للمرحلة الثانوية

المسك في الـرياضيات

التكامل (علمي)

شرح مفصل للمادة

أسئلة السنوات السابقة

تمارين إضافية

إعداد :

الأستاذ عماد مسك

079 5153 669

برعاية :

#Imad Misk

#imadmisk

* التكامل بالتعويض: نلجأ التكامل بالتعويض عندما نلاحظ مشتقها غير مألوفة (ليس من الدرجة الأولى (غير خطي)) في الزاوية أو الأس أو تحت الجذر أو داخل قوس أو داخل اقتران أو في المقام.

سؤال: جد كلاً من التكاملات التالية:

(١) $\int (\text{٣س}^2+5)(\text{س}^3+\text{٥س})^7 \, \text{دس}$

الحل: نفرض $\text{ص} = \text{س}^3+\text{٥س} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٣س}^2+5 \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{٣س}^2+5}$

$$\Leftarrow \int \cancel{(\text{٣س}^2+5)}\, \text{ص}^7 \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{٣س}^2+5}} = \int \text{ص}^7 \, \text{دص} = \frac{\text{ص}^8}{8} + \text{جـ} = \frac{(\text{س}^3+\text{٥س})^8}{8} + \text{جـ}$$

(٢) $\int \frac{\text{س}^3+5}{\sqrt[3]{\text{س}^4+\text{٢٠س}}} \, \text{دس} = \int (\text{س}^3+5)(\text{س}^4+\text{٢٠س})^{-\frac{1}{3}} \, \text{دس}$

نفرض $\text{ص} = \text{س}^4 + \text{٢٠س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٤س}^3 + 20$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{4(\text{س}^3+5)}$

$$\Leftarrow \int \cancel{(\text{س}^3+5)} (\text{ص})^{-\frac{1}{3}} \frac{\text{دص}}{4\cancel{(\text{س}^3+5)}}$$

$$= \int \frac{\text{ص}^{-\frac{1}{3}}}{4} \, \text{دص} = \frac{1}{4} \times \frac{\text{ص}^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + \text{جـ}$$

$$= \frac{3}{8} \text{ص}^{\frac{2}{3}} + \text{جـ} = \frac{3}{8} (\text{س}^4 + \text{٢٠س})^{\frac{2}{3}} + \text{جـ}$$

(٣) $\int (\text{س}^2+1) \, \text{جتا}(\text{س}^3+\text{٣س}+1) \, \text{دس}$

$\text{ص} = \text{س}^3 + \text{٣س} + 1$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٣س}^2 + 3$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{3(\text{س}^2+1)}$

$$\Leftarrow \int \cancel{(\text{س}^2+1)} \, \text{جتا ص} \frac{\text{دص}}{3\cancel{(\text{س}^2+1)}}$$

$$= \frac{1}{3} \int \text{جتا ص} \, \text{دص} = \frac{1}{3} \text{جا ص} + \text{جـ}$$

$$= \frac{1}{3} \text{جا}(\text{س}^3 + \text{٣س} + 1) + \text{جـ}$$

٤) $\int \frac{\text{س}\ \text{قتا}^2\sqrt{\text{س}^2+1}}{\sqrt{\text{س}^2+1}}\ \text{دس}$

$\Leftarrow \int \frac{\cancel{\text{س}}\ \text{قتا}^2\text{ص}}{\cancel{\sqrt{\text{س}^2+1}}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{\text{س}^2+1}}}{\cancel{\text{س}}}\ \text{دص}$

$= \int \text{قتا}^2\text{ص}\ \text{دص} = -\text{ظتا}\,\text{ص} + \text{جـ}$

$= -\text{ظتا}\sqrt{\text{س}^2+1} + \text{جـ}$

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}^2+1}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\cancel{2}\text{س}}{\cancel{2}\sqrt{\text{س}^2+1}}$

$\text{دس} = \frac{\sqrt{\text{س}^2+1}}{\text{س}}\ \text{دص}$

* ملاحظة: اذا كان التكامل محدود نقوم بتغيير حدود التكامل

٥) $\int_{0}^{4} \frac{4\text{س}}{\sqrt{\text{س}^2+9}}\ \text{دس} = \int_{0}^{4} 4\text{س}\,(\text{س}^2+9)^{-\frac{1}{2}}\ \text{دس}$

$\Leftarrow \int_{9}^{25} 4\cancel{\text{س}}\,\text{ص}^{-\frac{1}{2}}\ \frac{\text{دص}}{2\cancel{\text{س}}} = \int_{9}^{25} 2\,\text{ص}^{-\frac{1}{2}}\ \text{دص}$

$= 2\,\frac{\text{ص}^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Big|_{9}^{25} = 4\sqrt{\text{ص}}\Big|_{9}^{25} = 4(5-3) = 8$

$\text{ص} = \text{س}^2 + 9$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2\text{س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{2\text{س}}$

عندما س = ٠ فإن ص = ٩

س = ٤ ⇐ ص = ٢٥

٦) $\int_{0}^{1} 6\text{س}^2(\text{س}^3+1)^3\ \text{دس} = \int_{1}^{2} \cancel{6}\,\cancel{\text{س}^2}\,\text{ص}^3\ \frac{\text{دص}}{\cancel{3}\,\cancel{\text{س}^2}}$

$= \int_{1}^{2} 2\,\text{ص}^3\ \text{دص} = \frac{1}{2}\text{ص}^4\Big|_{1}^{2} = \frac{1}{2}(16-1) = \frac{15}{2}$

$\text{ص} = \text{س}^3 + 1$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 3\text{س}^2$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{3\text{س}^2}$

عندما س = ٠ ⇐ ص = ١

س = ١ ⇐ ص = ٢

٧) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \text{قا}^2\text{س}\ \text{ظا}^4\text{س}\ \text{دس} = \int_{0}^{1} \cancel{\text{قا}^2\text{س}}\ \text{ص}^4\ \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{قا}^2\text{س}}}$

$= \int_{0}^{1} \text{ص}^4\ \text{دص} = \frac{\text{ص}^5}{5}\Big|_{0}^{1} = \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}$

$\text{ص} = \text{ظا}\,\text{س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قا}^2\text{س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{قا}^2\text{س}}$

عندما س = ٠ ⇐ ص = ٠

$\text{س} = \frac{\pi}{4}$ ⇐ ص = ١

سؤال: $\int_{\pi^2}^{4\pi^2} \frac{\text{جا}\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}}}\ \text{دس}$ —— نفرض $\text{ص} = \sqrt{\text{س}}$

$\boxed{\text{الاجابة } -4}$

٨) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ جاس جتاس $($١ + جا^{2}س$)^{-\frac{1}{2}}$ دس

$= \int_{1}^{2}$ ~~جاس جتاس~~ ص$^{-\frac{1}{2}}$ $\frac{\text{دص}}{\cancel{٢\text{جاس جتاس}}}$

$= \frac{1}{2}\int_{1}^{2}$ ص$^{-\frac{1}{2}}$ دص $= \frac{1}{2}\,\frac{\text{ص}^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Big|_{1}^{2} = \sqrt{\text{ص}}\Big|_{1}^{2}$

$= \sqrt{2} - 1$

ص = ١ + جا^{2}س

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٢جاس جتاس

دس = $\frac{\text{دص}}{٢\text{جاس جتاس}}$

عندما س = ٠ ⇐ ص = ١

س = $\frac{\pi}{2}$ ⇐ ص = ٢

---

* ملاحظة: لا يجوز التكامل بوجود أكثر من متغير داخل التكامل الواحد وإذا بقي أكثر من متغير نستفيد من الفرض الأصلي أو باستخدام إحدى المتطابقات لتوحيد المتغير.

مثال: جد كلاً من التكاملات التالية:

١) $\int \frac{\text{س}^3}{\sqrt{1+\text{س}^2}}$ دس $= \int$ س^3 $(1+\text{س}^2)^{-\frac{1}{2}}$ دس

$= \int$ س^3 ص$^{-\frac{1}{2}}$ $\frac{\text{دص}}{٢\text{س}} = \frac{1}{2}\int$ س^2 ص$^{-\frac{1}{2}}$ دص

ص = ١ + س^2

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٢س

دس = $\frac{\text{دص}}{٢\text{س}}$

للتخلص من س^2 نستفيد من ١ + س^2 = ص

⇐ س^2 = ص − ١

⇐ $\frac{1}{2}\int$ (ص − ١) ص$^{-\frac{1}{2}}$ دص $= \frac{1}{2}\int$ ص$^{\frac{1}{2}}$ − ص$^{-\frac{1}{2}}$ دص $= \frac{1}{2}\left(\frac{\text{ص}^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{\text{ص}^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right)$ + جـ

$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\text{ص}^{\frac{3}{2}} - ٢\text{ص}^{\frac{1}{2}}\right)$ + جـ $= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}(1+\text{س}^2)^{\frac{3}{2}} - ٢(1+\text{س}^2)^{\frac{1}{2}}\right)$ + جـ

٢) $\int$ س^5 (س^3 + ٤)$^{\frac{1}{2}}$ دس $= \int$ س^5 ص$^{\frac{1}{2}}$ $\frac{\text{دص}}{٣\text{س}^2}$

$= \frac{1}{3}\int$ س^3 ص$^{\frac{1}{2}}$ دص

لكن: س^3 = ص − ٤ (من الفرض)

$= \frac{1}{3}\int$ (ص − ٤) ص$^{\frac{1}{2}}$ دص $= \frac{1}{3}\int$ ص$^{\frac{3}{2}}$ − ٤ص$^{\frac{1}{2}}$ دص

$= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\text{ص}^{\frac{5}{2}} - \frac{٤\times٢\,\text{ص}^{\frac{3}{2}}}{3}\right)$ + جـ $= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}(\text{س}^3+4)^{\frac{5}{2}} - \frac{8}{3}(\text{س}^3+4)^{\frac{3}{2}}\right)$ + جـ

ص = س^3 + ٤

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٣س^2

دس = $\frac{\text{دص}}{٣\text{س}^2}$

③ $\int \text{س}^5 (\text{س}^2+1)^{\frac{1}{2}}\, \text{دس}$ ——— الحل

مثال: اذا كان ق(١) = ٣ ، ق(٩) = ١٠ جد $\int_0^2 6\text{س}^2\, \text{ق}'(\text{س}^3+1)\, \text{دس}$

الحل: نفرض ص = س^3+1 ⇐ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 3\text{س}^2$ ⇐ $\text{دس} = \frac{\text{دص}}{3\text{س}^2}$

عندما س = ٠ ⇐ ص = ١
س = ٢ ⇐ ص = ٩

⇐ $\int_1^9 6\text{س}^2\, \text{ق}'(\text{ص}) \frac{\text{دص}}{3\text{س}^2} = 2\int_1^9 \text{ق}'(\text{ص})\, \text{دص}$

$= 2\,\text{ق}(\text{ص}) \Big|_1^9 = 2\big(\text{ق}(9) - \text{ق}(1)\big) = 2(10-3) = 14$

سؤال: اذا كان ق(٠) = ٢ ، ق(١) = ٦ جد $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{جتاس}\, \text{ق}'(\text{جاس})\, \text{دس}$

$\boxed{\text{الإجابة: } 4}$

مثال: جد التكاملات التالية:

① $\int \frac{1}{\text{س}^2} \text{ظا}^2 \frac{1}{\text{س}}\, \text{دس} = \int \frac{1}{\text{س}^2} \text{ظا}^2\text{ص} \times -\text{س}^2\, \text{دص}$

ص = $\frac{1}{\text{س}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-1}{\text{س}^2}$

$\text{دس} = -\text{س}^2\, \text{دص}$

$= -\int \text{ظا}^2\text{ص}\, \text{دص} = -\int (\text{قا}^2\text{ص} - 1)\, \text{دص}$

$= -(\text{ظاص} - \text{ص}) + \text{جـ} = -\left(\text{ظا}\frac{1}{\text{س}} - \frac{1}{\text{س}}\right) + \text{جـ}$

② $\int \frac{2\text{س} - 1}{\text{ظا}^2(\text{س}^2 - \text{س} + 2)}\, \text{دس}$

ص = $\text{س}^2 - \text{س} + 2$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2\text{س} - 1$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{2\text{س} - 1}$

$= \int \frac{\cancel{2\text{س}-1}}{\text{ظا}^2\text{ص}} \cdot \frac{\text{دص}}{\cancel{2\text{س}-1}} = \int \text{ظتا}^2\text{ص}\, \text{دص}$

$= \int \text{قتا}^2\text{ص} - 1\, \text{دص} = -\text{ظتاص} - \text{ص} + \text{جـ}$

$= -\text{ظتا}(\text{س}^2 - \text{س} + 2) - (\text{س}^2 - \text{س} + 2) + \text{جـ}$

سؤال: جد التكاملات التالية:

١) $\int \frac{\text{جا س}}{\text{جتا}^2\text{ س}}\,\text{دس}$ ——— نفرض ص = جتا س

٢) $\int \frac{\text{جا}^2\text{ س}}{\text{جتا}^6\text{ س}}\,\text{دس}$ ——— نفرض ص = ظا س

$= \int \frac{\text{جا}^2\text{ س}}{\text{جتا}^2\text{ س جتا}^4\text{ س}}\,\text{دس}$

مثال: جد التكاملات التالية:

١) $\int \text{جتا}^3\text{ س دس} = \int \text{جتا}^2\text{ س جتا س دس} = \int (1 - \text{جا}^2\text{ س})\,\text{جتا س دس}$

نفرض ص = جا س $\Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{جتا س} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{جتا س}}$

$= \int (1 - \text{ص}^2)\,\cancel{\text{جتا س}}\,\frac{\text{دص}}{\cancel{\text{جتا س}}} = \int 1 - \text{ص}^2\,\text{دص} = \text{ص} - \frac{\text{ص}^3}{3} + \text{ج}$

$= \text{جا س} - \frac{\text{جا}^3\text{ س}}{3} + \text{ج}$

---

٢) $\int \text{جا س}\left(\text{ظتا س} + \frac{1}{\text{قتا}^2\text{ س}}\right)\text{دس} = \int \text{جا س}\left(\frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}} + \text{جا}^2\text{ س}\right)\text{دس}$

$= \int \text{جتا س} + \text{جا}^3\text{ س دس} = \int \text{جتا س دس} + \int \text{جا}^3\text{ س دس} = \text{جا س} + \int \text{جا}^2\text{ س جا س دس}$

نفرض ص = جتا س $\Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\text{جا س} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{-\text{جا س}}$

$= \text{جا س} + \int (1 - \text{جتا}^2\text{ س})\,\text{جا س دس} = \text{جا س} + \int (1 - \text{ص}^2)\,\cancel{\text{جا س}}\,\frac{\text{دص}}{\cancel{-\text{جا س}}}$

$= \text{جا س} + \int -1 + \text{ص}^2\,\text{دص} = \text{جا س} - \text{ص} + \frac{\text{ص}^3}{3} + \text{ج}$

$= \text{جا س} - \text{جتا س} + \frac{\text{جتا}^3\text{ س}}{3} + \text{ج}$

مثال: جد التكاملات التالية:

١) $\int \frac{جتا ٢س \; جا ٢س}{\sqrt{جا ٢س}} \, دس = \int \frac{جتا ٢س}{\sqrt{جا ٢س}} \, دس$

$= \int جتا ٢س \, (جا ٢س)^{-\frac{1}{2}} \, دس$

$= \int جتا ٢س \; ص^{-\frac{1}{2}} \, \frac{دص}{٢ جتا ٢س} = \frac{1}{2} \, \frac{ص^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + جـ$

$= \sqrt{ص} + جـ = \sqrt{جا ٢س} + جـ$

$ص = جا ٢س$

$\frac{دص}{دس} = ٢ جتا ٢س$

$دس = \frac{دص}{٢ جتا ٢س}$

---

٢) $\int \frac{جتا ٢س}{جا^2 س \, (١ - جا^2 س)} \, دس = \int \frac{جتا ٢س}{جا^2 س \; جتا^2 س} \, دس = \int \frac{جتا ٢س}{(جاس \; جتاس)^2} \, دس$

مطابقة

$= \int \frac{جتا ٢س}{(\frac{1}{2} جا ٢س)^2} \, دس = \int \frac{جتا ٢س}{ص^2} \, \frac{دص}{جتا ٢س}$

$= \int ص^{-2} \, دص = \frac{ص^{-1}}{-1} + جـ = \frac{-1}{ص} + جـ$

$= \frac{-1}{\frac{1}{2} جا ٢س} + جـ = \frac{-2}{جا ٢س} + جـ$

$ص = \frac{1}{2} جا ٢س$

$\frac{دص}{دس} = جتا ٢س$

$دس = \frac{دص}{جتا ٢س}$

---

* **ملاحظات هامة:**

عند وجود $\int جا^{ن} س \; جتا^{م} س \; دس$ حيث ن ، م أعداد صحيحة موجبة نوجد الحالات التالية:

١) اذا كانت احدى الأسس (١) نفرض الأخرى ص

٢) اذا كانت احدى الأسس زوجية والأخرى فردية نفرض الزوجية

٣) اذا كانت ن ، م فرديتان نفرض أي منهما ويفضل الكبرى

٤) اذا كانت ن ، م زوجيتان نستخدم المتطابقات

سؤال: جد كلاً من التكاملات التالية:

① $\int \text{جا}^{٤}\text{س}\ \text{جتا}^{٣}\text{س}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \text{جاس}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{جتاس}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{جتاس}}$

$= \int \text{ص}^{٤}\ \text{جتا}^{٣}\text{س}\ \frac{\text{دص}}{\text{جتاس}} = \int \text{ص}^{٤}\ \text{جتا}^{٢}\text{س}\ \text{دص}$

$= \int \text{ص}^{٤}(١ - \text{جا}^{٢}\text{س})\ \text{دص} = \int \text{ص}^{٤}(١ - \text{ص}^{٢})\ \text{دص}$

$= \int \text{ص}^{٤} - \text{ص}^{٦}\ \text{دص} = \frac{\text{ص}^{٥}}{٥} - \frac{\text{ص}^{٧}}{٧} + \text{جـ} = \frac{\text{جا}^{٥}\text{س}}{٥} - \frac{\text{جا}^{٧}\text{س}}{٧} + \text{جـ}$

---

② $\int \text{جا}^{٣}\text{س}\ \text{جتا}^{٣}\text{س}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \text{جاس}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{جتاس}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{جتاس}}$

$= \int \text{ص}^{٣}\ \text{جتا}^{٣}\text{س}\ \frac{\text{دص}}{\text{جتاس}}$

$= \int \text{ص}^{٣}\ \text{جتا}^{٢}\text{س}\ \text{دص} = \int \text{ص}^{٣}(١ - \text{جا}^{٢}\text{س})\ \text{دص}$

$= \int \text{ص}^{٣}(١ - \text{ص}^{٢})\ \text{دص} = \int \text{ص}^{٣} - \text{ص}^{٥}\ \text{دص} = \frac{\text{ص}^{٤}}{٤} - \frac{\text{ص}^{٦}}{٦} + \text{جـ}$

$= \frac{\text{جا}^{٤}\text{س}}{٤} - \frac{\text{جا}^{٦}\text{س}}{٦} + \text{جـ}$

---

③ $\int \text{جا}^{٢}\text{س}\ \text{جتا}^{٢}\text{س}\ \text{دس} = \int \frac{١}{٢}(١ - \text{جتا}٢\text{س}) \times \frac{١}{٢}(١ + \text{جتا}٢\text{س})\ \text{دس}$

$= \frac{١}{٤}\int ١ - \text{جتا}^{٢}٢\text{س}\ \text{دس} = \frac{١}{٤}\int \left(١ - \frac{١}{٢}(١ + \text{جتا}٤\text{س})\right)\text{دس}$

$= \frac{١}{٤}\int ١ - \frac{١}{٢} - \frac{١}{٢}\text{جتا}٤\text{س}\ \text{دس} = \frac{١}{٤}\int \frac{١}{٢} - \frac{١}{٢}\text{جتا}٤\text{س}\ \text{دس}$

$= \frac{١}{٤}\left(\frac{١}{٢}\text{س} - \frac{١}{٨}\text{جا}٤\text{س}\right) + \text{جـ}$

$= \frac{١}{٨}\text{س} - \frac{١}{٣٢}\text{جا}٤\text{س} + \text{جـ}$

" الإرادة تصنع التفوق "

* ملاحظات هامة:

عند وجود $\int \text{قا}^{ن}\text{س}\ \text{ظا}^{م}\text{س}\ \text{دس}$ حيث ن، م أعداد صحيحة موجبة نوجد احدى الحالات الآتية:

١) اذا كانت ن زوجية نفرض ص = ظاس

٢) اذا كانت ن، م فرديتان نفرض ص = قاس

مثال: جد التكاملات التالية:

١) $\int \text{قا}^{4}\text{س}\ \text{ظا}^{5}\text{س}\ \text{دس} = \int \text{قا}^{4}\text{س}\ \text{ص}^{5}\ \frac{\text{دص}}{\text{قا}^{2}\text{س}}$

$= \int \text{قا}^{2}\text{س}\ \text{ص}^{5}\ \text{دص} = \int (1+\text{ظا}^{2}\text{س})\ \text{ص}^{5}\ \text{دص}$

$= \int (1+\text{ص}^{2})\ \text{ص}^{5}\ \text{دص} = \int \text{ص}^{5} + \text{ص}^{7}\ \text{دص}$

$= \frac{\text{ص}^{6}}{6} + \frac{\text{ص}^{8}}{8} + \text{ج} = \frac{\text{ظا}^{6}\text{س}}{6} + \frac{\text{ظا}^{8}\text{س}}{8} + \text{ج}$

ص = ظاس

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قا}^{2}\text{س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{قا}^{2}\text{س}}$

---

٢) $\int \text{قا}^{5}\text{س}\ \text{ظا}^{3}\text{س}\ \text{دس} = \int \text{ص}^{5}\ \text{ظا}^{3}\text{س}\ \frac{\text{دص}}{\text{قاس ظاس}}$

$= \int \text{ص}^{4}\ \text{ظا}^{2}\text{س}\ \text{دص} = \int \text{ص}^{4}\ (\text{قا}^{2}\text{س} - 1)\ \text{دص}$

$= \int \text{ص}^{4}\ (\text{ص}^{2} - 1)\ \text{دص} = \int \text{ص}^{6} - \text{ص}^{4}\ \text{دص}$

$= \frac{\text{ص}^{7}}{7} - \frac{\text{ص}^{5}}{5} + \text{ج} = \frac{\text{قا}^{7}\text{س}}{7} - \frac{\text{قا}^{5}\text{س}}{5} + \text{ج}$

ص = قاس

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قاس ظاس}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{قاس ظاس}}$

---

* ملاحظة: نفس الطريقة السابقة يمكن استخدامها مع $\int \text{قتا}^{ن}\text{س}\ \text{ظتا}^{م}\text{س}\ \text{دس}$

الاستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

مثال: جد التكاملات التالية:

① $\int \text{جاس}\ \text{جتا}^{٢}(\text{جتاس})\, \text{دس} = \int \text{جاس}\ \text{جتا}^{٢}\text{ص}\ \frac{\text{دص}}{-\text{جاس}}$

$= -\int \text{جتا}^{٢}\text{ص}\ \text{دص} = -\frac{١}{٢}\int (١ + \text{جتا}٢\text{ص})\, \text{دص}$

$= -\frac{١}{٢}\left(\text{ص} + \frac{١}{٢}\text{جا}٢\text{ص}\right) + \text{جـ}$

$= -\frac{١}{٢}\left(\text{جتاس} + \frac{١}{٢}\text{جا}(٢\,\text{جتاس})\right) + \text{جـ}$

$\text{ص} = \text{جتاس}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\text{جاس}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{-\text{جاس}}$

---

② $\int \text{س}\ \text{جاس}^{٢}\ \text{ظا}^{٢}(\text{جتاس}^{٢})\, \text{دس}$

$= \int \cancel{\text{س}}\ \cancel{\text{جاس}^{٢}}\ \text{ظا}^{٢}\text{ص}\ \frac{\text{دص}}{-٢\cancel{\text{س}}\ \cancel{\text{جاس}^{٢}}}$

$= -\frac{١}{٢}\int \text{ظا}^{٢}\text{ص}\ \text{دص} = -\frac{١}{٢}\int \text{قا}^{٢}\text{ص} - ١\ \text{دص}$

$= -\frac{١}{٢}(\text{ظاص} - \text{ص}) + \text{جـ}$

$= -\frac{١}{٢}\left(\text{ظا}(\text{جتاس}^{٢}) - \text{جتاس}^{٢}\right) + \text{جـ}$

$\text{ص} = \text{جتاس}^{٢}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\text{جاس}^{٢} \times ٢\text{س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{-٢\text{س}\ \text{جاس}^{٢}}$

مثال: جد $\int (\text{أس} + \text{ب})^{\text{ن}}\, \text{دس}$

$= \int \text{ص}^{\text{ن}}\ \frac{\text{دص}}{\text{أ}} = \frac{١}{\text{أ}}\int \text{ص}^{\text{ن}}\ \text{دص}$

$= \frac{١}{\text{أ}}\ \frac{\text{ص}^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١} + \text{جـ}$

$= \frac{١}{\text{أ}}\ \frac{(\text{أس}+\text{ب})^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١} + \text{جـ}$

$\text{ص} = \text{أس} + \text{ب}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{أ}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{أ}}$

---

* **ملاحظة:** يمكن اعتبار المثال السابق نتيجة لإيجاد تكاملات متشابهة

مثال: ① $\int (٣\text{س} - ٢)^{٦}\, \text{دس} = \frac{١}{٣}\ \frac{(٣\text{س}-٢)^{٧}}{٧} + \text{جـ}$

② $\int ٦(١ - ٢\text{س})^{-٤}\, \text{دس} = \frac{٦}{٢}\ \frac{(١-٢\text{س})^{-٣}}{-٣} + \text{جـ} = \frac{-١}{(١-٢\text{س})^{٣}} + \text{جـ}$

٣) $\int (\text{٤س}^{٢}+\text{٤س}+\text{١})^{٦}\,\text{دس} = \int \left((\text{١}+\text{٢س})^{٢}\right)^{٦}\,\text{دس} = \int (\text{١}+\text{٢س})^{\text{١٢}}\,\text{دس}$

$= \frac{\text{١}}{\text{٢}} \, \frac{(\text{١}+\text{٢س})^{\text{١٣}}}{\text{١٣}} + \text{جـ}$

---

٤) $\int \frac{\text{١}}{\text{س}^{٢}+\text{١٠س}+\text{٢٥}}\,\text{دس} = \int \frac{\text{١}}{(\text{س}+\text{٥})^{٢}}\,\text{دس} = \int (\text{س}+\text{٥})^{-\text{٢}}\,\text{دس}$

$= \frac{\text{١}}{\text{١}} \, \frac{(\text{س}+\text{٥})^{-\text{١}}}{-\text{١}} + \text{جـ} = \frac{-\text{١}}{\text{س}+\text{٥}} + \text{جـ}$

---

٥) $\int \text{س}^{٨}\left(\frac{\text{٢}}{\text{س}^{٢}} - \frac{\text{٣}}{\text{س}}\right)^{٤}\text{دس} = \int \text{س}^{٨}\left(\frac{\text{٢}-\text{٣س}}{\text{س}^{٢}}\right)^{٤}\text{دس}$

$= \int \text{س}^{٨}\,\frac{(\text{٢}-\text{٣س})^{٤}}{\text{س}^{٨}}\,\text{دس} = \int (\text{٢}-\text{٣س})^{٤}\,\text{دس} = \frac{\text{١}}{-\text{٣}}\,\frac{(\text{٢}-\text{٣س})^{٥}}{\text{٥}} + \text{جـ}$

---

٦) $\int \text{س} \times \sqrt[3]{\frac{\text{٢}}{\text{س}^{٣}} - \frac{\text{٥}}{\text{س}^{٢}}}\,\text{دس} = \int \text{س} \times \sqrt[3]{\frac{\text{٢}-\text{٥س}}{\text{س}^{٣}}}\,\text{دس}$

$= \int \frac{\text{س}\,\sqrt[3]{\text{٢}-\text{٥س}}}{\text{س}}\,\text{دس} = \int (\text{٢}-\text{٥س})^{\frac{1}{3}}\,\text{دس} = \frac{\text{١}}{-\text{٥}} \times \text{٣} \times \frac{(\text{٢}-\text{٥س})^{\frac{4}{3}}}{\text{٤}} + \text{جـ}$

---

٧) $\int \text{س}(\text{س}^{٤}+\text{٢س}^{٢}+\text{١})^{٥}\,\text{دس} = \int \text{س}\left((\text{س}^{٢}+\text{١})^{٢}\right)^{٥}\text{دس} = \int (\text{س}^{٢}+\text{١})^{\text{١٠}}\,\text{س}\,\text{دس}$

نفرض $\text{ص} = \text{س}^{٢}+\text{١}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٢س} \Longrightarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{٢س}}$

$= \int \cancel{\text{س}}\,\text{ص}^{\text{١٠}}\,\frac{\text{دص}}{\text{٢}\cancel{\text{س}}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}\int \text{ص}^{\text{١٠}}\,\text{دص} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}\,\frac{\text{ص}^{\text{١١}}}{\text{١١}} + \text{جـ}$

$= \frac{\text{ص}^{\text{١١}}}{\text{٢٢}} + \text{جـ} = \frac{(\text{س}^{٢}+\text{١})^{\text{١١}}}{\text{٢٢}} + \text{جـ}$

سؤال ٤: جد التكاملات التالية:

١)

$$\int \frac{(\text{٢س}+٣)^{٩}}{\text{س}^{١١}}\,\text{دس} = \int \frac{١}{\text{س}^{٢}}\left(\frac{\text{٢س}+٣}{\text{س}}\right)^{٩}\text{دس}$$

$$= \int \frac{١}{\text{س}^{٢}}\left(\frac{\text{٢س}}{\text{س}}+\frac{٣}{\text{س}}\right)^{٩}\text{دس} = \int \frac{١}{\text{س}^{٢}}\left(٢+\frac{٣}{\text{س}}\right)^{٩}\text{دس}$$

$$= \int \frac{١}{\text{س}^{٢}}\,\text{ص}^{٩}\,\frac{\text{س}^{٢}}{-٣}\,\text{دص} = -\frac{١}{٣}\int \text{ص}^{٩}\,\text{دص}$$

$$= -\frac{١}{٣}\,\frac{\text{ص}^{١٠}}{١٠} + \text{ج} = -\frac{١}{٣٠}\left(٢+\frac{٣}{\text{س}}\right)^{١٠} + \text{ج}$$

$\text{ص} = ٢ + \frac{٣}{\text{س}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-٣}{\text{س}^{٢}}$

$\text{دس} = \frac{\text{س}^{٢}}{-٣}\,\text{دص}$

---

٢)

$$\int (\text{س}+١)^{٣}(\text{س}^{٢}+\text{٢س}+٧)^{٥}\,\text{دس}$$

$$= \int (\text{س}+١)^{٣}\,\text{ص}^{٥}\,\frac{\text{دص}}{٢(\text{س}+١)} = \frac{١}{٢}\int (\text{س}+١)^{٢}\,\text{ص}^{٥}\,\text{دص}$$

$$= \frac{١}{٢}\int (\text{س}^{٢}+\text{٢س}+١)\,\text{ص}^{٥}\,\text{دص}$$

$$= \frac{١}{٢}\int (\text{ص}-٦)\,\text{ص}^{٥}\,\text{دص} = \frac{١}{٢}\int \text{ص}^{٦}-\text{٦ص}^{٥}\,\text{دص}$$

$$= \frac{١}{٢}\left(\frac{\text{ص}^{٧}}{٧} - \frac{\text{٦ص}^{٦}}{٦}\right) + \text{ج}$$

$$= \frac{١}{٢}\left(\frac{(\text{س}^{٢}+\text{٢س}+٧)^{٧}}{٧} - (\text{س}^{٢}+\text{٢س}+٧)^{٦}\right) + \text{ج}$$

$\text{ص} = \text{س}^{٢} + \text{٢س} + ٧$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٢س} + ٢$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{٢(\text{س}+١)}$

$\text{ص} - ٧ = \text{س}^{٢} + \text{٢س}$

$\text{ص} - ٦ = \text{س}^{٢} + \text{٢س} + ١$

---

٣)

$$\int (\text{س}^{٥}+١)^{٨} \times \text{س}^{١٤}\,\text{دس} = \int \text{ص}^{٨}\,\text{س}^{١٤}\,\frac{\text{دص}}{\text{٥س}^{٤}}$$

$$= \frac{١}{٥}\int \text{ص}^{٨}\,\text{س}^{١٠}\,\text{دص} = \frac{١}{٥}\int \text{ص}^{٨}(\text{ص}^{٢}-\text{٢ص}+١)\,\text{دص}$$

$$= \frac{١}{٥}\int \text{ص}^{١٠} - \text{٢ص}^{٩} + \text{ص}^{٨}\,\text{دص}$$

$$= \frac{١}{٥}\left(\frac{\text{ص}^{١١}}{١١} - \frac{\text{٢ص}^{١٠}}{١٠} + \frac{\text{ص}^{٩}}{٩}\right) + \text{ج}$$

$$= \frac{١}{٥}\left(\frac{(\text{س}^{٥}+١)^{١١}}{١١} - \frac{٢(\text{س}^{٥}+١)^{١٠}}{١٠} + \frac{(\text{س}^{٥}+١)^{٩}}{٩}\right) + \text{ج}$$

$\text{ص} = \text{س}^{٥} + ١$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٥س}^{٤}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{٥س}^{٤}}$

$\text{ص} - ١ = \text{س}^{٥}$

$(\text{ص}-١)^{٢} = \text{س}^{١٠}$

$\text{ص}^{٢} - \text{٢ص} + ١ = \text{س}^{١٠}$

مثال: جد التكاملات التالية:

① $\int \sqrt[3]{٢\text{س}^٣ + ٣\text{س}^٥}\ \text{د س} = \int \sqrt[3]{\text{س}^٣ (٢ + ٣\text{س}^٢)}\ \text{د س}$

$= \int \text{س} (٢ + ٣\text{س}^٢)^{\frac{١}{٣}}\ \text{د س}$

قمنا بإخراج عامل مشترك حتى تصبح على صورة:

(مقدار)$^{\text{ن}}$ × مشتقة المقدار

$= \int \cancel{\text{س}}\ \text{ص}^{\frac{١}{٣}} \frac{\text{د ص}}{٦\cancel{\text{س}}} = \frac{١}{٦} \int \text{ص}^{\frac{١}{٣}}\ \text{د ص}$

$= \frac{١}{٦} \times \frac{\text{ص}^{\frac{٤}{٣}}}{\frac{٤}{٣}} + \text{جـ} = \frac{١}{٨} (٢ + ٣\text{س}^٢)^{\frac{٤}{٣}} + \text{جـ}$

$\text{ص} = ٢ + ٣\text{س}^٢$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ٦\text{س}$

$\text{د س} = \frac{\text{د ص}}{٦\text{س}}$

---

② $\int \text{س} \sqrt{\text{س}^٨ + ٢\text{س}^٤}\ \text{د س} = \int \text{س} \sqrt{\text{س}^٤ (\text{س}^٤ + ٢)}\ \text{د س}$

$= \int \text{س} \times \text{س}^٢ \sqrt{(\text{س}^٤ + ٢)}\ \text{د س} = \int \text{س}^٣ (\text{س}^٤ + ٢)^{\frac{١}{٢}}\ \text{د س}$

$= \int \cancel{\text{س}^٣}\ \text{ص}^{\frac{١}{٢}} \frac{\text{د ص}}{٤\cancel{\text{س}^٣}} = \frac{١}{٤} \int \text{ص}^{\frac{١}{٢}}\ \text{د ص}$

$= \frac{١}{٤} \times \frac{\text{ص}^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ} = \frac{١}{٦} (\text{س}^٤ + ٢)^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}$

$\text{ص} = \text{س}^٤ + ٢$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ٤\text{س}^٣$

$\text{د س} = \frac{\text{د ص}}{٤\text{س}^٣}$

---

③ $\int (\text{س}^٨ - ٤\text{س})^٦\ \text{د س} = \int (\text{س} (\text{س}^٧ - ٤))^٦\ \text{د س} = \int \text{س}^٦ (\text{س}^٧ - ٤)^٦\ \text{د س}$

$= \int \cancel{\text{س}^٦}\ \text{ص}^٦ \frac{\text{د ص}}{٧\cancel{\text{س}^٦}} = \frac{١}{٧} \int \text{ص}^٦\ \text{د ص}$

$= \frac{١}{٧} \frac{\text{ص}^٧}{٧} + \text{جـ} = \frac{١}{٤٩} (\text{س}^٧ - ٤)^٧ + \text{جـ}$

$\text{ص} = \text{س}^٧ - ٤$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ٧\text{س}^٦$

$\text{د س} = \frac{\text{د ص}}{٧\text{س}^٦}$

سؤال ٤ جد:

١) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\text{جاس}(١-\text{جا}^٢\text{س})}\ \text{دس} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\text{جاس} \times \text{جتا}^٢\text{س}}\ \text{دس}$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} |\text{جتاس}| \sqrt{\text{جاس}}\ \text{دس}$ لأن $٠ \leq \text{س} \leq \frac{\pi}{2}$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جتاس} (\text{جاس})^{\frac{1}{2}}\ \text{دس} = \int_{0}^{1} \text{جتاس}\ \text{ص}^{\frac{1}{2}} \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{جتاس}}}$

$= \int_{0}^{1} \text{ص}^{\frac{1}{2}}\ \text{دص} = \frac{٢\text{ص}^{\frac{3}{2}}}{٣}\Big|_{0}^{1} = \frac{٢}{٣}(١-٠) = \frac{٢}{٣}$

ص = جاس

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{جتاس}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{جتاس}}$

عندما س = ٠ ← ص = ٠ ،

س = $\frac{\pi}{2}$ ← ص = ١

٢) $\int (\text{جاس} + \text{جتاس})^٦ \text{جتا}٢\text{س}\ \text{دس}$

$= \int \text{ص}^٦ \cancel{(\text{جتاس} - \text{جاس})} (\text{جتاس} + \text{جاس}) \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{جتاس} - \text{جاس}}}$

$= \int \text{ص}^٦ \times \text{ص}\ \text{دص} = \int \text{ص}^٧\ \text{دص} = \frac{\text{ص}^٨}{٨} + \text{ج}$

$= \frac{(\text{جاس} + \text{جتاس})^٨}{٨} + \text{ج}$

ص = جاس + جتاس

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{جتاس} - \text{جاس}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{جتاس} - \text{جاس}}$

$\text{جتا}٢\text{س} = \text{جتا}^٢\text{س} - \text{جا}^٢\text{س}$

$= (\text{جتاس} - \text{جاس})(\text{جتاس} + \text{جاس})$

٣) $\int (\text{قاس} + \text{ظاس})^٧ \text{قاس}\ \text{دس}$

$= \int \text{ص}^٧ \text{قاس} \frac{\text{دص}}{\text{قاس}(\text{ظاس} + \text{قاس})}$

$= \int \text{ص}^٧ \frac{\text{دص}}{\text{ص}} = \int \text{ص}^٦\ \text{دص}$

$= \frac{\text{ص}^٧}{٧} + \text{ج} = \frac{(\text{قاس} + \text{ظاس})^٧}{٧} + \text{ج}$

ص = قاس + ظاس

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قاس ظاس} + \text{قا}^٢\text{س}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{قاس}(\text{ظاس} + \text{قاس})}$

٤) $\int \frac{\text{جاس}}{١ - \text{جاس}}\ \text{دس} = \int \frac{\text{جاس}}{١ - \text{جاس}} \times \frac{١ + \text{جاس}}{١ + \text{جاس}}\ \text{دس} = \int \frac{\text{جاس} + \text{جا}^٢\text{س}}{١ - \text{جا}^٢\text{س}}\ \text{دس}$

$= \int \frac{\text{جاس} + \text{جا}^٢\text{س}}{\text{جتا}^٢\text{س}}\ \text{دس} = \int \frac{\text{جاس}}{\text{جتا}^٢\text{س}} + \frac{\text{جا}^٢\text{س}}{\text{جتا}^٢\text{س}}\ \text{دس}$

$= \int \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس جتاس}} + \text{ظا}^٢\text{س}\ \text{دس} = \int \text{قاس ظاس} + \text{قا}^٢\text{س} - ١\ \text{دس}$

$= \text{قاس} + \text{ظاس} - \text{س} + \text{ج}$

مثال: أوجد كلاً من التكاملات التالية:

$$\text{ص} = \text{س} + 1 \qquad \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 1 \qquad \text{ءس} = \text{ءص}$$

1) $\int \frac{\text{س}^3}{\sqrt{1+\text{س}}} \,\text{ءس} = \int (\text{س}^3)(1+\text{س})^{-\frac{1}{2}} \,\text{ءس}$

ثم نكمل ______ بالتعويض

2) $\int \frac{4}{\text{س}^3\sqrt{1+\text{س}^2}} \,\text{ءس} = \int \frac{4}{\text{س}^2\sqrt{\text{س}^2\left(\frac{1}{\text{س}^2}+1\right)}} \,\text{ءس} = \int \frac{4}{\text{س}^2 |\text{س}| \sqrt{\frac{1}{\text{س}^2}+1}} \,\text{ءس}$

$= \int \frac{4}{\text{س}^2 \times \text{س} \left(1+\frac{1}{\text{س}^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \,\text{ءس} = \int \frac{4}{\text{س}^3\left(1+\frac{1}{\text{س}^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \,\text{ءس} = \int \frac{4\left(1+\frac{1}{\text{س}^2}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\text{س}^3} \,\text{ءس}$

نفرض ص $= \frac{1}{\text{س}^2} + 1$ ثم نكمل ----

3) $\int \frac{\sqrt{1+\text{س}}}{\sqrt{\text{س}^4 \times \text{س}}} \,\text{ءس} = \int \frac{\sqrt{1+\text{س}}}{\sqrt{\text{س}^4}\sqrt{\text{س}}} \,\text{ءس} = \int \frac{1}{\text{س}^2}\sqrt{\frac{1+\text{س}}{\text{س}}} \,\text{ءس}$

$= \int \frac{1}{\text{س}^2}\sqrt{\frac{\text{س}}{\text{س}} + \frac{1}{\text{س}}} \,\text{ءس} = \int \frac{1}{\text{س}^2}\left(1+\frac{1}{\text{س}}\right)^{\frac{1}{2}} \,\text{ءس}$

نفرض ص $= 1 + \frac{1}{\text{س}}$ ثم نكمل ----

4) $\int \frac{\text{س}\sqrt{\text{س}+1}}{\sqrt{1+\text{س}}-1} \,\text{ءس}$ نضرب بالمرافق $\Leftarrow \int \frac{\text{س}\sqrt{\text{س}+1}}{\sqrt{1+\text{س}}-1} \times \frac{\sqrt{1+\text{س}}+1}{\sqrt{1+\text{س}}+1} \,\text{ءس}$

$= \int \frac{\left(\sqrt{1+\text{س}}+1\right)\text{س}\sqrt{\text{س}+1}}{(1+\text{س})-1} \,\text{ءس} = \int \frac{\left(\sqrt{1+\text{س}}+1\right)\sqrt{\text{س}+1}\,\cancel{\text{س}}}{\cancel{\text{س}}} \,\text{ءس}$

$= \int \sqrt{\text{س}+1} + \text{س} + 1 \,\text{ءس} = \int (\text{س}+1)^{\frac{1}{2}} + \text{س} + 1 \,\text{ءس}$

$= \left(\frac{(\text{س}+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \text{س} + \frac{\text{س}^2}{2}\right) + \text{ج}$

$$\text{ص} = \text{س}^2 + \text{س} \qquad \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 2\text{س} + 1 \qquad \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{2\text{س}+1}$$

5) $\int (4\text{س}^3 + 6\text{س}^2 + 2\text{س})(\text{س}^2+\text{س})^{15} \,\text{ءس}$

$= \int 2\text{س}\,\cancel{(1+2\text{س})}(1+\text{س})\,\text{ص}^{15} \frac{\text{ءص}}{\cancel{1+2\text{س}}}$

$= 2\int (\text{س}^2+\text{س})\,\text{ص}^{15} \,\text{ءص} = 2\int \text{ص} \times \text{ص}^{15} \,\text{ءص}$

$= 2\int \text{ص}^{16} \,\text{ءص} = \frac{2\,\text{ص}^{17}}{17} + \text{ج}$

$= \frac{2}{17}(\text{س}^2+\text{س})^{17} + \text{ج}$

Scanned by CamScanner

٦) $\int \frac{1}{1-س^2}\sqrt{\frac{1+س}{1-س}}\,دس = \int \frac{1}{(1+س)(1-س)}\left(\frac{1+س}{1-س}\right)^{\frac{1}{2}} دس$

$ص = \frac{1+س}{1-س}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{1\times(1+س) - 1\times(1-س)}{(1-س)^2}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{-2}{(1-س)^2}$

$دس = \frac{(1-س)^2}{-2}\,دص$

$= \int \frac{1}{(1+س)(1-س)}\, ص^{\frac{1}{2}}\, \frac{(1-س)^2}{-2}\, دص$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1-س}{1+س}\, ص^{\frac{1}{2}}\, دص$

$= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{ص}\, ص^{\frac{1}{2}}\, دص = -\frac{1}{2}\int ص^{-\frac{1}{2}}\, دص$

$= -\frac{1}{2}\times\frac{2ص^{\frac{1}{2}}}{1} + ج = -\sqrt{ص} + ج$

$= -\sqrt{\frac{1+س}{1-س}} + ج$

مثال: بين أن $\int_0^{\frac{\pi}{2}} جا^ن س\, دس = \int_0^{\frac{\pi}{2}} جتا^ن س\, دس$

الحل: $جا س = جتا\left(\frac{\pi}{2} - س\right)$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} جا^ن س\, دس = \int_0^{\frac{\pi}{2}} جتا^ن\left(\frac{\pi}{2} - س\right) دس$

$= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} جتا^ن ص\, دص = \int_0^{\frac{\pi}{2}} جتا^ن ص\, دص$ #

$ص = \frac{\pi}{2} - س$

$\frac{دص}{دس} = -1$

$دس = -دص$

$س = 0 \Leftarrow ص = \frac{\pi}{2}$

$س = \frac{\pi}{2} \Leftarrow ص = 0$

مثال: اذا كان ميل المماس للمنحنى يعطى بالعلاقة $\frac{4س}{3ص^2\sqrt{س^2+5}}$ وكان منحنى ق يمر بالنقطة (٢،٣) اكتب معادلة المنحنى.

الحل: $\frac{دص}{دس} = \frac{4س}{3ص^2\sqrt{س^2+5}} \Leftarrow 3ص^2\, دص = \frac{4س}{\sqrt{س^2+5}}\, دس$

$\Leftarrow \int 3ص^2\, دص = \int 4س(س^2+5)^{-\frac{1}{2}}\, دس$

$\Leftarrow ص^3 = \int 4\cancel{س}(ل)^{-\frac{1}{2}}\, \frac{دل}{2\cancel{س}}$

$\Leftarrow ص^3 = \int 2ل^{-\frac{1}{2}}\, دل \Leftarrow ص^3 = 2\times\frac{2ل^{\frac{1}{2}}}{1} + ج$

$\Leftarrow ص^3 = 4\sqrt{ل} + ج \Leftarrow ص^3 = 4\sqrt{س^2+5} + ج$

يمر بـ (٢،٣) $\Leftarrow 27 = 4\sqrt{9} + ج \Leftarrow \boxed{ج = 15}$

$ص^3 = 4\sqrt{س^2+5} + 15 \Leftarrow ص = \sqrt[3]{4\sqrt{س^2+5} + 15}$

$ل = س^2 + 5$

$\frac{دل}{دس} = 2س$

$دس = \frac{دل}{2س}$

مثال: حل المعادلة التفاضلية $\frac{دص}{دس} = \sqrt{س ص + س + ص + ١}$

الحل: $\frac{دص}{دس} = \sqrt{\underbrace{س(ص+١) + (ص+١)}_{عامل\ مشترك}} = \sqrt{(س+١)(ص+١)} = (ص+١)^{\frac{1}{2}}(س+١)^{\frac{1}{2}}$

$دص = (ص+١)^{\frac{1}{2}}(س+١)^{\frac{1}{2}}\, دس \Leftarrow \frac{دص}{(ص+١)^{\frac{1}{2}}} = (س+١)^{\frac{1}{2}}\, دس$

$(ص+١)^{-\frac{1}{2}}\, دص = (س+١)^{\frac{1}{2}}\, دس \Leftarrow \int (ص+١)^{-\frac{1}{2}}\, دص = \int (س+١)^{\frac{1}{2}}\, دس$

$\frac{٢(ص+١)^{\frac{1}{2}}}{١} = \frac{٢(س+١)^{\frac{3}{2}}}{٣} + ج$

مثال: جد $\int \frac{(\sqrt{س} + ٣)^{٧}}{س^{٥}}\, دس$

$ص = \sqrt{س}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{١}{٢\sqrt{س}} = \frac{١}{٢ص}$

$دس = ٢ص\, دص$

الحل: $\int \frac{(ص+٣)^{٧}}{ص^{١٠}}\, ٢ص\, دص$

$= ٢\int \frac{(ص+٣)^{٧}}{ص^{٩}}\, دص = ٢\int \frac{١}{ص^{٢}} \left(\frac{ص+٣}{ص}\right)^{٧} دص$

$= ٢\int \frac{١}{ص^{٢}} \left(١ + \frac{٣}{ص}\right)^{٧} دص$

تعويض مرة أخرى

$ع = ١ + \frac{٣}{ص}$

$\frac{دع}{دص} = \frac{-٣}{ص^{٢}}$

$دص = \frac{ص^{٢}}{-٣}\, دع$

$= ٢\int \frac{١}{ص^{٢}}\, ع^{٧}\, \frac{ص^{٢}}{-٣}\, دع$

$= \frac{-٢}{٣} \times \frac{ع^{٨}}{٨} + ج = \frac{-٢}{٢٤}\left(١ + \frac{٣}{ص}\right)^{٨} + ج$

$= \frac{-٢}{٢٤}\left(١ + \frac{٣}{\sqrt{س}}\right)^{٨} + ج$

سؤال: جد $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} ٦\, جتاس\, ق(جاس)\, دس$

$ص = جاس$

$\frac{دص}{دس} = جتاس$

$دس = \frac{دص}{جتاس}$

$س = ٠ \leftarrow ص = ٠$

$س = \frac{\pi}{٢} \leftarrow ص = ١$

$= \int_{٠}^{١} ٦\, \cancel{جتاس}\, ق(ص)\, \frac{دص}{\cancel{جتاس}}$

٦ نكمل ______

$\boxed{الاجابة\ ٣٦}$

* التكامل بالأجزاء :

نلجأ إلى التكامل بالأجزاء عندما نريد إيجاد تكامل حاصل ضرب أو خارج قسمة اقترانين ولا يوجد بينهما مشتهد غير مألوف .

مثل : $\int س\, جاس\, دس$ ، $\int س\, ظا^٢(\frac{١}{٢}س)\, دس$

$\int س^٢\, هـ^{س^٢+١}\, دس$ ، $\int س\sqrt{٢س-٥}\, دس$ ، $\int \frac{س}{(س+١)^٣}\, دس$

$\int ص\, هـ\, دس$ حيث نختار أحد الاقترانين للاشتقاق وإعطاؤه الرمز (ص) والاقتران الآخر للتكامل إعطاؤه الرمز (دهـ) بحيث يكون ص اقتراناً منتهياً تفاضله (أي مشتقة تصل إلى الصفر) بشرط أن يكون الاقتران الآخر (دهـ) معروف تكامله لدينا .

* ملاحظة : في حالات خاصة جداً قد نحتاج إلى تغيير تلك التسمية

مثال : $\int ١٢س\sqrt[٣]{١-٢س}\, دس = \int ١٢س\,(١-٢س)^{\frac{١}{٣}}\, دس$

$ص = ١٢س$ ، $دهـ = (١-٢س)^{\frac{١}{٣}}\, دس$

$دص = ١٢\, دس$ ، $هـ = \frac{(١-٢س)^{\frac{٤}{٣}}}{-٢\times\frac{٤}{٣}}$

$I = ص\times هـ - \int هـ \times دص \Leftarrow I = (١٢س)\left(\frac{(١-٢س)^{\frac{٤}{٣}}}{-٢\times\frac{٤}{٣}}\right) - \int \frac{(١-٢س)^{\frac{٤}{٣}}}{-٢\times\frac{٤}{٣}}(١٢\, دس)$

$\Leftarrow I = \frac{-٩}{٢}س\sqrt[٣]{(١-٢س)^٤} + \int \frac{٩}{٢}(١-٢س)^{\frac{٤}{٣}}\, دس$

$\Leftarrow I = \frac{-٩}{٢}س\sqrt[٣]{(١-٢س)^٤} + \frac{٩}{٢}\times\frac{(١-٢س)^{\frac{٧}{٣}}}{-٢\times\frac{٧}{٣}} + جـ$

$\Leftarrow I = \frac{-٩}{٢}س\sqrt[٣]{(١-٢س)^٤} - \frac{٢٧}{٢٨}\sqrt[٣]{(١-٢س)^٧} + جـ$

مثال: جد التكاملات التالية:

١) $\int$ س جاس دس ⇐ م = س ، دهـ = جاس دس

دم = دس ، هـ = − جتاس

I = − س جتاس − $\int$ − جتاس دس = − س جتاس + جاس + جـ

---

٢) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ ٤س جا٢س دس ⇐ م = ٤س ، دهـ = جا٢س دس

دم = ٤ دس ، هـ = $-\frac{1}{2}$ جتا٢س

I = ٤س × $-\frac{1}{2}$ جتا٢س $\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ − $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ $-\frac{1}{2}$ جتا٢س × ٤ دس

= − ٢س جتا٢س $\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ − ٢ × $-\frac{1}{2}$ جا٢س $\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ = − ٢س جتا٢س $\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ + جا٢س $\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$

= (٢ × $\frac{\pi}{2}$ × ٠ − ٠) + (−١ − ١) = −٢

---

٣) $\int \frac{(٢س + ٣)}{\text{قتا٢س}}$ دس = $\int$ (٢س + ٣) جا٢س دس

م = ٢س + ٣ ، دهـ = جا٢س دس

دم = ٢ دس ، هـ = $-\frac{1}{2}$ جتا٢س

I = $-\frac{(٢س + ٣)}{٢}$ جتا٢س − $\int$ − جتا٢س دس = $-\frac{(٢س + ٣)}{٢}$ جتا٢س + $\frac{1}{2}$ جا٢س + جـ

---

٤) $\int \frac{٢س^{٢}}{\text{قتا٢س}}$ دس = $\int$ ٢س^{٢} جا٢س دس ⇐ م = ٢س^{٢} ، دهـ = جا٢س دس

دم = ٤س دس ، هـ = $-\frac{1}{2}$ جتا٢س

I = ٢س^{٢} × $-\frac{1}{2}$ جتا٢س − $\int$ $-\frac{1}{2}$ جتا٢س × ٤س دس

= − س^{٢} جتا٢س + $\int$ ٢س جتا٢س دس بالأجزاء مرة أخرى

م = ٢س ، دهـ = جتا٢س دس ⇐ I = − س^{٢} جتا٢س + ٢س × $\frac{1}{2}$ جا٢س − $\int \frac{1}{2}$ جا٢س × ٢ دس

دم = ٢ دس ، هـ = $\frac{1}{2}$ جا٢س

⇐ I = − س^{٢} جتا٢س + س جا٢س + $\frac{1}{2}$ جتا٢س + جـ

مثال: جد ∫ ١٦ س² جتا ٢س دس ⇐ ص = ١٦ س² ، دهـ = جتا ٢س دس

دص = ٣٢ س دس ، هـ = ½ جا ٢س

I = (١٦ س²)(½ جا ٢س) − ∫ (½ جا ٢س)(٣٢ س دس)

I = ٨ س² جا ٢س − ∫ ١٦ س جا ٢س دس   أجزاء مرة أخرى

ص = ١٦ س ، دهـ = جا ٢س دس

دص = ١٦ دس ، هـ = −½ جتا ٢س

I = ٨ س² جا ٢س − (١٦ س × −½ جتا ٢س − ∫ (−½ جتا ٢س)(١٦ دس))

= ٨ س² جا ٢س + ٨ س جتا ٢س − ∫ ٨ جتا ٢س دس

= ٨ س² جا ٢س + ٨ س جتا ٢س − ٨ × ½ جا ٢س + جـ

طريقة أخرى للحل: ∫ ١٦ س² جتا ٢س دس

الاقتران المشتق ص	الاقتران الذي نكامله دهـ
	جتا ٢س
(+) ١٦ س²	½ جا ٢س
(−) ٣٢ س	−¼ جتا ٢س
(+) ٣٢	−⅛ جا ٢س
(−) صفر	

I = ٨ س² جا ٢س + ٨ س جتا ٢س − ٤ جا ٢س + جـ

مثال: ∫ ٤س / قا²س دس = ∫ ٤س جتا²س دس = ∫ ٤س × ½ (١ + جتا ٢س) دس

= ∫ ٢س × (١ + جتا ٢س) دس = ∫ ٢س + ٢س جتا ٢س دس

= ∫ ٢س دس (مباشر) + ∫ ٢س جتا ٢س دس (أجزاء) ، ص ، دهـ

نكمل - - -

مثال: $\int$ س (جاس + جتاس)^2 دس = $\int$ س (جا^{2}س + ٢جاس جتاس + جتا^{2}س) دس

= $\int$ س (جا^{2}س + جتا^{2}س + ٢جاس جتاس) دس = $\int$ س (١ + جا٢س) دس

= $\int \underbrace{(\text{س}}_{\text{مباشر}} + \underbrace{\text{س جا٢س}}_{\text{ص دع}})$ دس = $\frac{\text{س}^2}{٢}$ + $\int$ س جا٢س دس

ص = س   دع = جا٢س دس

دص = دس   ع = $-\frac{1}{2}$ جتا٢س

I = $\frac{\text{س}^2}{٢}$ + س × $-\frac{1}{2}$ جتا٢س − $\int -\frac{1}{2}$ جتا٢س دس

= $\frac{\text{س}^2}{٢}$ − $\frac{1}{2}$ س جتا٢س + $\frac{1}{2}$ × $\frac{1}{2}$ جا٢س + جـ

مثال: اذا كان ص(١) = ٣   ص$'$(١) = −٢   ص(٢) = ٥   ص$'$(٢) = ٧
ص(٤) = −٩   ص$'$(٤) = −٨

جد قيمة $\int_{٢}^{٤}$ ٣س ص$''$($\frac{1}{2}$س) دس

الحل: ص = ٣س   دع = ص$''$($\frac{1}{2}$س) دس

دص = ٣ دس   ع = $\frac{1}{\frac{1}{2}}$ ص$'$($\frac{1}{2}$س)

I = ٣س × ٢ ص$'$($\frac{1}{2}$س) − $\int$ ٢ص$'$($\frac{1}{2}$س) × ٣ دس $\Big|_{٢}^{٤}$

= ٦س ص$'$($\frac{1}{2}$س) − $\int$ ٦ ص$'$($\frac{1}{2}$س) دس $\Big|_{٢}^{٤}$

= ٦س ص$'$($\frac{1}{2}$س) $\Big|_{٢}^{٤}$ − ٦ × $\frac{1}{\frac{1}{2}}$ ص($\frac{1}{2}$س) $\Big|_{٢}^{٤}$

= ٦س ص$'$($\frac{1}{2}$س) $\Big|_{٢}^{٤}$ − ١٢ ص($\frac{1}{2}$س) $\Big|_{٢}^{٤}$ ثم نعوض ونكمل الحل

مثال: جد التكاملات التالية:

① $\int_{٠}^{٤} \frac{٦س}{\sqrt{٢س+١}}\, دس$ يمكن إيجاد التكامل بالتعويض أو الأجزاء، بأخذ $(٢س+١)^{-\frac{1}{2}} دس$

$ع = ٦س \qquad ده = (٢س+١)^{-\frac{1}{2}} دس$

$دع = ٦ دس \qquad ه = \frac{1}{\cancel{٢}} \times \cancel{٢}(٢س+١)^{\frac{1}{2}}$

$I = ٦س \times (٢س+١)^{\frac{1}{2}} \Big|_{٠}^{٤} - \int_{٠}^{٤} (٢س+١)^{\frac{1}{2}} \times ٦ دس$

$= ٦س\sqrt{٢س+١} \Big|_{٠}^{٤} - ٦ \times \frac{1}{2} \times ٢ \frac{(٢س+١)^{\frac{3}{2}}}{٣} \Big|_{٠}^{٤}$

$= (٢٤ \times \sqrt{٩} - ٠) - ٢\left((٩)^{\frac{3}{2}} - (١)^{\frac{3}{2}}\right) = ٧٢ - ٠ - ٢\left((٣^٢)^{\frac{3}{2}} - ١\right)$

$= ٧٢ - ٢(٢٧ - ١) = ٧٢ - ٥٢ = ٢٠$

---

② $\int جا\sqrt{٢س+٣}\, دس$ (إذا كان ما داخل الجا أو الجتا مقدار ليس خطياً نجعل الجذر بالتعويض)

نفرض $ص = \sqrt{٢س+٣} \Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{٢}{٢\sqrt{٢س+٣}} = \frac{١}{\sqrt{٢س+٣}}$

$دس = \sqrt{٢س+٣}\, دص \Leftarrow دس = ص\, دص$

$= \int جاص \times ص\, دص = \int ص\, جاص\, دص$

$ع = ص \qquad ده = جاص\, دص$

$دع = دص \qquad ه = -جتاص$

$I = -ص\, جتاص - \int -جتاص\, دص = -ص\, جتاص + جاص + ج$

$= -\sqrt{٢س+٣}\, جتا\sqrt{٢س+٣} + جا\sqrt{٢س+٣} + ج$

---

③ $\int س\, جتا\sqrt{س^٢+١}\, دس = \int س\, جتاص \frac{ص\, دص}{س}$

$ص = \sqrt{س^٢+١}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{٢س}{٢\sqrt{س^٢+١}} = \frac{س}{ص}$

$دس = \frac{ص\, دص}{س}$

$= \int ص\, جتاص\, دص$

$ع = ص \qquad ده = جتاص\, دص$

$دع = دص \qquad ه = جاص$

$I = ص\, جاص - \int جاص\, دص = ص\, جاص + جتاص + ج$

$= \sqrt{س^٢+١}\, جا\sqrt{س^٢+١} + جتا\sqrt{س^٢+١} + ج$

③ $\int (س+٣)^٢ \, جتا٢س \, دس$

$ع = (س+٢)^٢ \quad \times \quad دهـ = جتا٢س \, دس$

$دع = ٢(س+٢) \, دس \quad هـ = \frac{١}{٢} جا٢س$

$= (س+٢)^٢ \times \frac{١}{٢} جا٢س - \int \frac{١}{٢} جا٢س \times ٢(س+٢) \, دس$

$= \frac{(س+٢)^٢}{٢} جا٢س - \int (س+٢) \, جا٢س \, دس$ أجزاء مرة أخرى

$ع = س+٢ \quad \times \quad دهـ = جا٢س \, دس$

$دع = دس \quad هـ = -\frac{١}{٢} جتا٢س$

$= \frac{(س+٢)^٢}{٢} جا٢س - \left((س+٢) \times -\frac{١}{٢} جتا٢س - \int -\frac{١}{٢} جتا٢س \, دس \right)$

$= \frac{(س+٣)^٢}{٢} جا٢س + \frac{(س+٢)}{٢} جتا٢س - \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} جا٢س + جـ$

---

④ $\int س^٥ جتا س^٣ \, دس = \int س^٥ جتاص \frac{دص}{٣س^٢}$

$ص = س^٣$

$\frac{دص}{دس} = ٣س^٢$

$دس = \frac{دص}{٣س^٢}$

$= \frac{١}{٣} \int س^٣ جتاص \, دص = \frac{١}{٣} \int \underbrace{ص}_{ع} \underbrace{جتاص \, دص}_{دهـ}$

ثم نكمل الحل ـ ـ ـ

⑤ $\int \frac{س \, جا س}{قتا س} \, دس = \int س \, جا س \, جتا س \, دس = \int \underbrace{س}_{ع} \underbrace{\frac{١}{٢} جا٢س \, دس}_{دهـ}$ ـ نكمل

⑥ $\int جاس (س + قتا^٣ س) \, دس = \int جاس \left(س + \frac{١}{جا^٣ س} \right) دس$

$= \int \left(س \, جاس + \frac{١}{جا^٢ س} \right) دس = \int \underbrace{س}_{ع} \underbrace{جاس}_{دهـ} + \underbrace{قتا^٢ س \, دس}_{مباشر}$

$ع = س \quad \times \quad دهـ = جاس \, دس$

$دع = دس \quad هـ = -جتاس$

$أ = -س \, جتاس - \int -جتاس \, دس - ظتاس + جـ$

$= -س \, جتاس + جاس - ظتاس + جـ$

(٧) $\int_{1}^{2} \underbrace{56(\text{س}-2)^2}_{\text{ق}} \underbrace{(\text{س}-1)^5 \, \text{دس}}_{\text{دهـ}}$

$\text{ق} = 56(\text{س}-2)^2 \qquad \text{دهـ} = (\text{س}-1)^5 \, \text{دس}$

$\text{دق} = 112(\text{س}-2)\, \text{دس} \qquad \text{هـ} = \dfrac{(\text{س}-1)^6}{6}$

$= 56(\text{س}-2)^2 \times \dfrac{(\text{س}-1)^6}{6} \Big|_1^2 - \int_1^2 \dfrac{(\text{س}-1)^6}{6} \times 112(\text{س}-2)\, \text{دس}$

$= (0-0) - \int_1^2 \dfrac{56}{3}(\text{س}-2)(\text{س}-1)^6 \, \text{دس}$

$\text{ق} = \text{س}-2 \qquad \text{دهـ} = (\text{س}-1)^6 \, \text{دس}$

$\text{دق} = \text{دس} \qquad \text{هـ} = \dfrac{(\text{س}-1)^7}{7}$

$= -\dfrac{56}{3}\left((\text{س}-2) \times \dfrac{(\text{س}-1)^7}{7} \Big|_1^2 - \int_1^2 \dfrac{(\text{س}-1)^7}{7} \, \text{دس}\right)$

$= -\dfrac{56}{3}\left(0 - \dfrac{(\text{س}-1)^8}{7 \times 8} \Big|_1^2\right) = \dfrac{1}{3}(\text{س}-1)^8 \Big|_1^2 = \dfrac{1}{3}(1-0) = \dfrac{1}{3}$

---

(٨) $\int \text{جا}\sqrt{\text{س}} \, \text{جتا}\sqrt{\text{س}} \, \text{دس} = \int \dfrac{1}{2} \text{جا} 2\sqrt{\text{س}} \, \text{دس}$

$= \int \dfrac{1}{2} \text{جا} 2\text{ص} \times 2\text{ص} \, \text{دص} = \int \underbrace{\text{ص}}_{\text{ق}} \underbrace{\text{جا} 2\text{ص} \, \text{دص}}_{\text{دهـ}}$ — كمل

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}}$

$\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = \dfrac{1}{2\sqrt{\text{س}}} = \dfrac{1}{2\text{ص}}$

$\text{دس} = 2\text{ص} \, \text{دص}$

(٩) $\int \dfrac{\text{س} \, \text{جا س}}{\text{قا س}} \, \text{دس} = \int \text{س} \, \text{جا س} \, \text{جتا س} \, \text{دس} = \int \text{س} \times \dfrac{1}{2} \text{جا} 2\text{س} \, \text{دس}$

$= \int \dfrac{1}{2} \underbrace{\text{س}}_{\text{ق}} \underbrace{\text{جا} 2\text{س} \, \text{دس}}_{\text{دهـ}} \Leftarrow$

$\text{ق} = \text{س} \qquad \text{دهـ} = \text{جا} 2\text{س}$

$\text{دق} = \text{دس} \qquad \text{هـ} = -\dfrac{1}{2} \text{جتا} 2\text{س}$

$= \dfrac{1}{2}\left(\text{س} \times -\dfrac{1}{2} \text{جتا} 2\text{س} - \int -\dfrac{1}{2} \text{جتا} 2\text{س} \, \text{دس}\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2} \text{س} \, \text{جتا} 2\text{س} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} \text{جا} 2\text{س}\right) + \text{ج}$

سؤال ٨- $\int \underbrace{\text{س}}_{\text{ق}} \underbrace{\text{جا}^2 \text{س} \, \text{دس}}_{\text{دهـ}}$

"الإرادة تصنع التفوق"

Scanned by CamScanner

(١٠) $\int س \dfrac{\text{جا}س}{\text{جتا}^{3}س}\, دس$

$ع = س \qquad ده = \dfrac{\text{جا}س}{\text{جتا}^{3}س}$

$دع = دس \qquad ه = \int \dfrac{\text{جا}س}{\text{جتا}^{3}س}\, دس$ (تعويض)

$ص = \text{جتا}س \quad \dfrac{دص}{دس} = -\text{جا}س \Leftarrow دس = \dfrac{دص}{-\text{جا}س} \Leftarrow \int \dfrac{\text{جا}س}{ص^{3}} \cdot \dfrac{دص}{-\text{جا}س} = \int -ص^{-3}\, دص$

$= \dfrac{-ص^{-2}}{-2} = \dfrac{1}{2ص^{2}} = \dfrac{1}{2\,\text{جتا}^{2}س} = \dfrac{1}{2}\,\text{قا}^{2}س$

$\Leftarrow I = س \times \dfrac{1}{2}\,\text{قا}^{2}س - \int \dfrac{1}{2}\,\text{قا}^{2}س\, دس = \dfrac{1}{2}س\,\text{قا}^{2}س - \dfrac{1}{2}\,\text{ظا}س + جـ$

---

(١١) $\int \text{جا}2س\,(س + \text{جتا}^{2}س)\, دس = \int (\text{جا}2س \times س + \text{جا}2س\,\text{جتا}^{2}س)\, دس$

$= \int (س\,\text{جا}2س + 2\,\text{جا}س\,\text{جتا}س\,\text{جتا}^{2}س)\, دس$

$= \int س\,\text{جا}2س\, دس + 2\int \text{جا}س\,\text{جتا}^{3}س\, دس$ نفرض

$ص = \text{جتا}س \qquad \dfrac{دص}{دس} = -\text{جا}س \qquad دس = \dfrac{دص}{-\text{جا}س}$

$ع = س \qquad ده = \text{جا}2س\, دس$

$دع = دس \qquad ه = -\dfrac{1}{2}\,\text{جتا}2س$

$I = س \times -\dfrac{1}{2}\,\text{جتا}2س - \int -\dfrac{1}{2}\,\text{جتا}2س\, دس + 2\int \text{جا}س\, ص^{3} \dfrac{دص}{-\text{جا}س}$

$= -\dfrac{1}{2}س\,\text{جتا}2س + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2}\,\text{جا}2س + \int -2ص^{3}\, دص$

$= \dfrac{1}{2}س\,\text{جتا}2س + \dfrac{1}{4}\,\text{جا}2س - \dfrac{2ص^{4}}{4} + جـ$

$= \dfrac{1}{2}س\,\text{جتا}2س + \dfrac{1}{4}\,\text{جا}2س - \dfrac{1}{2}\,\text{جتا}^{4}س + جـ$

---

(١٢) $\int \left(\dfrac{\text{جا}س}{س^{2}} - \dfrac{\text{جتا}س}{س}\right) دس = \int \dfrac{\text{جا}س}{ع} \times \underbrace{س^{-2}\, دس}_{ده} - \int \dfrac{\text{جتا}س}{س}\, دس$

$ع = \text{جا}س \qquad ده = س^{-2}\, دس$

$دع = \text{جتا}س \qquad ه = \dfrac{س^{-1}}{-1} = \dfrac{-1}{س}$

$I = \text{جا}س \times \dfrac{-1}{س} - \int \dfrac{-1}{س} \times \text{جتا}س\, دس - \int \dfrac{\text{جتا}س}{س}\, دس$

$= \dfrac{-\text{جا}س}{س} + \cancel{\int \dfrac{\text{جتا}س}{س}\, دس} - \cancel{\int \dfrac{\text{جتا}س}{س}\, دس} = \dfrac{-\text{جا}س}{س} + جـ$

مثال: اذا كانت ق(١) = قَ(٥) = ٦ ، ق(٥) = قَ(١) = ٢ جد

$$\int_{1}^{5} س\ قً(س)\ دس$$

الحل: $\int_{1}^{5} س\ قً(س)\ دس$

ق = س ، دهـ = قً(س) دس

دق = دس ، هـ = قَ(س)

$$I = س\ قَ(س) \Big|_{1}^{5} - \int_{1}^{5} قَ(س)\ دس = س\ قَ(س) \Big|_{1}^{5} - ق(س) \Big|_{1}^{5}$$

$$= (٥ \times ٦ - ١ \times ٢) - (٢ - ٦) = ٣٠ - ٢ + ٤ = ٣٢$$

مثال: اذا كانت ق(١) = ٤ ، ق(-١) = ٣ ، $\int_{-1}^{1} ق(س)\ دس = ٢٠$ ، جد:

$$\int_{2}^{3} ٨س\ قً(٥ - ٢س)\ دس$$

الحل: نفرض ص = ٥ − ٢س ⇐ $\frac{دص}{دس} = -٢$ ⇐ $دس = \frac{دص}{-٢}$

⇐ ٢س = ٥ − ص ⇐ $س = \frac{٥ - ص}{٢}$

عندما س = ٢ ⇐ ص = ١

س = ٣ ⇐ ص = −١

$$\int_{2}^{3} ٨س\ قً(٥-٢س)\ دس = \int_{1}^{-1} ٨س\ قً(ص) \frac{دص}{-٢} = \int_{1}^{-1} ٨ \cdot \frac{٥-ص}{٢}\ قً(ص) \frac{دص}{-٢}$$

$$= -٢ \int_{1}^{-1} (٥ - ص)\ قً(ص)\ دص$$ اجزاء

ق = ٥ − ص ، دهـ = قً(ص) دص

دق = − دص ، هـ = قَ(ص)

$$I = -٢ \left((٥ - ص) \times قَ(ص) \Big|_{1}^{-1} - \int_{1}^{-1} قَ(ص) \times -دص \right)$$

$$= -٢ \left[٦ \times قَ(-١) - ٤ \times قَ(١) \right] + \int_{1}^{-1} قَ(ص)\ دص$$

$$= -٢ \left[٦ \times ٣ - ٤ \times ٤ + (-٢٠) \right]$$

$$= -٢ (١٨ - ١٦ - ٢٠) = -٢ \times -١٨ = ٣٦$$

مثال: اذا كان ق(١) = ٦ ، $\int_{0}^{1}$ قَ(س) دس = ٤ جد $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ جا٢س قَ(جاس) دس

الحل: نفرض ص = جاس ⟸ $\frac{دص}{دس}$ = جتاس ⟸ دس = $\frac{دص}{جتاس}$

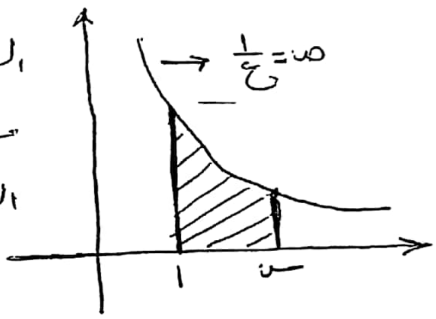
عندما س = ٠ فإن ص = ٠
س = $\frac{\pi}{2}$ فإن ص = ١

$I = \int_{0}^{1}$ ٢جاس $\cancel{جتاس}$ قَ(ص) $\frac{دص}{\cancel{جتاس}}$ = ٢$\int_{0}^{1} \underbrace{ص}_{ع} \underbrace{قَ(ص) دص}_{دهـ}$

ع = ص ، دهـ = قَ(ص) دص
دع = دص ، هـ = ق(ص)

I = ٢(ص ق(ص) $\Big|_{0}^{1}$ − $\int_{0}^{1}$ ق(ص) دص)
= ٢(١×٦ − ٠ − ٤) = ٢×٢ = ٤

* الاقترانات اللوغاريتمية:



الشكل يمثل منحنى ص = $\frac{1}{ع}$ حيث ع > ٠
مساحة المنطقة المظللة هي $\int_{1}^{س} \frac{1}{ع}$ دع ويسمى هذا التكامل اقتران اللوغاريتم الطبيعي لوهـ س
∴ لوهـ س = $\int_{1}^{س} \frac{1}{ع}$ دع

تسمى هـ العدد النيبيري وهو غير نسبي قيمته تقريباً ٢.٧ وهي قيمة تمثل مساحة وحدة واحدة
وبذلك فإننا نحتاج الى اللوغاريتم لإيجاد $\int \frac{1}{س}$ دس

س: أهم خواص اللوغاريتم:

لوهـ ١ = ٠ ، لوهـ هـ = ١ ، لوهـ هـ^{2} = ٢ ... لوهـ هـ^{ن} = ن

لوهـ س^{ن} = ن لوهـ س ، لوهـ أ×ب = لوهـ أ + لوهـ ب ، لوهـ أ^{س} = س لوهـ أ

لوهـ $\left(\frac{أ}{ب}\right)$ = لوهـ أ − لوهـ ب

ملاحظة (١): إذا كانت $ص = لو_{هـ} س$ فإن $\frac{دص}{دس} = \frac{١}{س}$

(٢): إذا كانت $ص = لو_{هـ} ق(س)$ أو $ص = لو_{هـ} |ق(س)|$ فإن $\frac{دص}{دس} = \frac{ق'(س)}{ق(س)}$

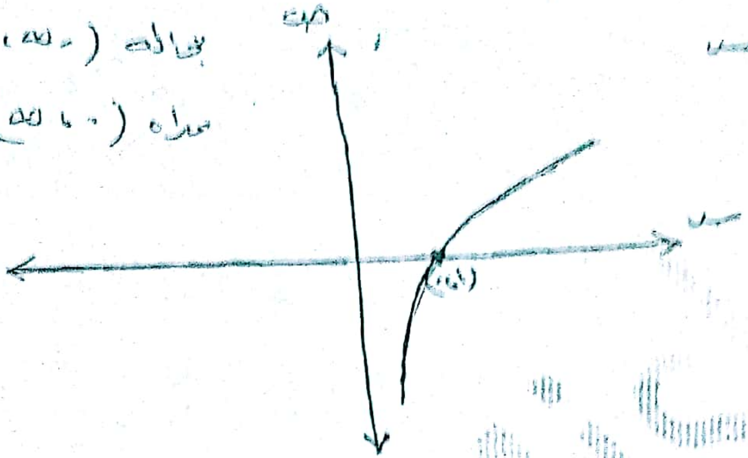
• التمثيل البياني للاقترانات اللوغاريتمية:

$ص = ق(س) = لو_{٢} س$

س	ص
١	٠
٢	١
٤	٢
٨	٣
$\frac{١}{٢}$	−١
$\frac{١}{٤}$	−٢
$\frac{١}{٨}$	−٣

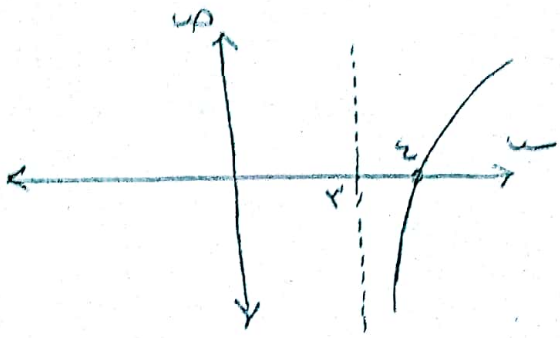
مداه (−∞، ∞)

مجاله (٠، ∞)



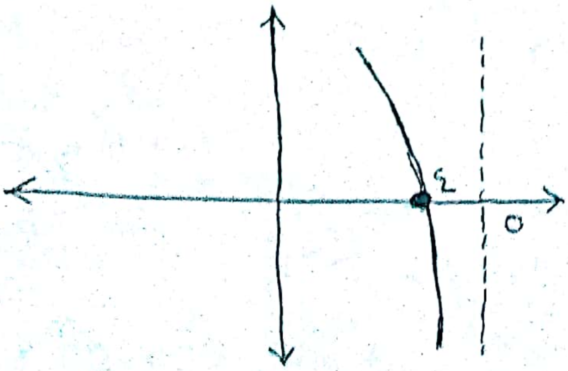
$ص = لو_{٢}(س - ٣)$ ⟸ $س - ٣ > ٠$ ⟸ $س > ٣$ ⟸ $س - ٣ = ١$

⟸ $\boxed{س = ٤}$ نقطة تقاطع المنحنى مع محور السينات



$ص = لو_{٢}(٥ - س)$ ⟸ $٥ - س > ٠$ ⟸ $٥ > س$ ⟸ $٥ - س = ١$

⟸ $\boxed{س = ٤}$



مثال: جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

١) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\, ٣\text{س} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٣}{٣\text{س}} = \frac{١}{\text{س}}$

٢) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}(٢\text{س}^٢ + ٥\text{س}) \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٤\text{س} + ٥}{٢\text{س}^٢ + ٥\text{س}}$

٣) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{جتاس} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-\text{جاس}}{\text{جتاس}} = -\text{ظاس}$

٤) $\text{ص} = \text{جا}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{جتا}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \times \frac{١}{\text{س}} = \frac{١}{\text{س}}\,\text{جتا}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

مثال: اذا كانت $\int \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \text{جـ}$ جد $\text{ق}'(\text{س})$

الحل: $\text{ق}(\text{س}) = \text{س} \times \frac{١}{\text{س}} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \times ١ = ١ + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}}$

مثال: جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ فيما يلي:

١) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}} \frac{\text{س}^٣}{٥\text{س}^٢ + ١} \Leftarrow \text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^٣ - \text{لو}_{\text{هـ}}(٥\text{س}^٢ + ١)$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٣\text{س}^٢}{\text{س}^٣} - \frac{١٠\text{س}}{٥\text{س}^٢ + ١} = \frac{٣}{\text{س}} - \frac{١٠\text{س}}{٥\text{س}^٢ + ١}$

---

٢) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}} \sqrt[٣]{\text{س}^٣ + ٩\text{س}} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^٣ + ٩\text{س})^{\frac{١}{٣}} = \frac{١}{٣}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^٣ + ٩\text{س})$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١}{٣} \times \frac{٣\text{س}^٢ + ٩}{\text{س}^٣ + ٩\text{س}} = \frac{\text{س}^٢ + ٣}{\text{س}^٣ + ٩\text{س}}$

---

٣) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}} \frac{(\text{س}^٢ + ١)^٥}{(٧ - ٢\text{س})^٤} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^٢ + ١)^٥ - \text{لو}_{\text{هـ}}(٧ - ٢\text{س})^٤$

$= ٥\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^٢ + ١) - ٤\,\text{لو}_{\text{هـ}}(٧ - ٢\text{س})$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٥ \times \frac{٢\text{س}}{\text{س}^٢ + ١} - \frac{٤ \times -٢}{٧ - ٢\text{س}} = \frac{١٠\text{س}}{\text{س}^٢ + ١} + \frac{٨}{٧ - ٢\text{س}}$

٤) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ظا}^٢ ٣\text{س} = ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ظا}٣\text{س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٢ \times \text{قا}^٢ ٣\text{س} \times ٣}{\text{ظا}٣\text{س}} = ٦\, \frac{\text{قا}^٢ ٣\text{س}}{\text{ظا}٣\text{س}}$

مثال: جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ لكل مما يلي:

١) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^{٣}$

الحل: $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^{٣} = ٣\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٣ \times \frac{١}{\text{س}} = \frac{٣}{\text{س}}$

٢) $\text{ص} = (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٣} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٣\,(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٢} \times \frac{١}{\text{س}} = \frac{٣}{\text{س}}\,(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٢}$

* $\int \frac{١}{\text{س}}\,\text{دس} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{جـ}$

مثال: جد التكاملات التالية:

١) $\int_{١}^{\text{هـ}} \frac{١}{\text{س}}\,\text{دس} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}|\Big|_{١}^{\text{هـ}} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ} - \text{لو}_{\text{هـ}}١ = ١ - ٠ = ١$

٢) $\int_{١}^{\text{هـ}^{٣}} \frac{٥}{\text{س}}\,\text{دس} = ٥\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}|\Big|_{١}^{\text{هـ}^{٣}} = ٥\,(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ}^{٣} - \text{لو}_{\text{هـ}}١) = ٥\,(٣ - ٠) = ١٥$

٣) $\int_{١٥}^{٤٥} \frac{٢}{\text{س}}\,\text{دس} = ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}|\Big|_{١٥}^{٤٥} = ٢\,(\text{لو}_{\text{هـ}}٤٥ - \text{لو}_{\text{هـ}}١٥) = ٢\,(\text{لو}_{\text{هـ}}\frac{٤٥}{١٥}) = ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}٣$

٤) $\int \frac{٣\text{س} + ٥}{\text{س}}\,\text{دس} = \int \frac{٣\text{س}}{\text{س}} + \frac{٥}{\text{س}}\,\text{دس} = \int ٣ + \frac{٥}{\text{س}}\,\text{دس}$

$= ٣\text{س} + ٥\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{جـ}$

٥) $\int \frac{١}{\text{أس} + \text{ب}}\,\text{دس} \Leftarrow$ نفرض $\text{ص} = \text{أس} + \text{ب} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{أ} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{أ}}$

$\Leftarrow \int \frac{١}{\text{ص}}\,\frac{\text{دص}}{\text{أ}} = \frac{١}{\text{أ}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| + \text{جـ} = \frac{١}{\text{أ}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{أس} + \text{ب}| + \text{جـ}$ (نتيجة)

٦) $\int \frac{٥}{٤\text{س} + ٣}\,\text{دس} = \frac{٥}{٤}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|٤\text{س} + ٣| + \text{جـ}$

٧) $\int_{١}^{٣} \frac{٨}{٣ - ٢\text{س}}\,\text{دس} = \frac{٨}{-٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|٣ - ٢\text{س}|\Big|_{١}^{٣} = -٤\,(\text{لو}_{\text{هـ}}٣ - \text{لو}_{\text{هـ}}١) = -٤\,\text{لو}_{\text{هـ}}٣$

مثال: اذا كان ميل المماس لمنحنى ق(س) عند أي نقطة يعطى بالعلاقة $\frac{٧}{٢\text{س} - ٣}$ وكان منحنى ق يمر بالنقطة (٢، ٥) اكتب قاعدة الاقتران ق(س)

الحل: $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{٧}{٢\text{س} - ٣} \Leftarrow \text{ق}(\text{س}) = \int \frac{٧}{٢\text{س} - ٣}\,\text{دس} = \frac{٧}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|٢\text{س} - ٣| + \text{جـ}$

نعوض: $\text{ق}(٢) = ٥ \Leftarrow ٥ = \frac{٧}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}١ + \text{جـ} \Leftarrow ٠ + \text{جـ} = ٥ \Leftarrow \boxed{\text{جـ} = ٥}$

$\therefore \text{ق}(\text{س}) = \frac{٧}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|٢\text{س} - ٣| + ٥$

* **نظرية :** $\int \frac{ق'(س)}{ق(س)}\, دس = لو_{هـ} |ق(س)| + جـ$

مثال ١ : $\int \frac{٣س^٢+٥}{س^٣+٥س+٦}\, دس$ البسط هنا مشتقة المقام $= لو_{هـ}|س^٣+٥س+٦| + جـ$

---

٢) $\int (ظتاس + ظاس)\, دس = \int \frac{جتاس}{جاس} + \frac{جاس}{جتاس}\, دس$

$= لو_{هـ}|جاس| - لو_{هـ}|جتاس| + جـ$

---

٣) $\int \frac{٤(١+ظا^٢س)}{ظاس}\, دس = \int \frac{٤قا^٢س}{ظاس}\, دس = ٤\, لو_{هـ}|ظاس| + جـ$

---

٤) $\int \frac{٥}{ظاس} + \frac{٢ظا^٢س}{ظاس}\, دس = \int ٥ظتاس + ٢ظاس\, دس$

$= \int ٥\frac{جتاس}{جاس} + ٢\frac{جاس}{جتاس}\, دس = ٥\, لو_{هـ}|جاس| + ٢\, لو_{هـ}|جتاس| + جـ$

---

٥) $\int \frac{س^٢+٥}{س^٣+١٥س}\, دس = \frac{١}{٣}\int \frac{٣(س^٢+٥)}{(س^٣+١٥س)} = \frac{١}{٣}\, لو_{هـ}|س^٣+١٥س| + جـ$

---

٦) $\int ظتا٣س\, دس = \int \frac{جتا٣س}{جا٣س}\, دس = \frac{١}{٣}\int \frac{٣جتا٣س}{جا٣س}\, دس$ (ضربنا البسط والمقام في ٣)

$= \frac{١}{٣}\, لو_{هـ}|جا٣س| + جـ$

---

٧) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{جا٢س}{٥-٣جتا^٢س}\, دس$ نفرض ص $= ٥ - ٣جتا^٢س \Leftarrow \frac{دص}{دس} = -٦جتاس \times -جاس$

$\Leftarrow دس = \frac{دص}{٦جاس\, جتاس}$ عندما س $= ٠$ فإن ص $= ٢$ ، س $= \frac{\pi}{٢}$ فإن ص $= ٥$

$\Leftarrow \int_{٢}^{٥} \frac{٢جاس\, جتاس}{ص} \cdot \frac{دص}{٦جاس\, جتاس} = \frac{١}{٣}\int_{٢}^{٥} \frac{١}{ص}\, دص$

$= \frac{١}{٣}\, لو_{هـ}|ص| \Big|_{٢}^{٥} = \frac{١}{٣}(لو_{هـ}٥ - لو_{هـ}٢)$

٨) $\int \frac{\sqrt{س}}{س\sqrt{س}+1}\,دس = \int \frac{ص}{ص^3+1} \times 2ص\,دص$

$ص=\sqrt{س}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{1}{2\sqrt{س}} = \frac{1}{2ص}$

$دس = 2ص\,دص$

$= \int \frac{2ص^2}{ص^3+1}\,دص = \frac{2}{3}\int \frac{3ص^2}{ص^3+1}\,دص$ (ضربنا في ×)

$= \frac{2}{3}\,لو_{هـ}|ص^3+1| + جـ = \frac{2}{3}\,لو_{هـ}|(\sqrt{س})^3+1| + جـ$

---

٩) $\int \frac{\sqrt[3]{س}}{7-س\sqrt[3]{س}}\,دس = \int \frac{ص}{7-ص^3\times ص} \times 3ص^2\,دص$

$ص = \sqrt[3]{س} \Leftarrow$

$س = ص^3$

$دس = 3ص^2\,دص$

$= \int \frac{3ص^3}{7-ص^4}\,دص = \frac{3}{-4}\int \frac{-4ص^3}{7-ص^4}\,دص$

$= \frac{-3}{4}\,لو_{هـ}|7-ص^4| + جـ$

---

١٠) $\int_{0}^{هـ} \frac{دس}{س+هـ} = \int \frac{1}{س+هـ}\,دس = لو_{هـ}|س+هـ|\Big|_{0}^{هـ}$

$= لو_{هـ} 2هـ - لو_{هـ} هـ = لو_{هـ}\frac{2هـ}{هـ} = لو_{هـ} 2$

---

١١) $\int \frac{1}{\sqrt{س}(1+\sqrt{س})}\,دس$　نفرض $ص=\sqrt{س}$ ...... ثم نكمل

---

١٢) $\int لو_{هـ}س\,دس$ بالأجزاء

$ق = لو_{هـ}س \quad دع = دس$

$دق = \frac{1}{س}\,دس \quad ع = س$

$I = لو_{هـ}س \times س - \int س \times \frac{1}{س}\,دس = س\,لو_{هـ}س - س + جـ$

* ملاحظة: إذا وجد $لو_{هـ}س$ داخل التكامل نستخدم التعويض إذا وجدت المشتقة وإذا لم توجد نستخدم الأجزاء ويكون $لو_{هـ}س$ هو ق

---

١٣) $\int س^3\,لو_{هـ}س\,دس$

$ق = لو_{هـ}س \quad دع = س^3\,دس$

$دق = \frac{1}{س}\,دس \quad ع = \frac{س^4}{4}$

ثم نكمل ــــ

(١٤) $\int \underbrace{(\text{لوهـ س})^2}_{ع} \underbrace{\text{دس}}_{\text{د هـ}} = \text{س}(\text{لوهـ س})^2 - \int \text{س} \times 2 \times \text{لوهـ س} \times \frac{1}{\text{س}}\ \text{دس}$

$= \text{س}(\text{لوهـ س})^2 - 2\int \underbrace{\text{لوهـ س}}_{ع}\ \underbrace{\text{دس}}_{\text{د هـ}}$

$= \text{س}(\text{لوهـ س})^2 - 2\left(\text{س لوهـ س} - \int \text{س} \times \frac{1}{\text{س}}\ \text{دس}\right)$

$= \text{س}(\text{لوهـ س})^2 - 2(\text{س لوهـ س} - \text{س}) + \text{جـ}$

---

(١٥) $\int \frac{\text{لوهـ س}}{\text{س}}\ \text{دس}$ نفرض $\text{ص} = \text{لوهـ س} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{1}{\text{س}} \Leftarrow \text{دس} = \text{س دص}$

$= \int \frac{\text{ص}}{\cancel{\text{س}}} \times \cancel{\text{س}}\ \text{دص} = \frac{\text{ص}^2}{2} + \text{جـ} = \frac{(\text{لوهـ س})^2}{2} + \text{جـ}$

---

(١٦) $\int \frac{1}{\text{س لوهـ س}}\ \text{دس}$ نفرض $\text{ص} = \text{لوهـ س} \Leftarrow \text{دس} = \text{س دص}$

$= \int \frac{1}{\text{س ص}} \times \text{س دص} = \int \frac{1}{\text{ص}}\ \text{دص} = \text{لوهـ}|\text{ص}| + \text{جـ} = \text{لوهـ}|\text{لوهـ س}| + \text{جـ}$

---

(١٧) $\int \text{ظتا س لوهـ جا س دس}$

$\text{ص} = \text{لوهـ جا س} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}}$

$\text{دس} = \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}\ \text{دص}$

$= \int \frac{\cancel{\text{جتا س}}}{\cancel{\text{جا س}}} \times \text{ص} \times \frac{\cancel{\text{جا س}}}{\cancel{\text{جتا س}}}\ \text{دص} = \int \text{ص دص}$

$= \frac{\text{ص}^2}{2} + \text{جـ} = \frac{(\text{لوهـ جا س})^2}{2} + \text{جـ}$

---

(١٨) $\int \underbrace{\text{جتا س}}_{\text{د هـ}}\ \underbrace{\text{لوهـ جا س}}_{ع}\ \text{دس}$

$ع = \text{لوهـ جا س}$ ، $\text{دع} = \frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}}\ \text{دس}$

$\text{د هـ} = \text{جتا س دس}$ ، $\text{هـ} = \text{جا س}$

$\int = \text{لوهـ جا س} \times \text{جا س} - \int \text{جا س} \times \frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}}\ \text{دس}$

$= \text{جا س لوهـ جا س} - \int \text{جتا س دس} = \text{جا س لوهـ جا س} - \text{جا س} + \text{جـ}$

---

(١٩) $\int \underbrace{\text{قا}^2\text{س}}_{\text{د هـ}}\ \underbrace{\text{لوهـ ظا س}}_{ع}\ \text{دس}$ ——— ثم نكمل

Scanned by CamScanner

⑳ $\int \text{قا}^2\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظاس}\ \text{دس}$

نفرض ص = ظاس ⇐ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قا}^2\text{س}$ ⇐ $\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{قا}^2\text{س}}$

$= \int \text{قا}^2\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}\ \frac{\text{دص}}{\text{قا}^2\text{س}} = \int \text{قا}^2\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}\ \text{دص} = \int \underbrace{(1+\text{ظا}^2\text{س})}_{\text{دهـ}}\ \underbrace{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}}_{\text{ق}}\ \text{دص}$

ق = $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}$ دهـ = $1 + \text{ظا}^2\text{س} = 1 + \text{ص}^2$

دق = $\frac{1}{\text{ص}}$ دص   هـ = $\text{ص} + \frac{\text{ص}^3}{3}$

$I = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} \times \left(\text{ص} + \frac{\text{ص}^3}{3}\right) - \int \left(\text{ص} + \frac{\text{ص}^3}{3}\right) \times \frac{1}{\text{ص}}\ \text{دص}$

$= \left(\text{ص} + \frac{\text{ص}^3}{3}\right) \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} - \int 1 + \frac{\text{ص}^2}{3}\ \text{دص}$

$= \left(\text{ص} + \frac{\text{ص}^3}{3}\right) \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} - \left(\text{ص} + \frac{\text{ص}^3}{9}\right) + \text{جـ}$

$= \left(\text{ظاس} + \frac{\text{ظا}^3\text{س}}{3}\right) \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظاس} - \left(\text{ظاس} + \frac{\text{ظا}^3\text{س}}{9}\right) + \text{جـ}$

㉑ $\int \underbrace{\text{جا}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}_{\text{ق}}\ \underbrace{\text{دس}}_{\text{دهـ}}$

ق = $\text{جا}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ دهـ = دس

دق = $\text{جتا}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \times \frac{1}{\text{س}}$ دس   هـ = س

$I = \text{س}\ \text{جا}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \int \text{س}\ \text{جتا}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \times \frac{1}{\text{س}}\ \text{دس}$

$= \text{س}\ \text{جا}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \int \underbrace{\text{جتا}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}_{\text{ق}}\ \underbrace{\text{دس}}_{\text{دهـ}}$

ق = $\text{جتا}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ دهـ = دس

دق = $-\text{جا}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \times \frac{1}{\text{س}}$ دس   هـ = س

$I = \text{س}\ \text{جا}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \left(\text{جتا}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \times \text{س} - \int \cancel{\text{س}} \times -\text{جا}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \times \frac{1}{\cancel{\text{س}}}\ \text{دس}\right)$

$= \text{س}\ \text{جا}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \text{س}\ \text{جتا}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \int \text{جا}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\ \text{دس}$ التكامل الأصلي

$\Leftarrow 2\int \text{جا}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\ \text{دس} = \text{س}\ \text{جا}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \text{س}\ \text{جتا}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

$\therefore \int \text{جا}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\ \text{دس} = \frac{\text{س}\ \text{جا}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \text{س}\ \text{جتا}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{2}$

(٢٢) $\int ٤س^{٢} \text{لو}_{هـ} س \, دس$

$ص = \text{لو}_{هـ} س \qquad دهـ = ٤س^{٢} \, دس$

$دص = \frac{١}{س} \, دس \qquad هـ = \frac{٤}{٣} س^{٣}$

$= \text{لو}_{هـ} س \times \frac{٤}{٣} س^{٣} - \int \frac{٤}{٣} س^{٣} \times \frac{١}{س} \, دس$

$= \frac{٤}{٣} س^{٣} \text{لو}_{هـ} س - \int \frac{٤}{٣} س^{٢} \, دس = \frac{٤}{٣} س^{٣} \text{لو}_{هـ} س - \frac{٤}{٣} \times \frac{س^{٣}}{٣} + جـ$

$= \frac{٤}{٣} س^{٣} \left(\text{لو}_{هـ} س - \frac{١}{٣} \right) + جـ$

---

(٢٣) $\int \frac{٢س + \text{ظا} س}{\text{جتا}^{٢} س} \, دس = \int \frac{٢س}{\text{جتا}^{٢} س} + \frac{\text{ظا} س}{\text{جتا}^{٢} س} \, دس$

$= \int ٢س \, \text{قا}^{٢} س + \text{ظا} س \, \text{قا}^{٢} س \, دس$

$= \int ٢س \, \text{قا}^{٢} س \, دس + \int ص \, \text{قا}^{٢} س \, \frac{دص}{\text{قا}^{٢} س}$

$ص = \text{ظا} س$

$\frac{دص}{دس} = \text{قا}^{٢} س$

$دس = \frac{دص}{\text{قا}^{٢} س}$

$ص = ٢س \qquad دهـ = \text{قا}^{٢} س \, دس$

$دص = ٢ \, دس \qquad هـ = \text{ظا} س$

$\therefore \int = ٢س \, \text{ظا} س - \int ٢ \, \text{ظا} س \, دس + \int ص \, دص$

$= ٢س \, \text{ظا} س - \int ٢ \frac{\text{جا} س}{\text{جتا} س} \, دس + \frac{ص^{٢}}{٢} + جـ$

$= ٢س \, \text{ظا} س + ٢ \, \text{لو}_{هـ} |\text{جتا} س| + \frac{\text{ظا}^{٢} س}{٢} + جـ$

---

(٢٤) $\int ٦س \, \text{لو}_{هـ} \frac{٣}{\sqrt{س}} \, دس = \int ٦س \left(\text{لو}_{هـ} ٣ - \text{لو}_{هـ} \sqrt{س} \right) دس = \int ٦س \left(\text{لو}_{هـ} ٣ - \frac{١}{٢} \text{لو}_{هـ} س \right) دس$

$= \int ٦س \, \text{لو}_{هـ} ٣ - ٣س \, \text{لو}_{هـ} س \, دس = ٣س^{٢} \text{لو}_{هـ} ٣ - \left(\text{لو}_{هـ} س \times \frac{٣س^{٢}}{٢} - \int \frac{٣س^{٢}}{٢} \times \frac{١}{س} \, دس \right)$

$= ٣س^{٢} \text{لو}_{هـ} ٣ - \frac{٣س^{٢}}{٢} \text{لو}_{هـ} س + \int \frac{٣}{٢} س \, دس$

$= ٣س^{٢} \text{لو}_{هـ} ٣ - \frac{٣}{٢} س^{٢} \text{لو}_{هـ} س + \frac{٣}{٤} س^{٢} + جـ$

٢٥) $\int \text{جتا}^{3}\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جا س}\ \text{دس} = \int \text{جتا}^{3}\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}\ \dfrac{\text{دص}}{\text{جتا س}}$

$\text{ص} = \text{جا س}$

$\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{جتا س}$

$\text{دس} = \dfrac{\text{دص}}{\text{جتا س}}$

$= \int \text{جتا}^{2}\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}\ \text{دص} = \int (1 - \text{جا}^{2}\text{س})\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}\ \text{دص}$

$= \int \underbrace{(1 - \text{ص}^{2})}_{\text{دهـ}}\ \underbrace{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}}_{\text{م}}\ \text{دص}$

$\text{م} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} \qquad \text{دهـ} = 1 - \text{ص}^{2}\ \text{دص}$

$\text{دم} = \dfrac{1}{\text{ص}}\ \text{دص} \qquad \text{هـ} = \text{ص} - \dfrac{\text{ص}^{3}}{3}$

$I = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}\left(\text{ص} - \dfrac{\text{ص}^{3}}{3}\right) - \int \left(\text{ص} - \dfrac{\text{ص}^{3}}{3}\right) \times \dfrac{1}{\text{ص}}\ \text{دص}$

$= \left(\text{ص} - \dfrac{\text{ص}^{3}}{3}\right)\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} - \int \left(1 - \dfrac{\text{ص}^{2}}{3}\right)\text{دص} = \left(\text{ص} - \dfrac{\text{ص}^{3}}{3}\right)\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} - \left(\text{ص} - \dfrac{\text{ص}^{3}}{9}\right) + \text{جـ}$

$= \left(\text{جا س} - \dfrac{\text{جا}^{3}\text{س}}{3}\right)\text{لو}_{\text{هـ}}\text{جا س} - \left(\text{جا س} - \dfrac{\text{جا}^{3}\text{س}}{9}\right) + \text{جـ}$

سؤال: جد التكاملات التالية:

١) $\int \dfrac{\text{س قا}^{2}\text{س} - \text{ظا س}}{\text{س}^{2}}\ \text{دس} = \int \dfrac{\text{س قا}^{2}\text{س}}{\text{س}^{2}} - \dfrac{\text{ظا س}}{\text{س}^{2}}\ \text{دس}$

$= \int \underbrace{\dfrac{1}{\text{س}}}_{\text{م}}\ \underbrace{\text{قا}^{2}\text{س}}_{\text{دهـ}}\ \text{دس} - \int \dfrac{\text{ظا س}}{\text{س}^{2}}\ \text{دس} = \dfrac{1}{\text{س}}\ \text{ظا س} - \int \text{ظا س} \times \dfrac{-1}{\text{س}^{2}} - \int \dfrac{\text{ظا س}}{\text{س}^{2}}\ \text{دس}$

$= \dfrac{1}{\text{س}}\ \text{ظا س} + \int \dfrac{\text{ظا س}}{\text{س}^{2}} - \int \dfrac{\text{ظا س}}{\text{س}^{2}}\ \text{دس} = \dfrac{1}{\text{س}}\ \text{ظا س} + \text{جـ}$

٢) $\int \text{جا س جتا س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جا س}\ \text{دس}$ نفرض $\text{ص} = \text{جا س}$ ثم نكمل بالأجزاء

٣) $\int \dfrac{\text{ظا س}}{1 + \text{قا س}}\ \text{دس} = \int \dfrac{\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}}{1 + \frac{1}{\text{جتا س}}}\ \text{دس} = \int \dfrac{\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}}{\frac{\text{جتا س} + 1}{\text{جتا س}}}\ \text{دس} = \int \dfrac{\text{جا س}}{\text{جتا س} + 1}\ \text{دس}$

$= -\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جتا س} + 1| + \text{جـ}$ (لأن البسط مشتقة المقام)

٤) $\int \text{قا س}\ \text{دس} = \int \dfrac{\text{قا س}(\text{قا س} + \text{ظا س})}{\text{قا س} + \text{ظا س}}\ \text{دس} = \int \dfrac{\text{قا}^{2}\text{س} + \text{قا س ظا س}}{\text{قا س} + \text{ظا س}}\ \text{دس}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{قا س} + \text{ظا س}| + \text{جـ}$

٥) $\int_{\text{هـ}}^{\text{هـ}^{3}} \dfrac{1 - \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}}\ \text{دس} = \int_{\text{هـ}}^{\text{هـ}^{3}} \dfrac{1}{\text{س}} - \dfrac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

ونغير الحدود

ثم نكمل — — —

٦) $\int_{1}^{هـ^3} \frac{1}{س\sqrt{1+لو_هـ س}}\, دس$ 　نفرض ص = ١ + $لو_هـ$ س نغير الحدود ونكمل ----

٧) $\int \frac{2س\, لو_هـ\sqrt{س^2+5}}{س^2+5}\, دس$

$ص = لو_هـ(س^2+5)$

$\frac{دص}{دس} = \frac{2س}{س^2+5}$

$دس = \frac{(س^2+5)\, دص}{2س}$

$= \int \frac{2س\, لو_هـ(س^2+5)^{\frac{1}{2}}}{س^2+5}\, دس = \int \frac{س\, لو_هـ(س^2+5)}{س^2+5}\, دس$

$= \int \frac{\cancel{2س}\, ص}{\cancel{س^2+5}} \cdot \frac{\cancel{(س^2+5)}}{\cancel{2س}}\, دص$

$= \int ص\, دص = \frac{ص^2}{2} + جـ$

$= \frac{\left(لو_هـ(س^2+5)\right)^2}{2} + جـ$

٨) $\int \frac{لو_هـ(س+2)}{\sqrt{س+2}}\, دس$ 　نفرض $\sqrt{س+2}$ = ص ثم نكمل بالأجزاء ----

٩) $\int \frac{لو_هـ\sqrt{س+2}}{س+2}\, دس = \int \frac{لو_هـ(س+2)^{\frac{1}{2}}}{س+2}\, دس = \frac{1}{2}\int \frac{لو_هـ(س+2)}{س+2}\, دس$

نفرض $ص = لو_هـ(س+2) \Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{1}{س+2} \Leftarrow دس = (س+2)\, دص$

$= \int \frac{\frac{1}{2}ص}{\cancel{س+2}}\, \cancel{(س+2)}\, دص = \frac{1}{2} \cdot \frac{ص^2}{2} + جـ = \frac{1}{4}\left(لو_هـ(س+2)\right)^2 + جـ$

مثال: اذا كانت $عَ(س) \times جاس - ع(س) \times جتاس = ٠$ ، وكان $ع(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{2}$ جد $ع(\frac{\pi}{4})$

الحل: $عَ(س) \times جاس = ع(س) \times جتاس$

$\Leftarrow \frac{عَ(س)}{ع(س)} = \frac{جتاس}{جاس} \Leftarrow \int \frac{عَ(س)}{ع(س)}\, دس = \int \frac{جتاس}{جاس}\, دس$

$\Leftarrow لو_هـ ع(س) = لو_هـ|جاس| + جـ$ 　لكن $ع(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{2}$

$\Leftarrow لو_هـ\sqrt{2} = لو_هـ 1 + جـ \Leftarrow \boxed{لو_هـ\sqrt{2} = جـ}$ 　$\therefore لو_هـ ع(\frac{\pi}{4}) = لو_هـ جا\frac{\pi}{4} + لو_هـ\sqrt{2}$

$\Leftarrow لو_هـ ع(\frac{\pi}{4}) = لو_هـ\frac{1}{\sqrt{2}} + لو_هـ\sqrt{2} = لو_هـ 1 - لو_هـ\sqrt{2} + لو_هـ\sqrt{2} = صفر$

$\therefore ع(\frac{\pi}{4}) = هـ^{٠} = 1$

الأستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

مثال: يتحرك جسم بحيث أن سرعته ع = $\frac{\text{لوهـ ن}}{\text{ن}}$ فإذا قطع الجسم مسافة ٤م بعد ١ث، جد المسافة المقطوعة بعد مرور هـ^{٢} من الثواني.

الحل: $\text{ع} = \frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \frac{\text{لوهـ ن}}{\text{ن}} \Leftarrow \text{دف} = \frac{\text{لوهـ ن}}{\text{ن}}\,\text{دن}$

$\Leftarrow \int \text{دف} = \int \frac{\text{لوهـ ن}}{\text{ن}}\,\text{دن}$

$\Leftarrow \text{ف} = \int \frac{\text{ص}}{\cancel{\text{ن}}} \times \cancel{\text{ن}}\,\text{دص} = \int \text{ص دص} = \frac{\text{ص}^{٢}}{٢} + \text{جـ}$

$\text{ص} = \text{لوهـ ن}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = \frac{١}{\text{ن}}$

$\text{دن} = \text{ن دص}$

$\Leftarrow \text{ف} = \frac{(\text{لوهـ ن})^{٢}}{٢} + \text{جـ} \xLeftarrow{\text{لكن}} \text{ف}(١) = ٤$

$\therefore ٤ = \frac{(\text{لوهـ }١)^{٢}}{٢} + \text{جـ} \Leftarrow ٤ = ٠ + \text{جـ} \Leftarrow \boxed{\text{جـ} = ٤}$

$\therefore \text{ف} = \frac{(\text{لوهـ ن})^{٢}}{٢} + ٤ \Leftarrow \text{ف}(\text{هـ}^{٢}) = \frac{(\text{لوهـ هـ}^{٢})^{٢}}{٢} + ٤ = \frac{٤}{٢} + ٤ = ٦$

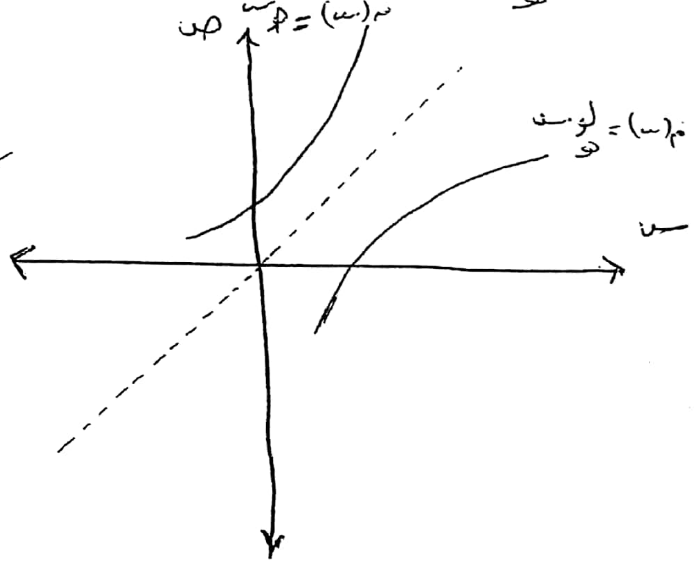
---

* **الاقتران الأسي**: هو الاقتران العكسي للاقتران $\text{م(س)} = \text{لوهـ س}$

$\text{ص} = \text{لوهـ س}$ فإن $\text{س} = \text{هـ}^{\text{ص}}$

* $\text{هـ}^{٠} = ١$ ، $\text{هـ}^{\text{أ}} \times \text{هـ}^{\text{ب}} = \text{هـ}^{\text{أ}+\text{ب}}$ ، $(\text{هـ}^{\text{أ}})^{\text{ب}} = \text{هـ}^{\text{أب}}$ ، $\frac{\text{هـ}^{\text{أ}}}{\text{هـ}^{\text{ب}}} = \text{هـ}^{\text{أ}-\text{ب}}$

ويكون $\text{لوهـ هـ}^{\text{ق(س)}} = \text{ق(س)}$ وأيضاً $\text{هـ}^{\text{لوهـ ق(س)}} = \text{ق(س)}$



* **نظرية**: إذا كانت $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}$ فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{هـ}^{\text{س}}$

البرهان: $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}} \Leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ}^{\text{س}} = \text{س}$ نشتق الطرفين

$\Leftarrow \frac{1}{\text{ص}} \cdot \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 1 \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}$ #

$\boxed{\text{نتيجة}}$: إذا كانت $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{ق(س)}}$ فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ق}'(\text{س}) \times \text{هـ}^{\text{ق(س)}}$

مثال: جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ لكل مما يلي:

1) $\text{ص} = 5\text{س}^2 + 2\text{هـ}^{\text{جاس}} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 10\text{س} + 2\,\text{جتاس}\,\text{هـ}^{\text{جاس}}$

2) $\text{س} = \text{هـ}^{\text{ص}} \Leftarrow 1 = \text{هـ}^{\text{ص}} \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{1}{\text{هـ}^{\text{ص}}} = \frac{1}{\text{س}}$

3) $\text{ص} = \sqrt{\text{هـ}^{4\text{س}^2}} \Leftarrow \text{ص} = \left(\text{هـ}^{4\text{س}^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \text{هـ}^{2\text{س}^2} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 4\text{س}\,\text{هـ}^{2\text{س}^2}$

4) $\text{ق(س)} = \text{هـ}^{\text{جاس}} + \text{لو}_{\text{هـ}}(2\text{س}+1)$ جد $\text{ق}'(0)$

الحل: $\text{ق}'(\text{س}) = \text{جتاس}\,\text{هـ}^{\text{جاس}} + \frac{2}{2\text{س}+1} \Leftarrow \text{ق}'(0) = 1 \times \text{هـ}^0 + \frac{2}{0+1} = 1 + 2 = 3$

5) $\text{ق(س)} = \text{هـ}^{2\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^2}$ جد $\text{ق}'\left(\frac{-1}{2}\right)$

الحل: $\text{ق(س)} = \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^4} = \text{س}^4 \Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = 4\text{س}^3$

$\text{ق}'\left(\frac{-1}{2}\right) = 4 \times \left(\frac{-1}{2}\right)^3 = 4 \times \frac{-1}{8} = \frac{-1}{2}$

مثال: $\int \text{ق(س)}\,\text{دس} = \text{هـ}^{2\text{س}} + \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{جتاس} + 2\text{س}) + \text{جـ}$ جد $\text{ق}(0)$

الحل: $\text{ق(س)} = 2\text{هـ}^{2\text{س}} + \frac{-\text{جاس} + 2}{\text{جتاس} + 2\text{س}} \Leftarrow \text{ق}(0) = 2 \times 1 + \frac{0+2}{1+0} = 2 + 2 = 4$

مثال: إذا كان $\int \text{ق(س)}\,\text{دس} = \text{هـ}^{\text{س}^2} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جاس} + \text{جـ}$ جد $\text{ق}'(\text{س})$

الحل: $\text{ق(س)} = 2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}^2} + \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}} = 2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}^2} + \text{ظتاس}$

$\text{ق}'(\text{س}) = 2\text{س} \times 2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}^2} + \text{هـ}^{\text{س}^2} \times 2 + -\text{قتا}^2\text{س}$

$= 4\text{س}^2\,\text{هـ}^{\text{س}^2} + 2\text{هـ}^{\text{س}^2} - \text{قتا}^2\text{س}$

<u>مثال</u>: اذا كانت $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{م}\text{س}}$ وكانت $\text{ص}'' - ٣\text{ص}' + ٢\text{ص} = ٠$ جد م

<u>الحل</u>: $\text{ص}' = \text{م}\,\text{هـ}^{\text{م}\text{س}} \Leftarrow \text{ص}'' = \text{م}^{٢}\,\text{هـ}^{\text{م}\text{س}}$

$\Leftarrow \text{ص}'' - ٣\text{ص}' + ٢\text{ص} = ٠ \Leftarrow \text{م}^{٢}\text{هـ}^{\text{م}\text{س}} - ٣\text{م}\,\text{هـ}^{\text{م}\text{س}} + ٢\,\text{هـ}^{\text{م}\text{س}} = ٠$

$\Leftarrow \text{هـ}^{\text{م}\text{س}}\underbrace{(\text{م}^{٢} - ٣\text{م} + ٢)}_{\text{عبارة تربيعية}} = ٠ \Leftarrow \text{هـ}^{\text{م}\text{س}}(\text{م}-٢)(\text{م}-١) = ٠ \Leftarrow \text{م} = ٢ \text{ ، } \text{م} = ١$

<u>مثال</u>: اذا كانت $\text{ص} = ٥^{٣\text{س}}$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عندما $\text{س} = \frac{١}{٣}$

نشتقه

<u>الحل</u>: نأخذ اللوغاريتم للطرفين:

$\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}٥^{٣\text{س}} \Leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = ٣\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}٥ \Leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = (٣\,\text{لو}_{\text{هـ}}٥)(\text{س})$

$\Leftarrow \frac{١}{\text{ص}} \times \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٣\,\text{لو}_{\text{هـ}}٥ \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٣\,\text{لو}_{\text{هـ}}٥ \times \text{ص} = ٣\,\text{لو}_{\text{هـ}}٥ \times ٥^{٣\text{س}}$

وعندما $\boxed{\text{س} = \frac{١}{٣}} = ٣\,\text{لو}_{\text{هـ}}٥ \times ٥^{٣ \times \frac{١}{٣}} = ١٥\,\text{لو}_{\text{هـ}}٥$

<u>مثال</u>: اذا كانت $\text{هـ}^{\text{س}\text{ص}} = \text{س} + \text{ص}$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ $\boxed{\text{عندما س} = ٠}$

<u>الحل</u>: عندما $\text{س} = ٠ \Leftarrow \text{هـ}^{٠} = ٠ + \text{ص} \Leftarrow ١ = \text{ص}$ نشتق

$\text{هـ}^{\text{س}\text{ص}} \times \left(\text{س}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} + \text{ص} \times ١\right) = ١ + \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ نعوض $\text{س} = ٠$ ، $\text{ص} = ١$

$\text{هـ}^{٠}\left(٠ \cdot \frac{\text{دص}}{\text{دس}} + ١\right) = ١ + \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \Leftarrow ١ = ١ + \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{صفر}$

<u>مثال</u>: اذا كان $\text{م}(\text{س}) = \text{هـ}^{٢\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ وكان $\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{٢\text{س}}\left(\frac{١}{\text{س}} + ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)$

أثبت أن $\text{م}(\text{س})$ اقتران بدائي للاقتران $\text{ق}(\text{س})$ ثم جد $\int_{١}^{٢}\text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$

<u>الحل</u>: $\text{م}'(\text{س}) = \text{هـ}^{٢\text{س}} \times \frac{١}{\text{س}} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \times ٢\text{هـ}^{٢\text{س}} = \text{هـ}^{٢\text{س}}\left(\frac{١}{\text{س}} + ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\right) = \text{ق}(\text{س})$

$\therefore$ $\text{م}(\text{س})$ اقتران بدائي لـ $\text{ق}(\text{س})$

$\Leftarrow \int_{١}^{٢}\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \text{م}(٢) - \text{م}(١)$

$= \text{هـ}^{٤}\,\text{لو}_{\text{هـ}}٢ - \text{هـ}^{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}١ = \text{هـ}^{٤}\,\text{لو}_{\text{هـ}}٢$

مثال: إذا كانت $هـ^{ص} = جاس$ أثبت أن $ص'' + (ص')^2 + 1 = 0$

الحل: $هـ^{ص} = جاس$ نشتق $\Leftarrow هـ^{ص} \times ص' = جتاس$ نشتق مرة أخرى

$هـ^{ص} \times ص'' + ص' \times هـ^{ص} \times ص' = -جاس$

$هـ^{ص} \times ص'' + هـ^{ص} (ص')^2 + جاس = 0$

$هـ^{ص} \times ص'' + هـ^{ص} \times (ص')^2 + هـ^{ص} = 0$ نقسم على $هـ^{ص}$

$\Leftarrow ص'' + (ص')^2 + 1 = 0$

$$\boxed{\int هـ^{س} \, دس = هـ^{س} + جـ}$$

مثال: $\int_{0}^{2} (5س^3 + 4هـ^{س}) \, دس = \frac{5س^4}{4} + 4هـ^{س} \Big|_{0}^{2}$

$= \left(\frac{16}{4} \times 5 + 4هـ^2\right) - (0 + 4 \times 1) = 20 + 4هـ^2 - 4 = 16 + 4هـ^2$

$$\boxed{\int هـ^{أس+ب} \, دس = \frac{1}{أ} هـ^{أس+ب} + جـ}$$

مثال: 1) $\int 8 هـ^{\frac{س}{4}} \, دس = 8 \times \frac{1}{(\frac{1}{4})} هـ^{\frac{س}{4}} + جـ = 32 هـ^{\frac{س}{4}} + جـ$

2) $\int \frac{5 + 2هـ^{7س}}{هـ^{4س}} \, دس = \int \frac{5}{هـ^{4س}} + \frac{2هـ^{7س}}{هـ^{4س}} \, دس = \int 5هـ^{-4س} + 2هـ^{3س} \, دس$

$= \frac{-5}{4} هـ^{-4س} + \frac{2}{3} هـ^{3س} + جـ$

3) $\int_{1}^{هـ^2} \frac{1}{هـ - 1} \, دس = \frac{س}{هـ - 1} \Big|_{1}^{هـ^2} = \frac{1}{هـ - 1} (هـ^2 - 1) = \frac{1}{هـ - 1} (هـ - 1)(هـ + 1)$

$= هـ + 1$

4) $\int هـ^{3س} \sqrt{هـ^{2س} + 2هـ^{س} + 1} \, دس = \int هـ^{3س} \sqrt{(هـ^{س} + 1)^2} \, دس$

$= \int هـ^{3س} |هـ^{س} + 1| \, دس = \int هـ^{3س} (هـ^{س} + 1) \, دس = \int هـ^{4س} + هـ^{3س} \, دس$

$= \frac{1}{4} هـ^{4س} + \frac{1}{3} هـ^{3س} + جـ$

⑤ $\int$ هـ^{٥س} + $\frac{١}{\sqrt{هـ^{٢س}+٤}}$ دس = $\int$ هـ^{٥س} + $\frac{١}{(هـ^{٢س}+٤)^{\frac{١}{٢}}}$ دس

= $\int$ هـ^{٥س} + $\frac{١}{هـ^{س}+٢}$ دس = $\int$ هـ^{٥س} + هـ$^{-س-٢}$ دس = $\frac{١}{٥}$ هـ^{٥س} + -١ هـ$^{-س-٢}$ + جـ

= $\frac{١}{٥}$ هـ^{٥س} − $\frac{١}{هـ^{س+٢}}$ + جـ

⑥ $\int_{-٣}^{٠} \sqrt[٣]{هـ^{٦-س}}$ دس = $\int_{-٣}^{٠}$ (هـ$^{٦-س}$)$^{\frac{١}{٣}}$ دس = $\int_{-٣}^{٠}$ هـ$^{٢-\frac{س}{٣}}$ دس

= $\frac{١}{(-\frac{١}{٣})}$ هـ$^{٢-\frac{س}{٣}}$ $\Big|_{-٣}^{٠}$ = (-٣هـ^{٢}) - (-٣هـ^{٣}) = -٣هـ^{٢} + ٣هـ^{٣}

= ٣هـ^{٢}(هـ-١)

سؤال: اذا كان س هـ^{ص} - ص هـ^{س} = ٥س - ص + ٤ جد $\frac{دص}{دس}$

مثال: ① $\int_{١}^{٢}$ لوهـ^{٢س} دس = $\int_{١}^{٢}$ ٢س دس = س^{٢} $\Big|_{١}^{٢}$ = ٤ - ١ = ٣

② $\int_{٠}^{لو٥}$ هـ^{س}(٣ - ٤هـ^{س}) دس = $\int_{٠}^{لو٥}$ (٣هـ^{س} - ٤هـ^{٢س}) دس = ٣هـ^{س} - ٢هـ^{٢س} $\Big|_{٠}^{لو٥}$

= (٣هـ^{لو٥} - ٢هـ^{٢لو٥}) - (٣×١ - ٢×١)

= (٣×٥ - ٢هـ^{لو٢٥}) - (١) = ١٥ - (٢×٢٥) - ١ = -٣٦

مثال: $\int$ ٦هـ$^{\sqrt{س}}$ دس نفرض ص = $\sqrt{س}$ ⇐ $\frac{دص}{دس}$ = $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$ = $\frac{١}{٢ص}$ ⇐ دس = ٢ص دص

⇐ $\int$ ٦هـ$^{\sqrt{س}}$ دس = $\int$ ٦هـ^{ص} × ٢ص دص = $\int$ ١٢ص هـ^{ص} دص أجزاء

ق = ١٢ص   دع = هـ^{ص} دص

دق = ١٢ دص   ع = هـ^{ص}

I = (١٢ص)(هـ^{ص}) - $\int$ هـ^{ص} × ١٢ دص = ١٢ص هـ^{ص} - ١٢هـ^{ص} + جـ

∴ I = ١٢$\sqrt{س}$ هـ$^{\sqrt{س}}$ - ١٢هـ$^{\sqrt{س}}$ + جـ

مثال ٢:

١) $\int (\text{س}^2+4)\,\text{هـ}^{\text{س}^3+12\text{س}}\,\text{ءس}$

$= \int (\text{س}^2+4)\,\text{هـ}^{\text{ص}}\,\frac{\text{ءص}}{3(\text{س}^2+4)}$

$= \frac{1}{3}\int \text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{ءص} = \frac{1}{3}\,\text{هـ}^{\text{ص}} + \text{ج}$

$= \frac{1}{3}\,\text{هـ}^{\text{س}^3+12\text{س}} + \text{ج}$

$\text{ص} = \text{س}^3 + 12\text{س}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 3\text{س}^2 + 12$

$\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{3\text{س}^2+12}$

$\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{3(\text{س}^2+4)}$

٢) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{جتاس}\,\text{هـ}^{\text{جاس}}\,\text{ءس}$ نفرض ص = جاس وتغير الحدود ثم نكمل ـــــ

٣) $\int \text{جا}2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{جا}^2\text{س}}\,\text{ءس}$

$= \int 2\,\text{جاس}\,\text{جتاس}\,\text{هـ}^{\text{ص}}\,\frac{\text{ءص}}{2\,\text{جاس}\,\text{جتاس}}$

$= \int \text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{ءص} = \text{هـ}^{\text{ص}} + \text{ج}$

$= \text{هـ}^{\text{جا}^2\text{س}} + \text{ج}$

$\text{ص} = \text{جا}^2\text{س}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 2\,\text{جاس}\,\text{جتاس}$

$\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{2\,\text{جاس}\,\text{جتاس}}$

٤) $\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{(\text{هـ}^{\text{س}}+1)^2}\,\text{ءس}$

$\Leftarrow \int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{(\text{هـ}^{\text{س}}+1)^2} = \int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{ص}^2}\cdot\frac{\text{ءص}}{\text{هـ}^{\text{س}}}$

$= \int \text{ص}^{-2}\,\text{ءص} = \frac{\text{ص}^{-1}}{-1} + \text{ج}$

$= \frac{-1}{\text{ص}} + \text{ج} = \frac{-1}{\text{هـ}^{\text{س}}+1} + \text{ج}$

$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}} + 1$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{هـ}^{\text{س}}$

$\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{هـ}^{\text{س}}}$

سؤال: جد $\int \text{هـ}^{\text{جاس}}\,\text{جتاس}\,\text{ءس}$ ـــــ (دوري)

مثال: جد التكاملات التالية:

١) $\int_{٠}^{٢} \underbrace{٣س}_{م}\ \underbrace{هـ^{\frac{١}{٢}س+١}}_{د هـ} دس = ٣س \times ٢هـ^{\frac{١}{٢}س+١} \Big|_{٠}^{٢} - \int_{٠}^{٢} ٢هـ^{\frac{١}{٢}س+١} \times ٣ دس$

$= ٦س هـ^{\frac{١}{٢}س+١} \Big|_{٠}^{٢} - ٦ \times ٢هـ^{\frac{١}{٢}س+١} \Big|_{٠}^{٢}$

$= (١٢هـ^{٢} - ٠) - (١٢هـ^{٢} - ١٢هـ) = ١٢هـ$

٢) $\int جا٢س\ هـ^{جاس} دس = \int ٢جاس جتاس\ هـ^{جاس} دس$ نفرض ص = جاس

ثم نكمل بالأجزاء ___

٣) $\int قاس\ هـ^{\sqrt{ظاس}} دس$ ___ نفرض $ص = \sqrt{ظاس} \Leftarrow ص^{٢} = ظاس$

ثم نكمل بالأجزاء ___

٤) $\int س^{٥} هـ^{س^{٢}} دس = \int س^{٥} هـ^{ص} \frac{دص}{٢س}$

$= \frac{١}{٢} \int س^{٤} هـ^{ص} دص = \frac{١}{٢} \int \underbrace{ص^{٢}}_{م} \underbrace{هـ^{ص}}_{د هـ} دص$

$ص = س^{٢}$

$\frac{دص}{دس} = ٢س$

$دس = \frac{دص}{٢س}$

$م = ص^{٢} \qquad د هـ = هـ^{ص} دص$

$دم = ٢ص دص \qquad هـ = هـ^{ص}$

$I = \frac{١}{٢} \int \left(ص^{٢} \times هـ^{ص} - \int هـ^{ص} \times ٢ص دص \right) = \frac{١}{٢} \left(ص^{٢} هـ^{ص} - \int \underbrace{٢ص}_{م} \underbrace{هـ^{ص}}_{د هـ} دص \right)$

$م = ٢ص \qquad د هـ = هـ^{ص} دص$

$دم = ٢دص \qquad هـ = هـ^{ص}$

$I = \frac{١}{٢} \left(ص^{٢} هـ^{ص} - \left(٢ص هـ^{ص} - \int ٢هـ^{ص} دص \right) \right)$

$I = \frac{١}{٢} \left(ص^{٢} هـ^{ص} - ٢ص هـ^{ص} + ٢هـ^{ص} \right) + جـ$

$= \frac{١}{٢} \left(س^{٤} هـ^{س^{٢}} - ٢س^{٢} هـ^{س^{٢}} + ٢هـ^{س^{٢}} \right) + جـ$

٥) $\int هـ^{\sqrt[٣]{س}} دس$ ___ نفرض $ص = \sqrt[٣]{س} \Leftarrow ص^{٣} = س \Leftarrow دس = ٣ص^{٢} دص$

$= \int هـ^{ص} \times ٣ص^{٢} دص = \int \underbrace{٣ص^{٢}}_{م} \underbrace{هـ^{ص}}_{د هـ} دص$ أجزاء مرتين ___

$$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}} \qquad \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{هـ}^{\text{س}} \qquad \text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{هـ}^{\text{س}}} \qquad \text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{ص}}$$

٦) $\int \text{هـ}^{٢\text{س}}\ \text{ظتا}^{٢}\,\text{هـ}^{\text{س}}\ \text{دس} = \int \text{هـ}^{٢\text{س}}\ \text{ظتا}^{٢}\text{ص}\ \frac{\text{دص}}{\text{هـ}^{\text{س}}}$

$= \int \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{ظتا}^{٢}\text{ص}\ \text{دص} = \int \text{ص}\ \text{ظتا}^{٢}\text{ص}\ \text{دص}$

$= \int \text{ص}\,(\text{قتا}^{٢}\text{ص} - ١)\ \text{دص} = \int \underbrace{\text{ص}}_{\text{ع}}\ \underbrace{\text{قتا}^{٢}\text{ص}}_{\text{دهـ}} - \underbrace{\text{ص}}_{\text{مباشر}}\ \text{دص}$

$= \text{ص} \times -\text{ظتا}\,\text{ص} - \int -\text{ظتا}\,\text{ص}\ \text{دص} - \frac{\text{ص}^{٢}}{٢} + \text{ج}$

$= -\text{ص}\ \text{ظتا}\,\text{ص} + \int \frac{\text{جتا}\,\text{ص}}{\text{جا}\,\text{ص}}\ \text{دص} - \frac{\text{ص}^{٢}}{٢} + \text{ج}$

$= -\text{ص}\ \text{ظتا}\,\text{ص} + \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جا}\,\text{ص}| - \frac{\text{ص}^{٢}}{٢} + \text{ج}$

$= -\text{هـ}^{\text{س}}\ \text{ظتا}\,\text{هـ}^{\text{س}} + \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جا}\,\text{هـ}^{\text{س}}| - \frac{\text{هـ}^{٢\text{س}}}{٢} + \text{ج}$

٧) $\int \underbrace{\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}}_{\text{ع}}\ \underbrace{(\text{س}+١)^{-٢}\ \text{دس}}_{\text{دهـ}}$

$\text{ع} = \text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}} \qquad \text{دهـ} = (\text{س}+١)^{-٢}\ \text{دس}$

$\text{دع} = \text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}} \qquad \text{هـ} = \frac{(\text{س}+١)^{-١}}{-١} = \frac{-١}{\text{س}+١}$

$\text{I} = \text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}} \times \frac{(\text{س}+١)^{-١}}{-١} - \int \frac{(\text{س}+١)^{-١}}{-١} \times (\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}})\ \text{دس}$

$= \frac{-\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}}{١+\text{س}} + \int \frac{١}{\cancel{١+\text{س}}} \times \underbrace{\text{هـ}^{\text{س}}}_{\text{عامل مشترك}} \cancel{(\text{س}+١)}\ \text{دس} = \frac{-\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}}{١+\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}} + \text{ج}$

٨) * ملغى $\int \underbrace{\text{هـ}^{\text{س}}}_{\text{دهـ}}\ \underbrace{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}_{\text{ع}}\ \text{دس}$

$\text{ع} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \qquad \text{دهـ} = \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{دس}$

$\text{دع} = \frac{١}{\text{س}}\ \text{دس} \qquad \text{هـ} = \text{هـ}^{\text{س}}$

$\text{I} = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \int \underbrace{\text{هـ}^{\text{س}}}_{\text{ع}} \times \underbrace{\frac{١}{\text{س}}\ \text{دس}}_{\text{دهـ}}$

$\text{ع} = \text{هـ}^{\text{س}} \qquad \text{دهـ} = \frac{١}{\text{س}}\ \text{دس}$

$\text{دع} = \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{دس} \qquad \text{هـ} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

$\text{I} = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \left(\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\ \text{دس}\right)$

$\text{I} = \cancel{\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}} - \cancel{\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}} + \int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\ \text{دس}$ (لا يجوز)

سؤال: أوجد التكاملات التالية:

أ) $\int \text{هـ}^{\text{س}^3 + 2\text{لو س}}\, \text{دس} = \int \text{هـ}^{\text{س}^3 + \text{لو س}^2}\, \text{دس} = \int \text{هـ}^{\text{س}^3} \times \text{هـ}^{\text{لو س}^2}\, \text{دس}$

نفرض ص $= \text{س}^3 \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 3\text{س}^2 \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{3\text{س}^2}$

$= \int \text{هـ}^{\text{ص}} \times \text{س}^2\, \text{دس} = \int \text{س}^2\, \text{هـ}^{\text{ص}}\, \text{دس} = \int \text{س}^2\, \text{هـ}^{\text{ص}}\, \frac{\text{دص}}{3\text{س}^2}$

$= \frac{1}{3}\int \text{هـ}^{\text{ص}}\, \text{دص} = \frac{1}{3}\text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ} = \frac{1}{3}\text{هـ}^{\text{س}^3} + \text{جـ}$

٢) $\int \text{س}(\text{هـ}^{\text{س}} \times \text{هـ}^{\text{لو س}})\, \text{دس} = \int \text{س} \times \text{هـ}^{\text{س}} \times \text{س}\, \text{دس} = \int \underbrace{\text{س}^2}_{\text{ع}}\, \underbrace{\text{هـ}^{\text{س}}\, \text{دس}}_{\text{دح}}$

ع $= \text{س}^2$ ، دع $= 2\text{س}\,\text{دس}$

دح $= \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس}$ ، ح $= \text{هـ}^{\text{س}}$

$I = \text{س}^2 \times \text{هـ}^{\text{س}} - \int \text{هـ}^{\text{س}} \times 2\text{س}\, \text{دس} = \text{س}^2\text{هـ}^{\text{س}} - \int \underbrace{2\text{س}}_{\text{ع}}\, \underbrace{\text{هـ}^{\text{س}}\, \text{دس}}_{\text{دح}}$

$= \text{س}^2\text{هـ}^{\text{س}} - \left(2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}} - \int 2 \times \text{هـ}^{\text{س}}\, \text{دس}\right)$

$= \text{س}^2\text{هـ}^{\text{س}} - 2\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}} + 2\text{هـ}^{\text{س}} + \text{جـ}$

٣) $\int 2\,\text{هـ}^{\text{س}}\, \text{جتاس جاس}\, \text{دس} = \int \underbrace{\text{هـ}^{\text{س}}}_{\text{ع}}\, \underbrace{\text{جا٢س}\, \text{دس}}_{\text{دح}} = \text{هـ}^{\text{س}} \times -\frac{1}{2}\text{جتا٢س} - \int -\frac{1}{2}\text{جتا٢س}\, \text{هـ}^{\text{س}}\, \text{دس}$

$= -\frac{1}{2}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتا٢س} + \frac{1}{2}\int \underbrace{\text{هـ}^{\text{س}}}_{\text{ع}}\, \underbrace{\text{جتا٢س}\, \text{دس}}_{\text{دح}}$

$= -\frac{1}{2}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتا٢س} + \frac{1}{2}\left(\text{هـ}^{\text{س}} \times \frac{1}{2}\text{جا٢س} - \int \frac{1}{2}\text{جا٢س} \times \text{هـ}^{\text{س}}\, \text{دس}\right)$

$= -\frac{1}{2}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتا٢س} + \frac{1}{4}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جا٢س} - \boxed{\frac{1}{4}\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جا٢س}\, \text{دس}}$ التكامل الأصلي

$\Leftarrow \frac{5}{4}\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جا٢س}\, \text{دس} = -\frac{1}{2}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتا٢س} + \frac{1}{4}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جا٢س}$

$\therefore \int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جا٢س}\, \text{دس} = \frac{4}{5}\left(-\frac{1}{2}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتا٢س} + \frac{1}{4}\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جا٢س}\right) + \text{جـ}$

٤) $\int \text{هـ}^{\text{س}}\, \text{جاهـ}^{\text{س}}\, \text{دس} = \int \text{هـ}^{\text{س}}\, \text{جاص}\, \frac{\text{دص}}{\text{هـ}^{\text{س}}}$

ص $= \text{هـ}^{\text{س}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{هـ}^{\text{س}}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{هـ}^{\text{س}}}$

$= \int \text{هـ}^{\text{س}}\, \text{جاص}\, \text{دص} = \int \underbrace{\text{ص}}_{\text{ع}}\, \underbrace{\text{جاص}\, \text{دص}}_{\text{دح}}$ — أجزاء ثم نكمل

مثال: إذا كان ميل المماس لمنحنى ق(س) عند أي نقطة (س، ص) يعطى بالعلاقة ٤س هـ^س^٢ ، جد معادلة هذا المنحنى علماً أنه يمر بـ (٠، ٣) .

الحل: $\frac{دص}{دس}$ = ٤س هـ^س^٢ ⟸ دص = ٤س هـ^س^٢ دس

⟸ ∫ دص = ∫ ٤س هـ^س^٢ دس معادلة تفاضلية | ع = س^٢ ، $\frac{دع}{دس}$ = ٢س ⟸ دس = $\frac{دع}{٢س}$

⟸ ص = ∫ ٤س هـ^ع $\frac{دع}{٢س}$

⟸ ص = ∫ ٢هـ^ع دع ⟸ ص = ٢هـ^ع + جـ

⟸ ص = ٢هـ^س^٢ + جـ ، يمر بالنقطة (٠، ٣)

⟸ ٣ = ٢هـ^٠ + جـ ⟸ ٣ = ٢ + جـ ⟸ $\boxed{جـ = ١}$

∴ ص = ٢هـ^س^٢ + ١

مثال: يتناقص حجم الماء في بركة بمعدل $\frac{١}{١٠}$ حجمها سنوياً ، فإذا كان حجم الماء الآن هو هـ^٢٥ جد حجم الماء بعد مرور ٢٠ سنة .

الحل: $\frac{دح}{دن}$ = $\frac{-١}{١٠}$ ح ⟸ دح = $\frac{-١}{١٠}$ ح دن ⟸ $\frac{دح}{ح}$ = $\frac{-١}{١٠}$ دن

∫ $\frac{دح}{ح}$ = ∫ $\frac{-١}{١٠}$ دن ⟸ لوهـ ح = $\frac{-١}{١٠}$ ن + جـ ، الشرط: ح = هـ^٢٥ عندما $\boxed{ن = ٠}$

لوهـ هـ^٢٥ = ٠ + جـ ⟸ $\boxed{جـ = ٢٥}$

∴ لوهـ ح = $\frac{-١}{١٠}$ ن + ٢٥ وعند $\boxed{ن = ٢٠}$

⟸ لوهـ ح = $\frac{-١}{١٠}$ (٢٠) + ٢٥ = ٢٣

∴ ح = هـ^٢٣

الأستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

الإبداع

مثال: تتكاثر نوع من الحشرات في مزرعة وفق المعادلة $\frac{\text{دك}}{\text{دن}} = \frac{1}{4}\text{ك}$ لكل ساعة حيث ك تدل على عدد الحشرات. اذا كانت ك = ٢٠٠ في البداية (ن = ٠)، ما عدد الحشرات بعد ٨ ساعات. (اعتبر $\text{هـ}^{2} = 7{,}4$).

الحل: $\frac{\text{دك}}{\text{دن}} = \frac{1}{4}\text{ك} \Leftarrow \text{دك} = \frac{1}{4}\text{ك دن} \Leftarrow \frac{\text{دك}}{\text{ك}} = \frac{1}{4}\text{دن}$

$\Leftarrow \int \frac{\text{دك}}{\text{ك}} = \int \frac{1}{4}\text{دن} \Leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ك} = \frac{1}{4}\text{ن} + \text{جـ}$ لكن: ك = ٢٠٠ عندما $\boxed{\text{ن} = 0}$

$\therefore \text{لو}_{\text{هـ}} 200 = 0 + \text{جـ} \Leftarrow \text{جـ} = \text{لو}_{\text{هـ}} 200$

$\therefore \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ك} = \frac{1}{4}\text{ن} + \text{لو}_{\text{هـ}} 200$ وعندما $\boxed{\text{ن} = 8}$

$\Leftarrow \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ك} = \frac{1}{4} \times 8 + \text{لو}_{\text{هـ}} 200 = 2 + \text{لو}_{\text{هـ}} 200$

$\therefore \text{ك} = \text{هـ}^{2 + \text{لو}_{\text{هـ}} 200} = \text{هـ}^{2} \times \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}} 200} = 7{,}4 \times 200 = 1480$

مثال: حل المعادلة التفاضلية $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} \times \frac{1}{\text{س}^2 - 4} = \frac{\text{هـ}^{-2\text{ص}}(\text{س}+3)}{\text{س}^2 - 2\text{س}}$

الحل: $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{هـ}^{-2\text{ص}}(\text{س}+3)(\text{س}^2-4)}{\text{س}^2 - 2\text{س}} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{هـ}^{-2\text{ص}}} = \frac{(\text{س}+3)\cancel{(\text{س}-2)}(\text{س}+2)}{\text{س}\cancel{(\text{س}-2)}}\text{دس}$

$\Leftarrow \text{هـ}^{2\text{ص}}\text{دص} = \left(\frac{\text{س}^2 + 5\text{س} + 6}{\text{س}}\right)\text{دس}$

$\Leftarrow \text{هـ}^{2\text{ص}}\text{دص} = \left(\frac{\text{س}^2}{\text{س}} + \frac{5\text{س}}{\text{س}} + \frac{6}{\text{س}}\right)\text{دس} \Leftarrow \text{هـ}^{2\text{ص}} = \left(\text{س} + 5 + \frac{6}{\text{س}}\right)\text{دس}$

$\therefore \int \text{هـ}^{2\text{ص}} = \int \left(\text{س} + 5 + \frac{6}{\text{س}}\right)\text{دس} \Leftarrow \frac{1}{2}\text{هـ}^{2\text{ص}} = \frac{\text{س}^2}{2} + 5\text{س} + 6\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{جـ}$

مثال: تنمو البكتيريا بمعدل $\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = \frac{3000}{1 + 0{,}25\text{ن}}$ في الساعة حيث ن الزمن، أوجد عدد البكتيريا بعد مرور ٤ ساعات علماً بأن العدد الأصلي هو ١٠٠٠.

الحل: $\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = \frac{3000}{1 + 0{,}25\text{ن}} \Leftarrow \text{دع} = \frac{3000}{1 + 0{,}25\text{ن}}\text{دن}$

$\int \text{دع} = \int \frac{3000}{1 + 0{,}25\text{ن}}\text{دن} \Leftarrow \text{ع} = \frac{3000}{0{,}25}\text{لو}_{\text{هـ}}|1 + 0{,}25\text{ن}| + \text{جـ}$

$= 12000\,\text{لو}_{\text{هـ}}|1 + 0{,}25\text{ن}| + \text{جـ}$ لكن ع = ١٠٠٠ عندما ن = ٠

$\therefore 1000 = 12000\,\text{لو}_{\text{هـ}}(1 + 0) + \text{جـ} \Leftarrow 1000 = 0 + \text{جـ} \Leftarrow \boxed{\text{جـ} = 1000}$

$\text{ع} = 12000\,\text{لو}_{\text{هـ}}|1 + 0{,}25\text{ن}| + 1000$ وعندما $\boxed{\text{ن} = 4}$ فإن $\text{ع} = 12000\,\text{لو}_{\text{هـ}} 2 + 1000$

<u>مثال</u>: يتحرك جسم بحيث أن تسارعه ت بعد ن من الزمن يرتبط بسرعته ع بالعلاقة ت ع = ٠٫٥ ، حيث ع > ٠ ، أوجد المسافة التي يقطعها الجسم بعد ٢٧ ثانية من بدء الحركة إذا علمت أن سرعته عند بدء الحركة ٣ م/ث وأن ف = ١٨ عند ن = ٠ .

<u>الحل</u>: ت ع = ٠٫٥ ⇐ ت = $\frac{٠٫٥}{ع}$ ⇐ $\frac{دع}{دن} = \frac{٠٫٥}{ع}$ ⇐ ع دع = ٠٫٥ دن

⇐ ∫ ع دع = ∫ ½ دن ⇐ $\frac{ع^2}{٢}$ = ½ ن + جـ

⇐ ع = ٣ عند ن = ٠ ⇐ $\frac{٩}{٢}$ = ٠ + جـ ⇐ $\boxed{جـ = \frac{٩}{٢}}$

∴ $\frac{ع^2}{٢}$ = ½ ن + $\frac{٩}{٢}$ ⇐ ع² = ن + ٩ ⇐ ع = $\sqrt{ن + ٩}$

⇐ ف = ∫ $\sqrt{ن + ٩}$ دن = $\frac{٢ (ن + ٩)^{\frac{٣}{٢}}}{٣}$ + جـ

⇐ ف = ١٨ عند ن = ٠ ⇐ ١٨ = $\frac{٢}{٣}(٠ + ٩)^{\frac{٣}{٢}}$ + جـ ⇐ $\boxed{جـ = ٠}$

∴ ف = $\frac{٢}{٣}(ن + ٩)^{\frac{٣}{٢}}$ وعند $\boxed{ن = ٢٧}$ ⇐ ف = $\frac{٢}{٣}(٢٧ + ٩)^{\frac{٣}{٢}}$ = ١٤٤

<u>مثال</u>: حل المعادلة التفاضلية التالية:

$\frac{دص}{دس}$ − ٢ص = ٠

<u>الحل</u>: $\frac{دص}{دس}$ = ٢ص ⇐ دص = ٢ص دس ⇐ ∫ $\frac{دص}{ص}$ = ∫ ٢ دس

لوهـ ص = ٢س + جـ ⇐ ص = هـ^(٢س + جـ) ⇐ ص = هـ^(٢س) × هـ^(جـ)

∴ ص = جـ هـ^(٢س)

<u>مثال</u>: ص = هـ^(س²) + جتا لوهـ س + $\int^{س} \frac{س}{٣س + ٥}$ دس + $\int^{\frac{\pi}{٤}} \frac{جا^2 س}{١ + ظا^2 س}$ دس ، جد $\frac{دص}{دس}$

<u>الحل</u>: $\frac{دص}{دس}$ = ٢س هـ^(س²) − جا لوهـ س × $\frac{١}{س}$ + $\frac{س}{٣س + ٥}$ + صفر

تكامل محدود مشتقته صفر

<u>مثال</u>: إذا كانت ص = أ هـ^(٣س) + جا لوهـ س وكانت $\frac{دص}{دس}\Big|_{س=١}$ = ٢هـ² + ١ جد أ

<u>الحل</u>: $\frac{دص}{دس}$ = ٣أ هـ^(٣س) + جتا لوهـ س × $\frac{١}{س}$

$\frac{دص}{دس}\Big|_{س=١}$ = ٣أ هـ³ + جتا لوهـ ١ × $\frac{١}{١}$ = ٣أ هـ³ + ١ = ٢هـ² + ١

⇐ ٣أ هـ³ = ٢هـ² ⇐ أ = $\frac{٢هـ^2}{٣هـ^3}$ = $\frac{٢}{٣هـ}$

مثال: حل المعادلة التفاضلية $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} \times \frac{١}{\text{س}^٢ - ٤} = \frac{\text{هـ}^{-٢\text{ص}} (\text{س} + ٣)}{\text{س}^٢ - ٢\text{س}}$

الحل: $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{هـ}^{-٢\text{ص}} (\text{س} + ٣)(\text{س}^٢ - ٤)}{\text{س}^٢ - ٢\text{س}}$

$$\Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{هـ}^{-٢\text{ص}}} = \frac{(\text{س}+٣)\cancel{(\text{س}-٢)}(\text{س}+٢)}{\text{س}\cancel{(\text{س}-٢)}} \text{دس}$$

$$\Leftarrow \text{هـ}^{٢\text{ص}} \text{دص} = \left(\frac{\text{س}^٢ + ٥\text{س} + ٦}{\text{س}}\right) \text{دس}$$

$$\Leftarrow \text{هـ}^{٢\text{ص}} \text{دص} = \left(\frac{\text{س}^٢}{\text{س}} + \frac{٥\text{س}}{\text{س}} + \frac{٦}{\text{س}}\right) \text{دس}$$

$$\Leftarrow \text{هـ}^{٢\text{ص}} = \left(\text{س} + ٥ + \frac{٦}{\text{س}}\right) \text{دس}$$

$$\Leftarrow \int \text{هـ}^{٢\text{ص}} \text{دص} = \int \left(\text{س} + ٥ + \frac{٦}{\text{س}}\right) \text{دس}$$

$$\Leftarrow \frac{١}{٢} \text{هـ}^{٢\text{ص}} = \frac{\text{س}^٢}{٢} + ٥\text{س} + ٦ \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}| + \text{جـ}$$

Scanned by CamScanner