في هذه الوحدة سنقوم بإعادة ترتيب الدروس وذلك بطريقة تقدم هذه الوحدة بصورة أفضل وأسهل حيث أن ترتيب الكتاب في هذه الوحدة على النحو التالي :

الدرس الأول : معكوس المشتقة

الدرس الثاني : قواعد التكامل غير المحدود

الدرس الثالث : التكامل المحدود

الدرس الرابع : اقتران اللوغريتم الطبيعي (مشتقته وتكامله)

الدرس الخامس : الاقتران الأسي الطبيعي (مشتقته وتكامله)

الدرس السادس : التكامل بالتعويض

الدرس السابع : التكامل بالأجزاء

الدرس الثامن : التكامل بالكسور الجزئية

الدرس التاسع : حساب المساحة باستخدام التكامل

الدرس العاشر : المعادلات التفاضلية

في هذه الوحدة سنتعلم أحد أهم علوم الرياضيات وهو التكامل ، حيث أن التكامل هو عكس التفاضل .

يعد التكامل من أهم علوم الرياضيات لما له أهمية عملية ، حيث أن التكامل يدخل في حساب المساحات والحجوم وأطوال المنحنيات . . . إلخ ، كما وأنه يدخل في العديد من التطبيقات الهندسية والفيزيائية

ويرمز للتكامل بالرمز $\int$ ق(س) دس

(وتقرأ تكامل ق(س) دال السين)

ويمكن التعبير عن العلاقة بين التفاضل والتكامل كما يلي :

إذا كان $\int$ ق(س) دس = هـ(س)

فإن هـَ(س) = ق(س)

ومن هذه العلاقة نستنتج أن مشتقة ناتج التكامل هو ما داخل التكامل

الدرس الأول : قواعد التكامل غير المحدود

في هذا الدرس سنتعلم بعضا من القواعد الأساسية لمادة التكامل ، سنقوم بسردها تباعا ليتسنى لك حفظها

① $\int \text{أ}\ \text{دس} = \text{أس} + \text{جـ}$

② $\int \text{س}^{\text{ن}}\ \text{دس} = \frac{\text{س}^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١} + \text{جـ}$

③ $\int \text{جتاس}\ \text{دس} = \text{جاس} + \text{جـ}$

④ $\int \text{جاس}\ \text{دس} = -\ \text{جتاس} + \text{جـ}$

⑤ $\int \text{قا}^{٢}\text{س}\ \text{دس} = \text{ظاس} + \text{جـ}$

⑥ $\int \text{قتا}^{٢}\text{س}\ \text{دس} = -\ \text{ظتاس} + \text{جـ}$

⑦ $\int \text{قاس ظاس}\ \text{دس} = \text{قاس} + \text{جـ}$

⑧ $\int \text{قتاس ظتاس}\ \text{دس} = -\ \text{قتاس} + \text{جـ}$

يتم إضافة **جـ** بعد كل تكامل غير محدود ويسمى هذا الثابت **بثابت التكامل**

مثال $\boxed{١}$ جد كلا من التكاملات التالية :

① $\int ٤\ \text{دس} = ٤\text{س} + \text{جـ}$

② $\int \text{دس} = \text{س} + \text{جـ}$

③ $\int \pi\ \text{دس} = \pi\text{س} + \text{جـ}$

④ $\int \frac{١}{٤}\ \text{دس} = \frac{١}{٤}\text{س} + \text{جـ}$

⑤ $\int \text{س}^{٣}\ \text{دس} = \frac{١}{٤}\text{س}^{٤} + \text{جـ}$

⑥ $\int \sqrt[٣]{\text{س}}\ \text{دس} = \int \text{س}^{\frac{١}{٣}}\ \text{دس}$

$= \frac{٣}{٤}\text{س}^{\frac{٤}{٣}} + \text{جـ}$

⑦ $\int \frac{١}{\sqrt{\text{س}}}\ \text{دس} = \int \text{س}^{-\frac{١}{٢}}\ \text{دس}$

$= ٢\text{س}^{\frac{١}{٢}} + \text{جـ}$

⑧ $\int \frac{١}{\sqrt[٣]{\text{س}}}\ \text{دس} = \int \text{س}^{-\frac{١}{٣}}\ \text{دس}$

$= \frac{٣}{٢}\text{س}^{\frac{٢}{٣}} + \text{جـ}$

⑨ $\int \frac{\text{س}^{٣}\sqrt{\text{س}}}{\text{س}}\ \text{دس} = \int \text{س}^{٢}\ \text{س}^{\frac{١}{٢}}\ \text{دس}$

$= \int \text{س}^{\frac{٥}{٢}}\ \text{دس} = \frac{٢}{٧}\text{س}^{\frac{٧}{٢}} + \text{جـ}$

⑩ $\int ٢\text{س}^{٣}\ \text{دس} = \frac{١}{٢}\text{س}^{٤} + \text{جـ}$

كما ويمكن ملاحظة أن

$$\int (\text{أ}\ \text{ق}(\text{س}) \pm \text{ب}\ \text{هـ}(\text{س}))\ \text{دس} =$$

$$\text{أ} \int \text{ق}(\text{س})\ \text{دس} \pm \text{ب} \int \text{هـ}(\text{س})\ \text{دس}$$

أي أن التكامل يتوزع على الجمع والطرح ، كما وأن التكامل لا يتوزع على الضرب والقسمة وفي هذه الحالة سنستخدم طرقا مختلفة لحل هذا النوع من التكاملات ، كما في الأمثلة التالية

⑪ $\int (\text{س}^{٢} + ٦\text{س} - ٣)\ \text{دس}$

$= \frac{١}{٣}\text{س}^{٣} + ٣\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + \text{جـ}$

⑫ $\int \frac{\text{س} - ١}{\sqrt[٣]{\text{س}}}\ \text{دس}$

$= \int \left(\frac{\text{س}}{\sqrt[٣]{\text{س}}} - \frac{١}{\sqrt[٣]{\text{س}}}\right)\text{دس}$

$= \int \left(\text{س}^{\frac{٢}{٣}} - \text{س}^{-\frac{١}{٣}}\right)\ \text{دس}$

$= \frac{٣}{٥}\text{س}^{\frac{٥}{٣}} + \frac{٣}{٢}\text{س}^{\frac{٢}{٣}} + \text{جـ}$

⑬ $\int (٦\text{س}^{٣} - ٢\text{س} + ٦)\ \text{دس}$

$= \frac{٣}{٢}\text{س}^{٤} - \text{س}^{٢} + ٦\text{س} + \text{جـ}$

⑭ $\int \frac{\text{س}^{٢} - ٩}{\text{س} - ٣}\ \text{دس}$

$= \int \frac{(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٣)}{\text{س} - ٣}\ \text{دس}$

$= \int (\text{س} + ٣)\ \text{دس} = \frac{١}{٢}\text{س}^{٢} + ٣\text{س} + \text{جـ}$

⑮ $\int (١ + ٤\text{ص})(\text{ص} + ٢)\ \text{دص}$

$= \int (\text{ص} + ٢ + ٤\text{ص}^{٢} + ٨\text{ص})\ \text{دص}$

$= \int (٤\text{ص}^{٢} + ٩\text{ص} + ٢)\ \text{دص}$

$= \frac{٤}{٣}\text{ص}^{٣} + \frac{٩}{٢}\text{ص}^{٢} + ٢\text{ص} + \text{جـ}$

تدريب $\boxed{١}$ جد كلا من التكاملات التالية :

① $\int \frac{٢\text{س}^{٢} - ٣\text{س}}{\sqrt[٣]{\text{س}}}\ \text{دس}$

② $\int (\text{ص} + ١)(\text{ص} + ٤)\ \text{دص}$

③ $\int (٢\text{ع} - ٣)^{٢}\ \text{دع}$

④ $\int \frac{\text{س}^{٤} + ٦\text{س}}{\text{س}^{٦}}\ \text{دس}$

⑤ $\int \frac{\text{س}^{٢} + \text{س}}{\text{س} + ١}\ \text{دس}$

⑥ $\int \text{أ}^{٤}\ \text{دس}$ ، أ $\in$ ح

⑦ $\int \frac{\text{س}^{٣} + ٨}{\text{س} + ٢}\ \text{دس}$

⑧ $\int \sqrt{\text{س}}\ (\sqrt{\text{س}} + \text{س})\ \text{دس}$

ويمكن استخدام القواعد التالية أيضا والتي سيتم اثباتها لاحقا

في درس **التكامل بالتعويض**

$\int (\text{أس+ب})^{\text{ن}}\ \text{دس} = \frac{(\text{أس+ب})^{\text{ن}+١}}{\text{أ}\times(\text{ن}+١)} + \text{جـ}$

$\int \text{جتا}(\text{أس+ب})\ \text{دس} = \frac{١}{\text{أ}}\text{جا}(\text{أس+ب}) + \text{جـ}$

$\int \text{جا}(\text{أس+ب})\text{دس} = -\frac{١}{\text{أ}}\text{جتا}(\text{أس+ب}) + \text{جـ}$

$\int \text{قا}^{٢}(\text{أس+ب})\ \text{دس} = \frac{١}{\text{أ}}\text{ظا}(\text{أس+ب}) + \text{جـ}$

$\int \text{قتا}^{٢}(\text{أس+ب})\text{دس} = -\frac{١}{\text{أ}}\text{ظتا}(\text{أس+ب}) + \text{جـ}$

$\int \text{قا}(\text{أس+ب})\ \text{ظا}(\text{أس+ب})\ \text{دس}$

$= \frac{١}{\text{أ}}\text{قا}(\text{أس+ب}) + \text{جـ}$

$\int \text{قتا}(\text{أس+ب})\ \text{ظتا}(\text{أس+ب})\ \text{دس}$

$= -\frac{١}{\text{أ}}\text{قتا}(\text{أس+ب}) + \text{جـ}$

مثال $\boxed{٢}$ جد كلا من التكاملات التالية :

$$① \int (\text{٥س} + ٧)^{١٢} \, \text{دس} = \frac{(\text{٥س}+٧)^{١٣}}{٥ \times ١٣} + \text{جـ}$$

$$② \int (١ - \text{س})^{٩} \, \text{دس} = \frac{(١ - \text{س})^{١٠}}{-١ \times ١٠} + \text{جـ}$$

$$③ \int \sqrt{\text{٢س} + ١} \, \text{دس} = \int (\text{٢س} + ١)^{\frac{١}{٢}} \, \text{دس}$$

$$= \frac{٢(\text{٢س}+١)^{\frac{٣}{٢}}}{٣ \times ٢} + \text{جـ}$$

$$④ \int (\text{س}^{٢} - \text{٢س} + ١)^{١٠} \, \text{دس}$$

$$= \int \left((\text{س} - ١)(\text{س} - ١)\right)^{١٠} \, \text{دس}$$

$$= \int (\text{س} - ١)^{٢٠} \, \text{دس} = \frac{(\text{س} - ١)^{٢١}}{٢١} + \text{جـ}$$

تدريب $\boxed{٢}$ جد كلا من التكاملات التالية :

$$① \int \sqrt[٣]{٤ - \text{٧س}} \, \text{دس}$$

$$② \int (\text{٤س}^{٢} + \text{٤س} + ١)^{٩} \, \text{دس}$$

$$③ \int \frac{٨}{(\text{٥س} - ٩)^{٤}} \, \text{دس}$$

$$④ \int \frac{١٢}{\sqrt[٣]{٤ - \text{٦س}}} \, \text{دس}$$

وهناك قاعدتين أخريين تبين العلاقة بين التفاضل (الاشتقاق) والتكامل وهما :

$$\int \text{ق}'(\text{س}) \, \text{دس} = \text{ق}(\text{س}) + \text{جـ}$$

$$\frac{\text{د}}{\text{دس}} \int \text{ق}(\text{س}) \, \text{دس} = \text{ق}(\text{س})$$

مثال $\boxed{٣}$ إذا كان $\int \text{ق}(\text{س}) \, \text{دس} = \text{س}^{٤} + \text{س} + ٤$.

جد $\text{ق}(١)$ ، $\text{ق}'(١)$ ، $\text{ق}''(-٥)$

$$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}} \left(\int \text{ق}(\text{س}) \, \text{دس}\right) = \frac{\text{ء}}{\text{ءس}} (\text{س}^{٤} + \text{س} + ٤)$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{٤س}^{٣} + ١ \quad \therefore \quad \text{ق}(١) = ٤ + ١ = ٥$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \text{١٢س}^{٢} \quad \Leftarrow \quad \text{ق}'(١) = ١٢$$

$$\text{ق}''(\text{س}) = \text{٢٤س} \Leftarrow \text{ق}''(-٥) = ٢٤ \times -٥ = -١٢٠$$

مثال $\boxed{٤}$ إذا كان

$$\int \text{ق}(\text{س}) \, \text{دس} = \text{٢س}^{٣} - \text{٤س}^{٢} + \text{٥س} + \text{جـ}$$

فجد $\text{ق}(١)$ ، $\text{ق}'(١)$

$$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}} \left(\int \text{ق}(\text{س}) \, \text{دس}\right) = \frac{\text{ء}}{\text{ءس}} (\text{٢س}^{٣} - \text{٤س}^{٢} + \text{٥س} + \text{جـ})$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{٦س}^{٢} - \text{٨س} + ٥$$

$$\therefore \quad \text{ق}(١) = ٦ - ٨ + ٥ = ٣$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \text{١٢س} - ٨$$

$$\therefore \quad \text{ق}'(١) = ١٢ - ٨ = ٤$$

مثال $\boxed{٥}$ إذا كان $\int \text{ق}'(\text{س}) \, \text{دس} = \text{س}^{٢} + \text{٣س} + ٣$.

$\text{ق}(١) = ٢$ ، فجد $\text{ق}(٤)$

$$\int \text{ق}'(\text{س}) \, \text{دس} = \text{س}^{٢} + ٣\,\text{س} + ٣$$

∴ ق(س) = س^{٢} + ٣س + ٣ + جـ

ق(١) = ٢ ∴ ٢ = (١)^{٢} + ٣×١ + ٣ + جـ

⇐ جـ = −٥

∴ ق(س) = س^{٢} + ٣س − ٢

ق(٤) = (٤)^{٢} + (٣×٤) − ٢ = ٢٦

مثال $\boxed{٦}$ إذا كان ق(س) = $\int \frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٣}+١}$ دس . فجد ق̄(س) ، ق̄(٢)

ق(س) = $\int \frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٣}+١}$ دس

ق̄(س) = $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٣}+١}$

ق̄(٢) = $\frac{٤}{٧}$

مثال $\boxed{٧}$ إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقط (س ، ص) يساوي (٢س) فجد قاعدة الاقتران ق(س) ،إذا علمت أنه يمر بالنقطة (−٢ ، ٢)

ق̄(س) = ٢س

$\int$ ق̄(س) دس = $\int$ ٢س دس

ق(س) = س^{٢} + جـ

لكن ق(−٢) = ٢

٢ = (−٢)^{٢} + جـ ⇐ جـ = −٢

∴ ق(س) = س^{٢} − ٢

تدريب $\boxed{٣}$ إذا كان $\int$ ق(س) دس = جاس + جتاس + جـ . فجد ق̄($\frac{\pi}{٤}$)

تدريب $\boxed{٤}$ إذا كان

$\int$(ق̄(س) + ٢س) دس = س^{٣} + ٩س + ١ . وكان ق̄(١) = ٥، ق(٢) = ٧ جد :

① قيمة ٩ ② ق(٠)

تدريب $\boxed{٥}$ إذا كان $\int$ ق̄(س) دس = ٦س^{٢} + ٢س + ٣ . فجد ق̄(١)

تدريب $\boxed{٦}$ إذا كان ق̄(س) + جتاس = ٢س ، فجد ق(س) حيث ق($\frac{\pi}{٢}$) = ٤

تدريب $\boxed{٧}$ إذا كان ص = $\int \sqrt[٣]{\text{س}^{٢}+٣\text{س}+٥}$ دس

فجد $\left.\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right|_{\text{س}=-١}$

تدريب $\boxed{٨}$ إذا كان $\int$ق(س) دس = س^{٣} − س^{٢} + ٢س + ١ فجد. ق̄(−٣)

تدريب $\boxed{٩}$ إذا كان $\int$ق(س) دس = جاس − جتاس + ٢ ، فأثبت أن ق($\frac{\pi}{٢}$) − ق̄($\frac{\pi}{٢}$) = ٢

تدريب $\boxed{١٠}$ إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق عند النقطة (س ، ص) يساوي (٥س^{٤} + ٢س + ٣)، فجد قاعدة الاقتران ق علما بأن ق(٢) = ٣

قد نحتاج لحل بعض التكاملات التي تحتوي على اقترانات مثلثية استخدام بعض أساسياتها ، منها

ظاس = $\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$ ، قاس = $\frac{١}{\text{جتاس}}$

ظتاس = $\frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}$ ، قتاس = $\frac{١}{\text{جاس}}$

كما ويمكن استخدام بعض المتطابقات المثلثية لحل بعض التكاملات، ومن هذه المتطابقات :

جا^{2}س + جتا^{2}س = ١ ←
- جا^{2}س = ١ − جتا^{2}س
- جتا^{2}س = ١ − جا^{2}س

ظا^{2}س = قا^{2}س − ١

ظتا^{2}س = قتا^{2}س − ١

جا٢س = ٢جاس جتاس

⇐ جاس جتاس = $\frac{١}{٢}$ جا٢س

جتا٢س = جتا^{2}س − جا^{2}س

= ٢جتا^{2}س − ١

= ١ − ٢جا^{2}س

جتا^{2}س = $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ جتا٢س

جا^{2}س = $\frac{١}{٢}$ − $\frac{١}{٢}$ جتا٢س

جتا(س ± ص) = جتاس جتاص ∓ جاس جاص

جا(س ± ص) = جاس جتاص ± جتاس جاص

مثال $\boxed{٨}$ جد كلا من التكاملات التالية :

(١) ∫ (جا^{2}س + جتا^{2}س) دس

= ∫ ١ دس = س + جـ

(٢) ∫ قاس (ظاس + جتاس) دس

= ∫ (قاس ظاس + قاس جتاس) دس

= ∫ (قاس ظاس + $\frac{١}{\text{جتاس}}$ جتاس) دس

= قاس + س + جـ

(٣) ∫ $\frac{\text{دل}}{\text{جا}^2\text{ل}}$ = ∫ قتا^{2}ل دل = − ظتال + جـ

(٤) ∫ جا٢س دس

= $\frac{-١}{٢}$ جتا٢س + جـ

(٥) ∫ (١ + ظا^{2}س) دس

= ∫ قا^{2}س دس = ظاس + جـ

(٦) ∫ قا^2 $\frac{\text{س}}{٢}$ دس = ٢ظا $\frac{\text{س}}{٢}$ + جـ

(٧) ∫ $\frac{\text{دس}}{\text{قتا}\pi\text{س}}$ = ∫ جاπس دس

= $\frac{-١}{\pi}$ جتاπس + جـ

⑧ $\int \frac{\text{١}}{\text{١} - \text{جا}^{\text{٢}}\text{٣س}} \, \text{دس}$

$= \int \frac{\text{١}}{\text{جتا}^{\text{٢}}\text{٣س}} \, \text{دس} = \int \text{قا}^{\text{٢}}\text{٣س} \, \text{دس}$

$= \frac{\text{١}}{\text{٣}} \, \text{ظا٣س} + \text{ج}$

⑨ $\int \frac{\text{دس}}{\text{٢} - \text{٢جتا}^{\text{٢}}\text{س}} = \int \frac{\text{دس}}{\text{٢}(\text{١} - \text{جتا}^{\text{٢}}\text{س})}$

$= \int \frac{\text{دس}}{\text{٢جا}^{\text{٢}}\text{س}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}} \int \text{قتا}^{\text{٢}}\text{س} \, \text{دس}$

$= \frac{-\text{١}}{\text{٢}} \, \text{ظتاس} + \text{ج}$

⑩ $\int \left(\text{جا}^{\text{٢}} \tfrac{\text{١}}{\text{٤}}\text{س} - \text{جتا}^{\text{٢}} \tfrac{\text{١}}{\text{٤}}\text{س}\right) \text{دس}$

لاحظ $\text{جتا٢س} = \text{جتا}^{\text{٢}}\text{س} - \text{جا}^{\text{٢}}\text{س}$

$= \int -\text{جتا} \tfrac{\text{١}}{\text{٢}}\text{س} \, \text{دس} = -\text{٢جا} \frac{\text{س}}{\text{٢}} + \text{ج}$

⑪ $\int \text{جا}^{\text{٢}} \frac{\text{س}}{\text{٢}} \, \text{دس} = \int \left(\tfrac{\text{١}}{\text{٢}} - \tfrac{\text{١}}{\text{٢}}\text{جتاس}\right) \text{دس}$

$= \tfrac{\text{١}}{\text{٢}}\text{س} - \tfrac{\text{١}}{\text{٢}}\text{جاس} + \text{ج}$

⑫ $\int \text{جا} \frac{\text{س}}{\text{٢}} \, \text{جتا} \frac{\text{س}}{\text{٢}} \, \text{دس} = \int \tfrac{\text{١}}{\text{٢}}\text{جاس} \, \text{دس}$

$= -\tfrac{\text{١}}{\text{٢}}\text{جتاس} + \text{ج}$

✓ وعند وجود أحد الأشكال التالية في المقام ١ ± جتاس ، ١ ± جاس فإننا نستخدم طريقة الضرب بالمرافق المثلثي ويتم ذلك بضرب البسط والمقام بالمقدار السابق مع استبدال الإشارة بين ١ و (جاس ، جتاس) ، كما سنوضحه في المثال التالي

⑬ $\int \frac{\text{١}}{\text{١} + \text{جاس}} \, \text{دس}$

$= \int \frac{\text{١}}{\text{١} + \text{جاس}} \times \frac{\text{١} - \text{جاس}}{\text{١} - \text{جاس}} \, \text{دس}$

$= \int \frac{\text{١} - \text{جاس}}{\text{١} - \text{جا}^{\text{٢}}\text{س}} \, \text{دس} = \int \frac{\text{١} - \text{جاس}}{\text{جتا}^{\text{٢}}\text{س}} \, \text{دس}$

$= \int \left(\frac{\text{١}}{\text{جتا}^{\text{٢}}\text{س}} - \frac{\text{جاس}}{\text{جتا}^{\text{٢}}\text{س}}\right) \text{دس}$

$= \int (\text{قا}^{\text{٢}}\text{س} - \text{قاس ظاس}) \, \text{دس}$

$= \text{ظاس} - \text{قاس} + \text{ج}$

⑭ $\int \frac{\text{جتا٢س}}{\text{جا}^{\text{٢}}\text{س جتا}^{\text{٢}}\text{س}} \, \text{دس}$

$= \int \frac{\text{جتا٢س}}{\left(\tfrac{\text{١}}{\text{٢}}\text{جا٢س}\right)^{\text{٢}}} \, \text{دس} = \text{٤} \int \frac{\text{جتا٢س}}{\text{جا}^{\text{٢}}\text{٢س}} \, \text{دس}$

$= \text{٤} \int \text{قتا٢س ظتا٢س} \, \text{دس} = -\text{٢قتا٢س} + \text{ج}$

⑮ $\int \frac{\text{جتا}^{\text{٣}}\text{س} - \text{٥}}{\text{١} - \text{جا}^{\text{٢}}\text{س}} \, \text{دس}$

$= \int \frac{\text{جتا}^{\text{٣}}\text{س} - \text{٥}}{\text{جتا}^{\text{٢}}\text{س}} \, \text{دس}$

$= \int \left(\frac{\text{جتا}^{\text{٣}}\text{س}}{\text{جتا}^{\text{٢}}\text{س}} - \frac{\text{٥}}{\text{جتا}^{\text{٢}}\text{س}}\right) \text{دس}$

$= \int (\text{جتاس} - \text{٥قا}^{\text{٢}}\text{س}) \, \text{دس}$

$= \text{جاس} - \text{٥ظاس} + \text{ج}$

⑯ $\int \text{جا}^{\text{٤}}\text{س} \, \text{دس} = \int (\text{جا}^{\text{٢}}\text{س})^{\text{٢}} \, \text{دس}$

$= \int \left(\frac{\text{١}}{\text{٢}} - \frac{\text{١}}{\text{٢}} \, \text{جتا٢س}\right)^{\text{٢}} \text{دس}$

$$= \int \left(\frac{١}{٤} - \frac{١}{٢}\,\text{جتا٢س} + \frac{١}{٤}\,\text{جتا}^{٢}\,\text{٢س}\right) \text{دس}$$

$$= \int \left(\frac{١}{٤} - \frac{١}{٢}\,\text{جتا٢س} + \frac{١}{٤}\left(\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}\,\text{جتا٤س}\right)\right) \text{دس}$$

$$= \int \left(\frac{٣}{٨} - \frac{١}{٢}\,\text{جتا٢س} + \frac{١}{٨}\,\text{جتا٤س}\right) \text{دس}$$

$$= \frac{٣}{٨}\,\text{س} - \frac{١}{٤}\,\text{جا٢س} + \frac{١}{٣٢}\,\text{جا٤س} + \text{جـ}$$

(١٧) $\int \frac{\text{١ − جا٢س}}{\text{جاس − جتاس}}\,\text{دس}$

$$= \int \frac{\text{جا}^{٢}\text{س} + \text{جتا}^{٢}\text{س} - \text{٢جاس جتاس}}{\text{جاس − جتاس}}\,\text{دس}$$

$$= \int \frac{\text{جا}^{٢}\text{س} - \text{٢جاس جتاس} + \text{جتا}^{٢}\text{س}}{\text{جاس − جتاس}}\,\text{دس}$$

$$= \int \frac{(\text{جاس − جتاس})^{٢}}{\text{جاس − جتاس}}\,\text{دس}$$

$$= \int (\text{جاس − جتاس})\,\text{دس}$$

$$= -\,\text{جتاس} - \text{جاس} + \text{جـ}$$

(١٨) $\int \frac{\text{جتا٣س}}{\text{جتا س}}\,\text{دس}$

$$= \int \frac{\text{جتا (٢س + س)}}{\text{جتا س}}\,\text{دس}$$

$$= \int \frac{\text{جتا ٢س جتاس − جا٢س جاس}}{\text{جتا س}}\,\text{دس}$$

$$= \int \left(\frac{\text{جتا ٢س جتاس}}{\text{جتاس}} - \frac{\text{٢ جاس جتاس جاس}}{\text{جتا س}}\right) \text{دس}$$

$$= \int (\text{جتا٢س} - \text{٢جا}^{٢}\text{س})\,\text{دس}$$

$$= \int \left(\text{جتا٢س} - ٢ \times \frac{١}{٢}(\text{١ − جتا٢س})\right) \text{دس}$$

$$= \int (\text{٢جتا٢س − ١})\,\text{دس} = \text{جا٢س − س + جـ}$$

وهناك أيضا متطابقات حاصل ضرب اقترانين مثلثيين وهي

$$\text{جاس جتاص} = \frac{١}{٢}\left(\text{جا(س − ص)} + \text{جا(س+ص)}\right)$$

$$\text{جتاس جتاص} = \frac{١}{٢}\left(\text{جتا(س − ص)} + \text{جتا(س+ص)}\right)$$

$$\text{جاس جاص} = \frac{١}{٢}\left(\text{جتا(س − ص)} - \text{جتا(س+ص)}\right)$$

وإليك بعض الأمثلة

(١٩) $\int \text{جا٦س جا٤س دس}$

$$= \int \frac{١}{٢}\left(\text{جتا(٦س − ٤س)} - \text{جتا(٦س + ٤س)}\right)\text{دس}$$

$$= \int \frac{١}{٢}\left(\text{جتا٢س} - \text{جتا١٠س}\right)\text{دس}$$

$$= \frac{١}{٤}\,\text{جا٢س} - \frac{١}{٢٠}\,\text{جا١٠س} + \text{جـ}$$

(٢٠) $\int \text{جتا٣س جتا٧س دس}$

$$= \int \frac{١}{٢}\left(\text{جتا(٣س − ٧س)} + \text{جتا(٣س + ٧س)}\right)\text{دس}$$

$$= \int \frac{١}{٢}\left(\text{جتا(−٤س)} + \text{جتا١٠س}\right)\text{دس}$$

$$= \frac{١}{٨}\,\text{جا٤س} + \frac{١}{٢٠}\,\text{جا١٠س} + \text{جـ}$$

(٢١) $\int \text{جا٤س جتا٨س دس}$

$$= \int \frac{١}{٢}\left(\text{جا(٤س − ٨س)} + \text{جا(٤س + ٨س)}\right)\text{دس}$$

$$= \int \frac{١}{٢}\left(\text{جا(−٤س)} + \text{جا١٢س}\right)\text{دس}$$

$$= \frac{١}{٨}\,\text{جتا٤س} - \frac{١}{٢٤}\,\text{جتا١٢س} + \text{جـ}$$

تدريب $\boxed{\text{١١}}$ جد كلا من التكاملات التالية :

(١) $\int (\text{جتا}^{\text{٢}}\text{٥س} - \text{جا}^{\text{٢}}\text{٥س})\ \text{دس}$

(٢) $\int (\text{٣} + \text{ظا}^{\text{٢}}\text{٧س})\ \text{دس}$

(٣) $\int \text{ظتا}^{\text{٢}}\text{٥س}\ \text{دس}$

(٤) $\int (\text{جاس} - \text{٣جتاس})\ \text{دس}$

(٥) $\int (\text{قا}^{\text{٢}}\text{س} - \text{ظا}^{\text{٢}}\text{س})\ \text{دس}$

(٦) $\int \dfrac{\text{دس}}{\text{١} - \text{جتاس}}$

(٧) $\int \dfrac{\text{١}}{\text{١} + \text{جتا ٢س}}\ \text{دس}$

(٨) $\int \dfrac{\text{٥}}{\text{جا}^{\text{٢}}\text{س}}\ \text{دس}$

(٩) $\int \dfrac{\text{١} - \text{جا}^{\text{٢}}\text{س}}{\text{جا}^{\text{٢}}\frac{\text{س}}{\text{٢}} \times \text{جتا}^{\text{٢}}\frac{\text{س}}{\text{٢}}}\ \text{دس}$

(١٠) $\int \text{جتا}^{\text{٢}}\text{١٠س}\ \text{دس}$

(١١) $\int \text{جتا}^{\text{٤}}\text{س}\ \text{دس}$

(١٢) $\int \dfrac{\text{جتا٢س}}{\text{جتا}^{\text{٢}}\text{س} - \text{جتا}^{\text{٤}}\text{س}}\ \text{دس}$

(١٣) $\int (\text{جاس} + \text{جتاس})^{\text{٢}}\ \text{دس}$

(١٤) $\int (\text{قاس} + \text{ظاس})^{\text{٢}}\ \text{دس}$

(١٥) $\int (\text{جاس جتاس})^{\text{٢}}\ \text{دس}$

(١٦) $\int \dfrac{\text{قا}^{\text{٢}}\text{س} - \text{ظا}^{\text{٢}}\text{س}}{\sqrt{\text{س}}}\ \text{دس}$

(١٧) $\int \dfrac{\text{جا ٢س}}{\text{جتاس جا}^{\text{٣}}\text{س}}\ \text{دس}$

(١٨) $\int (\text{٥س}^{\text{٢}} - \text{٣ظتا}^{\text{٢}}\text{س})\ \text{دس}$

(١٩) $\int \text{جا٤س جتا٩س}\ \text{دس}$

(٢٠) $\int \text{جتاس جتا٣س}\ \text{دس}$

(٢١) $\int \text{جا٣مس جا٥مس}\ \text{دس}$

الدرس الثاني : معكوس المشتقة

إذا كان ٯ اقترانا متصلا على مجاله، فإن م (س) معكوس لمشتقة الاقتران ٯ إذا كان م َ(س) = ٯ (س) ، لكل س في مجال ٯ

ويمكن إيجاد المعكوس للمشتقة م (س) للاقتران ٯ (س) باستخدام العلاقة التالية

$$\text{م (س)} = \int \text{ٯ (س) دس}$$

وقد يكون للاقتران الواحد أكثر من معكوس لمشتقة بحيث كل معكوس لمشتقة يختلف عن الاقتران الآخر بالثابت ومما سبق يمكن استنتاج ما يلي :

إذا كان م (س)، ك(س) معكوسان لمشتقة الاقتران ٯ (س) فإن

م (س) − ك(س) = ب ، حيث ب ثابت

مثال [١] بيّن أن الاقتران $\text{م}(\text{س}) = \text{س}^{٣} + ٤\text{س}$ معكوسا لمشتقة الاقتران ق الذي قاعدته $\text{ق}(\text{س}) = ٣\text{س}^{٢} + ٤$

بما أن $\text{م}'(\text{س}) = ٣\text{س}^{٢} + ٤ = \text{ق}(\text{س})$

ق(س) متصل لأنه كثير حدود

∴ م معكوسا لمشتقة الاقتران ق

مثال [٢] جد معكوسا لمشتقة الاقتران ق(س) = جتاس

ق(س) متصل على مجاله

م(س) = جاس لأن م'(س) = جتاس

تدريب [١] جد معكوسا لمشتقة الاقتران

$$\text{ق}(\text{س}) = ٤\text{س}^{٣} + \text{قا}^{٢}\text{س}$$

تدريب [٢] بيّن أن الاقتران $\text{م}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}^{٢} + ٦\text{س}}$ هو معكوس لمشتقة الاقتران ق حيث $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س} + ٣}{\sqrt{\text{س}^{٢} + ٦\text{س}}}$

تدريب [٣] جد معكوس للمشتقة م للاقتران $\text{ك}(\text{س}) = \frac{-١}{\text{س}^{٢}}$ ، $\text{م}(٣) = ١$

تدريب [٤] إذا كان ق(س) = أس + ب ، وكان م(س) معكوسا لمشتقة الاقتران ق حيث $\text{م}'(٢) = ٧$ ، $\text{م}''(٢) = ٢$. جد قيم الثابتين أ ، ب

الدرس الثالث : التكامل المحدود

يعبر عن هذا التكامل بـ $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\, \text{دس}$

حيث **أ** يسمى **الحد السفلي** ، **ب** يسمى **الحد العلوي**

وفي هذه الحالة نقوم بتكامل الاقتران ق(س) تكاملا غير محدود دون وضع ثابت التكامل جـ ومن ثم نقوم بتعويض **ب** في ناتج التكامل ومن ثم **أ** فيه

مثال [١] إذا كان ق(٣) = ٥ ، ق(٤) = ١٠ . فجد

$$\int_{٣}^{٤} \text{ق}'(\text{س})\, \text{دس}$$

$$\int_{٣}^{٤} \text{ق}'(\text{س})\, \text{دس} = \text{ق}(\text{س}) \Big]_{٣}^{٤} = \text{ق}(٤) - \text{ق}(٣) = ١٠ - ٥ = ٥$$

مثال [٢] إذا كان ق(س) = ٢س + ١ ، فجد :

(١) $\int \text{ق}(\text{س})\, \text{دس}$ (٢) $\int_{-١}^{٢} \text{ق}(\text{س})\, \text{دس}$

(١) $\int \text{ق}(\text{س})\, \text{دس} = \int (٢\text{س} + ١)\, \text{دس}$

$= \text{س}^{٢} + \text{س} + \text{جـ}$

(٢) $\int_{-١}^{٢} \text{ق}(\text{س})\, \text{دس} = (\text{س}^{٢} + \text{س}) \Big]_{-١}^{٢}$

$= (٤ + ٢) - ((-١)^{٢} - ١) = ٦ - ٠ = ٦$

مثال ٣ جد $\int_{-٣}^{٦} (\frac{١}{٢}س - ٦)\ دس$

$\int_{-٣}^{٦} (\frac{١}{٢}س - ٦)\ دس = (\frac{١}{٤}س^{٢} - ٦س)]_{-٣}^{٦}$

$= (\frac{١}{٤}(٦)^{٢} - ٣٦) - (\frac{١}{٤}(-٣)^{٢} - ٦(-٣))$

$= ٩ - ٣٦ - \frac{٩}{٤} - ١٨ = -\frac{١٤٩}{٤}$

مثال ٤ إذا كان م(س) ، هـ (س) معكوسان لمشتقة الاقتران ق(س) وكان $\int_{٠}^{٧} (م(س) - هـ(س))\ دس = ٢٨$. فجد

$\int_{١}^{٥} س(م(س) - هـ(س))\ دس$

بما أن م(س) ، هـ(س) معكوسان لمشتقة الاقتران ق(س) فإن م(س) − هـ(س) = جـ

$\int_{٠}^{٧} (م(س) - هـ(س))\ دس = ٢٨$

$\Leftarrow \int_{٠}^{٧} جـ\ دس = ٢٨ \Leftarrow جـ(٧-٠) = ٢٨$

$\Leftarrow جـ = ٤$

$\therefore \int_{١}^{٥} س(م(س) - هـ(س))\ دس$

$= \int_{١}^{٥} ٤س\ دس = ٢س^{٢}]_{١}^{٥}$

$= ٥٠ - ٢ = ٤٨$

ويمكن استخدام القاعدة $\int_{أ}^{ب} جـ\ دس = جـ(ب - أ)$

مثال ٥ إذا كان $\int_{١}^{٢أ} ٣\ دس = ٦$ ، جد قيمة أ

$\int_{١}^{٢أ} ٣\ دس = ٦ \Leftarrow ٣(٢أ - ١) = ٦$

$\Leftarrow ٢أ - ١ = ٢ \Leftarrow ٢أ = ٣$

$\Leftarrow أ = \frac{٣}{٢}$

مثال ٦ إذا كان $\int_{١+أ}^{٢+٣أ} ٥\ دس = ٤٠$ ، جد قيمة أ

$\int_{١+أ}^{٢+٣أ} ٥\ دس = ٤٠$

$٥(٢+٣أ - (١+أ)) = ٤٠$

$٢أ + ١ = ٨ \Leftarrow أ = ٧ \Leftarrow أ = \frac{٧}{٢}$

مثال ٧ جد كلاً من التكاملات التالية:

(١) $\int_{١}^{٢} س^{٤}\ دس$

$\int_{١}^{٢} س^{٤}\ دس = \frac{١}{٥}س^{٥}]_{١}^{٢}$

$= \frac{٣٢}{٥} - \frac{١}{٥} = \frac{٣١}{٥}$

(٢) $\int_{-١}^{٢} ن^{٣}\ دن$

$\int_{-١}^{٢} ن^{٣}\ دن = \frac{١}{٤}ن^{٤}]_{-١}^{٢}$

$= \frac{١٦}{٤} - \frac{١}{٤} = \frac{١٥}{٤}$

(٣) $\int_{١}^{٢} \frac{١}{س^{٣}}\ دس$

$\int_{١}^{٢} \frac{١}{س^{٣}}\ دس = \int_{١}^{٢} س^{-٣}\ دس = -\frac{١}{٢}س^{-٢}]_{١}^{٢}$

$= \frac{(٢)^{-٢}}{-٢} - \frac{(١)^{-٢}}{-٢} = \frac{٣}{٨}$

④ $\int_{١}^{٤} \sqrt{\text{س}}\ \text{دس}$

$$\int_{١}^{٤} \sqrt{\text{س}}\ \text{دس} = \int_{١}^{٤} \text{س}^{\frac{١}{٢}}\ \text{دس} = \frac{٢}{٣}\left[\text{س}^{\frac{٣}{٢}}\right]_{١}^{٤}$$

$$= \frac{٢}{٣}(٤)^{\frac{٣}{٢}} - \frac{٢}{٣}(١)^{\frac{٣}{٢}} = \frac{١٤}{٣}$$

⑤ $\int_{٢}^{٣} \frac{١}{\text{ع}^{-٢}}\ \text{دع}$

$$\int_{٢}^{٣} \frac{١}{\text{ع}^{-٢}}\ \text{دع} = \int_{٢}^{٣} \text{ع}^{٢}\ \text{دع} = \frac{١}{٣}\left[\text{ع}^{٣}\right]_{٢}^{٣}$$

$$= \frac{٢٧}{٣} - \frac{٨}{٣} = \frac{١٩}{٣}$$

⑥ $\int_{-٢}^{٢} \text{س}^{٦}\ \text{دس}$

$$\int_{-٢}^{٢} \text{س}^{٦}\ \text{دس} = \frac{١}{٧}\left[\text{س}^{٧}\right]_{-٢}^{٢}$$

$$= \frac{١٢٨}{٧} - \frac{-١٢٨}{٧} = \frac{٢٥٦}{٧}$$

مثال $\boxed{٨}$ إذا كان $\int_{-١}^{١} \text{س}^{\text{ن}}\ \text{دس} = \text{صفر}$، $\text{ن} \in \text{ط}$ ،

جد قيم ن

$$\int_{-١}^{١} \text{س}^{\text{ن}}\ \text{دس} = \text{صفر}$$

$$\left[\frac{\text{س}^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١}\right]_{-١}^{١} = \text{صفر}$$

$$\frac{(١)^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١} - \frac{(-١)^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١} = \text{صفر}$$

$$\frac{١ - (-١)^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١} = \text{صفر}$$

$$١ = (-١)^{\text{ن}+١}$$

$\therefore$ ن + ١ = عدد زوجي

$\therefore$ ن = عدد فردي

مثال $\boxed{٩}$ جد قيمة $\int_{٠}^{١} \text{س}^{\text{ن}}\ \text{دس} + \int_{٠}^{١} \text{س}^{\frac{١}{\text{ن}}}\ \text{دس}$

، ن ≠ ١

$$\int_{٠}^{١} \text{س}^{\text{ن}}\ \text{دس} + \int_{٠}^{١} \text{س}^{\frac{١}{\text{ن}}}\ \text{دس}$$

$$= \left[\frac{\text{س}^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١}\right]_{٠}^{١} + \left[\frac{\text{س}^{\frac{١}{\text{ن}}+١}}{\frac{١}{\text{ن}}+١}\right]_{٠}^{١}$$

$$= \left(\frac{١}{\text{ن}+١} - ٠\right) + \left(\frac{١}{\frac{١}{\text{ن}}+١} - ٠\right)$$

$$= \frac{١}{\text{ن}+١} + \frac{١}{\frac{١+\text{ن}}{\text{ن}}}$$

$$= \frac{١}{\text{ن}+١} + \frac{\text{ن}}{١+\text{ن}} = \frac{١+\text{ن}}{١+\text{ن}} = ١$$

مثال $\boxed{١٠}$ ق كثير حدود من الدرجة الأولى يمر بالنقطة (−١ ، ١)

وكان $\int_{٠}^{١} \text{ق(س)}\ \text{دس} = ١٤$. جد قاعدة الاقتران ق

ق كثير حدود من الدرجة الأولى

$\Leftarrow$ ق(س) = أس + ب

ق يمر بالنقطة (−١ ، ١) $\Leftarrow$ ق(−١) = ١

− أ + ب = ١ ... ①

$$\int_{٠}^{٢} (أس + ب)\, دس = ١٤$$

$$\left[\frac{١}{٢} أس^{٢} + ب س \right]_{٠}^{٢} = ١٤$$

$$٢أ + ٢ب = ١٤$$

$$\Leftarrow \quad أ + ب = ٧ \quad \ldots \quad (٢)$$

وبحل المعادلتين (١) ، (٢)

$$٢ب = ٨$$

$$\Leftarrow \quad ب = ٤ \quad \Leftarrow \quad أ = ٣$$

تدريب $\boxed{١}$ جد $\int_{\frac{\pi}{٣}}^{\frac{\pi}{٢}} جاس\, دس$

تدريب $\boxed{٢}$ جد $\int_{\frac{\pi}{٣}}^{\frac{\pi}{٦}} قتاس\ ظتاس\, دس$

تدريب $\boxed{٣}$ $\int_{-١}^{ب} س\, دس = صفر$ ، جد قيمة ب

تدريب $\boxed{٤}$ إذا كان $\int_{-١}^{١} س^{ن}\, دس = ٢ \int_{٠}^{١} س^{ن}\, دس$

، $ن \in ط \cup \{٠\}$ ، جد قيم ن

تدريب $\boxed{٥}$ جد $\int_{\frac{\pi}{٦}} (قاس - ظاس)^{٢}\, دس$

تدريب $\boxed{٦}$ إذا كان $\int_{أ}^{٥} ٣أ\, دس = ١٢$ ، فجد أ

تدريب $\boxed{٧}$ جد $\int_{١}^{٤} \sqrt{س}\,(س + \sqrt{س})\, دس$

تدريب بيّن أن $\int_{٠}^{١} س^{ن}\, دس + \int_{٠}^{١} س^{\frac{١}{ن}}\, دس = ١$

تدريب إذا كانت ن عددا صحيحا موجبا أثبت أن

$$\frac{ن + ١}{٢} \int_{-١}^{١} س^{ن}\, دس = \begin{cases} ١ & ،\ ن\ زوجية \\ صفر & ،\ ن\ فردية \end{cases}$$

وللتكامل المحدود خواص منها :

$\boxed{١}$ الخواص الخطية

(١) $\int_{أ}^{ب} جـ\, ق(س)\, دس = جـ \int_{أ}^{ب} ق(س)\, دس$

(٢)

$$\int_{أ}^{ب} \left(ق(س) \pm هـ(س)\right) دس = \int_{أ}^{ب} ق(س) دس \pm \int_{أ}^{ب} هـ(س) دس$$

وقد تم استخدام هذه الخاصية سابقا في درس التكامل غير المحدود

$\boxed{٢}$ خاصية الإضافة

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\, دس = \int_{أ}^{جـ} ق(س)\, دس + \int_{جـ}^{ب} ق(س)\, دس$$

وليس شرطا أن تقع جـ بين أ ، ب

تستخدم هذه الخاصية فعليا عند إجراء التكامل على الاقترانات المتشعبة واقتران القيمة المطلقة واقتران أكبر عدد صحيح المعرفة على عدة قواعد وفترات متعددة

٣ $\int_{\text{أ}}^{\text{أ}} \text{د}(\text{س})\,\text{دس} = \text{صفر}$

٤ $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\,\text{دس} = -\int_{\text{ب}}^{\text{أ}} \text{د}(\text{س})\,\text{دس}$

٥ خاصية المقارنة

إذا كان $\text{د}(\text{س}) \geq \text{هـ}(\text{س})$ لكل $\text{س} \in [\text{أ} ، \text{ب}]$ فإن

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\,\text{دس} \geq \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{هـ}(\text{س})\,\text{دس}$$

٦ إذا كان $\text{د}(\text{س}) \geq \text{صفر}$ لكل $\text{س} \in [\text{أ} ، \text{ب}]$ فإن

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\,\text{دس} \geq \text{صفر}$$

إذا كان $\text{د}(\text{س}) \leq \text{صفر}$ لكل $\text{س} \in [\text{أ} ، \text{ب}]$ فإن

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\,\text{دس} \leq \text{صفر}$$

مثال ٩ إذا كان $\int_{3}^{\text{ب}} (3\text{س}^2 + 4\text{س} + 1)\,\text{دس} = \text{صفر}$ ،

جد ب

$$\int_{3}^{\text{ب}} (3\text{س}^2 + 4\text{س} + 1)\,\text{دس} = \text{صفر}$$

$$\left[\text{س}^3 + 2\text{س}^2 + \text{س}\right]_{3}^{\text{ب}} = \text{صفر}$$

$$\text{ب}^3 + 2\text{ب}^2 + \text{ب} - (27 + 18 + 3) = \text{صفر}$$

$$\text{ب}^3 + 2\text{ب}^2 + \text{ب} - 48 = \text{صفر}$$

$$\text{ب} = 3$$

$$(\text{ب} - 3)(\text{ب}^2 + 5\text{ب} + 16) = \text{صفر}$$

$$\text{المميز} = (5)^2 - 4 \times 1 \times 16 = -39 < 0$$

لا تحلل $\Leftarrow$ ∴ مجموعة الحل ب = ٣

	س^3	س^2	س	ثابت
	١	٢	١	‎−٤٨
٣		٣	١٥	٤٨
	١	٥	١٦	صفر

مثال ١١ إذا علمت أن $\int_{6}^{8} (2\text{د}(\text{س}) + 1)\,\text{دس} = 8$ ،

جد $\int_{8}^{6} \text{د}(\text{س})\,\text{دس}$

$$\int_{6}^{8} (2\text{د}(\text{س}) + 1)\,\text{دس} = 8$$

$$2\int_{6}^{8} \text{د}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{6}^{8} \text{دس} = 8$$

$$2\int_{6}^{8} \text{د}(\text{س})\,\text{دس} + (8 - 6) = 8$$

$$2\int_{6}^{8} \text{د}(\text{س})\,\text{دس} = 6$$

$$\int_{6}^{8} \text{د}(\text{س})\,\text{دس} = 3$$

$$\therefore \int_{8}^{6} \text{د}(\text{س})\,\text{دس} = -3$$

مثال ١٢ إذا علمت أن $\int_{1}^{5} (3\text{د}(\text{س}) + 8)\,\text{دس} = 44$

جد $\int_{1}^{5} (2\text{د}(\text{س}) - 7)\,\text{دس}$

$$\int_{1}^{5} (3\text{د}(\text{س}) + 8)\,\text{دس} = 44$$

$$٣\int_{١}^{٥}\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{١}^{٥}٨\,\text{دس} = ٤٤$$

$$٣\int_{١}^{٥}\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + ٨(٥ - ١) = ٤٤$$

$$٣\int_{١}^{٥}\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ١٢$$

$$\int_{١}^{٥}\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٤$$

$$\int_{٥}^{١}(٢\text{ق}(\text{س}) - ٧)\,\text{دس}$$

$$= ٢\int_{٥}^{١}\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} - \int_{٥}^{١}٧\,\text{دس}$$

$$= ٢ \times -٤ - ٧(١ - ٥) = ٢٠$$

مثال $\boxed{١٣}$ إذا علمت أن $\int_{٥}^{٩}(٢\text{ق}(\text{س}) + ١)\,\text{دس} = ٢٠$ ، $\int_{١}^{٩}\frac{١}{٢}\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٦$ ، جد $\int_{٥}^{١}(\text{ق}(\text{س}) + ٢\text{س})\,\text{دس}$

$$\int_{٥}^{٩}(٢\text{ق}(\text{س}) + ١)\,\text{دس} = ٢٠$$

$$٢\int_{٥}^{٩}\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{٥}^{٩}\text{دس} = ٢٠$$

$$٢\int_{٥}^{٩}\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + ٤ = ٢٠$$

$$\int_{٥}^{٩}\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٨$$

$$\int_{١}^{٩}\frac{١}{٢}\text{ق}(\text{س})\text{دس} = ٦ \Leftarrow \int_{١}^{٩}\text{ق}(\text{س})\text{دس} = ١٢$$

لكن

$$\int_{١}^{٩}\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \int_{١}^{٥}\text{ق}(\text{س})\text{دس} + \int_{٥}^{٩}\text{ق}(\text{س})\text{دس}$$

$$١٢ = \int_{١}^{٥}\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + ٨$$

$$\int_{١}^{٥}\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٤$$

$$\therefore \int_{٥}^{١}(\text{ق}(\text{س}) + ٢\text{س})\,\text{دس}$$

$$= \int_{٥}^{١}\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{٥}^{١}٢\text{س}\,\text{دس}$$

$$= -٤ + [\text{س}^٢]_{٥}^{١} = -٤ + (١ - ٢٥)$$

$$= -٢٨$$

مثال $\boxed{١٤}$ ليكن $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٣\text{س}^٢ \text{ ، } ٠ \le \text{س} \le ١ \\ \text{س} + ٢ \text{ ، } ١ < \text{س} \le ٤ \end{cases}$

جد $\int_{٠}^{٤}\text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$

$$\int_{٠}^{٤}\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \int_{٠}^{١}\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{١}^{٤}\text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$$

$$= \int_{٠}^{١}٣\text{س}^٢\,\text{دس} + \int_{١}^{٤}(\text{س} + ٢)\,\text{دس}$$

$$= [\text{س}^٣]_{٠}^{١} + \left[\frac{١}{٢}\text{س}^٢ + ٢\text{س}\right]_{١}^{٤}$$

$$= (١ - ٠) + (٨ + ٨) - \left(\frac{١}{٢} + ٢\right)$$

$$= ١٤,٥$$

مثال [١٥] ق(س) = $\begin{cases} \text{س} + \text{م} ، & ٢ \le \text{س} < ٤ \\ ٣\text{س}^{٢} ، & ٤ \le \text{س} \le ٦ \end{cases}$

إذا علمت أن $\int_{٢}^{٥}$ ق(س) دس = ٢٠٠ ، جد قيمة م

$\int_{٢}^{٥}$ ق(س) دس = ٢٠٠

$\int_{٢}^{٤}$ (س + م) دس + $\int_{٤}^{٥}$ ٣س^{٢} دس = ٢٠٠

$[\frac{١}{٢}\text{س}^{٢}]_{٢}^{٤}$ + م(٤ − ٢) + $[\text{س}^{٣}]_{٤}^{٥}$ = ٢٠٠

(٨ − ٢) + ٢م + (١٢٥ − ٦٤) = ٢٠٠

٢م = ١٣٣ ⇐ م = $\frac{١٣٣}{٢}$

تدريب إذا كان $\int_{٢}^{\text{ب}}$ (٣س^{٢} − ٨س + ١) دس = صفر ،

جد ب

تدريب [٨] إذا علمت أن $\int_{٣}^{٧}$ (٤ق(س) + ٦) دس = ٢٠

، جد $\int_{٧}^{٣}$ (ق(س) + س) دس

تدريب [٩] إذا علمت أن $\int_{١}^{٦}$ (٣ق(س) + ٢س) دس = ٤٠

، $\int_{١}^{٦}$ (هـ(س) − ١) دس = ٢٠ ، جد $\int_{١}^{٦}$ (ق(س) + هـ(س)) دس

تدريب [١٠] ق(س) = $\begin{cases} ٢\text{س} + ١ ، & -١ \le \text{س} < ٢ \\ \text{س}^{٢} ، & \text{س} = ٢ \\ ٦ - \text{س} ، & ٢ < \text{س} \le ٥ \end{cases}$

جد $\int_{-١}^{٥}$ ق(س) دس

تدريب [١١] إذا علمت أن $\int_{١٢}^{٦}$ (ق(س) + ١) دس = ٧ ،

$\int_{٣}^{١٢}$ ٣ق(س) دس = ٦ ، جد $\int_{٦}^{٣}$ (ق(س) + ٢) دس

مثال [١٦] جد $\int_{-١}^{٢}$ |١ − ٢س| دس

نقوم بإعادة تعريف القيمة المطلقة على الفترة [−١ ، ٢]

١ − ٢س = ٠ ⇐ س = $\frac{١}{٢}$

+ −

٢ $\frac{١}{٢}$ −١

$\int_{-١}^{\frac{١}{٢}}$ (١ − ٢س) دس + $\int_{\frac{١}{٢}}^{٢}$ (٢س − ١) دس

= $[(\text{س} - \text{س}^{٢})]_{-١}^{\frac{١}{٢}}$ + $[(\text{س}^{٢} - \text{س})]_{\frac{١}{٢}}^{٢}$

= $(\frac{١}{٢} - \frac{١}{٤}) - (-١ - (-١)^{٢}) + (٤ - ٢) + (\frac{١}{٤} - \frac{١}{٢})$

= ٤,٥

مثال [١٧] إذا علمت أن $\int_{-٢}^{٣}$ س|س| دس = $\int_{٢}^{٥}$ م س دس .

جد م

نقوم بإعادة تعريف القيمة المطلقة على الفترة [−٢ ، ٣]

س = ٠

− +

٣ ٠ −٢

$$\int_{-٢}^{٠} -س^{٢}\,دس + \int_{٠}^{٣} س^{٢}\,دس = \frac{١}{٢}م\,س^{٢}\Big]_{٢}^{٥}$$

$$\frac{١}{٣}س^{٣}\Big]_{-٢}^{٠} + \frac{١}{٣}س^{٣}\Big]_{٠}^{٣} = \frac{١}{٢}م(٢٥ - ٤)$$

$$-\left(٠ - \frac{٨}{٣}\right) + (٩ - ٠) = \frac{٢١}{٢}م$$

$$\frac{١٩}{٣} = \frac{٢١}{٢}م \quad \Leftarrow \quad م = \frac{٣٨}{٦٣}$$

مثال $\boxed{١٨}$ جد $\int_{٣}^{٤} \frac{س^{٣} - ٨}{|س - ٢|}\,دس$

$$\int_{٣}^{٤} \frac{س^{٣} - ٨}{|س - ٢|}\,دس = \int_{٣}^{٤} \frac{س^{٣} - ٨}{س - ٢}\,دس$$

$$= \int_{٣}^{٤} \frac{(س - ٢)(س^{٢} + ٢س + ٤)}{س - ٢}\,دس$$

$$= \int_{٣}^{٤} (س^{٢} + ٢س + ٤)\,دس$$

$$= \left(\frac{١}{٣}س^{٣} + س^{٢} + ٤س\right)\Big]_{٣}^{٤}$$

$$= \left(\frac{٦٤}{٣} + ١٦ + ١٦\right) - (٩ + ٩ + ١٢) = \frac{٧٠}{٣}$$

مثال $\boxed{١٩}$ جد $\int_{٢}^{٣} |س^{٢} - ١|\,دس$

$$\int_{٢}^{٣} |س^{٢} - ١|\,دس = \int_{٢}^{٣} (س^{٢} - ١)\,دس$$

$$= \left(\frac{١}{٣}س^{٣} - س\right)\Big]_{٢}^{٣}$$

$$= (٩ - ٣) - \left(\frac{٨}{٣} - ٢\right) = \frac{١٦}{٣}$$

$\frac{\pi}{٤}$

مثال $\boxed{٢٠}$ جد $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} \sqrt{١ + جا٢س}\,دس$

$$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} \sqrt{١ + جا٢س}\,دس$$

$$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} \sqrt{جا^{٢}س + جتا^{٢}س + ٢\,جاس\,جتاس}\,دس$$

$$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} \sqrt{جا^{٢}س + ٢\,جاس\,جتاس + جتا^{٢}س}\,دس$$

$$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} \sqrt{(جاس + جتاس)(جاس + جتاس)}\,دس$$

$$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} \sqrt{(جاس + جتاس)^{٢}}\,دس$$

$$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} |جاس + جتاس|\,دس$$

لاحظ أن جاس ، جتاس في الربع الأول موجبان

ومجموعهما موجب

$$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} |جاس + جتاس|\,دس$$

$$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} (جاس + جتاس)\,دس$$

$$= -\,جتاس + جاس\Big]_{٠}^{\frac{\pi}{٤}}$$

$$= \left(-\frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}}\right) - (-١ + ٠) = ١$$

مثال $\boxed{21}$ جد $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1 + جتا2س}{2}}\ دس$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1 + جتا2س}{2}}\ دس = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{2جتا^{2}س}{2}}\ دس$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} |جتاس|\ دس$$

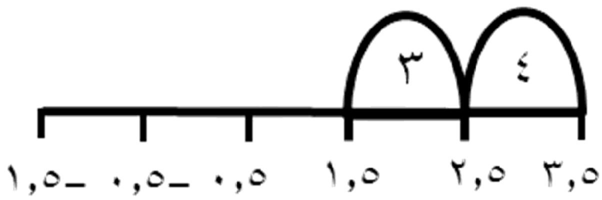
ولأن التكامل المحدود في الربع الأول فإن جتاس موجب

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} |جتاس|\ دس = جاس \Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 0 = 1$$

مثال $\boxed{22}$ جد $\int_{2}^{3} [س + 1,5]\ دس$

نقوم بإعادة تعريف أكبر عدد صحيح على الفترة [2 ، 3]

ل = 1 ، س = −1,5



$$\int_{2}^{3} [س + 1,5]\ دس$$

$$= \int_{2}^{2,5} 3\ دس + \int_{2,5}^{3} 4\ دس$$

$$= 3(2,5 - 2) - 4(3 - 2,5) = 3,5$$

مثال $\boxed{23}$ جد $\int_{2}^{8} [1 - \frac{س}{4}]\ دس$

نقوم بإعادة تعريف أكبر عدد صحيح على الفترة [2 ، 8]

ل = 4

$$\int_{2}^{8} [1 - \frac{س}{4}]\ دس = \int_{2}^{4} 0\ دس + \int_{4}^{8} -1\ دس$$

$$= صفر - (8 - 4) = -4$$

مثال $\boxed{24}$ جد $\int_{5}^{7} س\ [1 - س]\ دس$

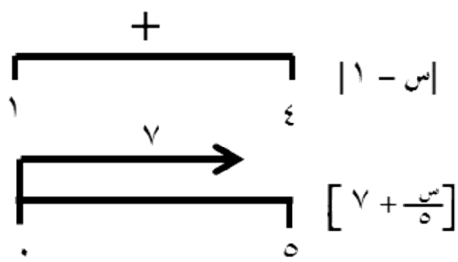
ل = 1

$$\int_{5}^{6} -5س\ دس + \int_{6}^{7} -6س\ دس$$

$$= -\frac{5}{2} س^{2} \Big]_{5}^{6} - 3س^{2} \Big]_{6}^{7}$$

$$= -\frac{5}{2}(36 - 25) - 3(49 - 36) = -\frac{133}{2}$$

مثال $\boxed{25}$ جد $\int_{1}^{4} \frac{|س - 1|}{[\frac{س}{5} + 7]}\ دس$



$$\int_{1}^{4} \frac{س - ١}{٧} \, دس = \left[\frac{١}{١٤} س^{٢}\right]_{1}^{4} - \left[\frac{١}{٧} س\right]_{1}^{4}$$

$$= \frac{١}{١٤}(١٦ - ١) - \frac{١}{٧}(٤ - ١) = \frac{٩}{١٤}$$

مثال $\boxed{٢٦}$ جد $\int_{0}^{٣ن} \left[\frac{س}{ن}\right] دس$ ، ن عدد صحيح موجب

ل = ن

$$\int_{0}^{ن} ٠ \, دس + \int_{ن}^{٢ن} ١ \, دس + \int_{٢ن}^{٣ن} ٢ \, دس$$

$$= ١(٢ن - ن) + ٢(٣ن - ٢ن) = ٣ن$$

مثال $\boxed{٢٧}$ إذا كان $\int_{4}^{م} \left[\frac{س}{٣} + ٥\right] دس = ٤٠$ ، جد م

نقوم بالتكامل كلا على حدى حتى نصل إلى أن يكون مجموع

التكاملات أقل من أو يساوي ٤٠

$$\int_{4}^{6} ٦ \, دس + \int_{6}^{9} ٧ \, دس + \int_{9}^{م} ٨ \, دس = ٤٠$$

$$٦(٦ - ٤) + ٧(٩ - ٦) + ٨(م - ٩) = ٤٠$$

$$١٢ + ٢١ + ٨م - ٧٢ = ٤٠$$

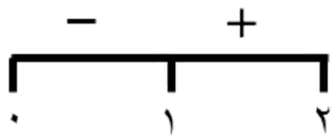
$$٨م = ٧٩ \Leftarrow م = \frac{٧٩}{٨}$$

مثال $\boxed{٢٨}$ جد $\int_{0}^{2} \sqrt{س^{٢} - ٢س + ١} \, دس$

$$\int_{0}^{2} \sqrt{س^{٢} - ٢س + ١} \, دس$$

$$= \int_{0}^{2} \sqrt{(س - ١)(س - ١)} \, دس$$

$$= \int_{0}^{2} \sqrt{(س - ١)^{٢}} \, دس = \int_{0}^{2} |س - ١| \, دس$$



$$\int_{0}^{2} |س - ١| \, دس$$

$$= \int_{0}^{1} (١ - س) \, دس + \int_{1}^{2} (س - ١) \, دس$$

$$= \left[س - \frac{١}{٢} س^{٢}\right]_{0}^{1} + \left[\left(\frac{١}{٢} س^{٢} - س\right)\right]_{1}^{2}$$

$$= \left(١ - \frac{١}{٢}\right) + \left(٠ - - \frac{١}{٢}\right) = ١$$

تدريب $\boxed{١٢}$ جد كلا من التكاملات التالية :

① $\int_{3}^{5} |٤س - ١| \, دس$

② $\int_{1}^{2} |٤ - س| \, دس$

③ $\int_{2}^{4} \left[\frac{١}{٢} س + ١\right] دس$

④ $\int_{0}^{2} \left[١ - ٢س\right] دس$

⑤ $\int_{0}^{3} \frac{|س - ٢|}{[س + ١]} \, دس$

⑥ $\int_{3}^{5} \frac{|س + ١|}{[س - ١]} \, دس$

⑦ $\int_{٠}^{٣} \frac{|\text{س} - ١|}{[\frac{\text{س}}{٢} + ١]} \, \text{دس}$

تدريب $\boxed{١٣}$ إذا كان $\int_{\text{أ}}^{٨} [\frac{\text{س}}{٣} + ٥] \, \text{دس} = ٤٧$ ،

جد أ ، حيث $\text{أ} < ٨$

تدريب $\boxed{١٤}$ إذا كان $\int_{\text{أ}}^{٢} [٢\text{س} - ١] \, \text{دس} = -٩$ ،

جد أ ، حيث $\text{أ} < ٢$

تدريب $\boxed{١٥}$ إذا كان $\int_{٩}^{\text{أ}} [\frac{١}{٢}\text{س} - ١] \, \text{دس} = -٩$

، جد أ ، حيث $\text{أ} < ٩$

في التدريبين (١٤) ، (١٥) اجعل ناتج التكامل يساوي عددا موجبا ومن ثم جد قيم الثوابت

في أسئلة المقارنة ، هناك ٤ حالات

يعطي التمثيل البياني للاقتران ق(س) وفي هذه الحالة نجد أعلى قيمة للاقتران ق(س) ⇐ (ك) وأقل قيمة للاقتران ق(س) ⇐ (ل) ونحصر الاقتران ق(س) على الصورة $\text{ل} \le \text{ق(س)} \le \text{ك}$ ثم نجري العملية المطلوبة
يكون هناك بمعطيات السؤال مثلا $\text{ك} \le \text{ق(س)} \le \text{ل}$ وفي هذه الحالة يكون السؤال جاهزا للحل
استخدام $-١ \le \text{جاس} \le ١$ ، $-١ \le \text{جتاس} \le ١$ ، أو ما يعادله في الربع الذي يحصر فيه قيم س فمثلا في الربع الأول يكون $٠ \le \text{جاس} \le ١$ ، $٠ \le \text{جتاس} \le ١$ ، والربع الرابع مثلا $-١ \le \text{جاس} \le ٠$ ، $٠ \le \text{جتاس} \le ١$ وهكذا
استخدام طرق القيم القصوى بإيجاد القيمة العظمى و الصغرى للاقتران ق بالتفاضل

وإليك عدة أمثلة على كل فكرة

مثال $\boxed{٢٨}$ دون حساب قيمة التكامل ما إشارة $\int_{١}^{٢} \text{س}^٣ \, \text{دس}$

افرض $\text{ق(س)} = \text{س}^٣$ ، $\text{س} \in [١ ، ٢]$

$\text{ق(س)} > \text{صفر}$ لكل $\text{س} \in [١ ، ٢]$

$\Leftarrow \int_{١}^{٢} \text{س}^٣ \, \text{دس} > ٠$

مثال ٢٩ دون حساب قيمة التكامل ما إشارة كل من التكاملات التالية :

① $\int_{٧}^{٤} \frac{س}{س - ٢}$ دس

نفرض أن ق(س) = $\frac{س}{س - ٢}$ ، س ∈ [٤ ، ٧]

س > ٠ لكل س ∈ [٤ ، ٧]

س − ٢ > ٠ لكل س ∈ [٤ ، ٧]

∴ $\frac{س}{س - ٢}$ لكل س ∈ [٤ ، ٧]

$\int_{٤}^{٧} \frac{س}{س - ٢}$ دس > ٠

∴ $\int_{٧}^{٤} \frac{س}{س - ٢}$ دس < ٠

② $\int_{٠}^{\pi}$ جاس دس

نفرض أن ق(س) = جاس ، س ∈ [٠ ، π]

لاحظ أن ق(س) معرف على الربع الأول والثاني

∴ ق(س) > ٠

جاس > ٠ ⇐ $\int_{٠}^{\pi}$ جاس دس > ٠

③ $\int_{\pi}^{\frac{٣\pi}{٤}}$ ظاس دس

نفرض أن ق(س) = ظاس ، س ∈ [$\frac{٣\pi}{٤}$ ، π]

لاحظ أن ق(س) معرف على الفترة [$\frac{٣\pi}{٤}$ ، π] والتي تقع في الربع الثاني

∴ ق(س) < ٠

ظاس < ٠ ⇐ $\int_{\frac{٣\pi}{٤}}^{\pi}$ ظاس دس < ٠

⇐ $\int_{\pi}^{\frac{٣\pi}{٤}}$ ظاس دس > ٠

مثال ٣٠ دون حساب قيمة التكامل أيهما أكبر

$\int_{٠}^{١}$ س دس ، $\int_{٠}^{١}$ س^{٢} دس

نقارن بتعويض قيم

ق(س) = س ، هـ(س) = س^{٢}

ق(٠) = ٠ ، هـ(٠) = ٠

ق($\frac{١}{٢}$) = $\frac{١}{٢}$ ، هـ($\frac{١}{٢}$) = $\frac{١}{٤}$

ق(١) = ١ ، هـ(١) = ١

بالمقارنة نجد أن

س ≤ س^{٢} س ∈ [٠ ، ١]

∴ $\int_{٠}^{١}$ س دس ≤ $\int_{٠}^{١}$ س^{٢} دس

مثال ٣١ إذا كان ق(س) ≤ ٩ لكل س ∈ [١ ، ٩]

جد أصغر قيمة للمقدار $\int_{١}^{٩}$ (٤ق(س) + ٣) دس

ق(س) ≤ ٩ ⇐ ٤ق(س) ≤ ٣٦

⇐ ٤ق(س) + ٣ ≤ ٣٩ ⇐

$\int_{٠}^{٩} \left(٤ق(س) + ٣\right) دس \le \int_{٠}^{٩} ٣٩\ دس$

$\int_{٠}^{٩} \left(٤ق(س) + ٣\right) دس \le ٣٩(٩ - ٠)$

$\int_{٠}^{٩} \left(٤ق(س) + ٣\right) دس \le ٣١٢$

أصغر قيمة هي ٣١٢

مثال $\boxed{٣٢}$ إذا كان $-٢ \le ق(س) \le ٣$ ، س $\in$ [١ ، ٣] ، فجد أكبر وأصغر قيمة للمقدار

$\int_{١}^{٣} \left(ق^{٢}(س) + ٢س\right) دس$

$-٢ \le ق(س) \le ٣$

$\Leftarrow \quad ٠ \le ق^{٢}(س) \le ٩$

$\int_{١}^{٣} ٢س\ دس \le \int_{١}^{٣} \left(ق^{٢}(س) + ٢س\right) دس \le \int_{١}^{٣} (٩ + ٢س) دس$

$\left[س^{٢}\right]_{١}^{٣} \le \int_{١}^{٣} \left(ق^{٢}(س) + ٢س\right) دس \le \left[(٩س + س^{٢})\right]_{١}^{٣}$

$(٩ - ١) \le \int_{١}^{٣} \left(ق^{٢}(س) + ٢س\right) دس \le ٣٦ - ١٠$

$\Leftarrow \ ٨ \le \int_{١}^{٣} \left(ق^{٢}(س) + ٢س\right) دس \le ٢٦$

أصغر قيمة هي ٨ ، أكبر قيمة ٢٦

مثال $\boxed{٣٣}$ جد أكبر وأصغر قيمة للمقدار $\int_{٠}^{٢\pi} (٦ + ٥جتاس) دس$

لاحظ أن $-١ \le جتاس \le ١$ ، س $\in$ [٠ ، ٢π]

$-٥ \le ٥جتاس \le ٥$

$١ \le ٥جتاس + ٦ \le ١١$

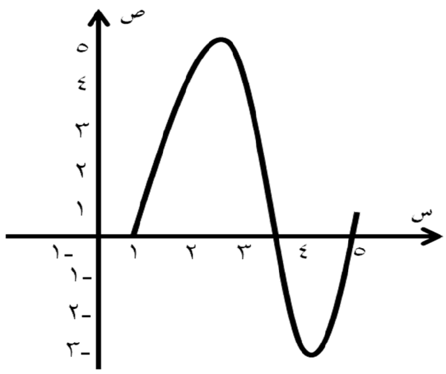
$\int_{٠}^{٢\pi} دس \le \int_{٠}^{٢\pi} (٥جتاس + ٦)\ دس \le \int_{٠}^{٢\pi} ١١\ دس$

$\left[س\right]_{٠}^{٢\pi} \le \int_{٠}^{٢\pi} (٥جتاس + ٦) دس \le \left[١١س\right]_{٠}^{٢\pi}$

$٢\pi \le \int_{٠}^{٢\pi} (٥جتاس + ٦)\ دس \le ٢٢\pi$

أصغر قيمة هي ٢π ، أكبر قيمة ٢٢π

مثال $\boxed{٣٤}$ معتمدا على الرسم الذي يمثل ق(س) جد أكبر قيمة وأصغر قيمة للمقدار $\int_{١}^{٥} ق(س)\ دس$



من الرسم نجد أن $-٣ \le ق(س) \le ٥$

$\int_{١}^{٥} -٣\ دس \le \int_{١}^{٥} ق(س)\ دس \le \int_{١}^{٥} ٥\ دس$

$-٣(٥ - ١) \le \int_{١}^{٥} ق(س) دس \le ٥(٥ - ١)$

أصغر قيمة −١٢ ، أكبر قيمة ٢٠

مثال $\boxed{٣٥}$ بيّن أن $٠ \le \int_{-١}^{١} \sqrt{١ - س^{٢}}\ دس \le ٢$

نفرض $ق(س) = \sqrt{١ - س^{٢}}$ ، $س \in [-١ ، ١]$

$$ق'(س) = \frac{-٢س}{٢\sqrt{١ - س^{٢}}} = صفر \Leftarrow س = ٠$$

نجد $ق(٠) = ١$ ، $ق(١) = ٠$ ، $ق(-١) = ٠$

ومنه نجد أن $٠ \le ق(س) \le ١$

$$\int_{-١}^{١} ٠\ دس \le \int_{-١}^{١} \sqrt{١ - س^{٢}}\ دس \le \int_{-١}^{١} ١\ دس$$

$$٠ \le \int_{-١}^{١} \sqrt{١ - س^{٢}}\ دس \le ٢$$

تدريب $\boxed{١٦}$ دون حساب قيمة التكامل أيهما أكبر

$$\int_{١}^{٢} \frac{١}{س}\ دس \quad ، \quad \int_{١}^{٢} \frac{١}{س^{٢}}\ دس$$

تدريب $\boxed{١٧}$ $ق(س) \le ٢٠$ ، $س \in [٢ ، ٤]$. جد

أكبر قيمة للمقدار $\int_{٢}^{٤} (٦ق(س) + س)\ دس$

تدريب $\boxed{١٨}$ إذا كان $٣ \le ق(س) \le ٨$ ،

$س \in [-١ ، ٢]$. جد العددين م ، ن بحيث أن

$$م \le \int_{-١}^{٢} ق(س)\ دس \le ن$$

تدريب $\boxed{١٩}$ إذا كان $٦ \le ق(س) \le ١٠$ ،

$س \in [٤ ، ٨]$. جد العددين م ، ن بحيث أن

$$س \le \int_{٨}^{٤} ق(س)\ دس \le ن$$

تدريب $\boxed{٢٠}$ $ق(س) = ٥ + ٣جا^{٣} \pi س$ ، بيّن أن

$\int_{١}^{٤} ق(س)\ دس$ ينحصر بين ٦ ، ٢٤

تدريب $\boxed{٢١}$ بيّن أن $\int^{\frac{\pi}{٢}} س\ جتاس\ دس \le \frac{\pi^{٢}}{٨}$

تدريب $\boxed{٢٢}$ بيّن أن $\int_{-٣}^{٣} \sqrt{٩ - س^{٢}}\ دس$ ينحصر بين

العددين صفر ، ١٨ .

تدريب $\boxed{٢٣}$ دون إيجاد قيمة التكامل بيّن أن

$$-١ \le \int_{-١}^{١} \frac{س}{س^{٢} + ١}\ دس \le ١$$

تدريب مستعينا الشكل بالأسفل والذي يمثل منحنى ق(س)

المعرف على الفترة $[-٩ ، ١٢]$ ، جد أصغر وأكبر قيمة

للتكاملات الآتية :

① $\int_{-٩} (ق^{٢}(س) - ٢س + ١)\ دس$

② $\int_{-٩}^{١٢} \left(\frac{١}{ق(س) - ٢} - ٤س\right) دس$

③ $\int_{٦}^{١٢} (ق(س) + ٧)\ دس$

الدرس الرابع : الاقتران الأسي الطبيعي

تعلمنا في صفوف سابقة ما هو الاقتران الأسي الطبيعي فهو الاقتران على الصورة $\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}}$، حيث هـ يسمى بالعدد النيبيري هـ ≈ ٢٫٧١ ، حيث $\text{هـ}^{\text{س}} > ٠$

وتعلمنا بعضا من القواعد الهامة عليه وهي :

① $\text{هـ}^{\text{س} + \text{ص}} = \text{هـ}^{\text{س}} \times \text{هـ}^{\text{ص}}$

② $\text{هـ}^{\text{س} - \text{ص}} = \dfrac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{ص}}}$

③ $(\text{هـ}^{\text{س}})^{\text{ص}} = \text{هـ}^{\text{س ص}}$

④ $\text{هـ}^{-\text{س}} = \dfrac{١}{\text{هـ}^{\text{س}}}$

⑤ $\text{هـ}^{٠} = ١$ ، $\text{هـ}^{١} = \text{هـ}$

⑥ إذا كان $\text{هـ}^{\text{س}} = \text{هـ}^{\text{ص}} \Leftrightarrow \text{س} = \text{ص}$

وفي هذا الدرس سنتعلم كيفية اشتقاق هذا الاقتران وكيفية تكامله

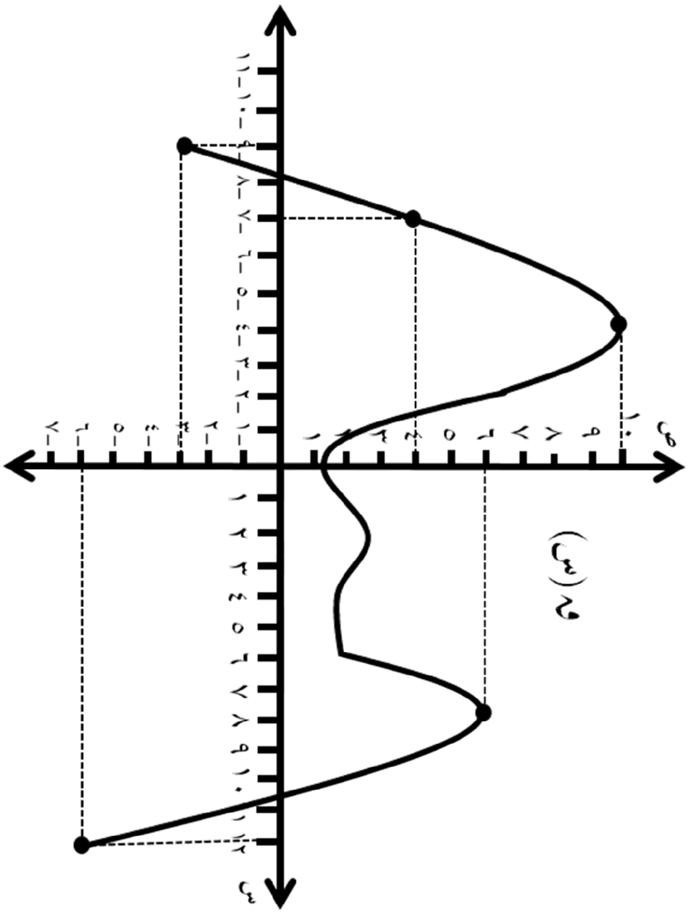
إذا كان

$\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}}$ فإن $\text{ق}'(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}}$

وأيضا

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{ك}(\text{س})}$$

فإن $\text{ق}'(\text{س}) = \text{ك}'(\text{س})\ \text{هـ}^{\text{ك}(\text{س})}$



مثال $\boxed{١}$ جد $\frac{ءص}{ءس}$ لكل مما يلي :

(١) $ص = ٤س^{٢} + هـ^{س}$

$ص' = ٨س + هـ^{س}$

(٢) $ص = هـ^{\frac{١}{س}}$

$ص' = -\frac{١}{س^{٢}} هـ^{\frac{١}{س}}$

(٣) $ص = هـ^{س^{٣} + ١}$

$ص' = ٣س^{٢} هـ^{س^{٣}+١}$

(٤) $ص = هـ^{جتاس}$ عندما $س = \frac{\pi}{٢}$

$ص' = -جاس\, هـ^{جتاس}$

$ص'\Big|_{س = \frac{\pi}{٢}} = -١$

(٥) $هـ^{س+ص} = س$

$(١ + ص')\, هـ^{س+ص} = ١$

لكن $هـ^{س+ص} = س$

$(١ + ص')\, س = ١$

$ص' = \frac{١}{س} - ١$

(٦) $ص = س\, هـ^{\sqrt{س}}$

$ص' = س \times \frac{١}{٢\sqrt{س}} هـ^{\sqrt{س}} + هـ^{\sqrt{س}}$

مثال $\boxed{٢}$ $ص = أهـ^{٢س} + ب هـ^{٣س}$ ، حيث أ ، ب ثوابت . أثبت أن $ص'' - ٥ص' + ٦ص =$ صفر

$ص = أهـ^{٢س} + ب هـ^{٣س}$

$ص' = ٢أهـ^{٢س} + ٣ب هـ^{٣س}$

$ص'' = ٤أهـ^{٢س} + ٩ب هـ^{٣س}$

$ص'' - ٥ص' + ٦ص$

$= ٤أهـ^{٢س} + ٩ب هـ^{٣س} - ٥(٢أهـ^{٢س} + ٣ب هـ^{٣س})$

$+ ٦(أهـ^{٢س} + ب هـ^{٣س})$

$= ٤أهـ^{٢س} + ٩ب هـ^{٣س} - ١٠أهـ^{٢س}$

$- ١٥ب هـ^{٣س} + ٦أهـ^{٢س} + ٦ب هـ^{٣س}$

$= ٠$

مثال $\boxed{٣}$ $هـ^{س ص} = س + ص$ ، أثبت أن

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{-(ص^{٢} + س ص - ١)}{س^{٢} + س ص - ١}$

$هـ^{ص س} = س + ص$

$(ص + س ص')\, هـ^{ص س} = ١ + ص'$

لكن $هـ^{ص س} = س + ص$

$(ص + س ص')(س + ص) = ١ + ص'$

$س^{٢}ص' + س ص ص' - ص' = ١ - ص س - ص^{٢}$

$ص'(س^{٢} + س ص - ١) = ١ - ص س - ص^{٢}$

$$\text{ص}' = \frac{\text{١} - \text{ص س} - \text{ص}^{\text{٢}}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{س ص} - \text{١}}$$

$$= \frac{-(\text{ص}^{\text{٢}} + \text{ص س} - \text{١})}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{س ص} - \text{١}}$$

أما بالنسبة لتكامل الاقتران الأسي الطبيعي فهو كما يلي

$$\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس} = \text{هـ}^{\text{س}} + \text{جـ}$$

$$\int \text{هـ}^{\text{أس + ب}}\,\text{دس} = \frac{\text{١}}{\text{أ}}\,\text{هـ}^{\text{أس + ب}} + \text{جـ}$$

مثال $\boxed{\text{٤}}$ جد التكاملات التالية :

① $\int \text{هـ}^{\text{٧}}\,\text{دس} = \text{هـ}^{\text{٧}}\text{س} + \text{جـ}$

② $\int \frac{\text{١}}{\text{هـ}}\,\text{دس} = \frac{\text{١}}{\text{هـ}}\,\text{س} + \text{جـ}$

③ $\int \text{هـ}^{\text{٧س}}\,\text{دس} = \frac{\text{١}}{\text{٧}}\,\text{هـ}^{\text{٧س}} + \text{جـ}$

④ $\int_{\cdot}^{\text{١}} \frac{\text{١}}{\text{هـ}^{\text{س}}}\,\text{دس} = \int_{\cdot}^{\text{١}} \text{هـ}^{-\text{س}}\,\text{دس} = \left[-\text{هـ}^{-\text{س}}\right]_{\cdot}^{\text{١}}$

$$= -\left(\frac{\text{١}}{\text{هـ}} - \text{١}\right) = \frac{\text{هـ} - \text{١}}{\text{هـ}}$$

⑤ $\int (\text{هـ}^{\text{٣س + ٢}})^{\text{٢}}\,\text{دس} = \int \text{هـ}^{\text{٦س + ٤}}\,\text{دس}$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٦}}\,\text{هـ}^{\text{٦س + ٤}} + \text{جـ}$$

⑥ $\int \sqrt{\text{هـ}^{\text{س}}}\,\text{دس} = \int (\text{هـ}^{\text{س}})^{\frac{\text{١}}{\text{٢}}}\,\text{دس}$

$$= \int \text{هـ}^{\frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{س}}\,\text{دس} = \text{٢}\text{هـ}^{\frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{س}} + \text{جـ}$$

⑦ $\int (\text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{-\text{س}})^{\text{٢}}\,\text{دس}$

$$= \int (\text{هـ}^{\text{٢س}} + \text{٢} + \text{هـ}^{-\text{٢س}})\,\text{دس}$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٢}}\,\text{هـ}^{\text{٢س}} + \text{٢س} - \frac{\text{١}}{\text{٢}}\,\text{هـ}^{-\text{٢س}} + \text{جـ}$$

⑧ $\int (\text{هـ}^{\text{٤س}} \times \text{هـ}^{\text{٢س + ١}})\,\text{دس}$

$$= \int \text{هـ}^{\text{٦س + ١}}\,\text{دس} = \frac{\text{١}}{\text{٦}}\,\text{هـ}^{\text{٦س + ١}} + \text{جـ}$$

⑨ $\int \frac{\text{٣}}{\sqrt[\text{٣}]{\text{هـ}^{\text{س}}}}\,\text{دس} = \int \text{٣هـ}^{-\frac{\text{١}}{\text{٣}}\text{س}}\,\text{دس}$

$$= -\text{٩}\,\text{هـ}^{-\frac{\text{١}}{\text{٣}}\text{س}} + \text{جـ}$$

⑩ $\int \left(\frac{\text{٣}}{\text{هـ}^{\text{س}}}\right)^{\text{٢}}\,\text{دس} = \int \text{٩هـ}^{-\text{٢س}}\,\text{دس}$

$$= -\frac{\text{٩}}{\text{٢}}\,\text{هـ}^{-\text{٢س}} + \text{جـ}$$

⑪ $\int \text{هـ}^{\text{س}}(\text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{-\text{س}})\,\text{دس}$

$$= \int (\text{هـ}^{\text{٢س}} + \text{١})\,\text{دس}$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٢}}\,\text{هـ}^{\text{٢س}} + \text{س} + \text{جـ}$$

تدريب $\boxed{\text{١}}$ $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{أس}}$ ، حيث أ ثابت. جد أ بحيث أن

$$\text{ص}'' - \text{٢ص}' + \text{ص} = \text{صفر}$$

تدريب $\boxed{\text{٢}}$ $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{ب س}}$ ، جد قيمة ب بحيث أن

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ص}$$

تدريب $\boxed{٣}$ إذا كانت $\text{ص} = \dfrac{\text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{-\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}} - \text{هـ}^{-\text{س}}}$، أثبت أن

$$\text{ص}'' + ٢\,\text{ص}'\,\text{ص} = \text{صفر}$$

الدرس الخامس : الاقتران اللوغريتمي الطبيعي

الاقتران اللوغريتمي الطبيعي هو الاقتران العكسي للاقتران الأسي الطبيعي حيث أنه

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} \text{ ، حيث س} > ٠$$

وقد تعلمنا عدة قواعد على هذا الاقتران هي

١) $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ص}$

٢) $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\dfrac{\text{س}}{\text{ص}} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} - \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ص}$

٣) $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}^{\text{ن}} = \text{ن}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$

٤) $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}^{\text{س}} = \text{س} \text{ ، س} \in \text{ح}$

٥) $\text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}} = \text{س} \text{ ، س} > ٠$

٦) $\text{لو}_{\text{هـ}}\,١ = \text{صفر} \text{ ، } \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ} = ١$

٧) إذا كان $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ص} \Leftrightarrow \text{س} = \text{ص}$

وفي هذا الدرس سنتعلم كيفية اشتقاق هذا الاقتران

فإذا كان

$\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$ فإن $\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{١}{\text{س}}$

$\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ك}(\text{س})$ فإن $\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{\text{ك}'(\text{س})}{\text{ك}(\text{س})}$

مثال $\boxed{١}$ جد $\text{ق}'(\text{س})$ لكل مما يلي:

١) $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\,٦\text{س}$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{٦}{٦\text{س}} = \frac{١}{\text{س}}$$

٢) $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\,(\text{س}^٢ + ٤)$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{٢\text{س}}{\text{س}^٢ + ٤}$$

٣) $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{جا}٢\text{س}$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{٢\,\text{جتا}٢\text{س}}{\text{جا}٢\text{س}} = ٢\,\text{ظتا}٢\text{س}$$

٤) $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\left(\dfrac{١}{\text{س}}\right)$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\frac{-١}{\text{س}^٢}}{\frac{١}{\text{س}}} = \frac{-١}{\text{س}}$$

$$\text{⑤}\ \text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\left(\text{جا}^{٢}\text{س}\right)$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{٢جاس جتاس}}{\text{جا}^{٢}\text{س}} = \text{٢ظتاس}$$

$$\text{⑥}\ \text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\left(\text{س}^{٣} + ١\right) \text{ ، س} > ٠$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{٣س}^{٢}}{\text{س}^{٣} + ١}$$

$$\text{⑦}\ \text{ق}(\text{س}) = \text{س لو}_{\text{هـ}}\text{س ، عند س} = \text{هـ}^{٣}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \text{س} \times \frac{١}{\text{س}} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$$

$$\text{ق}'(\text{هـ}^{٣}) = ١ + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ}^{٣} = ١ + ٣ = ٤$$

$$\text{⑧}\ \text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ}^{\text{س}^{٣}}$$

$$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ}^{\text{س}^{٣}} = \text{س}^{٣}$$

$$\text{ص}' = \text{٣س}^{٢}$$

$$\text{⑨}\ \text{ص} = \text{س لو}_{\text{هـ}}\text{هـ}^{\text{س}^{٢}}$$

$$\text{ص} = \text{س لو}_{\text{هـ}}\text{هـ}^{\text{س}^{٢}} = \text{س}^{٣}$$

$$\text{ص}' = \text{٣س}^{٢}$$

مثال $\boxed{٢}$ $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{٢لو}_{\text{هـ}}\text{ظاس}}$ ، جد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

$$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{٢لو}_{\text{هـ}}\text{ظاس}} = \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظا}^{٢}\text{س}} = \text{ظا}^{٢}\text{س}$$

$$\text{ص}' = \text{٢ ظاس قا}^{٢}\text{س}$$

مثال $\boxed{٣}$ جد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ لكل مما يلي:

$$\text{①}\ \text{ص} = \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}}$$

$$\text{ص}' = \frac{\text{س} \times \frac{١}{\text{س}} - \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}^{٢}} = \frac{١ - \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}^{٢}}$$

$$\text{②}\ \text{ص} = \left(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)^{٣}$$

$$\text{ص}' = \text{٢ لو}_{\text{هـ}}\text{س} \times \frac{١}{\text{س}} = \frac{٢}{\text{س}}\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$$

$$\text{③}\ \text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جاس} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظاس}$$

$$\text{ص}' = \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}} + \frac{\text{قا}^{٢}\text{س}}{\text{ظاس}}$$

$$\text{④}\ \text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\left(\frac{\text{جتاس}}{\text{جا٢س} + ٨}\right)$$

$$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جتاس} - \text{لو}_{\text{هـ}}\left(\text{جا٢س} + ٨\right)$$

$$\text{ص}' = \frac{-\text{جاس}}{\text{جتاس}} - \frac{\text{٢جتا٢س}}{\text{جا٢س}}$$

⑤ $ص = لو_{هـ}^{\,لو_{هـ} س}$

$$ص' = \frac{\frac{١}{س}}{لو_{هـ} س} = \frac{١}{س\ لو_{هـ} س}$$

⑥ $لو_{هـ} ص = س^{٣} + ٩$

$$\frac{ص'}{ص} = ٣س^{٢} \Leftarrow ص' = ٣س^{٢}\ ص$$

⑦ $ص = ٣^{س}$

نأخذ للطرفين اللوغريتم للأساس هـ فتصبح

$$لو_{هـ} ص = لو_{هـ} ٣^{س}$$

$$لو_{هـ} ص = س\ لو_{هـ} ٣$$

نشتق الطرفين

$$\frac{ص'}{ص} = لو_{هـ} ٣ \text{ ومنه } ص' = ص\ لو_{هـ} ٣$$

$$ص' = ٣^{س}\ لو_{هـ} ٣$$

⑧ $ص = (س^{٢} - ٢س)^{ظاس}$

نأخذ للطرفين اللوغريتم للأساس هـ فتصبح

$$لو_{هـ} ص = لو_{هـ} (س^{٢} - ٢س)^{ظاس}$$

$$لو_{هـ} ص = ظاس\ لو_{هـ} (س^{٢} - ٢س)$$

نشتق الطرفين

$$\frac{ص'}{ص} = ظاس \times \frac{٢س - ٢}{س^{٢} - ٢س} + لو_{هـ} (س^{٢} - ٢س) \times قا^{٢}س$$

$$ص' = ص \left(ظاس \times \frac{٢س - ٢}{س^{٢} - ٢س} + لو_{هـ} (س^{٢} - ٢س) \times قا^{٢}س\right)$$

$$ص' = (س^{٢} - ٢س)^{ظاس} \left(ظاس \times \frac{٢س - ٢}{س^{٢} - ٢س} + لو_{هـ} (س^{٢} - ٢س) \times قا^{٢}س\right)$$

ويمكن إيجاد التكاملات الآتية معتمدين على مشتقة الاقتران اللوغريتمي كما يلي :

$$\int \frac{١}{س}\, دس = لو_{هـ} |س| + جـ$$

$$\int \frac{١}{أ س + ب}\, دس = \frac{١}{أ}\ لو_{هـ} |أ س + ب| + جـ$$

$$\int \frac{ق'(س)}{ق(س)}\, دس = لو_{هـ} |ق(س)| + جـ$$

مثال $\boxed{٤}$ جد التكاملات التالية :

① $\int_{-٢}^{-٥} \frac{١}{س}\, دس$

$$= لو_{هـ} |س| \Big]_{-٢}^{-٥} = لو_{هـ} ٥ - لو_{هـ} ٢ = لو_{هـ} \frac{٥}{٢}$$

② $\int_{هـ^{٢}}^{هـ^{٣}} \frac{٦}{س}\, دس$

$$= ٦لو_{هـ} |س| \Big]_{هـ^{٢}}^{هـ^{٣}} = ٦لو_{هـ} هـ^{٣} - ٦لو_{هـ} هـ^{٢} =$$

$$١٨ - ١٢ = ٦$$

③ $\int \frac{\text{٣}}{\text{٧س}}\,\text{دس}$

$$= \frac{\text{٣}}{\text{٧}}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{جـ}$$

④ $\int \frac{\text{٣}}{\text{٢} - \text{٥س}}\,\text{دس}$

$$= \frac{-\text{٣}}{\text{٥}}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{٢} - \text{٥س}| + \text{جـ}$$

⑤ $\int \frac{\text{٢}}{\text{س}^{\text{٢}}}\,\text{دس}$

$$= \int \text{٢س}^{-\text{٢}}\,\text{دس} = -\text{٢س}^{-\text{١}} + \text{جـ}$$

⑥ $\int_{\text{١}}^{\text{٢}} \frac{\text{٣}}{\text{س} - \text{٤}}\,\text{دس} = \text{٣لو}_{\text{هـ}}|\text{س} - \text{٤}|\Big]_{\text{١}}^{\text{٢}}$

$$= \text{٣}\left(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{٢} - \text{لو}_{\text{هـ}}\text{٣}\right) = \text{٣لو}_{\text{هـ}}\frac{\text{٢}}{\text{٣}} = \text{لو}_{\text{هـ}}\frac{\text{٨}}{\text{٢٧}}$$

⑦ $\int \frac{\text{س}^{\text{٢}} + \text{١}}{\text{س}}\,\text{دس}$

$$= \int \left(\text{س} + \frac{\text{١}}{\text{س}}\right)\text{دس}$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{س}^{\text{٢}} + \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{جـ}$$

⑧ $\int \frac{\text{٢س}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{١}}\,\text{دس} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}^{\text{٢}} + \text{١}| + \text{جـ}$

لاحظ أن مشتقة $(\text{س}^{\text{٢}} + \text{١})$ هو (٢س)

⑨ $\int \frac{\text{س}^{\text{٢}} + \text{١}}{\text{س}^{\text{٣}} + \text{٣س}}\,\text{دس} = \frac{\text{١}}{\text{٣}}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}^{\text{٣}} + \text{٣س}| + \text{جـ}$

لاحظ أن مشتقة $(\text{س}^{\text{٣}} + \text{٣س})$

هو $(\text{٣س}^{\text{٢}} + \text{٣}) = \text{٣}(\text{س}^{\text{٢}} + \text{١})$

⑩ $\int \frac{\text{٦س} - \text{٩}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٣س} + \text{٥}}\,\text{دس}$

$$= \text{٣لو}_{\text{هـ}}|\text{س}^{\text{٢}} - \text{٣س} + \text{٥}| + \text{جـ}$$

لاحظ أن مشتقة $(\text{س}^{\text{٢}} - \text{٣س} + \text{٥})$

هو $(\text{٢س} - \text{٣}) = \frac{\text{١}}{\text{٣}}(\text{٦س} - \text{٩})$

⑪ $\int \text{ظاس}\,\text{دس} = \int \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}\,\text{دس}$

$$= -\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جتاس}| + \text{جـ} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{قاس}| + \text{جـ}$$

لاحظ أن مشتقة (جتاس) هو (−جاس)

تدريب $\boxed{\text{١}}$ إذا كان

$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{٦س}^{\text{٢}} + \text{١}} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{قا}^{\text{٢}}\text{س} + \int_{\text{٠}}^{\frac{\pi}{\text{٢}}} \text{جتاس جا}^{\text{٢}}\text{س}\,\text{دس}.$

فجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\Big|_{\text{س} = \text{صفر}}$

تدريب $\boxed{\text{٢}}$ إذا كان $\text{ص} = \text{ظا}\left(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)$، أثبت أن

$$(\text{ص}^{\text{٢}} + \text{١})(\text{٢ص} - \text{١}) + \text{ص}''\text{س}^{\text{٢}} = \text{٠}$$

تدريب $\boxed{\text{٣}}$ جد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ لكل مما يلي :

(١) $\text{ص} = \text{٢}^{\text{جا٣س}}$

(٢) $\text{ص} = (\text{٢س}^{\text{٣}} + \text{٦})^{\text{قاس}}$

تدريب $\boxed{٤}$ جد التكاملات التالية :

$$① \int_{لو_{هـ} ٥}^{لو_{هـ} ٩} \frac{١}{هـ^{س}} \, دس$$

$$② \int س \, هـ^{لو_{هـ} س^{٥}} \, دس$$

$$⑤ \int ظتا ٥س \, دس$$

$$⑥ \int \frac{جا س}{١ + جتا س} \, دس$$

$$⑦ \int \frac{جا س - جتا س}{جا س + جتا س} \, دس$$

تدريب: إذا كان م (س) = $لو_{هـ}^{(س لو_{هـ} س)}$ معكوس للاقتران المتصل ق (س) فأوجد ق (س) ثم جد $\int_{هـ}^{هـ^{٢}} ق(س) \, دس$

الدرس السادس : التكامل بالأجزاء

طريقة من طرق التكامل التي تستخدم في حل مسائل على التكامل والتي تحتوي على حاصل ضرب اقترانين داخل التكامل

وسنستخدم هذه الطريقة عند وجود

① $\int$ (اقتران كثير حدود)×(اقتران دائري)

② $\int$ (اقتران كثير حدود)×(اقتران أسي)

③ $\int$ (اقتران أسي)×(اقتران دائري)

④ $\int$ (اقتران كثير حدود)×(اقتران لوغريتمي)

⑤ $\int$ (اقتران لوغريتمي)

⑥ $\int$ (اقتران سهل الاشتقاق)×(اقتران سهل التكامل)

وسنستخدم القاعدة التالية

$$\int ق \,.\, د هـ = ق \times هـ - \int هـ \,.\, د ق$$

ويمكن إثبات القاعدة السابقة على النحو التالي

لاحظ أن

$$(ق \times هـ)' = ق \times \frac{د هـ}{د س} + هـ \times \frac{د ق}{د س}$$

وهي قاعدة مشتقة حاصل ضرب اقترانين الذي تعلمناه في الفصل الماضي ، وبتكامل كلا الطرفين

$$\int(\text{ع} \times \text{هـ})' = \int(\text{ع} \times \frac{\text{د هـ}}{\text{د س}})\text{دس} + \int(\text{هـ} \times \frac{\text{د ع}}{\text{د س}})\ \text{دس}$$

$$\Leftarrow \text{ع} \times \text{هـ} = \int(\text{ع} \times \frac{\text{د هـ}}{\text{د س}})\text{دس} + \int(\text{هـ} \times \frac{\text{د ع}}{\text{د س}})\ \text{دس}$$

$$\text{ع} \times \text{هـ} = \int \text{ع} \,.\, \text{دهـ} + \int \text{هـ} \,.\, \text{دع}$$

$$\Leftarrow \int \text{ع} \,.\, \text{دهـ} = \text{ع} \times \text{هـ} - \int \text{هـ} \,.\, \text{دع}$$

مثال : جد كلاً من التكاملات الآتية :

① $\int (\text{٢س} - \text{١})\text{جتا٣س دس}$

$$\begin{array}{ccc} \text{ع} = \text{٢س} - \text{١} & \overset{\times}{\swarrow} & \text{دهـ} = \text{جتا٣س} \\ \text{دع} = \text{٢} & \xrightarrow[-\int]{} & \text{هـ} = \frac{\text{١}}{\text{٣}}\text{جا٣س} \end{array}$$

$$\int (\text{٢س} - \text{١})\text{جتا٣س دس}$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٣}}(\text{٢س} - \text{١})\text{جا٣س} - \int \frac{\text{٢}}{\text{٣}}\text{جا٣س دس}$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٣}}(\text{٢س} - \text{١})\ \text{جا٣س} + \frac{\text{٢}}{\text{٩}}\text{جتا٣س} + \text{جـ}$$

② $\int \frac{\text{٣س}}{\sqrt[\text{٣}]{\text{٢س} + \text{١}}}\ \text{دس}$

$$\int \frac{\text{٣س}}{\sqrt[\text{٣}]{\text{٢س} + \text{١}}}\ \text{دس} = \int \text{٣س}(\text{٢س}+\text{١})^{-\frac{\text{١}}{\text{٣}}}\ \text{دس}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{ع} = \text{٣س} & \overset{\times}{\swarrow} & \text{دهـ} = (\text{٢س} + \text{١})^{-\frac{\text{١}}{\text{٣}}} \\ \text{دع} = \text{٣} & \xrightarrow[-\int]{} & \text{هـ} = \frac{\text{٣}}{\text{٤}}(\text{٢س} + \text{١})^{\frac{\text{٢}}{\text{٣}}} \end{array}$$

$$\int \frac{\text{٣س}}{\sqrt[\text{٣}]{\text{٢س} + \text{١}}}\ \text{دس}$$

$$= \frac{\text{٩}}{\text{٤}}\text{س}(\text{٢س} + \text{١})^{\frac{\text{٢}}{\text{٣}}} - \int \frac{\text{٩}}{\text{٤}}(\text{٢س}+\text{١})^{\frac{\text{٢}}{\text{٣}}}\ \text{دس}$$

$$= \frac{\text{٩}}{\text{٤}}\text{س}(\text{٢س} + \text{١})^{\frac{\text{٢}}{\text{٣}}} - \frac{\text{٢٧}}{\text{٤٠}}(\text{٢س}+\text{١})^{\frac{\text{٥}}{\text{٣}}} + \text{جـ}$$

③ $\int \frac{\text{س}}{\text{قتا}^{\text{٢}}\text{٢س}}\ \text{دس}$

$$\int \frac{\text{س}}{\text{قتا}^{\text{٢}}\text{٢س}}\ \text{دس} = \int \text{س جا}^{\text{٢}}\text{٢س دس}$$

$$= \int \text{س}\ (\frac{\text{١}}{\text{٢}} - \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{جتا٤س})\ \text{دس}$$

$$= \int (\frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{س} - \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{س جتا٤س})\ \text{دس}$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٤}}\text{س}^{\text{٢}} - \int \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{س جتا٤س دس}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{ع} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{س} & \overset{\times}{\swarrow} & \text{دهـ} = \text{جتا٤س} \\ \text{دع} = \frac{\text{١}}{\text{٢}} & \xrightarrow[-\int]{} & \text{هـ} = \frac{\text{١}}{\text{٤}}\text{جا٤س} \end{array}$$

$$\int \frac{\text{س}}{\text{قتا}^2\,٢\text{س}}\,\text{دس}$$

$$= \tfrac{1}{4}\text{س}^2 - \tfrac{1}{8}\,\text{س جا}٤\text{س} + \tfrac{1}{8}\int \text{جا}٤\text{س دس}$$

$$= \tfrac{1}{4}\text{س}^2 - \tfrac{1}{8}\,\text{س جا}٤\text{س} - \tfrac{1}{32}\,\text{جتا}٤\text{س} + \text{جـ}$$

④ $\int_{0}^{2} \text{س}\ \text{قً}(٤\text{س}+١)\ \text{دس}$ حيث $\text{قَ}(١) = ٢$ ، $\text{ق}(٩) = -١$ ، $\text{قَ}(٩) = -١$ ، $\text{ق}(١) = ٢$

$$\int_{0}^{2} \text{س}\ \text{قً}(٤\text{س} + ١)\ \text{دس}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{ق} = \text{س} & & \text{دهـ} = \text{قً}(٤\text{س} + ١) \\ & \swarrow\times & \\ \text{دق} = ١ & \xrightarrow{-\int} & \text{هـ} = \tfrac{1}{4}\,\text{قَ}(٤\text{س} + ١) \end{array}$$

$$\int_{0}^{2} \text{س}\ \text{قً}(٤\text{س} + ١)\ \text{دس}$$

$$= \tfrac{1}{4}\text{س}\ \text{قَ}(٤\text{س}+١)\Big]_{0}^{2} - \int_{0}^{2} \tfrac{1}{4}\text{قَ}(٤\text{س}+١)\text{دس}$$

$$= \tfrac{1}{4}(٢)\ \text{قَ}(٩) - ٠ - \tfrac{1}{16}\ \text{ق}(٤\text{س}+١)\Big]_{0}^{2} =$$

$$\tfrac{1}{2} \times -١ - \tfrac{1}{16}\big(\text{ق}(٩) - \text{ق}(١)\big)$$

$$= -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{16}\,(-١ - ٢) = -\tfrac{5}{16}$$

ويمكن استخدام طريقة الأجزاء على التكامل الواحد لأكثر من مرة وذلك عندما يكون هناك اقترانين أحدهما كثير حدود من أي درجة مع أحد الاقترانات الآتية :

$(\text{ٍم س} + \text{ب})^{\text{ن}}$ ، $\text{ن} \neq -١$ ، $\text{م} \neq \text{صفر}$	$\text{هـ}^{\text{م س}}$	جتا م س	جا م س

وتسمى هذه الطريقة **بطريقة الجدول** ، والمثال الآتي يوضح هذه الطريقة

⑤ $\int \text{س}^2 \text{جتاس دس}$

دهـ		ق
جتاس	+	س^2
جاس	−	٢س
− جتاس	+	٢
− جاس		صفر

$$\int \text{س}^2\text{جتاس دس}$$

$$= \text{س}^2\text{جاس} + ٢\text{س جتاس} - ٢\text{جاس} + \text{جـ}$$

⑥ $\int \text{س}^2 \sqrt{١ - \text{س}}\ \text{دس}$

$$= \int \text{س}^2\,(١ - \text{س})^{\frac{1}{2}}\ \text{دس}$$

ع		دهـ
$س^{٢}$	+	$(١ - س)^{\frac{١}{٢}}$
$٢س$	−	$-\frac{٢}{٣}(١ - س)^{\frac{٣}{٢}}$
٢	+	$\frac{٤}{١٥}(١ - س)^{\frac{٥}{٢}}$
صفر		$-\frac{٨}{١٠٥}(١ - س)^{\frac{٧}{٢}}$

$$\int س^{٢}(١ - س)^{\frac{١}{٢}} دس$$

$$= -\frac{٢}{٣} س^{٢}(١ - س)^{\frac{٣}{٢}} - \frac{٨}{١٥} س(١ - س)^{\frac{٥}{٢}}$$

$$- \frac{١٦}{١٠٥}(١ - س)^{\frac{٧}{٢}} + جـ$$

⑦ $\int_{١}^{٢} (س - ٢)^{٢}(س - ١)^{٦} دس$

ع		دهـ
$(س - ٢)^{٢}$	+	$(س - ١)^{٦}$
$٢(س - ٢)$	−	$\frac{١}{٧}(س - ١)^{٧}$
٢	+	$\frac{١}{٥٦}(س - ١)^{٨}$
صفر		$\frac{١}{٥٠٤}(س - ١)^{٩}$

$$\int_{١}^{٢} (س - ٢)^{٢}(س - ١)^{٦} دس$$

$$= \left[\frac{١}{٧}(س - ٢)^{٢}(س - ١)^{٧}\right]_{١}^{٢} - \left[\frac{٢}{٥٦}(س - ٢)(س - ١)^{٨}\right]_{١}^{٢}$$

$$+ \left[\frac{٢}{٥٠٤}(س - ١)^{٩}\right]_{١}^{٢}$$

$$= صفر - صفر + \frac{٢}{٥٠٤}(١ - ٠) = \frac{١}{٢٥٢}$$

⑧ $\int \left(\frac{جاس}{س^{٢}} - \frac{جتاس}{س}\right) دس$

$$I = \int \left(\frac{جاس}{س^{٢}} - \frac{جتاس}{س}\right) دس$$

$$= \int \frac{جاس}{س^{٢}} دس - \int \frac{جتاس}{س} دس$$

$$\int \frac{جاس}{س^{٢}} دس$$

ع = جتاس $دهـ = \frac{١}{س^{٢}} = س^{-٢}$

×

دع = جاس $هـ = -\frac{١}{س}$

$-\int$

$$\int \frac{جاس}{س^{٢}} دس = \frac{-جاس}{س} + \int \frac{جتاس}{س} دس$$

$$I = \int \left(\frac{جاس}{س^{٢}} - \frac{جتاس}{س}\right) دس$$

$$= \frac{-جاس}{س} + \int \frac{جتاس}{س} دس - \int \frac{جتاس}{س} دس =$$

$$\frac{-جاس}{س} + جـ$$

⑨ $\int هـ^{س} جتاس دس$

$ع = هـ^{س}$ دهـ = جتاص

×

$دع = هـ^{س}$ هـ = جاص

$-\int$

$$I = \int هـ^{س} جتاس دس$$

$= \text{هـ}^{\text{س}} \text{جاس} - \int \text{هـ}^{\text{س}} \text{جاس دس}$

$= \text{هـ}^{\text{س}} \text{جاس} - \text{II}$

$\text{II} = \int \text{هـ}^{\text{س}} \text{جاس دس}$

$\text{ق} = \text{هـ}^{\text{س}} \qquad \text{دهـ} = \text{جاس}$

$\text{دق} = \text{هـ}^{\text{س}} \xrightarrow{-\int} \text{هـ} = -\text{جتاس}$

$\text{II} = -\text{هـ}^{\text{س}} \text{جتاس} + \int \text{هـ}^{\text{س}} \text{جتاس دس}$

$\text{I} = \text{هـ}^{\text{س}} \text{جاس} - (-\text{هـ}^{\text{س}} \text{جاس} + \int \text{هـ}^{\text{س}} \text{جتاس دس})$

$\text{I} = \text{هـ}^{\text{س}} \text{جاس} + \text{هـ}^{\text{س}} \text{جاس} - \text{I}$

$٢\text{I} = \text{هـ}^{\text{س}} \text{جاس} + \text{هـ}^{\text{س}} \text{جاس}$

$\int \text{هـ}^{\text{س}} \text{جتاس دس}$

$= \frac{١}{٢} (\text{هـ}^{\text{س}} \text{جاس} + \text{هـ}^{\text{س}} \text{جاس}) + \text{ج}$

(١٠) $\int \frac{\text{س هـ}^{\text{س}}}{(\text{س} + ١)^{٢}} \text{دس}$

$\text{ق} = \text{س هـ}^{\text{س}} \qquad \text{دهـ} = \frac{١}{(\text{س} + ١)^{٢}} = (\text{س} + ١)^{-٢}$

$\text{دق} = \text{س هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}} \xrightarrow{-\int} \text{هـ} = -(\text{س} + ١)^{-١}$

$\int \frac{\text{س هـ}^{\text{س}}}{(\text{س} + ١)^{٢}} \text{دس}$

$= -\text{س}(\text{س} + ١)^{-١} \text{هـ}^{\text{س}} + \int \text{هـ}^{\text{س}} (\text{س} + ١)(\text{س} + ١)^{-١} \text{دس}$

$= -\text{س}(\text{س} + ١)^{-١} \text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}} + \text{ج}$

(١١) $\int \text{س}^{\text{ن}} \text{لو}_{\text{هـ}}^{\text{س}} \text{دس}$

$\text{ق} = \text{لو}_{\text{هـ}}^{\text{س}} \qquad \text{دهـ} = \text{س}^{\text{ن}}$

$\text{دق} = \frac{١}{\text{س}} \xrightarrow{-\int} \text{هـ} = \frac{١}{\text{ن} + ١} \text{س}^{\text{ن}+١}$

$\int \text{س}^{\text{ن}} \text{لو}_{\text{هـ}}^{\text{س}} \text{دس}$

$= \frac{١}{\text{ن} + ١} \text{س}^{\text{ن}+١} \text{لو}_{\text{هـ}}^{\text{س}} - \frac{١}{\text{ن} + ١} \int \text{س}^{\text{ن}} \text{دس}$

$= \frac{١}{\text{ن} + ١} \text{س}^{\text{ن}+١} \text{لو}_{\text{هـ}}^{\text{س}} - \frac{١}{(\text{ن} + ١)^{٢}} \text{س}^{\text{ن}+١} + \text{ج}$

(١٢) $\int \text{س قا}^{٢}\text{س دس}$

$\text{ق} = \text{س} \qquad \text{دهـ} = \text{قا}^{٢}\text{س}$

$\text{دق} = ١ \xrightarrow{-\int} \text{هـ} = \text{ظاس}$

$\int \text{س قا}^{٢}\text{س دس} = \text{س ظاس} - \int \text{ظاس دس}$

$= \text{س ظاس} - \int \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} \text{دس}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{جاس} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{د ص}}{-\text{جاس}}$

$\int \text{س قا}^{٢}\text{س دس} = \text{س ظاس} - \int \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} \text{دس}$

$= \text{س ظاس} - \int \frac{\text{جاس}}{\text{ص}} \frac{\text{د ص}}{-\text{جاس}}$

$$= \text{س ظاس} - \int -\frac{1}{\text{ص}}\,\text{دص}$$

$$= \text{س ظاس} + \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| + \text{ج}$$

$$= \text{س ظاس} + \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جتاس}| + \text{ج}$$

(١٣) $\int \left(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)^{٢}\text{دس}$

$$\text{ق} = \left(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)^{٢} \qquad \text{دهـ} = ١$$

$$\text{دق} = ٢\,\frac{١}{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \xrightarrow[-\int]{} \text{هـ} = \text{س}$$

$$\text{I} = \int \left(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)^{٢}\text{دس}$$

$$= \text{س}\left(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)^{٢} - \int ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\,\text{دس}$$

$$\text{II} = \int ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\,\text{دس}$$

$$\text{ق} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \qquad \text{دهـ} = ٢$$

$$\text{دق} = \frac{١}{\text{س}} \xrightarrow[-\int]{} \text{هـ} = ٢\text{س}$$

$$\text{I} = \int \left(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)^{٢}\text{دس}$$

$$= \text{س}\left(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)^{٢} - ٢\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \int ٢\,\text{دس}$$

$$= \text{س}\left(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)^{٢} - ٢\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + ٢\text{س} + \text{ج}$$

(١٤) $\int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+٢)}{\sqrt{\text{س}+٢}}\,\text{دس}$

$$\text{ق} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+٢) \qquad \text{دهـ} = \frac{٢}{\sqrt{\text{س}+٢}} = (\text{س}+٢)^{-\frac{١}{٢}}$$

$$\text{دق} = \frac{١}{\text{س}+٢} \xrightarrow[-\int]{} \text{هـ} = ٢(\text{س}+٢)^{\frac{١}{٢}}$$

$$\int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+٢)}{\sqrt{\text{س}+٢}}\,\text{دس}$$

$$= ٢\sqrt{\text{س}+٢}\;\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+٢) - \int ٢(\text{س}+٢)^{-\frac{١}{٢}}\,\text{دس}$$

$$= \sqrt{\text{س}+٢}\;\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+٢) - ٤\sqrt{\text{س}+٢} + \text{ج}$$

(١٥) $\int \text{قا}^{٣}\text{س دس} = \int \text{قاس قا}^{٢}\text{س دس}$

$$\text{ق} = \text{قاس} \qquad \text{دهـ} = \text{قا}^{٢}\text{س}$$

$$\text{دق} = \text{قاس ظاس} \xrightarrow[-\int]{} \text{هـ} = \text{ظاس}$$

$$\text{I} = \int \text{قاس قا}^{٢}\text{س دس}$$

$$= \text{قاس ظاس} - \int \text{قاس ظا}^{٢}\text{س دس}$$

$$\text{I} = \text{قاس ظاس} - \int \text{قاس}(\text{قا}^{٢}\text{س} - ١)\,\text{دس}$$

$$\text{I} = \text{قاس ظاس} - \int \text{قا}^{٣}\text{س دس} + \int \text{قاس دس}$$

$$\text{I} = \text{قاس ظاس} - \text{I} + \int \text{قاس دس}$$

$$٢\text{I} = \text{قاس ظاس} + \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{قاس} + \text{ظاس}|$$

$I = \frac{1}{2}\left(\text{قاس ظاس} + \text{لو}_{\text{هـ}}\left|\text{قاس} + \text{ظاس}\right|\right) + \text{ج}$

تدريب $\boxed{١}$ جد $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ س جاس دس

تدريب $\boxed{٢}$ جد $\int$ (٢س − ٣)^{٢}جا(٢س + ١) دس

تدريب $\boxed{٣}$ جد $\int$ (س − ٢)^{٢} جتا(س + ١) دس

تدريب $\boxed{٤}$ جد $\int \frac{\text{٢س}^{٢}}{\text{قا٣س}}$ دس

تدريب $\boxed{٥}$ جد $\int$ س جاس جتاس دس

تدريب $\boxed{٦}$ جد $\int \frac{\text{س}^{٢}}{\sqrt[٣]{\text{س}^{٢} - \text{٢س} + ١}}$ دس

تدريب $\boxed{٧}$ جد $\int_{٢}^{٧}$ ق(س) × قَ(س) دس علما

بأن ق(٧) = ٨ ، ق(٢) = ٦

تدريب $\boxed{٨}$ جد $\int$ جاس (س + قتا^{٣}س) دس

تدريب $\boxed{٩}$ جد $\int$ س (جاس + جتاس)^{٢} دس

تدريب $\boxed{١٠}$ جد $\int$ س(جتا٥س جتا٣س − $\frac{١}{٢}$جتا٨س) دس

تدريب $\boxed{١١}$ جد التكاملات التالية :

① $\int \frac{\text{س} + ٥}{\text{هـ}^{\text{٢س}}}$ دس

② $\int$ ($\sqrt{\text{س}}$ هـ$^{\text{٤س}}$)^{٢} دس

③ $\int$ هـ$^{\text{س}}$ (٢جتا٣س جتاس − جتا٢س)دس

③ $\int$ لو$_{\text{هـ}}\sqrt{\text{س}}$ دس

④ $\int$ س لو$_{\text{هـ}}$ س دس

الدرس السابع : التكامل بالتعويض

أحد طرق التكامل التي تستخدم لحل المسائل على صورة حاصل ضرب أو قسمة اقترانين داخل التكامل

وسنستخدم هذه الطريقة في حالة :

① $\int \text{ق}'(\text{س}) \left(\text{ق}(\text{س})\right)^{\text{ن}} \text{ دس}$ ، حيث ن قوة كبيرة (أكبر من ٢) أو قوة كسرية

② $\int \text{ق}'(\text{س}) \times \left\{\begin{array}{l}\text{جا}\\ \text{جتا}\\ \text{قا}^{٢}\\ \text{قتا}^{٢}\end{array}\right\}\left(\text{ق}(\text{س})\right) \text{ دس}$

والزاوية $\text{ق}(\text{س})$ ليست على الصورة $\text{أ}\text{س} + \text{ب}$

$\int \text{ق}'(\text{س}) \times \left\{\begin{array}{l}\text{قا}\\ \text{قتا}\end{array}\right\}\left(\text{ق}(\text{س})\right) \times \left\{\begin{array}{l}\text{ظا}\\ \text{ظتا}\end{array}\right\}\left(\text{ق}(\text{س})\right) \text{ دس}$

③ $\int \text{ق}'(\text{س}) \times \text{هـ}^{\text{ق}(\text{س})} \text{ دس}$

④ $\int (\text{اقتران ق}(\text{س}))(\text{مشتقة هذا الاقتران ق}'(\text{س})) \text{ دس}$

⑤ $\int \dfrac{\text{مشتقة الاقتران}}{\text{الاقتران}} \text{ دس}$

وتتم هذه الطريقة كما يأتي :

[١] نفرض $\text{ص} = \text{ق}(\text{س})$ في كل الحالات السابقة

[٢] استبدال قيم س (إذا كان التكامل محدود) بقيم بديلة لـ ص

[٣] اشتقاق الفرض $\text{ص} = \text{ق}(\text{س})$ وكتابة $\text{دس} = \dfrac{\text{دص}}{\text{ق}'(\text{س})}$

[٤] الرجوع إلى التكامل واستبدال قيم س بقيم ص وذلك بجعل المتغير س موضوعا للقانون

مثال [١] : جد كلا من التكاملات الآتية :

① $\int ٥\text{س}^{٤} (\text{س}^{٥} + ٢)^{٥} \text{ دس}$

نفرض $\text{ص} = \text{س}^{٥} + ٢$ ، $\text{دس} = \dfrac{\text{د ص}}{٥\text{س}^{٤}}$

$$\int ٥\text{س}^{٤} (\text{س}^{٥} + ٢)^{٦} \text{ دس} = \int ٥\text{س}^{٤} \text{ص}^{٦} \frac{\text{د ص}}{٥\text{س}^{٤}}$$

$$= \int \text{ص}^{٦} \text{ دص} = \frac{\text{ص}^{٧}}{٧} + \text{جـ} = \frac{(\text{س} + ٢)^{٧}}{٧} + \text{جـ}$$

② $\int \text{س}(\text{س}^{٢} - ٣)^{٣} \text{ دس}$

$$\text{ص} = \text{س}^{٢} - ٣$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\text{س} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{د ص}}{٢\text{س}}$$

$$\int \text{س}(\text{س}^{٢} - ٣)^{٣} \text{ دس} = \int \text{س ص}^{٣} \frac{\text{د ص}}{٢\text{س}}$$

$$= \int \tfrac{١}{٢} \text{ص}^{٣} \text{ دص} = \tfrac{١}{٨} \text{ص}^{٤} + \text{جـ}$$

$$= \tfrac{١}{٨} (\text{س}^{٢} - ٣)^{٤} + \text{جـ}$$

③ $\int س^{٣}\sqrt{س^{٢}+١}\ دس$

$ص = \sqrt{س^{٢}+١} \Leftarrow ص^{٢} = س^{٢}+١$

$٢ص\ دص = ٢س\ دس \Leftarrow دس = \frac{ص}{س}\ دص$

$\int س^{٣}\sqrt{س^{٢}+١}\ دس = \int س^{٣}\ ص\ \frac{ص}{س}\ دص$

$= \int س^{٢}\ ص^{٢}\ دص$

لكن $ص^{٢} = س^{٢}+١ \Leftarrow س^{٢} = ص^{٢}-١$

$\int س^{٢}\ ص^{٢}\ دص = \int (ص^{٢}-١)\ ص^{٢}\ دص$

$= \int (ص^{٤}-ص^{٢})\ دص$

$= \frac{١}{٥}ص^{٥} + \frac{١}{٣}ص^{٣} + ج$

$= \frac{١}{٥}(\sqrt{س^{٢}+١})^{٥} + \frac{١}{٣}(\sqrt{س^{٢}+١})^{٣} + ج$

④ $\int_{٠}^{\sqrt{٨}} \frac{س}{\sqrt{س^{٢}+١}}\ دس$

$ص = \sqrt{س^{٢}+١} \Leftarrow ص^{٢} = س^{٢}+١$

$٢ص\ دص = ٢س\ دس \Leftarrow دس = \frac{ص}{س}\ دص$

$س = ٠ \Leftarrow ص = ١$

$س = \sqrt{٨} \Leftarrow ص = ٣$

$\int_{١}^{٣} \frac{س}{ص} \times \frac{ص}{س}\ دص = [ص]_{١}^{٣} = ٢$

⑤ $\int س^{٨}(س^{٣}+٢)^{٧}\ دس$

$ص = س^{٣}+٢ \Leftarrow س^{٣} = ص-٢$

$\Leftarrow س^{٦} = (ص-٢)^{٢}$

$\frac{دص}{دس} = ٣س^{٢} \Leftarrow دس = \frac{دص}{٣س^{٢}}$

$\int س^{٨}(س^{٣}+٢)^{٧}\ دس = \int س^{٨}\ ص^{٧}\ \frac{دص}{٣س^{٢}}$

$= \frac{١}{٣}\int (ص-٢)^{٢}\ ص^{٧}\ دص$

$= \frac{١}{٣}\int (ص^{٢}-٤ص+٤)\ ص^{٧}\ دص$

$= \frac{١}{٣}\int (ص^{٩}-٤ص^{٨}+٤ص^{٧})\ دص$

$= \frac{١}{٣}\left(\frac{١}{١٠}ص^{١٠} - \frac{٤}{٩}ص^{٩} + \frac{١}{٢}ص^{٨}\right) + ج$

$= \frac{١}{٣٠}(س^{٣}+٢)^{١٠} - \frac{٤}{٢٧}(س^{٣}+٢)^{٩} + \frac{١}{٦}(س^{٣}+٢)^{٨} + ج$

⑥ $\int \sqrt{س^{٢}+س^{٤}}\ دس$ ، $س < ٠$

$\int \sqrt{س^{٢}+س^{٤}}\ دس = \int \sqrt{س^{٢}(١+س^{٢})}\ دس$

$= \int \sqrt{س^{٢}}\ \sqrt{١+س^{٢}}\ دس$

$= \int |س|\ \sqrt{١+س^{٢}}\ دس$

لكن $س < ٠$

$$\int |س| \sqrt{١ + س^{٢}}\ دس$$

$$= \int -س \sqrt{١ + س^{٢}}\ دس$$

$$ص = \sqrt{١ + س^{٢}} \Leftarrow ص^{٢} = ١ + س^{٢}$$

$$٢ص\ دص = ٢س\ دس \Leftarrow دس = \frac{ص}{س}\ دص$$

$$\int -س\sqrt{١ + س^{٢}}\ دس = \int -س\ ص\ \frac{ص}{س}\ دص$$

$$= \int -ص^{٢}\ دص = -\frac{١}{٣}\ ص^{٣} + جـ$$

$$= -\frac{١}{٣}\left(\sqrt{١ + س^{٢}}\right)^{٣} + جـ$$

(٧) $$\int \frac{س}{(س^{٤} + ٦س^{٢} + ٩)^{٥}}\ دس$$

$$\int \frac{س}{(س^{٤} + ٦س^{٢} + ٩)^{٥}}\ دس$$

$$= \int \frac{س}{\left((س^{٢} + ٣)(س^{٢} + ٣)\right)^{٥}}\ دس$$

$$= \int س\ (س^{٢} + ٣)^{-١٠}\ دس$$

$$ص = س^{٢} + ٢ \Leftarrow \frac{دص}{دس} = ٢س \Leftarrow دس = \frac{دص}{٢س}$$

$$\int س\ (س^{٢} + ٣)^{-١٠}\ دس = \int س\ ص^{-١٠}\ \frac{دص}{٢س}$$

$$= \int \frac{١}{٢}\ ص^{-١٠}\ دس = -\frac{١}{١٨}\ ص^{-٩} + جـ$$

$$= -\frac{١}{١٨}\ (س^{٢} + ٣)^{-٩} + جـ$$

(٨) $$\int \sqrt[٣]{\frac{س + ١}{س^{٧}}}\ دس$$

$$\int \sqrt[٣]{\frac{س + ١}{س^{٧}}}\ دس = \int \sqrt[٣]{\frac{س + ١}{س^{٦} \times س}}\ دس$$

$$= \int \frac{١}{س^{٢}} \sqrt[٣]{١ + \frac{١}{س}}\ \ دس$$

$$ص = \sqrt[٣]{١ + \frac{١}{س}} \Leftarrow ص^{٣} = ١ + \frac{١}{س}$$

$$٣ص^{٢}\ دص = -\frac{١}{س^{٢}}\ دس$$

$$\Leftarrow دس = -٣ص^{٢}س^{٢}\ دص$$

ويصبح التكامل

$$\int \frac{١}{س^{٢}}\ ص\ (-٣ص^{٢}س^{٢})\ دص$$

$$= \int -٣ص^{٣}\ دص = -\frac{٣}{٤}\ ص^{٤} + جـ$$

$$= -\frac{٣}{٤}\left(\sqrt[٣]{١ + \frac{١}{س}}\right)^{٤} + جـ$$

(٩) $$\int س^{٨} \left(\frac{٢}{س} - \frac{٣}{س^{٢}}\right)^{٤}\ دس$$

$$\int س^{٨} \left(\frac{٢}{س} - \frac{٣}{س^{٢}}\right)^{٤}\ دس$$

$$= \int س^{٨} \left(\frac{٢س - ٣}{س^{٢}}\right)^{٤}\ دس$$

$$= \int س^{٨}\ \frac{(٢س - ٣)^{٤}}{س^{٨}}\ دس$$

$$= \int (2\text{س} - 3)^{4}\, \text{دس}$$

$$= \frac{1}{10}(2\text{س} - 3)^{5} + \text{جـ}$$

(10) $\displaystyle \int \frac{(\text{س} + 1)^{\text{ن}}}{\text{س}^{\text{ن} + 2}}\, \text{دس}$

$$\int \frac{(\text{س} + 1)^{\text{ن}}}{\text{س}^{\text{ن} + 2}}\, \text{دس} = \int \frac{(\text{س} + 1)^{\text{ن}}}{\text{س}^{\text{ن}}\,\text{س}^{2}}\, \text{دس}$$

$$= \int \frac{1}{\text{س}^{2}} \left(\frac{\text{س} + 1}{\text{س}}\right)^{\text{ن}} \text{دس}$$

$$= \int \frac{1}{\text{س}^{2}} \left(1 + \frac{1}{\text{س}}\right)^{\text{ن}} \text{دس}$$

$$\text{ص} = 1 + \frac{1}{\text{س}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\frac{1}{\text{س}^{2}} \Leftarrow \text{دس} = -\text{س}^{2}\, \text{دص}$$

$$\int \frac{1}{\text{س}^{2}} \left(1 + \frac{1}{\text{س}}\right)^{\text{ن}} \text{دس}$$

$$= \int \frac{1}{\text{س}^{2}}\, \text{ص}^{\text{ن}} (-\text{س}^{2}\, \text{دص}) = \int -\text{ص}^{\text{ن}}\, \text{دص}$$

$$= \frac{1}{\text{ن} + 1}\, \text{ص}^{\text{ن} + 1} + \text{جـ}$$

$$= \frac{1}{\text{ن} + 1} \left(1 + \frac{1}{\text{س}}\right)^{\text{ن} + 1} + \text{جـ}$$

مثال $\boxed{2}$: إذا علمت أن $\int_{0}^{2} \text{ق}(\text{س})\, \text{دس} = 12$ ،

جد $\int_{0}^{1} \text{س}\, \text{ق}(2\text{س}^{2})\, \text{دس}$

$$\int_{0}^{1} \text{س}\, \text{ق}(2\text{س}^{2})\, \text{دس}$$

$$\text{ص} = 2\text{س}^{2}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 4\text{س} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{4\text{س}}$$

$$\text{س} = 0 \Leftarrow \text{ص} = 0$$

$$\text{س} = 1 \Leftarrow \text{ص} = 2$$

$$\int_{0}^{1} \text{س}\, \text{ق}(2\text{س}^{2})\, \text{دس} = \int_{0}^{2} \text{س}\, \text{ق}(\text{ص}) \frac{\text{دص}}{4\text{س}}$$

$$= \int_{0}^{2} \frac{1}{4}\, \text{ق}(\text{ص})\, \text{دص} = \frac{1}{4} \times 12 = 3$$

مثال $\boxed{3}$: أثبت أن

$$\int_{0}^{\text{أ}} \text{ق}(\text{س})\, \text{دس} = \int_{\text{أ}}^{2\text{أ}} \text{ق}(2\text{أ} - \text{س})\, \text{دس}$$

$$\text{الطرف الأيسر} = \int_{\text{أ}}^{2\text{أ}} \text{ق}(2\text{أ} - \text{س})\, \text{دس}$$

$$\text{ص} = 2\text{أ} - \text{س} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -1$$

$$\text{س} = \text{أ} \Leftarrow \text{ص} = \text{أ}$$

$$\text{س} = 2\text{أ} \Leftarrow \text{ص} = 0$$

$$\int_{\text{أ}}^{2\text{أ}} \text{ق}(2\text{أ} - \text{س})\, \text{دس} = \int_{\text{أ}}^{0} \text{ق}(\text{ص})\, (-\text{دص})$$

$$= -\int_{\text{أ}}^{0} \text{ق}(\text{ص})\, \text{دص} = \int_{0}^{\text{أ}} \text{ق}(\text{ص})\, \text{دص}$$

= الطرف الأيمن

مثال $\boxed{٤}$: جد كلا من التكاملات الآتية :

(١) $\int \text{جتا}\sqrt{٢\text{س} + ١}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \sqrt{٢\text{س} + ١} \Leftarrow \text{ص}^{٢} = ٢\text{س} + ١$

$٢\text{ص دص} = ٢\ \text{دس} \Leftarrow \text{دس} = \text{ص دص}$

$\int \text{جتا}\sqrt{٢\text{س} + ١}\ \text{دس}$

$= \int \text{جتا ص (ص دص)}$

$= \int \text{ص جتا ص دص}$

ع = ص	×	ده = جتاص
دع = ١	$-\int$	هـ = جاص

$\int \text{ص جتاص دص} = \text{ص جاص} - \int \text{جاص دص}$

$= \text{ص جا ص} + \text{جتا ص} + \text{ج}$

$= \sqrt{٢\text{س} + ١}\ \text{جا}\sqrt{٢\text{س} + ١} + \text{جتا}\sqrt{٢\text{س} + ١} + \text{ج}$

(٢) $\int \dfrac{\text{جا}^{٢}(\text{ظاس})}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}\ \text{دس}$

$\int \dfrac{\text{جا}^{٢}(\text{ظاس})}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}\ \text{دس}$

$= \int \text{جا}^{٢}(\text{ظاس})\ \text{قا}^{٢}\text{س دس}$

$\text{ص} = \text{ظاس} \Leftarrow \dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قا}^{٢}\text{س}$

$\text{دس} = \dfrac{\text{دص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}$

$\int \text{جا}^{٢}(\text{ظاس})\ \text{قا}^{٢}\text{س دس}$

$= \int \text{جا}^{٢}\text{ص قا}^{٢}\text{س} \dfrac{\text{دص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}$

$= \int \text{جا}^{٢}\text{ص دص}$

$= \int \left(\tfrac{١}{٢} - \tfrac{١}{٢}\ \text{جتا}٢\text{ص}\right)\text{دص}$

$= \tfrac{١}{٢}\ \text{ص} - \tfrac{١}{٤}\ \text{جا}٢\text{ص} + \text{ج}$

$= \tfrac{١}{٢}\ \text{ظاس} - \tfrac{١}{٢}\ \text{جا}(٢\text{ظاس}) + \text{ج}$

(٣) $\int \text{ظا}^{٤}\text{س قا}^{٢}\text{س دس}$

$\text{ص} = \text{ظاس} \Leftarrow \dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قا}^{٢}\text{س}$

$\text{دس} = \dfrac{\text{دص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}$

$\int \text{ظا}^{٤}\text{س قا}^{٢}\text{س دس}$

$= \int \text{ص}^{٤}\ \text{قا}^{٢}\text{س} \dfrac{\text{دص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}} = \int \text{ص}^{٤}\ \text{دص}$

$= \tfrac{١}{٥}\ \text{ص}^{٥} + \text{ج} = \tfrac{١}{٥}\ \text{ظا}^{٥}\text{س} + \text{ج}$

(٤) $\int \text{جا}^{٣}\text{س جتا}^{٥}\text{س دس}$

$\text{ص} = \text{جتاس} \Leftarrow \dfrac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\ \text{جاس}$

دس = $\frac{\text{د ص}}{\text{-جاس}}$

∫ جا^{٣}س جتا^{٥}س دس

= ∫ص^{٥} جا^{٣}س $\frac{\text{د ص}}{\text{-جاس}}$ = ∫ -ص^{٥} جا^{٢}س دص

لكن جا^{٢}س = ١ - جتا^{٢}س

∫ -ص^{٥} جا^{٢}س دص

= ∫ -ص^{٥} (١ - جتا^{٢}س) دص

لكن ص = جتاس

∫ -ص^{٥} (١ - ص^{٢}) دص

= ∫ (ص^{٧} - ص^{٥}) دص

= $\frac{١}{٨}$ ص^{٨} - $\frac{١}{٦}$ ص^{٦} + جـ

= $\frac{١}{٨}$ جتا^{٨}س - $\frac{١}{٦}$ جتا^{٦}س + جـ

⑤ ∫ جا^{٢}س جتا^{٣}س دس

ص = جاس ⇐ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = جتاس

دس = $\frac{\text{د ص}}{\text{جتاس}}$

∫ جا^{٢}س جتا^{٣}س دس = ∫ ص^{٢} جتا^{٣}س $\frac{\text{د ص}}{\text{جتاس}}$

= ∫ ص^{٢} جتا^{٢}س دص

لكن جتا^{٢}س = ١ - جا^{٢}س

∫ ص^{٢} جتا^{٢}س دص

= ∫ -ص^{٥} (١ - جا^{٢}س) دص

لكن ص = جاس

∫ ص^{٢}(١ - ص^{٢}) دص = ∫ (ص^{٢} - ص^{٤}) دص

= $\frac{١}{٣}$ ص^{٣} - $\frac{١}{٥}$ ص^{٥} + جـ

= $\frac{١}{٣}$ جا^{٣}س - $\frac{١}{٥}$ جا^{٥}س + جـ

⑥ ∫ قا^{١٥}س ظاس دس

ص = قاس ⇐ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = قاس ظاس

دس = $\frac{\text{د ص}}{\text{قاس ظاس}}$

∫ قا^{١٥}س ظاس دس

= ∫ ص^{١٥} ظاس $\frac{\text{د ص}}{\text{قاس ظاس}}$ = ∫ ص^{١٤} دص

= $\frac{١}{١٥}$ ص^{١٥} + جـ = $\frac{١}{١٥}$ قا^{١٥}س + جـ

(٧) ∫ قا^{٤}س دس

∫ قا^{٤}س دس = ∫ قا^{٢}س × قا^{٢}س دس

= ∫ (١ + ظا^{٢}س) قا^{٢}س دس

I = ∫ (قا^{٢}س + ظا^{٢}س قا^{٢}س) دس

I = ظاس + ∫ ظا^{٢}س قا^{٢}س دس

ص = ظاس ⇐ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = قا^{٢}س

دس = $\frac{\text{دص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}$

∫ ظا^{٢}س قا^{٢}س دس = ∫ ص^{٢} قا^{٢}س $\frac{\text{دص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}$ =

∫ ص^{٢} دص = $\frac{١}{٣}$ ص^{٣} = $\frac{١}{٣}$ ظا^{٣}س

I = ظاس + $\frac{١}{٣}$ ظا^{٣}س + جـ

(٨) ∫ ظا^{٣}س قا^{٤}س دس

ص = ظاس ⇐ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = قا^{٢}س

دس = $\frac{\text{دص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}$

∫ ظا^{٣}س قا^{٤}س دس

= ∫ ص^{٣} قا^{٤}س $\frac{\text{دص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}$

= ∫ ص^{٣} قا^{٢}س دص

لكن قا^{٢}س = ١ + ظا^{٢}س

∫ ص^{٣} قا^{٢}س دص

= ∫ ص^{٣} (١ + ظا^{٢}س) دص

لكن ص = ظاس

∫ ص^{٣} (١ + ظا^{٢}س) دص

= ∫ ص^{٣}(١ + ص^{٢}) دص

= ∫ (ص^{٣} + ص^{٥}) دص

= $\frac{١}{٤}$ ص^{٤} + $\frac{١}{٦}$ ص^{٦} + جـ

= $\frac{١}{٤}$ ظا^{٤}س + $\frac{١}{٦}$ ظا^{٦}س + جـ

(٩) ∫ $\frac{١}{\text{س}^{٢}\sqrt{١ + \text{س}^{٢}}}$ دس ، س > ٠

∫ $\frac{١}{\text{س}^{٢}\sqrt{١ + \text{س}^{٢}}}$ دس

= ∫ $\frac{١}{\text{س}^{٢}\sqrt{\text{س}^{٢}\left(\frac{١}{\text{س}^{٢}} + ١\right)}}$ دس

= ∫ $\frac{١}{\text{س}^{٢}\,|\text{س}|\sqrt{\text{س}^{-٢} + ١}}$ دس ،

لكن س > ٠

$$= \int \frac{١}{س^{٣}\sqrt{س^{-٢}+١}}\ دس$$

$$ص = \sqrt{س^{-٢}+١} \Leftarrow ص^{٢} = س^{-٢} + ١$$

$$٢ص\ دص = -٢س^{-٣}\ دس$$

$$\Leftarrow دس = -ص\ س^{٣}\ دص$$

$$\int \frac{١}{س^{٣}\sqrt{س^{-٢}+١}}\ دس$$

$$= \int \frac{١}{س^{٣}\ ص}\ (-ص\ س^{٣}\ دص)$$

$$= \int -\ دص = -ص + جـ$$

$$= -\left(\sqrt{س^{-٢}+١}\right) + جـ$$

(١٠) $$\int \frac{١}{س^{٢}-١}\sqrt{\frac{س+١}{س-١}}\ دس$$

$$ص = \sqrt{\frac{س+١}{س-١}} \Leftarrow ص^{٢} = \frac{س+١}{س-١}$$

$$٢ص\ دص = \frac{س-١-(س+١)}{(س-١)^{٢}}\ دس$$

$$\Leftarrow دس = -ص(س-١)^{٢}\ دص$$

$$\int \frac{١}{س^{٢}-١}\sqrt{\frac{س+١}{س-١}}\ دس$$

$$= \int \frac{١}{س^{٢}-١}\ ص\ (-ص(س-١)^{٢}\ دص)$$

$$= -\int \frac{س-١}{س+١}\ ص^{٢}\ دص$$

$$\text{لكن } ص^{٢} = \frac{س+١}{س-١} \Leftarrow \frac{س-١}{س+١} = \frac{١}{ص^{٢}}$$

$$-\int \frac{س-١}{س+١}\ ص^{٢}\ دص = -\int \frac{١}{ص^{٢}}\ ص^{٢}\ دص$$

$$= \int -\ دص = -ص + جـ$$

$$= -\sqrt{\frac{س+١}{س-١}} + جـ$$

(١١) $$\int (س+١)^{٣}(س^{٢}+٢س+٧)^{٥}\ دس$$

$$ص = س^{٢} + ٢س + ٧$$

$$\frac{دص}{دس} = ٢س + ٢ \Leftarrow دس = \frac{دص}{٢(س+١)}$$

$$\int (س+١)^{٣}(س^{٢}+٢س+٧)^{٥}\ دس$$

$$= \int (س+١)^{٣}ص^{٥}\ \frac{دص}{٢(س+١)}$$

$$= \int \frac{١}{٢}(س+١)^{٢}ص^{٥}\ دص$$

$$= \int \frac{١}{٢}(س^{٢}+٢س+١)ص^{٥}\ دص$$

$$\text{لكن } ص = س^{٢} + ٢س + ٧$$

$$\Leftarrow س^{٢} + ٢س = ص - ٧$$

$$= \int \frac{١}{٢}(ص - ٧ + ١)ص^{٥}\ دص$$

$$= \int \frac{١}{٢}(ص^{٦} - ٦ص^{٥})\ دص$$

$$= \frac{١}{١٤}ص^{٧} - \frac{١}{٢}ص^{٦} + جـ$$

$$= \frac{١}{١٤}(س^{٢}+٢س+٧)^{٧} - \frac{١}{٢}(س^{٢}+٢س+٧)^{٦} + جـ$$

(١٢) $\int \frac{\sqrt[٣]{\text{س}^{٣} + ٢\text{س}}}{\text{س}^{٤}}\,\text{دس}$

$\int \frac{\sqrt[٣]{\text{س}^{٣} + ٢\text{س}}}{\text{س}^{٤}}\,\text{دس}$

$= \int \frac{\sqrt[٣]{\text{س}^{٣}\left(١ + \frac{٢}{\text{س}^{٢}}\right)}}{\text{س}^{٤}}\,\text{دس}$

$= \int \frac{\sqrt[٣]{١ + ٢\text{س}^{-٢}}}{\text{س}^{٣}}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \sqrt[٣]{١ + ٢\text{س}^{-٢}}$

$\Leftarrow \text{ص}^{٣} = ١ + ٢\text{س}^{-٢}$

$٣\text{ص}^{٢}\,\text{دص} = -٤\text{س}^{-٣}\,\text{دس}$

$\text{دس} = -\frac{٣}{٤}\,\text{ص}^{٢}\,\text{س}^{٣}\,\text{دص}$

$\int \frac{\sqrt[٣]{١ + ٢\text{س}^{-٢}}}{\text{س}^{٣}}\,\text{دس}$

$= \int \frac{\text{ص}}{\text{س}^{٣}}\left(-\frac{٣}{٤}\,\text{ص}^{٢}\,\text{س}^{٣}\,\text{دص}\right)$

$= \int -\frac{٣}{٤}\,\text{ص}^{٣}\,\text{دص}$

$= -\frac{٣}{١٦}\,\text{ص}^{٤} + \text{جـ}$

$= -\frac{٣}{١٦}\left(\sqrt[٣]{١ + ٢\text{س}^{-٢}}\right)^{٤} + \text{جـ}$

(١٣) $\int (\text{جتاس} - \text{جاس})^{٦}\,\text{جتا٢س}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{جاس} + \text{جتاس}$

$\Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{جتاس} - \text{جاس}$

$\text{دس} = \frac{\text{د ص}}{\text{جتاس} - \text{جاس}}$

$\int (\text{جتاس} - \text{جاس})^{٦}\,\text{جتا٢س}\,\text{دس}$

$= \int \text{ص}^{٦}\,\text{جتا٢س}\,\frac{\text{د ص}}{\text{جتاس} - \text{جاس}}$

لكن $\text{جتا٢س} = \text{جتا}^{٢}\text{س} - \text{جا}^{٢}\text{س}$

$\int \text{ص}^{٦}\,\text{جتا٢س}\,\frac{\text{د ص}}{\text{جتاس} - \text{جاس}}$

$= \int \text{ص}^{٦}\,(\text{جتا}^{٢}\text{س} - \text{جا}^{٢}\text{س})\,\frac{\text{د ص}}{\text{جتاس} - \text{جاس}}$

$= \int \text{ص}^{٦}(\text{جتاس} - \text{جاس})(\text{جتاس} + \text{جاس})\frac{\text{د ص}}{\text{جتاس} - \text{جاس}}$

$= \int \text{ص}^{٦}\,(\text{جتاس} + \text{جاس})\,\text{دص}$

لكن $\text{ص} = \text{جتاس} + \text{جاس}$

$\int \text{ص}^{٦}\,(\text{جتاس} + \text{جاس})\,\text{دص}$

$= \int \text{ص}^{٧}\,\text{دص} = \frac{١}{٨}\,\text{ص}^{٨} + \text{جـ}$

$= \frac{١}{٨}(\text{جتاس} + \text{جاس})^{٨} + \text{جـ}$

(١٤) $\int \text{س}^{٢}\,\sqrt[٣]{\text{س} - ١}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \sqrt[٣]{\text{س} - ١} \Leftarrow \text{ص}^{٣} = \text{س} - ١$

$$3ص^{2}\ دص = دس$$

$$\int س^{2}\sqrt[3]{س-1}\ دس = \int س^{2}ص \times 3ص^{2}دص$$

لكن $س = ص^{3} + 1$

$$\int س^{2}ص \times 3ص^{2}\ دص$$

$$= \int (ص^{3}+1)^{2} \times 3ص^{3}\ دص$$

$$= \int (ص^{6} + 2ص^{3} + 1) \times 3ص^{3}\ دص$$

$$= \int (3ص^{9} + 6ص^{6} + 3ص^{3})\ دص$$

$$= \frac{3}{10}ص^{10} + \frac{6}{7}ص^{7} + \frac{3}{4}ص^{4} + جـ$$

$$= \frac{3}{10}(\sqrt[3]{س-1})^{10} + \frac{6}{7}(\sqrt[3]{س-1})^{7} + \frac{3}{4}(\sqrt[3]{س-1})^{4} + جـ$$

(١٥) $\int هـ^{س+هـ^{س}}\ دس$

$$\int هـ^{س+هـ^{س}}\ دس = \int هـ^{س}هـ^{هـ^{س}}\ دس$$

$$ص = هـ^{س} \Leftarrow \frac{دص}{دس} = هـ^{س} \Leftarrow دس = \frac{دص}{هـ^{س}} = \frac{دص}{ص}$$

$$\int هـ^{س}هـ^{هـ^{س}}\ دس = \int ص هـ^{ص}\frac{دص}{ص}$$

$$= \int هـ^{ص}\ دس = هـ^{ص} + جـ = هـ^{هـ^{س}} + جـ$$

(١٦) $\int س^{3}هـ^{س^{2}}\ دس$

$$ص = س^{2} \Leftarrow \frac{دص}{دس} = 2س \Leftarrow دس = \frac{دص}{2س}$$

$$\int س^{3}هـ^{س^{2}}\ دس = \int س^{3}هـ^{ص}\frac{دص}{2س}$$

$$= \int \frac{1}{2}س^{2}هـ^{ص}\ دص = \int \frac{1}{2}ص\ هـ^{ص}\ دص$$

$$\begin{array}{ccc} ق = \frac{1}{2}ص & \times & دهـ = هـ^{ص} \\ دق = \frac{1}{2} & \xrightarrow[-\int]{} & هـ = هـ^{ص} \end{array}$$

$$\int \frac{1}{2}ص\ هـ^{ص}\ دص = \frac{1}{2}ص\ هـ^{ص} - \int \frac{1}{2}هـ^{ص}\ دص$$

$$= \frac{1}{2}ص\ هـ^{ص} - \frac{1}{2}هـ^{ص} + جـ$$

$$= \frac{1}{2}س^{2}\ هـ^{س^{2}} - \frac{1}{2}هـ^{س^{2}} + جـ$$

(١٧) $\int هـ^{2س}\ جا(هـ^{س})\ دس$

$$ص = هـ^{س} \Leftarrow \frac{دص}{دس} = هـ^{س} \Leftarrow دس = \frac{دص}{هـ^{س}}$$

$$\int هـ^{2س}\ جا(هـ^{س})\ دس = \int هـ^{2س}\ جاص\ \frac{دص}{هـ^{س}} =$$

$$\int هـ^{س}\ جاص\ دص = \int ص\ جاص\ دص$$

$$\begin{array}{ccc} ق = ص & \times & دهـ = جاص \\ دق = 1 & \xrightarrow[-\int]{} & هـ = -جتاص \end{array}$$

$$\int ص\ جاص\ دص$$

$$= -\text{ص جتاص} + \int \text{جتاص دص}$$

$$= -\text{ص جتاص} + \text{جاص} + \text{جـ}$$

$$= -\text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جتا}(\text{هـ}^{\text{س}}) + \text{جا}(\text{هـ}^{\text{س}}) + \text{جـ}$$

(١٨) $$\int \frac{\text{جا٢س}}{\text{١} + \text{جا}^{\text{٢}}\text{س}}\ \text{دس}$$

$$\text{ص} = \text{١} + \text{جا}^{\text{٢}}\text{س}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٢جاس جتاس}$$

$$\Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{٢جاس جتاس}} = \frac{\text{دص}}{\text{جا٢س}}$$

$$\int \frac{\text{جا٢س}}{\text{١} + \text{جا}^{\text{٢}}\text{س}}\ \text{دس} = \int \frac{\text{جا٢س}}{\text{ص}}\ \frac{\text{دص}}{\text{جا٢س}}$$

$$= \int \frac{\text{١}}{\text{ص}}\ \text{دص} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| + \text{جـ}$$

$$= \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{١} + \text{جا}^{\text{٢}}\text{س}| + \text{جـ}$$

(١٩) $$\int \text{قاس دس}$$

هذا التكامل نتعامل معه بطريقة مخصصة وكما يلي

$$\int \text{قاس دس} = \int \text{قاس} \times \frac{\text{قاس} + \text{ظاس}}{\text{قاس} + \text{ظاس}}\ \text{دس}$$

$$= \int \frac{\text{قا}^{\text{٢}}\text{س} + \text{قاس ظاس}}{\text{قاس} + \text{ظاس}}\ \text{دس}$$

$$\text{ص} = \text{قاس} + \text{ظاس}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{قاس ظاس} + \text{قا}^{\text{٢}}\text{س}$$

$$\Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{قا}^{\text{٢}}\text{س} + \text{قاس ظاس}}$$

$$\int \frac{\text{قا}^{\text{٢}}\text{س} + \text{قاس ظاس}}{\text{قاس} + \text{ظاس}}\ \text{دس}$$

$$= \int \frac{\text{قا}^{\text{٢}}\text{س} + \text{قاس ظاس}}{\text{ص}}\ \frac{\text{دص}}{\text{قا}^{\text{٢}}\text{س} + \text{قاس ظاس}}$$

$$= \int \frac{\text{١}}{\text{ص}}\ \text{دص} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| + \text{جـ}$$

$$= \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{قاس} + \text{ظاس}| + \text{جـ}$$

(٢٠) $$\int \frac{\text{١} + \text{ظا}^{\text{٢}}\text{س}}{\text{ظاس}}\ \text{دس} = \int \frac{\text{قا}^{\text{٢}}\text{س}}{\text{ظاس}}\ \text{دس}$$

$$\text{ص} = \text{ظاس}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{قا}^{\text{٢}}\text{س} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{قا}^{\text{٢}}\text{س}}$$

$$\int \frac{\text{قا}^{\text{٢}}\text{س}}{\text{ظاس}}\ \text{دس} = \int \frac{\text{قا}^{\text{٢}}\text{س}}{\text{ص}}\ \frac{\text{دص}}{\text{قا}^{\text{٢}}\text{س}} = \int \frac{\text{١}}{\text{ص}}\ \text{دص}$$

$$= \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| + \text{جـ} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ظاس}| + \text{جـ}$$

(٢١) $\int \frac{\text{١}}{\text{س}} \sqrt{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \sqrt{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}} \quad \Leftarrow \quad \text{ص}^{\text{٢}} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

$\text{٢ص دص} = \frac{\text{١}}{\text{س}}\ \text{دس} \Leftarrow \text{دس} = \text{٢ص س دص}$

$\int \frac{\text{١}}{\text{س}} \sqrt{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}\ \text{دس} = \int \frac{\text{١}}{\text{س}}\ \text{ص} \times \text{٢ص س دص}$

$= \int \text{٢ص}^{\text{٢}}\ \text{دص} = \frac{\text{٢}}{\text{٣}}\ \text{ص}^{\text{٣}} + \text{جـ}$

$= \frac{\text{٢}}{\text{٣}} \left(\sqrt{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}\right)^{\text{٣}} + \text{جـ}$

(٢٢) $\int \frac{\text{١}}{\text{س}}\ \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})\ \text{دس}$

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{١}}{\text{س}}$

$\text{دس} = \text{س دص}$

$\int \frac{\text{١}}{\text{س}}\ \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})\ \text{دس} = \int \frac{\text{١}}{\text{س}}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}\ \text{س دص}$

$= \int \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}\ \text{دص}$

$\text{ق} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} \qquad \times \qquad \text{دهـ} = \text{١}$

$\text{دق} = \frac{\text{١}}{\text{ص}} \qquad -\int \qquad \text{هـ} = \text{ص}$

$\int \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}\ \text{دص} = \text{ص لو}_{\text{هـ}}\text{ص} - \int \text{دص}$

$= \text{ص لو}_{\text{هـ}}\text{ص} - \text{ص} + \text{جـ}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}) - \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \text{جـ}$

(٢٣) $\int \frac{\sqrt[\text{٣}]{\text{س}}}{\text{٥} - \text{س}\sqrt[\text{٣}]{\text{س}}}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \text{٥} - \text{س}\sqrt[\text{٣}]{\text{س}} = \text{٥} - \text{س}^{\frac{\text{٤}}{\text{٣}}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\frac{\text{٤}}{\text{٣}}\ \text{س}^{\frac{\text{١}}{\text{٣}}} \Leftarrow \text{دس} = -\frac{\text{٣}}{\text{٤}}\ \frac{\text{دص}}{\sqrt[\text{٣}]{\text{س}}}$

$\int \frac{\sqrt[\text{٣}]{\text{س}}}{\text{٥} - \text{س}\sqrt[\text{٣}]{\text{س}}}\ \text{دس} = \int \frac{\sqrt[\text{٣}]{\text{س}}}{\text{ص}} \times -\frac{\text{٣}}{\text{٤}}\ \frac{\text{دص}}{\sqrt[\text{٣}]{\text{س}}}$

$= -\frac{\text{٣}}{\text{٤}}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} + \text{جـ}$

$= -\frac{\text{٣}}{\text{٤}}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\left(\text{٥} - \text{س}\sqrt[\text{٣}]{\text{س}}\right) + \text{جـ}$

تدريب [١] جد كلا من التكاملات التالية :

(١) $\int \text{س}^{\text{٥}} \sqrt{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٢}}\ \text{دس}$

(٢) $\int \text{س}^{\text{٥}} \sqrt{\text{س}^{\text{٣}} + \text{١}}\ \text{دس}$

(٣) $\int \text{س}^{\text{٥}} (\text{س}^{\text{٣}} + \text{٢})^{\text{٧}}\ \text{دس}$

(٤) $\int \frac{(\sqrt{\text{س}} + \text{٣})^{\text{٤}}}{\sqrt{\text{س}}}\ \text{دس}$

(٥) $\int \text{س} \sqrt[\text{٣}]{\frac{\text{٢}}{\text{س}^{\text{٣}}} + \frac{\text{٥}}{\text{س}^{\text{٢}}}}\ \text{دس}$

(٦) $\int \text{جا}\sqrt{\text{س}}\ \text{دس}$

(٧) $\int \frac{١}{\text{س}^{٢}} \text{ظا}^{٢}\left(\frac{١}{\text{س}}\right) \text{دس}$

(٨) $\int \frac{\text{س}^{٢} \text{قتا}^{٢} \sqrt{\text{س}^{٣} + ٥}}{\sqrt{\text{س}^{٣} + ٥}} \text{دس}$

(٩) $\int \text{س}^{٨} \text{جتاس}^{٣} \text{دس}$

(١٠) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جاس جتاس}}{\sqrt{١ + \text{جا}^{٢}\text{س}}} \text{دس}$

(١١) $\int (\text{س}^{٢} - ٢)\ \text{جا}(\text{س}^{٣} - ٦\text{س})\ \text{دس}$

(١٢) $\int \text{س قا}(١ - ٢\text{س}^{٢})\ \text{ظا}(١ - ٢\text{س}^{٢})\ \text{دس}$

(١٣) $\int \text{جا}^{٤}\text{س جتاس دس}$

(١٤) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \text{جتاس جاس دس}$

(١٥) $\int \frac{\text{س جاس}}{\text{جتا}^{٣}\text{س}} \text{دس}$

(١٦) $\int \text{جا}\sqrt{٢\text{س}+١}\ \text{جتا}^{٣}\sqrt{٢\text{س}+١}\ \text{دس}$

(١٧) $\int \text{س قا}^{٢}\text{س ظاس دس}$

(١٨) $\int \frac{\text{س} \quad \sqrt{١ + \text{س}}}{١ - \sqrt{١ + \text{س}}} \text{دس}$

(١٩) $\int \text{جا}^{٤}\text{س جتا}^{٥}\text{س دس}$

(٢٠) $\int \text{جاس}\left(\text{ظتاس} + \frac{١}{\text{قتا}^{٢}\text{س}}\right) \text{دس}$

(٢١) $\int \text{س}^{٨} \left(\frac{٢}{\text{س}^{٢}} - \frac{٣}{\text{س}}\right)^{٤} \text{دس}$

(٢٢) $\int \frac{(٢\text{س} + ١)^{٩}}{\text{س}^{١١}} \text{دس}$

(٢٣) $\int (\text{س}^{٥} + ١)^{٨} \times \text{س}^{١٤}\ \text{دس}$

(٢٤) $\int \sqrt[٣]{٢\text{س}^{٣} + ٣\text{س}^{٥}}\ \text{دس}$

(٢٥) $\int (\text{س}^{٨} - ٤\text{س})^{٦}\ \text{دس}$

(٢٦) $\int (\text{قاس} + \text{ظاس})^{٧}\ \text{قاس دس}$

(٢٧) $\int (٤\text{س}^{٣}+٦\text{س}^{٢}+٢\text{س})(\text{س}^{٢} + \text{س})^{١٥}\ \text{دس}$

(٢٨) $\int_{-٢}^{١} ٥\text{س} \sqrt{\text{س} + ٣}\ \text{دس}$

(٢٩) $\int \frac{\text{س جاس}}{\text{قاس}} \text{دس}$

(٣٠) $\int \text{س}^{٣}\ \text{جتاس}^{٢}\ \text{دس}$

(٣١) $\int \frac{\text{س جتاس}}{\text{جا}^{٣}\text{س}} \text{دس}$

(٣٢) $\int \frac{\text{س}^{٣}}{\sqrt[٣]{\text{س}^{٢} + ١}} \text{دس}$

(٣٣) $\int \text{جا}\sqrt{\text{س}}\ \text{جتا}^{٣}\sqrt{\text{س}}\ \text{دس}$

(٣٤) $\int \text{س}^{٢} \sqrt{١ - \text{س}}\ \text{دس}$

(٣٥) $\int س^{٥}\sqrt[٣]{س^{٣}+١}\ دس$

(٣٦) $\int_{٠}^{٣}\dfrac{س}{\sqrt{س^{٢}+٢}}\ دس$

(٣٧) $\int جا^{٣}س\ دس$

(٣٨) $\int\dfrac{١}{س^{٢}+٦س+٩}\ دس$

(٣٩) $\int\dfrac{س-١}{(س^{٢}-٢س+١)^{٢}}\ دس$

(٤٠) $\int_{١}^{٠}\sqrt{س^{٢}-١٠س+٢٥}\ دس$

(٤١) $\int\dfrac{قتا^{٢}\sqrt{س}}{\sqrt{س}}\ دس$

(٤٢) $\int جا^{٣}س\ جتا^{٢}س\ دس$

(٤٣) $\int\dfrac{(١+س)^{٧}}{س^{٩}}\ دس$

(٤٤) $\int س^{٢}\sqrt[٣]{س^{٧}-س^{٣}}\ دس$

(٤٥) $\int_{١}^{٢}\sqrt[٣]{٢س-٣}\ دس$

(٤٦) $\int هـ^{٢س}(هـ^{٢س}+٥)^{٣}دس$

(٤٧) $\int جا٢س\ هـ^{جاس}\ دس$

(٤٨) $\int\dfrac{جاس}{جتا^{٣}س}\ هـ^{قاس}\ دس$

(٤٩) $\int هـ^{\sqrt{س}}\ دس$

(٥٠) $\int س^{٣}\ هـ^{س^{٣}+٢لو_{هـ}س}\ دس$

(٥١) $\int_{١}^{هـ^{٣}}\dfrac{١}{س\sqrt{١+لو_{هـ}س}}\ دس$

(٥٢) $\int\dfrac{١}{س}\ جتا^{٢}(لو_{هـ}س)\ دس$

(٥٣) $\int جتا\left(لو_{هـ}س\right)\ دس$

(٥٤) $\int\dfrac{\sqrt{س}}{١+س\sqrt{س}}\ دس$

(٥٥) $\int\dfrac{هـ^{س}+هـ^{-س}}{هـ^{س}-هـ^{-س}}\ دس$

تدريب $\boxed{٢}$ إذا علمت أن $\int_{أ}^{ب}س\ ق(٢س+١)\ دس=١٠$

، جد $\int_{أ-٢}^{ب-٢}(٢س+٤)\ ق(٢س+٥)\ دس$

تدريب $\boxed{٣}$ إذا كان $ق(١)=٤$ ، $ق(-١)=٣$،

$\int_{-١}^{١}ق(س)\ دس=٢٠$. فجد $\int_{٢}^{٣}٨س\ قَ(٥-٢س)\ دس$

تدريب $\boxed{٤}$ إذا كان $\int_{-١}^{٥}ق(س)\ دس=٤$، $ق(٥)=٦$،

$ق(-١)=٤$ ، فما قيمة $\int_{٢}^{-١}س\ قَ(٣-٢س)\ دس$

تدريب $\boxed{٥}$ إذا كان $م(س)$ معكوسا لمشتقة الاقتران

$ق(س)$ بحيث $م(٥)=٧$ ، $م(١)=٣$ ، احسب

$\int_{٠}^{٢}٨س\ ق(س^{٢}+١)\ دس$

وبعد المرور على كافة طرق التكامل التي تستخدم لحل تكاملات الاقترانات الدائرية إليك ملخصا لتكاملات الاقترانات الدائرية

ملخص تكاملات الاقترانات الدائرية

$\int$ جا^{ن}س دس ، $\int$ جتا^{ن}س دس

ن = ١

$\int$ جا س دس = − جتاس + جـ

$\int$ جتا س دس = جاس + جـ

ن فردي

نفرض ص = العكس

جاس

جتاس

ونستخدم جا^{٢}س = ١ − جتا^{٢}س

جتا^{٢}س = ١ − جا^{٢}س

ن زوجي

نستخدم جا^{٢}س = $\frac{١}{٢}$ − $\frac{١}{٢}$ جتا٢س

جتا^{٢}س = $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ جتا٢س

$\int$ جا^{ن}س جتا^{م}س دس (وبشرط تساوي الزوايا)

ن ، م فردي

نفرض ص =

جاس

جتاس

ذات القوة الأكبر

ونستخدم جا^{٢}س = ١ − جتا^{٢}س

جتا^{٢}س = ١ − جا^{٢}س

ن أو م زوجي والآخر فردي

نفرض ص = الزوجي

ونستخدم جا^{٢}س = ١ − جتا^{٢}س

جتا^{٢}س = ١ − جا^{٢}س

ن ، م كلاهما زوجي

نستخدم جا^{٢}س = $\frac{١}{٢}$ − $\frac{١}{٢}$ جتا٢س

جتا^{٢}س = $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ جتا٢س

$\int$ قا^{ن}س دس ، $\int$ قتا^{ن}س دس

ن = ١

نضرب ب $\frac{\text{قاس + ظاس}}{\text{قاس + ظاس}}$ أو $\frac{\text{قتاس + ظتاس}}{\text{قتاس + ظتاس}}$

$\int$ قا س دس = لو$_{هـ}$ |قاس + ظاس|

$\int$ قتا س دس = − لو$_{هـ}$ |قتاس + ظتاس|

$\boxed{\text{ن = ٢}}$

$\int$ قا^{٢}س دس = ظاس

$\int$ قتا^{٢}س دس = − ظتاس

$\boxed{\text{ن زوجي ن} \geq \text{٤}}$

نكتب التكامل على الصورة

$\int$ قا$^{ن-٢}$س قا^{٢}س دس

$\int$ قتا$^{ن-٢}$س قتا^{٢}س دس

ونستخدم

قا^{٢}س = ١ + ظا^{٢}س في قا$^{ن-٢}$س

قتا^{٢}س = ١ + ظتا^{٢}س في قتا$^{ن-٢}$س

$\boxed{\text{ن فردي ن} \geq \text{٣}}$

نكتب التكامل على الصورة

$\int$ قا$^{ن-٢}$س قا^{٢}س دس

$\int$ قتا$^{ن-٢}$س قتا^{٢}س دس

حيث قا$^{ن-٢}$س ، قتا$^{ن-٢}$س ذات قوى فردية

ونستخدم التكامل بالأجزاء

ع = قا$^{ن-٢}$س (أو قتا$^{ن-٢}$س)

دهـ = قا^{٢}س (أو قتا^{٢}س)

ونجري التكامل بالأجزاء ونستخدم بعد ذلك

قا^{٢}س = ١ + ظا^{٢}س

قتا^{٢}س = ١ + ظتا^{٢}س

ويصبح التكامل دوري

قد نحتاج إلى إجراء التكامل بالأجزاء بالأسلوب ذاته للتكاملات الناتجة من التكاملات بالأجزاء ونحتاج أيضا إلى $\int$ قا س دس ، $\int$ قتا س دس في هذه الحالة

$\int$ ظا^{ن}س دس ، $\int$ ظتا^{ن}س دس

ن = ١

نكتب ظاس = $\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$ أو ظتاس = $\frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}$

ونكامل مستخدما بالتعويض

$\int$ ظا س دس = − لو$_{هـ}$ |جتاس|

$\int$ ظتا س دس = لو$_{هـ}$ |جاس|

ن = ٢

نستخدم ظا^{٢}س = قا^{٢}س − ١

ظتا^{٢}س = قتا^{٢}س − ١

ومن ثم نكامل مباشرة

ن $\geq$ ٣

نكتب التكامل على الصورة

$\int$ ظا$^{ن-٢}$س ظا^{٢}س دس

$\int$ ظتا$^{ن-٢}$س ظتا^{٢}س دس

نستخدم ظا^{٢}س = قا^{٢}س − ١

ظتا^{٢}س = قتا^{٢}س − ١

ثم نفصل التكامل

تكامل بالتعويض	والتكامل الآخر
ص = ظاس أو ص = ظتاس حسب السؤال	ن **زوجي** يكامل كما كاملنا سابقا ن **فردي** يكامل كما كاملنا سابقا بالإضافة إلى استخدام $\int$ ظا س دس ، $\int$ ظتا س دس

$\int$ ظا^{ن}س قا^{م}س دس ، $\int$ ظتا^{ن}س قتا^{م}س دس
(وبشرط تساوي الزوايا)

م زوجي

نفرض ص = ظاس
أو ظتاس

ونستخدم قا^{٢}س = ١ + ظا^{٢}س

قتا^{٢}س = ١ + ظتا^{٢}س

ن ، م فردي

نفرض ص = قاس

قتاس

ونستخدم ظا^{٢}س = قا^{٢}س − ١

ظتا^{٢}س = قتا^{٢}س − ١

ن زوجي ، م فردي

نستخدم ظا^{٢}س = قا^{٢}س − ١

ظتا^{٢}س = قتا^{٢}س − ١

ومن ثم نستخدم طريقة

$\int$ قا^{ن}س دس ، $\int$ قتا^{ن}س دس

حيث ن فردي

الدرس التاسع : التكامل بالكسور الجزئية

أحد طرق التكامل الذي يستخدم في حالة واحدة عندما يكون التكامل على الصورة

$$\int \frac{\text{كثير حدود}}{\text{كثير حدود}} \text{ دس}$$

وهناك حالتان :

① عندما يكون درجة البسط $<$ درجة المقام ، وفي هذه الحالة نقوم بعمل تجزئة للكسور (الذي تعلمناه في الصف الأول ثانوي) ونكامل

② عندما يكون درجة البسط $\leq$ درجة المقام ، وفي هذه الحالة نقوم بإجراء القسمة الطويلة ونقوم باستخدام خوارزمية القسمة وهي

$$\text{حاصل القسمة} = \text{الناتج} + \frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$$

ونقوم بعمل تجزئة للمقدار $\frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$ وإجراء التكامل بعد التجزئة لحاصل القسمة كاملا

قد نحتاج في هذا النوع من التكاملات إلى إجراء تعويض مناسب ليتحول التكامل إلى تكامل بالكسور الجزئية ، ونحتاج أيضا للتكامل

$$\int \frac{١}{\text{أ س} + \text{ب}}\,\text{دس} = \frac{١}{\text{أ}}\,\text{لو}_{\text{هـ}} \left|\text{أ س} + \text{ب}\right| + \text{جـ}$$

مثال $\boxed{١}$ جد $\displaystyle\int_{٠}^{١} \frac{٦\text{س} + ٧}{\text{س}^{٢} - \text{س} - ٦}\,\text{دس}$

$$\int_{٠}^{١} \frac{٦\text{س} + ٧}{\text{س}^{٢} - \text{س} - ٦}\,\text{دس}$$

$$= \int_{٠}^{١} \frac{٦\text{س} + ٧}{(\text{س} - ٣)\,(\text{س} + ٢)}\,\text{دس}$$

$$\frac{٦\text{س} + ٧}{(\text{س} - ٣)\,(\text{س} + ٢)} = \frac{\text{أ}}{\text{س} - ٣} + \frac{\text{ب}}{\text{س} + ٢}$$

$$\text{أ}(\text{س} + ٢) + \text{ب}(\text{س} - ٣) = ٦\text{س} + ٧$$

$\text{س} = ٣$

$٥\text{أ} = ٢٥ \quad \Leftarrow \quad \text{أ} = ٥$

$\text{س} = -٢$

$-٥\text{ب} = -٥ \quad \Leftarrow \quad \text{ب} = ١$

$$\int_{٠}^{١} \frac{٦\text{س} + ٧}{\text{س}^{٢} - \text{س} - ٦}\,\text{دس}$$

$$= \int_{٠}^{١} \left(\frac{\text{أ}}{\text{س} - ٣} + \frac{\text{ب}}{\text{س} + ٢}\right)\text{دس}$$

$$= \int_{٠}^{١} \left(\frac{٥}{\text{س} - ٣} + \frac{١}{\text{س} + ٢}\right)\text{دس}$$

$$= ٥\,\text{لو}_{\text{هـ}}\left|\text{س} - ٣\right| \Big]_{٠}^{١} + \text{لو}_{\text{هـ}}\left|\text{س} + ٢\right| \Big]_{٠}^{١}$$

$$= ٥\left(\text{لو}_{\text{هـ}}٢ - \text{لو}_{\text{هـ}}٣\right) + \left(\text{لو}_{\text{هـ}}٣ - \text{لو}_{\text{هـ}}٢\right)$$

$$= ٤\left(\text{لو}_{\text{هـ}}٢ - \text{لو}_{\text{هـ}}٣\right) = \text{لو}_{\text{هـ}}\frac{١٦}{٨١}$$

مثال $\boxed{٢}$ جد $\displaystyle\int \frac{\text{س}^{٣} + \text{س}}{\text{س} - ١}\,\text{دس}$

$$\begin{array}{r|l}
\text{س}^{٢} + \text{س} + ٢ & \\
\hline
\text{س}^{٣} + \text{س} & \text{س} - ١ \\
-\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} & \\
\hline
\text{س}^{٢} + \text{س} & \\
-\text{س}^{٢} + \text{س} & \\
\hline
٢\text{س} & \\
-٢\text{س} + ٢ & \\
\hline
٢ &
\end{array}$$

$$\int \left(\text{س}^{٢} + \text{س} + ٢ + \frac{٢}{\text{س} - ١}\right)\text{دس}$$

$$= \tfrac{١}{٣}\text{س}^{٣} + \tfrac{١}{٢}\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\left|\text{س} - ١\right| + \text{جـ}$$

مثال $\boxed{٣}$ جد $\displaystyle\int \frac{\text{س}^{٢} + ٣\text{س} - ١١}{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ١٥}\,\text{دس}$

$$\begin{array}{r|l}
١ & \\
\hline
\text{س}^{٢} + ٣\text{س} - ١١ & \text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ١٥ \\
-\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ١٥ & \\
\hline
\text{س} + ٤ &
\end{array}$$

$$\int \frac{\text{س}^{2} + ٣\text{س} - ١١}{\text{س}^{2} + ٢\text{س} - ١٥}\, \text{دس}$$

$$= \int \left(١ + \frac{\text{س} + ٤}{\text{س}^{2} + ٢\text{س} - ١٥}\right) \text{دس}$$

$$\frac{\text{س} + ٤}{\text{س}^{2} + ٢\text{س} - ١٥} = \frac{\text{ا}}{\text{س} + ٥} + \frac{\text{ب}}{\text{س} - ٣}$$

$$\text{ا}(\text{س} - ٣) + \text{ب}(\text{س} + ٥) = \text{س} + ٤$$

$\text{س} = ٣$

$$٨\text{ب} = ٧ \quad \Leftarrow \quad \text{ب} = \frac{٧}{٨}$$

$\text{س} = -٥$

$$-٨\text{ا} = -١ \quad \Leftarrow \quad \text{ا} = \frac{١}{٨}$$

$$\int \left(١ + \frac{\text{س} + ٤}{\text{س}^{2} + ٢\text{س} - ١٥}\right) \text{دس}$$

$$= \int \left(١ + \frac{\frac{١}{٨}}{\text{س} + ٥} + \frac{\frac{٧}{٨}}{\text{س} - ٣}\right) \text{دس}$$

$$= \text{س} + \frac{١}{٨}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س} + ٥| + \frac{٧}{٨}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س} - ٣| + \text{جـ}$$

مثال $\boxed{٤}$ جد $\int \frac{١}{\text{س} - ٢\sqrt{\text{س}} - ٣}\, \text{دس}$

$$\text{ص} = \sqrt{\text{س}} \quad \Leftarrow \quad \text{ص}^{٢} = \text{س}$$

$$\Leftarrow \quad ٢\text{ص دص} = \text{دس}$$

$$\int \frac{١}{\text{س} - ٢\sqrt{\text{س}} - ٣}\, \text{دس}$$

$$= \int \frac{١}{\text{ص}^{2} - ٢\text{ص} - ٣}\, ٢\text{ص دص}$$

$$= \int \frac{٢\text{ص}}{\text{ص}^{2} - ٢\text{ص} - ٣}\, \text{دص}$$

$$\frac{٢\text{ص}}{\text{ص}^{2} - ٢\text{ص} - ٣} = \frac{\text{ا}}{\text{ص} + ١} + \frac{\text{ب}}{\text{ص} - ٣}$$

$$\text{ا}(\text{ص} - ٣) + \text{ب}(\text{ص} + ١) = ٢\text{ص}$$

$\text{ص} = ٣$

$$٤\text{ب} = ٦ \quad \Leftarrow \quad \text{ب} = \frac{٣}{٢}$$

$\text{ص} = -١$

$$-٤\text{ا} = -٢ \quad \Leftarrow \quad \text{ا} = \frac{١}{٢}$$

$$\int \frac{٢\text{ص}}{\text{ص}^{2} - ٢\text{ص} - ٣}\, \text{دص}$$

$$= \int \left(\frac{\frac{١}{٢}}{\text{ص} + ١} + \frac{\frac{٣}{٢}}{\text{ص} - ٣}\right) \text{دس}$$

$$= \frac{١}{٢}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص} + ١| + \frac{٣}{٢}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص} - ٣| + \text{جـ}$$

$$= \frac{١}{٢}\text{لو}_{\text{هـ}}|\sqrt{\text{س}} + ١| + \frac{٣}{٢}\text{لو}_{\text{هـ}}|\sqrt{\text{س}} - ٣| + \text{جـ}$$

مثال $\boxed{٥}$ جد $\int \frac{\sqrt[٣]{\text{س}} - ١}{\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}} - ٤}\, \text{دس}$

$$\text{ص} = \sqrt[٣]{\text{س}} \quad \Leftarrow \quad \text{ص}^{٣} = \text{س}$$

$$\Leftarrow \quad ٣\text{ص}^{٢}\, \text{دص} = \text{دس}$$

$$\int \frac{\sqrt[٣]{\text{س}} - ١}{\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}} - ٤}\, \text{دس} = \int \frac{\text{ص} - ١}{\text{ص}^{٢} - ٤}\, ٣\text{ص}^{٢}\, \text{دص}$$

$$= \int \frac{٣\text{ص}^{٣} - ٣\text{ص}^{٢}}{\text{ص}^{٢} - ٤}\, \text{دص}$$

$$\begin{array}{r|l} & ٣ص + ٣ \\ \hline ص^{٢} - ٤ & ٣ص^{٣} + ٣ص^{٢} \\ & -٣ص^{٣} + ١٢ص \\ \hline & ٣ص^{٢} + ١٢ص \\ & -٣ص^{٢} + ١٢ \\ \hline & ١٢ص + ١٢ \end{array}$$

$$\int \frac{٣ص^{٣} - ٣ص^{٢}}{ص^{٢} - ٤}\, دص$$

$$= \int \left(٣ص - ٣ + \frac{١٢ص + ١٢}{ص^{٢} - ٤}\right) دص$$

$$\frac{١٢ص + ١٢}{ص^{٢} - ٤} = \frac{أ}{ص + ٢} + \frac{ب}{ص - ٢}$$

$$أ(ص - ٢) + ب(ص + ٢) = ١٢ص + ١٢$$

$$ص = ٢$$

$$٤ب = ٣٦ \quad \Leftarrow \quad ب = ٩$$

$$ص = -٢$$

$$-٤أ = -١٢ \quad \Leftarrow \quad أ = -٣$$

$$\int \left(٣ص - ٣ + \frac{-٣}{ص + ٢} + \frac{٩}{ص - ٢}\right) دص =$$

$$\frac{٣}{٢}ص^{٢} - ٣ص - ٣لو_{هـ}|ص + ٢| + ٩لو_{هـ}|ص - ٢| + ج$$

$$= \frac{٣}{٢}\left(\sqrt[٣]{س}\right)^{٢} - ٣\left(\sqrt[٣]{س}\right)$$

$$- ٣لو_{هـ}\left|\sqrt[٣]{س} + ٢\right| + ٩لو_{هـ}\left|\sqrt[٣]{س} - ٢\right| + ج$$

مثال $\boxed{٦}$ جد $\int \frac{\sqrt{س - ٢} + ١}{\sqrt{س - ٢} - ١}\, دس$

$$ص = \sqrt{س - ٢} \quad \Leftarrow \quad ص^{٢} = س - ٢$$

$$٢ص\, دص = دس$$

$$\int \frac{ص + ١}{ص - ١}\, ٢ص\, دص = \int \frac{٢ص^{٢} + ٢ص}{ص - ١}\, دص$$

$$\begin{array}{r|l} & ٢ص + ٤ \\ \hline ص - ١ & ٢ص^{٢} + ٢ص \\ & -٢ص^{٢} + ٢ص \\ \hline & ٤ص \\ & -٤ص + ٤ \\ \hline & ٤ \end{array}$$

$$\int \frac{٢ص^{٢} + ٢ص}{ص - ١}\, دص$$

$$= \int \left(٢ص + ٤ + \frac{٤}{ص - ١}\right) دص$$

$$= ص^{٢} + ٤ص + ٤لو_{هـ}|ص - ١| + ج$$

$$= \left(\sqrt{س - ٢}\right)^{٢} + ٤\sqrt{س - ٢}$$

$$+ ٤لو_{هـ}\left|\sqrt{س - ٢} - ١\right| + ج$$

مثال $\boxed{٧}$ جد $\int \frac{س}{س^{٤} + س^{٢}}\, دس$

$$\int \frac{س}{س^{٤} + س^{٢}}\, دس = \int \frac{س}{س^{٢}(س^{٢} + ١)}\, دس$$

$$= \int \frac{١}{س(س^{٢} + ١)}\, دس$$

$$\text{ص} = \text{س}^{٢} + ١ \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\text{س}$$

$$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{٢\text{س}}$$

$$\int \frac{١}{\text{س ص}} \cdot \frac{\text{دص}}{٢\text{س}} = \int \frac{١}{٢\text{س}^{٢}\ \text{ص}}\ \text{دص}$$

$$= \int \frac{١}{٢(\text{ص} - ١)\ \text{ص}}\ \text{دص}$$

$$\frac{١}{٢(\text{ص} - ١)\ \text{ص}} = \frac{\text{أ}}{٢\text{ص}} + \frac{\text{ب}}{\text{ص} - ١}$$

$$\text{أ}(\text{ص} - ١) + ٢\text{ب ص} = ١$$

$$\text{ص} = ١ \qquad ٢\text{ب} = ١ \quad \Leftarrow \quad \text{ب} = \frac{١}{٢}$$

$$\text{ص} = ٠ \qquad -\text{أ} = ١ \quad \Leftarrow \quad \text{أ} = -١$$

$$\int \frac{١}{٢(\text{ص} - ١)\ \text{ص}}\ \text{دص}$$

$$= \int \left(\frac{-١}{٢\text{ص}} + \frac{\frac{١}{٢}}{\text{ص} - ١} \right) \text{دص}$$

$$= -\frac{١}{٢}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| + \frac{١}{٢}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص} - ١| + \text{ج}$$

$$= -\frac{١}{٢}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}^{٢} + ١| + \frac{١}{٢}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}^{٢}| + \text{ج}$$

مثال $\boxed{٨}$ جد $\int \frac{٨\text{س}^{٢} - ٤٨\text{س} + ٧٥}{\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٩}\ \text{دس}$

$$\text{الناتج: } ٨ \qquad \text{المقسوم عليه: } \text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٩$$

$$٨\text{س}^{٢} - ٤٨\text{س} + ٧٥$$

$$-٨\text{س}^{٢} + ٤٨\text{س} - ٧٢$$

$$٣$$

$$\int \frac{٨\text{س}^{٢} - ٤٨\text{س} + ٧٥}{\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٩}\ \text{دس}$$

$$= \int \left(٨ + \frac{٣}{\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٩} \right) \text{دس}$$

$$= \int \left(٨ + \frac{٣}{(\text{س} - ٣)(\text{س} - ٣)} \right) \text{دس}$$

$$= \int \left(٨ + \frac{٣}{(\text{س} - ٣)^{٢}} \right) \text{دس}$$

$$= \int \left(٨ + ٣(\text{س} - ٣)^{-٢} \right) \text{دس}$$

$$= ٨\text{س} - ٣(\text{س} - ٣)^{-١} + \text{ج}$$

تدريب $\boxed{١}$ جد كلا من التكاملات التالية :

(١) $\int \frac{٢}{\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٣}\ \text{دس}$

(٢) $\int \frac{٢}{\text{س}^{٢} - ١}\ \text{دس}$

(٣) $\int \frac{\text{س}^{٢} - \text{س}}{\text{س} + ١}\ \text{دس}$

(٤) $\int \frac{٢\text{س}^{٣} - \text{س}^{٢} + ٣\text{س}}{\text{س}^{٢} - ٣\text{س} - ٤}\ \text{دس}$

(٥) $\int \frac{٢\text{س}^{٢} + ٣}{\text{س}^{٢} - \text{س}}\ \text{دس}$

(٦) $\int \frac{\text{س}^{٣} + ٤\text{س} - ٨}{\text{س}^{٢} - ٩}\ \text{دس}$

(٧) $\int \frac{١}{\sqrt{\text{س}} - ١}\ \text{دس}$

(٨) $\int \frac{\text{قتا}^{٢}\text{س}}{٩ - \text{ظتا}^{٢}\text{س}}\ \text{دس}$

(٩) $\int \frac{١}{\text{س}^{٢} - ١ + \sqrt{\text{س}^{٢} + ١}}\ \text{دس}$

(١٠) $\int \frac{١}{\text{س} + ٢\text{س}\sqrt[٣]{\text{س}}} \, \text{دس}$

(١١) $\int \frac{١}{\text{س} + \sqrt{\text{س}}} \, \text{دس}$

(١٢) $\int \frac{\sqrt{\text{س} + ٢}}{\text{س} + ١} \, \text{دس}$

(١٣) $\int \frac{\text{قا}^{٢}\text{س}}{٥\text{ظا}^{٢}\text{س} - ٣\text{ظا س} - ٢} \, \text{دس}$

(١٤) $\int_{٩}^{١٦} \frac{\sqrt{\text{س}}}{\text{س} - ٤} \, \text{دس}$

(١٥) $\int \frac{١}{\text{هـ}^{\text{س}} + ٢} \, \text{دس}$

(١٦) $\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{٢\text{س}} - ٤\text{هـ}^{\text{س}} + ٣} \, \text{دس}$

(١٧) $\int \frac{\text{س}^{٣}}{\text{س}^{٨} - ٩} \, \text{دس}$

(١٨) $\int \frac{١}{\text{س}(\sqrt{\text{س}} - ١)} \, \text{دس}$

(١٩) $\int \frac{\sqrt{\text{س}^{٤} + ٤\text{س}^{٢} + ٤}}{\text{س}^{٢} - ٢\text{س}} \, \text{دس}$

(٢٠) $\int \frac{\sqrt{٩ - \text{س}^{٢}}}{\text{س}} \, \text{دس}$

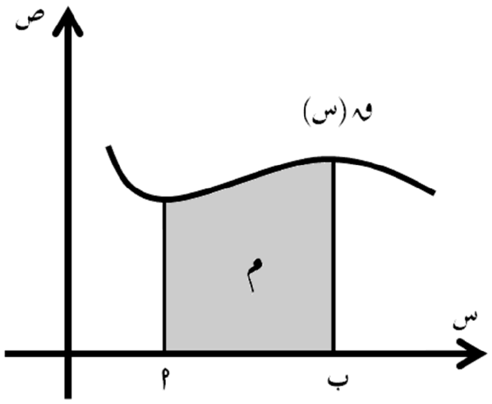
(٢١) $\int \frac{٣ \, \text{لو}_{\text{هـ}}^{\text{س}}}{(\text{س} - ٢)^{٢}} \, \text{دس}$

الدرس التاسع : حساب المساحة باستخدام التكامل

في هذا الدرس سنتعلم أحد تطبيقات على التكامل الهامة وهو إيجاد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ومحور السينات أو المساحة المحصورة بين منحنيي اقترانين

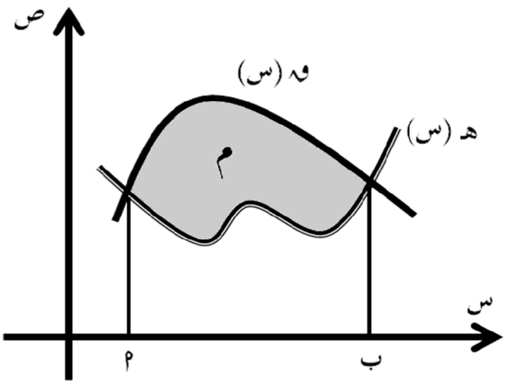
يمكن التعبير عن المساحة المحصورة بين الاقتران ق(س) ومحور السينات

$$\text{م} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} |\text{ق(س)}| \, \text{دس}$$



ويمكن أيضا

$$\text{م} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \left(\text{ق(س)} - \text{هـ(س)}\right) \, \text{دس}$$

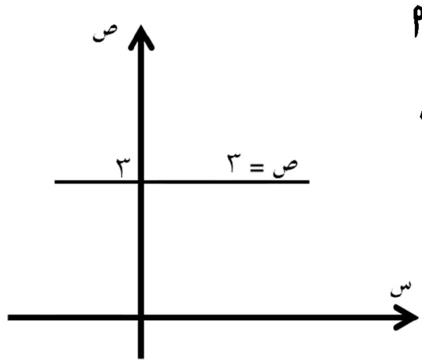


وقبل البدء في إيجاد المساحات فإننا سنقوم بمراجعة التمثيلات البيانية لبعض الاقترانات الهامة

المعادلات الخطية والاقترانات الخطية

ص = م خط يوازي محور السينات ويقطع محور الصادات عند م

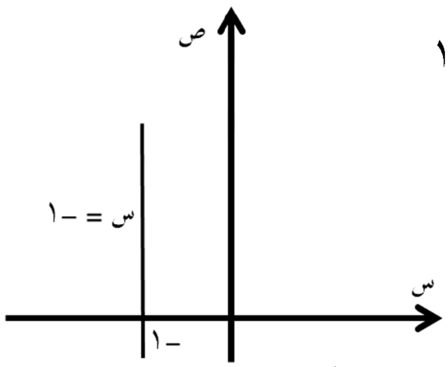
مثال : ص = ٣



✓ المعادلة ص = ٠ تمثل محور السينات

س = ب خط يوازي محور الصادات ويقطع محور السينات عند ب

مثال : س = −١



✓ المعادلة س = ٠ تمثل محور الصادات

ص = مس + ب

في هذه الحالة نقوم بعمل الجدول

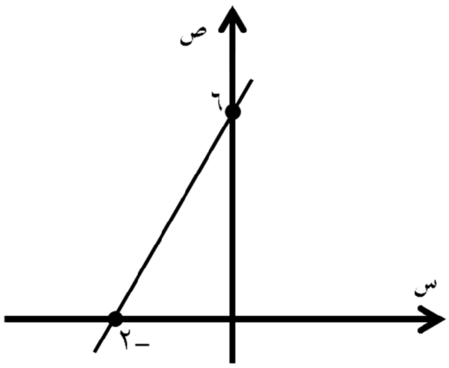
س	٠	
ص		٠

ونقوم بتعويض س = ٠ ونجد ص والمرة الأخرى بتعويض ص = ٠ ونجد س

مثال :

(١) ص = ٣س + ٦

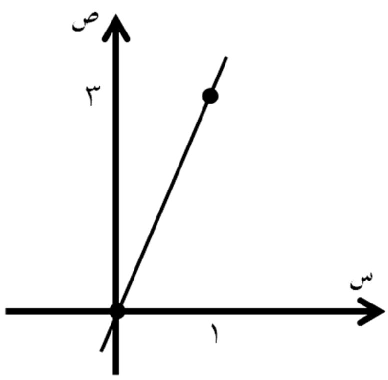
س	٠	−٢
ص	٦	٠



(٢) ص = ٣س

س	٠	١
ص	٠	٣

في هذه الحالة نقوم بتبديل قيمة س إلى (مثلا) س = ١ فتصبح ص = ٣



الاقتران التربيعي

هو الاقتران على الصورة ق(س) = أ س^{٢} + ب س + جـ

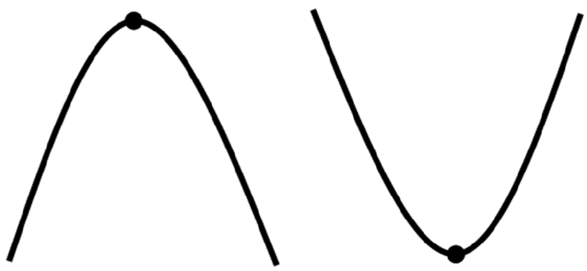
في هذه الحالة نقوم بإيجاد نقطة الرأس وهي بإيجاد

$\frac{-ب}{٢أ}$ ومن ثم نجد ق$\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)$

وإيجاد نقطة تقاطع الاقتران مع محور السينات (ق(س) = ٠)

ومحور الصادات (س = ٠) ((إن أمكن))

لاحظ أن التمثيل البياني للاقتران قد يكون

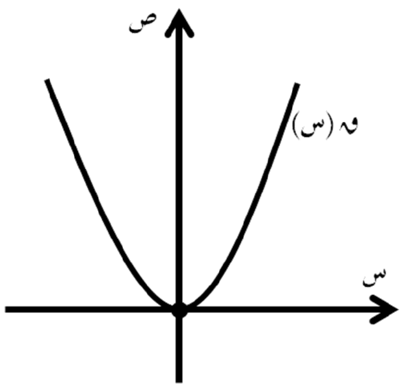


إذا كان أ > ٠ إذا كان أ < ٠

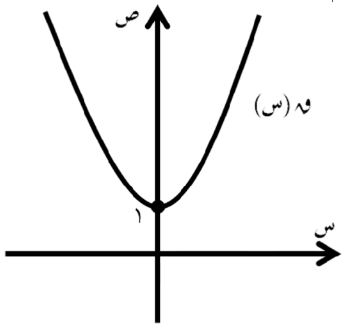
((هذا النوع من التمثيل يعتبر تمثيل بشكل تقريبي))

مثال :

① ق(س) = س^{٢}

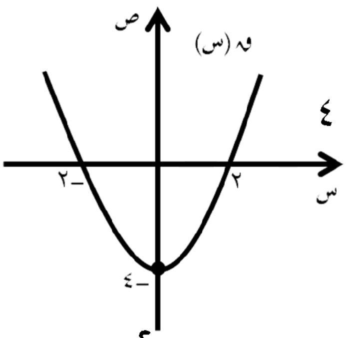


② ق(س) = س^{٢} + ١



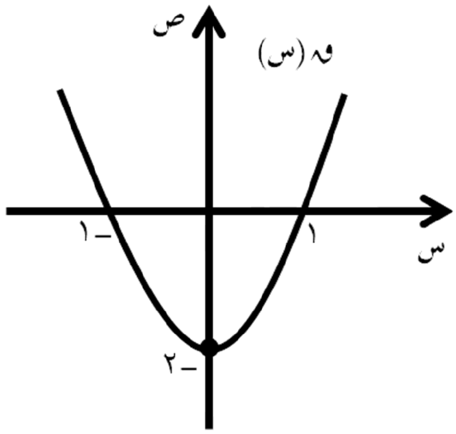
نلاحظ في هذا المثال أن الاقتران التربيعي **س^{٢}** مضافا إليه ١ فيتم تمثيل هذا الاقتران بتحريك الشكل السابق درجة واحدة للأعلى

③ ق(س) = س^{٢} − ٤



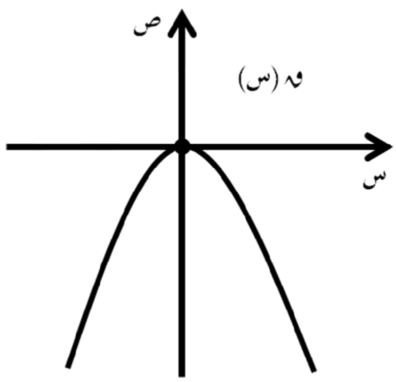
نلاحظ في هذا المثال أن الاقتران التربيعي **س^{٢}** مطروحا منه ٤ فيتم تمثيل هذا الاقتران بتحريك الشكل في المثال ① أربع درجات للأسفل ونلاحظ أيضا أن الاقتران يقطع محور السينات عندما س^{٢} − ٤ = ٠ أي عندما س = ±٢

④ ق(س) = ٢س^{٢} − ٢



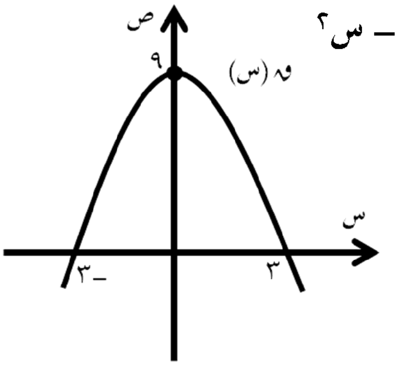
نلاحظ في هذا المثال أن الاقتران التربيعي **س^{٢}** مضروبا بـ ٢ وهذا لا يؤثر سوى باتساع الشكل (لا نأخذه بعين الاعتبار في التمثيل التقريبي للشكل) ومطروحا من ٢ فيتم تمثيل هذا الاقتران بتحريك الشكل في المثال ① درجتين للأسفل ونلاحظ أيضا أن الاقتران يقطع محور السينات عندما ٢س^{٢} − ٢ = ٠ أي عندما **س** = ± ١

⑤ ق(س) = − س^{٢}



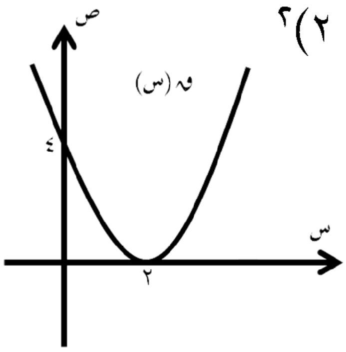
نلاحظ أن معامل **س^{٢}** سالب ⇐ الفتحة للأسفل

⑥ ق(س) = ٩ − س^{٢}



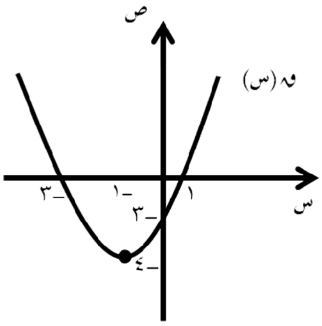
نلاحظ أن الشكل مفتوح للأسفل وتحريك الشكل إلى أعلى ٩ درجات ويقطع محور السينات عندما ٩ − **س^{٢}** = ٠ أي عندما **س** = ± ٣

⑦ ق(س) = (س − ٢)^{٢}



نلاحظ أن س مطروحا من ٢ في هذه الحالة نقوم بتحريك الشكل إلى اليمين درجتين ويقطع محور الصادات عندما **س** = ٠ ⇐ ص = ٤

⑧ ق(س) = (س + ١)^{٢} − ٤



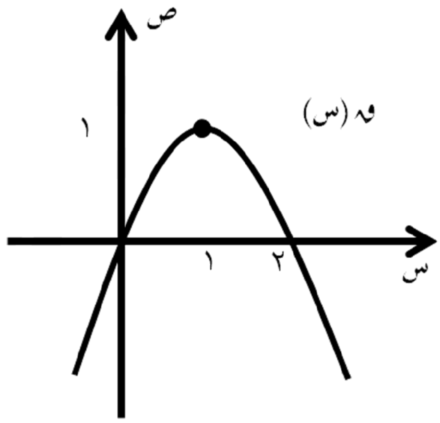
نلاحظ أن الشكل تم تحريكه إلى اليسار بمقدار ١ وللأسفل بمقدار ٤ ويقطع محور السينات عند $(س + ١)^{٢} - ٤ = ٠$

⇐ $(س + ١)^{٢} = ٤$ ⇐ $س + ١ = \pm ٢$ ⇐

$س = -٣$ ، ١ ويقطع محور الصادات عندما $س = ٠$ ⇐

$ص = -٣$

⑨ $ق(س) = ١ - (س - ١)^{٢}$



نلاحظ أن الشكل مفتوح للأسفل وتم تحريكه إلى اليمين بمقدار ١ وللأعلى بمقدار ١ ويقطع محور السينات عند

$١ - (س - ١)^{٢} = ٠$ ⇐ $(س - ١)^{٢} = ١$

⇐ $س - ١ = \pm ١$ ⇐ $س = ٢$ ، ٠ ويقطع محور الصادات عندما $س = ٠$ ⇐ $ص = ١$

⑩ $ق(س) = س^{٢} - ٤س$

في هذه الحالة نقوم بما بدأنا به المراجعة على الاقتران التربيعي وهو

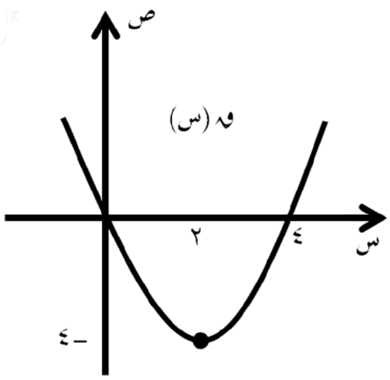
$\frac{-ب}{٢أ} = \frac{٤}{٢} = ٢$ ⇐ $ق(١) = -٣$

⇐ الرأس (٢ ، −٣)

وهو مفتوح للأعلى ويقطع محور السينات $س^{٢} - ٤س = ٠$

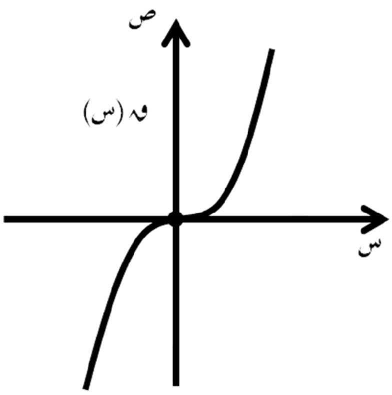
⇐ $س = ٠$ ، ٤ ، ويقطع محور الصادات عندما $س = ٠$

⇐ $ص = ٠$



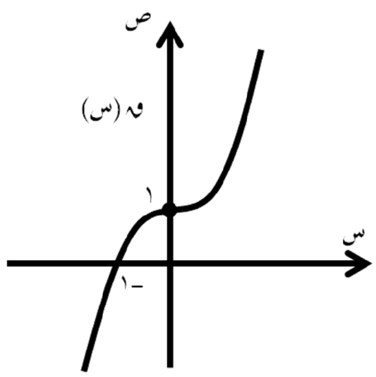
الاقتران التكعيبي

التمثيل البياني للاقتران $ق(س) = س^{٣}$

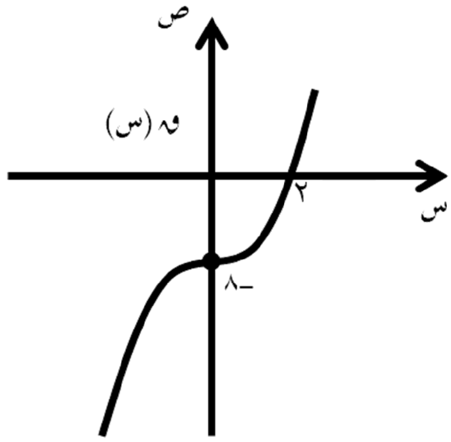


مثال :

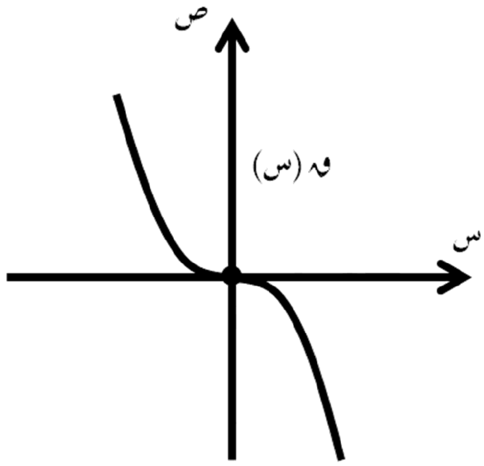
① $ق(س) = س^{٣} + ١$



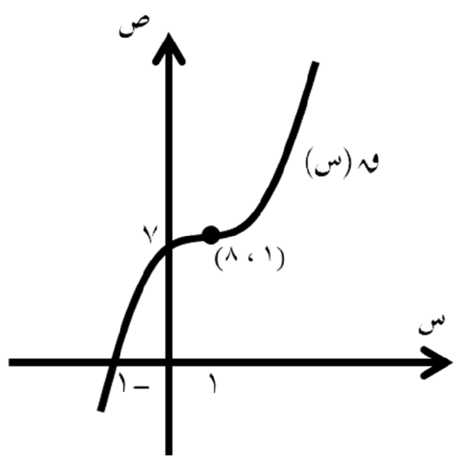
② ق(س) = س^{٣} − ٨



③ ق(س) = − س^{٣}



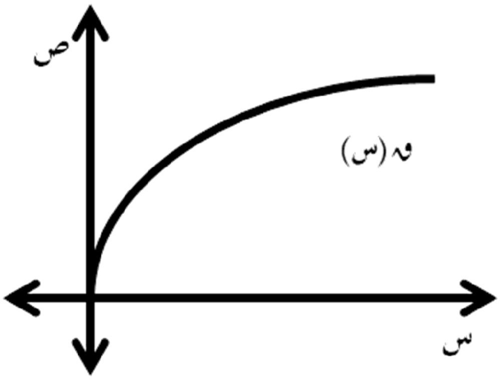
④ ق(س) = (س − ١)^{٣} + ٨



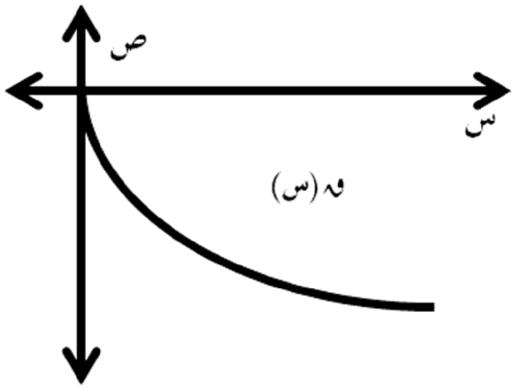
بعض الاقترانات التي عليك معرفة تمثيلها البياني

اقتران الجذر التربيعي

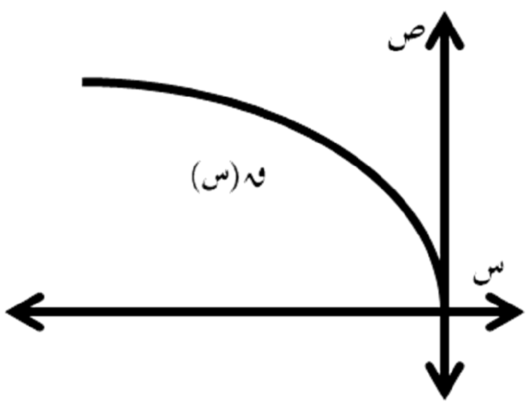
ق(س) = $\sqrt{\text{س}}$



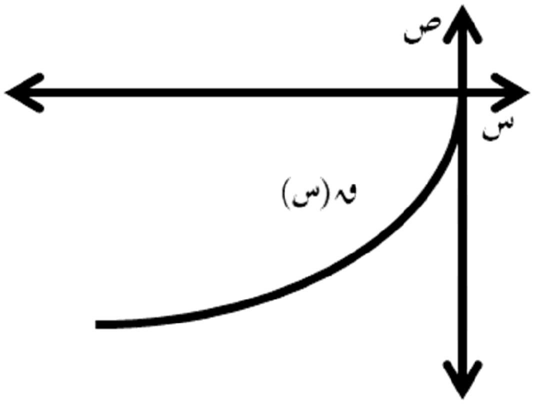
ق(س) = − $\sqrt{\text{س}}$



ق(س) = $\sqrt{-\text{س}}$

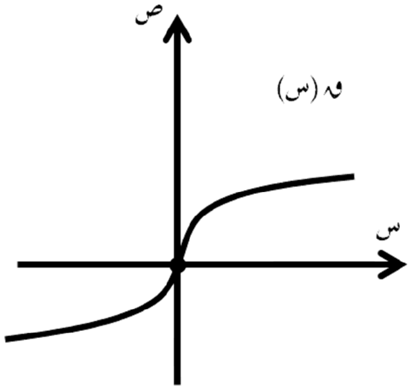


$ق(س) = -\sqrt{-س}$



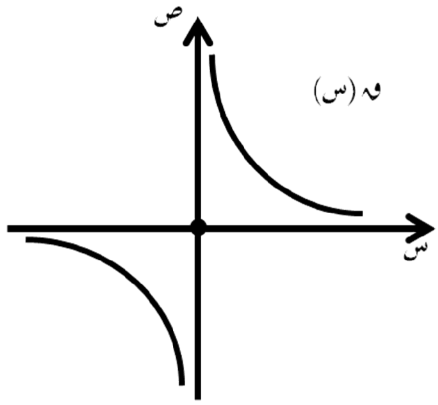
اقتران الجذر التكعيبي

$ق(س) = \sqrt[3]{س}$

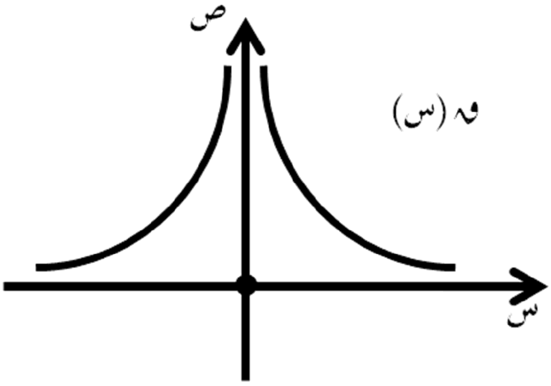


الاقتران النسبي

$ق(س) = \frac{1}{س}$

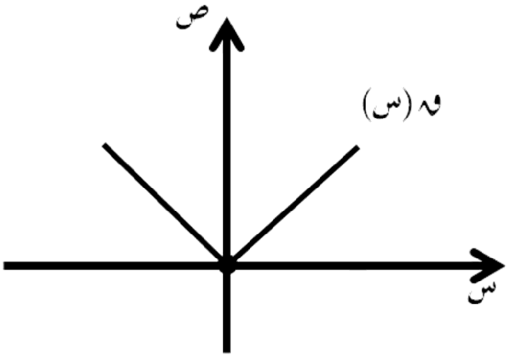


$ق(س) = \frac{1}{س^2}$



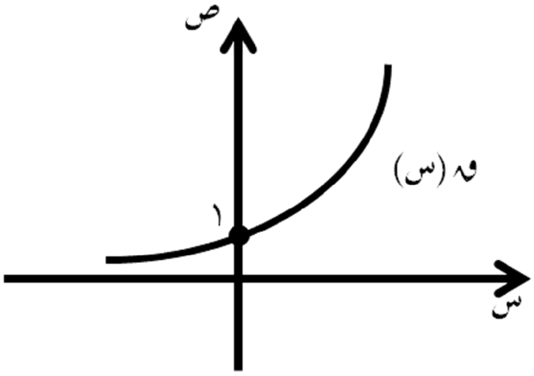
اقتران القيمة المطلقة

$ق(س) = |س|$

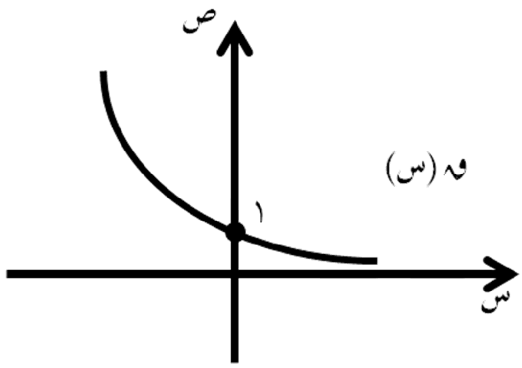


الاقتران الأسي الطبيعي

$ق(س) = هـ^{س}$

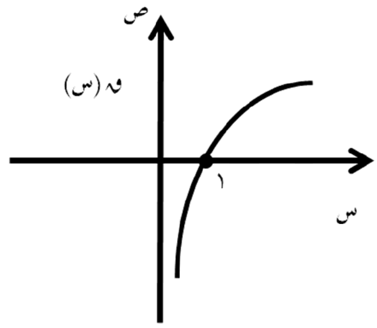


$ق(س) = هـ^{-س}$

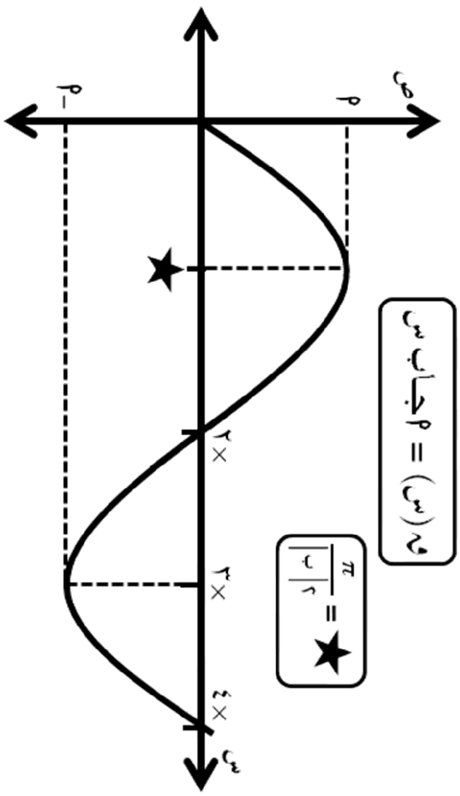


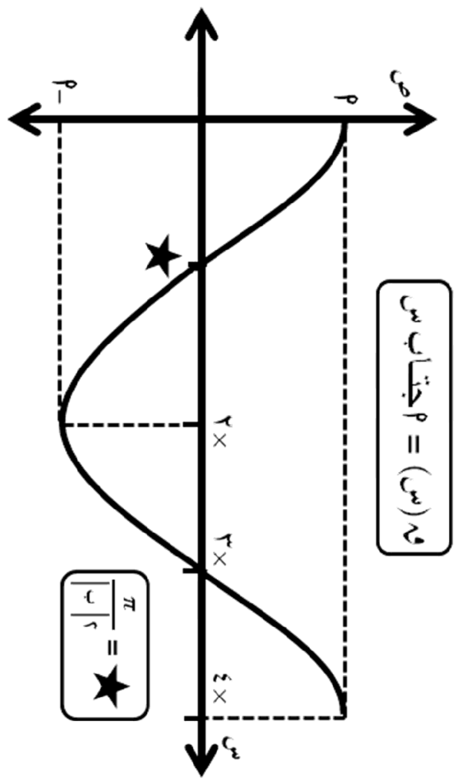
الاقتران اللوغريتمي الطبيعي

$ق(س) = لو_{هـ} س$



اقترانا الجيب والجيب تمام

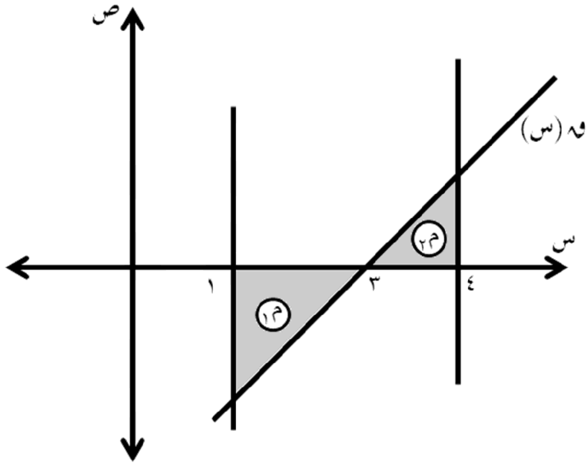




مثال $\boxed{١}$ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران

ق(س) = ٢س − ٦ ومحور السينات والمستقيمين س = ١ ، س = ٤

س	٠	٣
ص	−٦	٠



$$م = م_{١} + م_{٢}$$

$$= \int_{١}^{٣} (٠ - (٢س - ٦))\,دس + \int_{٣}^{٤} ((٢س - ٦) - ٠)\,دس$$

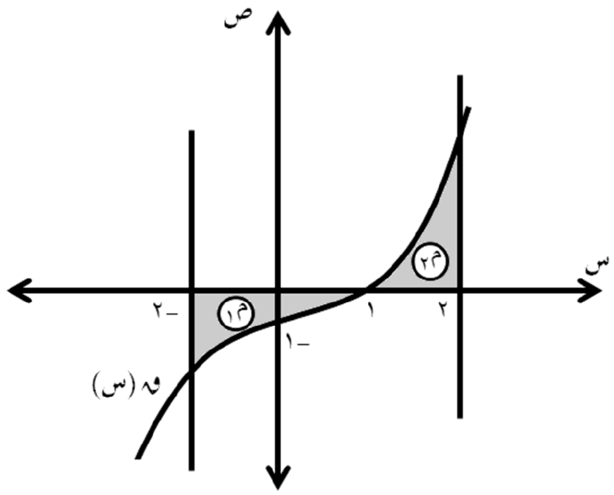
$$= (-س^{٢} + ٦س)\Big]_{١}^{٣} + (س^{٢} - ٦س)\Big]_{٣}^{٤}$$

$$= (-٩+١٨)-(-١+٦)+(١٦-٢٤) - (٩ - ١٨)$$

$$= ٥$$

مثال $\boxed{٢}$ احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران

ق(س) = $س^{٣}$ − ١ ومحور السينات في الفترة [−٢ ، ٢]



$$م = م_{١} + م_{٢}$$

$$= \int_{-٢}^{١} (٠ - (س^{٣} - ١))\,دس + \int_{١}^{٢} ((س^{٣} - ١) - ٠)\,دس$$

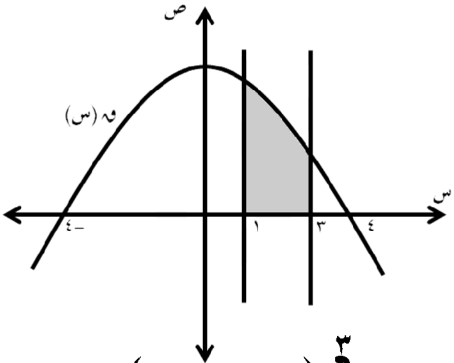
$$= (س - \frac{١}{٤}س^{٤})\Big]_{-٢}^{١} + (\frac{١}{٤}س^{٤} - س)\Big]_{١}^{٢}$$

$$= (١ - \frac{١}{٤}) - (-٢ - ٤) + (٤ - ٢) - (\frac{١}{٤} - ١)$$

$$= ٩,٥$$

مثال $\boxed{٣}$ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران

ق(س) = ١٦ − $س^{٢}$ ومحور السينات والمستقيمين س = ١ ، س = ٣



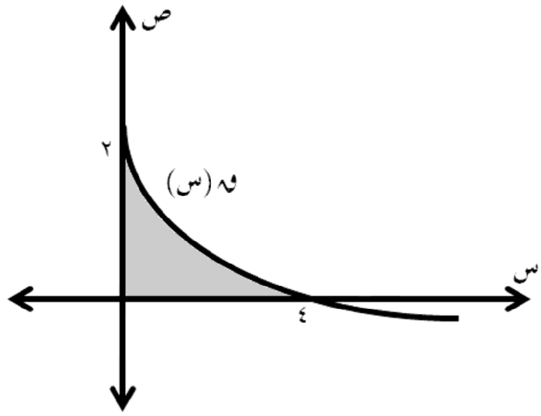
$$م = \int_{١}^{٣} (١٦ - س^{٢})\,دس$$

$$= (١٦س - \frac{١}{٣}س^{٣})\Big]_{١}^{٣}$$

$$= (٤٨ - ٩) - (١٦ - \frac{١}{٣}) = \frac{٧٠}{٣}$$

مثال $\boxed{٤}$ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران

ق(س) = ٢ − $\sqrt{س}$ ومحوري السينات والصادات



$$م = \int_{٠}^{٤} \left(٤ - \sqrt{س}\right) دس$$

$$= \left[\left(٤س - \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}}\right)\right]_{٠}^{٤}$$

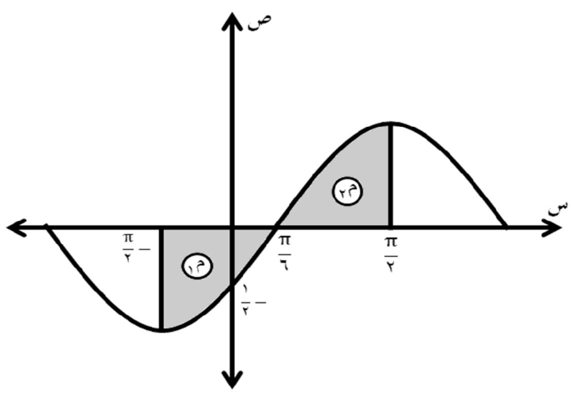
$$= \left(١٦ - \frac{٢}{٣}(٤)^{\frac{٣}{٢}}\right) - ٠ = \frac{٣٢}{٣}$$

مثال $\boxed{٥}$ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران

ق(س) = جاس − $\frac{١}{٢}$ ومحور السينات في الفترة $\left[\frac{-\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢}\right]$

$$جاس - \frac{١}{٢} = ٠ \Leftarrow جاس = \frac{١}{٢}$$

$$\Leftarrow س = \frac{\pi}{٦}$$



$$م = م_١ + م_٢$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{٢}}^{\frac{\pi}{٦}} \left(٠ - (جاس - \tfrac{١}{٢})\right) دس + \int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٢}} \left((جاس - \tfrac{١}{٢}) - ٠\right) دس$$

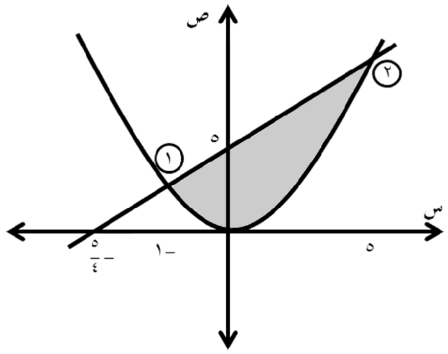
$$= \left[(جتاس - \tfrac{١}{٢}س)\right]_{-\frac{\pi}{٢}}^{\frac{\pi}{٦}} + \left[(- جتاس - \tfrac{١}{٢}س)\right]_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٢}}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{\pi}{٤}\right) - \left(٠ - \frac{\pi}{٤}\right) + \left(٠ - \frac{\pi}{٤}\right) - \left(- \frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{\pi}{١٢}\right)$$

$$= \sqrt{٣} - \frac{\pi}{٦}$$

مثال $\boxed{٦}$ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران

ق(س) = س^٢ ، ل(س) = ٤س + ٥



س	٠	$-\frac{٥}{٤}$
ص	٥	٠

١، ٢

$$س^٢ = ٤س + ٥ \Leftarrow س^٢ - ٤س - ٥ = ٠$$

$$(س - ٥)(س + ١) = ٠$$

$$س = ٥، س = -١$$

$$م = \int_{-١}^{٥} \left(٤س + ٥ - س^٢\right) دس$$

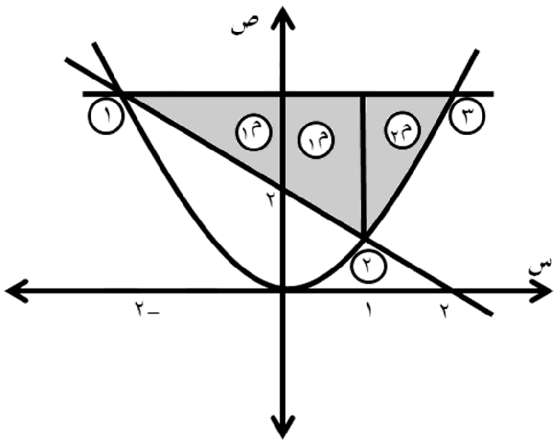
$$= \left[(٢س^٢ + ٥س - \frac{١}{٣} س^٣)\right]_{-١}^{٥}$$

$= (٥٠ + ٢٥ - \frac{١٢٥}{٣}) - (٢ - ٥ - \frac{١}{٣})$

$= \frac{١١٠}{٣}$

مثال $\boxed{٧}$ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات

ق(س) = $س^٢$ ، هـ(س) = ٢ − س ، ل(س) = ٤



س	٠	٢
ص	٢	٠

(١)، (٣)

$س^٢ = ٤ \Leftarrow س = \pm ٢$

(٢)

$س^٢ + س - ٢ = ٠$

$(س + ٢)(س - ١) = ٠$

س = ١ ، س = −٢

$م = م_١ + م_٢$

$= \int_{-٢}^{١} (٤ - (٢ - س))\, دس + \int_{١}^{٢} (٤ - س^٢)\, دس$

$= \left[(٢س - \frac{١}{٢}س^٢) \right]_{-٢}^{١} + \left[(٤س - \frac{١}{٣}س^٣) \right]_{١}^{٢}$

$= (٢ + \frac{١}{٢}) - (-٤ + ٢) + (٨ - \frac{٨}{٣}) - (١ - \frac{١}{٣})$

$= \frac{٣٧}{٦}$

مثال $\boxed{٨}$ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات ص − س = ٦

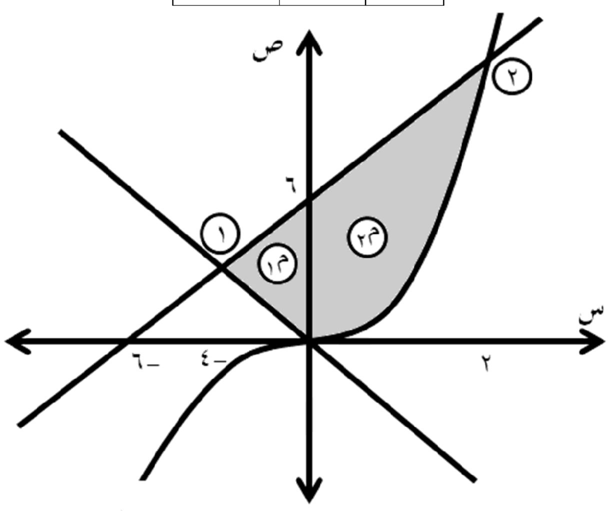
، ص = $س^٣$ ، ٢ص + س = صفر

ص − س = ٦

س	٠	−٦
ص	٦	٠

٢ص + س = ٠

س	٠	٢
ص	٠	−١



(١)

$س + ٦ = -\frac{١}{٢} س \Leftarrow ٦ = -\frac{٣}{٢} س$

$\Leftarrow س = -٤$

(٢)

$$\text{س}^{٣} = \text{س} + ٦$$

$$\text{س}^{٣} - \text{س} - ٦ = ٠$$

س = ٢ وتحلل بالقسمة التركيبية

$$(\text{س} - ٢)(\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٣) = ٠$$

$$\text{م} = \text{م}_{١} + \text{م}_{٢}$$

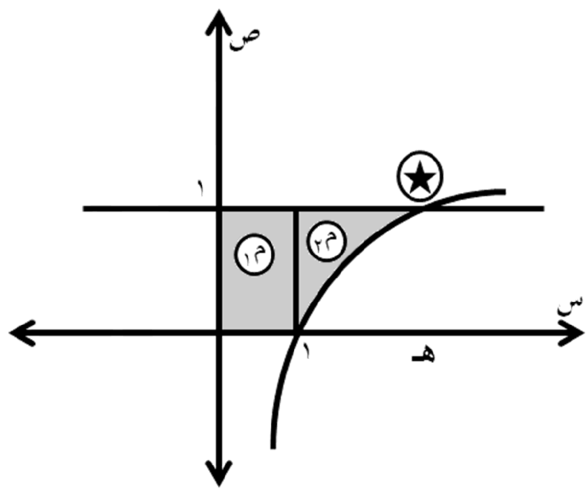
$$= \int_{-٤}^{٠} (\text{س}+٦+\tfrac{١}{٢}\text{س})\,\text{دس} + \int_{٠}^{٢} (\text{س}+٦-\text{س}^{٣})\,\text{دس}$$

$$= \left[(\tfrac{٣}{٤}\text{س}^{٢} - ٦\text{س})\right]_{-٤}^{٠} + \left[(\tfrac{١}{٢}\text{س}^{٢} + ٦\text{س} - \tfrac{١}{٤}\text{س}^{٤})\right]_{٠}^{٢}$$

$$= ٠ - (١٢ - ٢٤) + (٢ + ١٢ - ٤) + ٠$$

$$= ٢٢$$

مثال $\boxed{٩}$ جد مساحة المنطقة المحصورة بين $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ ، ص = ١ ، س = ٠ ، ص = ٠



$$\bigstar \quad \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} = ١ \Leftarrow \text{س} = \text{هـ}^{١} \Leftarrow \text{س} = \text{هـ}$$

$$\text{م} = \text{م}_{١} + \text{م}_{٢}$$

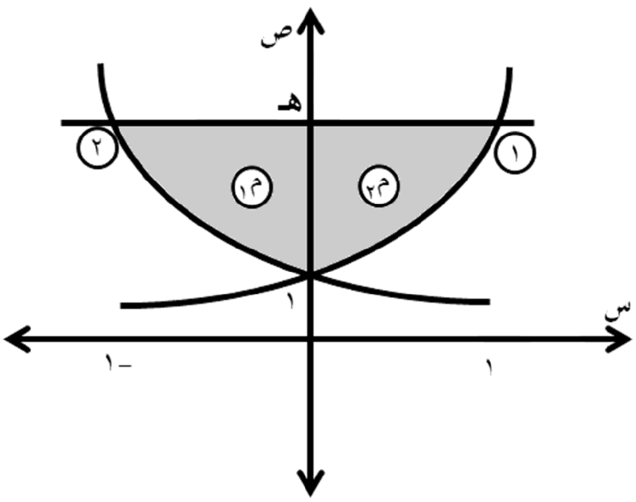
$$= \int_{٠}^{١} ١\,\text{دس} + \int_{١}^{\text{هـ}} (١ - \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})\,\text{دس}$$

$$= \left[\text{س}\right]_{٠}^{١} + \left[(\text{س} - (\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \text{س}))\right]_{١}^{\text{هـ}}$$

$$= ١ + (٢\text{هـ} - \text{هـ}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ}) - (٢ - ٠)$$

$$= \text{هـ} - ١$$

مثال $\boxed{١٠}$ جد مساحة المنطقة المحصورة بين $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}$ ، $\text{ص} = \text{هـ}^{-\text{س}}$ ، ص = هـ ، حيث هـ العدد النيبيري



$$(١)\ \text{هـ}^{\text{س}} = \text{هـ} \Leftarrow \text{س} = ١$$

$$(٢)\ \text{هـ}^{-\text{س}} = \text{هـ} \Leftarrow \text{س} = -١$$

$$\text{م} = \text{م}_{١} + \text{م}_{٢}$$

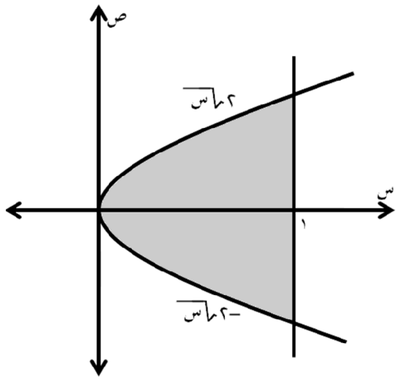
$$= \int_{-١}^{٠} (\text{هـ} - \text{هـ}^{-\text{س}})\,\text{دس} + \int_{٠}^{١} (\text{هـ} - \text{هـ}^{\text{س}})\,\text{دس} =$$

$$= \left[(\text{هـ}\,\text{س} + \text{هـ}^{-\text{س}})\right]_{-١}^{٠} + \left[(\text{هـ}\,\text{س} - \text{هـ}^{\text{س}})\right]_{٠}^{١} =$$

$$١ - (-\text{هـ} - \text{هـ}) + (\text{هـ} - \text{هـ}) - (-١)$$

$$= ٢$$

مثال $\boxed{11}$ جد مساحة المنطقة المحصورة بين $ص^2 = ٤س$ ، والمستقيم $س = ١$



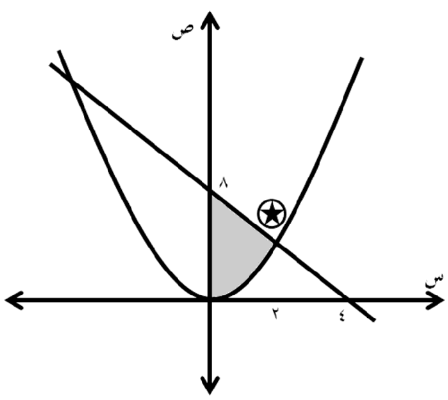
$$ص^2 = ٤س \Leftarrow ص = \pm ٢\sqrt{س}$$

$$م = \int_{٠}^{١} \left(٢\sqrt{س} - -٢\sqrt{س}\right) دس$$

$$= \int_{٠}^{١} ٤\sqrt{س}\, دس = \frac{٨}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} \Big]_{٠}^{١} = \frac{٨}{٣}$$

مثال $\boxed{12}$ جد مساحة المنطقة المحصورة بين محور الصادات والمستقيم $ص + ٢س = ٨$ والمنحنى $ق(س) = س^2$ والواقعة في الربع الأول

س	٠	٤
ص	٨	٠



$$٨ - ٢س = س^2 \Leftarrow س^2 + ٢س - ٨ = ٠$$

$$\Leftarrow (س + ٨)(س - ٢) = ٠$$

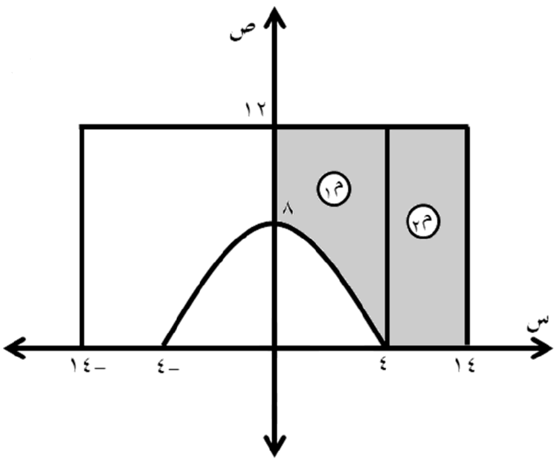
$$س = -٤ \;\times \quad ، \quad س = ٢ \;\checkmark$$

$$م = \int_{٠}^{٢} \left(٨ - ٢س - س^2\right) دس$$

$$= ٨س - س^2 - \frac{١}{٣} س^3 \Big]_{٠}^{٢}$$

$$= ١٦ - ٤ - \frac{٨}{٣} = \frac{٢٨}{٣}$$

مثال $\boxed{13}$ الشكل يمثل الواجهة الأمامية لمبنى ، مدخل هذا المبنى يمثله المنحنى $ق(س) = ٨ - \frac{س^2}{٢}$. ما التكلفة الكلية لدهان المنطقة المظللة إذا علمت أن سعر دهان الوحدة المربعة (٦٠) قرشا



$$م = ٢(م_1 + م_2)$$

$$= ٢\left(\int_{٠}^{٤}\left(١٢ - \left(٨ - \frac{١}{٢} س^2\right)\right) دس + \int_{٤}^{١٤} ١٢\, دس\right)$$

$$= ٢\left(٤س + \frac{١}{٦} س^3\right) \Big]_{٠}^{٤} + ١٢(١٤ - ٤)$$

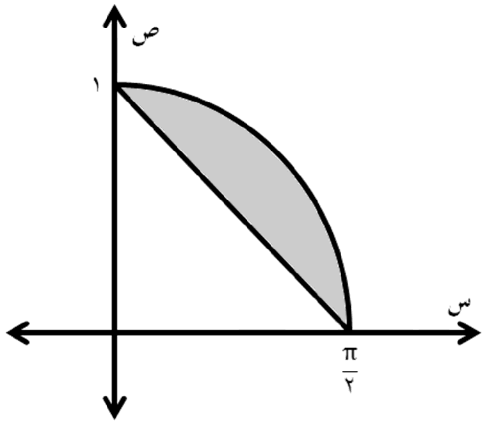
$$= ٢\left(١٦ + \frac{٦٤}{٦}\right) + ١٢٠ = \frac{٨٨٠}{٣}$$

$$\text{تكلفة الطلاء} = ٦٠ \times \frac{٨٨٠}{٣}$$

$$= ٢٠ \times ٨٨٠ = ١٧٦٠٠ \text{ قرش}$$

$$= ١٧٦ \text{ دينار}$$

مثال $\boxed{١٤}$ احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = جتاس ، والقطعة المستقيمة الواصلة بين نقطتين $(٠ ، ١)$، $(\frac{\pi}{٢} ، ٠)$



نجد معادلة المستقيم الواصل بين النقطتين $(٠ ، ١)$ ، $(\frac{\pi}{٢} ، ٠)$

$$\text{م} = \frac{٠ - ١}{\frac{\pi}{٢} - ٠} = \frac{-٢}{\pi}$$

$$\text{ص} - ١ = \frac{-٢}{\pi}(\text{س} - ٠)$$

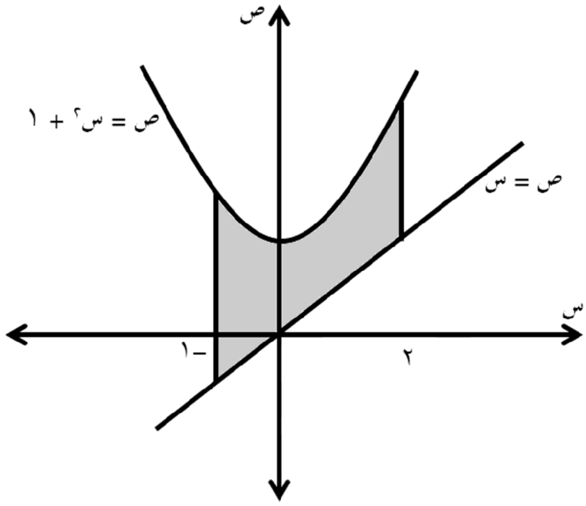
$$\text{ص} = \frac{-٢}{\pi}\text{س} + ١$$

$$\text{م} = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \left(\text{جتاس} - \left(\frac{-٢}{\pi}\text{س} + ١\right)\right) \text{دس}$$

$$= \left[\text{جاس} + \frac{١}{\pi}\text{س}^{٢} - \text{س}\right]_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$$

$$= \text{جا}\frac{\pi}{٢} + \frac{١}{\pi}\left(\frac{\pi}{٢}\right)^{٢} - \frac{\pi}{٢} - ٠ = ١ - \frac{\pi}{٤}$$

مثال $\boxed{١٥}$ جد مساحة المنطقة المظللة في كل شكل من الأشكال الآتية :

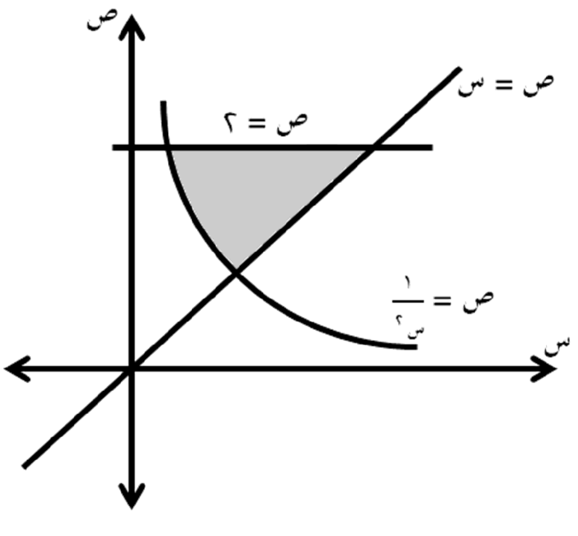


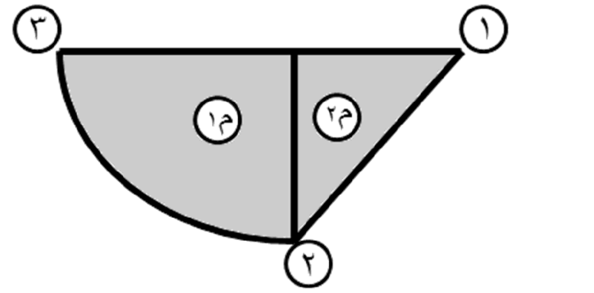
$$\text{م} = \int_{-١}^{٢} (\text{س}^{٢} + ١ - \text{س}) \text{ دس}$$

$$= \left[\frac{١}{٣}\text{س}^{٣} + \text{س} - \frac{١}{٢}\text{س}^{٢}\right]_{-١}^{٢}$$

$$= \left(\frac{٨}{٣} + ٢ - ٢\right) - \left(-\frac{١}{٣} - ١ - \frac{١}{٢}\right)$$

$$= ٣ + ١ + \frac{١}{٢} = ٤,٥$$





① س = ٢

② $\frac{1}{\text{س}^{2}} = ٢ \Leftarrow \text{س}^{٢} = \frac{١}{٢} \Leftarrow \text{س} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

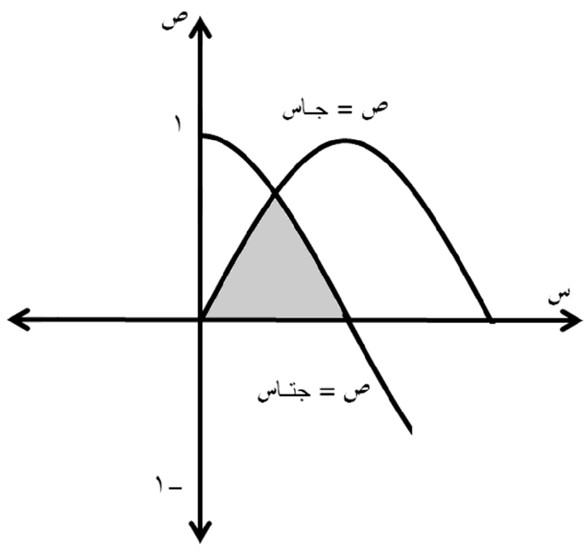
$$\text{م} = \text{م}_1 + \text{م}_2$$

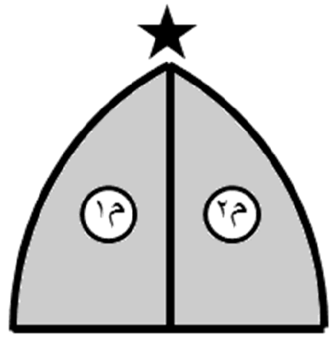
$$= \int_{\frac{١}{\sqrt{٢}}}^{١} \left(٢ - \frac{١}{\text{س}^{٢}}\right) \text{دس} + \int_{١}^{٢} (٢ - \text{س})\, \text{دس}$$

$$= \left[\left(٢\text{س} + \frac{١}{\text{س}}\right)\right]_{\frac{١}{\sqrt{٢}}}^{١} + \left[\left(٢\text{س} - \frac{١}{٢}\text{س}^{٢}\right)\right]_{١}^{٢}$$

$$= (٢ + ١) - (\sqrt{٢} + \sqrt{٢}) + (٤ - ٢) - (٢ - \tfrac{١}{٢})$$

$$= \frac{٧}{٢} - ٢\sqrt{٢}$$





★ جاس = جتاس ⇐ ظاس = ١

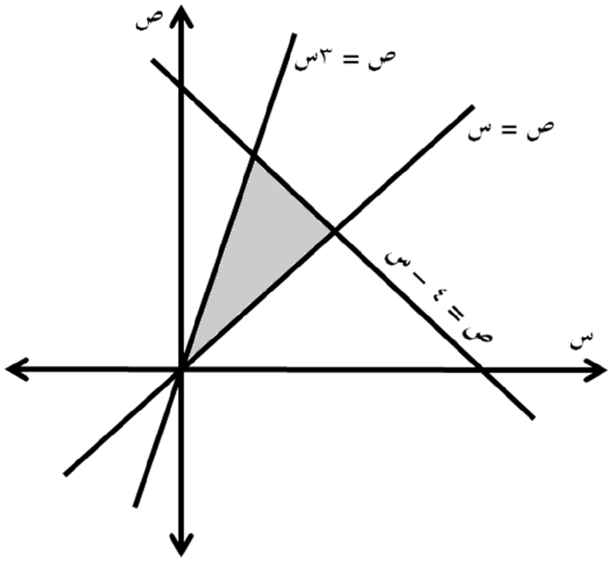
$$\text{س} = \frac{\pi}{٢}$$

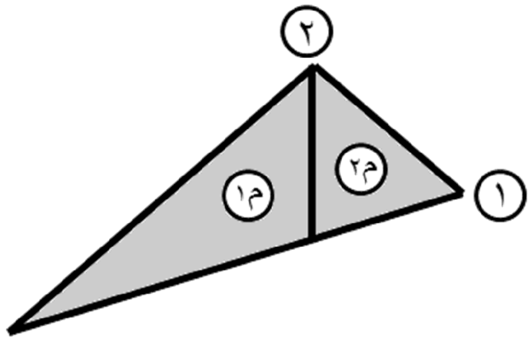
$$\text{م} = \text{م}_1 + \text{م}_2 = \int_{0}^{\frac{\pi}{٤}} \text{جاس دس} + \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} \text{جتاس دس}$$

$$= \left[(-\text{جتاس})\right]_{0}^{\frac{\pi}{٤}} + \left[(\text{جاس})\right]_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}}$$

$$= \left(-\frac{١}{\sqrt{٢}} + ١\right) + \left(١ - \frac{١}{\sqrt{٢}}\right)$$

$$= ٢ - \sqrt{٢}$$





① ٤ − س = س ⇐ ٢س = ٤ ⇐ س = ٢

② ٤ − س = ٣س ⇐ ٤س = ٤

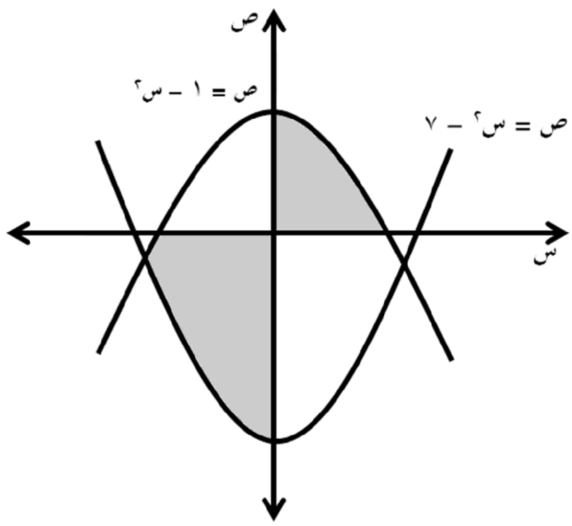
⇐ س = ١

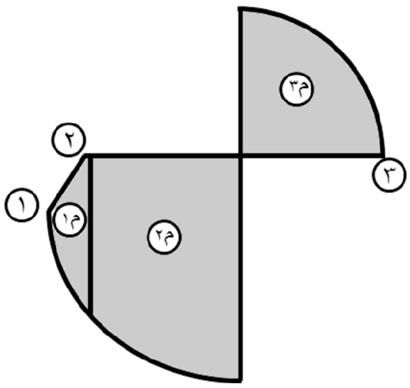
م = م$_1$ + م$_2$

$= \int_{٠}^{١} (\text{٣س} - \text{س})\,\text{دس} + \int_{١}^{٢} (٤ - \text{س} - \text{س})\,\text{دس}$

$= \left[\text{س}^{٢}\right]_{٠}^{١} + \left[(\text{٤س} - \text{س}^{٢})\right]_{١}^{٢}$

$= ٢ + (٨ - ٤) - (٤ - ١) = ٢$





② + ③ ١ − س² = ٠ ⇐ س = ± ١

① س² − ٧ = ١ − س² ⇐ ٢س² = ٨

⇐ س = −٢

م = م$_1$ + م$_2$ + م$_3$

$= \int_{-٢}^{-١} \left((١ - \text{س}^{٢}) - (\text{س}^{٢} - ٧)\right)\text{دس}$

$+ \int_{-١}^{٠} \left(٠ - (\text{س}^{٢} - ٧)\right)\text{دس}$

$+ \int_{٠}^{١} (١ - \text{س}^{٢})\,\text{دس}$

$= \left[\text{٨س} - \frac{٢}{٣}\text{س}^{٣}\right]_{-٢}^{-١}$

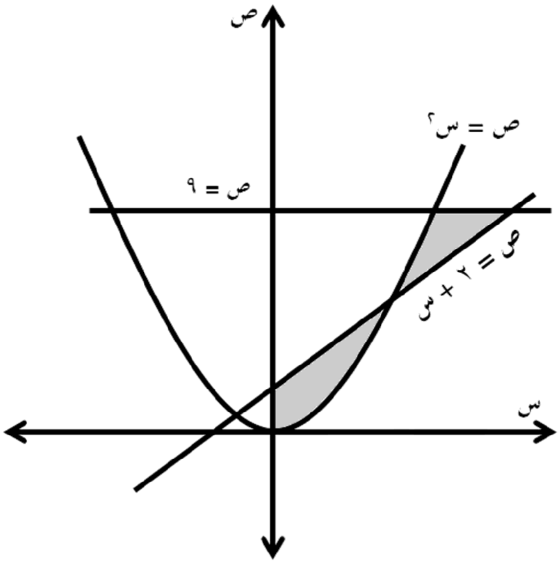
$+ \left[(\text{٧س} - \frac{١}{٣}\text{س}^{٣})\right]_{-١}^{٠}$

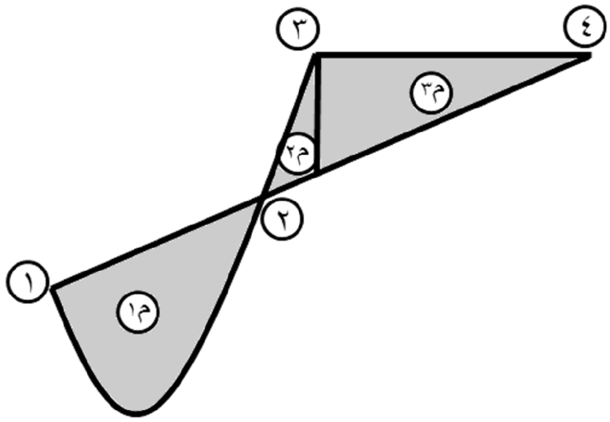
$+ \left[(\text{س} - \frac{١}{٣}\text{س}^{٣})\right]_{٠}^{١}$

$= (-٨ + \frac{٢}{٣}) - (-١٦ + \frac{١٦}{٣})$

$+ \left(٠ - (-٧ + \frac{١}{٣})\right)$

$+ (١ - \frac{١}{٣}) = \frac{٣٢}{٣}$





① + ② $س^{٢} = س + ٢$

$\Leftarrow س^{٢} - س - ٢ = ٠$

$(س - ٢)(س + ١) = ٠$

$\Leftarrow س = ٢ \text{ ، } س = -١$

③ $س^{٢} = ٩ \Leftarrow س = ٣$

④ $س + ٢ = ٩ \Leftarrow س = ٧$

$م = م_{١} + م_{٢} + م_{٣}$

$= \int_{-١}^{٢} \left(س + ٢ - س^{٢}\right) دس$

$+ \int_{٢}^{٣} \left(س^{٢} - (س + ٢)\right) دس$

$+ \int_{٣}^{٧} \left(٩ - (س + ٢)\right) دس$

$= \left[\frac{١}{٢}س^{٢} + ٢س - \frac{١}{٣}س^{٣}\right]_{-١}^{٢}$

$+ \left[\frac{١}{٣}س^{٣} - \frac{١}{٢}س^{٢} + ٢س\right]_{٢}^{٣}$

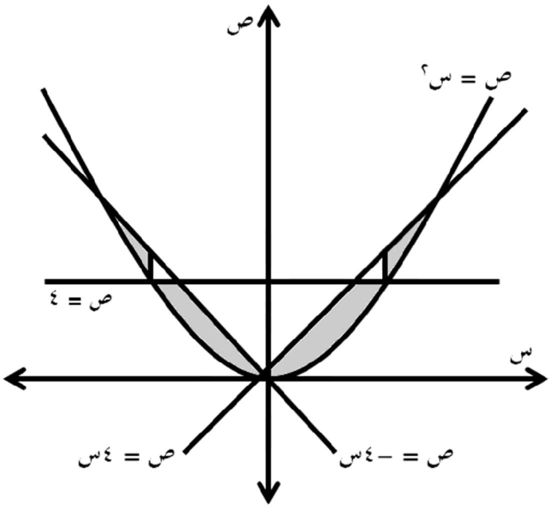
$+ \left[٧س - \frac{١}{٢}س^{٢}\right]_{٣}^{٧}$

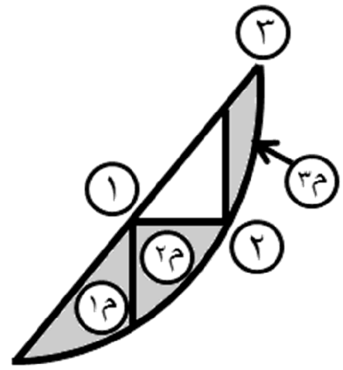
$= \left(٢ + ٤ - \frac{٨}{٣}\right) - \left(\frac{١}{٢} - ٢ + \frac{١}{٣}\right)$

$+ \left(٩ - \frac{٩}{٢} + ٦\right) - \left(\frac{٨}{٣} - ٢ + ٤\right)$

$+ ٤٩ - \frac{٤٩}{٢}$

$= \frac{٥٠}{٣}$





① $٤\text{س} = ٤ \Leftarrow \text{س} = ١$

② $\text{س}^{٢} = ٤ \Leftarrow \text{س} = ٢$

③ $\text{س}^{٢} = ٤\text{س} \Leftarrow \text{س}^{٢} - ٤\text{س} = ٠$

$\Leftarrow \text{س} = ٤$

$\text{م} = ٢(\text{م}_{١} + \text{م}_{٢} + \text{م}_{٣})$

$= ٢\Big(\int_{٠}^{١}(٤\text{س} - \text{س}^{٢})\,\text{دس} + \int_{١}^{٢}(٤ - \text{س}^{٢})\,\text{دس}$

$+ \int_{٢}^{٤}\big((٤\text{س} - \text{س}^{٢})\big)\,\text{دس}\Big)$

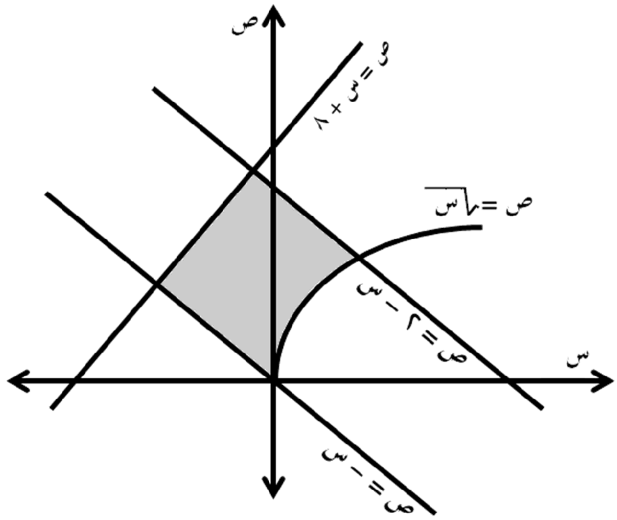
$= ٢\Big((٢\text{س}^{٢} - \frac{١}{٣}\text{س}^{٣})\Big]_{٠}^{١}$

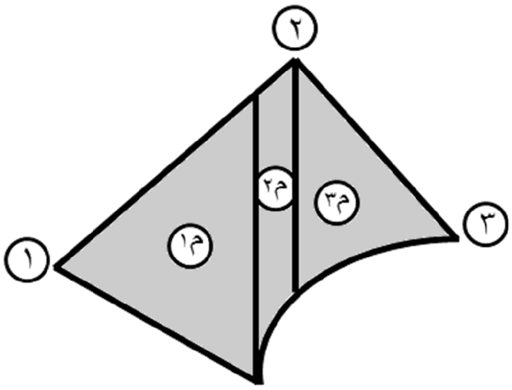
$+ \big(٤\text{س} - \frac{١}{٣}\text{س}^{٣}\big)\Big]_{١}^{٢}$

$+ \big(٢\text{س}^{٢} - \frac{١}{٣}\text{س}^{٣}\big)\Big]_{٢}^{٤}\Big)$

$= ٢\Big((٢ - \frac{١}{٣}) - ٠ + (٨ + \frac{٨}{٣}) - (٤ - \frac{١}{٣})$

$+ (٣٢ - \frac{٦٤}{٣}) - (٨ - \frac{٨}{٣})\Big) = \frac{٥٢}{٣}$





① $\text{س} + ٤ = -\text{س} \Leftarrow -٢\text{س} = ٤$

$\Leftarrow \text{س} = -٢$

② $٢ - \text{س} = \text{س} + ٤ \Leftarrow \text{س} = -١$

③ $\sqrt{\text{س}} = ٢ - \text{س} \Leftarrow \text{س} = (٢ - \text{س})^{٢}$

$\Leftarrow \text{س} = ٤ - ٤\text{س} + \text{س}^{٢}$

$\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٤ = ٠$

$\Leftarrow (\text{س} - ٤)(\text{س} - ١) = ٠ \Leftarrow \text{س} = ١$

$\text{م} = \text{م}_{١} + \text{م}_{٢} + \text{م}_{٣}$

$= \int_{-٢}^{-١}(\text{س} + ٤ + \text{س})\,\text{دس} + \int_{-١}^{٠}(٢ - \text{س} + \text{س})\,\text{دس}$

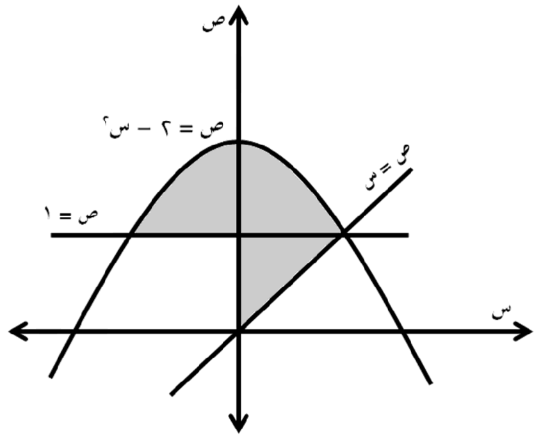
$+ \int_{٠}^{١}\big(٢ - \text{س} - \sqrt{\text{س}}\big)\,\text{دس}$

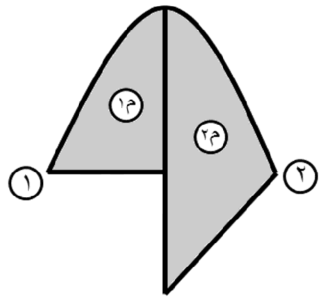
$$= \left[(\text{س}^{٢} + ٤\text{س})\right]_{-٢}^{-١} + \left[٢\text{س}\right]_{-١}^{٠}$$

$$+ \left[\left(٢\text{س} - \tfrac{١}{٢}\text{س}^{٢} - \tfrac{٢}{٣}\text{س}^{\frac{٣}{٢}}\right)\right]_{٠}^{١}$$

$$= (١ - ٤) - (٤ - ٨) + (٠ - -٢)$$

$$+ \left(٢ - \tfrac{١}{٢} - \tfrac{٢}{٣}\right) = \tfrac{٢٣}{٦}$$





$$١ + ٢ \quad ٢ - \text{س}^{٢} = ١ \Leftarrow \text{س}^{٢} = ١$$

$$\Leftarrow \text{س} = -١ \text{ ، } ١$$

$$\text{م} = \text{م}_{١} + \text{م}_{٢}$$

$$= \int_{-١}^{٠} (٢ - \text{س}^{٢} - ١)\,\text{دس} + \int_{٠}^{١} (٢ - \text{س}^{٢} - \text{س})\,\text{دس}$$

$$= \left[(\text{س} - \tfrac{١}{٣}\text{س}^{٣})\right]_{-١}^{٠} + \left[(٢\text{س} - \tfrac{١}{٣}\text{س}^{٣} - \tfrac{١}{٢}\text{س}^{٢})\right]_{٠}^{١}$$

$$= ٠ - \left(-١ + \tfrac{١}{٣}\right) + \left(٢ - \tfrac{١}{٣} - \tfrac{١}{٢}\right)$$

$$= ٣$$

تدريب [١] جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٢ − ٢س ومحور السينات والمستقيمين س = −٢ ، س = ٢

تدريب [٢] جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س) = جاس ، هـ(س) = جتاس في الفترة [٠ ، π]

تدريب [٣] جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ص = ٤ − س٢ ، ص = س + ٢

تدريب [٤] جد مساحة المنطقة الواقعة في الربع الأول والمحصورة بين ص = |س − ٢| ، ص = ١٠ − س٢ ومحور الصادات

تدريب [٥] جد مساحة المنطقة المحصورة بين ق(س) = $\frac{١}{٤}$ س٢ ، ص = ١ ، ص = ٩

تدريب [٦] جد مساحة المنطقة المحصورة بين ص = س ، ل(س) = ٥ ، هـ(س) = $\frac{١}{\text{س}}$

تدريب [٧] جد مساحة المنطقة المحصورة بين ق(س) = ٤ − س٢ ، ص = ٤ ، ص = ٢س − ٤

تدريب [٨] جد مساحة المنطقة المحصورة بين ص = $\sqrt{\text{س}}$ ، ص = س − ٢ ومحور السينات

تدريب [٩] جد مساحة المنطقة المحصورة بين ق(س) = $\frac{١}{\text{س}}$ ، ص = ٢ ، س = ٢ ، س = صفر ، ص = صفر

تدريب [١٠] جد مساحة المنطقة المحصورة بين ق(س) = جاس ، هـ(س) = جتاس ، ص = ١ ، في الفترة [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$]

تدريب [١١] جد مساحة المنطقة المحصورة بين

ق(س) = ٤ − س^{٢} ، ص = س − ٢ ، ص = ٦ − س

ومحور الصادات

تدريب [١٢] جد قيمة أ بحيث أن المستقيم س = أ يقسم

المساحة المحصورة بين المنحنى √ص = س ، والمستقيم س = ٢

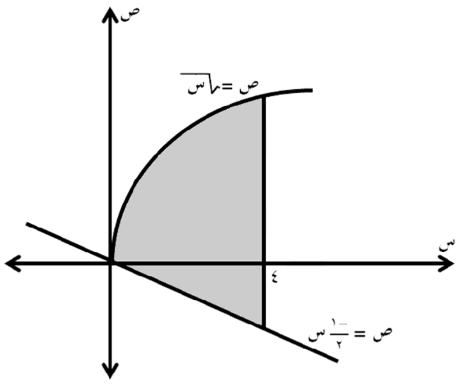
ومحور السينات إلى قسمين متساويين

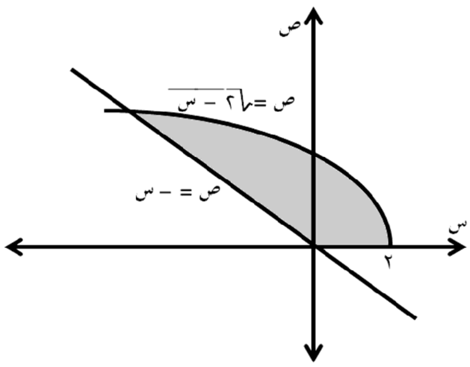
تدريب [١٣] جد المساحة المحصورة فوق محور السينات ومنحنى

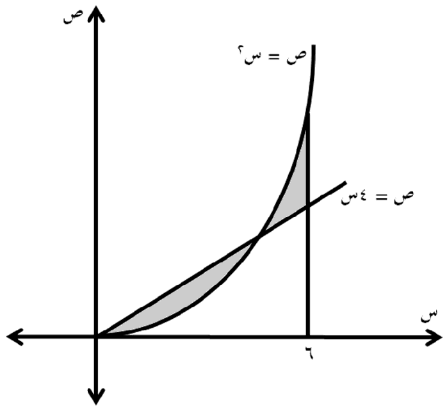
ص = س + ١ ، ص = جتاس

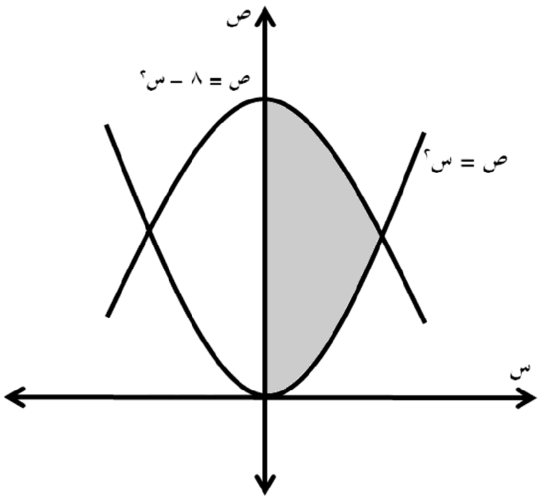
تدريب [١٤] جد مساحة المنطقة المظللة في كل شكل من

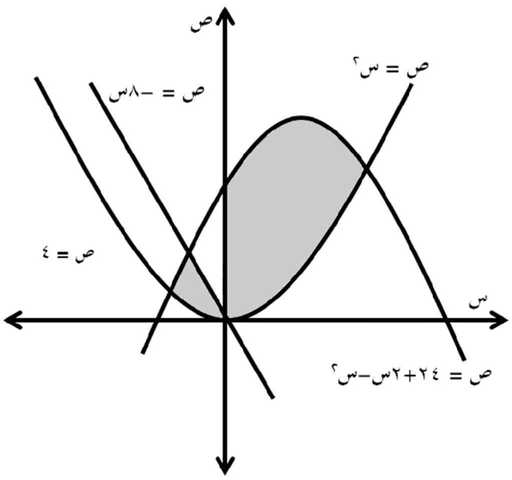
الأشكال الآتية:

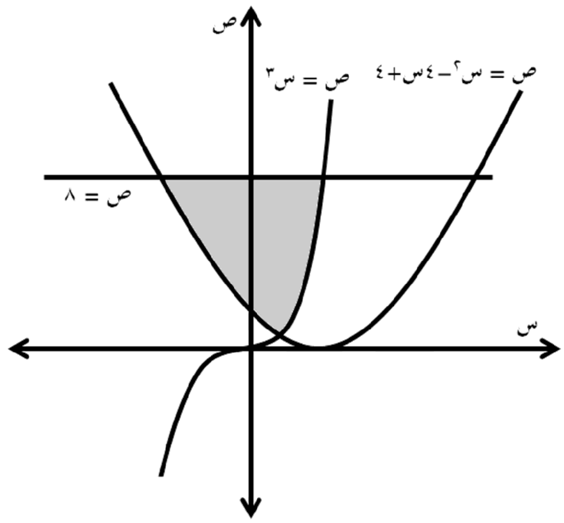


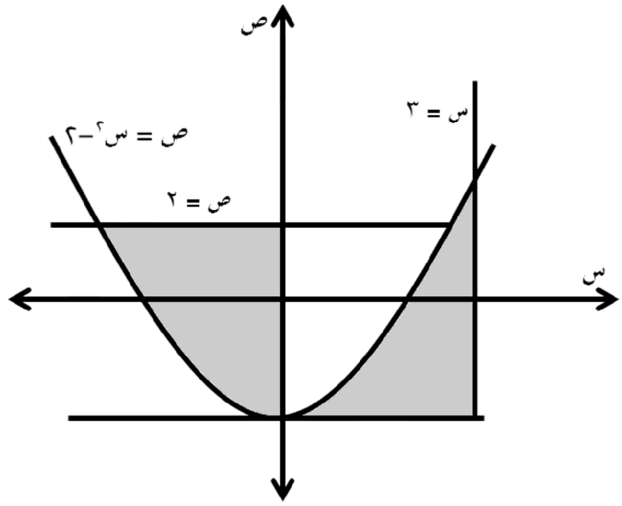












تدريب إذا كانت مساحة المثلث الناشيء من تقاطع منحنى الاقتران ص = (س + ١)(ج − س) ، حيث ج > ٠ ، مع محوري الإحداثيات تساوي (١٠) وحدات مربعة. فأوجد المساحة المحصورة بين المنحنى ومحور السينات

تدريب إذا كان ق(س) = ٨س ، هـ(س) = ٩ − $س^{٢}$ فجد :

(١) مساحة المنطقة الواقعة بين المنحنيين و محور السينات

(٢) مساحة المنطقة الواقعة بين المنحنيين و محور الصادات

(٣) مساحة المنطقة الواقعة بين المنحنيين في الفترة [٠ ، ٣]

الدرس العاشر : المعادلات التفاضلية

المعادلة التفاضلية : هي معادلة تحتوي على مشتقات $(\frac{ءص}{ءس})$ أو تفاضلات (دص ، دس) ومتغيرات

يتم حل المعادلة التفاضلية بفصل المتغير كل على جهة وإجراء التكامل على كل جهة وحل العلاقة

مثال $\boxed{١}$ حل المعادلة التفاضلية $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٣س^{٢}}{ص}$

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{٣س^{٢}}{ص} \Leftarrow ص\ دص = ٣س^{٢}\ دس$$

$$\int ص\ دص = \int ٣س^{٢}\ دس$$

$$\frac{ص^{٢}}{٢} = س^{٣} + ج_{١} \Leftarrow ص^{٢} = ٢س^{٣} + ج$$

مثال $\boxed{٢}$ حل المعادلة التفاضلية

$$٢جا^{٢}س\ دص + ص^{٢}\ دس = ٢دص$$

$$٢جا^{٢}س\ دص + ص^{٢}\ دس = ٢دص$$

$$ص^{٢}\ دس = ٢دص - جا^{٢}س\ دص$$

$$ص^{٢}\ دس = ٢دص(١ - جا^{٢}س)$$

$$ص^{٢}\ دس = ٢جتا^{٢}س\ دص$$

$$\frac{دس}{جتا^{٢}س} = \frac{٢\ دص}{ص^{٢}}$$

$$قا^{٢}س\ دس = ٢ص^{-٢}دص$$

$$\int قا^{٢}س\ دس = \int ٢ص^{-٢}دص$$

$$ظاس + ج = -٢ص^{-١}$$

مثال $\boxed{٣}$ حل المعادلة التفاضلية $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \sqrt{\frac{\text{س}}{\text{ص}}}$ ، س > ٠ ، ص > ٠

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \sqrt{\frac{\text{س}}{\text{ص}}}$$

$$\sqrt{\text{س}}\ \text{دس} = \sqrt{\text{ص}}\ \text{دص}$$

$$\text{س}^{\frac{١}{٢}}\ \text{دس} = \text{ص}^{\frac{١}{٢}}\ \text{دص}$$

$$\int \text{س}^{\frac{١}{٢}}\ \text{دس} = \int \text{ص}^{\frac{١}{٢}}\ \text{دص}$$

$$\frac{٢}{٣}\text{س}^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ} = \frac{٢}{٣}\text{ص}^{\frac{٣}{٢}}$$

مثال $\boxed{٤}$ حل المعادلة التفاضلية $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = (\text{جاس جتاص})^{٢}$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = (\text{جاس جتاص})^{٢}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{جا}^{٢}\text{س جتا}^{٢}\text{ص}$$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{جتا}^{٢}\text{ ص}} = \text{جا}^{٢}\text{س دس}$$

$$\int \text{قا}^{٢}\text{ص دص} = \int \text{جا}^{٢}\text{س دس}$$

$$\text{ظاص} = \int\left(\frac{١}{٢} - \frac{١}{٢}\text{ جتا٢س}\right)\text{دس}$$

$$\text{ظاص} = \frac{١}{٢}\text{س} - \frac{١}{٤}\text{ جا٢س} + \text{جـ}$$

مثال $\boxed{٥}$ إذا كانت $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = ١٢\text{س}^{٢} - ٤\text{س}$ جد معادلة المنحنى علما بأنه يمر بالنقطة (١ ، ٣) وميل المماس له عند هذه النقطة يساوي ٣

$$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = ١٢\text{س}^{٢} - ٤\text{س}$$

$$\int \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = \int\left(١٢\text{س}^{٢} - ٤\text{س}\right)\text{ دس}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٤\text{س}^{٣} - ٢\text{س}^{٢} + \text{جـ}$$

$$\text{ميل المماس} = ٣ \Leftarrow \left.\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right|_{(١ ، ٣)} = ٣$$

$$٣ = ٤ \times (١)^{٣} - ٢(١)^{٢} + \text{جـ}$$

$$\text{جـ} = ١$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٤\text{س}^{٣} - ٢\text{س}^{٢} + ١$$

$$\text{دص} = (٤\text{س}^{٣} - ٢\text{س}^{٢} + ١)\text{دس}$$

$$\int \text{دص} = \int (٤\text{س}^{٣} - ٢\text{س}^{٢} + ١)\text{دس}$$

$$\text{ص} = \text{س}^{٤} - \frac{٢}{٣}\text{س}^{٣} + \text{س} + \text{جـ}$$

$$٣ = ١ - \frac{٢}{٣} + ١ + \text{جـ}$$

$$\text{جـ} = \frac{٥}{٣}$$

$$\therefore \text{ص} = \text{س}^{٤} - \frac{٢}{٣}\text{س}^{٣} + \text{س} + \frac{٥}{٣}$$

مثال $\boxed{٦}$ جد معادلة المنحنى ص = ق (س) إذا كان $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٢\text{س} - ١}{٣ - ٢\text{ص}}$ ويمر المنحنى بالنقطة (٢ ، ١)

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٢\text{س} - ١}{٣ - ٢\text{ص}}$$

$$(٣ - ٢\text{ص})\text{ دص} = (٢\text{س} - ١)\text{دس}$$

$$\int (٣ - ٢\text{ص})\text{ دص} = \int (٢\text{س} - ١)\text{دس}$$

$$٣\text{ص} - \text{ص}^{٢} = \text{س}^{٢} - \text{س} + \text{جـ}$$

يمر بالنقطة (٢ ، ١)

$$\text{٣} - \text{١} = \text{٤} - \text{٢} + \text{ج} \Leftarrow \text{ج} = \text{٠}$$

$$\text{٣ص} - \text{ص}^{\text{٢}} = \text{س}^{\text{٢}} - \text{س}$$

مثال $\boxed{\text{٧}}$ إذا كان ميل منحنى ما عند أي نقطة يتناسب طرديا مع مربع الإحداثي السيني ، إذا كان ميل المنحنى عند النقطة (٢ ، ٣) الواقعة عليه يساوي ٢٤ . جد معادلة المنحنى

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \propto \text{س}^{\text{٢}} \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{أس}^{\text{٢}}$$

$$\left.\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right|_{(\text{٢ ، ٣})} = \text{٢٤} \Leftarrow \text{٢٤} = \text{٤أ}$$

$$\text{أ} = \text{٦} \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٦س}^{\text{٢}}$$

$$\text{دص} = \text{٦س}^{\text{٢}}\ \text{دس}$$

$$\int \text{دص} = \int \text{٦س}^{\text{٢}}\ \text{دس}$$

$$\text{ص} = \text{٢س}^{\text{٣}} + \text{ج}$$

$$\text{يمر بالنقطة (٢ ، ٣)} \Leftarrow \text{٣} = \text{١٦} + \text{ج}$$

$$\text{ج} = -\text{١٣}$$

$$\text{ص} = \text{٢س}^{\text{٣}} - \text{١٣}$$

مثال $\boxed{\text{٨}}$ جد معادلة المنحنى ص = ق (س) إذا كان لهذا المنحنى نقطة قيمة صغرى محلية (١ ، ٢) علما بأن $\frac{\text{ء}^{\text{٢}}\text{ص}}{\text{ءس}^{\text{٢}}} = \text{١٢س}^{\text{٢}}$

قيمة صغرى محلية عند النقطة (١ ، ٢)

$$\Leftarrow \left.\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right|_{(\text{١ ، ٢})} = \text{٠}$$

$$\frac{\text{ء}^{\text{٢}}\text{ص}}{\text{ءس}^{\text{٢}}} = \text{١٢س}^{\text{٢}}$$

$$\int \frac{\text{ء}^{\text{٢}}\text{ص}}{\text{ءس}^{\text{٢}}}\ \text{دس} = \int \text{١٢س}^{\text{٢}}\ \text{دس}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٤س}^{\text{٣}} + \text{ج}$$

$$\text{٠} = \text{٤} + \text{ج} \Leftarrow \text{ج} = -\text{٤}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٤س}^{\text{٣}} - \text{٤}$$

$$\text{دص} = (\text{٤س}^{\text{٣}} - \text{٤})\ \text{دس}$$

$$\int \text{دص} = \int (\text{٤س}^{\text{٣}} - \text{٤})\ \text{دس}$$

$$\text{ص} = \text{س}^{\text{٤}} - \text{٤س} + \text{ج}$$

$$\text{٢} = \text{١} - \text{٤} + \text{ج} \Leftarrow \text{ج} = \text{٥}$$

$$\text{ص} = \text{س}^{\text{٤}} - \text{٤س} + \text{٥}$$

مثال $\boxed{\text{٩}}$ إذا كان ميل المماس عند (س ، ص) هو (٣س ص$^{\text{٢}}$) والمنحنى يمر بالنقطة (٤ ، ١) جد قاعدة الاقتران

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٣س ص}^{\text{٢}} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{ص}^{\text{٢}}} = \text{٣س دس}$$

$$\int \text{ص}^{-\text{٢}}\text{دص} = \int \text{٣س دس}$$

$$-\text{ص}^{-\text{١}} = \frac{\text{٣}}{\text{٢}}\text{س}^{\text{٢}} + \text{ج}$$

$$-\text{١} = \frac{\text{٣}}{\text{٢}} \times \text{١٦} + \text{ج} \Leftarrow \text{ج} = -\text{٢٥}$$

$$-\text{ص}^{-\text{١}} = \frac{\text{٣}}{\text{٢}}\text{س}^{\text{٢}} - \text{٢٥}$$

مثال $\boxed{١٠}$ آلة صناعية قيمتها عند الشراء ٢٥٠٠ دينار ، وكانت قيمتها تتناقص بمرور الزمن وفق العلاقة $\frac{\text{دو}}{\text{دن}} = -٥٠٠(\text{ن} + ١)^{-٢}$ ، حيث **و** قيمة الآلة بعد **ن** سنة من شرائها ، احسب قيمة هذه الآلة بعد ٣ سنوات من شرائها

$$\frac{\text{دو}}{\text{دن}} = -٥٠٠(\text{ن} + ١)^{-٢}$$

$$\text{دو} = \left(-٥٠٠(\text{ن} + ١)^{-٢}\right) \text{دن}$$

$$\int \text{دو} = \int \left(-٥٠٠(\text{ن} + ١)^{-٢}\right) \text{دن}$$

$$\text{و}(\text{ن}) = ٥٠٠(\text{ن} + ١)^{-١} + \text{ج}$$

$$\text{و}(٠) = ٥٠٠(٠ + ١)^{-١} + \text{ج}$$

$$\text{ج} = ٢٠٠٠$$

$$\text{و}(٣) = ٥٠٠(٣ + ١)^{-١} + ٢٠٠٠$$

$$= ٢١٢٥ \text{ دينار}$$

ومن إحدى التطبيقات العملية على المعادلات التفاضلية هي معادلات الحركة حيث أننا سنعتبر أن

التسارع(ت) $= \frac{\text{دع}}{\text{دن}}$ السرعة(ع) $= \frac{\text{دف}}{\text{دن}}$

مثال $\boxed{١١}$ تتحرك نقطة مادية في خط مستقيم تحت تأثير تسارع يساوي (٦ن − ٨) سم/ث^{٢} . جد العلاقة بين السرعة والزمن والعلاقة بين الإزاحة والزمن علما بأن سرعته ١٢ سم/ث بعد مضي ٢ ثانية من بدء الحركة وأن إزاحته خلال هذا الزمن هي ٤٠ سم

$$\text{ت}(\text{ن}) = ٦\text{ن} - ٨$$

$$\int \text{ت}(\text{ن})\, \text{دن} = \int (٦\text{ن} - ٨)\, \text{دن}$$

$$\text{ع}(\text{ن}) = ٣\text{ن}^{٢} - ٨\text{ن} + \text{ج}$$

$$\text{ع}(٢) = ١٢$$

$$١٢ - ١٦ + \text{ج} = ١٢ \Rightarrow \text{ج} = ١٦$$

$$\text{ع}(\text{ن}) = ٣\text{ن}^{٢} - ٨\text{ن} + ١٦$$

$$\int \text{ع}(\text{ن})\, \text{دن} = \int (٣\text{ن}^{٢} - ٨\text{ن} + ١٦)\, \text{دن}$$

$$\text{ف}(\text{ن}) = \text{ن}^{٣} - ٤\text{ن}^{٢} + ١٦\text{ن} + \text{ج}$$

$$\text{ف}(٢) = ٤٠$$

$$٨ - ١٦ + ٣٢ + \text{ج} = ٤٠$$

$$\text{ج} = ١٦$$

$$\text{ف}(\text{ن}) = \text{ن}^{٣} - ٤\text{ن}^{٢} + ١٦\text{ن} + ١٦$$

مثال [١٢] يسير جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة :

$\text{ت} = \frac{١}{\text{ع}}$ ، $\text{ع} > ٠$ ، حيث **ت** : تسارع الجسيم ، ع : سرعة الجسيم . إذا تحرك الجسيم من السكون فقطع مسافة مقدارها $١٠\sqrt{٢}$ م بعد ٤ ثوان من حركته ، فجد المسافة التي قطعها بعد ثانية واحدة من حركته.

$$\text{ت} = \frac{١}{\text{ع}} \quad \Leftarrow \quad \frac{\text{دع}}{\text{دن}} = \frac{١}{\text{ع}}$$

$$\text{ع دع} = \text{دن} \quad \Leftarrow \quad \int \text{ع دع} = \int \text{دن}$$

$$\tfrac{١}{٢}\text{ع}^٢ = \text{ن} + \text{جـ}$$

تحرك من السكون $\text{ع}(٠) = ٠ \quad \Leftarrow \quad \text{جـ} = ٠$

$$\tfrac{١}{٢}\text{ع}^٢ = \text{ن} \quad \Leftarrow \quad \text{ع}^٢ = ٢\text{ن}$$

$$\text{ع} = \sqrt{٢\text{ن}} \quad \text{لأن ع} > ٠$$

$$\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \sqrt{٢\text{ن}}$$

$$\text{دف} = \sqrt{٢\text{ن}} \ \text{دن}$$

$$\int \text{دف} = \int \sqrt{٢\text{ن}} \ \text{دن}$$

$$\text{ف(ن)} = \frac{٢}{٣} \times \frac{١}{٢} (٢\text{ن})^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}$$

$$١٠\sqrt{٢} = \frac{١}{٣}(٨)^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}$$

$$\text{جـ} = \frac{١٤}{٣}\sqrt{٢}$$

$$\text{ف(ن)} = \frac{١}{٣}(٢\text{ن})^{\frac{٣}{٢}} + \frac{١٤}{٣}\sqrt{٢}$$

$$\text{ف(١)} = \frac{١}{٣}(٢)^{\frac{٣}{٢}} + \frac{١٤}{٣}\sqrt{٢} = \frac{١٦}{٣}\sqrt{٢}$$

مثال [١٣] بدأت سيارة حركتها من السكون بتسارع مقداره أ سم/ث^٢ وكان التسارع يتناقص بمعدل ثابت قدره $\frac{١}{١٠}$ سم/ث^٢ . إذا كانت سرعة السيارة بعد دقيقة واحدة من بدء الحركة هي ٣٦ سم/ث . جد قيمة أ والمسافة المقطوعة في الدقيقة الأولى من الحركة

$$\text{ع}(٠) = ٠ \ ، \ \text{ف}(٠) = ٠ \ ، \ \text{ت}(٠) = \text{أ} \ ،$$

$$\frac{\text{دت}}{\text{دن}} = -\frac{١}{١٠} \ ، \ \text{ع}(٦٠) = ٣٦$$

$$\frac{\text{دت}}{\text{دن}} = -\frac{١}{١٠} \quad \Leftarrow \quad \text{دت} = -\frac{١}{١٠}\text{دن}$$

$$\int \text{دت} = \int -\frac{١}{١٠}\text{دن}$$

$$\text{ت(ن)} = -\frac{١}{١٠}\text{ن} + \text{جـ}$$

$$\text{ت}(٠) = \text{أ} \quad \Leftarrow \quad \text{جـ} = \text{أ}$$

$$\text{ت(ن)} = -\frac{١}{١٠}\text{ن} + \text{أ}$$

$$\int \text{ت(ن) دن} = \int \left(-\frac{١}{١٠}\text{ن} + \text{أ}\right)\text{دن}$$

$$\text{ع(ن)} = -\frac{١}{٢٠}\text{ن}^٢ + \text{أن} + \text{جـ}$$

$$\text{ع}(٠) = \text{جـ} = ٠$$

$$\text{ع}(٦٠) = ٣٦$$

$$-\frac{١}{٢٠}(٦٠)^{٢} + أ \times ٦٠ = ٣٦$$

$$أ = ٣,٦$$

$$\therefore\ ع(ن) = -\frac{١}{٢٠}ن^{٢} + ٣,٦\,ن$$

$$\int ع(ن)\,دن = \int \left(-\frac{١}{٢٠}ن^{٢} + ٣,٦\,ن\right) دن$$

$$ف(ن) = -\frac{١}{٦٠}ن^{٣} + ١,٨\,ن^{٢} + جـ$$

$$ف(٠) = ٠ \Leftarrow جـ = ٠$$

$$ف(٦٠) = -\frac{١}{٦٠}(٦٠)^{٣} + ١,٨\,(٦٠)^{٢} =$$

٢٨٨٠ سم

تدريب $\boxed{١}$ حل المعادلة التفاضلية

$$\frac{دص}{دس} = \sqrt{\frac{٢س + ٧}{ص^{٢} - ٤ص + ٤}} \quad ،$$

$$ص > ٢ \ ، \ س > -\frac{٧}{٢}$$

تدريب $\boxed{٢}$ حل المعادلة التفاضلية $\frac{دص}{دس} = \frac{٥}{١ + ظا^{٢}\,٤س}$

تدريب $\boxed{٣}$ حل المعادلة التفاضلية $\frac{دص}{دس} = \frac{جا٧س}{ص\ قتا٧س}$

تدريب $\boxed{٤}$ حل المعادلة التفاضلية :

$$ص\ \frac{دص}{دس} = \frac{٦س}{(ص^{٢} + ١)^{٩}}$$

تدريب $\boxed{٥}$ حل المعادلة التفاضلية : $\frac{ص}{د س} = \frac{قا^{٤}س\ ظا^{٢}س}{د ص}$

تدريب $\boxed{٦}$ حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$\left(\frac{س}{س + ٣}\right)\frac{دص}{دس} = \frac{هـ^{-ص}(س + ٤)}{س^{٢} + ٣س} \ ، \ س > ٠$$

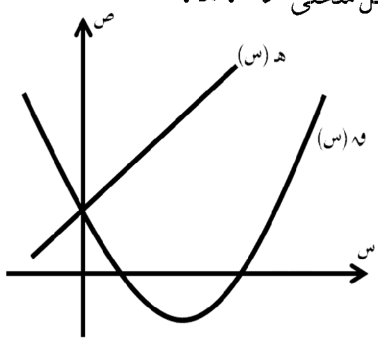
تدريب $\boxed{٧}$ جد معادلة المنحنى $ص = ق(س)$ إذا كان $ق''(س) = ٦س - ٨$ وكان المماس لهذا المنحنى عند النقطة $(١ ، -٢)$ هو المستقيم $ص = -٤س + ٢$

تدريب $\boxed{٨}$ إذا علمت أن ميل العمودي على المماس هو $(قا^{٢}س)$.
جد معادلة المنحنى علما بأن $(\frac{\pi}{٤} ، ٢)$ واقعة عليه

تدريب $\boxed{٩}$ جد قاعدة كثير الحدود من الدرجة الأولى إذا علمت أن

$$ق(١) = ٨ \ ، \ \int_{-٢}^{٣} ق(س)\,دس = ٥$$

تدريب $\boxed{١٠}$ يمثل الشكل منحنى ق ، هـ ،



$ق'(س) = ٢س - ٤$ ،

$هـ(س) = س + ٤$

جد قاعدة الاقتران

$ق(س)$

تدريب $\boxed{١١}$ قذف جسيم رأسيا لأعلى بسرعة ابتدائية مقدارها ٤٠ م/ث وبتسارع مقداره −١٠ م/ث^{٢} إذا كان ارتفاعه عن سطح الأرض بعد ثانية من حركته يساوي ٨٠ م ، فجد أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم

تدريب $\boxed{١٢}$ رمي جسيم رأسيا لأسفل بسرعة ابتدائية مقدارها ٤٠ قدم/ث من بالون ساكن على ارتفاع ٨٠٠٠ قدم عن سطح الأرض فسقط بتسارع ثابت -٣٢ قدم/ث^٢ . جد ارتفاع الحجر عن الأرض بعد ١٠ ثواني من لحظة إسقاطه

تدريب $\boxed{١٣}$ إذا كان معدل التغير تحت تأثير الحرارة في مساحة صفيحة م من المعدن بالنسبة للزمن يتعين بالعلاقة

$$\frac{د م}{د ﻥ} = ٠,٠١٥ ﻥ^٢ + ٠,٠٢ ﻥ$$

حيث م : المساحة بالمتر المربع ، ﻥ : الزمن بالدقيقة . جد مساحة الصفيحة قبل بدء التسخين مباشرة ، إذا عُلم أن م = ٩٠ م^٢ عندما ﻥ = ١٠ دقائق

تدريب $\boxed{١٤}$ تتناقص كتلة مادة مشعة (ك) مع مرور الزمن وفقا للعلاقة $\frac{د ك}{د ﻥ} = ك_٠ \, هـ^{-٢ﻥ + ٢}$ حيث ك. الكتلة الأصلية بعد مرور ﻥ ساعة ، فإذا علمت أن كتلة المادة المشعة نقصت إلى نصف كتلتها الأصلية بعد مرور ثانية واحدة . فأثبت أن كتلتها بعد مرور ثانيتين هو (ك. $(١ - \frac{١}{٢ هـ^٢})$)

تدريب $\boxed{١٥}$ إذا كانت العلاقة بين شدة التيار (ت) والزمن (ﻥ) في دائرة كهربائية تعطى بالعلاقة $\frac{د ت}{د ﻥ} = -٢ \, هـ^{-٢ﻥ}$. حيث (ت) بالأمبير ، (ﻥ) بالثانية. فإذا كانت شدة التيار عندما ﻥ = $\frac{١}{٢}$ ثانية هو (١٠ أمبير) . فجد شدة التيار عندما ﻥ = ١ ثانية

تدريب $\boxed{١٦}$ ترتبط قوة الزلزال (ﻫ) على مقياس ريختر بالطاقة الناشئة (ش) مقاسة بالجول وفقا للعلاقة الآتية **دش = ١٥ش دﻫ** ، فإذا كان الطاقة الناشئة عن زلزال قوته (٣ لـو$_{هـ}^{١٠}$) هي (١×١٠^{١٦}) جول. فجد الطاقة الناشئة عن زلزال قوته ٥ ريختر

تدريب $\boxed{١٧}$ يتكاثر نوع من الطيور بحيث يتبع هذا التكاثر للمعادلة دع = ٠,٠٤ ع دﻥ، حيث ع : عدد الطيور ، ﻥ : عدد السنوات ، فإذا كان عدد الطيور عام (٢٠٢٥) هو (٥٤٠٠٠) طير . فجد عدد الطيور في عام ٢٠٠٠

تدريب $\boxed{١٨}$ يتناقص أعداد دب الباندا بحيث يتبع هذا التناقص للمعادلة دع = $-٠,١$ ع دﻥ ، حيث ع : عدد الدببة ، ﻥ : عدد السنوات ، فإذا كان عدد الدببة عام (٢٠١٠) هو (٥٠٠٠) دب. فجد عدد الدببة في عام ٢٠٢٠

تدريب $\boxed{١٩}$ تتزايد أسعار العقارات بحيث يتبع هذا التزايد للمعادلة دع = م ع دﻥ ، حيث ع : سعر العقار ، ﻥ : الزمن بالسنوات ، م > ٠ ، م تمثل معدل ازدياد سعر العقارات . فإذا كان سعر أحد العقارات (٢٤٠٠٠) دينار وأصبح سعرها بعد مضي (٤) سنوات يساوي (٤٨٠٠٠) دينار . فكم يكون سعرها بعد مضي (١٢) سنة ؟

تدريب $\boxed{٢٠}$ يتناقص ارتفاع الثلج لأحد الأيام في منطقة ما يتبع المعادلة دع = م ع دﻥ ، حيث ع : ارتفاع الثلج بالسم ، ﻥ : الزمن بالساعات ، م < ٠ ، م تمثل معدل تناقص ارتفاع الثلج لذلك اليوم . فإذا كان ارتفاع الثلج عند الساعة العاشرة صباحا (٤٠) سم ، وأصبح ارتفاع

هذا الثلج عند الساعة الواحدة ظهرا(٢٠) سم. فجد ارتفاع الثلج عند الساعة الرابعة عصرا في ذلك اليوم.

تدريب $\boxed{٢١}$ إذا كان تزايد عدد المواليد في بلد ما يتبع المعادلة $دع = أ \, ع \, دن$، حيث ع : عدد المواليد ، ن : الزمن بالسنوات ، $أ > ٠$ ، أ تمثل نسبة تزايد مواليد هذا البلد . فإذا كان عدد المواليد في عام (١٩٨٦) هو (١٠٠٠٠) مولود ، وكان عددهم عام (٢٠١١) هو (٢٧٠٠٠) مولود . فجد نسبة تزايد المواليد خلال هذين العامين (اعتبر $هـ \approx ٢{,}٧$)

أسئلة الوزارة على الوحدة الرابعة

وزارة ١٩٩٧ الورقة الثانية

① جد $\int \frac{س \, جاس}{جتا^{٣} س} \, دس$

② جد $\int \frac{س^{٢} + س + ٥}{س^{٢} + س} \, دس$

③ إذا كانت $ص = هـ^{س^{٢}} لو_{هـ} س^{٣}$ فجد $\frac{ءص}{ءس}$

④ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي $ص = |س|$ ، $ص = ٢ - س^{٢}$

وزارة ١٩٩٨ الورقة الثانية

① أوجد كثير الحدود ق (س) من الدرجة الأولى، إذا كان $ق(٠) = ١$ ، $\int_{٠}^{١} ق(س) \, دس = ٤$

② أوجد التكاملات التالية :

(١) $\int \sqrt[٣]{٢س^{٥} - س^{٣}} \, دس$

(٢) $\int \frac{٧}{س^{٢} - ٣س - ١٠} \, دس$

③ قذفت كرة للأعلى بسرعة ابتدائية قدرها ٦٤ قدم/ث من على ارتفاع ٨٠ قدماً ، جد معادلة الحركة لهذه الكرة إذا علمت أن تسارع الكرة يساوي -٣٢ قدم/ث^{٢}

وزارة ١٩٩٩ الورقة الثانية

① أوجد التكاملين الآتيين :

(١) $\int \frac{(س + ١)^{٥}}{س^{٧}} \, دس$

(٢) $\int \frac{٢س^{٢}}{١ - س^{٢}} \, دس$ ، $س \neq \pm ١$

② إذا كانت $ص = س^{ن} هـ^{س}$ ، $ن \in ط$ ، هـ العدد النيبيري ، والمطلوب :

(١) أوجد $\frac{ءص}{ءس}$

(٢) إذا كان $ع_{ن} = \int س^{ن} هـ^{س} \, دس$ ، فأثبت أن $ع_{ن} = س^{ن} هـ^{س} - ن \, ع_{ن-١}$

③ آلة صناعية قيمتها عند الشراء (٢٥٠٠) دينار وكانت قيمتها تتناقص بمرور الزمن وفق العلاقة $\frac{دق}{دن} = -٥٠٠(ن + ١)^{-٢}$ ، حيث ق قيمة الآلة بعد ن سنة من شرائها ، احسب قيمة هذه الآلة بعد (٣) سنوات من شرائها

وزارة ٢٠٠٠ الورقة الثانية (١)

(١) أوجد التكاملات التالية :

(١) $\int \frac{\text{جتا}٢\text{س}}{\text{جاس جتاس}}$ دس

(٢) $\int \frac{٢\text{س} + ١}{\text{س}^٢ + ٣\text{س} - ٤}$ دس

(٣) $\int_{١}^{\text{هـ}} \left(\text{لو}_{\text{هـ}}^{\text{س}}\right)^٢$ دس

(٢) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = جتاس والقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين (٠ ، ١) ، $(\frac{\pi}{٢} ، ٠)$

وزارة ٢٠٠٠ الورقة الثانية (٢)

(١) إذا كان ص = $\text{هـ}^{\text{أس}}$ ، أ ∋ $ح^+$ ، فجد قيمة بحيث أن :

صً − صَ − ٦ص = صفر

(٢) أوجد التكاملات التالية :

(١) $\int (\text{جتاس} + \text{جاس})^٢$ دس

(٢) $\int_{١}^{٢} \sqrt{\text{س}^٢ - ٢\text{س} + ١}$ دس

(٣) $\int \frac{\sqrt{\text{س}}}{\text{س} - ٩}$ دس

(٣) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران

ق(س) = $\frac{١}{٤}$س^٢ والمستقيمين ص = ١ ، ص = ٩

وزارة ٢٠٠١ الورقة الثانية (١)

(١) أوجد التكاملات التالية :

(١) $\int (\text{س}^٥ - ٣\text{س})^٣$ دس

(٢) $\int$ س^٥ جتاس^٣ دس

(٣) $\int \frac{١}{\text{هـ}^{\text{س}} - ١}$ دس

(٢) إذا كان الاقتران ق(س) متصلا على ح ، وكان أ عددا ثابتا ،

أثبت أن $\int_{\text{أ}}^{٢\text{أ}}$ ق(س) دس = $\int_{٠}^{\text{أ}}$ ق(٢أ − س) دس

(٣) انطلق جسيم في خط مستقيم من نقطة أ ، فإذا كانت سرعته ع متر /ث بعد زمن قدره ن ثانية ، تعطى بالقاعدة

$$\text{ع} = \begin{cases} ٣\text{ن}^٢ ، & ٠ \le \text{ن} < ٢ \\ ١٦ - ٢\text{ن} ، & ٢ \le \text{ن} \le ٨ \end{cases}$$

جد بُعد الجسيم عن النقطة أ ، عندما ن = ٥ ثواني

وزارة ٢٠٠١ الورقة الثانية (٢)

(١) أوجد التكاملات التالية :

(١) $\int \frac{٣}{\text{س}^٢ + \text{س} - ١٢}$ دس

(٢) $\int \text{هـ}^{\text{س}}$ جتاس دس

(٣) $\int \frac{١}{\text{س}^٢} \sqrt{\frac{٢\text{س} + ١}{\text{س}}}$ دس

(٢) جد قيمة أ بحيث أن المستقيم س = أ يقسم المساحة المحصورة بين منحنى $\sqrt{\text{ص}}$ = س والمستقيم س = ٢ ومحور السينات إلى قسمين متساويين

وزارة ٢٠٠٢ الورقة الثانية

(١) أوجد التكاملات التالية :

(١) $\int \frac{٢س^{٢} - س^{٤}}{س^{٢}}$ دس

(٢) $\int (س^{٢} + ١)$ جتا$(س^{٣} + ٣س + ١)$ دس

(٣) $\int س^{٢}$ لو$_{هـ}$ س دس

(٣) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي ق(س) = $٦ - س^{٢}$ ، هـ(س) = س

وزارة ٢٠٠٣ الورقة الثانية

(١) جد التكاملات التالية :

(١) $\int \frac{(١+س)^{٩}}{س^{١١}}$ دس

(٢) $\int س^{ن}$ لو$_{هـ}$ س دس

(٣) $\int$ جا^{٣}س هـ^{جتاس} دس

(٤) $\int \frac{س - ٢}{س^{٢} + س - ٢}$ دس

(٢) جد مساحة المنطقة الواقعة في الربع الأول والمحصورة بين منحنى ص = |س − ٢| ومنحنى الاقتران ص = $١٠ - س^{٢}$ ومحور الصادات

وزارة ٢٠٠٤ شتوي

(١) أوجد التكاملات التالية :

(١) $\int$ جا^{٣}س جتا^{٣}س دس

(٢) $\int \frac{٣س - ١}{س^{٢} + س - ٢}$ دس

(٣) $\int س^{٥}\sqrt{س^{٣} + ١}$ دس

(٢) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = س والمنحنى $س^{٢} = ٤ص$

وزارة ٢٠٠٤ صيفي

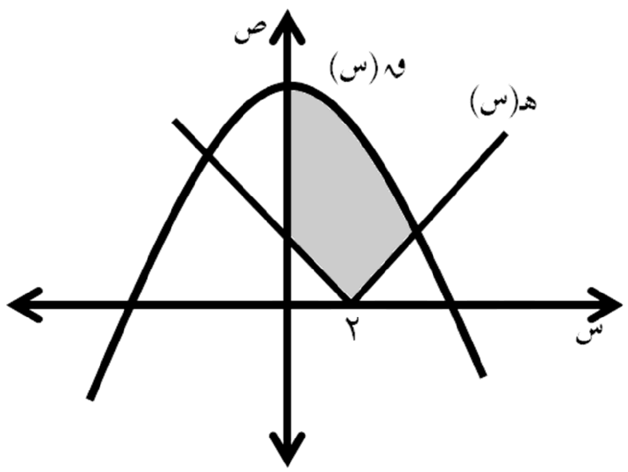
(١) جد التكاملات الآتية :

(١) $\int \frac{٢س - ٣}{س^{٢} - ٣س - ٤}$ دس

(٢) $\int$ س $\left(\text{لو}_{هـ} س\right)^{٢}$ دس

(٣) $\int$ جاس جتا^{٢}(جتاس) دس

(٢) احسب مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور والمحددة بمنحنى الاقترانين ق(س) = $١٠ - س^{٢}$ ، هـ(س) = |س − ٢|



وزارة ٢٠٠٥ شتوي

(١) جد التكاملات الآتية :

(١) $\int \frac{١}{٢س - ١ + \sqrt{٢س + ١}}$ دس

(٢) $\int س^{٣}$ هـ$^{س^{٢} + ١}$ دس

② احسب المساحة المحدودة بين منحنى الاقتران $ق(س) = س^{٣} + ١$ ومحور السينات والمستقيمين $س = -٢$ ، $س = ٢$

وزارة ٢٠٠٥ صيفي

① جد التكاملات الآتية :

(١) $\int_{٠}^{١} س\,(١ + س^{٢})^{٤}\,دس$

(٢) $\int \frac{لو_{هـ}(س + ٢)}{\sqrt{س + ٢}}\,دس$

(٣) $\int \frac{٧س}{٢س^{٢} - ٥س - ٣}\,دس$

② جد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى $ص^{٢} = ٤س$ والمستقيم $س - ص = ٣$

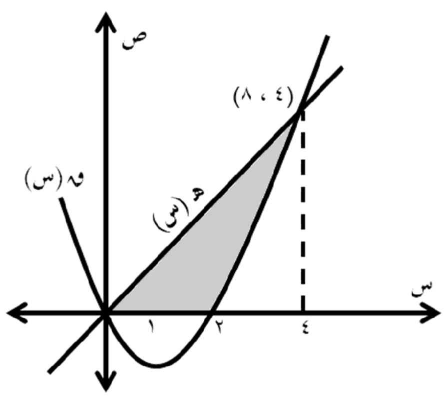
وزارة ٢٠٠٦ شتوي

① جد التكاملات الآتية :

(١) $\int \frac{١}{س + ٢س\sqrt{س}}\,دس$

(٢) $\int س\,ظا^{٢}س\,دس$

② جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحني الاقترانين $ق(س) = ١٦ - س^{٢}$ ، $هـ(س) = ٢س + ٨$ ومحور السينات



وزارة ٢٠٠٦ صيفي

① جد التكاملات الآتية :

(١) $\int_{٠}^{٤} س\sqrt{س^{٢} + ٩}\,دس$

(٢) $\int \frac{٦جتاس}{(٢جاس - ١)(جاس + ١)}\,دس$

(٣) $\int \frac{س\,هـ^{س}}{(١ + س)^{٢}}\,دس$

② جد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى $ص^{٢} = ٢٤ - ٨س$ ومحور السينات الواقعة في الربع الأول

وزارة ٢٠٠٧ شتوي

① جد التكاملات الآتية :

(١) $\int \frac{١٢}{س^{٢} - ٤}\,دس$

(٢) $\int س\,(جاس + جتاس)^{٢}\,دس$

(٣) $\int هـ^{س + ٣هـ^{س}}\,دس$

② جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحني الاقترانين $ق(س) = ٤س^{٣} - ٣س$ ، $هـ(س) = ٥س$

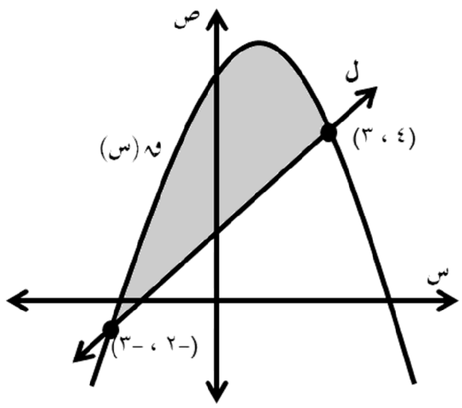
وزارة ٢٠٠٧ صيفي

① جد التكاملين الآتيين :

(١) $\int \frac{٣}{س^{٢} - ٥س}\,دس$

(٢) $\int س\,جتا\sqrt{١ + س^{٢}}\,دس$

② جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل المحصورة بين منحنى الاقتران $\text{ق(س)} = ٧ + ٣\text{س} - \text{س}^{٢}$ والمستقيم ل المار بالنقطتين (−٢ ، −٣) ، (٤ ، ٣)



وزارة ٢٠٠٨ شتوي

① جد التكاملات الآتية :

$$(١)\quad \int_{٠}^{\text{لو}_{\text{هـ}}٢} \text{هـ}^{\text{س}}\left(٩ - ٤\text{هـ}^{\text{س}}\right)\,\text{دس}$$

$$(٢)\quad \int_{٠}^{\pi} \left(١ + \text{جا}٢\text{س}\right)\text{جتا}^{٢}\text{س}\,\text{دس}$$

$$(٣)\quad \int \frac{٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{(\text{س} - ٢)^{٢}}\,\text{دس}$$

② جد مساحة المنطقة الواقعة في الربع الأول والمحصورة بين محور الصادات ومنحنيات الاقترانات : $\text{ق(س)} = \text{س}^{٢} - ١$ ، $\text{هـ(س)} = ٥ - \text{س}$ ، $\text{ل(س)} = ١ - \text{س}$

③ إذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة عند النقطة (س ، ص) يساوي $\dfrac{٢\,\text{ص}^{٢}}{(٣\text{س} + ٥)^{\frac{٢}{٣}}}$ فجد قاعدة هذه العلاقة علما بأن منحناها يمر بالنقطة (١ ، ٥)

وزارة ٢٠٠٨ صيفي

① جد كلا التكاملين التاليين :

$$(١)\quad \int \frac{\text{س}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}\,\text{دس}$$

$$(٢)\quad \int_{١}^{\text{هـ}} \frac{٢}{\text{س}\left(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - ٢\right)\left(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - ٣\right)}\,\text{دس}$$

② حل المعادلة التفاضلية :

$$\frac{\text{س}}{\text{س}^{٢} - ١}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{هـ}^{-\text{ص}}(\text{س} + ٢)$$

③ إذا كانت $\text{ص} = \text{أ}\,\text{هـ}^{٢\text{س}} + \text{جا}\left(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)$ حيث أ ثابت ، وكان $\left.\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right|_{\text{س} = ١} = \text{هـ}^{٣} + ١$ فجد قيمة أ

④ إذا كان $\text{ق(س)} = -\text{س}^{٣}$ ، $\text{د(س)} = ٨$ ، $\text{ل(س)} = \text{س}$ فجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات الثلاثة

وزارة ٢٠٠٩ شتوي

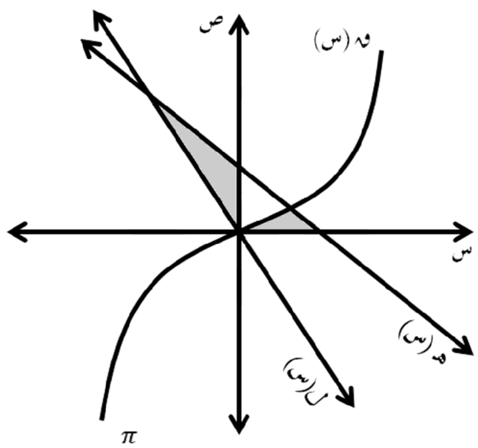
① جد كلا التكاملين التاليين :

$$(١)\quad \int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{قتا}\text{س}}\,\text{دس}$$

$$(٢)\quad \int_{٠}^{٤} \frac{٢}{\text{س} - ٤\sqrt{\text{س}} + ٣}\,\text{دس}$$

② إذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة عند النقطة (س ، ص) يساوي $\dfrac{\text{هـ}^{-\text{ص}}(\text{س} + ٤)(\text{س} - ٣)}{\text{س}^{٢} - ٣\text{س}}$ فجد قاعدة هذه العلاقة إذا علمت أن منحناها يمر بالنقطة (١ ، ٠)

③ جد مجموع مساحتي المنطقتين المظللتين المبينتين في الشكل المجاور حيث ق(س) = ٢س^{٣} ، هـ(س) = ٣– س ، ل(س) = –٢س



④ إذا كانت ص = هـ^{٤س} + لو$_{هـ}$ ظاس + $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{دس}{١ + جتا^{٢}س}$

فجد $\frac{ءص}{ءس}\Big|_{س = \frac{\pi}{٤}}$

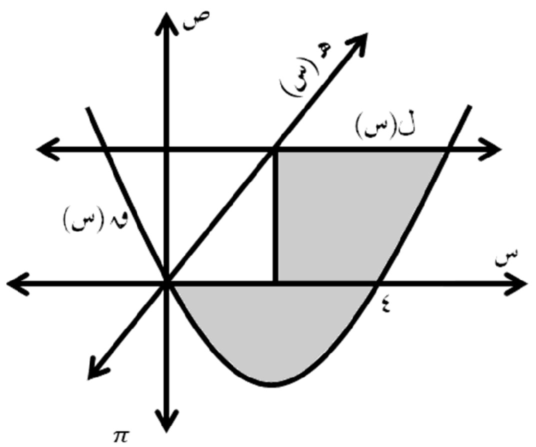
وزارة ٢٠٠٩ صيفي

① إذا كان ق اقترانا قابلا للاشتقاق على ح وكان $\int_{١}^{٢}$ ق(س) دس = ١٠، وكان ق(٢) = ٣ ، ق(١) = −١ ، فجد قيمة $\int_{٠}^{١}$ س^{٥} ق''(س^{٣} + ١) دس

② جد $\int \frac{جتاس}{١ + ٣\ جاس - جتا^{٢}س}$ دس

③ يسير جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة ت = ٢$\sqrt{ع}$ حيث ع > ٠ ، ت : تسارع الجسيم ، ع : سرعة الجسيم ، فإذا كانت سرعة الجسيم عند بدء حركته ٩ م/ث فجد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد ٣ ثوان من بدء حركته علما بأنه قطع مسافة قدرها $\frac{٦٤}{٣}$ م في أول ثانية من حركته

④ جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور حيث ق(س) = س^{٢} – ٤س ، هـ(س) = ٥س ، ل(س) = ٥



⑤ إذا كانت ص = هـ^{ظاس} + أ لو$_{هـ}$ جتاس + $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{دس}{١ + ظا^{٢}س}$

حيث أ ثابت ، وكان $\frac{ءص}{ءس}\Big|_{س = \frac{\pi}{٤}}$ = ٢هـ + ١ فجد قيمة أ

وزارة ٢٠١٠ شتوي

① جد كلا التكاملين التاليين :

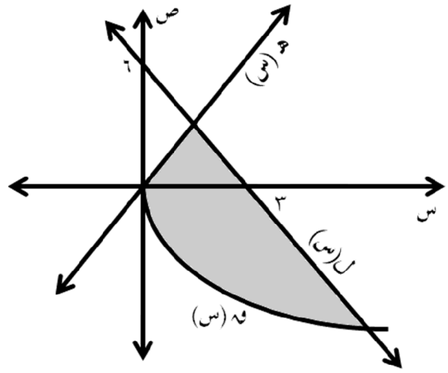
(١) $\int$ هـ^{س}(٢جتا٣س جتاس – جتا٢س) دس

(٢) $\int_{١}^{٨} \frac{٢}{\sqrt[٣]{س^{٤}} + ٤س + ٣\sqrt[٣]{س^{٢}}}$ دس

② إذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة عند النقطة (س ، ص) يساوي $\frac{-ص(س^{٢} - ١)}{س^{٢}}$ فجد قاعدة هذه العلاقة إذا علمت أن منحناها يمر بالنقطة (١ ، –١)

③ إذا كانت ص = هـ$^{أ جتاس}$ + لو$_{هـ}$ جاس + $\int_{٠}^{\pi} \frac{دس}{٢ + جاس}$ ، وكان $\frac{ءص}{ءس}\Big|_{س = \frac{\pi}{٢}}$ = –٢ فجد قيمة الثابت أ

④ جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور ، حيث
ق(س) = $-\sqrt{س}$ ، هـ(س) = س ، ل(س) = ٦ − ٢س



وزارة ٢٠١٠ صيفي

① جد التكاملات التالية :

(١) $\int \frac{دس}{١ - جتاس}$

(٢) $\int \frac{دس}{\sqrt{س}\,(١ + \sqrt{س})^{٤}}$

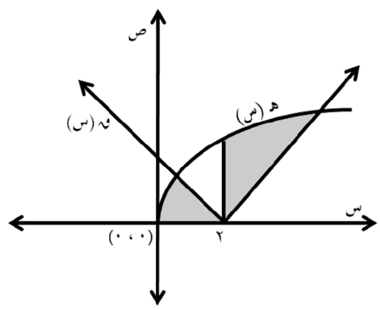
(٣) $\int لو_{هـ}(س^{٢} - ١)\ دس$

② حل المعادلة التفاضلية $جا^{٢}س\ دص + ص\ دس = دص$

③ إذا كان ق(س) = $هـ^{\frac{١}{س}} + أ\ لو_{هـ}\sqrt{س}$ ، وكان

قَ(١) = هـ ، فجد قيمة الثابت أ

④ جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل، حيث
ق(س) = | س − ٢ | ، هـ(س) = $\sqrt{س}$



وزارة ٢٠١١ شتوي

① أثبت $\int \frac{ظتا(لو_{هـ}س)}{س}\ دس = لو_{هـ}\left|جا(لو_{هـ}س)\right| + جـ$

② جد التكاملات التالية :

(١) $\int (٢س - ١)\ جا٢س\ دس$

(٢) $\int_{١}^{٤} \frac{|١ - س|}{س^{٢} - ٥س + ٦}\ دس$

③ إذا كان ق(س) اقتران كثير حدود ، وكان ق(٠) = ٥ ،

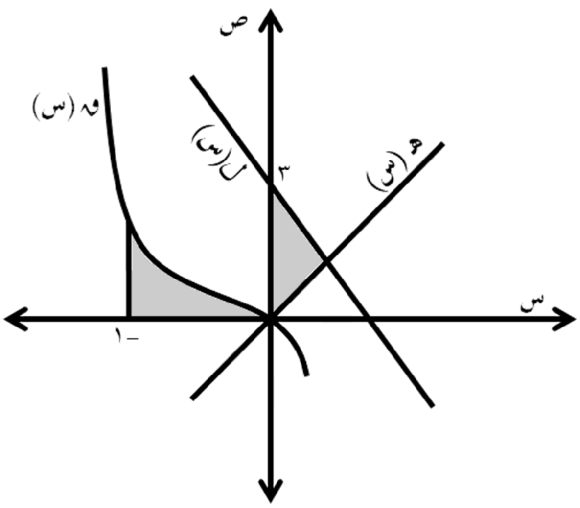
قً(س) = ٤ ، $\int_{٠}^{١}$ قَ(س) دس = ٤ ، فجد قاعدة

الاقتران ق(س)

④ جد مجموع مساحتي المنطقتين م١ ، م٢ المظللتين في الشكل

حيث أن : ق(س) = $-س^{٣}$ ، هـ(س) = س ،

ل(س) = ٣ − ٢س



وزارة ٢٠١١ صيفي

① جد التكاملات التالية :

(١) $\int قا^{٢}\sqrt{س}\ دس$

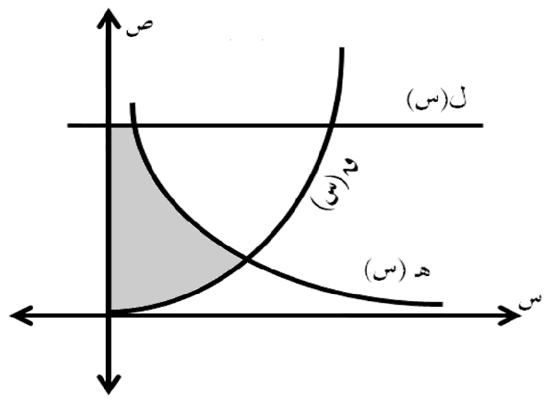
(٢) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{٠}$ جا^{2}س جتا^{2}س دس

(٣) $\int \frac{٤}{س^{٣} + س}$ دس

② إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة **ص** عند النقطة (س ، ص) يساوي $\frac{هـ^{س}}{١ - جتا^{٢}س}$ ، فجد قاعدة العلاقة **ص** علما بأن منحناها يمر بالنقطة $(\frac{\pi}{٤} ، ٠)$

③ جد مساحة المنطقة المظللة بالشكل المجاور حيث

ق(س) = س^{2} ، هـ(س) = $\frac{١}{س^{٢}}$ ، ل (س) = ٤



وزارة ٢٠١٢ شتوي

① جد التكاملات التالية :

(١) $\int \frac{(س + ١)^{٥}}{س^{٧}}$ دس

(٢) $\int \frac{س جتاس}{جا^{٣}س}$ دس

(٣) $\int \frac{س^{٢} - ١}{س^{٢} + ٢س}$ دس

$\frac{\pi}{٢}$

② يسير جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة **ت = أ ع**$^{\frac{١}{٣}}$ ، ع > ٠ ، حيث **ت** تسارع الجسيم ، ع سرعة الجسيم. إذا تحرك الجسيم من السكون ، فجد قيمة الثابت أ التي تجعل سرعته ٨ سم/ث بعد ٣ ثوان من بدء حركته

③ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات الثلاثة :

ق(س) = −س^{٣} ، هـ(س) = $\frac{١}{٢}$ س، ل(س) = ٦ − س

وزارة ٢٠١٢ صيفي

① جد التكاملات التالية :

(١) $\int \frac{س}{جتا٢س + ١}$ دس

(٢) $\int_{-١}^{٤} \frac{س}{\sqrt{س + ٥}}$ دس

(٣) $\int \frac{هـ^{س}}{هـ^{٢س} - ٤}$ دس

② إذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة عند (س ، ص) يساوي **٢س ص** ، فجد قيمة (قيم) **ص** عندما **س = ٣** ، علما بأن منحنى العلاقة يمر بالنقطة (٢ ، ١)

③ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات الثلاثة :

ق(س) = س^{٣} ، هـ(س) = س^{٢} + ٤ ، ل(س) = −٤س

وزارة ٢٠١٣ شتوي

① جد التكاملات التالية :

(١) $\int$ جا٢س جتاس دس

(٢) $\int$ س^{٥} هـ$^{س^{٣}}$ دس

(٣) $\int \frac{س^{٢}}{س^{٢} - ٤}$ دس

② إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة ص عند النقطة (س ، ص) يساوي $\frac{١}{س\sqrt{٣ + لو_{هـ} س}}$ ، س > ٠ ، فجد قاعدة العلاقة ص

علما بأن منحناها يمر بالنقطة (هـ ، ٤) ، هـ العدد النيبيري

③ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات الثلاثة :

ق(س)= س^{٢} − ١ ، هـ(س)= ١ − س ، ل(س)= ٤

④ إذا كان ص = ٤$^{ق(س)}$ وكان ق(س) قابل للاشتقاق ، فأثبت

أن : $\frac{دص}{دس}$ = ٤$^{ق(س)}$ × لو$_{هـ}$ ٤ × قَ(س)

وزارة ٢٠١٣ صيفي

① قذفت كرة من قمة برج ارتفاعه (٤٥) مترا عن سطح الأرض إلى أعلى بسرعة ابتدائية مقدارها (٤٠) م/ث وبتسارع مقداره (−١٠) م/ث^{٢} . جد الزمن الذي استغرقته الكرة لتعود إلى سطح الأرض

② جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = جتا(π س) ومحور السينات بالفترة [٠ ، ٢]

③ إذا كان ص = $\sqrt{١ + هـ^{س}}$ ، فجد $\frac{دص}{دس}$ عندما س = صفر

④ إذا كان ق كثير حدود من الدرجة الثانية ، وكان ق(٠) = ق(١) = صفر ، $\int_{٠}^{١}$ ق(س) دس = ١ ، فجد قاعدة الاقتران ق

⑤ إذا كان $\int_{١}^{٣}$ (٣س^{٢} − ٢ $\int_{٠}^{ج}$ ٣م دم) دس = − ٢٠ ، فجد قيم الثابت ج

⑥ جد التكاملات التالية :

(١) $\int$ قا^{٤}(٣س) ظا^{٣}(٣س) دس

(٢) $\int$ س^{٢} لو$_{هـ}^{س}$ دس

(٣) $\int \frac{س^{٥} + ٢}{س^{٢} - ١}$ دس

وزارة ٢٠١٤ شتوي

① إذا كان قً(س) = جاس ، قَ(π) = −١ ، ق(π) = صفر ، فجد قاعدة الاقتران ق(س)

② جد التكاملات الآتية :

(١) $\int$ (ظاس + قاس)^{٢} دس

(٢) $\int \frac{دس}{س^{٢} - ٥س + ٦}$

③ تحركت كرة من السكون على خط مستقيم بتسارع مقداره ($\frac{٢}{\sqrt{ن}}$ + ن) م/ث^{٢} ، حيث ن الزمن بالثواني ، فإذا علمت أن سرعة الكرة (٥٠) م/ث عندما ن = ٩ ثانية ، وأن الكرة قطعت مسافة مقدارها (٢٢) مترا بعد (٤) ثواني من بدء الحركة. جد المسافة التي قطعتها الكرة بعد (٩) ثواني من بدء حركتها

④ جد التكاملات الآتية :

(١) $\int \frac{١}{١ + هـ^{س}}$ دس (حيث هـ : العدد النيبيري)

(٢) $\int_{٠}^{٢} (س^{٢} - |س - ١|)$ دس

⑤ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات الآتية :

ق(س) = $س^{٢}$ ، هـ(س) = ٤س ، ل(س) = ١٦

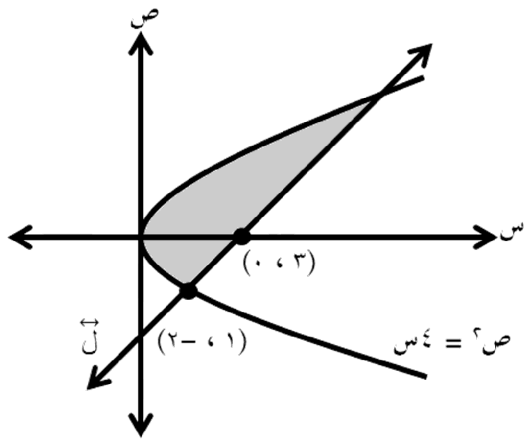
⑥ جد التكاملات الآتية :

(١) $\int$ ظتاس $لو_{هـ}^{(جاس)}$ دس (حيث هـ : العدد النيبيري)

(٢) $\int$ س جتا$\sqrt{س^{٢} + ١}$ دس

وزارة ٢٠١٤ صيفي

① جد مساحة المنطقة المظللة المحصورة بين منحنى العلاقة $ص^{٢} = ٤س$ ، والمستقيم $\overleftrightarrow{ل}$ ،انظر الشكل



② جد التكاملات الآتية :

(١) $\int \frac{-س}{(س + ١) + \sqrt{س + ١}}$ دس

(٢) $\int \frac{س + جاس}{١ + جتاس}$ دس

③ يتحرك جسيم على خط مستقيم وفق العلاقة ت = $\sqrt{ع}$ ، ع > صفر ، ت : تسارع الجسيم ، ع : سرعة الجسيم ، فإذا علمت أن السرعة الابتدائية للجسيم (٩) م/ث ، وقطع مسافة (٨٠) مترا في (٤) ثوان ، فجد المسافة التي قطعها بعد ثانيتين من بدء حركته

④ إذا كان $\int_{٢}^{ب} [\frac{١}{٢}س + ٣]$ دس = ٢٤ ، ب > ٢ ، فجد قيمة الثابت ب

⑤ إذا كان ق″(س) = جاس + $هـ^{٢س}$ ، وكان ق(٠) = $\frac{١}{٤}$ ، ق′(٠) = $\frac{١}{٢}$ ، فجد قاعدة الاقتران ق(س)

⑥ جد التكاملات الآتية :

(١) $\int \frac{هـ^{س}}{هـ^{س} + هـ^{-س}}$ دس (حيث هـ : العدد النيبيري)

(٢) $\int \frac{س - ١٣}{٢س^{٢} - ٧س + ٣}$ دس

⑦ إذا كان

$\int$ (ق′(س) − س) دس = $لو_{هـ}|قاس + ظتاس|$ − ٢

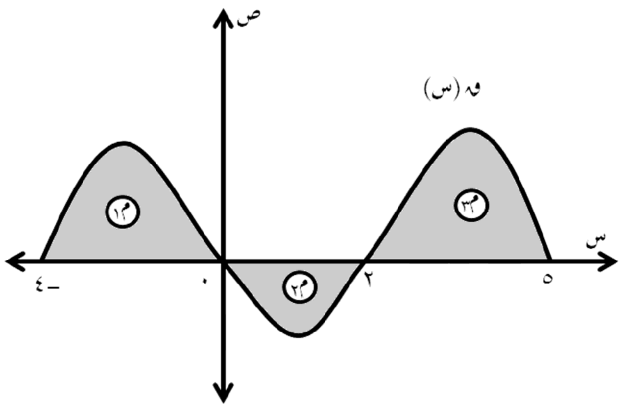
، فأثبت أن ق′(س) = س − قتاس

وزارة ٢٠١٥ شتوي

① معتمدا الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران ق إذا كانت $م_{١}$ = ٧ وحدات مربعة ، $م_{٢}$ = ٤ وحدات مربعة ، $م_{٣}$ = ٥ وحدات مربعة ، جد ما يأتي :

١) $\int_{٢}^{-٤} \frac{ق(س)}{٢}$ دس

٢) المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ق ومحور السينات في الفترة [−٤ ، ٥]



② جد التكاملات الآتية :

(١) $\int \frac{٥جا^{٢}س + ٥جتا^{٢}س}{٣ + ٣جتا٢س} \, دس$

(٢) $\int \frac{(٢ - س)^{٣}}{س^{٢}} \, دس$

③ جد مساحة المنطقة الواقعة في الربع الأول والمحصورة بين منحنى الاقتران $ق(س) = \frac{١}{س}$ ومحور السينات والمستقيم $٢س - ص = صفر$ ، والمستقيم $هـ - س = صفر$ ، (هـ : العدد النيبيري)

④ حل المعادلة التفاضلية : $\frac{ءص}{ءس} = \sqrt[٣]{\frac{ص}{س}}$

⑤ جد التكاملات التالية :

(١) $\int \frac{٢ - \sqrt[٣]{س}}{٩ - \sqrt[٣]{س^{٢}}} \, دس$

(٢) $\int_{٢}^{٥} هـ^{١ + \sqrt{س - ١}} \, دس$

⑥ إذا كان $\int_{٩}^{٢} (٢ق(س) + ٣) دس = -١٧$ ، $\int_{٢}^{٥} \frac{ق(س)}{٢} دس = -٢$ ، فجد $\int_{٥}^{٩} (٤ق(س) - ١) دس$

⑦ إذا كان $هـ^{س ص} = س - ص$ ، فأثبت أن

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ص^{٢} - س ص + ١}{س^{٢} - س ص + ١}$$

⑧ إذا كان

$$\int (قَ(س) + س^{٢}) دس = ٢س^{٣} + جـ س^{٢} + ٢$$

، وكان $قَ(١) = ٤$ ، $ق(٢) = ٦$ ، فجد $ق(-١)$

وزارة ٢٠١٥ صيفي

① إذا كان $ق(س) = \int \frac{هـ^{س}}{\sqrt{لو_{هـ}(س + ٢)}} \, دس$ ، فجد $قً(٠)$

② جد التكاملات التالية :

(أ) $\int_{٠}^{٤} \frac{س^{٣}}{\sqrt{(س^{٤} + ٩)^{٣}}} \, دس$

(ب) $\int \frac{جتا٣س}{جتاس} \, دس$

③ يزداد عدد سكان مدينة ما حسب العلاقة $\frac{دع}{دن} = ٠,٠٢٥ع$ ، حيث ع عدد السكان ، ن الزمن بالسنوات ، إذا علمت أن عدد سكان المدينة عام (٢٠١٥) بلغ (٢٠٠٠٠٠) نسمة ، فجد عدد سكانها بعد ٤٠ سنة

④ دون حساب قيمة التكامل $\int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٣\text{جتا}^{٢}\text{س} + ٢}$ دس ، بين أن $\frac{\pi}{٥} \le \int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٣\text{جتا}^{٢}\text{س} + ٢}\,\text{دس} \le \frac{\pi}{٢}$

⑤ إذا كان م(س) ، هـ(س) اقترانين بدائيين للاقتران ق(س) وكان

$\int_{-١}^{٣} (\text{م}(\text{س}) - \text{هـ}(\text{س}))\,\text{دس} = ١٢$ ، فجد

$\int_{٠}^{٤} ٢\text{س}\,\text{م}(\text{س})\,\text{دس} - \int_{٤}^{٠} ٢\text{س}\,\text{هـ}(\text{س})\,\text{دس}$

⑥ جد التكاملات التالية :

(أ) $\int \frac{٢\text{س} + ٣\text{ظاس}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}\,\text{دس}$

(ب) $\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{٢\text{هـ}^{٢\text{س}} - ٥\text{هـ}^{\text{س}} + ٢}\,\text{دس}$

⑦ جد مساحة المنطقة الواقعة في الربع الثاني والمحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س) = $\text{س}^{٢}$ ، هـ(س) = $\text{س}^{٢} - ٢\text{س}$ ، والمستقيم ص = ٢ − س

وزارة ٢٠١٦ شتوي

① إذا كان ق(س) = $\int (\text{هـ}^{\text{جتا}٢\text{س}} + \text{جا}٢\text{س})\,\text{دس}$، هـ العدد النيبيري ، جد قَ$\left(\frac{\pi}{٤}\right)$

② جد التكاملات التالية :

(أ) $\int \frac{١}{١ + \text{هـ}^{\text{س}}}\,\text{دس}$

(ب) $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\pi} \sqrt{\text{جتا}^{٢}\text{س} + \tfrac{١}{٢}\text{جا}٢\text{س}\,\text{جتاس}}\,\text{دس}$

③ إذا كان تسارع جسيم يعطى بالعلاقة ت(ن) = ٣ن + ٢ ، وعلمت أن سرعته الابتدائية (٦) م/ث ، والمسافة التي يقطعها بعد ثانية واحدة من بدء الحركة (١٢)م ، فما المسافة التي يقطعها بعد (٣) ثوان من بدء الحركة ؟

④ إذا علمت أن $\text{م} \le \int_{١}^{٣} \frac{١}{\sqrt{٢\text{س}^{٢} + ٧}}\,\text{دس} \le \text{ك}$ ، فجد قيمة كل من الثابتين م ، ك بدون حساب تكامل المقدار $\int_{١}^{٣} \frac{١}{\sqrt{٢\text{س}^{٢} + ٧}}\,\text{دس}$

⑤ إذا كان $\int_{-١}^{٢} (٣\text{ق}(\text{س}) + ٢\text{س} - ٤)\,\text{دس} = -٣$ ، $\int_{٣}^{٢} (\text{ق}(\text{س} + ١) - ٣\text{س}^{٢})\,\text{دس} = ٢٧$، فجد $\int_{-١}^{٤} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$

⑥ جد التكاملات التالية :

(أ) $\int \frac{\sqrt{١ + \text{س}} - \sqrt{١ - \text{س}}}{\sqrt{١ + \text{س}} + \sqrt{١ - \text{س}}}\,\text{دس}$

(ب) $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٣}} ٣\text{قا}^{٤}\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}^{\text{ظاس}}\,\text{دس}$

⑦ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س) = ١ + جاس ، هـ(س) = ١ + جتاس ، في الفترة $[\frac{\pi}{٢} ، \frac{٣\pi}{٢}]$

وزارة ٢٠١٦ صيفي

① إذا كان

$\int ٢\text{قَ}(\text{س})\,\text{دس} = ٢\text{س} + \text{جاس} - \int \text{جتاس}\,\text{قَ}(\text{س})\,\text{دس}$ ، فجد قَ(٠)

② إذا كان ق(س) = $\begin{cases} |\text{هـ}^{\text{س}} - ١| ، & -١ < \text{س} \le ١ \\ [٣ - \text{س}] ، & ١ < \text{س} \le ٢ \end{cases}$

فجد $\int_{-١}^{٢} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$

③ إذا علمت أن $\int_{1}^{هـ} س^{٤}\, لو_{هـ} س \; دس = \frac{٤هـ^{٥} + ١}{٢٥}$ ، فجد $\int_{1}^{هـ} س^{٤} \left(لو_{هـ} س\right)^{٢} \; دس$

④ ابتدأ جسيم الحركة من نقطة الأصل على محور السينات وفق العلاقة $ت = -٤ع^{\frac{٣}{٢}}$ ، $ع > ٠$ حيث ت : تسارع الجسيم ، ع : سرعة الجسيم ، فإذا كانت سرعته عند بدء الحركة ٤ سم/ث. أثبت أن $ف = ٢٨\sqrt{ع}$

⑤ إذا علمت أن $م \leq \int_{ب}^{أ} \sqrt{س^{٤} + ٩}\; دس \leq ك$ فجد قيمة كل من الثابتين م ، ك دون حساب قيمة التكامل للمقدار $\int_{1}^{أ} \sqrt{س^{٤} + ٤}\; دس$

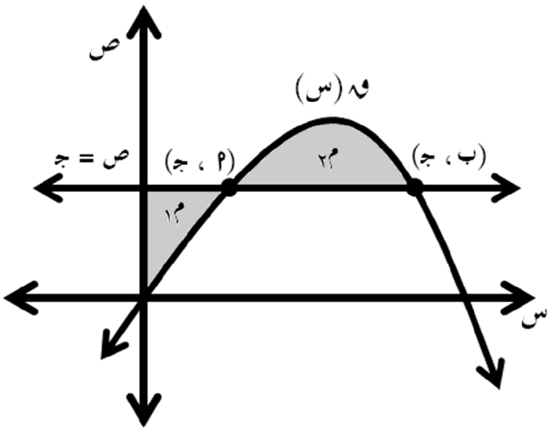
⑥ إذا كان $\int_{ب}^{٣} ق(س)\, دس = ٤$ ، $\int_{ب}^{٣} (أ ق(٣ - س) + ٦س + ١)\, دس = ٤٢$ ، فجد قيمة الثابت أ

⑦ جد التكاملات الآتية :

$$(١)\ \int \frac{لو_{هـ} ظاس}{جا٢س}\, دس$$

$$(٢)\ \int \frac{دس}{س - \sqrt{س - ٢}}$$

⑧ رُسم المستقيم ص = جـ فقطع منحنى $ق(س) = ٢س - ٣س^{٣}$ في النقطتين (أ ، جـ) ، (ب ، جـ) حيث أ ، ب ، جـ أعداد حقيقية ، مكونا المنطقتين م١ ، م٢ كما في الشكل الآتي ، جد قيمة جـ التي تجعل مساحتي المنطقتين م١ ، م٢ متساويتين



وزارة ٢٠١٧ شتوي

① إذا كان $س\, ق(س) - \int ٣س\, ق(س)\, دس = \int قَ(س)\, دس$ وكان ق(٢) = ٤ ، فجد قَ(٢)

② إذا كان $ق(س) = \begin{cases} [س - ٥]\,|س - ١| &، ٠ \leq س < ٢ \\ \frac{٣}{\sqrt{س + ١}} &، ٢ \leq س \leq ٤ \end{cases}$

فجد $\int_{ب}^{٤} ق(س)\, دس$

③ جد $\int جا^{٣}س\; لو_{هـ}(١ + جتاس)\; دس$

④ حل المعادلة التفاضلية الآتية :

$$\frac{دص}{دس} = \frac{٣س ص - ص - ١٢س + ٤}{ص^{٢} - ١٦}$$

⑤ إذا كان $ص = \sqrt{هـ^{٢س} + لو_{هـ}(س + ١)}$ فجد $\frac{دص}{دس}$ عندما س = صفر

⑥ إذا كان م(س) = س هـ^س + هـ^س ، اقتران بدائي للاقتران ق(س) = س هـ^س وكان

$$\int_{ب}^{٢} (٤ق(س) + هـ^{٢})\, دس + \int_{٤}^{هـ^{٢}} \frac{أ}{هـ + ٢}\, دس = ٢٨$$

فجد قيمة الثابت أ

⑦ جد التكاملات الآتية :

(١) $\int_{١}^{٢}$ س^٤ $\sqrt{\left(\frac{٢ - س}{س^٢}\right)^{٣}}$ دس

(٢) $\int \frac{\text{قاس ظاس}}{٨ - \text{ظا}^{٢}\text{س}}$ دس

⑧ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات :

ق(س) = س^٢ ، هـ(س) = $\sqrt{٨\text{س}}$ ، ل(س) = س + ٦ ومحور الصادات

وزارة ٢٠١٧ صيفي

① إذا كان $\int$ ٩ قَ(س) دس = لوهـ $|٤\text{س} - ٢|$ + $\int$ ٢هـ^س قَ(س) دس

وكان قَ(٠) = ٢ ، فجد قيمة الثابت ٩

② جد التكاملات الآتية :

(١) $\int \frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٦} + \text{س}^{٣}}$ دس ، س > ٠

(٢) $\int_{١}^{٣} \frac{(\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٩)^{\frac{٧}{٢}}}{\text{س}^{٩}}$ دس

③ يسير جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة : ت = ع + ١ ، ع > ٠ ، حيث ت : تسارع الجسيم ، ع : سرعة الجسيم ، إذا تحرك الجسيم من السكون فقطع مسافة مقدارها (٦) م بعد (٣) ثوان من حركته ، فجد المسافة التي قطعها بعد (٩) ثوان من حركته

④ جد التكاملات الآتية :

(١) $\int_{٠}^{٢}$ |هـ^{٢س - ١} - هـ| دس

(٢) $\int_{١}^{٦}$ ([$\frac{١}{٣}$س] - ٢) دس

⑤ إذا كان $\int_{٠}^{\pi} \frac{\text{جتاس}}{(\text{س} + ٢)^{٢}}$ دس = ٩ ، ٩ : ثابت ، فجد بدلالة ٩ قيمة $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جا٢س}}{\text{س} + ١}$ دس

⑥ إذا كان ص = $\sqrt{\text{هـ}^{٩\text{س}}}$ ، وكان صً + ٤صَ + ٤ص = ٠ ، فجد قيمة الثابت ٩

⑦ استخدم التكامل في إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات :

ق(س) = ٤ - س^٢ ، هـ(س) = س + ٢ ، ل(س) = ٣

وزارة ٢٠١٨ شتوي

① جد التكاملات الآتية :

(١) $\int$ (س + ٢)^٣ جا(س^٢ + ٤س + ٣) دس

(٢) $\int \frac{\text{س}^{٢} + ١}{\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢}$ دس

② إذا علمت أن م ≤ $\int_{٠}^{٢} \frac{١}{\sqrt{\text{س}^{٣} + ١}}$ دس ≤ ك ، بدون حساب قيمة التكامل $\int_{٠}^{٢} \frac{١}{\sqrt{\text{س}^{٣} + ١}}$ دس ، جد قيم كل من الثابتين م ، ك

③ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات الثلاث الآتية :

ق(س) = ٢س ، هـ(س) = س^٢ ، ل(س) = ٤

④ تحرك جسيم من السكون على خط مستقيم وفق العلاقة : ت = ٢$\sqrt[٣]{\text{ع}}$ ، حيث ت : تسارع الجسيم ، ع : سرعة الجسيم .فجد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد (٣) ثواني من بدء الحركة

⑤ جد قيمة $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٨}}$ ظا^٤(٢س) دس

⑥ حل المعادلة التفاضلية : $\sqrt{ص}\,\frac{دس}{دص}$ = قا²($\frac{١}{٤}$س) ، علما بأن ص = ١ عندما س = ٠

أسئلة الوزارة (ضع دائرة)

وزارة ١٩٩٧ الورقة الثانية

وزارة ١٩٩٨ الورقة الثانية

(١) إذا كان ق(س) = [٢ − س] فإن $\int_{٣}^{٥}$ ق(س) دس يساوي :

ه

(أ) −٦ (ب) −٥ (ج) −٤ (د) −٣

(٢) إذا كان $\int_{١}^{٣}$ ق(س) دس = ٤ ، فإن قيمة

$\int_{٠}^{٢}$ (ق(س + ١) − ٢س + ٣) دس يساوي :

(أ) ١٤ (ب) ٧ (ج) ٦ (د) ٣

وزارة ١٩٩٩ الورقة الثانية

(١) ما قيمة $\int_{١}^{ه}$ ٢س² ه^(لوه س) دس حيث ه العدد النيبيري ؟

(أ) $\frac{١}{٢}$(ه³ − ١) (ب) $\frac{١}{٢}$(ه³ + ١) (ج) $\frac{١}{٢}$

(ه⁴ − ١) (د) $\frac{١}{٢}$(ه⁴ + ١)

(٢) إذا كان ق اقترانا قابلا للاشتقاق على ح، وكان ق(٩) = ٨ ،

ق(٤) = ٣ فما قيمة $\int_{٢}^{٣}$ ٢س قَ(س²)دس :

(أ) ٥ (ب) ١٠ (ج) ١١ (د) ٢٢

وزارة ٢٠٠٠ الورقة الثانية (١)

(١) قيمة $\int_{١}^{٣}$ |٢س − ١| دس تساوي :

(أ) −٢ (ب) −٦ (ج) ٢ (د) ٦

(٢) إذا كان $\sqrt{١ - س^٢}$ قابلا للتكامل على الفترة [−١ ، ١] فإن

أكبر قيمة للمقدار $\int_{-١}^{١} \sqrt{١ - س^٢}$ دس هي:

(أ) صفر (ب) ٢ (ج) −٢ (د) ١

(٣) $\frac{د}{دس}\int_{١}$ لو$_{ه}^{س}$ دس تساوي :

(أ) $\frac{١}{ه}$ (ب) $\frac{١}{ه}$ − ١ (ج) صفر (د) ١

وزارة ٢٠٠٠ الورقة الثانية (٢)

إذا كان ق اقترانا محدودا على [٠ ، ٣]، وكان ١ ≤ ق(س) ≤ ٣

، فجد (م ، ن) حيث م ≤ $\int_{٠}^{٣}$ ق(س) دس ≤ ن:

(أ) (٣ ، ٩) (ب) (١ ، ٣)

(ج) (٠ ، ٩) (د) (١ ، ٩)

وزارة ٢٠٠١ الورقة الثانية (١)

إذا كان ق (س) اقترانا متصلا على ح وكان :

$\int_{أ}^{ب}$ ق(س) دس − $\int_{٥}^{٣}$ ق(س) دس = $\int_{٣}^{١}$ ق(س) دس فإن قيمة كل من

أ ، ب على الترتيب يساوي :

(أ) ٥ ، ١ (ب) ١ ، ٥

(ج) ١ ، ٣ (د) ٣ ، ٥

وزارة ٢٠٠١ الورقة الثانية (٢)

(١) إذا $\int_{٢}^{٦}$ ٣ق(س) دس = ١٨ ، $\int_{٢}^{٥}$ ق(س) دس = ٢ ، فما قيمة $\int_{٦}^{٥}$ ق(س) دس ؟

(أ) ١٦ (ب) ٤ (ج) −١٦ (د) −٤

(٢) ما قيمة $\int^{٢ن}$ $\left[\frac{س}{ن}\right]$ دس ، حيث ن عدد طبيعي ، [ ] اقتران أكبر عدد صحيح ؟

(أ) ١ (ب) ٢ن (ج) ن (د) ٢

(٣) $\int_{\pi}^{\frac{٣\pi}{٢}}$ |جا س| دس =

(أ) −١ (ب) صفر (ج) ١ (د) $\frac{\pi}{٢}$

وزارة ٢٠٠٣ الورقة الثانية

(١) إذا كان ق(س) = $\sqrt{٤ - س^{٢}}$ متصلا على [−٢ ، ١]

وكان م ≤ $\int_{-٢}^{١}$ ق(س) دس ≤ ن فإن قيم م ، ن على الترتيب هي:

(أ) −٢ ، ٢ (ب) صفر ، ٢

(ج) −٢ ، صفر (د) صفر ، ٨

(٢) إذا كان $\int_{-١}^{٣}$ ق(س) دس = ٤ ، $\int_{٢}^{٣}$ ٢ق(س) دس = −٨ ، فما قيمة $\int_{-١}^{٢}$ ق(س) دس :

(أ) ٨ (ب) صفر (ج) −١٢ (د) ١٢

(٣) $\int$(٣ + ظا^{٢}س) دس =

(أ) ٣س+ قاس + جـ (ب) ٤س+ ظاس + جـ

(ج) ٣س+ ظاس + جـ (د) ٢س+ ظاس + جـ

وزارة ٢٠٠٤ الورقة الثانية

(١) جد قيمة $\int_{١}^{٤}$ [½ س] دس =

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ٣ (د) ٢

(٢) إذا كان ق اقترانا محدودا على الفترة [−١ ، ٣] ، وكان : ٢ ≤ ق (س) ≤ ٣ ، فجد العددين م ، ن حيث : م ≤ $\int_{-١}^{٣}$ ق(س) دس ≤ ن:

(أ) ٢ ، ٩ (ب) −٢ ، ٩

(ج) ٤ ، ٩ (د) ٨ ، ١٢

وزارة ٢٠٠٥ شتوي

(١) $\int_{١}^{٤}$ |٦ − ٢س| دس =

(أ) ٤ (ب) ٨ (ج) ١٠ (د) ١٦

(٢) إذا كان ق(س) = هـ^{جاس} + لو$_{هـ}$(٥س + ١)^{٢} فإن قَ(صفر) =

(أ) ١١ (ب) ١٠ (ج) ٥ (د) ٣

وزارة ٢٠٠٦ شتوي

(١) إذا كان ق قابلا للتكامل على فترة تحتوي لها الأعداد ٩ ، ب ، جـ

فإن : $\int_{٩}^{جـ}$ ق(س) دس $-$ $\int_{٩}^{ب}$ ق(س) دس يساوي :

(٩) $\int_{ب-٩}^{جـ-٩}$ ق(س)   (ب) $\int_{جـ}^{ب}$ ق(س)

$\frac{\pi}{٤}$ $\frac{٣\pi}{٤}$

(جـ) $\int_{ب}^{ب-جـ}$ ق(س)   (د) $\int_{ب}^{جـ}$ ق(س)

$\frac{\pi}{٤}$ $\frac{٣\pi}{٤}$

(٢) $\int_{٠}^{١}$ هـ^{٢س} دس =

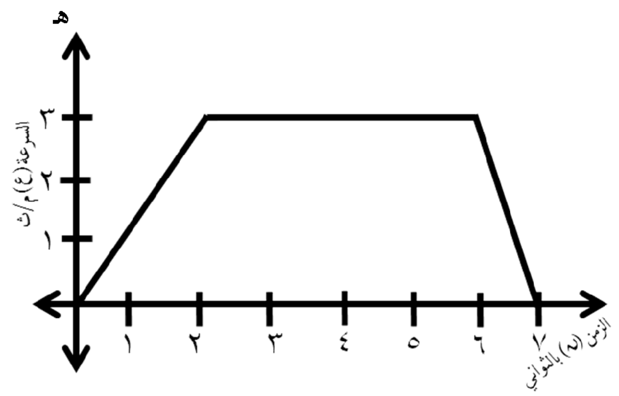
(٩) ٢(هـ^{٢} $-$ ١)   (ب) هـ^{٢} $-$ ١

(جـ) $\frac{١}{٢}$(هـ^{٢} $-$ ١)   (د) $\frac{١}{٢}$ هـ^{٢}

(٣) يمثل الشكل المرسوم العلاقة بين السرعة والزمن لجسم يتحرك على خط مستقيم ، جد المسافة المقطوعة في الفترة الزمنية [٠ ، ٧]

(٩) ١٦٥م   (ب) ٢١٠م

(جـ) ١٣٥م   (د) ١٠٥م



وزارة ٢٠٠٧ شتوي

(١) إذا $\int_{١}^{٥}$ هـ(س) دس = ١٤ ، $\int_{١}^{٨}$ هـ(س) دس = ٥ ، فما قيمة $\int_{٥}^{٨}$ ٢هـ(س) دس ؟

(٩) ١٨   (ب) ٣٨   (جـ) ١٤   (د) ٥٢

(٢) إذا كان ع = $\int$ قتا^{٢}س دس ، ل = $\int$ ظتا^{٢}س دس ، فإن قيمة (ع + ل) تساوي :

(٩) -١ (ب) ١   (جـ) $-\frac{\pi}{٢}$ (د) $\frac{\pi}{٢}$

وزارة ٢٠٠٧ صيفي

(١) ق قابلا للتكامل على فترة تنتمي إليها الأعداد ٩ ، ب ، جـ فإن :

$\int_{٩}^{ب}$ ق (س) دس = ٩ ، $\int_{٩}^{جـ}$ ق (س) دس = ٥ ، فما قيمة $\int_{جـ}^{ب}$ ق(س) دس ؟

(٩) -٤ (ب) ١٤   (جـ) -١٤ (د) ٤

(٢) ليكن ق(س) = س لـو$_{هـ}^{س}$ ، فما قيمة $\int_{١}^{هـ}$ قً(س) دس ؟

(٩) ١   (ب) ٢

(جـ) $\frac{هـ^{٢} - هـ - ١}{٢}$ (د) $\frac{١ - هـ}{هـ}$

وزارة ٢٠٠٨ شتوي

(١) إذا كان ق اقترانا متصلا على مجاله ، وكان $\int$ ق(س) دس = جتا^{٢}س − ٢س + جـ فإن قَ$(\frac{\pi}{٢})$ =

(أ) ٢ (ب) صفر (جـ) −٢ (د) ٣

(٢) $\int_{١}^{٤}$ [$\frac{١}{٣}$ س + ٢] دس =

(أ) ٧ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ٨,٥

(٣) $\int \frac{٢}{١ + جتا٢س}$ دس =

(أ) قاس + جـ (ب) ظاس + جـ

(جـ) − قتاس + جـ (د) −ظتاس + جـ

وزارة ٢٠٠٨ صيفي

(١) إذا كان ق اقترانا متصلا على ح ، وكان $\int$ ق(س) دس = س^{٢} − جتاس + ٢ فإن قَ(٠) =

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) صفر

(٢) $\int \frac{دس}{جتا^{٢}س − ١}$ =

(أ) −ظتاس + جـ (ب) ظاس + جـ

(جـ) ظتاس + جـ (د) −ظاس + جـ

(٣) $\int_{١}^{٣}$ [٤ − $\frac{١}{٢}$ س] دس =

(أ) ١٠ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٥

وزارة ٢٠٠٩ شتوي

(١) إذا كان ق اقترانا متصلا على مجاله ، وكان $\int$ (ظا^{٢}س − قا^{٢}س) ق(س) دس = ٣ − س^{٢} فإن قَ(س) =

(أ) −٢س (ب) ٣ − س^{٢}

(جـ) ٢س (د) س^{٢} − ٣

(٢) $\int \frac{ظاس}{جتاس}$ دس =

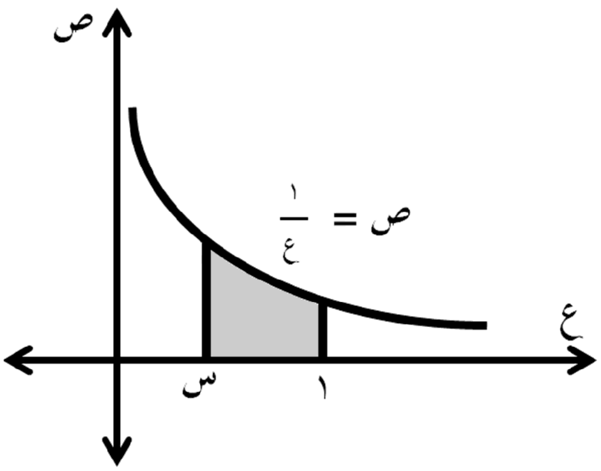
(أ) −قاس + جـ (ب) قاس + جـ

(جـ) − قتاس + جـ (د) قتاس + جـ

(٣) مساحة المنطقة المظللة المبينة في الشكل المجاور تساوي :

(أ) −لو$_{هـ}$ س (ب) لو$_{هـ}$ س

(جـ) هـ^{س} (د) −هـ^{س}



وزارة ٢٠٠٩ صيفي

(١) إذا كان ق اقترانا متصلا على مجاله ، وكان ∫ ق(س) دس = قا٢س − ظا٢س + س٢ فإن $\int_{١}^{٢}$ قَ(س) دس =

(أ) ٢   (ب) ٣   (ج) ٧   (د) ٦

(٢) ∫ (قاس / جتاس + ١ / هـ^س) دس =

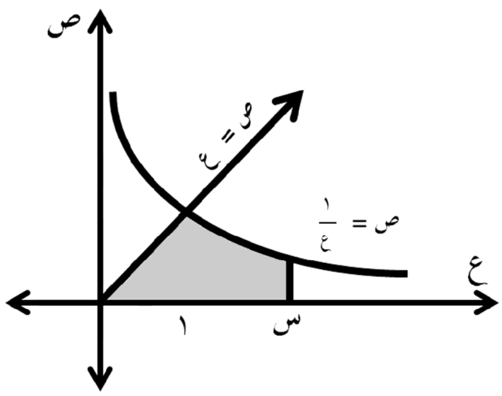
(أ) ظاس − هـ^−س + ج   (ب) −ظاس + هـ^س + ج

(ج) ظاس + هـ^س + ج   (د) س − هـ^−س + ج

(٣) مساحة المنطقة المظللة المبينة في الشكل المجاور تساوي :

(أ) ½ − لوهـ س   (ب) ½ + لوهـ س

(ج) ١ + لوهـ س   (د) −١ + لوهـ س



وزارة ٢٠١٠ شتوي

(١) إذا كان ق اقترانا متصلا على مجاله ، وكان ∫ (جا ٣π/٢) ق(س) دس = ١ + س٢ فإن ق(س) =

(أ) ٢س   (ب) ١ + س٢

(ج) −٢س   (د) −١ − س٢

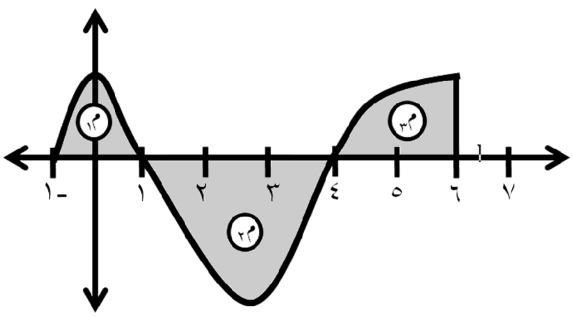
(٢) ∫ دس / (جا٢س − ١) دس =

(أ) ظاس + ج   (ب) −ظاس + ج

(ج) −ظتاس − س + ج   (د) −ظتاس + ج

(٣) إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على [−١ ، ٦] ، وكانت م١ = ٣ وحدات مربعة ، م٢ = ٤ وحدات مربعة ، م٣ = ٢ وحدة مربعة ، فإن $\int_{٦}^{-١}$ ق(س) دس =

(أ) ٩   (ب) −٩   (ج) ١   (د) −١



وزارة ٢٠١٠ صيفي

(١) إذا كانت ل ، ق ، هـ ثلاثة اقترانات متصلة بحيث لَ(س) = ق(س) ، قَ(س) = هـ(س) ، فأي العبارات الآتية صحيحة :

(أ) $\int$ لً(س) دس = هـ(س) + جـ

(ب) $\int$ هـ(س) دس = لَ(س) + جـ

(ج) $\int$ ل(س) دس = ق(س) + جـ

(د) ل(س) − هـ(س) = جـ

(٢) إذا كان $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ ق(س) دس = ٣ ، فإن

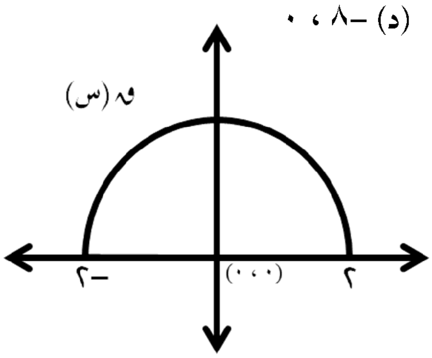
$\int_{\text{ب}}^{\text{أ}}$ ق(س) دس − $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ ق(س) دس =

(أ) −٦ (ب) صفر (ج) −٣ (د) ٦

(٣) إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى ق(س) = $\sqrt{\text{٤ − س}^{٢}}$ ، س ∈ [−٢ ، ٢] فإن العددين م ، ن حيث م ≤ $\int_{-٢}^{٢}$ ق(س) دس ≤ ن هما :

(أ) ٠ ، ٨ (ب) ٠ ، ٢

(ج) −٢ ، ٢ (د) −٨ ، ٠



(٤) إذا كان $\int_{١}^{\text{أ}}$ $\sqrt{\text{س}}$ دس = ١ ، حيث أ عدد ثابت ، فإن

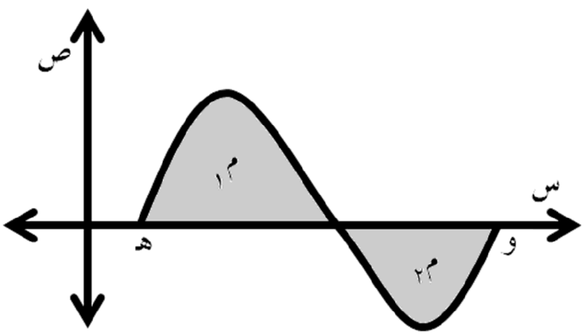
$\int_{١}^{\text{أ}} \frac{\text{٢ س}}{\sqrt{\text{س}}}$ دس =

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

وزارة ٢٠١١ شتوي

(١) إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق(س) في الفترة [هـ ، و] وكانت م$_{١}$ = ٤ وحدات مربعة ، م$_{٢}$ = ٣ وحدات مربعة ، فإن $\int_{\text{هـ}}^{\text{و}}$ ق(س) دس =

(أ) ٧ (ب) −٧ (ج) ١ (د) −١



(٢) أقل قيمة ممكنة للمقدار $\int_{-٤}^{-١}$ (س^{٢} + ١) دس هي:

(أ) ٥٤ (ب) ٦ (ج) ١٠ (د) ٢

(٣) إذا كان م(س) ، هـ(س) اقترانان بدائيان للاقتران المتصل ق(س) فإن (٢م − هـ)َ(س) =

(أ) ق(س) (ب) قَ(س) (ج) صفر (د) ٢

(٤) $\int_{٠}^{٣} (٣س^{٢} - \int_{٢}^{٢} هـ^{س} دس)\, دس =$

(م) $٢٧ - هـ^{٣}$ (ب) $٢٨ - هـ^{٣}$

(جـ) ٢٧ (د) ٢٤

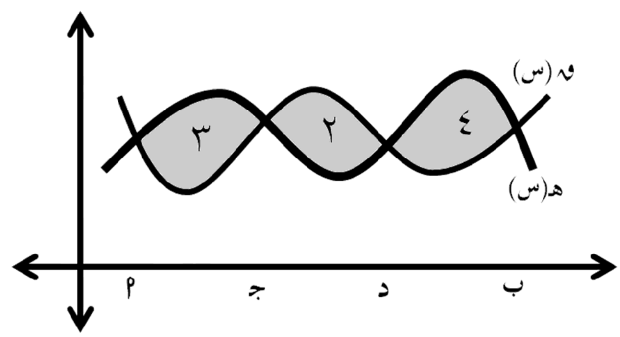
وزارة ٢٠١١ صيفي

(١) إذا كان $ق(س) = \int (\int_{٠}^{٢} ٤\, دس - ٣س^{٢})\, دس$ فإن $قَ(-١) =$

(م) -١١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) -٣

(٢) إذا كان ق ، هـ اقترانين متصلين في الفترة [م ، ب] ، وكانت مساحات المناطق بين الاقترانين كما هو مبين في الشكل المجاور ، فإن $\int_{جـ}^{ب} (ق(س) - هـ(س))\, دس =$

(م) ٦ (ب) -٢ (جـ) ٢ (د) -٥



(٣) إذا كان $\int_{١}^{٣} (٢ق(س) - ٤)\, دس = ٦$ ، وكان $\int_{٤}^{٣} ق(س)\, دس = -١$ ، فجد $\int_{١}^{٤} ق(س)\, دس$

(م) ٧ (ب) ٨ (جـ) ٥ (د) ١٥

(٤) إذا كان $ق(س) = \frac{هـ^{س} + ١}{هـ^{س}}$ ، فجد $قَ(٠)$

(م) صفر (ب) ١

(جـ) -١ (د) غير موجودة

وزارة ٢٠١٢ شتوي

(١) إذا كان ق اقترانا متصلا على ح وكان $\int (ق(س) + ٢)\, دس = س^{٣} + مس^{٢} + ٩$ ، $ق(١) = ٧$ ، فإن قيمة الثابت م تساوي :

(م) -١ (ب) ٢ (جـ) ٦ (د) ٣

(٢) إذا كان جـ > ١ ، وكان $\int_{١}^{جـ} \frac{١}{س}\, دس = -٥$ ، فما قيمة الثابت جـ ؟

(م) $هـ^{٤}$ (ب) $هـ^{٣}$ (جـ) ٤ (د) ٣

(٣) إذا كان $\int_{١}^{٣} \frac{١}{٢} ق(س)\, دس = ٢$ ، $\int_{٥}^{٣} ق(س)\, دس = -٥$ ، فإن $\int_{١}^{٥} ق(س)\, دس =$

(م) ٧ (ب) ٩ (جـ) -٣ (د) -١

(٤) إذا كان $ق(س) = هـ^{٢} + لو_{هـ} جاس$ ، فإن $قَ(س)$ تساوي :

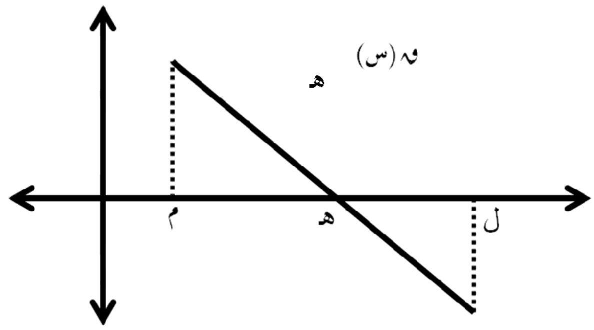
(م) ظتاس (ب) $-$ظتاس

(جـ) ٢هـ + ظتاس (د) $هـ^{٢}$ + ظتاس

(٥) في الشكل المجاور التكامل الذي يعبّر عن المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ق (س) ومحور السينات والمستقيمين س = م ، س = ل هو :

(أ) $\int_{م}^{ل}$ ق(س) دس   (ب) $\int_{م}^{ل}$ −ق(س) دس

(ج) $\int_{م}^{ل}$ |ق(س)| دس   (د) $\int_{م}^{ل}$ ٢ |ق(س)| دس



(٦) إذا كان ق (س) اقترانا قابلا للتكامل على الفترة [١ ، ٢] وكان ق (١) = ١ ، ق (٢) = ٤ ، فإن قيمة

$\int_{١}^{٢}$ ٣ قَ(س) $\sqrt{\text{ق(س)}}$ دس =

(أ) ١٤   (ب) $\frac{٦٣}{٢}$ (ج) ٧   (د) $\frac{١٤}{٣}$

وزارة ٢٠١٢ صيفي

(١) إذا كان ق (س) اقترانا متصلا ، م (س) اقترانا بدائيا للاقتران ق(س) ، وكان أ ، جـ ثابتين ، أ ≠ ٠ ، فإن $\int$ ق(أس) دس

(أ) م(أس) + جـ   (ب) $\frac{١}{أ}$ م(أس) + جـ

(ج) م(س) + جـ   (د) $\frac{١}{أ}$ م(س) + جـ

(٢) إذا كان ق (س) ≤ ٦ لجميع قيم س في الفترة [١ ، ٣] ، فإن أكبر قيمة ممكنة للمقدار $\int_{١}^{٣}$ (٢ق(س) + ١) دس

(أ) ١٢   (ب) ١٣   (ج) ٢٤   (د) ٢٦

(٣) إذا كان $\int_{-١}^{٢}$ ٣ق(س) دس = ٦ ، $\int_{٥}^{٢}$ ق(س) دس = ٨

، فإن $\int_{-١}^{٥}$ |ق(س)| دس =

(أ) −٦   (ب) ٦   (ج) ١٠   (د) ١٤

(٤) قيمة $\int_{١}^{هـ} \frac{١}{س}$ دس تساوي :

(أ) صفر   (ب) ١   (ج) ٢   (د) هـ

(٥) إذا كان ق(س) = هـ^{٢س} + لو$_{هـ}$(٣س + ١) ، س > $-\frac{١}{٣}$

، فإن قَ(٠) =

(أ) ٥   (ب) ٤   (ج) ٣   (د) ٢

(٦) $\int_{٤}^{٦} [\frac{١}{٢}$س + ١] دس =

(أ) ٦   (ب) ٤   (ج) ٢   (د) ١

وزارة ٢٠١٣ شتوي

(١) إذا كان م(س) اقتران بدائي لـ ق (س) بحيث م (س) = ظتاس + ١ ، فإن ق$(\frac{\pi}{٤})$ يساوي :

(أ) −٤   (ب) −٢   (ج) ٢   (د) ٤

(٢) إذا كان ق اقترانا قابلا للتكامل في الفترة [٠ ، ٢] وكان ق(س) $\le$ ٢ لكل س $\in$ [٠ ، ٢] ، فإن أصغر قيمة ممكنة للمقدار $\int_{٠}^{٢}$ (٣ق(س) − ١) دس هي :

(أ) ٤ (ب) ٥ (ج) ٦ (د) ١٠

(٣) إذا كان $\int_{-٢}^{١}$ (ق(س) + ١) دس = ٩ ، $\int_{٣}^{١}$ ق(س) دس = −٤ ، فإن $\int_{-٢}^{٣}$ ق(س) دس =

(أ) ٥ (ب) ٦ (ج) ١٠ (د) ١٣

(٤) $\int_{٠}^{١} \frac{هـ^{س}}{هـ^{س} + ١}$ دس =

(أ) ١ (ب) $\text{لو}_{هـ}(هـ + ١)$

(ج) $\text{لو}_{هـ}\left(\frac{هـ + ١}{٢}\right)$ (د) $\text{لو}_{هـ}(٢هـ + ٢)$

(٥) إذا كان ق(س) = $هـ^{\text{جا}^{٢}\frac{\pi}{٢}}$ + $\text{لو}_{هـ}(١ - \text{جتا}^{٢}س)$ ٢س ، $هـ^{٣}$ هـ

فإن ق′$\left(\frac{\pi}{٤}\right)$ =

(أ) $\sqrt{٢}$ (ب) ٢ (ج) $\sqrt{هـ}$ (د) $\sqrt{هـ}$ + ٢

(٦) قيمة $\int_{٠}^{١}$ [٣ − $\frac{١}{٢}$س] دس =

(أ) −٢ (ب) −١ (ج) ٢ (د) ٤

وزارة ٢٠١٣ صيفي

(١) إذا كان ق(س) = $\text{لو}_{هـ} هـ^{س^{٢}+١}$ ، فإن ق′(٢) =

(أ) ٤ (ب) صفر (ج) ٥ (د) ١

(٢) إذا كان $\int_{١}^{٥}$ ق(س) دس = ٢ ، $\int_{٧}^{٥}$ ق(س) دس = −٦ ، فإن $\int_{١}^{٧} \frac{\text{ق(س)}}{٢}$ دس تساوي :

(أ) −٤ (ب) ٤ (ج) −٢ (د) ٢

(٣) إذا كان $\int_{١}^{٣}$ ق(س) دس = ٦ ، وكان $\int_{٣}^{١}$ ل ق(س) دس = −٣ ، فإن قيمة الثابت ل هي :

(أ) −$\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (ج) −٦ (د) ٢

(٤) قيمة $\int_{٠}^{٢}$ [$\frac{١}{٢}$س + ٤] دس تساوي :

(أ) ٩ (ب) ١٤ (ج) ١٣ (د) ١٨

(٥) قيمة $\int \frac{١}{س - ١}$ دس تساوي :

(أ) $\text{لو}_{هـ}(هـ - ١)$ (ب) $\text{لو}_{هـ}(هـ^{٢} + هـ + ١)$

(ج) $\text{لو}_{هـ}(هـ^{٢} + هـ)$ (د) $\text{لو}_{هـ}(هـ^{٣} - ١)$

(٦) قيمة $\int_{٢}^{٣}$ ٣$\pi^{٢}$ دس تساوي :

(أ) $\pi^{٢}$ (ب) ٦π (ج) ٣$\pi^{٢}$ (د) صفر

(٧) إذا كان $\int$ د(س) دس = س^{٢} + ٤س − ٤ ، فإن

د̄(٢) تساوي :

(أ) ٢ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) $\frac{٥٦}{٣}$

إجابات التدريبات

الدرس الأول : قواعد التكامل غير المحدود

تدريب ١

① $\frac{٣}{٤}$ س$^{\frac{٨}{٣}}$ − $\frac{٩}{٥}$ س$^{\frac{٥}{٣}}$ + ج

② $\frac{١}{٣}$ ص^{٣} + $\frac{٥}{٢}$ ص^{٢} + ٤ص + ج

③ $\frac{٤}{٣}$ ع^{٣} − ٦ع^{٢} + ٩ع + ج

④ − س$^{-١}$ − $\frac{٣}{٢}$ س$^{-٤}$ + ج

⑤ $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + ج

⑥ أ^{٤} س + ج

⑦ $\frac{١}{٣}$ س^{٣} − س^{٢} + ٤س + ج

⑧ $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + $\frac{٢}{٥}$ س$^{\frac{٥}{٢}}$ + ج

تدريب ٢

① − $\frac{٣}{٢٨}$ (٤ − ٧س)$^{\frac{٤}{٣}}$ + ج

② $\frac{١}{٣٨}$ (١ + ٢س)^{١٩} + ج

③ − $\frac{٨}{١٥}$ (٥س − ٩)$^{-٣}$ + ج

④ − ٣(٤ − ٦س)$^{\frac{٢}{٣}}$ + ج

تدريب ٣

− $\sqrt{٢}$

تدريب ٤

① ٤ ② −٥

تدريب ٥

١٤

تدريب ٦

د(س) = س^{٢} − جاس + ٥ − $\frac{\pi^{٢}}{٤}$

تدريب ٧

٣$\sqrt{٣}$

تدريب ٨

−٢٠

تدريب ١٠

د(س) = س^{٥} + س^{٢} + ٣س − ٣٩

تدريب ١١

① $\frac{١}{١٠}$ جا١٠س + ج

② ٢س + $\frac{١}{٧}$ ظا٧س + ج

③ − $\frac{١}{٥}$ ظتا٥س − س + ج

④ – جتاس – ٣جاس + ج

⑤ س + ج

⑥ – ظتاس – قتاس + ج

⑦ $-\frac{١}{٢}$ ظتا٢س + $\frac{١}{٢}$ قتا٢س + ج

⑧ –٥ ظتاس + ج

⑨ –٤ظتاس – ٤س + ج

⑩ $\frac{١}{٢}$س + $\frac{١}{٤٠}$ جا٢٠س + ج

⑪ $\frac{٣}{٨}$ س + $\frac{١}{٤}$ جا٢س + $\frac{١}{٣٢}$ جا٤س + ج

⑫ –٢قتا٢س + ج

⑬ س – $\frac{١}{٢}$جتا٢س + ج

⑭ ٢ظاس – س + ٢قاس + ج

⑮ $\frac{١}{٨}$ س – $\frac{١}{٣٢}$ جا٤س + ج

⑯ ٢س$^{\frac{١}{٢}}$ + ج

⑰ –٢ظتاس + ج

⑱ $\frac{٥}{٣}$س^{٣} + ٣س + ٣ظتاس + ج

⑲ $\frac{١}{١٠}$ جتا٥س – $\frac{١}{٢٦}$ جتا١٣س + ج

⑳ $\frac{١}{٤}$جا٢س + $\frac{١}{٨}$جا٤س + ج

㉑ $\frac{١}{٤أ}$ جا٢أس – $\frac{١}{١٦أ}$ جا٨أس + ج

الدرس الثاني : معكوس المشتقة

تدريب ١

د(س) = س^{٤} + ظاس + ج

تدريب ٣

م(س) = $\frac{١}{س}$ + $\frac{٢}{٣}$

تدريب ٤

أ = ٢ ، ب = ٣

الدرس الثالث : التكامل المحدود

تدريب ١

$\frac{١}{٢}$

تدريب ٢

–٢ + $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$

تدريب ٣

١ ، –١

تدريب ٤

د زوجي

تدريب ٥

٢ – ٢$\sqrt{٢}$ + $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ – $\frac{\pi}{١٢}$

تدريب ٦

$م = ٤ ، ١$

تدريب ٧

$\frac{١٩٩}{١٠}$

تدريب ٨

-١٩

تدريب ٩

$-\frac{٤٠}{٣}$

تدريب ١٠

$\frac{٢٧}{٢}$

تدريب ١١

-٢١

تدريب ١٢

١) ٣٠
٢) ٦,٥
٣) ٤
٤) ٣-
٥) $\frac{٣٥}{١٢}$
٦) ٧,٧٥
٧) ١,٧٥

تدريب ١٣

$م = ٠$

تدريب ١٤

$م = ٤$

تدريب ١٥

$م = ٤$

تدريب ١٦

$\int_{١}^{٢} \frac{١}{س}\, دس$

تدريب ١٧

٢٤٦

تدريب ١٨

$م = ٩ ، ن = ٢٤$

تدريب ١٩

$م = -٤٠ ، ن = -٢٤$

الدرس الرابع : الاقتران الأسي الطبيعي (مشتقته وتكامله)

تدريب ١

$م = ١$

تدريب ٢

١

تدريب $\boxed{٤}$

① $٢\text{جاس}\ \text{هـ}^{\text{جاس}} - ٢\ \text{هـ}^{\text{جاس}} + \text{جـ}$

② $\frac{١}{٥}(\text{هـ}^{\text{س}} + ٥)^{٥} - \frac{٤}{٥}(\text{هـ}^{\text{س}} + ٥)^{٤} + \text{جـ}$

③ $\text{قاس}\ \text{هـ}^{\text{قاس}} - \text{هـ}^{\text{قاس}} + \text{جـ}$

④ $٢\sqrt{\text{س}}\ \text{هـ}^{\sqrt{\text{س}}} - ٢\ \text{هـ}^{\sqrt{\text{س}}} + \text{جـ}$

الدرس الخامس : الاقتران اللوغريتمي الطبيعي

تدريب $\boxed{١}$

صفر

تدريب $\boxed{٣}$

① $٣\ ٢^{\text{جا}٣\text{س}}\ \text{جتا}٣\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}٢$

② $(٢\text{س}^{٣} + ٦)^{\text{قاس}}\left(\frac{٦\text{س}^{٢}\ \text{قاس}}{٢\text{س}^{٣} + ٦} + \text{لو}_{\text{هـ}}(٢\text{س}^{٣} + ٦)\ \text{قاس ظاس}\right)$

تدريب $\boxed{٤}$

① $\frac{٤}{٤٥}$

② $\frac{\text{س}^{٧}}{٧} + \text{جـ}$

③ $\frac{١}{٥}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جا}٥\text{س}| + \text{جـ}$

④ $-\ \text{لو}_{\text{هـ}}|١ + \text{جتاس}| + \text{جـ}$

⑤ $-\ \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جاس} + \text{جتاس}| + \text{جـ}$

الدرس السادس : التكامل بالأجزاء

تدريب $\boxed{١}$

١

تدريب $\boxed{٢}$

$\frac{-١}{٢}(٢\text{س}-٣)^{٢}\text{جتا}(٢\text{س}+١) + (٢\text{س}-٣)\ \text{جا}(٢\text{س}+١) + \text{جتا}(٢\text{س}+١) + \text{جـ}$

تدريب $\boxed{٣}$

$(\text{س}-٢)^{٢}\ \text{جا}(\text{س}+١) + ٢(\text{س}-٢)\ \text{جتا}(\text{س}+١) - ٢\text{جا}(\text{س}+١) + \text{جـ}$

تدريب $\boxed{٤}$

$\frac{٢}{٣}\text{س}^{٢}\ \text{جا}٣\text{س} + \frac{٤}{٩}\text{س}\text{جتا}٣\text{س} - \frac{٤}{٢٧}\ \text{جا}٣\text{س} + \text{جـ}$

تدريب $\boxed{٥}$

$\frac{-١}{٤}\text{س}\ \text{جتا}٢\text{س} + \frac{١}{٨}\ \text{جا}٢\text{س} + \text{جـ}$

تدريب $\boxed{٦}$

$٣\text{س}^{٢}(\text{س} - ١)^{\frac{١}{٣}} - \frac{٩}{٢}\text{س}(\text{س} - ١)^{\frac{٤}{٣}} + \frac{٢٧}{١٤}(\text{س} - ١)^{\frac{٧}{٣}} + \text{جـ}$

تدريب $\boxed{٧}$

١٤

تدريب $\boxed{٨}$

$-\ \text{س}\ \text{جتاس} + \text{جاس} - \text{ظتاس} + \text{جـ}$

تدريب $\boxed{٩}$

$\frac{\text{س}^{٢}}{٢} - \frac{١}{٢}\text{س}\ \text{جتا}٢\text{س} + \frac{١}{٤}\ \text{جا}٢\text{س} + \text{جـ}$

تدريب $\boxed{١٠}$

$\frac{١}{٤}\text{س}\ \text{جا}٢\text{س} + \frac{١}{٨}\ \text{جتا}٢\text{س} + \text{جـ}$

تدريب ١١

① $\frac{-١}{٢}$ (س + ٥) $هـ^{-٢س}$ − $\frac{١}{٤}$ $هـ^{-٢س}$ + ج

② $\frac{١}{٨}$ س $هـ^{٨س}$ − $\frac{١}{٦٤}$ $هـ^{٨س}$ + ج

③ $\frac{١}{١٧}$ $هـ^{س}$ (٤جا٤س + جتا٤س) + ج

④ $\frac{١}{٢}$ س $لو_{هـ}$|س| − $\frac{١}{٢}$ س + ج

⑤ $\frac{١}{٢}$ $س^{٢}$ $لو_{هـ}$|س| − $\frac{١}{٤}$ $س^{٢}$ + ج

الدرس السابع : التكامل بالتعويض

تدريب ١

① $\frac{١}{١٤}$ $(س^{٢} + ٢)^{\frac{٧}{٢}}$ − $\frac{٢}{٥}$ $(س^{٢} + ٢)^{\frac{٥}{٢}}$ + $\frac{٢}{٣}$ $(س^{٢} + ٢)^{\frac{٣}{٢}}$ + ج

② $\frac{١١٩٢}{٤٥}$

③ $\frac{١}{٢٧}$ $(س^{٣} + ٢)^{٩}$ − $\frac{١}{١٢}$ $(س^{٣} + ٢)^{٨}$ + ج

④ $\frac{٤٢٠٢}{٥}$

⑤ $\frac{٣}{٢٠}$ $(٢ + ٥س)^{\frac{٤}{٣}}$ + ج

⑥ −٢$\sqrt{س}$ جتا$\sqrt{س}$ + ٢جا$\sqrt{س}$ + ج

⑦ $\frac{١}{س}$ − ظا $\frac{١}{س}$ + ج

⑧ $\frac{-٢}{٣}$ ظتا $\sqrt{س^{٣} + ٥}$ + ج

⑨ $\frac{١}{٣}$ $س^{٦}$ جا$س^{٣}$ + $\frac{٢}{٣}$ $س^{٣}$ جتا$س^{٣}$ − $\frac{٢}{٣}$ جا$س^{٣}$ + ج

⑩ $\sqrt{٢}$ − ١

⑪ $\frac{-١}{٣}$ جتا($س^{٣}$ − ٦س) + ج

⑫ $\frac{-١}{٤}$ قا(١ − ٢$س^{٢}$) + ج

⑬ $\frac{١}{٥}$ $جا^{٥}$س + ج

⑭ $\frac{١}{٢}$

⑮ $\frac{١}{٢}$ س $ظا^{٢}$س − $\frac{١}{٢}$ ظاس + $\frac{١}{٢}$ س + ج

⑯ $\frac{-١}{٤}$ $\sqrt{٢س + ١}$ $جتا^{٤}$($\sqrt{٢س + ١}$) + $\frac{٣}{٣٢}$ $\sqrt{٢س + ١}$ + $\frac{١}{١٦}$ جا(٢$\sqrt{٢س + ١}$) + $\frac{١}{١٢٨}$ جا(٤$\sqrt{٢س + ١}$) + ج

⑰ $\frac{١}{٢}$ س $ظا^{٢}$س − $\frac{١}{٢}$ ظاس + $\frac{١}{٢}$ س + ج

⑱ − $\frac{٢}{٣}$ $(\sqrt{س + ١})^{٣}$ + $\frac{١}{٢}$ $س^{٢}$ − س + ج

⑲ $\frac{١}{٥}$ $جا^{٥}$س − $\frac{٢}{٧}$ $جا^{٧}$س + $\frac{١}{٩}$ $جا^{٩}$س + ج

⑳ جاس − جتاس + $\frac{١}{٣}$ $جتا^{٣}$س + ج

㉑ $\frac{-١}{١٥}$ $(٢ - ٣س)^{٥}$ + ج

㉒ $\frac{-١}{١٠}$ $(٢ + \frac{١}{س})^{١٠}$ + ج

㉓ $\frac{١}{٥٥}$ $(س^{٥} + ١)^{١١}$ − $\frac{١}{٢٥}$ $(س^{٥} + ١)^{١٠}$ + $\frac{١}{٤٥}$ $(س^{٥} + ١)^{٩}$ + ج

㉔ $\frac{١}{٨}$ $(٢ + س^{٢})^{\frac{٤}{٣}}$ + ج

㉕ $\frac{١}{٤٩}$ $(س^{٧} - ٤)^{٧}$ + ج

㉖ $\frac{١}{٧}$ (قاس + ظاس)^{٧} + ج

㉗ $\frac{٢}{١٧}$ $(س^{٢} + س)^{١٧}$ + ج

㉘ − ٨

㉙ $\frac{-١}{٤}$ س جتا٢س + $\frac{١}{٨}$ جا٢س + ج

(٣٠) $\frac{١}{٢}\text{س}^{٢}\,\text{جاس}^{٢} + \frac{١}{٢}\,\text{جتا س}^{٢} + \text{ج}$

(٣١) $\frac{١}{٢}\text{س ظا}^{٢}\text{س} - \frac{١}{٢}\,\text{ظاس} + \frac{١}{٢}\text{س} + \text{ج}$

(٣٢) $\frac{٩}{٢٠}(٢\text{س} + ١)^{\frac{٥}{٣}} + \frac{٩}{٨}(٢\text{س} + ١)^{\frac{٢}{٣}} + \text{ج}$

(٣٣) $-٢\sqrt{\text{س}}\ \text{جتا}^{٤}\sqrt{\text{س}} + \frac{٣}{٤}\sqrt{\text{س}} - \frac{١}{٢}\,\text{جا}٢\sqrt{\text{س}} + \frac{١}{٨}\,\text{جا}٤\sqrt{\text{س}} + \text{ج}$

(٣٤) $\frac{-٢}{٣}(١ - \text{س})^{\frac{٣}{٢}} + \frac{٤}{٥}(١ - \text{س})^{\frac{٥}{٢}} - \frac{٢}{٧}(١ - \text{س})^{\frac{٧}{٢}} + \text{ج}$

(٣٥) $\frac{١}{٧}(\text{س}^{٣} + ١)^{\frac{٧}{٣}} - \frac{١}{٤}(\text{س}^{٣} + ١)^{\frac{٤}{٣}} + \text{ج}$

(٣٦) $\sqrt{١١} - \sqrt{٢}$

(٣٧) $\text{جتاس} - \frac{\text{جتا}^{٣}\text{س}}{٣} + \text{ج}$

(٣٨) $\frac{-١}{\text{س} + ٣} + \text{ج}$

(٣٩) $\frac{-١}{٢(\text{س} - ١)^{٢}} + \text{ج}$

(٤٠) $\frac{-٩}{٢}$

(٤١) $-٢\ \text{ظتا}\sqrt{\text{س}} + \text{ج}$

(٤٢) $\frac{١}{٥}\,\text{جتا}^{٥}\text{س} - \frac{\text{جتا}^{٣}\text{س}}{٣} + \text{ج}$

(٤٣) $\frac{-١}{٨}\left(\frac{١}{\text{س}} + ١\right)^{٨} + \text{ج}$

(٤٤) $\frac{٣}{١٦}(\text{س}^{٤} - ١)^{\frac{٤}{٣}} + \text{ج}$

(٤٥) صفر

(٤٦) $\frac{١}{٥}(\text{هـ}^{\text{س}} + ٥)^{٥} - \frac{٤}{٥}(\text{هـ}^{\text{س}} + ٥)^{٤} + \text{ج}$

(٤٧) $٢\,\text{جاس هـ}^{\text{جاس}} - ٢\,\text{هـ}^{\text{جاس}} + \text{ج}$

(٤٨) $\text{قاس هـ}^{\text{قاس}} - \text{هـ}^{\text{قاس}} + \text{ج}$

(٤٩) $٢\sqrt{\text{س}}\ \text{هـ}^{\sqrt{\text{س}}} - ٢\,\text{هـ}^{\sqrt{\text{س}}} + \text{ج}$

(٥٠) $\frac{\text{س}^{٣}}{٣}\text{هـ}^{\text{س}^{٣}} - \frac{١}{٣}\text{هـ}^{\text{س}^{٣}} + \text{ج}$

(٥١) ٢

(٥٢) $\frac{١}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \frac{١}{٤}\,\text{جا}\left(٢\left(\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}|\right)\right) + \text{ج}$

(٥٣) $\frac{١}{٢}\left(\text{س جا}\left(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\right) + \text{س جتا}\left(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)\right) + \text{ج}$

(٥٤) $\frac{٢}{٣}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\left|١ + \text{س}^{\frac{٣}{٢}}\right| + \text{ج}$

(٥٥) $\text{لو}_{\text{هـ}}\left|\text{هـ}^{\text{س}} - \text{هـ}^{-\text{س}}\right| + \text{ج}$

تدريب ٢

١٠

تدريب ٣

٣٦

تدريب ٤

٦

تدريب ٥

١٦

الدرس الثامن : التكامل بالكسور الجزئية

تدريب ١

(١) $-\text{لو}_{\text{هـ}}٣$

② $\text{لو}_{\text{هـ}} \left| \frac{\text{س} - ١}{\text{س} + ١} \right| + \text{جـ}$

③ $\frac{\text{س}^{٢}}{٢} - ٢\text{س} + ٢\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} + ١| + \text{جـ}$

④ $\text{س}^{٢} + ٥\text{س} + \frac{١٢٤}{٥} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} - ٤| + \frac{٦}{٥} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} + ١| + \text{جـ}$

⑤ $٢\text{س} + ٥ \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} - ١| - ٣ \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}| + \text{جـ}$

⑥ $\frac{\text{س}^{٢}}{٢} + \frac{٣١}{٦} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} - ٣| + \frac{٤٧}{٦} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} + ٣| + \text{جـ}$

⑦ $\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}^{\frac{١}{٢}} - ١| + \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}^{\frac{١}{٢}} + ١| + \text{جـ}$

⑧ $\frac{-١}{٦} \text{لو}_{\text{هـ}} |٣ - \text{ظتاس}| - \frac{١}{٦} \text{لو}_{\text{هـ}} |٣ + \text{ظتاس}| + \text{جـ}$

⑨ $\frac{١}{٣}\text{لو}_{\text{هـ}} |(٢\text{س}+١)^{\frac{١}{٢}} - ١| + \frac{٢}{٣}\text{لو}_{\text{هـ}} |(٢\text{س}+١)^{\frac{١}{٢}} + ٢| + \text{جـ}$

⑩ $٣ \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}^{\frac{١}{٣}}| - ٣ \text{لو}_{\text{هـ}} |١ + ٢\text{س}^{\frac{١}{٣}}| + \text{جـ}$

⑪ $٢ \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}^{\frac{١}{٢}} + ١| + \text{جـ}$

⑫ $\text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} + ١| + \text{جـ}$

⑬ $\frac{-١}{٧}\text{لو}_{\text{هـ}} |٥ \text{ظاس} + ٢| + \frac{١}{٧}\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{ظاس} - ١| + \text{جـ}$

⑭ $٢ + ٢ \text{لو}_{\text{هـ}} \frac{٥}{٣}$

⑮ $\text{هـ}^{\text{س}} + ٢ - ٢ \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{هـ}^{\text{س}} + ٢| + \text{جـ}$

⑯ $\frac{١}{٢} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{هـ}^{\text{س}} - ٣| - \frac{١}{٢} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{هـ}^{\text{س}} - ١| + \text{جـ}$

⑰ $\frac{١}{٢٤} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}^{٤} - ٣| - \frac{١}{٢٤} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}^{٤} + ٣| + \text{جـ}$

⑱ $٢ \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}^{\frac{١}{٢}} - ١| - \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}| + \text{جـ}$

⑲ $\text{س} + ٣ \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} - ٢| - \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}| + \text{جـ}$

⑳ $\sqrt{٩ - \text{س}^{٢}} - ٣ \text{لو}_{\text{هـ}} \left((٩ - \text{س}^{٢})^{\frac{١}{٢}} + ٣\right) + ٣\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}| + \text{جـ}$

㉑ $\frac{٣(\text{س} - ٢)\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} - ٢| - ٣\text{س}\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}|}{٢(\text{س} - ٢)} + \text{جـ}$

الدرس التاسع : حساب المساحة باستخدام التكامل

تدريب ١

١٠ وحدات مربعة

تدريب ٢

$٢\sqrt{٢}$ وحدة مربعة

تدريب ٣

$\frac{٩}{٢}$ وحدة مربعة

تدريب ٤

$\frac{٤٥}{٢}$ وحدة مربعة

تدريب ٥

$\frac{١٠٠}{٣}$ وحدة مربعة

تدريب ٦

$(١٢ - \text{لو}_{\text{هـ}} ٥)$ وحدة مربعة

تدريب ٧

$\frac{٢٠}{٣}$ وحدة مربعة

تدريب ٨

$\frac{١٧}{٦}$ وحدة مربعة

تدريب ٩

$(١ + ٢\ لو_{هـ}^{٢})$ وحدة مربعة

تدريب ١٠

$(\frac{\pi}{٢} + \sqrt{٢})$ وحدة مربعة

تدريب ١١

$\frac{٢٦}{٣}$ وحدة مربعة

تدريب ١٢

$أ = \sqrt[٣]{٤}$

تدريب ١٣

$\frac{٣}{٢}$ وحدة مربعة

تدريب ١٤

(١) $\frac{٢٨}{٣}$ وحدة مربعة

(٢) $\frac{١٦}{٣}$ وحدة مربعة

(٣) $\frac{٦٤}{٣}$ وحدة مربعة

(٤) $\frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة

(٥) $\frac{٢٣٩}{٣}$ وحدة مربعة

(٦) $(\frac{١}{٣}(٣٢\sqrt{٢} - ٢٣) + \frac{١٧}{٤})$ وحدة مربعة

(٧) $\frac{٥٩}{٣}$ وحدة مربعة

الدرس العاشر : المعادلات التفاضلية

تدريب ١

$$\frac{١}{٢}ص^{٢} - ٢ص = \frac{١}{٣}(٢س + ٧)^{\frac{٣}{٢}} + جـ$$

تدريب ٢

$$ص = \frac{٥}{٢}س + \frac{٥}{١٦}جا٨س + جـ$$

تدريب ٣

$$\frac{١}{٢}ص^{٢} = \frac{١}{٢}س - \frac{١}{٢٨}جا١٤س + جـ$$

تدريب ٤

$$\frac{١}{٢٠}(ص^{٢} + ١)^{١٠} = ٣س^{٢} + جـ$$

تدريب ٥

$$\frac{١}{٢}ص^{٢} = \frac{ظا^{٣}س}{٣} + \frac{ظا^{٥}س}{٥} + جـ$$

تدريب ٦

$$هـ^{ص} = لو_{هـ}|س| - \frac{٤}{س} + جـ$$

تدريب $\boxed{7}$

د(س) = $س^3 - 4س^2 + س$

تدريب $\boxed{8}$

ص = $-\frac{1}{2}$ جا٢س + $\frac{5}{2}$

تدريب $\boxed{9}$

د(س) = ١٤س − ٦

تدريب $\boxed{10}$

د(س) = $س^2 - 4س + 4$

تدريب $\boxed{11}$

١٢٥

تدريب $\boxed{12}$

٦٨٠٠ قدم

تدريب $\boxed{13}$

٨٤ $م^2$

تدريب $\boxed{14}$

$10 + هـ^{-2} - هـ^{-1}$

تدريب $\boxed{16}$

ش = $هـ^{75} - 29 \, لو_{هـ}^{10}$

تدريب $\boxed{17}$

٢٠٠٠٠

تدريب $\boxed{18}$

$\frac{5000}{هـ}$

تدريب $\boxed{19}$

١٩٢٠٠٠

تدريب $\boxed{20}$

١٠

تدريب $\boxed{21}$

م = $\frac{1}{25}$