٠ \quad س = ٠$

$-٢ \quad -١ \quad ٠ \quad ١$

$-٤ \quad -٣ \quad -٢ \quad ٠ \quad ٢ \quad ٤$

$= \int_{-٣}^{-٢} -٢س\, دس + \int_{-٢}^{٠} -س\, دس = \left[-س^{٢}\right]_{-٣}^{-٢} + \left[-\frac{س^{٢}}{٢}\right]_{-٢}^{٠} = ٧$

مثال ١٥

اوجد $\int_{-1}^{2} \left(|س| + \left[\frac{س}{2}\right]\right) دس$

$|س|$: $س = 0$

$\left[\frac{س}{2}\right]$ طول الدرجة $= 2$ ، $س = 0$

$$\int_{-1}^{0} (-س - 1)\, دس + \int_{0}^{2} (س + 0)\, دس$$

$$= \left[-\frac{س^2}{2} - س\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{س^2}{2}\right]_{0}^{2}$$

$$= 0 - \left(\frac{-1}{2} + 1\right) + 2$$

$$= +\frac{1}{2} - 1 + 2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

مثال ١٦

جد $\int_{1}^{3} |س| \times [س]\, دس$

الحل

$|س|$

$[س]$

$$= \int_{1}^{2} 1 \times س\, دس + \int_{2}^{3} 2 \times س\, دس$$

$$= \left[\frac{س^2}{2}\right]_{1}^{2} + \left[س^2\right]_{2}^{3}$$

$$= \left(2 - \frac{1}{2}\right) + (9 - 4)$$

$$= 1\frac{1}{2} + 5 = 6\frac{1}{2} = \frac{13}{2}$$

مثال ١٧

اوجد $\int_{0}^{2ن} \left[\frac{س}{ن}\right] دس$

الحل

$س = 0$ طول الدرجة $= ن$

$$\int_{0}^{ن} 0\, دس + \int_{ن}^{2ن} 1\, دس$$

$$= 0 + 1 \times (2ن - ن) = ن$$

مثال ١٨

$\int_{0}^{م} |2س - 2|\, دس = 5$ جد قيمة م حيث $م > 1$

الحل

$2س - 2 = 0 \Longrightarrow س = 1$

$$\int_{0}^{1} (2 - 2س)\, دس + \int_{1}^{م} (2س - 2)\, دس = 5$$

$$\left[2س - س^2\right]_{0}^{1} + \left[س^2 - 2س\right]_{1}^{م} = 5$$

$$(2 - 1) + م^2 - 2م - (-1) = 5$$

$$م^2 - 2م - 3 = 0 \quad (م - 3)(م + 1) = 0 , \quad م = 3 , \quad م = -1$$

مثال (١٩)

اذا كان $\int_{0}^{أ} [س - 0.3] \, دس = 7.2$

اوجد قيمة الثابت أ حيث أ > ٢ .

الحل

$س = 0.3$ طول الدرج = ١

$$\begin{array}{cccccc} & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -0.7 & 0.3 & 1.3 & 2.3 & 3.3 & 4.3 \end{array}$$

٠ البداية ⟵

$$\int_{0}^{0.3} -1 \, دس + \int_{0.3}^{1.3} صفر + \int_{1.3}^{2.3} 1 \, دس + \int_{2.3}^{3.3} 2 \, دس$$

$$= -0.3 + صفر + 1 + 2 = 2.7$$

$$أ = 3.3$$

مثال (٢٠)

اذا كان $\int_{1}^{ج} [\frac{1}{3}س + 1] \, دس = 12$

اوجد قيمة ج ، ج > ١

الحل

طول الدرجة = ٣ ، س = -٣ جذر الاقتران

$$\begin{array}{ccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 3 & 6 & 9 \end{array}$$

$$\int_{1}^{3} 1 \, دس + \int_{3}^{6} 2 \, دس + \int_{6}^{ج} 3 \, دس$$

$$2 + 6 + 3(ج - 6) = 12$$

$$8 + 3ج - 18 = 12$$

$$3ج = 22 \qquad ج = \frac{22}{3}$$

مثال (٢١)

اذا كان $\int_{1}^{ج} [س] \, دس = 6$

جد قيمة الثابت ج ، حيث ج ∈ ح

الحل

هناك حالتان

(١) الحالة الأولى نفرض ج > ١

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

$$\int_{1}^{2} 1 \, دس + \int_{2}^{3} 2 \, دس + \int_{3}^{4} 3 \, دس$$

$$1 + 2 + 3 = 6 \Leftarrow ج = 4$$

(٢) الحالة الثانية ج < ١

$$\begin{array}{ccccc} 0 & -1 & -2 & -3 & \\ 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \end{array}$$

$$\int_{1}^{0} 0 \, دس + \int_{0}^{-1} -1 \, دس + \int_{-1}^{-2} -2 \, دس + \int_{-2}^{-3} -3 \, دس$$

$$= صفر + 1 + 2 + 3 = 6$$

$$ج = -3$$

مثال (٢٢)

$$\int_{1}^{9} [\sqrt{س}] \, دس$$

الحل

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & \\ 1 & 4 & 9 \end{array}$$

تعريف $[\sqrt{س}]$

$1 \le \sqrt{س} < 2$ بالتربيع $1 \le س < 4$

$2 \le \sqrt{س} < 3$ ⟸ $4 \le س < 9$

$$= \int_{1}^{4} 1 \, دس + \int_{4}^{9} 2 \, دس = 1(4-1) + 2(9-4) = 13$$

مثال (٢٣)

اوجد $\int_{١}^{٢} [س^٢] \cdot دس$

الحل

$١ \le س^٢ < ٢$ بأخذ الجذر $١ \le س < \sqrt{٢}$

$٢ \le س^٢ < ٣ \qquad \sqrt{٢} \le س < \sqrt{٣}$

$٣ \le س^٢ < ٤ \qquad \sqrt{٣} \le س < ٢$

$=$ ١ ، ٢ ، ٣ على الفترات $١ ، \sqrt{٢} ، \sqrt{٣} ، ٢$

$= \int_{١}^{\sqrt{٢}} ١ \cdot دس + \int_{\sqrt{٢}}^{\sqrt{٣}} ٢ دس + \int_{\sqrt{٣}}^{٢} ٣ \cdot دس$

$= ١(\sqrt{٢} - ١) + ٢(\sqrt{٣} - \sqrt{٢}) + ٣(٢ - \sqrt{٣})$

مثال (٢٤)

$ق(س) = \begin{cases} |س - ٢| & ٠ \le س \le ٤ \\ [٢س] & ٤ < س \le ٤,٥ \end{cases}$

اوجد $\int_{٠}^{٤,٥} ق(س) \, دس$ ؟

الحل

$|س - ٢|$: $٢ - س$ ، $س - ٢$ (عند ٠ ، ٢ ، ٤)

$[٢س]$ طول الدرجة $= \frac{١}{٢}$ س =

٨ على الفترة $[٤ ، ٤,٥]$

$= \int_{٠}^{٢} (٢ - س) دس + \int_{٢}^{٤} س - ٢ + \int_{٤}^{٤,٥} ٨ \, دس$

$= \left[٢س - \frac{س^٢}{٢}\right]_{٠}^{٢} + \left[\frac{س^٢}{٢} - ٢س\right]_{٢}^{٤}$

$+ ٨(٤,٥ - ٤)$

مثال (٢٥)

اوجد $\int_{٠}^{٤} \frac{|٢س - ٤|}{[\frac{١}{٢}س + ٣]} دس$

الحل

$٤ - ٢س$ ، $٢س - ٤$ (عند ٢)

$س = -٦$ طول الدرجة $= ٢$

٣ ، ٤ على الفترات ٠ ، ٢ ، ٤

$= \int_{٠}^{٢} \frac{٤ - ٢س}{٣} + \int_{٢}^{٤} \frac{٢س - ٤}{٤}$

$= \frac{١}{٣}\left[(٤س - س^٢)\right]_{٠}^{٢} + \frac{١}{٤}\left[(س^٢ - ٤س)\right]_{٢}^{٤}$

$= \frac{١}{٣}\left((٨ - ٤) - ٠\right) + \frac{١}{٤}\left(٠ - (٤ - ٨)\right)$

$= \frac{٤}{٣} + \frac{١}{٤} \times ٤ = \frac{٤}{٣} + ١$

$= \frac{٧}{٣}$

خاصية ٤

خاصية المقارنة

١) اذا كان ق ، هـ قابلين للتكامل على [أ ، ب] وكان ق(س) ≥ هـ(س) لكل س ∈ [أ ، ب] فان

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\,.\,ءس \geq \int_{أ}^{ب} هـ(س)\,.\,ءس$$

٢) اذا كان ق(س) ≥ ٠ لكل س ∈ [أ ، ب] فان $\int_{أ}^{ب} ق(س)\,.\,ءس \geq ٠$

٣) اذا كان ق(س) ≤ صفر لكل س ∈ [أ ، ب] فان $\int_{أ}^{ب} ق(س)\,.\,ءس \leq ٠$

٤) اذا كان ل ≤ ق(س) ≤ ك لكل س ∈ [أ ، ب] فان

$$\int_{أ}^{ب} ل\,ءس \leq \int_{أ}^{ب} ق(س)\,ءس \leq \int_{أ}^{ب} ك\,ءس$$

ملاحظة

اذا كانت اشارة الاقتران موجب أو صفر فان $\int ق(س)\,ءس$ موجب أو صفر

اذا كانت اشارة الاقتران سالب أو صفر فان $\int ق(س)\,ءس$ سالب أو صفر

لذلك يجب معرفة اشارة ق(س)

مثال ١

ما اشارة $\int_{1}^{2} \frac{5س+2}{س^2+4}\,ءس$

الحل

البسط موجب على [١ ، ٢]

المقام موجب على [١ ، ٢]

∴ $\frac{5س+2}{س^2+4}$ موجب على [١ ، ٢]

← $\int_{1}^{2} \frac{5س+2}{س^2+4}\,ءس$ موجب على [١ ، ٢]

مثال ٢

ما اشارة $\int_{-3}^{-1} \frac{-س}{س^4+2}\,ءس$

الحل

$ق(س) = \frac{-س}{س^2+4}$

المقام موجب في الفترة [-٣ ، -١]

البسط موجب في الفترة [-٣ ، -١]

← ق(س) > ٠

← $\int_{-3}^{-1} \frac{-س}{س^4+2} > ٠$

٠٧٨٨٦٥٦٠٥٧ — ٠٧٩٥٦٥٦٨٨١

مثال (٣)

ابحث في اشارة التكاملات التالية دون اجراء عملية التكامل

(١) $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} (\text{س}^2 - 1)\, \text{دس}$

الحل

$\text{ق(س)} = \text{س}^2 - 1 \,،\, \text{س} \in [\frac{1}{4} \,،\, \frac{1}{2}]$

نبحث في اشارة ق(س)

ق(س) سالب لكل $\text{س} \in [\frac{1}{4} \,،\, \frac{1}{2}]$

$\Leftarrow \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} (\text{س}^2 - 1)\, \text{دس} < 0$

(٢) $\int_{0}^{3} (\text{س}^2 - 1)\, \text{دس}$

الحل

$\text{ق(س)} = \text{س}^2 - 1 \,،\, \text{س} \in [0 \,،\, 3]$

ق(س) ≤ 0 لكل $\text{س} \in [0 \,،\, 1]$

$\Leftarrow \int_{0}^{1} \text{ق(س)}\, \text{دس} \leq 0$

ق(س) ≥ 0 لكل $\text{س} \in [1 \,،\, 3]$

$\Leftarrow \int_{1}^{3} \text{ق(س)}\, \text{دس} \geq 0$

ملاحظة

عند استخدام خواص المقارنة يجب ترتيب حدود التكامل من الأصغر الى الاكبر

(٣) $\int_{3}^{1} (\text{س}^2 - 4\text{س})\, \text{دس}$

الحل

ترتيب الحدود $= -\int_{1}^{3} (\text{س}^2 - 4\text{س})\, \text{دس}$

$= \int_{1}^{3} (4\text{س} - \text{س}^2)\, \text{دس}$

$\text{ق(س)} = 4\text{س} - \text{س}^2 \,،\, \text{س} \in [1 \,،\, 3]$

$4\text{س} - \text{س}^2 = 0 \,،\, \text{س}(4 - \text{س}) = 0$

$\text{س} = 0 \,،\, \text{س} = 4$

ق(س) ≥ 0

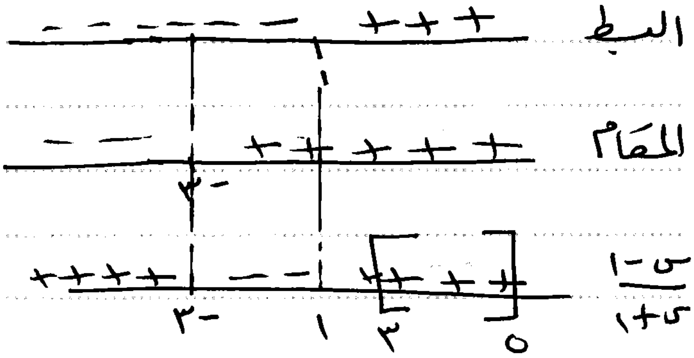
$\Leftarrow \int_{1}^{3} (4\text{س} - \text{س}^2) \geq 0$

(٤) $\int_{3}^{5} \frac{\text{س} - 1}{\text{س} + 3}\, \text{دس}$

الحل

$\text{ق(س)} = \frac{\text{س} - 1}{\text{س} + 3} \,،\, \text{س} \in [3 \,،\, 5]$

تحدد اشارة ق(س) $\Leftarrow$ يتبع



ق(س) $\geq$ ٠ لكل س $\in$ [٣، ٥]

$\Leftarrow \int_{٣}^{٥} \frac{س-١}{س+٣} دس \geq ٠$

مثال ٤

دون حساب التكامل اثبت ان

$\int_{\pi/٦}^{\pi/٣} (جاس + س^٢) دس > ٠$

الحل

ق(س) = $س^٢$ + جاس ، س $\in$ [$\pi/٦$، $\pi/٣$]

$س^٢ > ٠$ لكل س $\in$ [$\pi/٦$، $\pi/٣$]

جاس > ٠ لكل س $\in$ [$\pi/٦$، $\pi/٣$]

الربع الأول

$\Leftarrow$ $س^٢$ + جاس > ٠ [$\pi/٦$، $\pi/٣$]

$\Leftarrow \int_{\pi/٦}^{\pi/٣} (س^٢ + جاس) دس > ٠$

مثال ٥

دون حساب التكامل اثبت أن

$\int_{٠}^{\pi/٤} جتا٢س\, دس \geq$

الحل

ق(س) = جتا٢س ، س $\in$ [٠، $\pi/٤$]

بما أن س تقع في الربع الأول

فإن ٢س تقع في الربع الأول

$\Leftarrow$ جتا٢س $\geq$ ٠

$\Leftarrow \int_{٠}^{\pi/٤} جتا٢س\, دس \geq ٠$

ملاحظة هامة

لإثبات أن $\int_{م}^{ن} ق(س)\, دس \leq \int_{م}^{ن} هـ(س)\, دس$

يجب اثبات أن ق(س) $\leq$ هـ(س) في الفترة [م، ن]

مثال ٦

دون اجراء التكامل اثبت أن

(١) $\int_{١}^{٢} س\, دس \leq \int_{١}^{٢} س^٢\, دس$

الحل

نريد اثبات ان

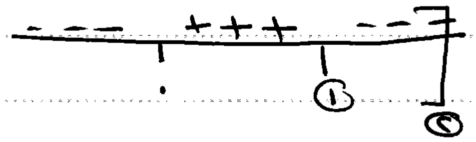
س $\leq$ $س^٢$ ، س $\in$ [١، ٢]

أي ان س − $س^٢$ $\leq$ ٠ في [١، ٢]

س − $س^٢$ = ٠ $\Leftarrow$ س(١ − س) = ٠

يتبع $\Leftarrow$

⇐ س = ٠ ، س = ١



س − س² ≥ ٠ لكل س ∈ [١، ٢]

⇐ س ≥ س² لكل س ∈ [١، ٢]

$\int_{1}^{2} \text{س}\, d\text{س} \le \int_{1}^{2} \text{س}^2\, d\text{س}$

⑤ $\int_{3.5}^{6} \frac{\text{س}^2}{\text{س}+2}\, d\text{س} > \int_{3.5}^{6} \frac{9}{\text{س}+2}\, d\text{س}$

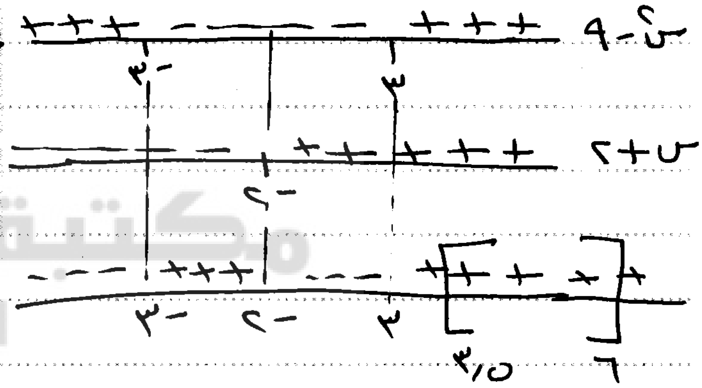
الحل

نريد اثبات ان $\frac{\text{س}^2}{\text{س}+2} > \frac{9}{\text{س}+2}$

في الفترة [٣٫٥، ٦]

⇐ $\frac{\text{س}^2}{\text{س}+2} - \frac{9}{\text{س}+2} > 0$

$\frac{\text{س}^2 - 9}{\text{س}+2} > 0$



⇐ $\frac{\text{س}^2 - 9}{\text{س}+2} > 0$ لكل س ∈ [٣٫٥، ٦]

⇐ $\frac{\text{س}^2}{\text{س}+2} - \frac{9}{\text{س}+2} > 0$

⇐ $\frac{\text{س}^2}{\text{س}+2} > \frac{9}{\text{س}+2}$

$\int_{3.5}^{6} \frac{\text{س}^2}{\text{س}+2}\, d\text{س} > \int_{3.5}^{6} \frac{9}{\text{س}+2}\, d\text{س}$

مثال ⑦

اذا كان ق اقتراناً محدداً على الفترة [١، ٥] وكان

−٢ ≤ ق(س) ≤ ٤ ، جد (م ، ن)

بحيث ان $\text{م} \le \int_{1}^{5} \text{ق(س)}\, d\text{س} \le \text{ن}$

الحل

−٢ ≤ ق(س) ≤ ٤

$\int_{1}^{5} -2\, d\text{س} \le \int_{1}^{5} \text{ق(س)}\, d\text{س} \le \int_{1}^{5} 4\, d\text{س}$

$-2(5-1) \le \int_{1}^{5} \text{ق(س)}\, d\text{س} \le 4(5-1)$

$-8 \le \int_{1}^{5} \text{ق(س)}\, d\text{س} \le 16$

⇐ م = −٨ ، ن = ١٦

ملاحظة هامة

ع ≤ ق(س) ≤ ل

تعني ان اقل قيمة للاقتران هي ع وأكبر قيمة للاقتران ق هي ل

ق(س) ≥ م تعني أقل قيمة لـ ق هي م

ق(س) ≤ ن تعني أكبر قيمة لـ ق هي ن

ولايجاد أقل قيمة وأكبر قيمة للاقتران هناك طريقتان

① الرسم

② طريقة ق'(س) لايجاد القيم القصوى

مثال ①

اذا كان ق(س) = $\sqrt{٩ - س^2}$ قابلا للتكامل في الفترة [−٣، ٣] فبين دون اجراء عملية التكامل أن

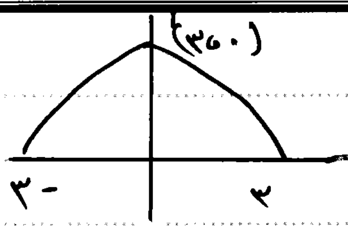
$\int_{-٣}^{٣}$ ق(س) دس ينحصر بين صفر، ١٨

الحل

طريقة ①

باستخدام الرسم

نريد حصر ق(س) بين عددين وذلك بايجاد أقل وأكبر قيمة للاقتران ق(س) وذلك بالرسم



س	-٣	٠	٣
ص	٠	٣	٠

أقل قيمة للاقتران ق(س) هي صفر

أكبر قيمة للاقتران ق(س) هي ٣

⟸ ٠ ≤ ق(س) ≤ ٣

⟸ $\int_{-٣}^{٣}$ ٠ دس ≤ $\int_{-٣}^{٣}$ ق(س) دس ≤ $\int_{-٣}^{٣}$ ٣ دس

صفر ≤ $\int_{-٣}^{٣}$ ق(س) دس ≤ ١٨

أقل قيمة للتكامل = صفر

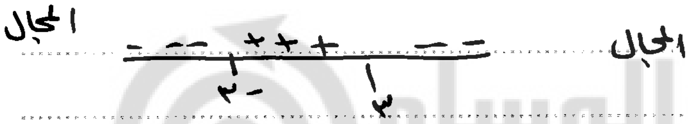
أكبر قيمة للتكامل = ١٨

طريقة ②

نجد أقل قيمة وأعلى قيمة للاقتران باستخدام المشتقة

ق'(س) = $\dfrac{-٢س}{٢\sqrt{٩ - س^2}}$

البسط = صفر ⟸ −س = ٠ ⟸ س = ٠ ∈ المجال



٩ − س² = ٠ ⟸ س = ±٣ ∈ المجال

أكبر قيمة هي ق(٠) = ٣

ق(-٣) = صفر ، ق(٣) = صفر

أقل قيمة هي صفر

$٠ \le \text{ق}(\text{س}) \le ٣$

$$\int_{-٣}^{٣} ٠ \, \text{ءس} \le \int_{-٣}^{٣} \text{ق}(\text{س}) \, \text{ءس} \le \int_{-٣}^{٣} ٣ \, \text{ءس}$$

$$\text{صفر} \le \int_{-٣}^{٣} \text{ق}(\text{س}) \, \text{ءس} \le ١٨$$

مثال ②

اثبت ان $٠ \le \int_{-٥}^{٥} \sqrt{٢٥ - \text{س}^٢} \, \text{ءس} \le ٥٠$

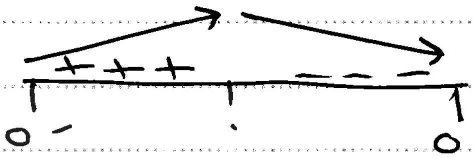
الحل

نبحث عن أقل وأكبر قيمة للاقتران

ق(س) = $\sqrt{٢٥ - \text{س}^٢}$ في [-٥، ٥]

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{-٢\text{س}}{٢\sqrt{٢٥ - \text{س}^٢}}$$

البسط $-\text{س} = ٠ \Leftarrow \text{س} = ٠ \in$ المجال



أكبر قيمة هي ق(٠) = ٥

ق(٥) = صفر ، ق(-٥) = صفر

أقل قيمة هي صفر

$\text{صفر} \le \text{ق}(\text{س}) \le ٥$

$$\int_{-٥}^{٥} \text{صفر} \le \int_{-٥}^{٥} \text{ق}(\text{س}) \, \text{ءس} \le \int_{-٥}^{٥} ٥ \, \text{ءس}$$

$$\text{صفر} \le \int_{-٥}^{٥} \text{ق}(\text{س}) \, \text{ءس} \le ٥٠$$

مثال ③

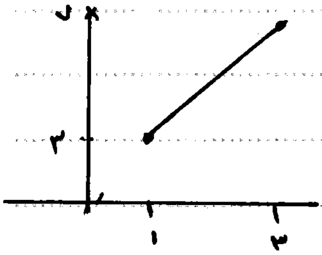
أثبت دون اجراء عملية التكامل أن

$$٦ \le \int_{١}^{٣} (٢\text{س} + ١) \, \text{ءس} \le ١٤$$

الحل

ق(س) = ٢س + ١ ، س ∈ [١، ٣]

س	١	٣
ص	٣	٧



$٣ \le \text{ق}(\text{س}) \le ٧$

$$\int_{١}^{٣} ٣ \, \text{ءس} \le \int_{١}^{٣} \text{ق}(\text{س}) \, \text{ءس} \le \int_{١}^{٣} ٧ \, \text{ءس}$$

$$٦ \le \int_{١}^{٣} (٢\text{س} + ١) \, \text{ءس} \le ١٤$$

مثال ④

اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{٣}{\text{س}^٢ + ١}$ قابلاً للاشتقاق على الفترة [٠، ٣]

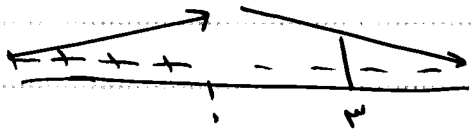
أوجد أكبر وأقل قيمة للتكامل

$$\int_{٠}^{٣} \frac{٣}{\text{س}^٢ + ١} \, \text{ءس}$$

⟸ يتبع

الحل

$\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{-٦\text{س}}{(\text{س}^٢+١)^٢}$



أقل قيمة $\text{ق}(٣) = \frac{٣}{١٠} = ٣و٠$

أكبر قيمة $\text{ق}(٠) = ٣$

$٣و٠ \le \text{ق}(\text{س}) \le ٣$

$\int_{٠}^{٣} ٣و٠ \le \int_{٠}^{٣} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} \le \int_{٠}^{٣} ٣\,\text{دس}$

$٩و٠ \le \int_{٠}^{٣} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} \le ٩$

طريقة أخرى

$٠ \le \text{س} \le ٣$ بالتربيع

$٠ \le \text{س}^٢ \le ٩$ باضافة (١)

$١ \le \text{س}^٢+١ \le ١٠$ مقلوب المتباينه

$١ \ge \frac{١}{\text{س}^٢+١} \ge \frac{١}{١٠}$ ضرب (٣)

$\frac{٣}{١٠} \le \frac{١}{\text{س}^٢+١} \le ٣$

$\int_{٠}^{٣} \frac{٣}{١٠} \le \int_{٠}^{٣} \frac{١}{\text{س}^٢+١} \le \int_{٠}^{٣} ٣\,\text{دس}$

$٩و٠ \le \int_{٠}^{٣} \frac{١}{\text{س}^٢+١} \le ٩$

مثال (٥)

اذا كان $٢ \le ٢\text{ق}(\text{س}) - ٤ \le ٨$

بين أن $\int_{٠}^{٢} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$ تنحصر بين [٦، ١٢]

الحل

$٢ \le ٢\text{ق}(\text{س}) - ٤ \le ٨$

$+٤ \qquad +٤ \qquad +٤$

$\Leftarrow \frac{٦}{٢} \le \frac{٢\text{ق}(\text{س})}{٢} \le \frac{١٢}{٢}$

$\Leftarrow ٣ \le \text{ق}(\text{س}) \le ٦$

$\int_{٠}^{٢} ٣\,\text{دس} \le \int_{٠}^{٢} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} \le \int_{٠}^{٢} ٦\,\text{دس}$

$٦ \le \int_{٠}^{٢} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} \le ١٢$

مثال (٦)

اذا كان $٢ \le \text{ق}(\text{س}) \le ٥$ لكل $\text{س} \in [١، ٣]$ جـ أكبر قيمة للتكامل $\int_{١}^{٣} (٢\text{ق}(\text{س}) + ٣)\,\text{دس}$

الحل

$٢ \le \text{ق}(\text{س}) \le ٥ \quad ×٢$

$٤ \le ٢\text{ق}(\text{س}) \le ١٠$

$+٣ \qquad +٣ \qquad +٣$

$٧ \le ٢\text{ق}(\text{س}) + ٣ \le ١٣$

$\int_{١}^{٣} ٧ \le \int_{١}^{٣} (٢\text{ق}(\text{س})+٣)\,\text{دس} \le \int_{١}^{٣} ١٣\,\text{دس}$

$١٤ \le \int_{١}^{٣} (٢\text{ق}(\text{س})+٣)\,\text{دس} \le ٢٦$

أكبر قيمة = ٢٦

مثال (٧)

اذا علمت ان $ق(س) = ٣ + ٢ جا^{٥}\left(\frac{\pi}{س}\right)$

بين أن $\int_{١}^{٣} ق(س)\, دس$ ينحصر

بين ٢ ، ١٠ ؟

الحل

$-١ \le جا\left(\frac{\pi}{س}\right) \le ١$ (القوة ٥)

$(-١)^{٥} \le جا^{٥}\left(\frac{\pi}{س}\right) \le (١)^{٥}$

$-١ \le جا^{٥}\left(\frac{\pi}{س}\right) \le ١ \quad \times ٢$

$-٢ \le ٢جا^{٥}\left(\frac{\pi}{س}\right) \le ٢$

$+٣ \qquad +٣ \qquad +٣$

$\Leftarrow \quad ١ \le ٣ + ٢جا^{٥}\left(\frac{\pi}{س}\right) \le ٥$

$\int_{١}^{٣} ١ \le \int_{١}^{٣}\left(٣ + ٢جا^{٥}\left(\frac{\pi}{س}\right)\right) \le \int_{١}^{٣} ٥\, دس$

$٢ \le \int_{١}^{٣}\left(٣ + ٢جا^{٥}\left(\frac{\pi}{س}\right)\right) \le ١٠$

مثال (٨)

اذا كان ق اقتران محدداً على الفترة $[-١ ، ٣]$ وكان $٢ \le ق(س) \le ٣$ فاوجد م ، ن حيث أن

$م \le \int_{-١}^{٣} ق(س)\, دس \le ن$

أ) ١٢ ، ٨   ب) ٨ ، ١٢

ج) −٨ ، −١٢   د) −١٢ ، −٨

الحل

$\int_{-١}^{٣} ٢ \le \int_{-١}^{٣} ق(س) \le \int_{-١}^{٣} ٣\, دس$

$٨ \le \int_{-١}^{٣} ق(س)\, دس \le ١٢$

الجواب (ب)

مثال (٩)

اذا كان $٣ \le ق(س) \le ٥$ ، $س \in [١ ، ٣]$

أوجد أكبر قيمة واصغر قيمة

$\int_{١}^{٣} \frac{١ - ق(س) + ٢س}{١ - ق(س)}\, دس$

الحل $\frac{١ - ق(س) + ٢س}{١ - ق(س)} = \frac{١ - ق(س)}{١ - ق(س)} + \frac{٢س}{١ - ق(س)}$

$= ١ + \frac{٢س}{١ - ق(س)}$

لكن $٣ \le ق(س) \le ٥$ الضرب في سالب

$-٣ \ge -ق(س) \ge -٥$

$+١ \qquad +١ \qquad +١$

$-٤ \le ١ - ق(س) \le -١$ (المطلوب)

$\frac{١}{-٤} \ge \frac{١}{١ - ق(س)} \ge -١ \quad \times ٢س$

$\frac{٢س}{-٤} \ge \frac{٢س}{١ - ق(س)} \ge -٢س$

$+١ \qquad +١ \qquad +١$

$١ - \frac{١}{٢}س \ge ١ + \frac{٢س}{١ - ق(س)} \ge ١ - ٢س$

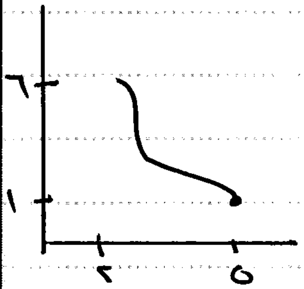
$\int_{١}^{٣}\left(١ - \frac{١}{٢}س\right) دس \ge \int_{١}^{٣} ١ + \frac{٢س}{١ - ق(س)} \ge \int_{١}^{٣} (١ - ٢س)$

$٠ \ge \int_{١}^{٣} ١ + \frac{٢س}{١ - ق(س)} \ge -٦$

مثال ١٠

اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى ق(س)

اثبت ان: $٣ \le \int_{٢}^{٥} \text{ق(س)}\,\text{دس} \le ١٨$



الحل

$١ \le \text{ق(س)} \le ٦$

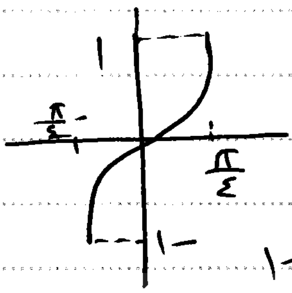
$\int_{٢}^{٥} ١\,\text{دس} \le \int_{٢}^{٥} \text{ق(س)}\,\text{دس} \le \int_{٢}^{٥} ٦\,\text{دس}$

$٣ \le \int_{٢}^{٥} \text{ق(س)}\,\text{دس} \le ١٨$

مثال ١١

بين دون اجراء التكامل ان $\int_{-\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٤}} \text{ظاس}\,\text{دس}$ تنحصر بين $-\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٢}$

الحل



نرسم ق(س)

قيمة عظمى $\text{ق}(\frac{\pi}{٤}) = ١$

صغرى $\text{ق}(-\frac{\pi}{٤}) = -١$

$-١ \le \text{ق(س)} \le ١$

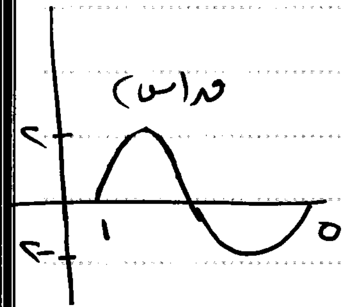
$\int_{-\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٤}} -١\,\text{دس} \le \int_{-\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٤}} \text{ق(س)}\,\text{دس} \le \int_{-\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٤}} ١\,\text{دس}$

$-١(\frac{\pi}{٤}+\frac{\pi}{٤}) \le \int_{-\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٤}} \text{ق(س)}\,\text{دس} \le ١(\frac{\pi}{٤}+\frac{\pi}{٤})$

$-\frac{\pi}{٢} \le \int_{-\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٤}} \text{ق(س)}\,\text{دس} \le \frac{\pi}{٢}$

مثال ١٢

في الشكل المجاور اوجد أكبر قيمة واصغر قيمة للمقدار $\int_{١}^{٥} \text{ق(س)}\,\text{دس}$



الحل

من الرسم اصغر قيمة = -٢

أكبر قيمة = ٢

$-٢ \le \text{ق(س)} \le ٢$

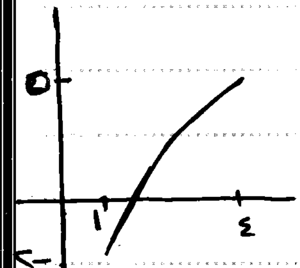
$\int_{١}^{٥} -٢\,\text{دس} \le \int_{١}^{٥} \text{ق(س)}\,\text{دس} \le \int_{١}^{٥} ٢\,\text{دس}$

$-٨ \le \int_{١}^{٥} \text{ق(س)}\,\text{دس} \le ٨$

مثال ١٣

في الشكل المجاور الذي يمثل منحنى ق(س) المعرف على [١، ٤] جد أكبر قيمة للمقدار

$\int_{١}^{٤} (٢ - ٣\text{ق(س)})\,\text{دس}$



$-٢ \le \text{ق(س)} \le ٥$

بالضرب في -٣

$٦ \ge -٣\text{ق(س)} \ge -١٥$

$+٢ \quad +٢ \quad +٢$

$٨ \ge ٢ - ٣\text{ق(س)} \ge -١٣$

$\int_{١}^{٤} ٨ \ge \int_{١}^{٤} (٢ - ٣\text{ق(س)}) \ge \int_{١}^{٤} -١٣$

$٢٤ \ge \int_{١}^{٤} (٢ - ٣\text{ق(س)}) \ge -٣٩$

أكبر قيمة = ٢٤

تدريبات الكتاب

تدريب ① ص٢٣٩

اذا كان ق اقتراناً متصلاً ، ق(١) = ٤ ، ق(٢) = ١٢ ، $\int_{1}^{2} أ\,ق'(س)\,دس = 16$

جد أ ؟

الحل

$\int_{1}^{2} أ\,ق'(س)\,دس = 16$

$أ\,(ق(2) - ق(1)) = 16$

$أ\,(12 - 4) = 16 \Leftarrow 8أ = 16$

$أ = \frac{16}{8} = 2$

تدريب ② ص٢٣٩

احسب قيمة كل من التكاملين الآتيين

١) $\int_{2}^{7} 4س\,دس = 2س^2\Big]_{2}^{7} = 90$

٢) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} قا^2س\,دس = ظاس\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}$

$= ظا\frac{\pi}{4} - ظا\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$

تدريب ③ ص٢٤٠

اذا كان $\int_{ن+1}^{2ن+3} 5\,دس = 40$ جد قيمة ن

الحل

$5\,(2ن+3-1-ن) = 40$

$5\,(2ن+1) = 40 \Leftarrow 2ن = 7$

$2ن+1 = 8$ ، $ن = \frac{7}{2}$

تدريب ④ ص٢٤١

اذا كان $\int_{0}^{8} \frac{س}{\sqrt{س^2+1}}\,دس = 2$

جد $\int_{8}^{0} \frac{س}{\sqrt{س^2+1}}\,دس = -2$

تدريب ⑤ ص٢٤٢

اذا كان $\int_{1}^{3} \left(4ق(س) + 7هـ(س)\right)دس = 19$

$\int_{1}^{3} 3ق(س)\,دس = 9$ فاحسب

$\int_{3}^{1} 5هـ(س)\,دس$

الحل

$\int_{1}^{3} ق(س)\,دس = \frac{9}{3} = 3$

$4\int_{1}^{3} ق(س) + 7\int_{1}^{3} هـ(س) = 19$

$4 \times 3 + 7\int_{1}^{3} هـ(س) = 19$

$\Leftarrow 7\int_{1}^{3} هـ(س) = 19 - 12 = 7$

$\int_{1}^{3} هـ(س)\,دس = \frac{7}{7} = 1$

$\Leftarrow \int_{3}^{1} 5هـ(س)\,دس = -5\int_{1}^{3} هـ(س)\,دس$

$= -5 \times 1 = -5$

تدريب ٦ ص ٢٤٣

اذا كان $ع = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \text{قا}^2 س \, دس$

$ل = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \text{ظا}^2 س \, دس$ جد قيمة $(ع + ل)$

الحل

$ع + ل = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \text{قا}^2 س \, دس + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \text{ظا}^2 س$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \text{قا}^2 س - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \text{ظا}^2 س$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\text{قا}^2 س - \text{ظا}^2 س) \, دس$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} 1 \, دس = 1\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)$

$= \frac{\pi}{2}$

تدريب ٧ ص ٢٤٥

اذا كان $\int_{9}^{2} (2ق(س) + 3) \, دس = -17$

$\int_{2}^{5} \frac{ق(س)}{3} \, دس = -2$

جد $\int_{5}^{9} (4ق(س) - 1) \, دس$

الحل

$\int_{2}^{5} ق(س) \, دس = -6$

$2\int_{9}^{2} ق(س) + \int_{9}^{2} 3 \, دس = -17$

$2\int_{9}^{2} ق(س) \, دس + -21 = -17$

$2\int_{9}^{2} ق(س) \, دس = 4$

$\int_{9}^{2} ق(س) \, دس = 2$

المطلوب $\Leftarrow$

$4\int_{5}^{9} ق(س) - \int_{5}^{9} 1 \, دس$

$= 4\left(\int_{5}^{2} ق(س) + \int_{2}^{9} ق(س)\right) - 4$

$= 4(6 - 2) - 4 = 16 - 4 = 12$

تدريب ٨ ص ٢٤٥

جد $\int_{0}^{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \text{جتا}2س}{2}} \, دس$

الحل

$= \int_{0}^{2\pi} \sqrt{\frac{1 - (1 - 2\text{جا}^2 س)}{2}}$

$= \int_{0}^{2\pi} \sqrt{\frac{2\text{جا}^2 س}{2}} = \int \sqrt{\text{جا}^2 س}$

$= \int_{0}^{2\pi} |\text{جا}س|$

جاس: $+++$ على $[0, \pi]$ ، $---$ على $[\pi, 2\pi]$

$= \int_{0}^{\pi} \text{جا}س + \int_{\pi}^{2\pi} -\text{جا}س \, دس$

$= -\text{جتا}س\Big]_{0}^{\pi} + \text{جتا}س\Big]_{\pi}^{2\pi} = 2 + 2$

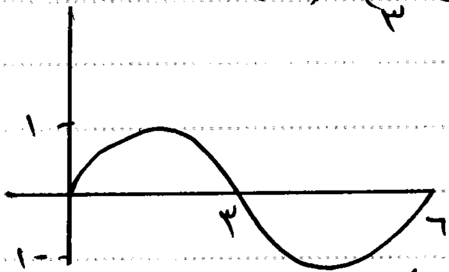
$= 4$

تدريب (٩) ص ٢٤٧

اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى ق المتصل على الفترة [٠، ٦]

١) ما اشارة $\int_{1}^{3} ق(س)\,دس$

٢) ما اشارة $\int_{3}^{6} ق(س)\,دس$



الحل

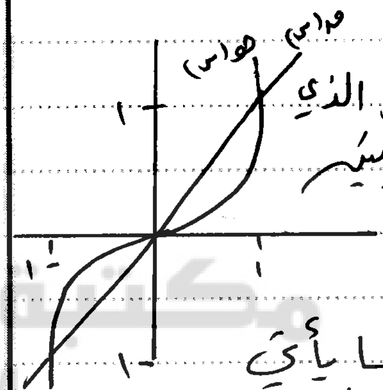
١) ق(س) ≥ ٠ لكل س ∈ [٠، ٣]

← $\int_{1}^{3} ق(س)\,دس \ge 0$

٢) ق(س) ≤ ٠ لكل س ∈ [٣، ٦]

← $\int_{3}^{6} ق(س)\,دس \le 0$

تدريب (١٠) ص ٢٤٨



اعتماداً على الشكل الذي يمثل منحنى الاقترانين ق، هـ قارن بين قيمتي التكامل في كل مما يأتي

١) $\int_{0}^{1} ق(س)\,دس$ ، $\int_{0}^{1} هـ(س)\,دس$

٢) $\int_{-1}^{0} ق(س)\,دس$ ، $\int_{-1}^{0} هـ(س)\,دس$

الحل

١) ق(س) ≤ هـ(س) لكل س ∈ [٠، ١]

← $\int_{0}^{1} ق(س)\,دس \le \int_{0}^{1} هـ(س)\,دس$

٢) ق(س) ≥ هـ(س) لكل س ∈ [-١، ٠]

← $\int_{-1}^{0} ق(س)\,دس \ge \int_{-1}^{0} هـ(س)\,دس$

تدريب (١١) ص ٢٤٩

اذا علمت ان $م \le \int_{0}^{1} \frac{س}{1+س^2} \le ك$ جد أكبر قيمة ممكنة للثابت م واصغر قيمة ممكنة للثابت ك التي تحقق المتباينة دون حساب $\int_{0}^{1} \frac{س}{1+س^2}\,دس$

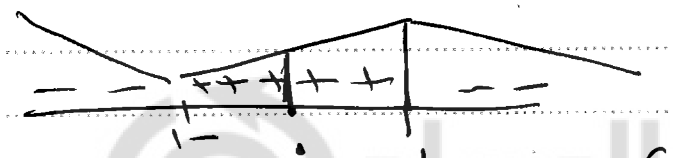
الحل

$ق(س) = \frac{س}{1+س^2}$ ←

$ق'(س) = \frac{(1+س^2)\times 1 - 2س \times س}{(1+س^2)^2}$

← $\frac{1-س^2}{(1+س^2)^2} = 0$ ← $1 - س^2 = 0$

← $س^2 = 1$ ← $س = \pm 1$



قيمة صغرى عند س = ٠ وهي ق(٠) = ٠

قيمة عظمى عند س = ١ وهي ق(١) = $\frac{1}{2}$

$0 \le ق(س) \le \frac{1}{2}$ في [٠، ١]

$\int_{0}^{1} 0 \le \int_{0}^{1} ق(س)\,دس \le \int_{0}^{1} \frac{1}{2}$

$0 \le \int_{0}^{1} ق(س)\,دس \le \frac{1}{2}$

م = ٠ ، ك = $\frac{1}{2}$

تمارين ومسائل

١) احسب قيمة كل من التكاملات التالية

أ) $\int_{2}^{8} \frac{1}{س^2} \, دس = \int_{2}^{8} س^{-2} \, دس$

$= \left[\frac{-1}{س}\right]_{2}^{8} = \frac{-1}{8} - \left(\frac{-1}{2}\right)$

$= \frac{-1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

ب) $\int_{0}^{3} \left(س^2 - |س-1|\right) دس$

س − ١ : − − ⓪ ١ + + ③

$= \int_{0}^{1} س^2 - (1-س) \, دس + \int_{1}^{3} س^2 - (س-1)$

$= \left[\frac{س^3}{3} - س + \frac{س^2}{2}\right]_{0}^{1} + \left[\frac{س^3}{3} - \frac{س^2}{2} + س\right]_{1}^{3}$

$= \left(\frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{2}\right) + \left(9 - \frac{9}{2} + 3\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1\right)$

$= \cancel{\frac{1}{3}} - 1 + \cancel{1} + 9 - \frac{9}{2} + 3 - \cancel{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2} - 1$

$= \cancel{\frac{1}{3}} - 1 + \frac{1}{2} + 11 - 4 \cancel{\frac{1}{3}}$

$= 6.5 = \frac{13}{2}$

ج) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} جا 2س \, دس = \left[\frac{-جتا 2س}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{-جتا \pi}{2} - \left(\frac{-جتا \frac{\pi}{2}}{2}\right)$

$= +\frac{1}{2} - (0) = \frac{1}{2}$

د) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (س + جتا س) \, دس$

$= \left[\frac{س^2}{2} + جا س\right]_{\frac{\pi}{2}}^{0} =$

$= 0 - \left(\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} + جا \frac{\pi}{2}\right)$

$= -\left(\frac{\pi^2}{8} + 1\right)$

هـ) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1 + جا 2س}}{جا س + جتا س} \, دس$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{جا^2 س + جتا^2 س + 2 جا س جتا س}}{جا س + جتا س}$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{(جا س + جتا س)^2}}{جا س + جتا س}$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{|جا س + جتا س|}{جا س + جتا س}$

$جا س + جتا س = 0 \Leftarrow س = 135° = \frac{3\pi}{4}$

جا س + جتا س موجبة في الربع الأول ⇐

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جاس} + \text{جتاس}}{\text{جاس} + \text{جتاس}} \, \text{دس}$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 1 \, \text{دس} = 1 \left(\frac{\pi}{2} - 0\right)$

$= \frac{\pi}{2}$

(و) $\int_{2}^{2} (9\text{س} - 7)^{5} \, \text{دس} = \text{صفر}$

(ز) $\int_{-1}^{3} (\text{س} - 1)(\text{س}^2 + \text{س} + 1) \, \text{دس}$

$= \int_{-1}^{3} (\text{س}^3 - 1) \, \text{دس}$

$= \left[\frac{\text{س}^4}{4} - \text{س}\right]_{-1}^{3}$

$= \left(\frac{81}{4} - 3\right) - \left(\frac{1}{4} + 1\right)$

$= \frac{81}{4} - 3 - \frac{1}{4} - 1 = \frac{80}{4} - 4$

$= 20 - 4 = 16$

(ح) $\int_{2}^{4} \frac{1}{(\text{س} - 1)^2} \, \text{دس}$

$= \int_{2}^{4} (\text{س} - 1)^{-2} \, \text{دس}$

$= \left[\frac{(\text{س} - 1)^{-1}}{-1}\right]_{2}^{4} = \left[\frac{-1}{\text{س} - 1}\right]_{2}^{4}$

$= \frac{-1}{3} - \left(\frac{-1}{1}\right) = \frac{-1}{3} + 1$

$= \frac{2}{3}$

(ي) $\int_{1}^{3} \frac{2\text{س}^3 - 4\text{س}^2 + 5}{\text{س}^2} \, \text{دس}$

$= \int_{1}^{3} \left(2\text{س} - 4 + \frac{5}{\text{س}^2}\right) \text{دس}$

$= \left[\text{س}^2 - 4\text{س} - \frac{5}{\text{س}}\right]_{1}^{3}$

$= \left(9 - 12 - \frac{5}{3}\right) - (1 - 4 - 5)$

$= -3 - \frac{5}{3} + 8 = 5 - \frac{5}{3}$

$= \frac{10}{3}$

(ع) $\int_{0}^{1} \sqrt{\text{س}} \left(\sqrt{\text{س}} + 2\right)^2 \, \text{دس}$

الحل

$= \int_{0}^{1} \sqrt{\text{س}} \left(\text{س} + 4\sqrt{\text{س}} + 4\right) \text{دس}$

$= \int_{0}^{1} \left(\text{س}^{\frac{3}{2}} + 4\text{س} + 4\sqrt{\text{س}}\right) \text{دس}$

$= \left[\frac{2}{5}\text{س}^{\frac{5}{2}} + 2\text{س}^2 + 4 \times \frac{2}{3}\text{س}^{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{1}$

$= \left(\frac{2}{5} + 2 + \frac{8}{3}\right) - (0)$

(ك) $\int_{2}^{3} \sqrt{9\text{س}^2 - 12\text{س} + 4} \, \text{دس}$

$= \int_{2}^{3} \sqrt{(3\text{س} - 2)^2}$

$= \int_{2}^{3} |3\text{س} - 2|$

$- - - \quad \frac{2}{3} \quad + + +$ ، 2 ، 3

$\int_{2}^{3} (3\text{س} - 2) \, \text{دس} = \left[\frac{3}{2}\text{س}^2 - 2\text{س}\right]_{2}^{3}$

$\left(\frac{27}{2} - 6\right) - (6 - 4)$

$= \frac{27}{2} - 8 = \frac{11}{2}$

① $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ (جتاس − جاس) دس

= [جاس + جتاس]$_{0}^{\frac{\pi}{2}}$

= (جا $\frac{\pi}{2}$ + جتا $\frac{\pi}{2}$) − (جا٠ + جتا٠)

= ١ − ١ = صفر

② اذا كان ق(س) = $\int_{0}^{-2}$ (٤ دس − ٣س^2) دس

جد ق(−١)

الحل

ق(س) = $\int_{0}^{-2}$ ٤ دس − ٣س^2

= ٤(−٢ − ٠) − ٣س^2

= −٨ − ٣س^2

ق(−١) = −٨ − ٣ = −١١

③ اذا كان $\int_{ب}^{2}$ ٢ب دس = −٣٠ جد ب

الحل

٢ب(٢ − ب) = −٣٠

٤ب − ٢ب^2 = −٣٠ ⟸

٢ب^2 − ٤ب − ٣٠ = ٠

ب^2 − ٢ب − ١٥ = ٠

(ب − ٥)(ب + ٣) = ٠

ب = ٥ ، ب = −٣

④ اذا كان $\int_{0}^{جـ}$ س(١ − س) دس = ٠

جد قيمة جـ ⟸

الحل

$\int_{0}^{جـ}$ (س − س^2) دس = ٠

= [$\frac{س^2}{2}$ − $\frac{س^3}{3}$]$_{0}^{جـ}$ = ٠

$\frac{جـ^2}{2}$ − $\frac{جـ^3}{3}$ = ٠ × ٦

٣جـ^2 − ٢جـ^3 = ٠

جـ^2(٣ − ٢جـ) = ٠

جـ = ٠ أو جـ = $\frac{3}{2}$

⑤ اذا كان

$\int_{-1}^{3}$ (٣س^2 − ٢ $\int_{0}^{جـ}$ ٣م دم) دس = −٢٠

جد قيمة جـ؟

الحل

$\int_{-1}^{3}$ (٣س^2 − ٢[$\frac{٣م^2}{2}$]$_{0}^{جـ}$) = −٢٠

$\int_{-1}^{3}$ (٣س^2 − ٢ $\frac{٣جـ^2}{2}$) = −٢٠

$\int_{-1}^{3}$ (٣س^2 − ٣جـ^2) دس = −٢٠

[س^3 − ٣جـ^2 س]$_{-1}^{3}$ = −٢٠

(٢٧ − ٩جـ^2) − (−١ + ٣جـ^2) = −٢٠

٢٧ − ٩جـ^2 + ١ − ٣جـ^2 = −٢٠

−١٢جـ^2 = −٢٠ − ٢٨ = −٤٨

جـ^2 = $\frac{-48}{-12}$ = ٤

جـ = ±٢

⑥ اذا كان ق(س) = $\begin{cases} -س & ، -٣ \le س \le ٠ \\ س & ، ٠ < س \le ٤ \end{cases}$

جد $\int_{-٣}^{٤} ق(س)\, دس$

الحل

$= \int_{-٣}^{٠} -س\, دس + \int_{٠}^{٤} س\, دس$

$= \left[\frac{-س^٢}{٢}\right]_{-٣}^{٠} + \left[\frac{س^٢}{٢}\right]_{٠}^{٤}$

$= ٠ - \left(\frac{-٩}{٢}\right) + \frac{١٦}{٢}$

$= +\frac{٩}{٢} + \frac{١٦}{٢} = \frac{٢٥}{٢}$

⑦ اذا كان $\int_{٢}^{ن} (٢س - ٣)\, دس = ٢٠$ ، جد ن

الحل

$\left[س^٢ - ٣س\right]_{٢}^{ن} = ٢٠$

$(ن^٢ - ٣ن) - (٤ - ٦) = ٢٠$

$ن^٢ - ٣ن + ٢ - ٢٠ = ٠$ ؛ $ن^٢ - ٣ن - ١٨ = ٠$

$(ن - ٦)(ن + ٣) = ٠$

$ن = ٦$ ، $ن = -٣$

⑧ اذا كان $\int_{١}^{٣} \left(٢ق(س) + \frac{١}{س^٢} - ٦\right) دس = ١٢$

جد $\int_{١}^{٣} \left(\frac{ق(س)}{٢} - س^٢\right) دس$

الحل

$٢\int_{١}^{٣} ق(س) + \int_{١}^{٣} \left(\frac{١}{س^٢} - ٦\right) = ١٢$

$٢\int_{١}^{٣} ق(س)\, دس + \left[\frac{-١}{س} - ٦س\right]_{١}^{٣} = ١٢$

$٢\int_{١}^{٣} ق(س)\, دس + \left(\frac{-١}{٣} - ١٨\right) - (-١ - ٦) = ١٢$

$٢\int_{١}^{٣} ق(س)\, دس - \frac{١}{٣} - ١٨ + ٧ = ١٢$

$٢\int_{١}^{٣} ق(س)\, دس = ١٢ + ١١ + \frac{١}{٣} = \frac{٧٠}{٣}$

$٢\int_{١}^{٣} ق(س)\, دس = \frac{٧٠}{٣}$

$\int_{١}^{٣} ق(س)\, دس = \frac{٧٠}{٦} = \frac{٣٥}{٣}$

$\frac{١}{٢}\int_{١}^{٣} ق(س) - \int_{١}^{٣} س^٢$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{٣٥}{٣} - \left[\frac{س^٣}{٣}\right]_{١}^{٣}$

$= \frac{٣٥}{٦} - \left(٩ - \frac{١}{٣}\right)$

$= \frac{٣٥}{٦} - ٩ + \frac{١ \times ٢}{٣ \times ٢} =$

$= \frac{٣٧}{٦} - ٩ = \frac{٣٧}{٦} - \frac{٥٤}{٦}$

$= \frac{-١٧}{٦}$

(٩) $\int_{٩}^{٢} (٢ق(س) + ٣)\,دس = -١٧$

$\int_{٢}^{٥} \frac{ق(س)}{٣}\,دس = -٢$

جد $\int_{٥}^{٩} (٤ق(س) - ١)\,دس$

الحل

$\int_{٢}^{٥} ق(س)\,دس = -٦$

$٢\int_{٩}^{٢} ق(س) + \int_{٩}^{٢} ٣\,دس = -١٧$

$٢\int_{٩}^{٢} ق(س) + ٣(٢ - ٩) = -١٧$

$٢\int_{٩}^{٢} ق(س) - ٢١ = -١٧$

$\int_{٩}^{٢} ق(س) = \frac{٤}{٢} = ٢$

$\Longleftarrow$

$٤\int_{٥}^{٩} ق(س) - \int_{٥}^{٩} ١\,دس$

$= ٤\left(\int_{٥}^{٢} ق(س) + \int_{٢}^{٩} ق(س)\right) - (٩ - ٥)$

$= ٤(٦ - ٢) - ٤$

$= ١٦ - ٤ = ١٢$

وزارة (٢٠١٥) صيفية

(١٠) بدون حساب تكامل المقدار

$\int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٣جتا^٢س + ٢}\,دس$ بين أن

$\frac{\pi}{٥} \le \int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٣جتا^٢س + ٢}\,دس \le \frac{\pi}{٢}$

الحل

$-١ \le جتاس \le ١$ بالتربيع

$٠ \le جتا^٢س \le ١$ $\times ٣$

لأنه يصبح موجب دائماً

$٠ \le ٣جتا^٢س \le ٣$

$+٢ \quad +٢ \quad +٢$

$٢ \le ٢ + ٣جتا^٢س \le ٥$ المطلوب

$\frac{١}{٢} \ge \frac{١}{٢ + ٣جتا^٢س} \ge \frac{١}{٥}$

$\int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٥} \le \int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٢ + ٣جتا^٢س} \le \int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٢}\,دس$

$\frac{١}{٥}(\pi - ٠) \le \int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٢ + ٣جتا^٢س} \le \frac{١}{٢}(\pi - ٠)$

$\frac{\pi}{٥} \le \int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٢ + ٣جتا^٢س} \le \frac{\pi}{٢}$

(١٢) اذا كان ق اقتران كثير حدود من الدرجة الثانية، $ق(١) = ٥$

$ق'(٤) = ٤$ ، $\int_{٠}^{١} ق'(س)\,دس = ٣$

جد قاعدة ق .

← يتبع الحل

الحل

$\text{ق}(\text{س}) = \text{أ}\text{س}^{٢} + \text{ب}\text{س} + \text{جـ}$

$\text{ق}(٠) = ٠ + ٠ + \text{جـ} = ٥$

$\text{جـ} = ٥$

$\text{ق}'(\text{س}) = ٢\text{أ}\text{س} + \text{ب}$

$\text{ق}''(\text{س}) = ٢\text{أ} \qquad \text{ق}''(\text{س}) = ٤$

$٢\text{أ} = ٤ \Leftarrow \text{أ} = ٢$

$\text{ق}(\text{س}) = ٢\text{س}^{٢} + \text{ب}\text{س} + ٥$

$\int_{٠}^{١} \text{ق}'(\text{س})\,\text{دس} = ٣$

$\text{ق}(١) - \text{ق}(٠) = ٣$

$(٢ + \text{ب} + ٥) - (٥) = ٣$

$٧ + \text{ب} - ٥ = ٣$

$\text{ب} = ٣ - ٢ \qquad \text{ب} = ١$

$\text{ق}(\text{س}) = ٢\text{س}^{٢} + \text{س} + ٥$

(١٣) جد كثير حدود ق(س) من الدرجة الأولى بحيث

$\int_{-١}^{١} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٤ \;،\; \int_{١}^{٣} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٢$

الحل

$\text{ق}(\text{س}) = \text{أ}\text{س} + \text{ب}$

$\int_{-١}^{١} (\text{أ}\text{س} + \text{ب})\,\text{دس} = ٤$

$\left[\frac{\text{أ}\text{س}^{٢}}{٢} + \text{ب}\text{س}\right]_{-١}^{١} = ٤$

$\left(\frac{\text{أ}}{٢} + \text{ب}\right) - \left(\frac{\text{أ}}{٢} - \text{ب}\right) = ٤$

$\cancel{\frac{\text{أ}}{٢}} + \text{ب} - \cancel{\frac{\text{أ}}{٢}} + \text{ب} = ٤$

$٢\text{ب} = ٤ \Leftarrow \text{ب} = ٢$

$\int_{١}^{٣} (\text{أ}\text{س} + \text{ب})\,\text{دس} = ٢$

$\int_{١}^{٣} (\text{أ}\text{س} + ٢)\,\text{دس} = ٢$

$\left[\frac{\text{أ}\text{س}^{٢}}{٢} + ٢\text{س}\right]_{١}^{٣} = ٢$

$\left(\frac{٩\text{أ}}{٢} + ٦\right) - \left(\frac{\text{أ}}{٢} + ٢\right) = ٢$

$\frac{٩\text{أ}}{٢} + ٦ - \frac{\text{أ}}{٢} - ٢ = ٢$

$\frac{٨\text{أ}}{٢} + ٤ = ٢$

$٤\text{أ} + ٤ = ٢$

$\Leftarrow ٤\text{أ} = -٢$

$\text{أ} = \frac{-٢}{٤} = \frac{-١}{٢}$

$\text{ق}(\text{س}) = \frac{-١}{٢}\text{س} + ٢$

اسئلة الوزارة

وزارة (٢٠٠٧) شتوية ٨

اذا كان $\int_{1}^{5} هـ(س)\,دس = ١٤$ ، $\int_{1}^{8} هـ(س)\,دس = ٥$

فما قيمة $\int_{5}^{8} ٢هـ(س)\,دس$

أ) ١٨ ب) ٣٨ ج) -١٨ د) -٣٨

الحل

$٢\int_{5}^{8} هـ(س)\,دس = ٢\left(\int_{5}^{1} هـ(س)\,دس + \int_{1}^{8} هـ(س)\,دس\right)$

$= ٢(-١٤ + ٥) = ٢ \times -٩ = -١٨$

الجواب (ج)

وزارة (٢٠٠٧) صيفية

هـ اقتران قابل للتكامل على فترة تنتمي اليها الاعداد أ ، ب ، جـ اذا كان $\int_{أ}^{ب} هـ(س)\,دس = ٩$ ، $\int_{أ}^{جـ} هـ(س)\,دس = ٥$ ، فما قيمة $\int_{جـ}^{ب} هـ(س)\,دس$ ؟

أ) -٤ ب) ١٤ ج) -١٤ د) ٤

الحل

$\int_{جـ}^{ب} هـ(س)\,دس = \int_{جـ}^{أ} هـ(س)\,دس + \int_{أ}^{ب} هـ(س)\,دس$

$= -٥ + ٩ = ٤$ (د)

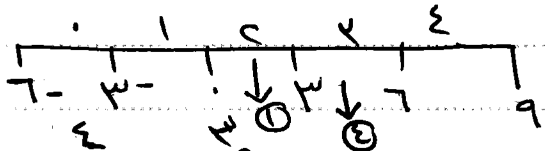
وزارة (٢٠٠٨) شتوية

$\int_{1}^{4} [\frac{1}{3}س + ٢]\,دس =$

أ) ٧ ب) ٦ ج) ٩ د) ٨،٥

الحل

طول الدرجة = ٣   صفر الاقتران = -٦



$\int_{1}^{4} [\frac{1}{3}س + ٢]\,دس = \int_{1}^{3} ٢\,دس + \int_{3}^{4} ٣\,دس$

$= ٢(٣-١) + ٣(٤-٣)$

$= ٤ + ٣ = ٧$ (أ)

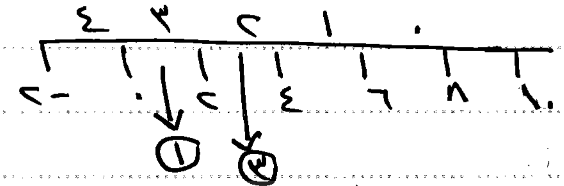
وزارة (٢٠٠٨) صيفية

$\int_{1}^{3} [٤ - \frac{1}{2}س]\,دس$

أ) ١٠ ب) ٦ ج) ٧ د) ٥

الحل

طول الدرجة = ٢   صفر الاقتران = ٨



$= \int_{1}^{2} ٣\,دس + \int_{2}^{3} ٢\,دس$

$= ٣ + ٢ = ٥$ (د)

وزارة (٢٠٠٩) صيفية

اذا كان ق اقتراناً متصلاً على ح، وكان

$\int \text{ق}(\text{س})\, \text{دس} = \text{قا}^2\text{س} - \text{ظا}^2\text{س} + \text{س}^2$

فان $\int_{-1}^{2} \text{ق}'(\text{س})\, \text{دس} =$

أ) ٢ ب) ٣ ج) ٧ د) ٦

الحل

$\int \text{ق}(\text{س})\, \text{دس} = 1 + \text{س}^2$

$\text{ق}(\text{س}) = 2\text{س}$

$\int_{-1}^{2} \text{ق}'(\text{س})\, \text{دس} = \text{ق}(2) - \text{ق}(-1)$

$= 4 - -2$

$= 6$ (د)

وزارة (٢٠١٠) صيفية

١) اوجد $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\text{دس}}{1 - \text{جتاس}}$

الحل ضرب بالمرافق $\frac{1 + \text{جتاس}}{1 + \text{جتاس}}$

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 + \text{جتاس}}{1 - \text{جتا}^2\text{س}}\, \text{دس}$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 + \text{جتاس}}{\text{جا}^2\text{س}}\, \text{دس}$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\text{جا}^2\text{س}} + \frac{\text{جتاس}}{\text{جا}^2\text{س}}$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (\text{قتا}^2\text{س} + \text{قتاس ظتاس})\, \text{دس}$

$= \Big[- \text{ظتاس} - \text{قتاس}\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$

$= \left(\frac{-1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}\right) - \left(-1 - \sqrt{2}\right) = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}$

٢) اذا كان $\int_{\text{م}}^{\text{ن}} \text{ق}(\text{س})\, \text{دس} = 3$

فان $\int_{\text{م}}^{\text{ن}} \text{ق}(\text{س})\, \text{دس} - \int_{\text{ن}}^{\text{م}} \text{ق}(\text{س})\, \text{دس}$

أ) -٦ ب) صفر ج) -٣ د) ٦

الحل

$= \int_{\text{م}}^{\text{ن}} \text{ق}(\text{س})\, \text{دس} + \int_{\text{م}}^{\text{ن}} \text{ق}(\text{س})\, \text{دس}$

$= 2\int_{\text{م}}^{\text{ن}} \text{ق}(\text{س})\, \text{دس} = 2 \times 3 = 6$ (د)

٣) اذا كان $\int_{1}^{\text{م}} \sqrt{\text{س}}\, \text{دس} = 1$ حيث م ثابت

فان $\int_{1}^{\text{م}} \frac{2\text{س}}{\sqrt{\text{س}}}\, \text{دس}$ يساوي

أ) ١ ب) ٢ ج) ٣ د) ٤

الحل

$\int_{1}^{\text{م}} 2\text{س} \times \text{س}^{-\frac{1}{2}}\, \text{دس} = 2\int_{1}^{\text{م}} \text{س}^{\frac{1}{2}}$

$= 2 \times 1 = 2$ (ب)

وزارة (٢٠١١) شتوية

أقل قيمة ممكنة للمقدار $\int_{-4}^{-1} (س^2+1)\, دس$

أ) ٥٤   ب) ٦   ج) ١٠   د) ٢

الحل

$-4 \le س \le -1$ بالتربيع

$16 \ge س^2 \ge 1$

$17 \ge س^2+1 \ge 2$

$\int_{-4}^{-1} 2\, دس \le \int_{-4}^{-1} (س^2+1)\, دس \le \int_{-4}^{-1} 17\, دس$

$6 \le \int_{-4}^{-1} (س^2+1)\, دس \le 51$

٦ ب

وزارة (٢٠١١) صيفية

① $\int_{\frac{-\pi}{3}}^{0} جا^2س\, جتا^2س\, دس$

الحل

$\int_{\frac{-\pi}{3}}^{0} (جاس\, جتاس)^2\, دس = \int_{\frac{-\pi}{3}}^{0} \left(\frac{1}{2} جا2س\right)^2 دس$

$= \int_{\frac{-\pi}{3}}^{0} \frac{1}{4} جا^2 2س\, دس$

$= \frac{1}{4} \int_{\frac{-\pi}{3}}^{0} \frac{1}{2}(1 - جتا4س)\, دس$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\left(س - \frac{1}{4} جا4س\right)\right]_{\frac{-\pi}{3}}^{0}$

$= \frac{1}{8}\left[0 - \left[\frac{-\pi}{3} - \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right]\right]$

$= \frac{1}{8}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$

② اذا كان $ق(س) = \int \left(\int_{0}^{-2} 4\, دس - 3س^2\right) دس$

فإن $ق'(-1) =$

أ) -11 ب) صفر   ج) ١   د) -3

الحل

$ق'(س) = \int_{0}^{-2} 4\, دس - 3س^2$

$ق'(س) = 4(-2-0) - 3س^2$

$= -8 - 3س^2$

$ق'(-1) = -8 - 3 = -11$

③ اذا كان $\int_{1}^{3} (2ق(س) - 4)\, دس = 6$

وكان $\int_{4}^{3} ق(س)\, دس = -1$ ، جد $\int_{1}^{4} ق(س)\, دس$

أ) ٧   ب) ٨   ج) ٥   د) ١٥

الحل

$2\int_{1}^{3} ق(س)\, دس - \int_{1}^{3} 4\, دس = 6$

$2\int_{1}^{3} ق(س)\, دس - 8 = 6$

$\Leftarrow \int_{1}^{3} ق(س)\, دس = 7$

$\int_{1}^{4} ق(س)\, دس = \int_{1}^{3} ق(س)\, دس + \int_{3}^{4} ق(س)\, دس$

$= 7 + 1 = 8$

ب

وزارة (٢٠١٢) شتوية

اذا كان $\int_{1}^{3} \frac{1}{2}$ ق(س) دس = ٢ ، $\int_{5}^{3}$ ق(س) دس = -٥ ، فان $\int_{1}^{5}$ ق(س) دس =

أ) ٧ ب) ٩ ج) -٣ د) -١

الحل

$\int_{1}^{3}$ ق(س) دس = ٤

$\int_{1}^{5}$ ق(س) دس = $\int_{1}^{3}$ ق(س) دس + $\int_{3}^{5}$ ق(س) دس

= ٤ + ٥ = ٩ (ب)

وزارة (٢٠١٢) صيفية

اذا كان ق(س) ≤ ٦ لجميع قيم س في الفترة [١، ٣] فان أكبر قيمة ممكنة للمقدار $\int_{1}^{3}$ (٢ق(س) + ١) دس =

أ) ١٢ ب) ١٣ ج) ٢٤ د) ٢٦

الحل

ق(س) ≤ ٦

٢ق(س) ≤ ١٢

٢ق(س) + ١ ≤ ١٣

$\int_{1}^{3}$ (٢ق(س) + ١) دس ≤ $\int_{1}^{3}$ ١٣ = ٢٦

الجواب (د)

٢) اذا كان $\int_{-1}^{2}$ ٣ق(س) دس = ٦ ، $\int_{5}^{2}$ ق(س) دس = ٨ فان $\int_{-1}^{5}$ |ق(س)| دس

أ) -٦ ب) ٦ ج) ١٠ د) ١٤

الحل

$\int_{-1}^{2}$ ق(س) دس = $\frac{6}{3}$ = ٢

$\int_{-1}^{5}$ |ق(س)| دس = |$\int_{-1}^{2}$ ق(س) دس| + |$\int_{2}^{5}$ ق(س) دس|

= |٢| + |-٨|

= ٢ + ٨ = ١٠ (ج)

٣) $\int_{4}^{6}$ [$\frac{1}{2}$ س + ١] دس

أ) ٦ ب) ٤ ج) ٢ د) ١

طول الدرجة = ٢

صفر الاقتران = -٢

-٢	٠	٢	٤	٦
٠	١	٢	٣	

= $\int_{4}^{6}$ ٣ دس = ٣ (٦ - ٤) = ٣ × ٢
= ٦

(أ)

وزارة (٢٠١٣) شتوية

١) اذا كان ق اقتراناً قابلاً للتكامل في الفترة [٠، ٢] وكان ق(س) ≥ ٢ لكل س ∈ [٠، ٢] فان أصغر قيمة ممكنة للمقدار $\int_{0}^{2}$ (٣ق(س) - ١) دس =

أ) ٤ ب) ٥ ج) ٦ د) ١٠

الحل

ق(س) ≥ ٢ ⟸ ٣ق(س) ≥ ٦

← يتبع

٣ ق(س) ≤ ٦

٣ق(س) − ١ ≤ ٥

$\int_{0}^{2}$ (٣ق(س) − ١) دس ≤ $\int_{0}^{2}$ ٥ دس = ١٠

(د)

---

② اذا كان $\int_{-2}^{1}$ (ق(س) + ١) دس = ٩

$\int_{1}^{3}$ ق(س) دس = −٤ فان $\int_{-2}^{3}$ ق(س) دس =

أ) ٥ ب) ٦ ج) ١٠ د) ١٣

الحل

$\int_{-2}^{1}$ ق(س) دس + $\int_{-2}^{1}$ ١ دس = ٩

$\int_{-2}^{1}$ ق(س) + ٣ = ٩

$\int_{-2}^{1}$ ق(س) دس = ٦

$\int_{-2}^{3}$ ق(س) دس = $\int_{-2}^{1}$ ق(س) دس + $\int_{1}^{3}$ ق(س) دس

= ٦ + ٤ = ١٠ (ج)

---

③ ق(س) = هـ^(جا² π/٤) + لو(١ − جتا² س)

فان قَ(π/٤) =

أ) √٢ ب) ٢ ج) √هـ د) √هـ + ٢

الحل

قَ(س) = ٠ + (−٢ جتاس × −جاس) / (١ − جتا² س)

قَ(π/٤) = (٢ جا π/٤ × جتا π/٤) / (١ − (جتا π/٤)²) = ١ / (١ − ½)

= ١ / ½ = ٢

---

④ قيمة $\int_{0}^{2}$ [٣ − ½ س] دس =

أ) −٢ ب) −١ ج) ٢ د) ٤

طول الدرج = ٢

صفر الاقتران س = ٦

٣ ٢ ١ ٠

−١ ٠ ٢ ٤ ٦

$\int_{0}^{2}$ ٢ دس = ٢(٢ − ٠) = ٤ (د)

وزارة (٢٠١٢ صيفي)

① $\int_{1}^{3}$ ق(س) دس = ٦ ، $\int_{3}^{1}$ ل ق(س) دس = −٣

فان قيمة الثابت ل

أ) −½ ب) ½ ج) −٦ د) ٢

الحل

$\int_{3}^{1}$ ل ق(س) دس = + $\int_{1}^{3}$ ق(س) دس = −٣/ل

٣/ل = ٦ ل = ½ (ب)

② $\int_{0}^{3}$ [½ س + ٤] دس

أ) ٩ ب) ١٤ ج) ١٣ د) ١٨

طول الدرج = ٢ س = −٨

٠ ١ ٢ ٣ ٤ ٥

−٨ −٦ −٤ −٢ ٠ ٢ ٤

= $\int_{0}^{2}$ ٤ دس + $\int_{2}^{3}$ ٥ دس

= ٤(٢ − ٠) + ٥(٣ − ٢) = ٨ + ٥

= ١٣ (د)

(وزارة ٢٠١٤) مشتوية

جد $\int_{٠}^{٢} (س^2 - |س-١|)\, ءس$

الحل

$|س-١| =$ — — — ١ - س ، + + + س - ١ (١ ، ٢)

$\int_{٠}^{٢} (س^2 - س + ١)\, ءس$

$= \left[\frac{س^3}{٣} - \frac{س^2}{٢} + س\right]_{٠}^{٢}$

$= \left(\frac{٨}{٣} - ٢ + ٢\right) - (٠)$

$= \frac{٨}{٣}$

(وزارة ٢٠١٤) صيفية

$\int_{٢}^{ن} [\frac{١}{٢}س + ٣]\, ءس = ٢٤$ ، ن > ٢ جد قيمة الثابت ن

$\frac{١}{٢}س + ٣ = ٠$ ، س = -٦

طول الدرج = ٢

٦	٥	٤	٣	٢	١	٠
٨	٦	٤	٢	-٢	-٤	-٦

$\int_{٢}^{٤} ٤ + \int_{٤}^{٦} ٥ + \int_{٦}^{ن} ٦$

$٨ + ١٠ + ٦(ن - ٦) = ٢٤$

$١٨ + ٦ن - ٣٦ = ٢٤$

$٦ن = ٤٢ \Leftarrow ن = ٧$

(وزارة ٢٠١٥) مشتوية

اذا كان $\int_{٩}^{٢} (٢ق(س) + ٣)\, ءس = -١٧$

$\int_{٢}^{٥} \frac{ق(س)}{٣} = -٢$

فجد $\int_{٥}^{٩} (٤ق(س) - ١)\, ءس$

الحل: $\int_{٩}^{٢} ٢ق(س) + \int_{٩}^{٢} ٣\, ءس = -١٧ \Leftarrow \int_{٩}^{٢} ق(س) = \frac{+٤}{٢} = +٢$

$\int_{٢}^{٥} ق(س)\, ءس = -٦$

$٤\int_{٥}^{٩} ق(س) - \int_{٥}^{٩} ١\, ءس$

$= ٤\left(\int_{٥}^{٢} ق(س)\, ءس + \int_{٢}^{٩} ق(س)\, ءس\right) - (٩-٥)$

$= ٤(٦ + -٢) - ٤$

$= ٤ \times ٢ - ٤ = ٤$

(وزارة صيفية ٢٠١٥)

١) بدون حساب التكامل $\int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٣جا^2س + ٢}$ بين ان

$\frac{\pi}{٥} \le \int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٣جا^2س + ٢}\, ءس \le \frac{\pi}{٢}$

السؤال محلول ص تمارين ومسائل السؤال العاشر الكتاب

وزارة (٢٠١٦ شتوية)

اذا علمت ان

$$م \le \int_{1}^{3} \frac{1}{\sqrt{2س^2+7}}\, دس \le ك$$

جد قيمة كل من الثابتين م ، ك بدون حساب تكامل $\int_{1}^{3} \frac{1}{\sqrt{2س^2+7}}$

الحل

$1 \le س \le 3 \Leftarrow 1 \le س^2 \le 9$

$2 \le 2س^2 \le 18 \Leftarrow 9 \le 2س^2+7 \le 25$

$\Leftarrow \sqrt{9} \le \sqrt{2س^2+7} \le \sqrt{25}$

$\Leftarrow 3 \le \sqrt{2س^2+7} \le 5$

$\frac{1}{5} \le \frac{1}{\sqrt{2س^2+7}} \le \frac{1}{3}$

$\int_{1}^{3} \frac{1}{5}\, دس \le \int_{1}^{3} \frac{1}{\sqrt{2س^2+7}} \le \int_{1}^{3} \frac{1}{3}$

$\frac{1}{5}(3-1) \le \int_{1}^{3} \frac{1}{\sqrt{2س^2+7}} \le \frac{1}{3}(3-1)$

$\frac{2}{5} \le \int_{1}^{3} \frac{1}{\sqrt{2س^2+7}} \le \frac{2}{3}$

$م = \frac{2}{5}$ ، $ك = \frac{2}{3}$

وزارة (٢٠١٦) صيفية

اذا علمت ان $م \le \int_{0}^{2} \sqrt{س^4+9}\, دس \le ك$ جد قيمة كل من الثابتين م ، ك دون حساب تكامل المقدار $\int_{0}^{2} \sqrt{س^4+9}$

الحل

$0 \le س \le 2$

$0 \le س^4 \le 16$

$+9 \quad +9 \quad +9$

$\Leftarrow 9 \le س^4+9 \le 25$

$3 \le \sqrt{س^4+9} \le 5$

$\int_{0}^{2} 3\, دس \le \int_{0}^{2} \sqrt{س^4+9} \le \int_{0}^{2} 5\, دس$

$3(2-0) \le \int_{0}^{2} \sqrt{س^4+9}\, دس \le 10$

$م = 6 \qquad ك = 10$

وزارة (٢٠١٧) شتوية

اذا كان

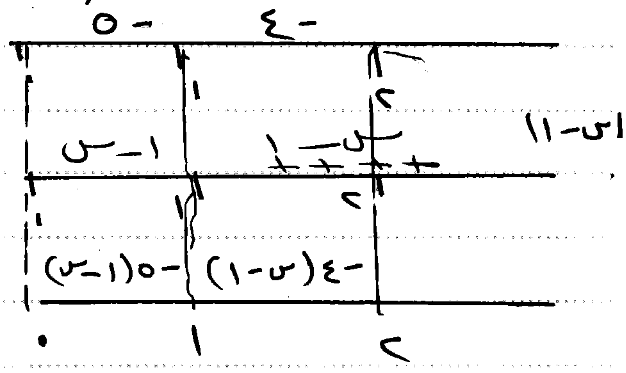
$$ق(س) = \begin{cases} [س-5]\,|س-1| & ، 0 \le س < 2 \\ \frac{3}{\sqrt{س+1}} & ، 2 \le س \le 4 \end{cases}$$

اوجد $\int_{0}^{4} ق(س)\, دس$

يتبع الحل ←

الحل

[س − ٥] ، س = ٥ ، طول الدرجة = ١



$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} -5(1-\text{س}) & ، \ 0 \le \text{س} < 1 \\ -4(\text{س}-1) & ، \ 1 \le \text{س} < 2 \\ \dfrac{3}{\sqrt{\text{س}+1}} & ، \ 2 \le \text{س} \le 4 \end{cases}$$

$$\int_0^4 \text{ق}(\text{س})\, \text{دس} = \int_0^1 (-5+5\text{س})\, \text{دس} + \int_1^2 (-4\text{س}+4)\, \text{دس} + \int_2^4 3(\text{س}+1)^{-\frac{1}{2}}\, \text{دس}$$

$$= \left[-5\text{س} + \frac{5\text{س}^2}{2}\right]_0^1 + \left[-\frac{4\text{س}^2}{2} + 4\text{س}\right]_1^2 + \left[3 \times 2(\text{س}+1)^{\frac{1}{2}}\right]_2^4$$

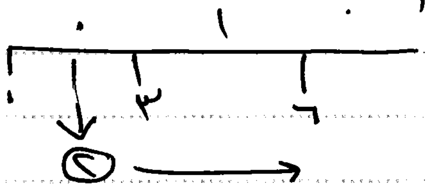
$$= \left(-5+\frac{5}{2}\right) + (-8+8) + (-2+4) + 6\sqrt{5} - 6\sqrt{3}$$

$$= -\frac{5}{2} + 2 + 6\sqrt{5} - 6\sqrt{3}$$

وزارة (٢٠١٧) صيفية

أوجد $\int_2^6 \left(\left[\frac{1}{3}\text{س}\right] - 2\right) \text{دس}$

طول الدرجة = ٣ ، س = ٠



$$= \int_2^3 (0-2) + \int_3^6 (1-2)\, \text{دس}$$

$$= -2(3-2) + -1(6-3)$$

$$= -2 - 3 = -5$$

وزارة (٢٠١٨) شتوية

١) اذا علمت ان $\text{م} \le \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{\text{س}^3+1}}\, \text{دس} \le \text{ك}$

بدون حساب التكامل $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{\text{س}^3+1}}$ جد قيم م ، ك

الحل

$0 \le \text{س} \le 2$

$0 \le \text{س}^3 \le 8$

$0+1 \le \text{س}^3+1 \le 8+1$

$1 \le \text{س}^3+1 \le 9$

$\sqrt{1} \le \sqrt{\text{س}^3+1} \le \sqrt{9}$

$1 \le \sqrt{\text{س}^3+1} \le 3$

$1 \ge \frac{1}{\sqrt{\text{س}^3+1}} \ge \frac{1}{3}$ ← بشكل

$\frac{1}{3} \le \frac{1}{\sqrt{س^3+1}} \le 1$

$\int_{0}^{2} \frac{1}{3} \le \int_{0}^{2} \frac{1}{\sqrt{س^3+1}} \le \int_{0}^{2} 1\, دس$

$\frac{1}{3}(2-0) \le \int_{0}^{2} \frac{1}{\sqrt{س^3+1}} \le 1(2-0)$

$\frac{2}{3} \le \int_{0}^{2} \frac{1}{\sqrt{س^3+1}} \le 2$

$م = \frac{2}{3}$ ، $ك = 2$

(2) قيمة $\int_{4}^{5} |س-3| + [\frac{1}{2}س+1]\, دس$ تساوي

أ) ١,٥ ب) ٧,٥ ج) ٤,٥ د) -١,٥

الحل

$|س-3|$

$- - - \quad 3 \quad + + +$ ؛ $3 \quad 4 \quad 5$

$[\frac{1}{2}س+1]$

$س = -2$

طول الدرج = ٢

$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3$

$-2 \quad 0 \quad 2 \quad 4 \quad 5 \quad 6$

$= \int_{4}^{5} (س-3)\, دس + \int_{4}^{5} 3\, دس$

$= \left(\frac{س^2}{2} - 3س\right)\Big|_{4}^{5} + 3(5-4)$

$(\frac{25}{2} - 15) - (\frac{16}{2} - 12) + 3$

$= -\frac{5}{2} + 4 + 3 = 7 - \frac{5}{2}$

$= 4,5$ (ج)

(3) اذا كان $\int_{0}^{2} \left(2س - \int_{0}^{ج} 3\, دس\right) دس = 16$ فان قيمة ج تساوي

أ) -٤ ب) -٢ ج) ٤ د) ٢

الحل

$\int_{0}^{2} (2س - 3(ج-0))\, دس = 16$

$\int_{0}^{2} (2س - 3ج)\, دس = 16$

$\left[\frac{2س^2}{2} - 3جس\right]_{0}^{2} = 16$

$(4 - 6ج) - 0 = 16$

$\frac{-6ج}{-6} = 16 - 4 = \frac{12}{-6}$

$ج = -2$

الجواب (ب)

ورقة عمل

① اوجد $\int_{-٢} |س^٢ + ٤س + ٤| \, دس$

أ) ١٦ ب) -١٦ ج) ٢٠ د) -٢٠

② اذا كانت $\int_{١}^{ك} [٢س] = ٣$ حيث ك > ١ جد قيمة ك .

أ) -٣ ب) ١,٥ ج) ٢ د) ٣

③ اذا كان

$ق(س) = \begin{cases} [س+١] &، ٢ \le س \le ٤ \\ |س| & ٤ < س \le ٥ \end{cases}$

اوجد $\int_{٢}^{٥} ق(س) \, دس$

④ اذا كانت $ق(س) = س^٢ - \int_{١}^{٣} \sqrt{س^٢+١} + \int \sqrt{ع^٢-٥}$

فاوجد ق(٣)

أ) -٨ ب) ٨ ج) $\sqrt{٥}$ د) صفر

⑤ اذا كان $\int_{١}^{٣} ق(س) \, دس = ٧$

$\int_{٧}^{٣} ق(س) \, دس = ٤$ فان

$\int_{١}^{٧} (ق(س) + ٣) \, دس =$

أ) ٩ ب) ١١ ج) ٢١ د) ٢٩

⑥ اوجد $\int_{١}^{٤} [\tfrac{١}{٢}س] \, دس$

أ) ٤ ب) -٤ ج) -٢ د) ٢

⑦ اذا كان ن عدد طبيعي فأثبت ان $\int_{٠}^{١} س^{ن} \, دس + \int_{٠}^{١} س^{\frac{١}{ن}} \, دس = ١$

⑧ اذا كان $\int ق(س) \, دس = س^٢ - ٢س + ٧$

وكان $\int_{-١}^{ب} ق(س) \, دس = ١٢$ اوجد قيمة ب

⑨ اذا كان

$ق(س) = \begin{cases} ٣أ & س > ٢ \\ ٣س^٢ + ٢ & س \le ٢ \end{cases}$

وكان $\int_{٠}^{٣} ق(س) \, دس = -١٢$

اوجد قيمة الثابت أ ؟

⑩ اوجد

$\int_{٢}^{٤} \frac{|س^٢ - ٤س + ٣|}{س - ١} \, دس$

(١١) اذا كان ق(س) ≤ ٢ لجميع قيم س ∈ [١، ٣] فان اصغر قيمة للمقدار $\int_{1}^{3} ٢ - ٢ق(س)\, دس$ =

أ) ٨ ب) -٨ ج) ٤ د) -٤

(١٢) دون اجراء التكامل بين ان $\int_{0}^{2} \frac{5}{س^2+1} دس$ تنحصر بين ٢، ١٠ ؟

(١٣) احسب $\int_{-2}^{3} \left[\frac{2-س}{2}\right] دس$

(١٤) اذا كان $\int_{1}^{3} (٢س + ٢ق(س))\, دس = ٦$

وكان $\int_{1}^{5} ق(س)\, دس = -٢$ جد

$\int_{5}^{3} ق(س)\, دس$

(١٥) دون حساب التكامل بين أن

$\int_{2}^{5} (٣س - ٢)\, دس \geq \int_{2}^{5} (س^2 + ٣)\, دس$

(١٦) اذا كان $\int_{1}^{3} ق(س)\, دس = ٣$

$\int_{4}^{3} ق(س)\, دس = -٢$ جد

$\int_{1}^{4} \left(٢ق(س) + \sqrt{س}\right) دس$

(١٧) اذا كان م(س) معكوس لمشتقة ق(س) على [٢، ٣] وكان م(٢) = ٤ ، م(٣) = ١٠ فان

$\int_{2}^{3} ق(س)\, دس$ =

أ) ١٠ ب) ٦ ج) ٤ د) ١

(١٨) فان قيمة $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{دس}{1-جاس} + \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{دس}{1+جاس}$

أ) $٢\sqrt{٣}$ ب) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ج) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ د) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

(١٩) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (٢ + جتا^2 س)\, دس + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} جا^2 س\, دس$ =

أ) $-\frac{3}{2}\pi$ ب) $-\frac{\pi}{2}$ ج) $\frac{\pi}{2}$ د) $\frac{3}{2}\pi$

(٢٠) اذا كان $\int_{-\pi}^{\pi} ظا^2 س\, دس = أ$ وكان

$\int_{-\pi}^{\pi} قا^2 س\, دس = ب$ فان أ + ب =

أ) ١ ب) صفر ج) -٢π د) ٢π

(٢١) اذا كان $\int_{0}^{جـ} \left[\frac{1}{2}س + 1\right] دس = ٩$

فان قيمة جـ تساوي

أ) ٣ ب) ٤ ج) ٥ د) ٦

(٢٢) اذا كان ق(س) = $\int_{1}^{2} ع\, دع + \int \frac{س^2}{س^2+1}$

فان قَ(١)

أ) $\frac{1}{3}$ ب) ١ ج) ٢ د) $\frac{7}{3}$

٠٧٩٥٦٥٦٨٨١ — ٠٧٨٨٦٥٦٠٥٧

(23) $\int_{1}^{3} \left(5 + \int_{3}^{1} 5\, دس\right) دس =$

أ) ٢٠ ب) ١٠ ج) -١٠ د) صفر

(24) اذا كان م(س)، ل(س) معكوسين لمشتقة ق(س) وكان

$\int_{2}^{8} \left(ل(س) - م(س)\right) دس = 18$ ، فان

$\int_{3}^{5} \left(م(س) - ل(س)\right) دس =$

أ) -٦ ب) -٣ ج) ٣ د) ٦

(25) اذا كان $\int_{0}^{أ} |2س - 2|\, دس = 5$

جد قيمة أ حيث أ > ٠.

(26) $ق(س) = [2 - س] + |2س - 4|$

اوجد $\int_{0}^{3} ق(س) .\, دس$

(27) اوجد $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 - جا2س}\, دس$

(28) اثبت ان

$\sqrt{8} \le \int_{0}^{2} \sqrt{3 - جا2س} \le 4$

(29) اذا كان $\int_{-2}^{2} \left(أ + ق(س)\right) دس = 13$

وكان $\int_{أ}^{-2} 4\, ق(س)\, دس = 8$ أ جد قيمة أ

(30) اذا كان $1 \le ق(س) \le 4$

لكل س ∈ [-١، ٥] جد أ، ن

بحيث ان

$أ \le \int_{-1}^{5} \left(2س + ق(س)\right) دس \le ن$

(31) بين دون اجراء التكامل

$2 \le \int_{1}^{3} \left(3 + 2\, طا^{3}\frac{\pi}{س}\right) دس \le 10$

الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي مشتقته وتكامله

تذكير

$\text{لو}_{\text{ب}}\ \text{أ} = \text{جـ} \iff \text{أ} = \text{ب}^{\text{جـ}}$

حيث أ ، ب اعداد حقيقية موجبة
كما ان ب ≠ ٠

مثلاً

$\text{لو}_{٢}\ ١٦ = ٤ \iff ٢^{٤} = ١٦$

$\text{لو}_{٣}\ ٢٧ = ٣ \iff ٣^{٣} = ٢٧$

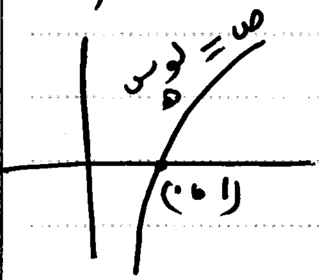
$\text{لو}_{٥}\ \frac{١}{٢٥} = -٢ \iff ٥^{-٢} = \frac{١}{٢٥}$

$\text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{س} = \text{ص} \iff \text{س} = \text{هـ}^{\text{ص}}$

اذا كان الاساس (هـ) فانه يسمى لوغاريتم طبيعي حيث هـ العدد النيبيري (هـ ≈ ٢.٧)

خواص اللوغاريتم

١) اللوغاريتم غير معرف عند الاعداد السالبة والصفر



٢) $\text{لو}_{\text{هـ}}\ ١ = ٠$

٣) $\text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{هـ} = ١$

٤) $\text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{س}^{\text{ن}} = \text{ن}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{س}$

٥) $\text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{س} \times \text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{ص}$

٦) $\text{لو}_{\text{هـ}} \left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right) = \text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{س} - \text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{ص}$

٧) $\text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{هـ}^{\text{ق(س)}} = \text{ق(س)}$

مثال

$\text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{هـ}^{٧} = ٧$ ، $\text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{هـ}^{\text{س}^{٢}} = \text{س}^{٢}$

مشتقة اللوغريتم الطبيعي

قاعدة

اذا كان $ق(س) = لو_{هـ} س$ ، $س > ٠$

فان $ق'(س) = \frac{1}{س}$

وبشكل عام

اذا كان $ق(س) = لو_{هـ} م(س)$

فان $ق'(س) = \frac{م'(س)}{م(س)}$

حيث $م(س) > ٠$ ، كما ان $م(س)$ قابل للاشتقاق

* $ص = لو_{هـ}$ اقتران

$ص' = \frac{\text{مشتقة ما داخل اللوغريتم}}{\text{ما داخل اللوغريتم نفسه}}$

مثال ①

اوجد $ق'(س)$ للاقترانات التالية

① $ق(س) = لو_{هـ} س$

$ق'(س) = \frac{1}{س}$

② $ق(س) = لو_{هـ} (س^2 + 1)$

$ق'(س) = \frac{2س}{س^2 + 1}$

③ $ق(س) = لو_{هـ} جتاس$

$ق'(س) = \frac{-جاس}{جتاس} = -ظاس$

④ $ق(س) = لو_{هـ} (3 + ظا 5س)$

$ق'(س) = \frac{5 قا^2 5س}{3 + ظا 5س}$

⑤ $ص = لو_{هـ} (5س + جا^3 2س)$

$ص' = \frac{5 + 3 جا^2 2س \times جتا 2س \times 2}{5س + جا^3 2س}$

⑥ $\text{ق}(\text{س}) = \text{جا}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{1}{\text{س}}\ \text{جتا}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

⑦ $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^2\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ أوجد

$\text{ق}'(1)$ ، $\text{ق}'(\text{هـ})$ ، $\text{ق}'(\frac{1}{\text{هـ}})$

الحل

$\text{ق}'(\text{س}) = \cancel{\text{س}^2} \times \frac{1}{\cancel{\text{س}}} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \times 2\text{س}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \text{س} + 2\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

$\text{ق}'(1) = 1 + 2 \times \text{لو}_{\text{هـ}} 1$

$= 1 + 0 = 1$

$\text{ق}'(\text{هـ}) = \text{هـ} + 2\text{هـ}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ}$

$= \text{هـ} + 2\text{هـ} = 3\text{هـ}$

$\text{ق}'(\frac{1}{\text{هـ}}) = \frac{1}{\text{هـ}} + 2 \times \frac{1}{\text{هـ}} \times \text{لو}_{\text{هـ}}\frac{1}{\text{هـ}}$

$= \frac{1}{\text{هـ}} + \frac{2}{\text{هـ}} \times -1 = \frac{-1}{\text{هـ}}$

مثال ②

$\text{ص} = \frac{1}{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}$ اوجد $\text{ص}'$

$\text{ص}' = \frac{-1 \times \frac{1}{\text{س}}}{(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2}$

مثال ③

$\text{ص} = \text{لو}\sqrt{5\text{س}+1}$ أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\frac{5}{2\sqrt{5\text{س}+1}}}{\sqrt{5\text{س}+1}} = \frac{5}{2(5\text{س}+1)}$

أو

$\text{ص} = \text{لو}(5\text{س}+1)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\text{لو}\ 5\text{س}+1$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{1}{2} \times \frac{5}{(5\text{س}+1)}$

مثال ④

$\text{ص} = \text{لو}\frac{\text{س}^2+1}{4\text{س}+3}$ أوجد $\text{ص}'$

الحل

$\text{ص} = \text{لو}(\text{س}^2+1) - \text{لو}\ 4\text{س}+3$

$\text{ص}' = \frac{2\text{س}}{\text{س}^2+1} - \frac{4}{4\text{س}+3}$

مثال ⑤

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ أوجد $\text{ص}'$

$\text{ص}' = \frac{\frac{1}{\text{س}}}{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}} = \frac{1}{\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}$

مثال ٦

ق(س) = $لو_{هـ}$ |س|

ملاحظة هامة

اذا كان ما داخل اللوغاريتم قيمة مطلقة فانها تهمل لأن ما داخل اللوغاريتم موجب دائماً

⇐ ق′(س) = $\frac{1}{س}$

ملاحظة هامة

لا داعي لاعادة تعريف القيمة المطلقة

مثال ٧

ق(س) = $لو_{هـ}$ |٤ − ٣س|

ق′(س) = $\frac{-٣}{٤ - ٣س}$

مثال ٨

ق(س) = $لو_{هـ}$ |حاس|

ق′(س) = $\frac{جتاس}{حاس}$ = ظتاس

مثال ٩

اذا كان ق(س) = $لو_{هـ}$ $(٣س^{٢} + ٤)^{٢}$ فاوجد ق′(٢)

أ) $\frac{٢}{٣}$ ب) $\frac{٣}{٢}$ جـ) $\frac{١}{١٦}$ د) ١٦

الحل

ق(س) = ٢ $لو_{هـ}$ $(٣س^{٢} + ٤)$

ق′(س) = ٢ × $\frac{٦س}{٣س^{٢} + ٤}$

ق′(٢) = $\frac{١٢ \times ٢}{٣(٢)^{٢} + ٤}$ = $\frac{٢٤}{١٦}$ = $\frac{٣}{٢}$

ب

مثال ١٠

ص = $لو_{هـ}$ (س ظاس) جد ص′

الحل

ص = $لو_{هـ}$ س + $لو_{هـ}$ ظاس

ص′ = $\frac{١}{س}$ + $\frac{قا^{٢}س}{ظاس}$

مثال ١١

ص = لو $\left(\frac{س - ٢}{س^{٢} + ١}\right)^{٢}$ جد ص′

ص = ٢(لو(س − ٢) − لو$(س^{٢} + ١)$)

ص′ = ٢$\left(\frac{١}{س - ٢} - \frac{٢س}{س^{٢} + ١}\right)$

ملاحظة هامة

اذا كان الاس متغير ونريد المشتقة نقوم بادخال اللوغاريتم على الطرفين بهدف فصل الاساس عن الاس

مثال (١٢)

ص = $٥^{٢س}$ اوجد $\frac{دص}{دس}$ ؟

الحل

بادخال اللوغاريتم على الطرفين

$لو_{هـ} ص = لو_{هـ} ٥^{٢س} = ٢س \; لو_{هـ} ٥$ ثابت

$\frac{ص'}{ص} = ٢ \; لو_{هـ} ٥$ اشتقاق ضمني

$ص' = ٢ \; لو_{هـ} ٥ \times ص$

$= ٢ \; لو_{هـ} ٥ \times ٥^{٢س}$

مثال (١٣)

ص = $٣^{س^٢ - ٥س}$ اوجد ص'

الحل

$لو_{هـ} ص = لو_{هـ} ٣^{س^٢ - ٥س} = (س^٢ - ٥س) \; لو_{هـ} ٣$

$\frac{ص'}{ص} = (٢س - ٥) \; لو_{هـ} ٣$

$ص' = (٢س - ٥) \; لو_{هـ} ٣ \times ص$

$= (٢س - ٥) \; لو_{هـ} ٣ \times ٣^{س^٢ - ٥س}$

بشكل عام

$ق(س) = أ^{ل(س)}$ فان

$ق'(س) = ل'(س) \times لو_{هـ} أ \times أ^{ل(س)}$

مثال (١٤)

ص = $س^{س}$ أوجد ص' س $\neq$ ٠

الحل

$لو_{هـ} ص = لو_{هـ} س^{س} = س \; لو_{هـ} س$

حاصل ضرب

$\frac{ص'}{ص} = \cancel{س} \times \frac{١}{\cancel{س}} + لو_{هـ} س \times ١$

$\frac{ص'}{ص} = ١ + لو_{هـ} س$

$ص' = (١ + لو_{هـ} س) \times ص$

$ص' = (١ + لو_{هـ} س) \times س^{س}$

مثال (١٥)

اذا كان $لو_{هـ} \sqrt{ص} + لو_{هـ} \sqrt{ص^٣} = س$

جد ص'

الحل

$لو_{هـ} ص^{\frac{١}{٢}} + لو_{هـ} ص^{\frac{٣}{٢}} = س$

$\frac{١}{٢} لو_{هـ} ص + \frac{٣}{٢} لو_{هـ} ص = س \Leftarrow$ يتبع

$\frac{1}{2} \times \frac{ص'}{ص} + \frac{3}{2} \times \frac{ص'}{ص} = 1$

$2 \times \frac{ص'}{ص} = 1 \Leftarrow ص' = \frac{ص}{2}$

مثال (16)

اذا كان $لو_{هـ} س ص = س - ص$

فاوجد $\frac{دص}{دس}$ ؟

الحل

$لو_{هـ} س ص = س - ص$

$لو_{هـ} س + لو_{هـ} ص = س - ص$

$\frac{1}{س} + \frac{ص'}{ص} = 1 - ص'$

$ص' + \frac{ص'}{ص} = 1 - \frac{1}{س}$

$ص' \left(1 + \frac{1}{ص}\right) = 1 - \frac{1}{س}$

$ص' = \frac{1 - \frac{1}{س}}{1 + \frac{1}{ص}}$

مثال (17)

اذا كان $لو_{هـ} ص = لو_{هـ} س^{س}$ فاوجد ص'

الحل

$لو_{هـ} ص = س \, لو_{هـ} س$

$\frac{ص'}{ص} = س \times \frac{1}{س} + لو_{هـ} س \times 1$

$\frac{ص'}{ص} = (س + لو_{هـ} س)$

$ص' = (س + لو_{هـ} س) \times ص$

$= (س + لو_{هـ} س) \, ص$

مثال (18)

اذا كان $ص^2 = لو_{هـ} |ص + س|$

جد ص'

الحل

$2 ص ص' = \frac{ص' + 1}{س + ص}$

$2 ص ص' (ص + س) = ص' + 1$

$2 ص^2 ص' + 2 ص س ص' = ص' + 1$

$2 ص^2 ص' + 2 ص س ص' - ص' = 1$

$ص' (2 ص^2 + 2 ص س - 1) = 1$

$ص' = \frac{1}{2 ص^2 + 2 ص س - 1}$

تكامل اقتران اللوغريتم الطبيعي

القاعدة

① $\int \frac{1}{س} \, دس = لوهـ|س| + جـ$

② $\int \frac{ق'(س)}{ق(س)} \, دس = لوهـ|ق(س)| + جـ$

ملاحظات هامة

① اذا كانت مشتقة المقام = البسط

فان $\int \frac{البسط}{المقام} \, دس = لوهـ|المقام| + جـ$

② اذا كانت مشتقة المقام = البسط × ثابت

فان $\int \frac{البسط}{المقام} = \frac{1}{الثابت} \times لوهـ|المقام| + جـ$

مثال ①

$\int \frac{3س^2 + 5}{س^3 + 5س + 1}$

لاحظ ان مشتقة المقام = البسط

$= لوهـ|س^3 + 5س + 1| + جـ$

مثال ②

$\int \frac{جتاس - جاس}{جتاس + جاس} \, دس$

مشتقة المقام = البسط

$= لوهـ|جتاس + جاس| + جـ$

مثال ③

$\int \frac{جا2س}{جا^2س + 1}$

مشتقة المقام = البسط

$2جاس جتاس = جا2س$

$= لوهـ|جا^2س + 1| + جـ$

مثال ④

$\int \frac{س^2}{س^3 + 1} \, دس$

الحل

مشتقة المقام = $3س^2$

لذلك نضرب كل من البسط والمقام بالعدد ٣

$= \frac{1}{3} \times \int \frac{3س^2}{س^3 + 1} \, دس = \frac{1}{3} \int \frac{3س^2}{س^3 + 1}$

$= \frac{1}{3} لوهـ|س^3 + 1| + جـ$

مثال ⑤

$$\int \frac{٥}{س+هـ}\, دس$$ حيث هـ: العدد النيبري

الحل مشتقة المقام = ١

البسط = ٥

$$٥\int \frac{١}{س+هـ}\, دس$$

$$= ٥ \text{ لو } |س+هـ| + جـ$$

مثال ⑥

$$\int \frac{\sqrt{س}}{س\sqrt{س}+١}\, دس$$

الحل

$$= \int \frac{س^{\frac{١}{٢}}}{س^{\frac{٣}{٢}}+١}\, دس$$

مشتقة المقام $\frac{٣}{٢} س^{\frac{١}{٢}}$ = البسط

$$= \frac{١}{\frac{٣}{٢}} \int \frac{\frac{٣}{٢} س^{\frac{١}{٢}}}{س^{\frac{٣}{٢}}+١}\, دس$$

$$= \frac{٢}{٣} \text{ لو } |س^{\frac{٣}{٢}}+١| + جـ$$

مثال ⑦

$$\int \frac{\sqrt[٣]{س}}{٥ - س\sqrt[٣]{س}}\, دس$$

الحل

$$\int \frac{س^{\frac{١}{٣}}}{٥ - س^{\frac{٤}{٣}}}\, دس$$

مشتقة المقام $= \frac{-٤}{٣} س^{\frac{١}{٣}}$ = البسط

$$= \frac{-٣}{٤} \text{ لو } |٥ - س^{\frac{٤}{٣}}| + جـ$$

مثال ⑧

$$\int \frac{جا ٣س}{١+جتا ٣س}\, دس$$

الحل

مشتقة المقام = ٣ جا ٣س = البسط

$$= \frac{١}{٣} \text{ لو } |١+جتا ٣س| + جـ$$

مثال ⑨

$$\int \frac{جا ٢س}{١+جا^{٢}س}$$

مشتقة المقام = ٢ جاس جتاس

= جا ٢س = البسط

$$= \text{ لو } |١+جا^{٢}س| + جـ$$

ملاحظة هامة

$$\int \frac{\text{ثابت}}{أ\,س^{ن} + ب\,س}\, دس$$

تحل بإخراج $س^{ن}$ عامل مشترك من المقام ثم رفعها للبسط

مثال (١٠)

$$\int \frac{1}{س^{10} + س}\, دس$$

الحل

$$\int \frac{1}{س^{10}(1 + س^{-9})}\, دس$$

$$= \int \frac{س^{-10}}{1 + س^{-9}}\, دس$$

$\Leftarrow$ مشتقة المقام $= -9\,س^{-10} =$ البسط

$$= -\frac{1}{9} \text{لو} \left| 1 + س^{-9} \right| + جـ$$

مثال (١١)

$$\int \frac{1}{2س^{6} - 3س}\, دس$$

الحل

$$= \int \frac{1}{س^{6}(2 - 3س^{-5})}\, دس$$

$$= \int \frac{س^{-6}}{(2 - 3س^{-5})}\, دس$$

البسط = مشتقة المقام $= 15\,س^{-6}$

$$= \frac{1}{15} \text{لو} \left| 2 - 3س^{-5} \right| + جـ$$

مثال (١٢)

$$\int \frac{(1 - س)^{3}}{3س}\, دس$$

الحل

$$\int \frac{1 - 3س + 3س^{2} - س^{3}}{3س}\, دس$$

$$= \int \left(\frac{1}{3س} - 1 + س - \frac{1}{3}س^{2} \right) دس$$

$$= \frac{1}{3} \text{لو} |س| - س + \frac{س^{2}}{2} - \frac{س^{3}}{9} + جـ$$

مثال (١٣)

$$\int \frac{1 + \text{لو}_{هـ} س}{3 + س\,\text{لو}_{هـ} س}\, دس$$

الحل

مشتقة المقام $= 0 + س \times \frac{1}{س} + \text{لو}_{هـ} س$

$= 1 + \text{لو}_{هـ} س =$ البسط

$$= \text{لو} \left| 3 + س\,\text{لو}_{هـ} س \right| + جـ$$

ملاحظة هامة

تكامل كل من ظا ، ظتا ، قتا ، قا تحل باستخدام اللوغاريتم

مثال (١٤)

∫ ظاس دس = ∫ (جاس / جتاس) دس

مشتقة المقام = − جاس = البسط

= − لو | جتاس | + جـ

مثال (١٥)

∫ ظتا٣س دس

= ∫ (جتا٣س / جا٣س) دس

= $\frac{1}{3}$ لو | جا٣س | دس

مشتقة المقام = ٣ جتا٣س = البسط

مثال (١٦)

∫ قاس . دس

الحل : نضرب كل من البسط والمقام في قاس + ظاس

∫ قاس × (قاس + ظاس) / (قاس + ظاس) دس

= ∫ (قا²س + قاس ظاس) / (قاس + ظاس)

مشتقة المقام = قاس ظاس + قا²س = البسط

= لو‎هـ | قاس + ظاس | + جـ

تلخيص هام

① ∫ جاس ، ∫ جتاس قوانين

② ∫ ظاس ، ∫ ظتاس ، ∫ قاس ، ∫ قتاس لوغاريتم

③ ∫ جا²س ، ∫ جتا²س ، ∫ ظا²س ، ∫ ظتا²س استبدال باستخدام المتطابقات

تدريبات الكتاب

تدريب ① ص ٢٥٤

جد ق'(س) لكل مما يأتي

① ق(س) = لو$_{هـ}$ (٢ − جتاس)

$$ق'(س) = \frac{+جاس}{٢ - جتاس}$$

② ق(س) = لو |٢س + ٥|

$$ق'(س) = \frac{٢}{٢س + ٥}$$

تدريب ② ص ٢٥٥

جد كلاً من التكاملات الآتية

① $\int_{٢}^{٤} \frac{١}{٩ - ٢س}$ دس

الحل

مشتقة المقام = −٢ = البسط

$= -\frac{١}{٢}$ لو |٩ − ٢س| $\Big]_{٢}^{٤}$

$= -\frac{١}{٢}$ (لو$_{هـ}$١ − لو$_{هـ}$٥)

$= -\frac{١}{٢}$ (٠ − لو$_{هـ}$٥) $= \frac{١}{٢}$ لو$_{هـ}$٥

② $\int_{-\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٤}} \frac{قا^٢س}{٢ + ظاس}$ دس

الحل البسط = مشتقة المقام

= لو |٢ + ظاس| $\Big]_{-\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٤}}$

= لو |٢ + ظا $\frac{\pi}{٤}$| − لو |٢ + ظا $-\frac{\pi}{٤}$|

= لو |٢ + ١| − لو |٢ − ١|

= لو$_{هـ}$٣ − لو$_{هـ}$١ = لو$_{هـ}$٣ − ٠ = لو$_{هـ}$٣

تمارين ومسائل

صـ ٢٥٦

① جد المشتقة الأولى لكل من الاقترانات التالية

أ) $ق(س) = لو_{هـ} ٢س$

$ق'(س) = \frac{٢}{٢س} = \frac{١}{س}$

ب) $ق(س) = لو_{هـ} جا^{٣} ٥س$

$ق'(س) = \frac{٣ جا^{٢} ٥س \times جتا ٥س \times ٥}{جا^{٣} ٥س}$

$= \frac{١٥ جتا ٥س}{جا ٥س}$

$= ١٥ ظتا ٥س$

جـ) $ق(س) = لو_{هـ} |س^{٢} + ٤س - ٥|$

$ق'(س) = \frac{٢س + ٤}{س^{٢} + ٤س - ٥}$

د) $ق(س) = لو_{هـ} (س^{٢} + ٥س + ٣)$

$ق'(س) = \frac{٢س + ٥}{س^{٢} + ٥س + ٣}$

هـ) $ق(س) = س^{٣} لو_{هـ} س$

$ق'(س) = س^{٣} \times \frac{١}{س} + لو_{هـ} س \times ٣س^{٢}$

$= س^{٢} + ٣س^{٢} لو_{هـ} س$

و) $لو_{هـ} (٢ + \sqrt{س})$

$ق'(س) = \frac{\frac{١}{٢\sqrt{س}}}{٢ + \sqrt{س}}$

ز) $ق(س) = لو_{هـ} س^{٣} ظاس$

$= لو_{هـ} س^{٣} + لو_{هـ} ظاس$

$= \frac{٣س^{٢}}{س^{٣}} + \frac{قا^{٢}س}{ظاس}$

$= \frac{٣}{س} + قاس قتاس$

ح) $ق(س) = لو_{هـ} \frac{س}{س^{٢} + ١}$

$= لو_{هـ} س - لو_{هـ} (س^{٢} + ١)$

$ق'(س) = \frac{١}{س} - \frac{٢س}{س^{٢} + ١}$

ط) $ق(س) = (لو_{هـ} س)^{٣}$ موس

$ق'(س) = ٣(لو_{هـ} س)^{٢} \times \frac{١}{س}$

$= \frac{٣}{س}(لو_{هـ} س)^{٢}$

ي) $ق(س) = لو_{هـ} \frac{(٤س^{٢}+٥)^{٦}}{(٧-٢س)^{٥}}$

$= لو(٤س^{٢}+٥)^{٦} - لو(٧-٢س)^{٥}$

$= ٦ لو(٤س^{٢}+٥) - ٥ لو(٧-٢س)$

$ق'(س) = \frac{٦ \times ٨س}{٤س^{٢}+٥} - \frac{٥ \times -٢}{٧-٢س}$

$= \frac{٤٨س}{٤س^{٢}+٥} + \frac{١٠}{٧-٢س}$

ك) $ق(س) = لو_{هـ} \sqrt[٣]{٥س^{٣}+٤س}$

الحل

$ق(س) = لو_{هـ} (٥س^{٣}+٤س)^{\frac{١}{٣}}$

$= \frac{١}{٣} لو(٥س^{٣}+٤س)$

$ق'(س) = \frac{١}{٣} \times \frac{١٥س^{٢}+٤}{٥س^{٣}+٤س}$

ل) $ق(س) = ظا(لو_{هـ} س)$

$ق'(س) = قا^{٢}(لو_{هـ} س) \times \frac{١}{س}$

٢) اذا كان $ق(س) = لو_{هـ}(س + \sqrt{س^{٢}-١})$

اثبت أن $ق'(س) = \frac{١}{\sqrt{س^{٢}-١}}$

الحل: $ق'(س) = \frac{١ + \frac{٢س}{٢\sqrt{س^{٢}-١}}}{س+\sqrt{س^{٢}-١}}$ توحيد مقام

$= \frac{\cancel{\sqrt{س^{٢}-١}+س}}{\sqrt{س^{٢}-١}} \times \frac{١}{\cancel{\sqrt{س^{٢}-١}+س}}$

$= \frac{١}{\sqrt{س^{٢}-١}}$

٣) اذا كان

$(ق(س) - س) = لو_{هـ}|قاس + ظاس| + س^{٢}$

اثبت ان $ق'(س) = ٣س + قاس$

الحل باشتقاق الطرفين

$ق'(س) - س = \frac{قاس ظاس + قا^{٢}س}{قاس + ظاس} + ٢س$

$ق'(س) = \frac{قاس\cancel{(ظاس+قاس)}}{\cancel{قاس+ظاس}} + ٣س$

$= قاس + ٣س$

④ بين ان الاقتران $م(س) = لو_{هـ} جاس$ هو معكوس لمشتقة $ق(س) = ظتاس$

الحل

$م'(س) = \frac{جتاس}{جاس} = ظتاس$

$= ق(س)$

⑤ جد كلاً من التكاملات الآتية:

أ) $\int \frac{2س}{س^2+3} \, دس$

$= لو_{هـ} |س^2+3| + جـ$

ب) $\int \frac{1+جتاس}{س+جاس} \, دس$

البسط = مشتقة المقام

$= لو_{هـ} |س+جاس| + جـ$

جـ) $\int \frac{5+5ظتا^2س}{ظتاس} \, دس$

الحل

$= \int \frac{5(1+ظتا^2س)}{ظتاس} \, دس$

$= 5\int \frac{قتا^2س}{ظتاس}$

المقام = ظتاس مشتقة المقام = $-قتا^2س$

$= -5 \, لو |ظتاس| + جـ$

د) $\int \frac{3س^2}{س^3+5} \, دس$

البسط = مشتقة المقام

$= لو |س^3+5| + جـ$

هـ) $\int \frac{س+5}{س} \, دس$

الحل

$= \int \left(\frac{س}{س} + \frac{5}{س}\right) دس$

$= \int \left(1+\frac{5}{س}\right) دس = س + 5 \, لو|س| + جـ$

و) $\int_{3}^{5} \frac{س-2}{س^2-4} \, دس$

$= \int_{3}^{5} \frac{\cancel{س-2}}{\cancel{(س-2)}(س+2)} = \int_{3}^{5} \frac{1}{س+2}$

$= \left[لو|س+2|\right]_{3}^{5} = لو_{هـ} 7 - لو_{هـ} 5$

ز) $\int_{-1}^{2} \frac{|2س|}{س^2+1} \, دس$

$|2س|$: $- - -$ ، $+ + +$ ؛ 0 ، $-2س$ ، $2س$

$= \int_{-1}^{0} \frac{-2س}{س^2+1} + \int_{0}^{2} \frac{2س}{س^2+1}$

يتبع

$= -\text{لو}\,|س^2+1| + \text{لو}\,|س^2+1|\Big]_{-1}^{2}$

$= -(\text{لو}\,1 - \text{لو}\,2) + \text{لو}\,5 - \text{لو}\,1$

$= 0 + \text{لو}\,2 + \text{لو}\,5 - 0 = \text{لو}_{هـ}\,5 + \text{لو}_{هـ}\,2$

ع) $\int \frac{حا\,3س}{1+جتا\,3س}\,دس$

مشتقة المقام $= -حا\,3س \times 3$

$= \frac{\text{لو}\,|1+جتا\,3س|}{-3} + جـ$

هـ) $\int \frac{2س-1}{س(س-1)}\,دس$

الكل

$= \int \frac{2س-1}{س^2-س}$

مشتقة المقام = البسط

$= \text{لو}_{هـ}\,|س^2-س| + جـ$

ي) $\int ظاس\,دس = \int \frac{حاس}{جتاس}\,دس$

مشتقة المقام $= -حاس$

$= -\text{لو}\,|جتاس| + جـ$

٦) جد معكوس لمشتقة كل من الاقترانات الآتية:

أ) $ق(س) = \frac{2س}{(س^2+4)}$

$م(س) = \int \frac{2س}{س^2+4}\,دس$

$= \text{لو}\,|س^2+4| + جـ$

ب) $ق(س) = \frac{3\,جتا\,3س}{5+حا\,3س}$

$م(س) = \int \frac{3\,جتا\,3س}{5+حا\,3س}$

مشتقة المقام $= 3\,جتا\,3س$ = البسط

$= \text{لو}\,|5+حا\,3س| + جـ$

٠٧٩٥٦٥٦٨٨١ — ٠٧٨٨٦٥٦٠٥٧

اسئلة الوزارة

وزارة (٢٠٠٧) صيفية

① اذا كان ق(س) = س لوهـ س فما قيمة $\int_{1}^{هـ} ق''(س)\, دس$ ؟

أ) ١ ب) ٢ جـ) $\frac{هـ^2 - هـ - 1}{2}$ د) $\frac{1 - هـ}{هـ}$

الحل

$\int_{1}^{هـ} ق''(س)\, دس = ق'(س) \Big]_{1}^{هـ}$

$= ق'(هـ) - ق'(1)$

$ق'(س) = س \times \frac{1}{س} + لوهـ س \times 1$

$= 1 + لوهـ س$

$ق'(هـ) - ق'(1)$

$= (1 + لوهـ هـ) - (1 + لوهـ 1)$

$= (1 + 1) - (1 + 0) = 1$

(أ)

وزارة (٢٠١٢) شتوية

اذا كان جـ > ١ وكان $\int_{1}^{جـ} \frac{1}{س}\, دس = 3$ فما قيمة جـ

أ) $هـ^4$ ب) $هـ^3$ جـ) ٤ د) ٣

الحل

$لوهـ|س| \Big]_{1}^{جـ} = 3$

$لوهـ جـ - لوهـ 1 = 3 \Rightarrow لوهـ جـ = 3$

$جـ = هـ^3$

(ب)

وزارة (٢٠١٢) صيفية

قيمة $\int_{2}^{2هـ} \frac{1}{س}\, دس$ تساوي :

أ) صفر ب) ١ جـ) ٢ د) هـ

الحل

$لوهـ|س| \Big]_{2}^{2هـ} = لوهـ 2هـ - لوهـ 2$

$= لوهـ 2 + لوهـ هـ - لوهـ 2 = 1$

(ب)

وزارة (٢٠١٢) صيفية

قيمة $\int_{هـ}^{هـ^2} \frac{1}{س - 1}\, دس$ تساوي

أ) لوهـ (هـ - ١) ب) لوهـ (هـ² + هـ + ١)

جـ) لوهـ (هـ² + هـ) د) لوهـ (هـ³ - ١)

يتبع الحل ←

الحل

$\left. لو|س-١| \right]_{هـ}^{هـ^2}$

$= لو(هـ^2-١) - لو(هـ-١)$

$= لو \frac{هـ^2-١}{هـ-١} = لو \frac{\cancel{(هـ-١)}(هـ+١)}{\cancel{هـ-١}}$

$= لو_{هـ}(هـ+١)$ (أ)

② اذا كان $ق(س) = لو_{هـ} هـ^{س^2+١}$ فان $ق'(٢) =$

أ) ٤ ب) صفر ج) ٥ د) ١

الحل

$ق(س) = (س^2+١) لو_{هـ} هـ$

$ق(س) = (س^2+١) \times ١$

$= س^2+١$

$ق'(س) = ٢س$

$ق'(٢) = ٤$ (أ)

وزارة (٢٠١٤) صيفية

اذا كان

$\int (ق'(س) - س) دس = لو|قاس + ظاس| + جـ$

فاثبت ان $ق'(س) = س - قاس$

الحل باشتقاق الطرفين

$ق'(س) - س = \frac{-قاس ظاس - قا^2س}{قاس + ظاس}$

$ق'(س) - س = \frac{-قاس \cancel{(ظاس + قاس)}}{\cancel{ظاس + قاس}}$

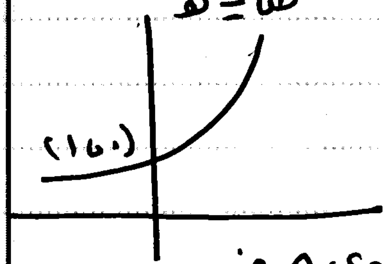
$ق'(س) = س - قاس$

الاقتران الأسي الطبيعي
مشتقته وتكامله

الأقتران الأسي : هو الأقتران الذي يكون فيه الاس متغير مثلا $ه^{س}$ ، $ه^{س^2+2}$ ، $ه^{جتاس}$ ، $3^{س}$ ، ------

واذا كان الاساس هو العدد النيبيري (ه) فانه يسمى اقتران اسي طبيعي

خواصه وميزاته



① رسمته كما في الشكل نلاحظ ان $ه^{س} \neq 0$ لا تمكن ان تساوي صفر

② للتحويل من الصورة اللوغاريتمية الى الصورة الاسيه والعكس

$لو_{ه} ص = س \Leftrightarrow ص = ه^{س}$ ، $ص > 0$

③ $ه^{0} = 1$ ، $ه^{س} \times ه^{ص} = ه^{س+ص}$

$\frac{ه^{س}}{ه^{ص}} = ه^{س-ص}$ ، $(ه^{س})^{ص} = ه^{س \times ص}$

④ $ص = لو_{ه} ه^{ق(س)} \Leftarrow ص = ق(س)$

$ص = ه^{لو_{ه} ق(س)} \Leftarrow ص = ق(س)$

مشتقة الأقتران الاسي الطبيعي

قاعدة

① $ق(س) = ه^{س} \Leftarrow ق'(س) = ه^{س}$

② $ق(س) = ه^{ل(س)} \Leftarrow ق'(س) = ل'(س)\, ه^{ل(س)}$

البرهان

$ص = ه^{ل(س)} \Leftarrow لو_{ه} ص = لو_{ه} ه^{ل(س)}$

$لو_{ه} ص = ل(س)$ بالاشتقاق الضمني

$\frac{ص'}{ص} = ل'(س) \Leftarrow$

$ص' = ل'(س) \times ص$

$ق'(س) = ل'(س) \times ه^{ل(س)}$

مثال ①

جد المشتقة الأولى لكل مما يلي

1) $\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{5\text{س}} \Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = 5\,\text{هـ}^{5\text{س}}$

2) $\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}^2+2\text{س}}$

$\text{ق}'(\text{س}) = (2\text{س}+2)\,\text{هـ}^{\text{س}^2+2\text{س}}$

3) $\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{جتاس}}$ ، $\text{ق}'(\text{س}) = -\text{جاس}\,\text{هـ}^{\text{جتاس}}$

4) $\text{ص} = \text{س}^3 + \text{هـ}^{\text{س}^3} + \text{لو}\,\text{س}^3$

$\text{ص}' = 3\text{س}^2 + 3\text{س}^2\,\text{هـ}^{\text{س}^3} + \dfrac{3\text{س}^2}{\text{س}^3}$

5) $\text{ص} = (\text{هـ}^{\text{س}})^3$

الحل $\text{ص} = \text{هـ}^{3\text{س}}$ ، $\text{ص}' = 3\,\text{هـ}^{3\text{س}}$

6) $\text{ص} = \text{هـ}^{\frac{1}{\text{س}}}$ ، $\text{ص}' = \dfrac{-1}{\text{س}^2}\,\text{هـ}^{\frac{1}{\text{س}}}$

7) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}^2} + \text{لو}(\text{س}^3+4\text{س})$

$\text{ص}' = 2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}^2} + \dfrac{3\text{س}^2+4}{\text{س}^3+4\text{س}}$

8) $\text{ص} = \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}^{\text{س}^2}$

الحل $\text{ص} = \text{س} \times \text{س}^2 = \text{س}^3$

$\text{ص}' = 3\text{س}^2$

9) $\text{ص} = \underset{\text{ثابت}}{\text{هـ}^3} \Leftarrow \text{ص}' = \text{صفر}$

10) $\text{ص} = \sqrt[3]{\text{هـ}^{4\text{س}}}$

الحل $\text{ص} = \text{هـ}^{\frac{4\text{س}}{3}}$

$\text{ص}' = \dfrac{4}{3}\,\text{هـ}^{\frac{4\text{س}}{3}}$

11) $\text{ص} = \sqrt{\text{هـ}^{2\text{س}} + 2\text{س}}$

$\text{ص}' = \dfrac{2\,\text{هـ}^{2\text{س}} + 2}{2\sqrt{\text{هـ}^{2\text{س}} + 2\text{س}}}$

12) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{جاس}} \times \text{هـ}^{\text{جتاس}}$

الحل $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{جاس}+\text{جتاس}}$

$\text{ص}' = (\text{جتاس} - \text{جاس})\,\text{هـ}^{\text{جاس}+\text{جتاس}}$

13) $\text{ص} = \text{هـ}^{3\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{جاس}}$

الحل $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{جا}^3\text{س}} = \text{جا}^3\text{س}$

$\text{ص}' = 3\,\text{جا}^2\text{س}\,\text{جتاس}$

14) $\text{ص} = \dfrac{\text{هـ}^{7\text{س}}}{\text{هـ}^{2\text{س}}}$

الحل $\text{ص} = \text{هـ}^{7\text{س}-2\text{س}} = \text{هـ}^{5\text{س}}$

$\text{ص}' = 5\,\text{هـ}^{5\text{س}}$

١٥) $ص = \frac{١ + هـ^{س}}{هـ^{س}}$

الحل

$ص = \frac{١}{هـ^{س}} + ١ = هـ^{-س} + ١$

$ص' = -هـ^{-س}$

١٦) $هـ^{ص^٢} = ٥س + ١$ اشتقاق ضمني

$٢ص\, هـ^{ص^٢} \times ص' = ٥$

$ص' = \frac{٥}{٢ص\, هـ^{ص^٢}}$

١٧) اذا كانت $ص = (هـ^{٥س})^{٣} لو_{هـ} جا^{٢} ٣س$

جد $\frac{دص}{دس}$

الحل

$ص = هـ^{١٥س} لو جا^{٢} ٣س$

$= هـ^{١٥س} \times ٢ لو جا٣س$

$= ٢ هـ^{١٥س} لو جا٣س$

$\frac{دص}{دس} = ٢ هـ^{١٥س} \times \frac{٣ جتا٣س}{جا٣س} + لو جا٣س \times ٢ \times ١٥ هـ^{١٥س}$

١٨) $ص = هـ^{٢ لو_{هـ}(س+١)} + لو_{هـ} هـ^{ظا٥س}$

الحل

$ص = هـ^{لو_{هـ}(س+١)^{٢}} + لو_{هـ} هـ^{ظا٥س}$

$ص = (س+١)^{٢} + ظا٥س$

$\frac{دص}{دس} = ٢(س+١) + ٥ قا^{٢} ٥س$

ملاحظة هامة

القاعدة السابقة صحيحة في الأقتران الأسي الطبيعي (الذي اساسه هـ)
أما اذا كان الاساس ليس هـ
مثلاً $٥^{س}$ ، $٤^{س^٢}$ ، $س^{س}$ ....
في هذه الحالة ندخل اللوغريتم للطرفين ثم نقوم بالاشتقاق

مثال ٢

اوجد $\frac{دص}{دس}$ لما يلي

١) $ص = ٢^{٣س}$ عندما $س = \frac{١}{٣}$

الحل

بادخال اللوغاريتم للطرفين

$لو_{هـ} ص = لو_{هـ} ٢^{٣س} = ٣س لو_{هـ} ٢$

بالاشتقاق الضمني

$\frac{ص'}{ص} = ٣ لو_{هـ} ٢$

$ص' = ٣ لو_{هـ} ٢ \times ص$

$= ٣ لو_{هـ} ٢ \times ٢^{٣س}$

② $\text{ص} = ٤^{\text{س}^٣ + ٤\text{س}}$

الحل

$\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = (\text{س}^٣ + ٤\text{س})\ \text{لو}_{\text{هـ}}٤$

$\frac{\text{ص}'}{\text{ص}} = (٣\text{س}^٢ + ٤)\ \text{لو}_{\text{هـ}}٤$

$\text{ص}' = (٣\text{س}^٢ + ٤)\ \text{لو}_{\text{هـ}}٤ \times \text{ص}$

$= (٣\text{س}^٢ + ٤)\ \text{لو}_{\text{هـ}}٤ \times ٤^{\text{س}^٣ + ٤\text{س}}$

③ اذا كانت $\text{ص} = \text{أ}^{\text{ق(س)}}$ فاثبت ان $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ق}'\text{(س)}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{أ} \times \text{أ}^{\text{ق(س)}}$

الحل

$\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{أ}^{\text{ق(س)}} = \text{ق(س)}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{أ}$

$\frac{\text{ص}'}{\text{ص}} = \text{ق}'\text{(س)}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{أ}$

$\text{ص}' = \text{ق}'\text{(س)}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{أ} \times \text{ص}$

$\text{ص}' = \text{ق}'\text{(س)}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{أ} \times \text{أ}^{\text{ق(س)}}$

مثال ٤

اذا كانت $\text{ص} = \text{جاس}\ \text{هـ}^{\text{س}}$ فاثبت ان $\text{ص}'' - ٢\text{ص}' + ٢\text{ص} = \text{صفر}$

الحل

$\text{ص}' = \text{جاس} \times \text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}} \times \text{جتاس}$

$\text{ص}'' = \cancel{\text{جاس} \times \text{هـ}^{\text{س}}} + \text{هـ}^{\text{س}} \times \text{جتاس}$
$\cancel{- \text{هـ}^{\text{س}} \times \text{جاس}} + \text{جتاس} \times \text{هـ}^{\text{س}}$

$\text{ص}'' = ٢\text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جتاس}$

$\text{ص}'' - ٢\text{ص}' + ٢\text{ص} =$
$٢\text{هـ}^{\text{س}}\text{جتاس} - ٢(\text{جاس} \times \text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}} \times \text{جتاس})$
$+ ٢\text{جاس}\ \text{هـ}^{\text{س}}$

$= \cancel{٢\text{هـ}^{\text{س}}\text{جتاس}} - \cancel{٢\text{جاس}\ \text{هـ}^{\text{س}}} - \cancel{٢\text{هـ}^{\text{س}}\text{جتاس}}$
$\cancel{+ ٢\text{جاس}\ \text{هـ}^{\text{س}}} = \text{صفر}$

مثال ٥

اذا كان $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{أس}}$ جد قيمة أ التي تحقق المعادلة

$\text{ص}'' - ٥\text{ص}' + ٦\text{ص} = \text{صفر}$

الحل

$\text{ص}' = \text{أ}\ \text{هـ}^{\text{أس}} \qquad \text{ص}'' = \text{أ}^٢\ \text{هـ}^{\text{أس}}$

بالتعويض في المعادلة

$\text{أ}^٢\text{هـ}^{\text{أس}} - ٥\text{أ}\ \text{هـ}^{\text{أس}} + ٦\text{هـ}^{\text{أس}} = ٠$

$\text{هـ}^{\text{أس}}(\text{أ}^٢ - ٥\text{أ} + ٦) = ٠$

$\text{هـ}^{\text{أس}} \neq ٠ \Leftarrow \text{أ}^٢ - ٥\text{أ} + ٦ = ٠$

$(\text{أ} - ٣)(\text{أ} - ٢) = ٠$

$\text{أ} = ٣ \qquad \text{أ} = ٢$

مثال ٦

اذا كانت $ص^{ص} = هـ^{س}$ اثبت أن $\frac{دص}{دس} = \frac{ص}{ص+س}$

الحل

$لو_{هـ} ص^{ص} = لو_{هـ} هـ^{س}$

$ص \, لو_{هـ} ص = س \, لو_{هـ} هـ = س$

اشتقاق ضمني

$ص \times \frac{صَ}{ص} + لو_{هـ} ص \times صَ = ١$

$صَ \left(١ + لو_{هـ} ص \right) = ١$

$$صَ = \frac{١}{١ + لو_{هـ} ص}$$

لكن $ص \, لو_{هـ} ص = س$

$\Leftarrow لو_{هـ} ص = \frac{س}{ص}$ بالتعويض في $صَ$

$$صَ = \frac{١}{١ + \frac{س}{ص}} = \frac{١}{\frac{ص+س}{ص}}$$

$$= \frac{ص}{ص+س}$$

مثال ٧

اذا كان $\int ق(س) \, دس = هـ^{س^٢} + لو_{هـ} جاس + جـ$ جد $قَ(س)$

الحل

باشتقاق الطرفين

$ق(س) = ٢س \, هـ^{س^٢} + \frac{جتاس}{جاس}$ ظتاس

$قَ(س) = ٢س \times ٢س \, هـ^{س^٢} + هـ^{س^٢} \times ٢ - قتا^٢ س$

$= ٤س^٢ \, هـ^{س^٢} + ٢هـ^{س^٢} - قتا^٢ س$

مثال ٨

اذا كان $س^٢ \, هـ^{٢ص} = ١$ اثبت ان $\frac{دص}{دس} = \frac{-١}{س}$

الحل

نشتق

$س^٢ \times ٢صَ \, هـ^{٢ص} + هـ^{٢ص} \times ٢س = ٠$

$$\frac{\cancel{س^٢} \times \cancel{٢} صَ \, \cancel{هـ^{٢ص}}}{\cancel{٢س^٢ \, هـ^{٢ص}}} = \frac{-\cancel{٢}س \, \cancel{هـ^{٢ص}}}{\cancel{٢}س^٢ \, \cancel{هـ^{٢ص}}}$$

$$صَ = \frac{-س}{س^٢} = \frac{-١}{س}$$

مثال ٩

$ص^٢ = لو_{هـ} س ص - هـ^{س^٢}$ اوجد $\frac{دص}{دس}$

الحل $ص^٢ = لو_{هـ} س + لو_{هـ} ص - هـ^{س^٢} \Leftarrow$ يتبع

$\text{٢ص صَ} = \frac{1}{\text{س}} + \frac{\text{صَ}}{\text{ص}} - \text{٢س هـ}^{\text{س}^2}$

$\text{٢ص صَ} - \frac{\text{صَ}}{\text{ص}} = \frac{1}{\text{س}} - \text{٢س هـ}^{\text{س}^2}$

$\frac{\text{صَ}\left(\text{٢ص} - \frac{1}{\text{ص}}\right)}{\text{٢ص} - \frac{1}{\text{ص}}} = \frac{\frac{1}{\text{س}} - \text{٢س هـ}^{\text{س}^2}}{\text{٢ص} - \frac{1}{\text{ص}}}$

$\text{صَ} = \frac{\frac{1}{\text{س}} - \text{٢س هـ}^{\text{س}^2}}{\text{٢ص} - \frac{1}{\text{ص}}}$

مثال (١٠)

اذا كان $\text{ق(س)} = \text{هـ}^{\text{لوهـ هـ}}$ فان

$\text{قَ(٢)} =$

أ) هـ   ب) ٢   ج) صفر   د) لوهـ

الحل

$\text{ق(س)} = \text{هـ}^{\text{لوهـ هـ}} = \text{هـ}$ ثابت

$\text{قَ(س)} = \text{صفر}$ ، $\text{قَ(٢)} = \text{صفر}$

الجواب (ج)

مثال (١١)

اذا كان $\text{هـ}^{\text{س ص}} = \text{س} + \text{ص}$

فأثبت ان

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{1 - \text{س ص} - \text{ص}^2}{\text{س}^2 + \text{س ص} - 1}$

الحل

باشتقاق الطرفين

$(\text{س صَ} + \text{ص})\,\text{هـ}^{\text{س ص}} = 1 + \text{صَ}$

$\text{س صَ هـ}^{\text{س ص}} + \text{ص هـ}^{\text{س ص}} = 1 + \text{صَ}$

$\text{س صَ هـ}^{\text{س ص}} - \text{صَ} = 1 - \text{ص هـ}^{\text{س ص}}$

$\frac{\text{صَ}\left(\text{س هـ}^{\text{س ص}} - 1\right)}{\text{س هـ}^{\text{س ص}} - 1} = \frac{1 - \text{ص هـ}^{\text{س ص}}}{\text{س هـ}^{\text{س ص}} - 1}$

لكن $\text{هـ}^{\text{س ص}} = \text{س} + \text{ص}$

$\text{صَ} = \frac{1 - \text{ص}(\text{س}+\text{ص})}{\text{س}(\text{س}+\text{ص}) - 1}$

$= \frac{1 - \text{س ص} - \text{ص}^2}{\text{س}^2 + \text{س ص} - 1}$

مثال (١٢)

جد $\int \text{هـ}^{\text{لوهـ}(\text{س}^3 + \text{جاس})}\, \text{دس}$

الحل

$= \int (\text{س}^3 + \text{جاس})\, \text{دس}$

$= \frac{\text{س}^4}{4} - \text{جتاس} + \text{جـ}$

مثال (١٣)

جد معادلة المماس لمنحنى

$\text{ص} = (\text{س} - 1)\,\text{هـ}^{\text{س}} + 3\,\text{لوهـ س} + 2$

عند النقطة (١، ٢) ← يتبع الحل

الحل

(١،٢) نقطة التماس ولايجاد ميل المماس نجد صَ

$$صَ = (س-١)\times هـ^{س} + هـ^{س}\times ١ + \frac{٣}{س}$$

$$ميل\ المماس = صَ\Big|_{س=١}$$

$$= (١-١)هـ^{١} + هـ^{١} + \frac{٣}{١}$$

$$= هـ + ٣$$

معادلة المماس $ص - ص_١ = م(س - س_١)$

$$ص - ٢ = (هـ + ٣)(س - ١)$$

مثال (١٤)

اذا كانت $ص = هـ^{م\,جتاس} + لو_{هـ} جاس + \int_{.}^{\pi} \frac{دس}{٢+جاس}$

وكانت $\frac{دص}{دس}\Big|_{س=\frac{\pi}{٢}} = -٤$ جد قيمة م

الحل

$$\frac{دص}{دس} = -م\,جاس\,هـ^{م\,جتاس} + \frac{جتاس}{جاس} + ٠$$

$$\frac{دص}{دس}\Big|_{س=\frac{\pi}{٢}} = -م\,جا\frac{\pi}{٢}\,هـ^{م\,جتا\frac{\pi}{٢}} + \frac{جتا\frac{\pi}{٢}}{جا\frac{\pi}{٢}} = -٤$$

$$-م\times ١\,هـ^{٠} + \frac{٠}{١} = -٤$$

$$-م = -٤$$

$$م = ٤$$

تكامل الاقتران الاسي الطبيعي

القاعدة

١) $\int هـ^{س}\,دس = هـ^{س} + ج$

٢) $\int هـ^{م س + ن}\,دس = \frac{هـ^{م س + ن}}{م} + ج$

ملاحظة

القاعدة صحيحة فقط اذا كان الاس خطي.

مثال ١

جد كلاً من التكاملات الآتية

١) $\int ٥\,هـ^{س}\,دس = ٥\,هـ^{س} + ج$

٢) $\int هـ^{٢س+١}\,دس = \frac{هـ^{٢س+١}}{٢} + ج$

٣) $\int هـ^{١-\frac{١}{٢}س}\,دس = \frac{هـ^{١-\frac{١}{٢}س}}{-\frac{١}{٢}} + ج$

٤) $\int \sqrt{هـ^{س}}\,دس = \int هـ^{\frac{س}{٢}}\,دس$

$$= ٢\,هـ^{\frac{س}{٢}} + ج$$

٥) $\int \frac{5}{\sqrt[3]{\text{هـ}^{6\text{س}-3}}}\,\text{دس} = \int 5\,\text{هـ}^{-\frac{1}{3}(6\text{س}-3)}\,\text{دس}$

$= \int 5\,\text{هـ}^{-2\text{س}+1}\,\text{دس} = \frac{5}{-2}\,\text{هـ}^{-2\text{س}+1} + \text{جـ}$

٦) $\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}+4}{\text{هـ}^{\text{س}}}\,\text{دس} = \int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}}} + \frac{4}{\text{هـ}^{\text{س}}}$

$= \int (1 + 4\,\text{هـ}^{-\text{س}})\,\text{دس}$

$= \text{س} - 4\,\text{هـ}^{-\text{س}} + \text{جـ}$

٧) $\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}}+1}\,\text{دس}$

مشتقة المقام = البسط

$= \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{هـ}^{\text{س}}+1| + \text{جـ}$

٨) $\int \frac{5+3\,\text{هـ}^{3\text{س}}}{\text{هـ}^{3\text{س}}+5\text{س}-1}$

الحل

مشتقة المقام $= 3\,\text{هـ}^{3\text{س}} + 5 =$ البسط

$\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{هـ}^{3\text{س}}+5\text{س}-1| + \text{جـ}$

٩) $\int \frac{\text{هـ}^{3\text{س}} - \text{هـ}^{5\text{س}} - \text{هـ}^{\text{س}} + 7}{\text{هـ}^{\text{س}}}$

$= \int \frac{\text{هـ}^{3\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}}} - \frac{\text{هـ}^{5\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}}} - \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}}} + \frac{7}{\text{هـ}^{\text{س}}}$

$= \int (\text{هـ}^{2\text{س}} + \text{هـ}^{4\text{س}} - 1 + 7\,\text{هـ}^{-\text{س}})\,\text{دس}$

$= \frac{\text{هـ}^{2\text{س}}}{2} + \frac{\text{هـ}^{4\text{س}}}{4} - \text{س} - 7\,\text{هـ}^{-\text{س}} + \text{جـ}$

١٠) $\int_{0}^{\text{لو}_{\text{هـ}}3} \text{هـ}^{2\text{س}}\,\text{دس} = \left[\frac{\text{هـ}^{2\text{س}}}{2}\right]_{0}^{\text{لو}_{\text{هـ}}3}$

$= \frac{1}{2}\left(\text{هـ}^{2\,\text{لو}_{\text{هـ}}3} - \text{هـ}^{0}\right) = \frac{1}{2}\left(\text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}9} - 1\right)$

$= \frac{1}{2}(9-1) = \frac{1}{2} \times 8 = 4$

١١) اثبت ان $\int_{0}^{\text{لو}_{\text{هـ}}3} \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{4+\text{هـ}^{\text{س}}}\,\text{دس} = \text{لو}_{\text{هـ}}\frac{7}{5}$

الحل

مشتقة المقام $= \text{هـ}^{\text{س}} =$ البسط

$= \left[\text{لو}|4+\text{هـ}^{\text{س}}|\right]_{0}^{\text{لو}_{\text{هـ}}3}$

$= \text{لو}|4+\text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}3}| - \text{لو}(4+\text{هـ}^{0})$

$= \text{لو}(4+3) - \text{لو}(4+1)$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}7 - \text{لو}_{\text{هـ}}5 = \text{لو}_{\text{هـ}}\frac{7}{5}$

١٢) $\int \frac{\text{هـ}^{2\text{س}} - 4}{\text{هـ}^{\text{س}} - 2}\,\text{دس}$

الحل $= \int \frac{(\text{هـ}^{\text{س}})^2 - 4}{\text{هـ}^{\text{س}} - 2} = \frac{\cancel{(\text{هـ}^{\text{س}}-2)}(\text{هـ}^{\text{س}}+2)}{\cancel{\text{هـ}^{\text{س}}-2}}$

$= \int \text{هـ}^{\text{س}} + 2 = \text{هـ}^{\text{س}} + 2\text{س} + \text{جـ}$

تدريبات الكتاب

تدريب ① ص ٥٩

جد ق'(س) لكل مما يأتي

1) $ق(س) = هـ^{جاس}$

$ق'(س) = جتاس \ هـ^{جاس}$

2) $ق(س) = س^{٤} \ هـ^{٢س}$

$ق'(س) = س^{٤} \times ٢ \ هـ^{٢س} + هـ^{٢س} \times ٤س^{٣}$

تدريب ② ص ٥٩

جد ق'(س) لكل مما يأتي

1) $ق(س) = س \ لو_{هـ} هـ^{س^{٢}}$

الحل

$ق(س) = س \times س^{٢} لو_{هـ} هـ = س^{٣}$

$ق'(س) = ٣س^{٢}$

2) $ق(س) = هـ^{٣ لو_{هـ}(١+جاس)}$

الحل

$ق(س) = هـ^{لو_{هـ}(١+جاس)^{٣}} = (١+جاس)^{٣}$

$ق'(س) = ٣(١+جاس)^{٢} \times جتاس$

تدريب ③ ص ٦١

جد كلاً من التكاملات الآتية

1) $\int_{٠}^{١} (١+هـ^{س})^{٢} \ دس$

فك الأقواس

الحل

$\int_{٠}^{١} (١+٢هـ^{س}+هـ^{٢س}) \ دس$

$= \left[س + ٢هـ^{س} + \frac{هـ^{٢س}}{٢}\right]_{٠}^{١}$

$= ١+٢هـ^{١}+\frac{هـ^{٢}}{٢} - (٠+٢هـ^{٠}+\frac{هـ^{٠}}{٢})$

$= ١+٢هـ+\frac{هـ^{٢}}{٢} - ٢ - \frac{١}{٢}$

$= ٢هـ + \frac{هـ^{٢}}{٢} - \frac{٣}{٢}$

2) $\int هـ^{٣س}(١+هـ^{٢س}) \ دس$

$= \int هـ^{٣س} + هـ^{٥س} \ دس$

$= \frac{هـ^{٣س}}{٣} + \frac{هـ^{٥س}}{٥} + جـ$

٠٧٩٥٦٥٦٨٨١ — ٠٧٨٨٦٥٦٠٥٧

تمارين ومسائل

ص ٢٦٢

١) جد $\frac{دص}{دس}$ لكل من الاقترانات الآتية

أ) $ص = س + هـ^{٩س}$

$ص' = ١ + ٩هـ^{٩س}$

ب) $ص = س^٢ + هـ^{٦ - ٥س^٤}$

$ص' = ٢س + -٢٠س^٣ \, هـ^{٦-٥س^٤}$

جـ) $ص = جا هـ^{٢س}$

$ص' = جتا هـ^{٢س} \times ٢هـ^{٢س}$

د) $ص = \sqrt{١ + هـ^{٢س}}$

$ص' = \frac{٢هـ^{٢س}}{٢\sqrt{١ + هـ^{٢س}}}$

هـ) $ص = هـ^{\frac{١}{س}} + لو_{هـ} \sqrt{س}$

$ص = هـ^{\frac{١}{س}} + لو س^{\frac{١}{٢}}$

$ص = هـ^{\frac{١}{س}} + \frac{١}{٢} لو_{هـ} س$

$ص' = \frac{-١}{س^٢} هـ^{\frac{١}{س}} + \frac{١}{٢} \times \frac{١}{س}$

و) $ص = هـ^{٥} + لو_{هـ} قا س$

$ص' = صفر + \frac{قا س ظا س}{قا س}$

$= ظا س$

ز) $ص = هـ^{٤ لو_{هـ}(س^٣+٢)}$

$= هـ^{لو_{هـ}(س^٣+٢)^٤}$

$ص = (س^٣+٢)^٤$

$ص' = ٤(س^٣+٢)^٣ \times ٣س^٢$

ح) $ص = \frac{١ + هـ^{٢س}}{هـ^{٥س}}$

الحل

$ص = (١ + هـ^{٢س}) \, هـ^{-٥س}$

$= هـ^{-٥س} + هـ^{-٣س}$

$ص' = -٥هـ^{-٥س} - ٣هـ^{-٣س}$

ط) $ص = \underbrace{هـ^{٢}}_{ثابت} + س^٢ \, هـ^{جا س}$

$ص' = صفر + س^٢ \times جتا س \, هـ^{جا س} + هـ^{جا س} \times ٢س$

ي) $ص = (هـ^{٤س+٥})^٦ = هـ^{٢٤س+٣٠}$

$ص' = ٢٤ هـ^{٢٤س+٣٠}$

(٢) وزارة (٢٠٠٩)

اذا كانت

$$ص = هـ^{ظاس} + م \, لو \, جتاس + \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{دس}{1+ظا^2 س}$$

وكان $\frac{دص}{دس}\Big|_{س=\frac{\pi}{4}} = 2هـ + 1$ جد م ؟

الحل

$$\frac{دص}{دس} = قا^2 س \, هـ^{ظاس} + م \times \frac{-جاس}{جتاس} + 0$$

$$\frac{دص}{دس}\Big|_{س=\frac{\pi}{4}} = قا^2 \frac{\pi}{4} \, هـ^{ظا\frac{\pi}{4}} - م \, ظا\frac{\pi}{4} = 2هـ + 1$$

$$\cancel{2هـ} - م = \cancel{2هـ} + 1$$

$$م = -1$$

(٣) اذا كانت $ق''(س) = جاس + هـ^{2س}$

$ق(0) = \frac{1}{4}$ ، $ق'(0) = \frac{1}{2}$ جد قاعدة الاقتران ق ؟

الحل

$$ق'(س) = \int ق''(س) = \int جاس + هـ^{2س}$$

$$= -جتاس + \frac{هـ^{2س}}{2} + جـ$$

$$ق'(0) = -جتا0 + \frac{هـ^0}{2} + جـ = \frac{1}{2}$$

$$-1 + \cancel{\tfrac{1}{2}} + جـ = \cancel{\tfrac{1}{2}} \quad جـ = 1$$

$$ق'(س) = -جتاس + \frac{1}{2}هـ^{2س} + 1$$

$$ق(س) = \int -جتاس + \frac{1}{2}هـ^{2س} + 1$$

$$= -جاس + \frac{1}{4}هـ^{2س} + س + جـ$$

$$ق(0) = \frac{1}{4}$$

$$-جا0 + \frac{1}{4}هـ^0 + \frac{1}{2} \times 0 + جـ = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} + جـ = \frac{1}{4}$$

$$جـ = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \Leftarrow جـ = صفر$$

$$ق(س) = -جاس + \frac{1}{4}هـ^{2س} + س$$

(٤) اذا كان

$$هـ^{صس} = س - ص$$

اثبت $\frac{دص}{دس} = \frac{ص^2 - س ص + 1}{س^2 - س ص + 1}$

الحل

$$هـ^{صس}(ص + س ص') = 1 - ص'$$

$$ص \, هـ^{صس} + س ص' هـ^{صس} = 1 - ص'$$

$$س ص' هـ^{صس} + ص' = 1 - ص \, هـ^{صس}$$

$$\frac{ص'\cancel{(س هـ^{صس} + 1)}}{\cancel{س هـ^{صس} + 1}} = \frac{1 - ص \, هـ^{صس}}{س هـ^{صس} + 1}$$

$$ص' = \frac{1 - ص(س - ص)}{س(س - ص) + 1}$$

لأن $هـ^{صس} = س - ص$

$$ص' = \frac{1 - س ص + ص^2}{س^2 - س ص + 1}$$

⑤ اذا كان $ص = هـ^{أس}$ ، جد قيمة (قيم) الثابت أ التي تحقق المعادلة الآتية

$ص'' - ٥ص' + ٦ص = صفر$

الحل

$ص' = أ هـ^{أس}$ ، $ص'' = أ^٢ هـ^{أس}$

بالتعويض

$أ^٢ هـ^{أس} - ٥أ هـ^{أس} + ٦ هـ^{أس} = ٠$

$هـ^{أس}(أ^٢ - ٥أ + ٦) = ٠$

$هـ^{أس} \neq ٠$ ، $(أ^٢ - ٥أ + ٦) = ٠$

$(أ - ٣)(أ - ٢) = ٠$

$أ = ٣$ $أ = ٢$

⑥ اذا كان $ق(س) = ٣^{ل(س)}$ حيث ل(س) قابل للاشتقاق فاثبت ان

$ق'(س) = ٣^{ل(س)} \times ل'(س) لو_{هـ} ٣$

الحل

$ق(س) = ٣^{ل(س)}$

$لو_{هـ} ق(س) = لو_{هـ} ٣^{ل(س)} = ل(س) لو_{هـ} ٣$

$\frac{ق'(س)}{ق(س)} = ل'(س) \times لو_{هـ} ٣$

$ق'(س) = ل'(س) \times لو_{هـ} ٣ \times ق(س)$

$= ل'(س) \times لو_{هـ} ٣ \times ٣^{ل(س)}$

⑦ اذا كان $\int ق'(س) دس = هـ^{١-س^٢} + ٤هـ$

$ق'(ن) = -٢ن$ ، $ن \neq صفر$

جد قيمة (قيم) الثابت ن ؟

الحل

باشتقاق الطرفين

$ق'(س) = -٢س هـ^{١-س^٢}$

$ق'(ن) = -٢ن هـ^{١-ن^٢} = -٢ن$

$هـ^{١-ن^٢} = \frac{-٢ن}{-٢ن} = ١ = هـ^{٠}$

$١ - ن^٢ = ٠ \Leftarrow ن = \pm ١$

⑧ جد كلاً من التكاملات الآتية

أ) $\int هـ^{٧س} دس = \frac{هـ^{٧س}}{٧} + جـ$

ب) $\int_{٠}^{١} ٣ هـ^{٣س} دس = \left[\frac{\cancel{٣} هـ^{٣س}}{\cancel{٣}}\right]_{٠}^{١}$

$= هـ^{٣} - ١$

جـ) $\int_{١}^{٣} هـ^{٤} دس = هـ^{٤}(٣ - ١) = ٢هـ^{٤}$

د) $\int \frac{٤هـ^{٤س} - ٣}{هـ^{٤س} - ٣س} دس$

مشتق المقام $= ٤هـ^{٤س} - ٣ =$ البسط

$= لو |هـ^{٤س} - ٣س| + جـ$

هـ) $\int \frac{هـ^{3س} - 27}{هـ^{س} - 3}$ دس

الحل

$\int \frac{(هـ^{س})^{3} - 27}{هـ^{س} - 3}$ دس   فرق بين مكعبين

$\int \frac{\cancel{(هـ^{س} - 3)}(هـ^{2س} + 3هـ^{س} + 9)}{\cancel{(هـ^{س} - 3)}}$

$= \frac{هـ^{2س}}{2} + 3هـ^{س} + 9س + جـ$

و) $\int هـ^{5 + لو جتا س}$ دس

$= \int هـ^{5} \times هـ^{لو جتا س}$ دس

$= \int هـ^{5} \times جتا س$ دس

$= هـ^{5}$ جا س $+ جـ$

ز) $\int_{1}^{هـ^{2}} \frac{1}{هـ - 1}$ دس

$= \left[\frac{1}{هـ - 1} س\right]_{1}^{هـ^{2}}$

$= \frac{1}{هـ - 1} \times هـ^{2} - \frac{1}{هـ - 1} \times 1$

$= \frac{هـ^{2}}{هـ - 1} - \frac{1}{هـ - 1}$

$= \frac{هـ^{2} - 1}{هـ - 1} = \frac{\cancel{(هـ - 1)}(هـ + 1)}{\cancel{هـ - 1}}$

$= هـ + 1$

ح) $\int 3س\, هـ^{2 + لو س^{2}}$ دس

الحل

$\int 3س \left(هـ^{2} \times هـ^{لو س^{2}}\right)$ دس

$= \int 3س \left(هـ^{2} \times س^{2}\right)$ دس

$= \int هـ^{2} \times 3س^{3}$ دس

$= \frac{3 هـ^{2}}{4} س^{4} + جـ$

ط) $\int هـ^{5س} \sqrt{هـ^{2س} + 4هـ^{س} + 4}$ دس

$= \int هـ^{5س} \sqrt{(هـ^{س} + 2)^{2}}$

$= \int هـ^{5س} \left|هـ^{س} + 2\right|$ دس

$هـ^{س} + 2$ دائماً موجبة

$\int هـ^{5س}(هـ^{س} + 2)$ دس $= \int هـ^{6س} + 2هـ^{5س}$ دس

$= \frac{هـ^{6س}}{6} + \frac{2}{5} هـ^{5س} + جـ$

ي) $\int \left(هـ^{2س+5}\right)^{2}$ دس

$= \int هـ^{4س+10}$ دس $= \frac{هـ^{4س+10}}{4} + جـ$

اسئلة الوزارة

وزارة (٢٠٠٨) شتوية

اوجد $\int_{0}^{لو_ه ٢} ه^{س}(٩-٤ه^{س})\,دس$

الحل

$= \int_{0}^{لو_ه ٢} (٩ه^{س} - ٤ه^{٢س})\,دس$

$= \left[٩ه^{س} - \frac{٤ه^{٢س}}{٢}\right]_{0}^{لو_ه ٢}$

$= \left(٩ه^{لو_ه ٢} - \frac{٤}{٢}ه^{٢لو_ه ٢}\right)$

$- \left(٩ه^{0} - ٢ه^{٢\times 0}\right)$

$= (٩\times٢ - ٢\times٤) - (٩-٢)$

$= (١٨-٨) - (٧) = ١٠ - ٧$

$= ٣$

وزارة (٢٠٠٨) صيفية

اذا كانت $ص = أ ه^{٢س} + جا(لو_ه س)$ حيث أ ثابت

وكان $\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=١} = ه^{٣} + ١$ جد قيمة أ

الحل

$ص'(س) = ٢أه^{٢س} + جتا لو_ه س \times \frac{١}{س}$

$ص'(١) = ٢أه^{٢} + جتا0 \times \frac{١}{١} = ه^{٣}+١$

$\Leftarrow ٢أه^{٢} + \cancel{١} = ه^{٣} + \cancel{١}$

$٢أه^{٢} = ه^{٣} \Leftarrow ٢أ = \frac{ه^{٣}}{ه^{٢}}$

$٢أ = ه \Leftarrow أ = \frac{ه}{٢}$

وزارة (٢٠٠٩) شتوية

اذا كانت $ص = ه^{٤س} + لو_ه ظاس + \int_{0}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{دس}{١+جتا^{٢}س}$

جد $\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=\frac{\pi}{٤}}$

الحل

$\frac{دص}{دس} = ٤ه^{٤س} + \frac{قا^{٢}س}{ظاس} + صفر$

$= ٤ه^{٤س} + \frac{١}{جتا^{٢}س} \times \frac{جتاس}{جاس}$

$= ٤ه^{٤س} + \frac{١}{جتاس} \times \frac{١}{جاس}$

$\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=\frac{\pi}{٤}} = ٤ه^{\pi} + \frac{١}{\frac{١}{\sqrt{٢}}} \times \frac{١}{\frac{١}{\sqrt{٢}}}$

$= ٤ه^{\pi} + ٢$

وزارة (٢٠٠٩) صيفية

① $\int \left(\frac{\text{قاس}}{\text{جتاس}} + \frac{1}{\text{هـ}^{\text{س}}} \right) \text{ءس} =$

أ) $\text{ظاس} - \text{هـ}^{-\text{س}} + \text{جـ}$ ب) $-\text{ظاس} + \text{هـ}^{-\text{س}} + \text{جـ}$

جـ) $\text{ظاس} + \text{هـ}^{-\text{س}} + \text{جـ}$ د) $\text{س} - \text{هـ}^{-\text{س}} + \text{جـ}$

الحل

$\int \left(\frac{\frac{1}{\text{جتاس}}}{\text{جتاس}} + \frac{1}{\text{هـ}^{\text{س}}} \right) \text{ءس}$

$= \int \left(\frac{1}{\text{جتا}^2\text{س}} + \frac{1}{\text{هـ}^{\text{س}}} \right) \text{ءس} =$

$= \int \left(\text{قا}^2\text{س} + \text{هـ}^{-\text{س}} \right) \text{ءس}$

$= \text{ظاس} - \text{هـ}^{-\text{س}} + \text{جـ}$

(أ)

② اذا كانت

$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{ظاس}} + \text{أ لو}_{\text{هـ}}\text{جتاس} + \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\text{ءس}}{1 + \text{ظا}^2\text{س}}$

حيث أ ثابت وكان $\left. \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \right|_{\text{س} = \frac{\pi}{4}} = 2\text{هـ} + 1$

جد قيمة أ

الحل

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{قا}^2\text{س هـ}^{\text{ظاس}} - \text{أ} \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$

$\left. \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \right|_{\text{س} = \frac{\pi}{4}} = \text{قا}^2\frac{\pi}{4}\ \text{هـ}^{\text{ظا}\frac{\pi}{4}} - \text{أ ظا}\frac{\pi}{4}$

$2\text{هـ} - 1 \times \text{أ} = \cancel{2\text{هـ}} - \text{أ} = \cancel{2\text{هـ}} + 1$

$\text{أ} = -1$

وزارة (٢٠١٠) شتوية

اذا كانت

$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{أ جتاس}} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جاس} + \int_{0}^{\pi} \frac{\text{ءس}}{2 + \text{ظاس}}$

وكان $\left. \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \right|_{\text{س} = \frac{\pi}{2}} = -2$ جد أ

الحل

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{أ جاس هـ}^{\text{أ جتاس}} + \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}$

$\left. \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \right|_{\text{س} = \frac{\pi}{2}} = -\text{أ جا}\frac{\pi}{2}\ \text{هـ}^{\text{أ جتا}\frac{\pi}{2}} + \text{ظتا}\frac{\pi}{2}$

$-\text{أ} \times 1 \times \text{هـ}^{0} + \text{صفر} = -2$

$-\text{أ} \times 1 = -2 \qquad \boxed{\text{أ} = 2}$

وزارة (٢٠١٠) صيفية

اذا كان

$\text{ق(س)} = \text{هـ}^{\frac{1}{\text{س}}} + \text{أ لو}_{\text{هـ}}\sqrt{\text{س}}$ وكان

$\text{ق}'(1) = \text{هـ}$ جد قيمة أ

الحل

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{-1}{\text{س}^2} \times \text{هـ}^{\frac{1}{\text{س}}} + \text{أ} \times \frac{1}{2\text{س}}$

$\text{ق}'(1) = -1 \times \text{هـ}^{1} + \text{أ} \times \frac{1}{2} = \text{هـ}$

$= -\text{هـ} + \frac{\text{أ}}{2} = \text{هـ}$

$\frac{\text{أ}}{2} = 2\text{هـ} \Leftarrow \text{أ} = 4\text{هـ}$

وزارة (٢٠١١) شتوية

$\int_{0}^{3} \left(3س^2 - \int_{2}^{2} هـ^{س} \, دس\right) دس$

أ) $27 - هـ^3$ ب) $28 - هـ^3$ ج) 27 د) 24

الحل

$= \int_{0}^{3} (3س^2 - 0) \, دس$

$= [س^3]_{0}^{3} = 27$ ج

وزارة (٢٠١١) صيفية

اذا كان $ق(س) = \frac{هـ^{س} + 1}{هـ^{س}}$ جد $ق'(0)$

أ) صفر ب) ١ ج) −١ د) غير موجودة

الحل

$ق'(س) = \frac{هـ^{س} \times هـ^{س} - (هـ^{س} + 1) \times هـ^{س}}{هـ^{2س}}$

$ق'(0) = \frac{هـ^{0} \times هـ^{0} - (هـ^{0} + 1) \times هـ^{0}}{هـ^{0}}$

$= \frac{1 \times 1 - (1 + 1) \times 1}{1}$

$= \frac{1 - 2}{1} = -1$ ج

وزارة (٢٠١٢) صيفية

اذا كان

$ق(س) = هـ^{2س} + لو_{هـ}(3س + 1)$ ، $س > -\frac{1}{3}$

فان $ق'(0) =$

أ) ٥ ب) ٤ ج) ٣ د) ٢

الحل

$ق'(س) = 2هـ^{2س} + \frac{3}{3س + 1}$

$ق'(0) = 2هـ^{0} + \frac{3}{1} = 2 + 3 = 5$ أ

وزارة (٢٠١٣) شتوية

١) اذا كانت $ص = 4^{ق(س)}$ وكان $ق(س)$ قابل للاشتقاق فاثبت ان

$\frac{دص}{دس} = 4^{ق(س)} \times لو_{هـ} 4 \times ق'(س)$

الحل

$ص = 4^{ق(س)} \Leftarrow لو_{هـ} ص = لو_{هـ} 4^{ق(س)}$

$= ق(س) لو_{هـ} 4$

باشتقاق الطرفين

$\frac{ص'}{ص} = ق'(س) لو_{هـ} 4$

$ص' = ق'(س) لو_{هـ} 4 \times ص$

$ص' = ق'(س) لو_{هـ} 4 \times 4^{ق(س)}$

٢) قيمة $\int_{0}^{1} \frac{هـ^{س}}{هـ^{س}+1}$

أ) ١ ب) $لو_{هـ}(هـ+1)$ جـ) $لو_{هـ}\left(\frac{هـ+1}{2}\right)$ د) $لو_{هـ}(هـ^{2}+1)$

الحل

البسط = مشتقة المقام

$= لو|هـ^{س}+1| \Big]_{0}^{1}$

$= لو|هـ^{1}+1| - لو|هـ^{0}+1|$

$= لو(هـ+1) - لو 2$

$= لو_{هـ}\frac{هـ+1}{2}$ (جـ)

وزارة (٢٠١٣) صيفية

اذا كان $ص = \sqrt{1+هـ^{س}}$ جد $\frac{دص}{دس}$ عندما س = ٠

الحل

$\frac{دص}{دس} = \frac{هـ^{س}}{2\sqrt{1+هـ^{س}}}$

$\frac{دص}{دس}\Big|_{س=0} = \frac{هـ^{0}}{2\sqrt{1+هـ^{0}}}$

$= \frac{1}{2\sqrt{2}}$

وزارة (٢٠١٤) صيفية

① اذا كان $ق''(س) = جاس + هـ^{2س}$

وكان $ق(0) = \frac{1}{4}$ ، $ق'(0) = \frac{1}{2}$

جد قاعدة الاقتران ق(س)

الحل

$ق'(س) = \int ق''(س) = \int جاس + هـ^{2س}$

$= -جتاس + \frac{هـ^{2س}}{2} + جـ$

$ق'(0) = -جتا0 + \frac{هـ^{0}}{2} + جـ = \frac{1}{2}$

$= -1 + \frac{1}{2} + جـ = \frac{1}{2}$

$جـ = 1$

$ق'(س) = -جتاس + \frac{1}{2}هـ^{2س} + 1$

$ق(س) = \int -جتاس + \frac{1}{2}هـ^{2س} + 1$

$= -جاس + \frac{1}{4}هـ^{2س} + س + جـ$

$ق(0) = -جا0 + \frac{1}{4}هـ^{0} + 1\times 0 + جـ = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{4} + جـ = \frac{1}{4} \Leftarrow جـ = 0$

$ق(س) = -جاس + \frac{1}{4}هـ^{2س} + س$

وزارة (٢٠١٥) شتوية

اذا كان $هـ^{س ص} = س - ص$ فاثبت أن

$$\frac{دص}{دس} = \frac{ص^2 - س ص + 1}{س^2 - س ص + 1}$$

الحل

$$(س ص' + ص \times 1) هـ^{س ص} = 1 - ص'$$

$$س ص' هـ^{س ص} + ص هـ^{س ص} = 1 - ص'$$

$$س ص' هـ^{س ص} + ص' = 1 - ص هـ^{س ص}$$

$$ص'(س هـ^{س ص} + 1) = 1 - ص هـ^{س ص}$$

$$ص' = \frac{1 - ص هـ^{س ص}}{س هـ^{س ص} + 1} = \frac{1 - ص(س - ص)}{س(س - ص) + 1}$$

$$= \frac{1 - س ص + ص^2}{س^2 - س ص + 1}$$

وزارة (٢٠١٥) صيفية

اذا كان $ق(س) = \int \frac{هـ^س}{لو_هـ(س + 2)} دس$

جد $ق''(0)$

الحل

$$ق'(س) = \frac{2 هـ^س}{لو(س + 2)}$$

$$ق''(س) = \frac{لو_هـ(س + 2) \times 2 هـ^س - 2 هـ^س \times \frac{1}{س + 2}}{(لو(س + 2))^2}$$

$$ق''(0) = \frac{لو 2 \times 2 هـ^0 - 2 هـ^0 \times \frac{1}{0 + 2}}{(لو_هـ 2)^2}$$

$$= \frac{2 لو 2 - 1}{(لو 2)^2}$$

وزارة (٢٠١٦) شتوية

اذا كان $ق(س) = \int (هـ^{جتا 2س} + جا 2س) دس$

جد $ق''(\frac{\pi}{4})$

الحل

$$ق'(س) = هـ^{جتا 2س} + جا 2س$$

$$ق''(س) = -2 جا 2س \, هـ^{جتا 2س} + 2 جتا 2س$$

$$ق''(\frac{\pi}{4}) = -2 جا \frac{\pi}{2} \, هـ^{جتا \frac{\pi}{2}} + 2 جتا \frac{\pi}{2}$$

$$= -2 هـ^0 + 2 \times 0$$

$$= -2$$

وزارة (٢٠١٦) صيفية

اذا كان $ق(س) = \begin{cases} |هـ^س - 1| & , -1 \le س \le 1 \\ [س - 3] & , 1 < س \le 4 \end{cases}$

جد $\int_{-1}^{2} ق(س) \, دس$

الحل

$|هـ^س - 1|$ ، $هـ^س - 1 = 0$

$هـ^س = 1 \Leftarrow س = 0$

$$\underset{-1}{|} \; - - - \; \underset{0}{|} \; + + + \; \underset{1}{|}$$

$1 - هـ^س$ ، $هـ^س - 1$

$[س - 3]$

$$\underset{1}{|} \; \overset{-2}{} \; \underset{2}{|} \; \overset{-1}{} \; \underset{3}{|} \; \overset{0}{} \; \underset{4}{|}$$

$$\int_{-1}^{2} ق(س) \, دس = \int_{-1}^{0} (1 - هـ^س) + \int_{0}^{1} (هـ^س - 1) + \int_{1}^{2} -2 \, دس$$

$$= 1(0 - -1) - [هـ^س]_{-1}^{0} + [هـ^س]_{0}^{1} - 1(1 - 0) + (-2)$$

$$= هـ + \cancel{هـ} - 1$$

وزارة (٢٠١٧) شتوية

① اذا كانت $ص = \sqrt{هـ^{٢س} + لو_{هـ}(س+١)}$

جد $\frac{دص}{دس}$ عندما س = صفر

الحل

$$\frac{دص}{دس} = \frac{٢هـ^{٢س} + \frac{١}{س+١}}{٢\sqrt{هـ^{٢س} + لو_{هـ}(س+١)}}$$

$$\frac{دص}{دس}\Big|_{س=٠} = \frac{٢هـ^{٠} + \frac{١}{١}}{٢\sqrt{هـ^{٠} + لو_{هـ}١}} = \frac{٣}{٢}$$

② اذا كان $م(س) = س هـ^{س} - هـ^{س}$ معكوس لمشتقة $ق(س) = س هـ^{س}$

وكان $\int_{٠}^{٢} (٤ق(س) + هـ^{٢})\,دس + \int_{٤}^{هـ^{٢}} \frac{أ}{هـ-٢}\,دس = ٢٨$

جد قيمة أ ؟

$$٤\int_{٠}^{٢} ق(س)\,دس + هـ^{٢}(٢-٠) + \frac{أ}{هـ-٢}(هـ^{٢}-٤)$$

$$٤(م(٢) - م(٠)) + ٢هـ^{٢} + \frac{أ}{\cancel{هـ-٢}}\cancel{(هـ-٢)}(هـ+٢)$$

$$٤(هـ^{٢} + ١) + ٢هـ^{٢} + أ(هـ+٢) = ٢٨$$

$$٤هـ^{٢} + ٤ + ٢هـ^{٢} + أ(هـ+٢) = ٢٨$$

$$٦هـ^{٢} + ٤ + أ(هـ+٢) = ٢٨$$

$$\frac{أ\cancel{(هـ+٢)}}{\cancel{هـ+٢}} = \frac{٢٤ - ٦هـ^{٢}}{هـ+٢}$$

وزارة (٢٠١٧) صيفية

① جد قيمة $\int_{٠}^{٢} |هـ^{٢س-١} - هـ|\,دس$

الحل

$$هـ^{٢س-١} - هـ = ٠ \Leftarrow هـ^{٢س-١} = هـ^{١}$$

$$٢س - ١ = ١ \Leftarrow ٢س = ٢ \quad س = ١$$

$هـ - هـ^{٢س-١}$: − − − بين ٠ و ١ ، $هـ^{٢س-١} - هـ$: + + + بين ١ و ٢

$$= \int_{٠}^{١} (هـ - هـ^{٢س-١})\,دس + \int_{١}^{٢} (هـ^{٢س-١} - هـ)\,دس$$

$$= \left[هـس - \frac{هـ^{٢س-١}}{٢}\right]_{٠}^{١} + \left[\frac{هـ^{٢س-١}}{٢} - هـس\right]_{١}^{٢}$$

$$= \left(هـ - \frac{هـ^{١}}{٢}\right) - \left(٠ - \frac{هـ^{-١}}{٢}\right) + \left(\frac{هـ^{٣}}{٢} - ٢هـ\right) - \left(\frac{هـ^{١}}{٢} - هـ\right)$$

$$= -هـ + \frac{١}{٢هـ} + \frac{هـ^{٣}}{٢}$$

② اذا كان

$\int أ ق'(س)\,دس = لو_{هـ}|٢-٤س| - \int ٢هـ^{س} ق'(س)$

وكان $ق'(٠) = ٢$ جد قيمة أ

الحل

بالاشتقاق

$$أ ق'(س) = \frac{-٤}{٢-٤س} - ٢هـ^{س} ق'(س)$$

$$أ ق'(٠) = \frac{-٤}{٢} - ٢هـ^{٠} ق'(٠) \Leftarrow يتبع$$

$أ \times ٢ = -٢ - ٢ \times ١ \times ٢$

$٢أ = -٢ - ٤ = -٦$

$أ = -٣$

③ اذا كان $ص = \sqrt{هـ^{أس}}$

وكان $ص'' + ٤ص' + ٤ص = ٠$ ، جد أ

الحل

$ص = (هـ^{أس})^{\frac{1}{2}} = هـ^{\frac{أ}{2}س}$

$ص' = \frac{أ}{2} هـ^{\frac{أ}{2}س}$ ، $ص'' = \frac{أ^2}{4} هـ^{\frac{أ}{2}س}$

$ص'' + ٤ص' + ٤ص = ٠$

$\frac{أ^2}{4} هـ^{\frac{أ}{2}س} + ٤ \times \frac{أ}{2} هـ^{\frac{أ}{2}س} + ٤ هـ^{\frac{أ}{2}س} = ٠$

$هـ^{\frac{أ}{2}س} \left(\frac{أ^2}{4} + ٢أ + ٤\right) = ٠$

$\frac{أ^2}{4} + ٢أ + ٤ = ٠ \times ٤$

$أ^2 + ٨أ + ١٦ = ٠$

$(أ + ٤)(أ + ٤) = ٠$

$أ = -٤$

وزارة (٢٠١٨) شتوية

اذا كان $ق(س) = \sqrt{٣ + هـ^س}$

فان قيمة $ق'(١) =$

أ) $\frac{1}{8}$ ب) $\frac{1}{4}$ ج) صفر د) $\frac{1}{2}$

الحل

$ق'(س) = \frac{هـ^س}{٢\sqrt{٣ + هـ^س}}$

$ق'(١) = \frac{هـ^٠}{٢\sqrt{٣ + هـ^٠}} = \frac{١}{٢\sqrt{٤}} = \frac{١}{٤}$

ب

ورقة عمل

① $ق(س) = هـ^{\frac{1}{س}} + أ\, لو_{هـ} \sqrt{س}$ وكانت $ق'(1) = هـ$ جد قيمة أ ؟

② اذا كانت $ص = لو\left(\frac{س^3}{(س+2)^3}\right)$ فان $\frac{دص}{دس}\Big|_{س=1}$ تساوي

أ) $\frac{2}{3}$ ب) $\frac{1}{3}$ ج) 1 د) 2

③ اذا كانت $ص = هـ^{كس}$ تحقق المعادلة $ص''' + 2ص'' - 8ص' = 0$ فاوجد قيمة ك ؟

④ $ق(س) = هـ^{س-2} + لو_{هـ}(س^2 - 3)$ فان $ق'(2)$

أ) 5 ب) 4 ج) 3 د) 2

⑤ اذا كان $ق(س) = لو_{هـ} هـ^{س} - لو(هـ^{س} + 1)$ فان $ق'(0) =$

أ) $\frac{1}{هـ+1}$ ب) $1 - لو_{هـ}2$ ج) -2 د) $\frac{1}{2}$

⑥ $\int ظتاس\, دس$

أ) $لو|جاس| + ج$ ب) $لو|قاس| + ج$

ج) $لو|قتاس| + ج$ د) $-لو|جتاس| + ج$

⑦ قيمة التكامل $\int_{-3}^{-1} \frac{س^2+1}{هـ^{س}}\, دس$

أ) موجبة ب) سالبة ج) صفر د) لا يمكن تحديدها

⑧ $\int \frac{هـ^{س+1}}{هـ^{س-1}}\, دس =$

أ) $\frac{هـ^3}{3} + ج$ ب) $س + ج$ ج) $لو_{هـ} هـ^{س-1} + ج$

د) $هـ^2 س + ج$

⑨ اذا علمت ان منحنى $ق'(س)$ يقع فوق محور السينات في الفترة $[-1، 5]$ اثبت ان $\int_{1}^{5} (ق'(س) + هـ^{-س})\, دس > صفر$

⑩ $ص = هـ^{س^2} لو_{هـ} س^3$ جد $\frac{دص}{دس}$

⑪ اذا كان $ص = 5^{3س^2}$ اثبت ان $\frac{دص}{دس} = لو_{هـ}5 \times 5^{3س^2} \times 6س$

⑫ اذا كان $م(س) = 8 لو_{هـ}\sqrt{س} + هـ^{4-س}$ معكوس المشتقة $ق(س)$ المتصل على $[1، 5]$ اوجد $ق(4)$

13) اذا كان
$ق(س) = هـ^{3س} + لو_{هـ} جتا س - \int \frac{2س + أ}{س^2+1} دس$
وكان $ق(0) = 5$ جد قيمة الثابت أ

14) اذا كان $ق(س) = لو \frac{س^5}{س^2+1}$
فان $ق'(1) =$
أ) 3   ب) 2   جـ) 1   د) صفر

15) اذا كان ميل المماس لمنحنى ق(س) عند اي نقطة يعطى بالعلاقة $\frac{7}{2س-3}$ وكان منحنى ق يمر بالنقطة (2، 5) أكتب قاعدة الاقتران ق
جـ) $ق(س) = \frac{7}{2} لو|2س-3| + 5$

16) $\int_{1}^{هـ^3} \frac{5}{س} دس =$
أ) 10   ب) 15   جـ) $هـ^3$ د) $\frac{1}{هـ}$

17) اذا كانت $ص = لو_{هـ} ظا 3س$
أوجد $\frac{دص}{دس}$

18) جد $\int \frac{2س - جا س}{س^2 + جتا س} دس$

19) $\int \left(\frac{5}{ظا س} + \frac{ظا^2 س}{ظا س}\right) دس$

20) جد $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{جا 2س}{5 - 3 جتا^2 س} دس$
جـ) $\frac{1}{3}(لو_{هـ} 5 - لو_{هـ} 2)$

21) $\int_{1}^{2} لو_{هـ} هـ^{2س}$ تساوي
أ) 4   ب) −4   جـ) 3   د) −3

22) جد قيمة $\int \frac{6 + 2هـ^{7س}}{هـ^{4س}}$

23) $\int \frac{4 هـ^{س} + س هـ^{س^2}}{س هـ^{س}}$

24) اذا كان $س = هـ^{ن^2}$ ، $ص = هـ^{ن^3}$
أوجد $\frac{د^2ص}{دس^2}$

25) اذا كان
$س هـ^{ص} = س^2 + ص$ اثبت ان
$(س هـ^{ص} - 1) ص' = 2س - ص هـ^{ص}$

26) اذا كان
$س هـ^{-\frac{1}{ص}} + ص هـ^{-\frac{س}{ص}} = 2$ أوجد
$\frac{دص}{دس}$ عند س =

٢٧) اذا كان

ص = $هـ^{٣س}$ + $س^٢$ اثبت ان

$\frac{د^٢ص}{دس^٢} - ٢ = ٩(ص - س^٢)$

٢٨) اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق عند اي نقطة عليه (س، ص) يساوي ٧ − ٢ $هـ^{س}$ وكان ق(لو $_{هـ}$ ٢) = ٢ اوجد ق(س)

٢٩) ص = $هـ^{لو_{هـ} ٧}$ فان $\frac{دص}{دس}$

أ) ٧ ب) ١ ج) صفر د) لو $_{هـ}$ ٧

٣٠) اوجد قيم س التي يكون عندها مماس المنحنى

ص = ٩ $س^٣$ − ٨ لو $_{هـ}$ س موازيا لمحور السينات ؟

التكامل بالتعويض

اذا كان داخل التكامل حاصل ضرب اقترانين احدهما مشتقة الاخر أو على الأقل الجزء المتغير من المشتقة فاننا نلجأ الى التعويض (الاستبدال)

النوع الأول

يستخدم عندما يكون هناك علاقة بالاشتقاق بين الاقترانين

قاعدة

$$\int ق(هـ(س))\, هـ'(س)\, دس$$

$$= \int ق(ص)\, دص$$

حيث $ص = هـ(س)$ ، $دص = هـ'(س)\, دس$

مثال ①

$$\int 2س\,(س^2+5)^{18}\, دس$$

نلاحظ ان مشتقة $(س^2+5) = 2س$

لذلك نفرض $ص = س^2+5$

$\frac{دص}{دس} = 2س \Leftarrow دص = 2س\, دس$

$\Leftarrow دس = \frac{دص}{2س}$

نعود للتكامل ونعوض قيمة المفرض وقيمة دس

$\Leftarrow \int 2س\,(س^2+5)^{18}\, دس$

$= \int \cancel{2س}\, ص^{18} \times \frac{دص}{\cancel{2س}} = \int ص^{18}\, دص$

نكامل بالنسبة لص

$= \frac{ص^{19}}{19} + جـ$ ونعوض قيمة ص

$= \frac{(س^2+5)^{19}}{19} + جـ$

مثال ②

$$\int \frac{س+1}{\sqrt{س^2+2س+7}}\, دس$$

الحل

نفرض $ص = \sqrt{س^2+2س+7}$

$ص^2 = س^2+2س+7$

$2ص\, دص = (2س+2)\, دس$

$دس = \frac{2ص\, دص}{2س+2}$

$\int \frac{س+1}{\cancel{ص}} \times \frac{2\cancel{ص}\, دص}{2س+2}$

$\int \frac{\cancel{س+1}}{1} \times \frac{\cancel{2}\, دص}{\cancel{2(س+1)}} = \int 1\, دص$

$= ص + جـ = \sqrt{س^2+2س+7} + جـ$

مثال ③

$$\int \frac{(\sqrt{\text{س}}+5)^{9}}{\sqrt{\text{س}}}\, \text{دس}$$

الحل

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}} + 5 \qquad \text{دص} = \frac{1}{2\sqrt{\text{س}}}\,\text{دس}$

$\text{دس} = 2\sqrt{\text{س}}\ \text{دص}$

$$= \int \frac{\text{ص}^{9}}{\cancel{\sqrt{\text{س}}}} \times 2\cancel{\sqrt{\text{س}}}\ \text{دص}$$

$$= \int 2\,\text{ص}^{9}\,\text{دص} = \frac{2\,\text{ص}^{10}}{10} + \text{جـ}$$

$$= \frac{2(\sqrt{\text{س}}+5)^{10}}{10} + \text{جـ}$$

مثال ④

$$\int \frac{2}{\text{س}^{2}} \times \sqrt[3]{1+\frac{1}{\text{س}}}\ \text{دس}$$

الحل

$\text{ص} = 1 + \frac{1}{\text{س}} \qquad \text{دص} = \frac{-1}{\text{س}^{2}}\,\text{دس}$

$\Leftarrow \text{دس} = -\text{س}^{2}\,\text{دص}$

$$\int \frac{2}{\cancel{\text{س}^{2}}} \times \sqrt[3]{\text{ص}} \times -\cancel{\text{س}^{2}}\ \text{دص}$$

$$\int -2\,\text{ص}^{\frac{1}{3}}\,\text{دص}$$

$$= -2 \times \frac{3}{4}\,\text{ص}^{\frac{4}{3}}$$

$$= \frac{-3}{2}\left(1+\frac{1}{\text{س}}\right)^{\frac{4}{3}} + \text{جـ}$$

مثال ⑤

$$\text{جد } \int_{0}^{4} \text{س}\sqrt{\text{س}^{2}+9}\ \text{دس}$$

الحل

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}^{2}+9}$

$\text{ص}^{2} = \text{س}^{2}+9 \Leftarrow 2\,\text{ص}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2\,\text{س}$

$\text{دس} = \frac{\cancel{2}\,\text{ص}}{\cancel{2}\,\text{س}}\,\text{دص}$

عندما $\text{س} = 0 \Leftarrow \text{ص} = 3$

$\text{س} = 4 \Leftarrow \text{ص} = 5$

$$\int_{3}^{5} \cancel{\text{س}} \times \text{ص} \times \frac{\text{ص}}{\cancel{\text{س}}}\ \text{دص}$$

$$\int_{3}^{5} \text{ص}^{2}\,\text{دص} = \left.\frac{\text{ص}^{3}}{3}\right|_{3}^{5}$$

$$= \frac{125}{3} - 9 = \frac{98}{3}$$

مثال ⑥

$$\int \frac{1}{\sqrt{\text{س}}\,(2+\sqrt{\text{س}})}\ \text{دس}$$

الحل

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}} \qquad \text{دص} = \frac{1}{2\sqrt{\text{س}}}\,\text{دس}$

$\Leftarrow \text{دس} = 2\sqrt{\text{س}}\ \text{دص}$

$$\int \frac{1}{\text{ص}(2+\text{ص})} \times 2\sqrt{\text{س}}\ \text{دص}$$

$$= \int \frac{1}{\cancel{\text{ص}}(2+\text{ص})} \times 2\cancel{\text{ص}}\ \text{دص} = \int \frac{2}{2+\text{ص}}\ \text{دص}$$

$$= 2\,\text{لو}|2+\text{ص}| + \text{جـ} = 2\,\text{لو}|2+\sqrt{\text{س}}| + \text{جـ}$$

مثال (٧)

$\int \frac{1}{\text{س} \,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}} \, \text{دس}$

الحل

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \Leftarrow \text{دص} = \frac{1}{\text{س}} \text{دس}$

$\Leftarrow \text{دس} = \text{س دص}$

$= \int \frac{1}{\text{ص} \cancel{\text{س}}} \times \cancel{\text{س}} \, \text{دص}$

$= \text{لو}|\text{ص}| + \text{جـ} = \text{لو}|\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}| + \text{جـ}$

مثال (٨)

$\int \text{س} \, \text{هـ}^{\text{س}^2} \, \text{دس}$

الحل

$\text{ص} = \text{س}^2 \quad \text{دص} = 2\text{س دس}$

$\Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{2\text{س}}$

$\int \cancel{\text{س}} \, \text{هـ}^{\text{ص}} \times \frac{\text{دص}}{2\cancel{\text{س}}}$

$\frac{1}{2} \text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ} = \frac{1}{2} \text{هـ}^{\text{س}^2} + \text{جـ}$

مثال (٩)

$\int \text{س}^2 \, \text{هـ}^{\text{س}^3+1} \, \text{دس}$

الحل

$\text{ص} = \text{س}^3 + 1 \Leftarrow \text{دص} = 3\text{س}^2 \, \text{دس}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{3\text{س}^2}$

$\int \text{س}^2 \, \text{هـ}^{\text{ص}} \times \frac{\text{دص}}{3\cancel{\text{س}^2}}$

$= \frac{1}{3} \text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ} = \frac{1}{3} \text{هـ}^{\text{س}^3+1} + \text{جـ}$

ملاحظة هامة

$\int \text{هـ}^{\text{ليس خطي}} \, \text{دس}$

يحل بالتعويض ونفرض

ص = الأس

مثال (١٠)

$\int \text{جا}2\text{س} \, \text{هـ}^{\text{جا}^2\text{س}} \, \text{دس}$

الحل

$\text{ص} = \text{جا}^2\text{س} \text{ ، } \text{دص} = 2\,\text{جاس جتاس دس}$

$= \text{جا}2\text{س دس}$

$\int \cancel{\text{جا}2\text{س}} \, \text{هـ}^{\text{ص}} \times \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{جا}2\text{س}}}$

$= \int \text{هـ}^{\text{ص}} \, \text{دص}$

$= \text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ}$

$= \text{هـ}^{\text{جا}^2\text{س}} + \text{جـ}$

مثال (11)

$$\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}} + 2\text{س}}{\sqrt{\text{هـ}^{\text{س}} + \text{س}^2}}\, \text{دس}$$

الحل

$$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}} + \text{س}^2$$

$$\text{دص} = (\text{هـ}^{\text{س}} + 2\text{س})\, \text{دس}$$

$$\int \frac{\cancel{\text{هـ}^{\text{س}} + 2\text{س}}}{\text{ص}^{\frac{1}{2}}} \times \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{هـ}^{\text{س}} + 2\text{س}}}$$

$$\int \text{ص}^{-\frac{1}{2}}\, \text{دص} = 2 \times \text{ص}^{\frac{1}{2}} + \text{جـ}$$

$$2\sqrt{\text{هـ}^{\text{س}} + \text{س}^2} + \text{جـ}$$

مثال (12)

$$\int \text{هـ}^{2\text{س}} \text{جتا}^2 \text{هـ}^{2\text{س}}\, \text{دس}$$

الحل

$$\text{ص} = \text{هـ}^{2\text{س}}$$

$$\text{دص} = 2\,\text{هـ}^{2\text{س}}\, \text{دس} = 2\text{ص}\, \text{دس}$$

$$\Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{2\text{ص}}$$

$$\int \cancel{\text{ص}}\, \text{جتا}^2 \text{ص} \times \frac{\text{دص}}{2\cancel{\text{ص}}}$$

$$\frac{1}{2} \int \text{جتا}^2 \text{ص}\, \text{دص}$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{2} (1 + \text{جتا}2\text{ص})\, \text{دص}$$

$$\frac{1}{4} \left(\text{ص} + \frac{1}{2} \text{جا}2\text{ص}\right) + \text{جـ}$$

$$= \frac{1}{4} \left(\text{هـ}^{2\text{س}} + \frac{1}{2} \text{جا}(2\text{هـ}^{2\text{س}})\right) + \text{جـ}$$

مثال (13)

$$\int \frac{\text{س جتا}\sqrt{\text{س}^2 + 1}}{\sqrt{\text{س}^2 + 1}}\, \text{دس}$$

$$\text{ص} = \sqrt{\text{س}^2 + 1} \qquad \text{ص}^2 = \text{س}^2 + 1$$

$$2\text{ص}\, \text{دص} = 2\text{س}\, \text{دس} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\cancel{2}\text{ص}\, \text{دص}}{\cancel{2}\text{س}}$$

$$\int \frac{\cancel{\text{س}}\, \text{جتا ص}}{\cancel{\text{ص}}} \times \frac{\cancel{\text{ص}}\, \text{دص}}{\cancel{\text{س}}}$$

$$= \int \text{جتا ص}\, \text{دص} = \text{جا ص} + \text{جـ}$$

$$= \text{جا}\sqrt{\text{س}^2 + 1} + \text{جـ}$$

ملاحظة هامة

اذا كان ما داخل اقتران أكبر عدد صحيح ليس اقتران خطي فان السؤال يحل بالتكامل بالتعويض ونفرض
ص = ما داخل أكبر عدد صحيح

مثال (14)

$$\text{اوجد} \int_1^2 \text{س} \times [\text{س}^2 - 3]\, \text{دس}$$

⟸ يتبع الحل

الحل

نفرض ص = $\text{س}^2 - ٣$

$\text{دص} = ٢\text{س} \cdot \text{دس} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{٢\text{س}} = \text{دس}$

عندما س = ١ $\Leftarrow$ ص = −٢

س = ٢ $\Leftarrow$ ص = ١

$$\int_{١}^{٢} \text{س} \left[\text{س}^2 - ٣\right] \cdot \text{دس} = \int_{-٢}^{١} \text{س} [\text{ص}] \times \frac{\text{دص}}{٢\cancel{\text{س}}}$$

$$= \frac{١}{٢} \int_{-٢}^{١} [\text{ص}] \, \text{دص}$$

$$= \frac{١}{٢} \left(\int_{-٢}^{-١} -٢ \, \text{دص} + \int_{-١}^{٠} -١ \cdot \text{دص} + \int_{٠}^{١} ٠ \cdot \text{دص} \right)$$

$$= \frac{١}{٢} \left(-٢ + -١ + \text{صفر} \right) = \frac{١}{٢} \times -٣ = \frac{-٣}{٢}$$

مثال (١٥)

$$\int_{٠}^{\pi} \text{حاس} \left[١ - \text{جتاس}\right] \cdot \text{دس}$$

الحل

ص = ١ − جتاس $\Leftarrow$ دص = حاس دس

$\Leftarrow$ دس = $\frac{\text{دص}}{\text{حاس}}$

عندما س = ٠ $\Leftarrow$ ص = ١ − جتا٠ = صفر

س = π $\Leftarrow$ ص = ١ − جتاπ = ٢

$$\int_{٠}^{٢} \cancel{\text{حاس}} [\text{ص}] \times \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{حاس}}}$$

$$= \int_{٠}^{١} \text{صفر} \cdot \text{دص} + \int_{١}^{٢} ١ \cdot \text{دص}$$

$$= \text{صفر} + ١ = ١$$

مثال (١٦)

$$\int \frac{\text{س}\sqrt{١+\text{س}}}{١ - \sqrt{\text{س}+١}}$$

الحل

$$\int \frac{\text{س}\sqrt{١+\text{س}}}{١ - \sqrt{\text{س}+١}} \times \frac{(١ + \sqrt{\text{س}+١})}{١ + \sqrt{\text{س}+١}}$$ الضرب بالمرافق

$$= \int \frac{\text{س}\sqrt{١+\text{س}} + \text{س}(١+\text{س})}{١ - (\text{س}+١)}$$

$$= \int \frac{\text{س}\sqrt{١+\text{س}} + \text{س} + \text{س}^2}{\cancel{١} - \text{س} - \cancel{١}}$$

$$= \int \frac{\text{س}\sqrt{١+\text{س}}}{-\text{س}} - \frac{\text{س}}{\text{س}} - \frac{\text{س}^2}{\text{س}}$$

$$= \int -\sqrt{١+\text{س}} - \int ١ \, \text{دس} - \int \text{س} \, \text{دس}$$

$$= -\int (١+\text{س})^{\frac{١}{٢}} - \text{س} - \frac{\text{س}^2}{٢}$$

$$= \frac{-٢}{٣}(١+\text{س})^{\frac{٣}{٢}} - \text{س} - \frac{\text{س}^2}{٢}$$

مثال (١٧)

$$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \text{حا}^3\text{س} \, \text{جتاس} \, \text{دس}$$

الحل

ص = حاس $\Leftarrow$ دص = جتاس دس

دس = $\frac{\text{دص}}{\text{جتاس}}$

س = $\frac{\pi}{٢}$ $\Leftarrow$ ص = ١ ، س = ٠ $\Leftarrow$ ص = ٠

يتبع $\Leftarrow$

= ∫ من ٠ إلى ١ ص³ × ~~جتا س~~ × دص / ~~جتا س~~

= ∫ من ٠ إلى ١ ص³ دص = [ص⁴ / ٤] من ٠ إلى ١ = ١/٤

مثال (١٨)

∫ (س+٣) جتا (س² + ٦س + ٥) دس

الحل

ص = س² + ٦س + ٥

دص = (٢س + ٦) دس

دس = دص / (٢س + ٦)

∫ (س+٣) جتا ص × دص / (٢س + ٦)

∫ ~~(س+٣)~~ جتا ص × دص / ٢~~(س+٣)~~

١/٢ ∫ جتا ص دص = ١/٢ جا ص + جـ

= ١/٢ جا (س² + ٦س + ٥) + جـ

مثال (١٩)

∫ س جا س² ظا² (جتا س²) دس

الحل

ص = جتا س²

دص = −٢س جا س² دس

∫ ~~س جا س²~~ ظا² ص × دص / −٢ ~~س جا س²~~

= −١/٢ ∫ ظا² ص دص

= −١/٢ ∫ (قا² ص − ١) دص

= −١/٢ (ظا ص − ص) + جـ

مثال (٢٠)

∫ جا س جتا س / (١ − ٢ جا² س)³ دس

الحل

ص = ١ − ٢ جا² س

دص = −٤ جا س جتا س دس

∫ ~~جا س جتا س~~ / ص³ × دص / −٤ ~~جا س جتا س~~

−١/٤ ∫ ص⁻³ دص

= −١/٤ × ص⁻² / −٢ + جـ

= ١ / (٨ ص²) + جـ = ١ / (٨ (١ − ٢ جا² س)²) + جـ

مثال (٢١)

∫ قا² س ظا⁴ س دس

الحل ص = ظا س ، دص = قا² س دس

∫ ~~قا² س~~ × ص⁴ × دص / ~~قا² س~~ = ∫ ص⁴ دص

= ص⁵ / ٥ + جـ = ظا⁵ س / ٥ + جـ

مثال (22)

$\int (3 + \text{قا}^2 س) \times \text{ظا}^2 س \; دس$

$= \int 3\,\text{ظا}^2 س + \text{قا}^2 س \, \text{ظا}^2 س$

(1) $\int 3\,\text{ظا}^2 س = \int 3(\text{قا}^2 س - 1)\, دس$

$= 3(\text{ظا}س - س) + جـ$

(2) $\int \text{قا}^2 س \, \text{ظا}^2 س \; دس$

$ص = \text{ظا}س \qquad دص = \text{قا}^2 س \; دس$

$\int \text{قا}^2 س \; ص^2 \times \frac{دص}{\text{قا}^2 س} = \int ص^2 \, دص$

$= \frac{ص^3}{3} + جـ = \frac{\text{ظا}^3 س}{3} + جـ$

مثال (23)

$\int \text{ظتا}^9 س \; \text{قتا}^2 س \; دس$

الحل

$ص = \text{ظتا}س \qquad دص = -\text{قتا}^2 س \; دس$

$\int ص^9 \times \text{قتا}^2 س \times \frac{دص}{-\text{قتا}^2 س}$

$= \int -ص^9 \, دص$

$= -\frac{ص^{10}}{10} + جـ$

$= -\frac{\text{ظتا}^{10} س}{10} + جـ$

ملاحظة هامة

في الأقترانات الدائرية اذا لم تكن الزوايا اقترانات خطية فان السؤال يحل على التكامل بالتعويض وتفرض ان

ص = الزاوية

مثال (1)

$\int (2س - 1)\, \text{قا}^2(س^2 - س + 3)\; دس$

الحل

$ص = س^2 - س + 3$

$دص = (2س - 1)\, دس$

$\int \cancel{(2س - 1)}\; \text{قا}^2 ص \times \frac{دص}{\cancel{2س - 1}}$

$= \int \text{قا}^2 ص \; دص = \text{ظا}ص + جـ$

$= \text{ظا}(س^2 - س + 3) + جـ$

مثال (2)

$\int \frac{س\; \text{ظا}^2 \sqrt{س^2 + 1}}{\sqrt{س^2 + 1}}\; دس$

الحل

$ص = \sqrt{س^2 + 1} \qquad دص = \frac{\cancel{2}س}{\cancel{2}\sqrt{س^2 + 1}}\; دس$

$= \int \frac{\cancel{س}\; \text{ظا}^2 ص}{\cancel{\sqrt{س^2 + 1}}} \times \frac{\cancel{\sqrt{س^2 + 1}}}{\cancel{س}}\; دص$

$\int \text{ظا}^2 ص \; دص = \int (\text{قا}^2 ص - 1) = \text{ظا}ص - ص$

$= \text{ظا}\sqrt{س^2 + 1} - \sqrt{س^2 + 1}$

مثال (٣)

$\int$ س² جا س³ جتا⁴ س³ دس

ص = جتا س³

دص = −٣س² جا س³ دس

$\int$ س² جا س³ ص⁴ × $\frac{\text{دص}}{-3\,\text{س}^2\,\text{جا س}^3}$

= $-\frac{1}{3}\int$ ص⁴ دص = $-\frac{1}{3}\,\frac{\text{ص}^5}{5}$ + جـ

= $-\frac{1}{15}$ (جتا س³)⁵ + جـ

عليك حل السؤال بفرض ص = س³ نعوض مرتين

مثال (٤)

جد $\int$ جا س جتا²(جتا س) دس

الحل

ص = جتا س ، دص = − جا س دس

$\int$ جا س جتا² ص × $\frac{\text{دص}}{-\text{جا س}}$

= $-\int \frac{1}{2}$ (١ + جتا٢ص) دص

= $-\frac{1}{2}$ (ص + $\frac{\text{جا٢ص}}{2}$) + جـ

= $-\frac{1}{2}$ (جتا س + $\frac{\text{جا(٢ جتا س)}}{2}$) + جـ

مثال (٤)

$\int \frac{\text{لو}\sqrt{\text{س}+2}}{\text{س}+2}$ دس

الحل ص = لو$\sqrt{\text{س}+2}$ = $\frac{1}{2}$ لو(س+٢)

دص = $\frac{1}{2} \times \frac{1}{\text{س}+2}$ دس

دس = ٢(س+٢) دص

= $\int \frac{\text{ص}}{\text{س}+2}$ × ٢(س+٢) دص

= $\int$ ٢ص دص = $\frac{2\,\text{ص}^2}{2}$ + جـ

= (لو$\sqrt{\text{س}+2}$)² + جـ

مثال (٥)

$\int_{1}^{\frac{1}{\text{هـ}}} \frac{(\text{لو س})^2}{\text{س}}$ دس

الحل

ص = لو$_{\text{هـ}}$ س ⟸ دص = $\frac{1}{\text{س}}$ دس

دس = س دص

عندما س = ١ فإن ص = لو ١ = ٠ ،

س = $\frac{1}{\text{هـ}}$ ⟸ ص = لو$_{\text{هـ}}\frac{1}{\text{هـ}}$ = −١

= $\int_{0}^{-1} \frac{\text{ص}^2}{\text{س}}$ × س × دص

= $\left[\frac{\text{ص}^3}{3}\right]_0^{-1}$ = $\frac{-1}{3}$

مثال (٢٦)

اذا كان $ق'(س) \times جاس - ق(س) \times جتاس = ٠$

وكان $ق(\frac{\pi}{٢}) = \sqrt{٢}$ ، جد $ق(\frac{\pi}{٤})$

الحل

$$\frac{ق'(س)\, جاس}{ق(س)} = \frac{\cancel{ق(س)}\, جتاس}{\cancel{ق(س)}\, جاس}$$

$$\int \frac{ق'(س)}{ق(س)} = \int \frac{جتاس}{جاس}$$

$$لو_هـ ق(س) = لو_هـ |جاس| + جـ$$

$$لو_هـ ق(\frac{\pi}{٢}) = لو_هـ |جا\frac{\pi}{٢}| + جـ$$

$$لو_هـ \sqrt{٢} = لو_هـ ١ + جـ$$

$$لو_هـ \sqrt{٢} = ٠ + جـ \Leftarrow جـ = لو_هـ \sqrt{٢}$$

$$لو_هـ ق(\frac{\pi}{٤}) = لو_هـ |جا\frac{\pi}{٤}| + لو_هـ \sqrt{٢}$$

$$لو_هـ ق(\frac{\pi}{٤}) = لو_هـ \frac{١}{\sqrt{٢}} + لو_هـ \sqrt{٢}$$

$$لو_هـ ق(\frac{\pi}{٤}) = لو_هـ \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \sqrt{٢} = لو_هـ ١ = ٠$$

$$هـ^{لو_هـ ق(\frac{\pi}{٤})} = هـ^{٠}$$

$$ق(\frac{\pi}{٤}) = ١$$

النوع الثاني

معطيات ومطلوب

في هذا النوع من الاسئلة يعطى في السؤال معطيات ويطلب غيرها ويكون حل هذه النوعية من الاسئلة بجعل المطلوب يشبه المعطيات .

مثال ①

اذا كان $\int_{0}^{1} س\, ق(س)\, دس = ٦$ فأوجد

$\int_{-٢}^{-١} (س+٢)\, ق(س+٢)\, دس$

الحل

نفرض $ص = س + ٢$ ، $دص = دس$

$س = -٢ \leftarrow ص = ٠$

$س = -١ \leftarrow ص = ١$

$\Leftarrow \int_{-٢}^{-١} (س+٢)\, ق(س+٢)\, دس$

$= \int_{٠}^{١} ص\, ق(ص)\, دص$ من المعطيات

$= ٦$

مثال ②

اذا كان $\int_{٢}^{٣} س\, ق(٥س)\, دس = ٤$

فأوجد $\int_{٠}^{١} (٣س+٦)\, ق(٥س+١٠)\, دس$

الحل

نجعل المطلوب كالمعطيات

$\int_{٠}^{١} (٣س+٦)\, ق(٥س+١٠)\, دس =$

$\int_{٠}^{١} ٣(س+٢)\, ق(٥(س+٢))\, دس$

$ص = س + ٢$ ، $دص = دس$

$س = ٠ \leftarrow ص = ٢$

$س = ١ \leftarrow ص = ٣$

$= \int_{٢}^{٣} ٣\, ص\, ق(٥ص)\, دص = ٣ \times ٤ = ١٢$

مثال ③

اذا كان $\int^{٤} (ق(س) + ٢)\, دس = ٨$

فأوجد $\int_{٢}^{١} س\, ق(س^٢)\, دس$

الحل

$ص = س^٢ \leftarrow دص = ٢س . دس$

$س = ٢ \leftarrow ص = ٤$

$س = ١ \leftarrow ص = ١$

$= \int_{١}^{٤} \cancel{س}\, ق(ص) \times \frac{دص}{٢\cancel{س}}$

$= \frac{١}{٢} \int_{١}^{٤} ق(ص)\, دص$

ولكنه من المعطيات $\Leftarrow$ يتبع اكمل

$\int_1^4 \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + \int_1^4 ٢\,\text{دس} = ٨$

$\int_1^4 \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + ٢(٤-١) = ٨$

$\int_1^4 \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٨ - ٦ = ٢$

المطلوب $= \frac{١}{٢} \times (-٢) = -١$

عكس حدود التكامل

الحل

$\text{ص} = \text{ق}(\text{س}^2)$

$\text{دص} = \text{قَ}(\text{س}^2) \times ٢\text{س}\,\text{دس}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{قَ}(\text{س}^2) \times ٢\text{س}}$

$\text{س} = ١ \leftarrow \text{ص} = \text{ق}(١) = ٢$

$\text{س} = ٢ \leftarrow \text{ص} = \text{ق}(٤) = ٥$

$\int_2^5 \cancel{٢\text{س}\,\text{قَ}(\text{س}^2)} \times \text{ص}^3 \times \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{قَ}(\text{س}^2) \times ٢\text{س}}}$

$= \int_2^5 \text{ص}^3\,\text{دص} = \left[\frac{\text{ص}^4}{٤}\right]_2^5$

$= \frac{٦٢٥}{٤} - \frac{١٦}{٤} = \frac{٦٠٩}{٤}$

مثال ٤

اذا كان ق(٢) = ٣ ، ق(١) = ٥ فاوجد $\int_1^{\frac{1}{2}} \text{قَ}\left(\frac{١}{\text{س}}\right) \times \text{س}^{-2}\,\text{دس}$

الحل

$\text{ص} = \frac{١}{\text{س}}$ ، $\text{دص} = \frac{-١}{\text{س}^2}\,\text{دس}$

$\text{دس} = -\text{س}^2\,\text{دص}$

$\text{س} = ١ \leftarrow \text{ص} = ١$

$\text{س} = \frac{١}{٢} \leftarrow \text{ص} = ٢$

$\Leftarrow \int_1^2 \text{قَ}(\text{ص}) \times \cancel{\text{س}^{-2}} \times -\cancel{\text{س}^2}\,\text{دص}$

$= -\int_1^2 \text{قَ}(\text{ص})\,\text{دص}$

$= -\left(\text{ق}(٢) - \text{ق}(١)\right)$

$= -(٣ - ٥) = ٢$

مثال ٥

اذا كان ق(١) = ٢ ، ق(٤) = ٥

فاوجد $\int_1^2 ٢\text{س}\,\text{قَ}(\text{س}^2)\,\text{ق}^3(\text{س}^2)\,\text{دس}$

مثال ٦

اذا كان الاقتران ق(س) متصلاً على ح وكان أ ثابت فاثبت ان

$\int_{\text{أ}}^{٢\text{أ}} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \int_0^{\text{أ}} \text{ق}(٢\text{أ}-\text{س})\,\text{دس}$

الحل

نفرض $\text{ص} = ٢\text{أ} - \text{س} \Leftarrow \text{دص} = -\text{دس}$

$\text{س} = ٠ \leftarrow \text{ص} = ٢\text{أ}$

$\text{س} = \text{أ} \leftarrow \text{ص} = \text{أ}$

$\Leftarrow \int_0^{\text{أ}} \text{ق}(٢\text{أ}-\text{س})\,\text{دس} = \int_{٢\text{أ}}^{\text{أ}} -\text{ق}(\text{ص})\,\text{دص}$

$= -\int_{٢\text{أ}}^{\text{أ}} \text{ق}(\text{ص})\,\text{دص} = \int_{\text{أ}}^{٢\text{أ}} \text{ق}(\text{ص})\,\text{دص}$

قاعدة

$$\int (\text{أ}\,\text{س} + \text{ب})^{\text{ن}}\, \text{دس} = \frac{(\text{أ}\,\text{س}+\text{ب})^{\text{ن}+1}}{\text{أ}(\text{ن}+1)} + \text{ج}$$

هذه القاعدة تستخدم فقط للاقترانات الخطية

البرهان

نفرض $\text{ص} = \text{أ}\,\text{س} + \text{ب}$

$\text{دص} = \text{أ}\,\text{دس} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{أ}}$

$$= \int \text{ص}^{\text{ن}} \times \frac{\text{دص}}{\text{أ}} = \frac{\text{ص}^{\text{ن}+1}}{\text{أ}(\text{ن}+1)} + \text{ج}$$

$$= \frac{(\text{أ}\,\text{س}+\text{ب})^{\text{ن}+1}}{\text{أ}(\text{ن}+1)}$$

أمثلة

① $\int (4\text{س} - 6)^{8}\, \text{دس}$

$$= \frac{(4\text{س}-6)^{9}}{4 \times 9} + \text{ج}$$

② $\int \sqrt[4]{4 - 2\text{س}}\; \text{دس}$

$$= \int (4 - 2\text{س})^{\frac{1}{4}}\, \text{دس}$$

$$= \frac{(4-2\text{س})^{\frac{5}{4}}}{-2 \times \frac{5}{4}} + \text{ج}$$

③ $\int_{0}^{4} \frac{1}{\sqrt{2\text{س}+1}}\, \text{دس}$

الحل: $\int_{0}^{4} (2\text{س}+1)^{-\frac{1}{2}}\, \text{دس}$

$$= \left[\frac{(2\text{س}+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} \times 2} \right]_{0}^{4} = \sqrt{9} - \sqrt{1} = 2$$

④ $\int_{1}^{3} \frac{1}{\text{س}^2 + 4\text{س} + 4}\, \text{دس}$

$$= \int_{1}^{3} \frac{1}{(\text{س}+2)^2}\, \text{دس} = \int_{1}^{3} (\text{س}+2)^{-2}\, \text{دس}$$

$$= \left[\frac{(\text{س}+2)^{-1}}{-1} \right]_{1}^{3} = \frac{-1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$$

مثال ⑦

اذا كان $\int_{-1}^{2} 2\,\text{ق}(\text{س})\, \text{دس} = 10$

جد $\int_{2}^{4} \left(\text{ق}(\text{س}-3) + \text{س}\right) \text{دس}$

الحل

$$\int_{-1}^{2} \text{ق}(\text{س})\, \text{دس} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\int_{2}^{4} \text{ق}(\text{س}-3) + \int_{2}^{4} \text{س}\, \text{دس}$$

$\text{ص} = \text{س} - 3$ ، $\text{دص} = \text{دس}$

$\text{س} = 2 \Leftarrow \text{ص} = -1$ ، $\text{س} = 4 \Leftarrow \text{ص} = 2$

$$\int_{-1}^{2} \text{ق}(\text{ص})\, \text{دص} + \left[\frac{\text{س}^2}{2} \right]_{2}^{4}$$

$$5 + 8 - 2 = 11$$

مثال ٨

اذا كان $\int_{3}^{7} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = \int_{8}^{\text{جـ}} \text{ق}(\text{س}-5)\,\text{ءس}$

اوجد قيمة الثابت جـ

الحل

$\text{ص} = \text{س} - 5 \quad ، \quad \text{ءص} = \text{ءس}$

$\text{س} = 8 \leftarrow \text{ص} = 3$

$\text{س} = \text{جـ} \leftarrow \text{ص} = \text{جـ} - 5$

$$\int_{8}^{\text{جـ}} \text{ق}(\text{س}-5)\,\text{ءس} = \int_{3}^{\text{جـ}-5} \text{ق}(\text{ص})\,\text{ءص}$$

$$= \int_{2}^{7} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} \Leftarrow 7 = \text{جـ} - 5$$

$$\Leftarrow \text{جـ} = 12$$

مثال ٩

اذا كان $\int_{0}^{1} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = 5$

احسب $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \text{جتا}2\text{س}\ \text{ق}(\text{جا}2\text{س})\,\text{ءس}$

الحل

$\text{ص} = \text{جا}2\text{س} \leftarrow \text{ءص} = 2\,\text{جتا}2\text{س}\,\text{ءس}$

$\text{س} = \frac{\pi}{4} \leftarrow \text{ص} = \text{جا}\frac{\pi}{2} = 1$

$\text{س} = \frac{\pi}{2} \leftarrow \text{ص} = \text{جا}\pi = 0$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \text{جتا}2\text{س}\ \text{ق}(\text{جا}2\text{س})\,\text{ءس} = \int_{0}^{1} \cancel{\text{جتا}2\text{س}}\ \text{ق}(\text{ص}) \times \frac{\text{ءص}}{2\,\cancel{\text{جتا}2\text{س}}}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{0}^{1} \text{ق}(\text{ص})\,\text{ءص} = \frac{5}{2}$$

مثال ١٠

اذا كان ق(س) اقتران قابل للتكامل على ح وكان $\text{ق}(8) = 8$ ، $\text{ق}(1) = 0$. جد قيمة $\int_{1}^{2} 3\text{س}^2\ \text{قَ}(\text{س}^3)\,\text{ءس}$

الحل

$\text{ص} = \text{س}^3 \qquad \text{ءص} = 3\text{س}^2\,\text{ءس}$

$\text{س} = 1 \leftarrow \text{ص} = 1$

$\text{س} = 2 \leftarrow \text{ص} = 8$

$$\int_{1}^{2} 3\text{س}^2\ \text{قَ}(\text{س}^3)\,\text{ءس} = \int_{1}^{8} \cancel{3\text{س}^2}\ \text{قَ}(\text{ص}) \times \frac{\text{ءص}}{\cancel{3\text{س}^2}}$$

$$= \int_{1}^{8} \text{قَ}(\text{ص})\,\text{ءص} = \text{ق}(8) - \text{ق}(1)$$

$$= 8 - 0 = 8$$

مثال ١١

اذا كان $\int_{0}^{2} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = 3$ ، $\int_{2}^{5} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = 5$

فان $\int_{3}^{8} \text{ق}(\text{س} - 3)\,\text{ءس}$

أ) 8 ب) 5 جـ) −2 د) −8

الحل

$\text{ص} = \text{س} - 3 \qquad \text{ءص} = \text{ءس}$

$\text{س} = 3 \leftarrow \text{ص} = 0$

$\text{س} = 8 \leftarrow \text{ص} = 5$

$$\int_{0}^{5} \text{ق}(\text{ص})\,\text{ءص} = \int_{0}^{5} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = \int_{0}^{2} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} + \int_{2}^{5} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس}$$

$$= 3 + 5 = 8 \quad \text{(أ)}$$

مثال (١٢)

اذا كان $\int_{1}^{\text{هـ}} \text{س}\ \text{ق}(\text{س})\ \text{دس} = ٤$

ما قيمة $\int_{0}^{2} \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{ق}\left(\sqrt{\text{هـ}^{\text{س}}}\right) \text{دس}$ ؟

الحل

$\text{ص} = \sqrt{\text{هـ}^{\text{س}}} = \text{هـ}^{\frac{\text{س}}{2}}$

$\text{دص} = \frac{1}{2}\,\text{هـ}^{\frac{\text{س}}{2}}\ \text{دس}$

$\text{دس} = \frac{2}{\text{هـ}^{\frac{\text{س}}{2}}}\ \text{دص}$

$\text{س} = 0 \rightarrow \text{ص} = 1$

$\text{س} = 2 \rightarrow \text{ص} = \text{هـ}$

$\int \cancel{\text{هـ}^{\text{س}}} \times \text{ق}(\text{ص}) \times \frac{2}{\cancel{\text{هـ}^{\frac{\text{س}}{2}}}}$

$2\int_{1}^{\text{هـ}} \text{هـ}^{\frac{\text{س}}{2}} \times \text{ق}(\text{ص})$

$= 2\int_{1}^{\text{هـ}} \text{ص}\ \text{ق}(\text{ص})\ \text{دص}$ من المعطيات

$= 2 \times ٤ = ٨$

النوع الثالث

اختصار جزئي والرجوع للفرض

في هذا النوع بعد الفرض يبقى بقايا من المتغير الأول لذلك نرجع للفرض ونكتب المتغير القديم بدلالة المتغير الجديد.

مثال ①

جد $\int س^5 \sqrt{س^3+1}\ دس$

الحل

$ص = \sqrt{س^3+1}$

$ص^2 = س^3+1$

$2ص\ دص = 3س^2\ دس$

$\Leftarrow دس = \frac{2ص\ دص}{3س^2}$

$\int س^5 \times ص \times \frac{2ص}{3س^2}$

$\frac{2}{3}\int س^3 \times ص^2$

لكن $ص^2 = س^3+1$

$\Leftarrow س^3 = ص^2 - 1$

$\frac{2}{3}\int (ص^2-1) \times ص^2$

$\frac{2}{3}\int (ص^4 - ص^2)\ دص = \frac{2}{3}\left(\frac{ص^5}{5} - \frac{ص^3}{3}\right)$

$= \frac{2}{3}\left(\frac{\left(\sqrt{س^3+1}\right)^5}{5} - \frac{\left(\sqrt{س^3+1}\right)^3}{3}\right) + ج$

مثال ②

$\int س^5 \sqrt{س^2-1}\ دس$

الحل :

$ص = \sqrt{س^2-1} \Leftarrow ص^2 = س^2 - 1$

$2ص\ دص = 2س\ دس \Leftarrow دس = \frac{ص\ دص}{س}$

$\int س^5 \sqrt{س^2-1}\ دس = \int س^5\ ص \times \frac{ص}{س}\ دص$

$= \int س^4\ ص^2\ دص$

لكن $ص^2 = س^2 - 1 \Leftarrow س^2 = ص^2 + 1$

$س^4 = (ص^2+1)^2$

$\int (ص^2+1)^2\ ص^2\ دص$

$= \int (ص^4 + 2ص^2 + 1) \times ص^2\ دص$

$= \int (ص^6 + 2ص^4 + ص^2)\ دص$

$\frac{ص^7}{7} + \frac{2ص^5}{5} + \frac{ص^3}{3} + ج$

$\frac{\left(\sqrt{س^2-1}\right)^7}{7} + \frac{2\left(\sqrt{س^2-1}\right)^5}{5} + \frac{\left(\sqrt{س^2-1}\right)^3}{3} + ج$

مثال (٣)

$$\int \frac{1}{1-\text{س}^2} \times \sqrt{\frac{1+\text{س}}{1-\text{س}}}\ \text{ءس}$$

الحل

$$\text{ص} = \frac{1+\text{س}}{1-\text{س}}$$

$$\text{ءص} = \frac{(1-\text{س})\times 1 - (1+\text{س})\times -1}{(1-\text{س})^2}$$

$$\text{ءص} = \frac{1-\cancel{\text{س}}+1+\cancel{\text{س}}}{(1-\text{س})^2} = \frac{2}{(1-\text{س})^2}\ \text{ءس}$$

$$\text{ءس} = \frac{(1-\text{س})^2}{2}\ \text{ءص}$$

$$= \int \frac{1}{(1+\text{س})\cancel{(1-\text{س})}} \times \sqrt{\text{ص}} \times \frac{\cancel{(1-\text{س})^2}^{\,(1-\text{س})}}{2}\ \text{ءص}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1-\text{س}}{1+\text{س}}\ \sqrt{\text{ص}}\ \text{ءص}$$

$$\text{لكن ص} = \frac{1+\text{س}}{1-\text{س}} \quad،\quad \frac{1}{\text{ص}} = \frac{1-\text{س}}{1+\text{س}}$$

$$\Leftarrow = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\text{ص}} \times \sqrt{\text{ص}}\ \text{ءص}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\text{ص}^{\frac{1}{2}}}\ \text{ءص} = \frac{1}{2}\int \text{ص}^{-\frac{1}{2}}\ \text{ءص}$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{2}\ \text{ص}^{\frac{1}{2}} + \text{ج}$$

$$= \sqrt{\text{ص}} + \text{ج}$$

$$= \sqrt{\frac{1+\text{س}}{1-\text{س}}} + \text{ج}$$

مثال (٤)

$$\int \frac{\sqrt{\text{ظتاس}}}{\text{جا}2\text{س}}\ \text{ءس}$$

الحل

$$\text{ص} = \sqrt{\text{ظتاس}} \Leftarrow \text{ص}^2 = \text{ظتاس}$$

$$2\text{ص ءص} = -\text{قتا}^2\text{س ءس}$$

$$\text{ءس} = \frac{2\text{ص ءص}}{-\text{قتا}^2\text{س}}$$

$$\int \frac{\text{ص}}{\text{جا}2\text{س}} \times \frac{2\text{ص}}{-\text{قتا}^2\text{س}}\ \text{ءص}$$

$$-\int \frac{\text{ص}}{\cancel{2}\,\cancel{\text{جاس}}\ \text{جتاس}} \times \cancel{2} \times \text{ص} \times \text{جا}^{\cancel{2}}\text{س}\ \text{ءص}$$

$$-\int \frac{\text{ص}^2}{\text{جتاس}} \times \text{جاس}\ \text{ءص}$$

$$-\int \text{ص}^2 \times \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}\ \text{ءص}$$

$$= -\int \text{ص}^2 \times \frac{1}{\text{ظتاس}}\ \text{ءص}$$

$$= -\int \text{ص}^2 \times \frac{1}{\text{ص}^2}\ \text{ءص}$$

$$= -\int 1\ \text{ءص} = -\text{ص} + \text{ج}$$

$$= -\sqrt{\text{ظتاس}} + \text{ج}$$

مثال ⑤

$$\int (س+1)^3 (س^2+2س+5)^3 \, ءس$$

الحل

$ص = س^2 + 2س + 5$

$ءص = (2س+2)\, ءس = 2(س+1)\, ءس$

$\Leftarrow$

$$\int \cancel{(س+1)^3} \times ص^3 \times \frac{ءص}{\cancel{2(س+1)}}$$

$$\frac{1}{2}\int (س+1)^2 \times ص^3 \, ءص$$

$$= \frac{1}{2}\int (\underline{س^2+2س}+1)\, ص^3 \, ءص$$

لكن $ص = س^2 + 2س + 5$

$ص - 5 = \underline{س^2 + 2س}$

$$= \frac{1}{2}\int (ص-5+1)\, ص^3 \, ءص$$

$$= \frac{1}{2}\int (ص-4)\, ص^3 \, ءص$$

$$= \frac{1}{2}\int (ص^4 - 4ص^3)\, ءص$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{ص^5}{5} - \frac{4ص^4}{4}\right) + ج$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{(س^2+2س+5)^5}{5} - (س^2+2س+5)^4\right) + ج$$

النوع الرابع

تحليل ثم استخدام التعويض

مثال ①

$\int (س^{٥} - ٣س)^{٣} \, دس$

الحل

$\int (س(س^{٤} - ٣))^{٣} \, دس$

$\int س^{٣} (س^{٤} - ٣)^{٣} \, دس$

$ص = س^{٤} - ٣$ ، $دص = ٤س^{٣} . دس$

$دس = \frac{دص}{٤س^{٣}}$

$= \int \cancel{س^{٣}} ص^{٣} \times \frac{دص}{٤\cancel{س^{٣}}}$

$= \frac{١}{٤} \int ص^{٣} \, دص = \frac{١}{٤} \frac{ص^{٤}}{٤} + جـ$

$= \frac{١}{١٦} (س^{٤} - ٣)^{٤} + جـ$

مثال ②

$\int \sqrt{س^{٢} + ٢س^{٤}} \, دس$ ، حيث $س > ٠$

الحل

$= \int \sqrt{س^{٢}(١ + ٢س^{٢})} \, دس$

$= \int \sqrt{س^{٢}} \sqrt{١ + ٢س^{٢}} \, دس$

$= \int |س| \sqrt{١ + ٢س^{٢}} \, دس$

لكن $س > ٠$

$= \int س \sqrt{١ + ٢س^{٢}} \, دس$

$ص = ١ + ٢س^{٢}$ ، $دص = ٤س \, دس$

$دس = \frac{دص}{٤س}$

$\int \cancel{س} \sqrt{ص} \times \frac{دص}{٤\cancel{س}}$

$\frac{١}{٤} \int ص^{\frac{١}{٢}} \, دص = \frac{١}{٤} \times \frac{٢}{٣} ص^{\frac{٣}{٢}} + جـ$

$= \frac{١}{٦} \left(\sqrt{١ + ٢س^{٢}}\right)^{٣} + جـ$

مثال ③

$\int س^{٢} \sqrt[٣]{س^{٧} - س^{٣}} \, دس$

$\int س^{٢} \sqrt[٣]{س^{٣}(س^{٤} - ١)} \, دس$

$\int س^{٢} \sqrt[٣]{س^{٣}} \sqrt[٣]{س^{٤} - ١} \, دس$

$\int س^{٢} \times س \sqrt[٣]{س^{٤} - ١} \, دس$

$\int س^{٣} \sqrt[٣]{س^{٤} - ١} \, دس$

$ص = س^{٤} - ١$ ، $دص = ٤س^{٣} \, دس$

$\int \cancel{س^{٣}} ص^{\frac{١}{٣}} \times \frac{دص}{٤\cancel{س^{٣}}} = \frac{١}{٤} \int ص^{\frac{١}{٣}} \, دص$

$= \frac{١}{٤} \times \frac{٣}{٤} ص^{\frac{٤}{٣}} = \frac{٣}{١٦} (س^{٤} - ١)^{\frac{٤}{٣}} + جـ$

مثال ④

$$\int س^{٨}\left(\frac{٢}{س}-\frac{٣}{س^{٢}}\right)^{٤} دس$$

توحيد مقام

$$\int س^{٨}\left(\frac{٢س-٣}{س^{٢}}\right)^{٤} دس$$

$$\int \cancel{س^{٨}}\,\frac{(٢س-٣)^{٤}}{\cancel{س^{٨}}} دس$$

$$=\frac{(٢س-٣)^{٥}}{٢\times٥}+ج$$

مثال ⑤

$$\int \left(س^{\frac{-٣}{٤}}+١\right)^{\frac{١}{٣}} دس$$

$$=\int\left(س^{\frac{-٣}{٤}}\left(١+\frac{١}{س^{\frac{-٣}{٤}}}\right)\right)^{\frac{١}{٣}}$$

$$=\int\left(س^{\frac{-٣}{٤}}\right)^{\frac{١}{٣}}\left(١+\frac{١}{س^{\frac{-٣}{٤}}}\right)^{\frac{١}{٣}}$$

$$\int س^{\frac{-١}{٤}}\left(١+س^{\frac{٣}{٤}}\right)^{\frac{١}{٣}}$$

$ص=١+س^{\frac{٣}{٤}} \Leftarrow دص=\frac{٣}{٤}س^{\frac{-١}{٤}} دس$

$دس=\frac{٤}{٣}س^{\frac{١}{٤}} دص$

$$\int \cancel{س^{\frac{-١}{٤}}}\,ص^{\frac{١}{٣}}\times\frac{٤}{٣}\times\frac{١}{\cancel{س^{\frac{-١}{٤}}}} دص$$

$$\frac{٤}{٣}\times\frac{٣}{٤}ص^{\frac{٤}{٣}}+ج=ص^{\frac{٤}{٣}}+ج$$

$$\left(١+س^{\frac{٣}{٤}}\right)^{\frac{٤}{٣}}+ج$$

مثال ⑥

$$\int \frac{س^{٢}+٣}{(س^{٢}-٣)^{٢}} دس$$

اكمل

$$\int \frac{س^{٢}+٣}{س^{٢}\left(س-\frac{٣}{س}\right)^{٢}}$$

$ص=س-\frac{٣}{س} \quad دص=١+\frac{٣}{س^{٢}} دس$

$=\frac{س^{٢}+٣}{س^{٢}} دس$

$\Leftarrow دس=\frac{س^{٢}}{س^{٢}+٣} دص$

$$\int \frac{\cancel{س^{٢}+٣}}{\cancel{س^{٢}}ص^{٢}}\times\frac{\cancel{س^{٢}}}{\cancel{س^{٢}+٣}} دص$$

$$\int \frac{١}{ص^{٢}} دص=\int ص^{-٢} دص$$

$$=\frac{ص^{-١}}{-١}+ج$$

$$=\frac{-١}{ص}+ج$$

$$=\frac{-١}{س-\frac{٣}{س}}+ج$$

مثال ⑦

$$\int \sqrt[٥]{(س^{٢}-٦س+٩)^{٢}}$$

$$=\int \sqrt[٥]{((س-٣)^{٢})^{٢}}=\sqrt[٥]{(س-٣)^{٤}}$$

$$=\int (س-٣)^{\frac{٤}{٥}}=\frac{٥}{٩}\times(س-٣)^{\frac{٩}{٥}}+ج$$

النوع الخامس

دمج القوى

تكاملات على صورة

$$\int \frac{(ق(س))^{ن}}{س^{م}}\, دس$$

نحل على التعويض ونقوم بتحليل $س^{م}$ بحيث نجعل أس البسط = أس المقام

مثال ①

$$\int \frac{(٢س+١)^{٦}}{س^{٨}}\, دس$$

نأخذ من المقام أعلى قوه داخل القوس مضروبه في قوة القوس

$(س^{١})^{٦} = س^{٦}$

$$\int \frac{(٢س+١)^{٦}}{س^{٦} \times س^{٢}} = \int \frac{(٢س+١)^{٦}}{س^{٦}} \times \frac{١}{س^{٢}}$$

$$= \int \left(\frac{٢س+١}{س}\right)^{٦} \times \frac{١}{س^{٢}}$$

$$= \int \left(٢ + \frac{١}{س}\right)^{٦} \times \frac{١}{س^{٢}}$$

$ص = ٢ + \frac{١}{س}$ ، $دص = \frac{-١}{س^{٢}}\, دس$

$$= \int ص^{٦} \times \frac{١}{\cancel{س^{٢}}} \times -\cancel{س^{٢}} \times دص$$

$$= -\int ص^{٦}\, دص = -\frac{ص^{٧}}{٧} + جـ$$

$$= -\frac{\left(٢ + \frac{١}{س}\right)^{٧}}{٧} + جـ$$

مثال ②

$$\int \frac{(س^{٣} - ٥س)^{٧}}{س^{٢٤}}$$

$س^{٢٤} = (س^{٣})^{٧} \times س^{٣}$

$$\int \frac{(س^{٣} - ٥س)^{٧}}{س^{٢١}} \times \frac{١}{س^{٣}}$$

$$= \int \left(\frac{س^{٣} - ٥س}{س^{٣}}\right)^{٧} \times \frac{١}{س^{٣}}$$

$$= \int \left(١ - \frac{٥}{س^{٢}}\right)^{٧} \times \frac{١}{س^{٣}}\, دس$$

$ص = ١ - \frac{٥}{س^{٢}}$ ، $دص = \frac{٥ \times ٢س}{س^{٤}} = \frac{١٠}{س^{٣}}\, دس$

$$= \int ص^{٧} \times \frac{١}{\cancel{س^{٣}}} \times \frac{\cancel{س^{٣}}}{١٠}\, دص$$

$$= \frac{١}{١٠} \times \frac{ص^{٨}}{٨} + جـ = \frac{١}{٨٠}\left(١ - \frac{٥}{س^{٢}}\right)^{٨} + جـ$$

مثال ③

$$\int \frac{\sqrt{س - س^2}}{س^4} \, دس \quad ، \; س > ٠$$

الحل

$$= \int \frac{(س - س^2)^{\frac{1}{2}}}{(س^2)^{\frac{1}{2}} \times س^3} \, دس$$

$$= \int \left(\frac{س - س^2}{س^2} \right)^{\frac{1}{2}} \times س^{-3} \, دس$$

$$= \int \left(\frac{1}{س} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \times س^{-3} \, دس$$

$$ص = \sqrt{\frac{1}{س} - 1}$$

$$ص^2 = \frac{1}{س} - 1 \Leftarrow 2ص \, دص = \frac{-1}{س^2} \, دس$$

$$\Leftarrow = \int ص \times س^{-3} \times -2ص \times س^2 \, دص$$

$$= \int -2ص^2 \times س^{-1} \, دص$$

لكن $ص^2 = \frac{1}{س} - 1$

$$\frac{1}{س} = ص^2 + 1$$

$$\int -2ص^2 \times (ص^2 + 1) \, دص$$

$$= \int (-2ص^4 - 2ص^2) \, دص$$

$$= \frac{-2ص^5}{5} - \frac{2ص^3}{3} + جـ$$

$$= -2 \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{س} - 1}\right)^5}{5} - 2 \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{س} - 1}\right)^3}{3} + جـ$$

مثال ④

$$\int \frac{1}{س^2 \times \sqrt{س^2 + 1}} \, دس$$

الحل

$$\int \frac{(س^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}}{س^2} \, دس$$

$$= \int \frac{(س^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}}{(س^2)^{-\frac{1}{2}}} \times \frac{1}{س^3} \, دس$$

$$= \int \left(\frac{س^2 + 1}{س^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \times \frac{1}{س^3} \, دس$$

$$= \int \left(1 + \frac{1}{س^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \times \frac{1}{س^3} \, دس$$

$$ص = 1 + \frac{1}{س^2} \quad ، \quad دص = \frac{-1 \times 2\cancel{س}}{\cancel{س^4}}$$

$$دس = \frac{س^3}{-2} \, دص$$

$$\int ص^{-\frac{1}{2}} \times \frac{1}{\cancel{س^3}} \times \frac{\cancel{س^3}}{-2} \times دص$$

$$-\frac{1}{2} \times \frac{2}{1} ص^{\frac{1}{2}} + جـ$$

$$-2 \left(1 + \frac{1}{س^2} \right)^{\frac{1}{2}} + جـ$$

مثال ⑤

$$جد \int \frac{(1 + س)^9}{س^{11}} \, دس$$

الحل

$$= \int \frac{(1 + س)^9}{س^9} \times \frac{1}{س^2} \, دس$$

← يتبع

$= \int \left(\frac{1}{س} + 1\right)^{9} \times \frac{1}{س^2} \, دس$

$ص = \frac{1}{س} + 1 \quad دص = \frac{-1}{س^2} \, دس$

$\int ص^{9} \times \frac{1}{\cancel{س^2}} \times -\cancel{س^2} \, دص$

$-\int ص^{9} \, دص = -\frac{ص^{10}}{10} + جـ$

$= -\frac{\left(\frac{1}{س} + 1\right)^{10}}{10} + جـ$

مثال ⑥

$\int \sqrt{1 + س^{\frac{-2}{3}}} \, دس \quad ، س > ٠$

$= \sqrt{س^{\frac{-2}{3}}\left(1 + س^{\frac{2}{3}}\right)}$

$= \sqrt{\frac{1}{س^{\frac{2}{3}}}\left(1 + س^{\frac{2}{3}}\right)}$

$= \int \sqrt{\frac{1}{س^{\frac{2}{3}}}} \sqrt{1 + س^{\frac{2}{3}}}$

$= \int \frac{1}{\sqrt{س^{\frac{2}{3}}}} \sqrt{1 + س^{\frac{2}{3}}} \, دس \quad ، س > ٠$

$= \int \frac{1}{س^{\frac{1}{3}}} \sqrt{1 + س^{\frac{2}{3}}}$

$ص = 1 + س^{\frac{2}{3}} \quad ، \quad دص = \frac{2}{3} س^{\frac{-1}{3}} \, دس$

$\int \frac{1}{\cancel{س^{\frac{1}{3}}}} \times \sqrt{ص} \times \frac{3}{2} \cancel{س^{\frac{1}{3}}} \, دص$

$\frac{3}{2} \int \sqrt{ص} \, دص$

$= \frac{3}{2} \int ص^{\frac{1}{2}} \, دص = \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} ص^{\frac{3}{2}} + جـ$

$= \left(1 + س^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} + جـ$

مثال ⑦

$\int \frac{1}{\sqrt[3]{س^{5}} - س} \, دس$

$= \int \frac{1}{س^{\frac{5}{3}} - س} \, دس = \int \frac{1}{س^{\frac{5}{3}}\left(1 - س^{\frac{-2}{3}}\right)}$

$ص = 1 - س^{\frac{-2}{3}} \quad دص = \frac{2}{3} س^{\frac{-5}{3}} \, دس$

$= \int \frac{1}{\cancel{س^{\frac{5}{3}}} \times ص} \times \frac{3}{2} \times \cancel{س^{\frac{5}{3}}} \, دص$

$= \frac{3}{2} \int \frac{1}{ص} \, دص = \frac{3}{2} لو_{هـ}|ص| + جـ$

$= \frac{3}{2} لو_{هـ}\left|1 - س^{\frac{-2}{3}}\right| + جـ$

تكامل الاقترانات الدائرية بطريقة التكامل بالتعويض

① **تكاملات تحوي جا، جتا**

الطريقة

نجعل أس إما جا، جتا يساوي (١) والباقي بدلالة الآخر

$\int \text{جا س}$ والباقي بدلالة جتا س

مفردة — نفرض ص = جتا

$\int \text{جتا س}$ والباقي بدلالة جا س

مفرده — نفرض ص = جا س

وللتحويل نستخدم

$\text{جا}^2\text{س} = 1 - \text{جتا}^2\text{س}$

$\text{جتا}^2\text{س} = 1 - \text{جا}^2\text{س}$

مثال ①

$\int \text{جتا}^3\text{س}\ \text{جا}^2\text{س}\ \text{دس}$

الحل

$\int \text{جتا س}\ \text{جتا}^2\text{س}\ \text{جا}^2\text{س}\ \text{دس}$

$\int \underbrace{\text{جتا س}}_{\text{مفرده}}\ \underbrace{(1 - \text{جا}^2\text{س})\ \text{جا}^2\text{س}}_{\text{بدلالة جا}}\ \text{دس}$

نفرض ص = جا س

$\text{دص} = \text{جتا س دس} \Rightarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{جتا س}}$

$\int \cancel{\text{جتا س}}\,(1 - \text{ص}^2) \times \text{ص}^2 \times \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{جتا س}}}$

$\int (\text{ص}^2 - \text{ص}^4)\ \text{دص}$

$= \frac{\text{ص}^3}{3} - \frac{\text{ص}^5}{5} + \text{جـ}$

$= \frac{\text{جا}^3\text{س}}{3} - \frac{\text{جا}^5\text{س}}{5} + \text{جـ}$

مثال ②

$\int \text{جتا}^3\text{س}\ \text{جا}^3\text{س}$

$\int \text{جتا س}\ \text{جتا}^2\text{س}\ \text{جا}^3\text{س}$

$= \int \text{جتا س}\,(1 - \text{جا}^2\text{س})\ \text{جا}^3\text{س}\ \text{دس}$

ص = جا س   دص = جتا س دس

$\int \cancel{\text{جتا س}}\,(1 - \text{ص}^2)\ \text{ص}^3 \times \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{جتا س}}}$

$\int (\text{ص}^3 - \text{ص}^5)\ \text{دص}$

$= \frac{\text{ص}^4}{4} - \frac{\text{ص}^6}{6} + \text{جـ}$

$= \frac{\text{جا}^4\text{س}}{4} - \frac{\text{جا}^6\text{س}}{6} + \text{جـ}$

مثال (٣)

$\int جا^3 س \, جتا^ن س \, دس$

الحل

$\int جا س \, جا^2 س \, جتا^ن س \, دس$

$\int جا س (1 - جتا^2 س) \, جتا^ن س \, دس$

ص = جتا س   دص = − جا س دس

$\int \cancel{جا س}(1 - ص^2) \, ص^ن \times \frac{دص}{-\cancel{جا س}}$

$-\int (ص^ن - ص^{ن+2}) \, دص$

$= -\left(\frac{ص^{ن+1}}{ن+1} - \frac{ص^{ن+3}}{ن+3}\right) + ج$

$= -\left(\frac{جتا^{ن+1} س}{ن+1} - \frac{جتا^{ن+3} س}{ن+3}\right) + ج$

مثال (٤)

$\int جتا^3 س \, دس$

الحل

$\int جتا س \, جتا^2 س \, دس$

$\int جتا س (1 - جا^2 س) \, دس$

ص = جا س   دص = جتا س

$\int \cancel{جتا س}(1 - ص^2) \times \frac{دص}{\cancel{جتا س}}$

$= ص - \frac{ص^3}{3} + ج = جا س - \frac{جا^3 س}{3} + ج$

ملاحظة هامة

اذا كان جا ، جتا داخل التكامل لوحده وكانت القوه

(١) زوجيه ← التكامل مباشر حيث نستخدم المتطابقه

$جا^2 س = \frac{1}{2}(1 - جتا 2س)$

$جتا^2 س = \frac{1}{2}(1 + جتا 2س)$

مثلاً

$جا^4 س = (جا^2 س)^2 = \left(\frac{1}{2}(1 - جتا 2س)\right)^2$

$جتا^6 س = (جتا^2 س)^3 = \left(\frac{1}{2}(1 + جتا 2س)\right)^3$

(٢) فرديه ← التكامل بالتعويض حيث نقوم بتحليل الاس الفردي بهدف الحصول على

$\int جا س \times$ الباقي بدلالة جتا س

ص = جتا س

$\int جتا س \times$ الباقي بدلالة جا س

ص = جا س

مثال ⑤

$\int جا^5 س \, د س$

الحل

$\int جا س \, جا^4 س \, د س$

$= \int جا س \,(1 - جتا^2 س)^2 \, د س$

$ص = جتا س \quad د ص = - جا س \, د س$

$= \int جا س \,(1 - ص^2)^2 \times \frac{د ص}{- جا س}$

$= - \int (1 - 2ص^2 + ص^4) \, د ص$

$= -\left(ص - \frac{2ص^3}{3} + \frac{ص^5}{5}\right) + ج$

$= -\left(جتا س - \frac{2(جتا س)^3}{3} + \frac{جتا^5 س}{5}\right) + ج$

مثال ⑥

$\int \frac{جتا^5 س}{\sqrt{جا س}} \, د س$

الحل

$\int \frac{جتا س \times (جتا^2 س)^2}{\sqrt{جا س}} \, د س$

$= \int \frac{جتا س \,(1 - جا^2 س)^2}{\sqrt{جا س}} \, د س$

$ص = جا س \quad د ص = جتا س \, د س$

$= \int \frac{جتا س \,(1 - ص^2)^2}{\sqrt{ص}} \times \frac{د ص}{جتا س}$

$= \int \frac{1 - 2ص^2 + ص^4}{\sqrt{ص}} \, د ص$

$= \int \left(\frac{1}{\sqrt{ص}} - \frac{2ص^2}{\sqrt{ص}} + \frac{ص^4}{\sqrt{ص}}\right) د ص$

$= \int \left(ص^{-\frac{1}{2}} - 2 ص^{\frac{3}{2}} + ص^{\frac{7}{2}}\right) د ص$

$= 2ص^{\frac{1}{2}} - 2 \times \frac{2}{5} ص^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{9} ص^{\frac{9}{2}}$

$= 2\sqrt{جا س} - \frac{4}{5}(جا س)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{9}(جا س)^{\frac{9}{2}}$

مثال ⑦

$\int جا^4 س \, د س$

الحل

$\int (جا^2 س)^2 \, د س$

$= \int \left(\frac{1}{2}(1 - جتا 2س)\right)^2 د س$

$= \int \frac{1}{4}\left(1 - 2 جتا 2س + جتا^2 2س\right)$

$= \int \frac{1}{4}\left(1 - 2 جتا 2س + \frac{1}{2}(1 + جتا 4س)\right)$

$= \frac{1}{4}\left(س - \frac{2 جا 2س}{2} + \frac{1}{2}\left(س + \frac{جا 4س}{4}\right)\right) + ج$

$\int جتا^4 س \, د س$

لنفس الطريقة

مثال ⑧

$$\int \frac{1}{قا^3 س\ قتا^2 س}\ دس$$

$$= \int جتا^3 س\ جا^2 س\ دس$$

$$= \int جتا س\ جتا^2 س\ جا^2 س\ دس$$

$$= \int جتا س\ (1 - جا^2 س)\ جا^2 س\ دس$$

ص = جاس   دص = جتاس دس

$$= \int \cancel{جتا س}\ (1 - ص^2)\ ص^2\ \frac{دص}{\cancel{جتا س}}$$

$$= \int (ص^2 - ص^4)\ دص$$

$$= \frac{ص^3}{3} - \frac{ص^5}{5} + جـ$$

$$= \frac{جا^3 س}{3} - \frac{جا^5 س}{5} + جـ$$

مثال ⑨

$$\int جا 4س\ جتا^2 2س\ دس$$

جا٤س = ٢ جا٢س جتا٢س

$$\int 2 جا 2س\ جتا 2س\ جتا^2 2س$$

$$\int 2 جا 2س\ جتا^3 2س\ دس$$

ص = جتا٢س   دص = −٢ جا٢س

$$\int \cancel{2 جا 2س}\ ص^3 \times \frac{دص}{\cancel{-2 جا 2س}}$$

$$-\int ص^3\ دص = -\frac{ص^4}{4} + جـ = -\frac{جتا^4 2س}{4} + جـ$$

② تكاملات تحوي ظا ، قا

① $\int قا^2 س$ والباقي بدلالة ظاس
نفرض ص = ظاس

② $\int قاس\ ظاس$ والباقي بدلالة قاس نفرض ص = قاس

متطابقات هامة

$$قا^2 س = 1 + ظا^2 س$$

$$ظا^2 س = قا^2 س - 1$$

ملاحظة

① قا فردية نفرض ص = قاس

② قا زوجية نفرض ص = ظاس

مثال ①

$$\int قا^4 س\ دس$$

الحل

$$\int قا^2 س\ قا^2 س\ دس$$

$$\int قا^2 س\ (1 + ظا^2 س)\ دس$$

ص = ظاس   دص = قا²س دس

$$\int \cancel{قا^2 س}\ (1 + ص) \times \frac{دص}{\cancel{قا^2 س}}$$

$$= ص + \frac{ص^2}{2} + جـ = ظاس + \frac{ظا^2 س}{2} + جـ$$

مثال (٢)

$\int \text{قا}^4\text{س}\ \text{ظا}^5\text{س}\ \text{د س}$

الحل

قا زوجي نفرض $\text{ص} = \text{ظاس}$

$\text{دص} = \text{قا}^2\text{س}\ \text{دس}$

$\int \text{قا}^4\text{س}\ \text{ص}^5 \times \frac{\text{دص}}{\text{قا}^2\text{س}}$

$\int \text{قا}^2\text{س}\ \text{ص}^5 \times \text{دص}$

$\text{قا}^2\text{س} = 1 + \text{ظا}^2\text{س}$

$\int (1+\text{ظا}^2\text{س})\ \text{ص}^5\ \text{دص}$

$\int (1+\text{ص}^2)\ \text{ص}^5\ \text{دص}$

$\int \text{ص}^5 + \text{ص}^7\ \text{دص} = \frac{\text{ص}^6}{6} + \frac{\text{ص}^8}{8} + \text{ج}$

$= \frac{\text{ظا}^6\text{س}}{6} + \frac{\text{ظا}^8\text{س}}{8} + \text{ج}$

مثال (٣)

$\int \text{قا}^3\text{س}\ \text{ظا}^3\text{س}\ \text{د س}$

قا فردية نفرض $\text{ص} = \text{قاس}$

$\text{دص} = \text{قاس}\ \text{ظاس}$

$\int \text{قاس ظاس}\ \text{قا}^2\text{س}\ \text{ظا}^2\text{س}\ \text{دس}$

$\int \text{قاس ظاس}\ \text{قا}^2\text{س}\ (\text{قا}^2\text{س}-1)\ \text{دس}$

$\int \cancel{\text{قاس ظاس}}\ \text{ص}^2\ (\text{ص}^2-1) \times \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{قاس ظاس}}}$

$\int \text{ص}^2(\text{ص}^2-1)\ \text{دص}$

$= \int (\text{ص}^4 - \text{ص}^2)\ \text{دص}$

$= \frac{\text{ص}^5}{5} - \frac{\text{ص}^3}{3} + \text{ج}$

$\frac{\text{قا}^5\text{س}}{5} - \frac{\text{قا}^3\text{س}}{3} + \text{ج}$

مثال (٤)

$\int \text{قا}^{\text{ن}}\text{س}\ \text{ظاس}\ \text{دس}$

الحل

$\int \text{قاس ظاس} \times \text{قا}^{\text{ن}-1}\text{س}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \text{قاس} \qquad \text{دص} = \text{قاس ظاس}\ \text{دس}$

$\int \cancel{\text{قاس ظاس}} \times \text{ص}^{\text{ن}-1} \times \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{قاس ظاس}}}$

$= \int \text{ص}^{\text{ن}-1}\ \text{دص} = \frac{\text{ص}^{\text{ن}}}{\text{ن}} + \text{ج}$

$= \frac{(\text{قاس})^{\text{ن}}}{\text{ن}} + \text{ج}$

مثال (٥)

$\int \frac{\text{جا}^2\text{س}}{\text{جتا}^4\text{س}}\ \text{دس}$

الحل

$\int \frac{\text{جا}^2\text{س}}{\text{جتا}^2\text{س}} \times \frac{1}{\text{جتا}^2\text{س}}\ \text{دس}$

$\int \text{ظا}^2\text{س}\ \text{قا}^2\text{س}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \text{ظاس} \qquad \text{دص} = \text{قا}^2\text{س}$

يتبع ⇐

$\int ص^2 \times \cancel{قا^2س} \times \frac{دص}{\cancel{قا^2س}}$

$\int ص^2 دص = \frac{ص^3}{3} + جـ = \frac{ظا^3س}{3} + جـ$

مثال ⑥

$\int \frac{جا^نس}{جتا^{ن+2}س} دس$

الحل

$\int \frac{جا^نس}{جتا^نس} \times \frac{1}{جتا^2س} دس$

$\int ظا^نس \times قا^2س\ دس$

$ص = ظاس \qquad دص = قا^2س\ دس$

$\int ص^ن \times \cancel{قا^2س} \times \frac{دص}{\cancel{قا^2س}}$

$\int ص^ن دص = \frac{ص^{ن+1}}{ن+1} + جـ$

$= \frac{ظا^{ن+1}س}{ن+1} + جـ$

مثال ⑦

$\int \frac{1}{جتا^2س \times \sqrt{1+ظاس}} دس$

الحل

$= \int \frac{قا^2س}{\sqrt{1+ظاس}} دس$

$ص = \sqrt{1+ظاس}$

$ص^2 = 1 + ظاس$

$2ص\ دص = قا^2س\ دس$

$\int \frac{قا^2س}{\cancel{ص}} \times \frac{2\cancel{ص}}{قا^2س} دص$

$\int 2\ دص = 2ص + جـ$

$= 2\sqrt{1+ظاس} + جـ$

ملاحظة هامة

الاقترانات التي تحوي ظتا و قتا نتعامل معها بنفس طريقة ظا و قا

$قتا^2س = 1 + ظتا^2س$

$ظتا^2س = قتا^2س - 1$

مثال ①

$\int قتا^6 3س\ ظتا3س\ دس$

الحل

$\int قتا^5 3س\ ظتا3س\ قتا3س\ دس$

$ص = قتا3س \qquad دص = -3\ قتا3س\ ظتا3س$

$\int \cancel{قتا3س\ ظتا3س}\ ص^5 \times \frac{دص}{-3\ \cancel{قتا3س\ ظتا3س}}$

$-\frac{1}{3}\int ص^5 دص = -\frac{1}{3}\ \frac{ص^6}{6} + جـ$

$= -\frac{1}{18}\ قتا^6 3س + جـ$

مثال ②

$$\int \text{قتا}^4\text{س}\ \text{ظتا}^5\text{س}\ \text{دس}$$

الحل

$$\int \text{قتا}^2\text{س}\ \text{قتا}^2\text{س}\ \text{ظتا}^5\text{س}\ \text{دس}$$

$$\int \text{قتا}^2\text{س}\ (1+\text{ظتا}^2\text{س})\ \text{ظتا}^5\text{س}\ \text{دس}$$

$$\text{ص} = \text{ظتاس}$$

$$\text{دص} = -\text{قتا}^2\text{س}\ \text{دس}$$

$$= \int \text{قتا}^2\text{س}\ (1+\text{ص}^2)\ \text{ص}^5 \times \frac{\text{دص}}{-\cancel{\text{قتا}^2\text{س}}}$$

$$= -\int (1+\text{ص}^2)\ \text{ص}^5\ \text{دص}$$

$$= -\int (\text{ص}^5 + \text{ص}^7)\ \text{دص}$$

$$= -\left(\frac{\text{ص}^6}{6} + \frac{\text{ص}^8}{8}\right) + \text{جـ}$$

$$= -\left(\frac{\text{ظتا}^6\text{س}}{6} + \frac{\text{ظتا}^8\text{س}}{8}\right) + \text{جـ}$$

مثال ③

$$\int \frac{1}{\text{جا}^2\text{س}\ \text{ظا}^3\text{س}}\ \text{دس}$$

الحل

$$\int \frac{1}{\text{جا}^2\text{س}} \times \frac{1}{\text{ظا}^3\text{س}}\ \text{دس}$$

$$= \int \text{قتا}^2\text{س}\ \text{ظتا}^3\text{س}\ \text{دس}$$

$$\text{ص} = \text{ظتاس} \qquad \text{دص} = -\text{قتا}^2\text{س}$$

$$= \int \cancel{\text{قتا}^2\text{س}} \times \text{ص}^3 \times \frac{\text{دص}}{-\cancel{\text{قتا}^2\text{س}}}$$

$$= -\int \text{ص}^3\ \text{دص}$$

$$= -\frac{\text{ص}^4}{4} + \text{جـ} = -\frac{\text{ظتا}^4\text{س}}{4} + \text{جـ}$$

تدريبات الكتاب

تدريب ① ص ٢٦٦

جد كلا من التكاملات الآتية

① $\int س^2 (6س^3+5)^3 \, دس$

$ص = 6س^3+5 \quad ، \quad دص = 18س^2 \, دس$

$\int س^2 \, ص^3 \times \frac{دص}{\cancel{18س^2}}$

$\frac{1}{18}\int ص^3 \, دص = \frac{1}{18} \times \frac{ص^4}{4} + جـ$

$= \frac{1}{72}(6س^3+5)^4 + جـ$

② $\int (س+3) \sqrt[5]{س^2+6س-4} \, دس$

$ص = س^2+6س-4$

$دص = (2س+6) \, دس$

$\int \cancel{(س+3)} \, ص^{\frac{1}{5}} \times \frac{دص}{2\cancel{(س+3)}}$

$\frac{1}{2}\int ص^{\frac{1}{5}} \, دص$

$\frac{1}{2} \times \frac{5}{6} ص^{\frac{6}{5}} + جـ$

$\frac{5}{12}(س^2+6س-4)^{\frac{6}{5}} + جـ$

③ $\int \frac{10س-5}{\sqrt[3]{(س^2-س+1)^2}}$

$ص = س^2-س+1$

$دص = (2س-1) \, دس$

$\int \frac{5\cancel{(2س-1)}}{ص^{\frac{2}{3}}} \times \frac{دص}{\cancel{2س-1}}$

$\int 5 ص^{-\frac{2}{3}} \, دص$

$= 5 \times 3 ص^{\frac{1}{3}} + جـ = 15(س^2-س+1)^{\frac{1}{3}} + جـ$

تدريب ② ص ٢٦٧

① $\int س^7 \sqrt{س^4-3} \, دس$

$ص = س^4-3 \qquad دص = 4س^3 \, دس$

$= \int \cancel{س^7} \, ص^{\frac{1}{2}} \times \frac{دص}{4\cancel{س^3}}$

$= \frac{1}{4}\int س^4 \, ص^{\frac{1}{2}} \times دص$

$س^4 = ص+3$

$= \frac{1}{4}\int (ص+3) \, ص^{\frac{1}{2}} \, دص$

$= \frac{1}{4}\int \left(ص^{\frac{3}{2}} + 3 ص^{\frac{1}{2}}\right) دص$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{5} ص^{\frac{5}{2}} + \cancel{3} \times \frac{2}{\cancel{3}} ص^{\frac{3}{2}}\right) + جـ$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}(س^4-3)^{\frac{5}{2}} + 2(س^4-3)^{\frac{3}{2}}\right) + جـ$

② $\int ٢س^{٥}(س^{٢}+٥)^{٤}\,ءس$

الحل

$ص = س^{٢}+٥$ ، $ءص = ٢س\,ءس$

$\int \cancel{٢س^{٥}}(ص)^{٤}\,\frac{ءص}{\cancel{٢س}}$

$\int س^{٤}\,ص^{٤}\,ءص$

لكن $س^{٢} = ص-٥$

$س^{٤} = (ص-٥)^{٢}$

$\int (ص-٥)^{٢} \times ص^{٤}\,ءص$

$= \int (ص^{٢}-١٠ص+٢٥)\,ص^{٤}\,ءص$

$= \int (ص^{٦}-١٠ص^{٥}+٢٥ص^{٤})\,ءص$

$= \frac{ص^{٧}}{٧} - \frac{١٠ص^{٦}}{٦} + \frac{٢٥ص^{٥}}{٥} + جـ$

$= \frac{(س^{٢}+٥)^{٧}}{٧} - \frac{٥}{٣}(س^{٢}+٥)^{٦} + ٥(س^{٢}+٥)^{٥} + جـ$

تدريب ③ ص٢٦٨

① $\int \frac{(٢س+١)^{٥}}{س^{٧}}\,ءس$

الحل

$\int \frac{(٢س+١)^{٥}}{س^{٥}\times س^{٢}}\,ءس$

$= \int \left(\frac{٢س+١}{س}\right)^{٥} \times \frac{١}{س^{٢}}\,ءس$

$= \int \left(٢+\frac{١}{س}\right)^{٥} \times \frac{١}{س^{٢}}\,ءس$

$ص = ٢+\frac{١}{س}$ ، $ءص = \frac{-١}{س^{٢}}\,ءس$

$\int ص^{٥} \times \frac{١}{\cancel{س^{٢}}} \times -\cancel{س^{٢}}\,ءص$

$-\int ص^{٥}\,ءص = -\frac{ص^{٦}}{٦} + جـ$

$= -\frac{(٢+\frac{١}{س})^{٦}}{٦} + جـ$

② $\int س^{٢}\sqrt[٣]{س^{٧}+٥س^{٣}}\,ءس$

الحل

$\int س^{٢}\sqrt[٣]{س^{٣}(س^{٤}+٥)}\,ءس$

$\int س^{٢} \times \sqrt[٣]{س^{٣}} \times \sqrt[٣]{س^{٤}+٥}\,ءس$

$= \int س^{٣}\sqrt[٣]{س^{٤}+٥}\,ءس$

$ص = س^{٤}+٥$ ، $ءص = ٤س^{٣}\,ءس$

$\int \cancel{س^{٣}}\,ص^{\frac{١}{٣}} \times \frac{ءص}{٤\cancel{س^{٣}}}$

$\frac{١}{٤}\int ص^{\frac{١}{٣}}\,ءص = \frac{١}{٤} \times \frac{٣}{٤}\,ص^{\frac{٤}{٣}} + جـ$

$\frac{٣}{١٦}(س^{٤}+٥)^{\frac{٤}{٣}} + جـ$

③ $\int \sqrt[٣]{٤س^{٥}+٢س^{٢}}\,ءس$

الحل

$\int \sqrt[٣]{س^{٣}(٤س^{٢}+٢)}$

$\int \sqrt[٣]{س^{٣}}\sqrt[٣]{٤س^{٢}+٢}\,ءس$

يتبع ←

$\int \text{س} \sqrt[3]{4\text{س}^2+2}\ \text{دس}$

$\text{ص} = 4\text{س}^2+2 \quad \text{دص} = 8\text{س}\ \text{دس}$

$\int \cancel{\text{س}}\ \text{ص}^{\frac{1}{3}} \times \frac{\text{دص}}{8\cancel{\text{س}}}$

$\frac{1}{8}\int \text{ص}^{\frac{1}{3}}\ \text{دص} = \frac{1}{8}\times\frac{3}{4}\text{ص}^{\frac{4}{3}} + \text{ج}$

$= \frac{3}{32}\left(4\text{س}^2+2\right)^{\frac{4}{3}} + \text{ج}$

④ $\int \left(7\text{س}^5 - 2\text{س}\right)^3 \text{دس}$

اكمل

$\int \left(\text{س}\left(7\text{س}^4-2\right)\right)^3$

$\int \text{س}^3\left(7\text{س}^4-2\right)^3 \text{دس}$

$\text{ص} = 7\text{س}^4 - 2 \quad \text{دص} = 28\text{س}^3\ \text{دس}$

$\int \cancel{\text{س}^3}\ \text{ص}^3 \times \frac{\text{دص}}{28\cancel{\text{س}^3}}$

$\frac{1}{28}\int \text{ص}^3\ \text{دص} = \frac{1}{28}\ \frac{\text{ص}^4}{4} + \text{ج}$

$= \frac{1}{108}\left(7\text{س}^4-2\right)^4 + \text{ج}$

تدريب ④ ص ٢٦٩

① $\int_0^4 \text{س}\sqrt{\text{س}^2+9}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \text{س}^2 + 9$

$\text{دص} = 2\text{س}\ \text{دس}$

$\text{س} = 0 \leftarrow \text{ص} = 9$

$\text{س} = 4 \leftarrow \text{ص} = 25$

$\int_9^{25} \cancel{\text{س}}\ \text{ص}^{\frac{1}{2}} \times \frac{\text{دص}}{2\cancel{\text{س}}}$

$\frac{1}{2}\int_9^{25} \text{ص}^{\frac{1}{2}}\ \text{دص}$

$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\text{ص}^{\frac{3}{2}}\Big]_9^{25}$

$\frac{1}{3}\left((25)^{\frac{3}{2}} - (9)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{98}{3}$

⑤ $\int_1^2 \frac{(\text{س}+1)^5}{\text{س}^7}\ \text{دس}$

$\int_1^2 \frac{(\text{س}+1)^5}{\text{س}^5} \times \frac{1}{\text{س}^2}\ \text{دس}$

$\int_1^2 \left(\frac{\text{س}+1}{\text{س}}\right)^5 \times \frac{1}{\text{س}^2}\ \text{دس}$

$\int_1^2 \left(1+\frac{1}{\text{س}}\right)^5 \times \frac{1}{\text{س}^2}$

$\text{ص} = 1 + \frac{1}{\text{س}} \quad \text{دص} = \frac{-1}{\text{س}^2}\ \text{دس}$

$\text{س} = 1 \leftarrow \text{ص} = 2$

$\text{س} = 2 \leftarrow \text{ص} = 1.5$

$\int_2^{1.5} \text{ص}^5 \times \frac{1}{\cancel{\text{س}^2}} \times -\cancel{\text{س}^2}\ \text{دص}$

$-\int_2^{1.5} \text{ص}^5\ \text{دص} = -\left(\frac{\text{ص}^6}{6}\right]_2^{1.5}$

$= -\left(\frac{(1.5)^6}{6} - \frac{1}{6}\right)$

تدريب ⑤ ص ٧٠

① $\int (\text{س}^2+1)\,\text{جا}(\text{س}^3+3\text{س}+1)\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{س}^3+3\text{س}+1$

$\text{دص} = (3\text{س}^2+3)\,\text{دس}$

$\int \cancel{(\text{س}^2+1)}\,\text{جا ص} \times \frac{\text{دص}}{3\cancel{(\text{س}^2+1)}}$

$\frac{1}{3}\int \text{جا ص دص} = -\frac{1}{3}\,\text{جتا ص} + \text{جـ}$

$= -\frac{1}{3}\,\text{جتا}(\text{س}^3+3\text{س}+1) + \text{جـ}$

② $\int \text{س}\,\text{ظا}^2(\text{س}^2+5)\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{س}^2+5 \qquad \text{دص} = 2\text{س}\,\text{دس}$

$\int \cancel{\text{س}}\,\text{ظا}^2\text{ص} \times \frac{\text{دص}}{2\cancel{\text{س}}}$

$\frac{1}{2}\int \text{ظا}^2\text{ص}\,\text{دص}$

$\frac{1}{2}\int (\text{قا}^2\text{ص} - 1)\,\text{دص}$

$\frac{1}{2}(\text{ظا ص} - \text{ص}) + \text{جـ}$

$\frac{1}{2}\left(\text{ظا}(\text{س}^2+5) - (\text{س}^2+5)\right) + \text{جـ}$

③ $\int_1^2 \frac{\text{هـ}^{\frac{3}{\text{س}}}}{\text{س}^2}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \frac{3}{\text{س}} \text{ ، } \text{دص} = \frac{-3}{\text{س}^2}\,\text{دس}$

$\text{س} = 1 \leftarrow \text{ص} = 3$

$\text{س} = 2 \leftarrow \text{ص} = \frac{3}{2}$

$\int_3^{\frac{3}{2}} \frac{\text{هـ}^{\text{ص}}}{\cancel{\text{س}^2}} \times \frac{-\cancel{\text{س}^2}}{3}\,\text{دص}$

$-\frac{1}{3}\int_3^{\frac{3}{2}} \text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{دص} = -\frac{1}{3}\left[\text{هـ}^{\text{ص}}\right]_3^{\frac{3}{2}}$

$= -\frac{1}{3}\left(\text{هـ}^{\frac{3}{2}} - \text{هـ}^3\right)$

تدريب ⑥ ص ٧٢

① $\int \text{ظا}^5 3\text{س}\,\text{قا}^2 3\text{س}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{ظا}\,3\text{س} \qquad \text{دص} = 3\,\text{قا}^2 3\text{س}\,\text{دس}$

$\int \text{ص}^5 \times \cancel{\text{قا}^2 3\text{س}} \times \frac{\text{دص}}{3\,\cancel{\text{قا}^2 3\text{س}}}$

$\frac{1}{3}\int \text{ص}^5\,\text{دص}$

$\frac{1}{3}\,\frac{\text{ص}^6}{6} + \text{جـ}$

$\frac{1}{18} \times (\text{ظا}\,3\text{س})^6 + \text{جـ}$

② $\int \dfrac{\text{جتا}\,٢س}{\text{قتا}^{٥}\,٢س}\,دس$

الحل

$\int \text{جتا}\,٢س\ \text{جا}^{٥}\,٢س\ دس$

$ص = \text{جا}\,٢س$

$دص = ٢\,\text{جتا}\,٢س\ دس$

$\int \cancel{\text{جتا}\,٢س}\ ص^{٥} \times \dfrac{دص}{٢\,\cancel{\text{جتا}\,٢س}}$

$\dfrac{١}{٢}\int ص^{٥}\,دص = \dfrac{١}{٢}\,\dfrac{ص^{٦}}{٦} + جـ$

$= \dfrac{١}{١٢}\left(\text{جا}\,٢س\right)^{٦} + جـ$

③ $\int \text{جا}^{٣}س\ دس$

$= \int \text{جا}س\ \text{جا}^{٢}س\ دس$

$= \int \text{جا}س\left(١ - \text{جتا}^{٢}س\right)دس$

$ص = \text{جتا}س \qquad دص = -\text{جا}س\ دس$

$\int \cancel{\text{جا}س}\left(١ - ص^{٢}\right) \times \dfrac{دص}{-\cancel{\text{جا}س}}$

$-\int \left(١ - ص^{٢}\right)دص$

$= \int \left(ص^{٢} - ١\right)دص$

$= \dfrac{ص^{٣}}{٣} - ص + جـ$

$= \dfrac{\text{جتا}^{٣}س}{٣} - \text{جتا}س + جـ$

④ $\int \text{جا}^{٤}\,٥س\ \text{جتا}^{٣}\,٥س\ دس$

$\int \text{جتا}\,٥س\ \text{جا}^{٤}\,٥س\ \text{جتا}^{٢}\,٥س\ دس$

$= \int \text{جتا}\,٥س\ \text{جا}^{٤}\,٥س\left(١ - \text{جا}^{٢}\,٥س\right)دس$

$ص = \text{جا}\,٥س$

$دص = ٥\,\text{جتا}\,٥س\ دس$

$\int \cancel{\text{جتا}\,٥س}\ ص^{٤}\left(١ - ص^{٢}\right)\dfrac{دص}{٥\,\cancel{\text{جتا}\,٥س}}$

$\dfrac{١}{٥}\int \left(ص^{٤} - ص^{٦}\right)دص$

$= \dfrac{١}{٥}\left(\dfrac{ص^{٥}}{٥} - \dfrac{ص^{٧}}{٧}\right) + جـ$

$= \dfrac{١}{٥}\left(\dfrac{\text{جا}^{٥}\,٥س}{٥} - \dfrac{\text{جا}^{٧}\,٥س}{٧}\right) + جـ$

تمارين ومسائل

ص ٢٧٣

(١) اوجد كل من التكاملات الآتية

أ) $\int_{0}^{2} (س+٣)\sqrt{س^2+٦س}\ ءس$

$ص = س^2 + ٦س \qquad ءص = (٢س+٦)\ ءس$

$س = ٠ \leftarrow ص = ٠$

$س = ٢ \leftarrow ص = ١٦$

$\int_{0}^{16} \cancel{(س+٣)}\ ص^{\frac{1}{2}} \times \frac{ءص}{٢\cancel{(س+٣)}}$

$\int_{0}^{16} \frac{1}{2} ص^{\frac{1}{2}}\ ءص = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} ص^{\frac{3}{2}} \Big]_{0}^{16}$

$\frac{1}{3}(١٦)^{\frac{3}{2}} - ٠ = \frac{1}{3} \times ٦٤ = \frac{٦٤}{٣}$

ب) $\int \frac{٢س-٣}{٢س^2-٦س-٥}\ ءس$

$ص = ٢س^2 - ٦س - ٥ \quad ، \quad ءص = (٤س-٦)\ ءس$

$\int \frac{\cancel{٢س-٣}}{ص} \times \frac{ءص}{٢\cancel{(٢س-٣)}}$

$\int \frac{1}{2} \frac{1}{ص}\ ءص = \frac{1}{2} لو|ص| + ج$

$= \frac{1}{2} لو|٢س^2-٦س-٥| + ج$

ج) $\int \frac{٢}{(٤س^2-٢٠س+٢٥)^٧}\ ءس$

$= \int \frac{٢}{((٢س-٥)^2)^٧}\ ءس$

$= \int \frac{٢}{(٢س-٥)^{١٤}}\ ءس$

$ص = ٢س - ٥ \qquad ءص = ٢\ ءس$

$\int \frac{\cancel{٢}}{ص^{١٤}} \times \frac{ءص}{\cancel{٢}} = \int ص^{-١٤}\ ءص$

$= \frac{ص^{-١٣}}{-١٣} = \frac{-١}{١٣(٢س-٥)^{١٣}}$

د) $\int_{3}^{4} \frac{٧}{س^2-٤س+٤}\ ءس$

$= \int_{3}^{4} \frac{٧}{(س-٢)^2}\ ءس$

$ص = س - ٢ \qquad ءص = ءس$

$س = ٣ \leftarrow ص = ١$

$س = ٤ \leftarrow ص = ٢$

$= \int_{1}^{2} \frac{٧}{ص^2}\ ءص = \int_{1}^{2} ٧ ص^{-2}\ ءص$

$= ٧ \frac{ص^{-1}}{-1} \Big]_{1}^{2} = ٧\left(\frac{-1}{ص}\right) \Big]_{1}^{2}$

$= ٧\left(\frac{-1}{2} - \left(\frac{-1}{1}\right)\right)$

$= ٧\left(\frac{-1}{2} + 1\right) = ٧ \times \frac{1}{2}$

$= \frac{٧}{٢}$

هـ) $\int \frac{\text{ظتا}^2 \frac{1}{س}}{س^2}\, دس$

$ص = \frac{1}{س} \qquad دص = \frac{-1}{س^2}\, دس$

$\int \frac{\text{ظتا}^2 ص}{\cancel{س^2}} \times -\cancel{س^2}\, دص$

$= -\int \text{ظتا}^2 ص\, دص$

$= -\int (\text{قتا}^2 ص - 1)\, دص$

$= -(-\text{ظتا}\, ص - ص) + جـ$

$= \text{ظتا} \frac{1}{س} + \frac{1}{س} + جـ$

$دص = \frac{-1}{س^2}\, دس$

$\int \frac{1}{\cancel{س^2}} \sqrt{ص} \times -\cancel{س^2}\, دص$

$\int -\sqrt{ص}\, دص = \int -ص^{\frac{1}{2}}\, دص$

$= -\frac{2}{3} ص^{\frac{3}{2}} + جـ$

$= -\frac{2}{3}\left(2 + \frac{1}{س}\right)^{\frac{3}{2}} + جـ$

و) $\int \frac{(5+\sqrt{س})^7}{\sqrt{س}}\, دس$

$ص = 5 + \sqrt{س} \qquad دص = \frac{1}{2\sqrt{س}}\, دس$

$\int \frac{ص^7}{\cancel{\sqrt{س}}} \times 2\cancel{\sqrt{س}}\, دص$

$\int 2ص^7\, دص = 2\frac{ص^8}{8} + جـ$

$\frac{1}{4}(5+\sqrt{س})^8 + جـ$

ح) $\int_1^{هـ^3} \frac{1}{س\sqrt{1+\text{لو}_{هـ} س}}\, دس$

$ص = \sqrt{1 + \text{لو}_{هـ} س}$

$ص^2 = 1 + \text{لو}_{هـ} س \Leftarrow 2ص\, دص = \frac{1}{س}\, دس$

$س = 1 \leftarrow ص = \sqrt{1 + \text{لو}_{هـ} 1} = 1 =$

$س = هـ^3 \leftarrow ص = \sqrt{1 + \text{لو}_{هـ} هـ^3} = 1 + 3 = \sqrt{4} = 2$

$\int_1^2 \frac{1}{\cancel{ص} \times \cancel{س}} \times 2 \times \cancel{س} \times \cancel{ص}\, دص$

$\int_1^2 2\, دص = 2(2-1)$

$= 2 \times 1 = 2$

ز) $\int \frac{1}{س^2} \sqrt{\frac{2س+1}{س}}$

الحل

$= \int \frac{1}{س^2} \sqrt{2 + \frac{1}{س}}$

$ص = 2 + \frac{1}{س}$

ط) $\int هـ^{س^3 + 2\text{لو}_{هـ} س}\, دس$

الحل $\int هـ^{س^3} \times هـ^{2\text{لو}_{هـ} س}\, دس$

$= \int هـ^{س^3} \times هـ^{\text{لو}_{هـ} س^2}\, دس$

$= \int هـ^{س^3} \times س^2\, دس \Leftarrow$ يتبع

٠٧٩٥٦٥٦٨٨١ — ٠٧٨٨٦٥٦٠٥٧

$ص = س^{٣} \Leftarrow دص = ٣س^{٢}\, دس$

$\int هـ^{ص} \times \cancel{ص^{٢}} \times \dfrac{دص}{٣\cancel{ص^{٢}}}$

$\dfrac{١}{٣}\int هـ^{ص}\, دص = \dfrac{١}{٣}\, هـ^{ص} + جـ$

$= \dfrac{١}{٣}\, هـ^{س^{٣}} + جـ$

ي) $\int \dfrac{س^{٣}}{(س+١)^{٥}}\, دس$

$= \int \dfrac{س^{٣}}{\dfrac{(س+١)^{٥}}{س^{٥}} \times س^{٥}}\, دس$

$= \int \dfrac{١}{\left(\dfrac{س+١}{س}\right)^{٥} \times س^{٢}}\, دس$

$= \int \dfrac{١}{\left(١+\dfrac{١}{س}\right)^{٥} \times س^{٢}}\, دس$

$ص = ١ + \dfrac{١}{س} \qquad دص = \dfrac{-١}{س^{٢}}\, دس$

$\Leftarrow دس = -س^{٢}\, دص$

$\int \dfrac{١}{ص^{٥} \times \cancel{س^{٢}}} \times -\cancel{س^{٢}} \times دص$

$\int \dfrac{-١}{ص^{٥}}\, دص = -\int ص^{-٥}\, دص$

$= -\dfrac{ص^{-٤}}{-٤} + جـ$

$= \dfrac{١}{٤ص^{٤}} + جـ$

$= \dfrac{١}{٤\left(١+\dfrac{١}{س}\right)^{٤}} + جـ$

ك) $\int \sqrt[٣]{س^{-\frac{٣}{٤}} + ١}\, دس$

الحل

$\int \sqrt[٣]{س^{-\frac{٣}{٤}}\left(١ + \dfrac{١}{س^{-\frac{٣}{٤}}}\right)}$

$\int \sqrt[٣]{\dfrac{١}{س^{\frac{٣}{٤}}}}\ \sqrt[٣]{\left(١ + س^{\frac{٣}{٤}}\right)}\, دس$

$\int \dfrac{١}{س^{\frac{١}{٤}}}\ \sqrt[٣]{\left(١ + س^{\frac{٣}{٤}}\right)}\, دس$

$ص = ١ + س^{\frac{٣}{٤}} \qquad دص = \dfrac{٣}{٤}\, س^{-\frac{١}{٤}}\, دس$

$\int \dfrac{١}{\cancel{س^{\frac{١}{٤}}}}\ \sqrt[٣]{ص} \times \dfrac{٤}{٣}\, \cancel{س^{\frac{١}{٤}}}\, دص$

$\dfrac{٤}{٣}\int ص^{\frac{١}{٣}}\, دص = \dfrac{٤}{٣} \times \dfrac{٣}{٤}\, ص^{\frac{٤}{٣}} + جـ$

$\left(١ + س^{\frac{٣}{٤}}\right)^{\frac{٤}{٣}} + جـ$

ل) $\int جتا^{٣}س\, (١ + جاس)^{٧}\, دس$

$= \int جتاس\, جتا^{٢}س\, (١ + جاس)^{٧}\, دس$

$= \int جتاس\, (١ - جا^{٢}س)(١ + جاس)^{٧}\, دس$

$ص = جاس + ١ \qquad دص = جتاس\, دس$

$جاس = ص - ١$

$\int \cancel{جتاس}\left(١ - (ص-١)^{٢}\right)(ص)^{٧} \times \dfrac{دص}{\cancel{جتاس}}$

$= \int (\cancel{١} - ص^{٢} + ٢ص - \cancel{١})\, ص^{٧}$

$= \int (-ص^{٢} + ٢ص)\, ص^{٧}\, دص$

$= \int (-ص^{٩} + ٢ص^{٨})\, دص$

$= \dfrac{-ص^{١٠}}{١٠} + \dfrac{٢ص^{٩}}{٩} + جـ = \dfrac{-(جاس+١)^{١٠}}{١٠} + \dfrac{٢(جاس+١)^{٩}}{٩}$

2) اذا كان $\int_1^8 ق(س)\,دس = 18$

جد قيمة $\int_1^2 س^2 ق(س^3)\,دس$

ص = $س^3$ ⟸ دص = $3س^2$ دس

س = 1 ⟵ ص = 1

س = 2 ⟵ ص = 8

$\int_1^8 س^2 ق(ص) \times \frac{دص}{3س^2}$

$\frac{1}{3}\int_1^8 ق(ص)\,دص = \frac{1}{3} \times 18 = 6$

3) اذا كان $\int_0^1 ق(س)\,دس = 8$

جد قيمة $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 3\,جتا(2س)\,ق(جا2س)\,دس$

الحل

ص = جا2س ، دص = 2 جتا2س دس

س = 0 ⟸ ص = جا0 = 0

س = $\frac{\pi}{4}$ ⟸ ص = جا$\frac{\pi}{2}$ = 1

$\int 3\,\cancel{جتا2س}\,ق(ص) \times \frac{دص}{2\,\cancel{جتا2س}}$

$\frac{3}{2}\int_0^1 ق(ص)\,دص = \frac{3}{2} \times 8 = 12$

4) جد التكاملات التالية

أ) $\int هـ^{جاس + لوجتاس}\,دس$

الحل

$\int هـ^{جاس} \times جتاس\,دس$

ص = جاس   دص = جتاس دس

$\int هـ^{ص} \times \cancel{جتاس} \times \frac{دص}{\cancel{جتاس}}$

$= هـ^{ص} + ج = هـ^{جاس} + ج$

5) $\int_0^2 \frac{س^3}{\sqrt{(س^2+9)^3}}\,دس$

ص = $س^2 + 9$ دص = 2س دس

⟸ $س^2$ = ص − 9

س = 0 ⟸ ص = 9

س = 2 ⟸ ص = 13

$\int_9^{13} \frac{\cancel{س}^3}{ص^{\frac{3}{2}}} \times \frac{دص}{2\,\cancel{س}}$

$\frac{1}{2}\int_9^{13} \frac{س^2}{ص^{\frac{3}{2}}}\,دص$

$= \frac{1}{2}\int_9^{13} (ص - 9)\,ص^{-\frac{3}{2}}\,دص$

$= \frac{1}{2}\int_9^{13} (-9ص^{-\frac{3}{2}} + ص^{-\frac{1}{2}})\,دص$

$= \frac{1}{2}\left(-9 \times -2ص^{-\frac{1}{2}} + 2ص^{\frac{1}{2}}\right)$

$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{+18}{\sqrt{ص}} + 2\sqrt{ص}\right)\right]_9^{13}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{+18}{\sqrt{13}} + 2\sqrt{13}\right) - \left(\frac{+18}{3} + 2\times3\right)$

ج) $\int \frac{1 - ظا^2 س}{جتا^2 س} \, دس$

الحل

$= \int \left(\frac{1}{جتا^2 س} - \frac{ظا^2 س}{جتا^2 س} \right) دس$

$= \int قا^2 س - قا^2 س \, ظا^2 س \, دس$

$= ظاس - \int قا^2 س \, ظا^2 س \, دس$ تعويض

$ص = ظاس \quad دص = قا^2 س \, دس$

$= ظاس - \int قا^2 ص \, ص^2 \times \frac{دص}{قا^2 س}$

$= ظاس - \frac{ص^3}{3} + جـ$

$= ظاس - \frac{ظا^3 س}{3} + جـ$

هـ) $\int قتا^4 6س \, ظتا^3 6س \, دس$

الحل

$\int قتا^2 6س \, قتا^2 6س \, ظتا^3 6س$

$\int قتا^2 6س \, (1 + ظتا^2 6س) \, ظتا^3 6س$

$ص = ظتا 6س \Leftarrow دص = - قتا^2 6س \times 6$

$\int \cancel{قتا^2 6س} \, (1 + ص^2) \, ص^3 \times \frac{دص}{-6 \cancel{قتا^2 6س}}$

$-\frac{1}{6} \int (1 + ص^2) \, ص^3 \, دص$

$= -\frac{1}{6} \int (ص^3 + ص^5) \, دص$

$= -\frac{1}{6} \left(\frac{ص^4}{4} + \frac{ص^6}{6} \right) + جـ$

$= -\frac{1}{6} \left(\frac{(ظتا 6س)^4}{4} + \frac{(ظتا 6س)^6}{6} \right) + جـ$

د) $\int \frac{جاس \sqrt{جا^2 س + 4}}{قاس} \, دس$

الحل

$\int جاس \times جتاس \sqrt{جا^2 س + 4} \, دس$

$ص = \sqrt{جا^2 س + 4} \Leftarrow ص^2 = جا^2 س + 4$

$2ص \, دص = 2 \, جاس \, جتاس \, دس$

$\int \cancel{جاس \, جتاس} \times ص \times \frac{ص \, دص}{\cancel{جاس \, جتاس}}$

$\int ص^2 \, دص = \frac{ص}{} + جـ$

$\frac{1}{} \left(\sqrt{جا^2 س + 4} \right) + جـ$

و) $\int جتا^4 س \, دس$

الحل

$\int (جتا^2 س)^2 \, دس$

$= \int \left(\frac{1}{2} (1 + جتا 2س) \right)^2 دس$

$= \frac{1}{4} \int (1 + 2 جتا 2س + جتا^2 2س) \, دس$

$= \frac{1}{4} \left(1 + 2 جتا 2س + \frac{1}{2} (1 + جتا 4س) \right)$

$= \frac{1}{4} \left(س + \frac{2 جا 2س}{2} + \frac{1}{2} \left(س + \frac{جا 4س}{4} \right) \right)$

ز) $$\int \frac{\text{جا}٢\text{س}}{(١+\text{جتا}^{٢}\text{س})^{٥}}\,\text{دس}$$

$$\text{ص} = ١ + \text{جتا}^{٢}\text{س}$$

$$\text{دص} = ٢\,\text{جتاس} \times -\text{جاس}$$

$$\int \frac{\cancel{\text{جا}٢\text{س}}}{\text{ص}^{٥}} \times \frac{\text{دص}}{\cancel{-\text{جا}٢\text{س}}}$$

$$-\int \text{ص}^{-٥}\,\text{دص} = -\frac{\text{ص}^{-٤}}{-٤} + \text{جـ}$$

$$= \frac{١}{٤\,\text{ص}^{٤}} + \text{جـ}$$

$$= \frac{١}{٤\,(١+\text{جتا}^{٢}\text{س})^{٤}} + \text{جـ}$$

ح) $$\int \text{جا}٢\text{س} \times \text{هـ}^{\text{جتا}^{٢}\text{س}}\,\text{دس}$$

الحل

$$\text{ص} = \text{جتا}^{٢}\text{س} \Leftarrow \text{دص} = -\text{جا}٢\text{س} \times ٢\,\text{دس}$$

$$\int \cancel{\text{جا}٢\text{س}} \times \text{هـ}^{\text{ص}} \times \frac{\text{دص}}{-٢\,\cancel{\text{جا}٢\text{س}}}$$

$$-\frac{١}{٢}\int \text{هـ}^{\text{ص}} \times \text{دص} = -\frac{١}{٢}\,\text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ}$$

$$= -\frac{١}{٢}\,\text{هـ}^{\text{جتا}^{٢}\text{س}} + \text{جـ}$$

ط) $$\int \frac{\sqrt[٣]{\text{س}}}{٥ - \text{س}\sqrt[٣]{\text{س}}}\,\text{دس}$$

الحل

$$\int \frac{\sqrt[٣]{\text{س}}}{٥ - \text{س}^{\frac{٤}{٣}}}\,\text{دس}$$

$$\Leftarrow \text{ص} = ٥ - \text{س}^{\frac{٤}{٣}}$$

$$\text{دص} = -\frac{٤}{٣}\,\text{س}^{\frac{١}{٣}}\,\text{دس}$$

$$\int \frac{\cancel{\sqrt[٣]{\text{س}}}}{\text{ص}} \times \frac{\text{دص}}{-\frac{٤}{٣}\cancel{\sqrt[٣]{\text{س}}}}$$

$$-\frac{٣}{٤}\int \frac{١}{\text{ص}}\,\text{دص}$$

$$= -\frac{٣}{٤}\,\text{لو}|\text{ص}| + \text{جـ}$$

$$= -\frac{٣}{٤}\,\text{لو}|٥ - \text{س}^{\frac{٤}{٣}}| + \text{جـ}$$

ي) $$\int \text{قا}^{٤}\text{س}\,\text{دس}$$

الحل

$$\int \text{قا}^{٢}\text{س}\ \text{قا}^{٢}\text{س}\,\text{دس}$$

$$= \int \text{قا}^{٢}\text{س}\,(١ + \text{ظا}^{٢}\text{س})\,\text{دس}$$

$$\text{ص} = \text{ظاس} \rightarrow \text{دص} = \text{قا}^{٢}\text{س}\,\text{دس}$$

$$= \int \cancel{\text{قا}^{٢}\text{س}}\,(١+\text{ص}^{٢}) \times \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{قا}^{٢}\text{س}}}$$

$$= \int (١+\text{ص}^{٢})\,\text{دص}$$

$$= \left(\text{ص} + \frac{\text{ص}^{٣}}{٣}\right) + \text{جـ}$$

$$\text{ظاس} + \frac{(\text{ظاس})^{٣}}{٣} + \text{جـ}$$

(ك) $\int \frac{1}{\sqrt{س}\,(2+\sqrt{س})}\, دس$

$ص = 2 + \sqrt{س}$

$دص = \frac{1}{2\sqrt{س}}\, دس$

$\int \frac{1}{\cancel{\sqrt{س}} \times ص} \times 2\cancel{\sqrt{س}}\, دص$

$2\int \frac{1}{ص}\, دص = 2\,لو|ص| + ج$

$= 2\,لو|2+\sqrt{س}| + ج$

(ل) $\int \frac{\sqrt[3]{ظتاس+3}}{2-2جتا^2س}\, دس$

$\int \frac{\sqrt[3]{ظتاس+3}}{2(1-جتا^2س)}\, دس = \int \frac{\sqrt[3]{ظتاس+3}}{2جا^2س}\, دس$

$= \frac{1}{2}\int \sqrt[3]{ظتاس+3}\; قتا^2س\, دس$

$ص = ظتاس + 3$

$دص = -قتا^2س\, دس$

$= \frac{1}{2}\int \sqrt[3]{ص} \times \cancel{قتا^2س} \times \frac{دص}{-\cancel{قتا^2س}}$

$= -\frac{1}{2}\int ص^{\frac{1}{3}}\, دص$

$= -\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}\, ص^{\frac{4}{3}} + ج$

$= \frac{-3}{8}\,(ظتاس+3)^{\frac{4}{3}} + ج$

(م) $\int جاس\,(1 + جتا2س)^5\, دس$

$\int جاس\,(\cancel{1} + 2جتا^2س \cancel{-1})^5\, دس$

$\int جاس\,(2جتا^2س)^5\, دس$

$\int جاس \times 32 \times جتا^{10}س\, دس$

$ص = جتاس \leftarrow دص = -جاس\, دس$

$\int \cancel{جاس} \times 32 \times ص^{10} \times \frac{دص}{-\cancel{جاس}}$

$-32\int ص^{10}\, دص = -32\,\frac{ص^{11}}{11} + ج$

$= -32\,\frac{(جتاس)^{11}}{11} + ج$

(ن) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{جتاس - جتا^3س}\; دس$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{جتاس\,(1-جتا^2س)}\; دس$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{جتاس\, جا^2س}\; دس$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{جتاس}\; |جاس|\; دس$

$جاس > 0$ في الفترة $[0 ، \frac{\pi}{2}]$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{جتاس} \times جاس\, دس$

$ص = \sqrt{جتاس} \leftarrow ص^2 = جتاس$

$2ص\, دص = -جاس\, دس$

$س = 0 \leftarrow ص = \sqrt{جتا0} = \sqrt{1} = 1$

$س = \frac{\pi}{2} \leftarrow ص = \sqrt{جتا\frac{\pi}{2}} = \sqrt{0} = 0$

يتبع ←

$$\int_{1}^{0} ص \times \cancel{جاس} \times \frac{2ص}{-\cancel{جاس}}\, دص$$

$$-\int_{1}^{0} 2ص^2\, دص = \int_{0}^{1} 2ص^2\, دص$$

$$\frac{2ص^3}{3}\Big]_{0}^{1} = \frac{2}{3}$$

(٣) $$\int \frac{1}{س^2}\sqrt{\frac{2س+1}{س}}\, دس$$

$$= \int \frac{1}{س^2}\sqrt{2+\frac{1}{س}}\, دس$$

$$ص = 2+\frac{1}{س} \leftarrow دص = \frac{-1}{س^2}\, دس$$

$$\int \frac{1}{\cancel{س^2}} \sqrt{ص} \times -\cancel{س^2}\, دص$$

$$-\int \sqrt{ص}\, دص = -\int ص^{\frac{1}{2}}\, دص$$

$$= -\frac{2}{3}ص^{\frac{3}{2}} + جـ$$

$$= -\frac{2}{3}\left(2+\frac{1}{س}\right)^{\frac{3}{2}} + جـ$$

(٤) $$\int جتا2س\,(جاس - جتاس)^8\, دس$$

الحل

$$\int (جتا^2س - جا^2س)(جاس - جتاس)^8\, دس$$

$$\int (جتاس + جاس)(جتاس - جاس)(جاس - جتاس)^8$$

$$-\int (جتاس + جاس)(جاس - جتاس)^9\, دس$$

$$ص = جاس - جتاس$$

$$دص = (جتاس + جاس)\, دس$$

$$\int -\cancel{(جتاس + جاس)}\, ص^9 \times \frac{دص}{\cancel{(جتاس + جاس)}}$$

$$\int -ص^9\, دص = -\frac{ص^{10}}{10} + جـ$$

$$= -\frac{(جاس - جتاس)^{10}}{10} + جـ$$

(٥) اثبت ان

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{(س-1)^ن}{س^{ن+2}}\, دس = \begin{cases} \frac{-1}{ن+1} & \text{ن عدد فردي} \\ \frac{1}{ن+1} & \text{ن عدد زوجي} \end{cases}$$

الحل

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{(س-1)^ن}{س^ن} \times \frac{1}{س^2} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{س-1}{س}\right)^ن \times \frac{1}{س^2}$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(1-\frac{1}{س}\right)^ن \times \frac{1}{س^2}$$

$$ص = 1 - \frac{1}{س} ،\ دص = \frac{1}{س^2}\, دس$$

$$س = \frac{1}{2} \leftarrow ص = -1$$

$$س = 1 \leftarrow ص = 0$$

$$\int_{-1}^{0} ص^ن \times \frac{1}{\cancel{س^2}} \times \cancel{س^2}\, دص$$

$$\frac{ص^{ن+1}}{ن+1}\Big]_{-1}^{0} = -\left(\frac{(-1)^{ن+1}}{ن+1}\right)$$

يتبع ←

عندما ن عدد فردي ⟸ ن + ١ زوجي

$$\frac{-\left((-1)^{\text{زوجي}}\right)}{ن+1} = \frac{-1}{ن+1}$$

عندما ن عدد زوجي ⟸ ن + ١ فردي

$$\frac{-(-1)^{\text{فردي}}}{ن+1} = \frac{+1}{ن+1}$$

٦) اكتب العوض المناسب لايجاد كل من التكاملات الاتية بطريقة التكامل بالتعويض (دون اجراء التكامل)

أ) $\int$ جتا^{7} س حا^{7} س دس

$= \int$ جتا^{7} س حا^{6} س حا س

ص = جتا س

ب) $\int$ جتا^{5} س حا^{7} س دس

ص = جتا س أو ص = حا س

جـ) $\int$ ظا^{5} س قا^{4} س دس

ص = ظا س

د) $\int$ ظا^{3} س قا^{5} س دس

ص = قا س

هـ) $\int$ ظتا^{6} س قتا^{4} س دس

ص = ظتا س

و) $\int$ ظتا^{7} س قتا^{4} س دس

$\int$ ظتا س قتا س ظتا^{6} س قتا^{3} س

ص = قتا س

اسئلة الوزارة

وزارة (٢٠٠٨) شتوية

$\int_{0}^{\pi} (1 + جا س)\, جتا^2 س \; دس$

$= \int_{0}^{\pi} (جتا^2 س + جا س \, جتا^2 س) \, دس$

$= \int_{0}^{\pi} جتا^2 س + \int_{0}^{\pi} ٢ جا س \, جتا س \, جتا س$

$= \int_{0}^{\pi} \frac{1}{2}(1 + جتا ٢س) + \int_{0}^{\pi} ٢ جا س \, جتا^3 س$

$\frac{1}{2}\left[س + \frac{جا ٢س}{2} \right]_{0}^{\pi}$ $ص = جتا س$

$دص = - جا س \, دس$

$س = 0 \leftarrow ص = جتا 0 = 1$

$س = \pi \leftarrow ص = جتا \pi = -1$

$\frac{1}{2}(\pi + 0) - (0)$

$\frac{\pi}{2} + \int_{1}^{-1} ٢ جا س \, ص^3 \times \frac{دص}{\cancel{-جا س}}$

$\frac{\pi}{2} + -2 \left[\frac{ص^4}{4} \right]_{1}^{-1}$

$\frac{\pi}{2} - 2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right)$

$\frac{\pi}{2}$

وزارة (٢٠١٠) صيفية

اوجد $\int \frac{دس}{\sqrt{س}\,(1+\sqrt{س})^4}$

$ص = 1 + \sqrt{س}$ $دص = \frac{1}{2\sqrt{س}} دس$

$\int \frac{1}{\cancel{\sqrt{س}}\, ص^4} \times 2\cancel{\sqrt{س}} \, دص$

$\int 2 ص^{-4} \, دص = 2 \frac{ص^{-3}}{-3} + جـ$

$\frac{-2}{3 ص^3} + جـ$

$= \frac{-2}{3(1+\sqrt{س})^3}$

وزارة (٢٠١١) شتوية

اثبت ان $\int \frac{ظتا(لو_{هـ} س)}{س} دس$

$= لو|جا لو_{هـ} س| + جـ$

الحل $ص = لو_{هـ} س$ $دص = \frac{1}{س} دس$

$\int \frac{ظتا ص}{\cancel{س}} \times \cancel{س} \, دص$

$\int \frac{جتا ص}{جا ص} دص = لو|جا ص| + جـ$

$= لو|جا(لو_{هـ} س)| + جـ$

وزارة (٢٠١٢) شتوية

① $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{(1+س)^{5}}{س^{7}}\, دس$

الحل

$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{(1+س)^{5}}{س^{5}} \times \frac{1}{س^{2}}\, دس$

$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{1+س}{س}\right)^{5} \times \frac{1}{س^{2}}\, دس$

$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{1}{س}+1\right)^{5} \times \frac{1}{س^{2}}\, دس$

$ص = \frac{1}{س} + 1 \quad دص = \frac{-1}{س^{2}}\, دس$

$س = \frac{1}{2} \leftarrow ص = 3$

$س = 1 \leftarrow ص = 2$

$\int_{3}^{1} ص^{5} \times \frac{1}{\cancel{س^{2}}} \times -\cancel{س^{2}}\, دص$

$-\int_{3}^{1} ص^{5}\, دص = \int_{1}^{3} ص^{5}\, دص$

$= \left[\frac{ص^{6}}{6}\right]_{1}^{3} = \frac{3^{6} - 1^{6}}{6}$

$= \frac{665}{3}$

② اذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للتكامل على الفترة [١، ٢] وكان ق(١) = ١ ، ق(٢) = ٤ فان قيمة $\int_{1}^{2} 3ق(س)\, ق'(س)\sqrt{ق(س)}\, دس$

أ) ١٤ ب) $\frac{63}{2}$ ج) ٧ د) $\frac{14}{3}$

الحل

$ص = \sqrt{ق(س)} \Leftarrow ص^{2} = ق(س)$

$2ص\, دص = ق'(س)\, دس$

$س = 1 \longrightarrow ص = \sqrt{ق(1)} = 1$

$س = 2 \leftarrow ص = \sqrt{ق(2)} = \sqrt{4} = 2$

$\Leftarrow \int_{1}^{2} 3ص^{2} \times \cancel{ق'(س)} \times ص \times \frac{2ص}{\cancel{ق'(س)}} \times دص$

$6\int_{1}^{2} ص^{2}\, دص = 6 \times \left[\frac{ص^{3}}{3}\right]_{1}^{2}$

$= 6\left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) = 6 \times \frac{7}{3} = 14$

وزارة (٢٠١٣) شتوية

① $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} جا2س\, جتاس\, دس$

الحل

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2جاس\, جتاس\, جتاس\, دس$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2جاس\, جتا^{2}س\, دس$

$ص = جتاس \quad دص = -جاس\, دس$

$س = \frac{\pi}{4} \leftarrow ص = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$س = \frac{\pi}{2} \leftarrow ص = جتا\frac{\pi}{2} = 0$

$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} 2\cancel{جاس}\, ص^{2} \times \frac{دص}{-\cancel{جاس}}$

$-\left[\frac{2ص^{3}}{3}\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} = -\frac{2}{3}\left(0 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$

$= \frac{2}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}}$

② إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة ص عند النقطة (س، ص) يساوي $\frac{1}{س\sqrt{3+لو_{هـ} س}}$ ، س > ٠

جد قاعدة العلاقة ص علماً بأن منحناها يمر بالنقطة (هـ، ٤)، هـ العدد النيبيري

الحل

$ق'(س) = \frac{1}{س\sqrt{3+لو_{هـ} س}}$

$\int ق'(س) دس = \int \frac{1}{س\sqrt{3+لو_{هـ} س}}$

$ق(س) = \int \frac{1}{س\sqrt{3+لو_{هـ} س}}$

$ص = \sqrt{3+لو_{هـ} س} \Leftarrow ص^2 = 3+لو_{هـ} س$

$2ص دص = \frac{1}{س} دس$

$= \int \frac{1}{\cancel{س}ص} \times 2\cancel{س}ص دص$

$\int 2 دص = 2ص + جـ$

$ق(س) = 2\sqrt{3+لو_{هـ} س} + جـ$

$ق(هـ) = 2\sqrt{3+1} + جـ = 4$

$4 + جـ = 4$ $\boxed{جـ = 0}$

$ق(س) = 2\sqrt{3+لو_{هـ} س}$

وزارة (٢٠١٣) صيفي

$\int قا^4 3س \, ظا^3(3س)$

الحل

$\int قا^2 3س \, قا^2 3س \, ظا^3 3س$

$\int قا^2 3س (1+ظا^2 3س) ظا^3 3س دس$

$ص = ظا 3س \Leftarrow دص = 3 قا^2 3س دس$

$\int \cancel{قا^2 3س}(1+ص^2) ص^3 \frac{دص}{3\cancel{قا^2 3س}}$

$\frac{1}{3}\int (ص^3 + ص^5) دص$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{ص^4}{4} + \frac{ص^6}{6}\right) + جـ$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{ظا^4 3س}{4} + \frac{ظا^6 3س}{6}\right) + جـ$

وزارة (٢٠١٤) شتوية

$\int ظتا س \, لو_{هـ} جاس دس$

$ص = لو_{هـ} جاس$ $دص = \frac{جتاس}{جاس} دس$

$\int \cancel{ظتاس} \times ص \times \frac{دص}{\cancel{ظتاس}}$

$\int ص دص = \frac{ص^2}{2} + جـ$

$= \frac{1}{2}(لو_{هـ} جاس)^2 + جـ$

وزارة (٢٠١٤) صيفية

(١) اوجد $\int \frac{هـ^{س}}{هـ^{س} + هـ^{-س}}\, دس$

$ص = هـ^{س} \quad دص = هـ^{س}\, دس$

$\int \frac{\cancel{ص}}{ص + \frac{1}{ص}} \cdot \frac{دص}{\cancel{هـ^{س}}}$

$\int \frac{1}{ص + \frac{1}{ص}}\, دص = \int \frac{ص}{ص^2 + 1}$

$\frac{1}{2}\int \frac{2ص}{ص^2+1}\, دص = \frac{1}{2} لو|ص^2+1|$

$= \frac{1}{2} لو|هـ^{2س} + 1| + جـ$

(٢) $\int_0^1 \frac{س}{(س+1) - \sqrt{س+1}}\, دس$

$ص = س + 1 \quad دص = دس$

$س = 0 \leftarrow ص = 1$

$س = 1 \leftarrow ص = 2$

$\int_1^2 \frac{ص - 1}{ص - \sqrt{ص}}\, دص$

$\int_1^2 \frac{\cancel{(\sqrt{ص}-1)}(\sqrt{ص}+1)}{\sqrt{ص}\,\cancel{(\sqrt{ص}-1)}}$

$= \int_1^2 \frac{(\sqrt{ص}+1)}{\sqrt{ص}}\, دص$

$\int_1^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{ص}}\right) دص$

$\int_1^2 \left(1 + ص^{-\frac{1}{2}}\right) دص$

$\left[ص + 2ص^{\frac{1}{2}}\right]_1^2$

$\left((2 + 2\sqrt{2}) - (1 + 2)\right)$

$(2 + 2\sqrt{2} - 3)$

$(2\sqrt{2} - 1) = 2\sqrt{2} - 1$

وزارة (٢٠١٥) صيفية

$\int_0^4 \frac{س^3}{\sqrt{(س^2+9)^3}}$

الحل

$ص = س^2 + 9 \quad دص = 2س\, دس$

$س = 0 \leftarrow ص = 9 \quad ، \quad س = 4 \leftarrow ص = 25$

$\int_9^{25} \frac{س^{\cancel{3}}}{ص^{\frac{3}{2}}} \times \frac{دص}{2\cancel{س}}$

$\frac{1}{2}\int_9^{25} \frac{س^2}{ص^{\frac{3}{2}}}\, دص \quad س^2 = ص - 9$

$\frac{1}{2}\int_9^{25} \frac{ص - 9}{ص^{\frac{3}{2}}}\, دص = \frac{1}{2}\int_9^{25} (ص - 9) \times ص^{-\frac{3}{2}}$

$\frac{1}{2}\int_9^{25} \left(ص^{-\frac{1}{2}} - 9ص^{-\frac{3}{2}}\right) دص$

$= \frac{1}{2}\left[2ص^{\frac{1}{2}} - \frac{9ص^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right]_9^{25}$

$= \frac{1}{2}\left(2\sqrt{25} + 18 \times \frac{1}{\sqrt{25}}\right) - \frac{1}{2}\left(2\sqrt{9} + 18 \times \frac{1}{\sqrt{9}}\right)$

وزارة (٢٠١٦) شتوية

① $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sqrt{جتا^2 س + \frac{1}{2} جا ٢س \, جتا س}$

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sqrt{جتا^2 س + \frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{2} جا س \, جتا س \, جتا س}$

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sqrt{جتا^2 س + جا س \, جتا^2 س}$

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sqrt{جتا^2 س (١ + جا س)}$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} |جتا س| \sqrt{١ + جا س} \, ءس$

$|جتا س|$: جتا س على $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ ، $-$جتا س على $[\frac{\pi}{2}, \pi]$

$ص = ١ + جا س \leftarrow ءص = جتا س \, ءس$

$س = \frac{\pi}{4} \leftarrow ص = ١ + \frac{1}{\sqrt{2}}$

$س = \frac{\pi}{2} \leftarrow ص = ٢$

$س = \pi \leftarrow ص = ١$

$\int_{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}^{2} جتا س \times \sqrt{ص} \times \frac{ءص}{جتا س} + \int_{2}^{1} -جتا س \times \sqrt{ص} \times \frac{ءص}{جتا س}$

$\int_{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}^{2} ص^{\frac{1}{2}} ءص + \int_{2}^{1} -ص^{\frac{1}{2}} ءص$

$\int_{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}^{2} ص^{\frac{1}{2}} + \int_{1}^{2} ص^{\frac{1}{2}} ءص = \int_{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}^{2} ص^{\frac{1}{2}} ءص$

$= \frac{2}{3} ص^{\frac{3}{2}} \Big]_{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}^{2} = \frac{2}{3}\left((2)^{\frac{3}{2}} - (1+\frac{1}{\sqrt{2}})^{\frac{3}{2}} \right)$

② إذا كان $\int_{-1}^{2} (٣ ق(س) + ٢س - ٤) ءس = ٣$

$\int_{3}^{1} (ق(س+١) - ٣س^2) ءس = ٢٧$

جد $\int_{-1}^{4} ق(س) ءس$

الحل

$٣\int_{-1}^{2} ق(س) + \int_{-1}^{2} (٢س - ٤) ءس = ٣$

$٣\int_{-1}^{2} ق(س) + س^2 - ٤س \Big]_{-1}^{2} = ٣$

$٣\int_{-1}^{2} ق(س) + (٤ - ٨) - (١ + ٤) = ٣$

$٣\int_{-1}^{2} ق(س) = ١٢ \Leftarrow \int_{-1}^{2} ق(س) = \frac{١٢}{٣} = ٤$

$\int_{3}^{1} ق(س+١) - \int_{3}^{1} ٣س^2 = ٢٧$

$\int_{3}^{1} ق(س+١) - س^3 \Big]_{3}^{1} = ٢٧$

$\int_{3}^{1} ق(س+١) - (١ - ٢٧) = ٢٧$

$\int_{3}^{1} ق(س+١) ءس = ٢٧ - ٢٦ = ١$

$ص = س + ١ \leftarrow ءص = ءس$

$س = ٣ \leftarrow ص = ٤$ ، $س = ١ \leftarrow ص = ٢$

$\int_{4}^{2} ق(ص) ءص = ١$

المطلوب

$\int_{-1}^{4} ق(س) ءس = \int_{-1}^{2} ق(س) ءس + \int_{2}^{4} ق(س) ءس$

$= ٤ - ١ = ٣$

وزارة (٢٠١٦) صيفية

① اذا كان $\int_{0}^{3} ق(س)\,دس = ٤$

$\int_{0}^{3} أ\,ق(٣-س) + ٦س + ١\,دس = ٤٢$

جد أ

الحل

$أ\int_{0}^{3} ق(٣-س)\,دس + \int_{0}^{3} (٦س+١)\,دس = ٤٢$

$أ\int_{0}^{3} ق(٣-س)\,دس + [٣س^2 + س]_{0}^{3} = ٤٢$

$أ\int_{0}^{3} ق(٣-س)\,دس + ٣٠ = ٤٢$

$أ\int_{0}^{3} ق(٣-س)\,دس = ١٢$

$\int_{0}^{3} ق(٣-س)\,دس = \frac{١٢}{أ}$

ص = ٣ ـ س   دص = ـ دس

س = ٠ ← ص = ٣

س = ٣ ← ص = ٠

$\int_{3}^{0} ق(ص) \times -دص = \frac{١٢}{أ}$

$\int_{0}^{3} ق(ص)\,دص = \frac{١٢}{أ}$

$٤ = \frac{١٢}{أ}$

$٤أ = ١٢$ $أ = ٣$

② $\int \frac{لو_{هـ} ظاس}{جا٢س}$

الحل

$\int \frac{لو_{هـ} ظاس}{٢جاس\,جتاس}\,دس$

$ص = لو_{هـ} ظاس \leftarrow دص = \frac{قا^2س}{ظاس}\,دس$

$دس = \frac{ظاس}{قا^2س}\,دص$

$دس = \frac{جاس}{جتاس} \times \frac{جتا^2س}{١}\,دص$

$= جاس\,جتاس\,دص$

$\int \frac{ص}{٢\cancel{جاس\,جتاس}} \times \cancel{جاس\,جتاس}\,دص$

$\frac{١}{٢}\int ص\,دص = \frac{١}{٢}\,\frac{ص^2}{٢} + جـ$

$= \frac{١}{٤}ص^2 + جـ = \frac{١}{٤}(لو_{هـ} ظاس)^2 + جـ$

وزارة (٢٠١٧) شتوية

$\int_{1}^{2} س^4 \sqrt{\left(\frac{٢-س}{س^2}\right)^3}$

$= \int_{1}^{2} \frac{س^4\sqrt{(٢-س)^3}}{\sqrt{س^6}}$

$= \int_{1}^{2} \frac{س^4}{|س^3|}\sqrt{(٢-س)^3}\,دس$

موجبة $س^3$ $س^3$ | $-س^3$ (٠)

يتبع ←

$\int_1^2 \frac{س^4}{س^3}\sqrt{(2-س)^3}$

$= \int_1^2 س\sqrt{(2-س)^3} = \int_1^2 س\,(2-س)^{\frac{3}{2}}$

$ص = 2 - س \qquad دص = -دس$

$س = 1 \leftarrow ص = 1$

$س = 2 \leftarrow ص = 0$

$\boxed{س = 2 - ص}$

$\int_1^0 (2-ص)\,ص^{\frac{3}{2}} \times -دص$

$= \int_0^1 2ص^{\frac{3}{2}} - ص^{\frac{5}{2}}\,دص$

$= \left[2 \times \frac{2}{5}ص^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{7}ص^{\frac{7}{2}}\right]_0^1$

$= \left(\frac{4}{5} - \frac{2}{7}\right) = \frac{28-10}{35} = \frac{18}{35}$

وزارة (٢٠١٧) صيفية

① $\int \frac{س^2}{س^6 + س^3}\,دس \qquad س \neq 0$

$\int \frac{س^2}{س^2(س^4+س)}\,دس$

$\int \frac{1}{س^4+س}\,دس = \int \frac{1}{س^4\left(1+\frac{1}{س^3}\right)}\,دس$

$ص = 1 + \frac{1}{س^3}$

$دص = \frac{-1\times 3س^2}{س^6} = \frac{-3}{س^4}\,دس$

$= \int \frac{1}{س^4\,ص} \times دص \times \frac{س^4}{-3}$

$= -\frac{1}{3}\int \frac{1}{ص}\,دص = -\frac{1}{3}\,لو|ص| + ج$

$= -\frac{1}{3}\,لو\left|1 + \frac{1}{س^3}\right| + ج$

② $\int_1^3 \frac{(س^2 - 6س + 9)^{\frac{7}{2}}}{س^9}\,دس$

اكمل

$\int_1^3 \frac{\left((س-3)^2\right)^{\frac{7}{2}}}{س^9} = \int_1^3 \frac{|س-3|^7}{س^9}$

$س - 3 = 0 \qquad س = 3$

$3-س \quad | \quad س-3$ (3)

$= \int_1^3 \frac{(3-س)^7}{س^9}$

$= \int_1^3 \frac{(3-س)^7}{س^7} \times \frac{1}{س^2}\,دس$

$= \int_1^3 \left(\frac{3-س}{س}\right)^7 \times \frac{1}{س^2}\,دص$

$= \int_1^3 \left(\frac{3}{س} - 1\right)^7 \times \frac{1}{س^2}\,دس$

$ص = \frac{3}{س} - 1 \qquad دص = \frac{-3}{س^2}\,دس$

$س = 1 \leftarrow ص = 2$

$س = 3 \leftarrow ص = 0$

$\int_2^0 ص^7 \times \frac{1}{س^2} \times \frac{س^2}{-3}\,دص$

$-\frac{1}{3}\int_2^0 ص^7\,دص = -\frac{1}{3}\left[\frac{ص^8}{8}\right]_2^0$

$-\frac{1}{3}\left(0 - \frac{256}{8}\right) = \frac{256}{24} = \frac{32}{3}$

وزارة (٢٠١٨) شتوية

(1) قيمة $\int_{هـ}^{هـ^{2}} \frac{1}{س\,لوس}\, دس$ تساوي

أ) 1 ب) $لو ٢$ ج) $٤ لو_{هـ}$ د) $\frac{1}{2}لو_{هـ}$

$ص = لوس$ ، $دص = \frac{1}{س} دس$

$س = هـ \leftarrow ص = 1$

$س = هـ^{2} \leftarrow ص = 2$

$\int_{1}^{2} \frac{1}{\cancel{س}\,ص} \times \cancel{س}\, دص$

$= لو|ص| \Big]_{1}^{2} = لو|2| - لو 1$

$= لو_{هـ} 2$ (ب)

(2) جد قيمة $\int_{0}^{\frac{\pi}{8}} ظا^{4}(2س)\, دس$

الحل

$\int_{0}^{\frac{\pi}{8}} ظا^{2}(2س)\, ظا^{2}(2س)\, دس$

$\int_{0}^{\frac{\pi}{8}} ظا^{2}(2س)\,(قا^{2} 2س - 1)\, دس$

$\int_{0}^{\frac{\pi}{8}} ظا^{2}(2س)\, قا^{2}(2س) - \int_{0}^{\frac{\pi}{8}} ظا^{2}(2س)$

$\int_{0}^{\frac{\pi}{8}} ظا^{2} 2س\, قا^{2}(2س) - \int_{0}^{\frac{\pi}{8}} (قا^{2} س - 1)\, دس$

$\int_{0}^{\frac{\pi}{8}} ظا^{2}(2س)\, قا^{2}(2س)\, دس =$

$ص = ظا 2س$ ، $دص = 2\, قا^{2} 2س\, دس$

$س = 0 \leftarrow ص = 0$

$س = \frac{\pi}{8} \leftarrow ص = 1$

$\int_{0}^{1} ص^{2} \times \cancel{قا^{2}(2س)} \times \frac{دص}{2\,\cancel{قا^{2} 2س}}$

$\frac{1}{2}\int_{0}^{1} ص^{2}\, دص = \frac{1}{2} \times \frac{ص^{3}}{3}\Big]_{0}^{1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)$

$= \frac{1}{6}$

الجواب

$\frac{1}{6} - \int_{0}^{\frac{\pi}{8}} (قا^{2} 2س - 1)\, دس$

$\frac{1}{6} - \frac{ظا 2س}{2} - س \Big]_{0}^{\frac{\pi}{8}}$

$\frac{1}{6} - \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}\right)$

$= \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = -\frac{1}{3} + \frac{\pi}{8}$

ورقة عمل

① أوجد قيمة

$\int_{أ}^{ب} ق'(هـ(س)) \times هـ'(س) \, دس$

② إذا كان ق(٩) = ٨ ، ق(٤) = ٣

فأوجد قيمة $\int_{2}^{3} س \, ق'(س^2) \, دس$

③ إذا كان $\int_{1}^{جـ} ق(س-1) \, دس = \int_{-3}^{4} ق(س+3) \, دس$

فإن قيمة جـ =

أ) ٦ ب) ٨ جـ) ٩ د) ١٠

④ إذا كان $\int_{-1}^{2} ق(س+1) \, دس = -5$

$\int_{0}^{2} 2ق(س) \, دس = -4$ فإن $\int_{2}^{3} ق(س) \, دس =$

أ) ٧ ب) ٣ جـ) -٧ د) -٣

⑤ أوجد $\int هـ^{س+3هـ^{س}} \, دس$

⑥ أوجد $\int \frac{1}{جتا^2 \sqrt{ظا س - 1}}$

⑦ أوجد $\int هـ^{2س} جا(هـ^{2س-1}) \, دس$

⑧ أوجد $\int \frac{\sqrt[3]{س}}{6 - س\sqrt[3]{س}} \, دس$

⑨ $\int \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{س}}} \, دس$

⑩ $\int \sqrt{\frac{1+\sqrt{س}}{س}} \, دس$

⑪ $\int \frac{\sqrt{لو_{هـ} س}}{س} \, دس$

⑫ إذا كان $\int_{1}^{5} ق(س) \, دس = 4$

فأوجد $\int_{0}^{4} \left(ق(س+1) - \sqrt{س}\right) دس$

⑬ أوجد $\int_{1}^{2} \frac{س^2+1}{س^3+3س} \, دس$

⑭ $\int \frac{جتا\sqrt{1+س}}{\sqrt{1+س}}$

(١٥) $\int_{-\sqrt{5}}^{1} \frac{|س - 1|}{\sqrt{9 - س^2}} \, دس$

(١٦) $\int \left(1 + \sqrt{2س - 1}\right)^5 \, دس$

(١٧) اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) هو ٢ جتاس جاس وكان منحنى ق يمر بالنقطة (٠، ٢) جد قاعدة الاقتران ق

(١٨) جد $\int (س + 2)(س - 1)^7 \, دس$

(١٩) اوجد $\int \frac{(س + 1)^5}{س^7} \, دس$

(٢٠) اذا كان $ق'(س) = ق(س) \neq$ صفر فاوجد $\int (ق(س))^ن \, دس$

(٢١) اثبت أن
$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} جا^ن س \, دس = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} جتا^ن س \, دس$

مساعده $جا^ن س = جتا^ن\left(\frac{\pi}{2} - س\right)$

(٢٢) اوجد $\int جا^ن س \; قا^{ن+2} س \, دس$

(٢٣) اثبت ان
$\int_{أ}^{2أ} ق(س) \, دس = \int_{0}^{أ} ق(2أ - س) \, دس$

(٢٤) اذا كان $\int_{10}^{2} ق(س) \, دس = 6$
جد $\int_{1}^{3} \left(س \, ق(س^2 + 1) + 4س\right) دس$

(٢٥) اوجد $\int \frac{\left(س\left(1 + \frac{1}{س}\right)\right)^5}{س^7} \, دس$

(٢٦) $\int \sqrt[3]{س^5 - س^3} \, دس$

(٢٧) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{جاس \, جتاس}{\sqrt{1 + جا^2 س}} \, دس$

(٢٨) $\int \frac{1}{س (لو_هـ س)^2} \, دس$

(٢٩) $\int (س - 3) \, هـ^{س^2 - 6س} \, دس$

(٣٠) $\int \frac{\sqrt{س^2 + س^4}}{س^5}$

(٣١) $\int \frac{س^2 + 3}{(س^2 - 3)^2}$