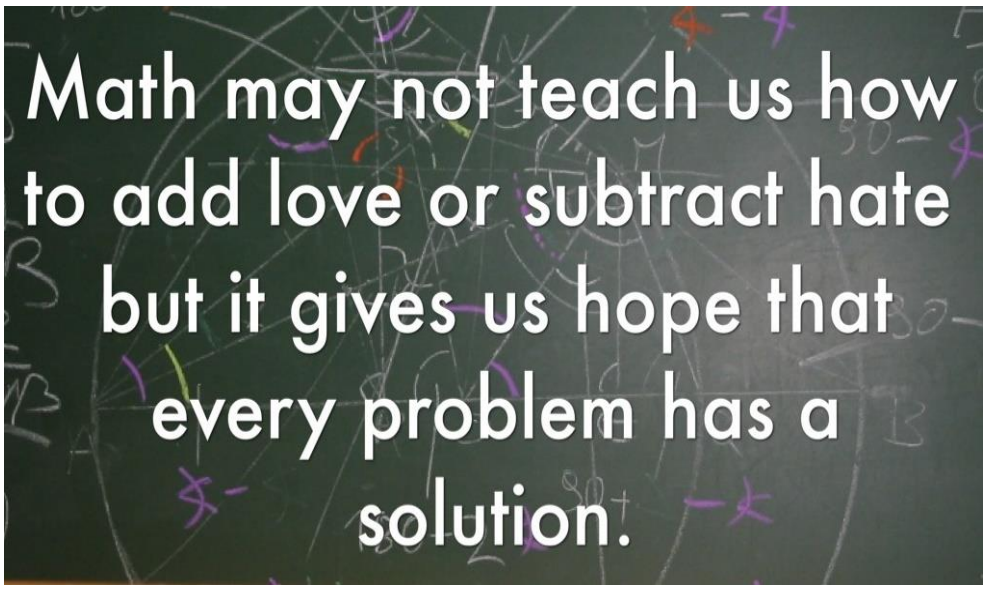
دوسية الإبداع
في الرياضيات (أدبي)

المنهاج الجديد - توجيهي (الفصل الثاني)
(نسخة ٢٠١٨)



الأستاذ فيصل السعدون

اسم الطالب / الطالبة : .....

الفهرس

الوحدة	الموضوع	الصفحة
الوحدة الأولى	أولاً : التكامل غير المحدود	٥ ـ ١٦
	ثانياً : التكامل المحدود	١٧ ـ ٢٦
	ثالثاً : خواص التكامل المحدود	٢٧ ـ ٣٩
	رابعاً : التكامل بالتعويض	٣٩ ـ ٥٧
	خامساً : تطبيقات التكامل	٥٧ ـ ٧٧
	سادساً : الاقتران اللوغاريتمي و الاقتران الأسّي	٧٧ ـ ٨٥
	سابعاً : النمو و الاضمحلال	٨٦ ـ ٨٨
الوحدة الثانية	أولاً : مبدأ العدّ	٩٠ ـ ٩٤
	ثانياً : التباديل و التوافيق	٩٥ ـ ١٠٥
	ثالثاً : المتغير العشوائي المنفصل و توزيع ذات الحدين	١٠٦ ـ ١١٨
	رابعاً : العلامة المعيارية	١١٨ـ ١٢٥
	خامساً : التوزيع الطبيعي	١٢٥ ـ ١٣٥
	سادساً : الارتباط و معامل الارتباط	١٣٦ ـ ١٤٥
	سابعاً : الانحدار	١٤٥ ـ ١٥٣

---

* ملاحظات مهمة :

١) الملاحظات الموجودة في الدوسية (في الدروس) مهمة .
٢) تحتوي الدوسية على جميع الأفكار التي وردت في الكتاب .
٣) الدوسية شاملة المادة ١٠٠% (ليست ملخص) .
٤) مستوى الأسئلة متنوع .

بسم الله الرحمن الرحيم

الوحدة الأولى

(التكامل وتطبيقاته)

مراجعة عامة (مهم جدا)

*** التحليل إلى العوامل :**

١) إخراج العامل المشترك :

$٣س^{٢} - ١٢س = ٣س (س - ٤)$ ، $٦س^{٣} + ١٨س^{٢} = ٦س^{٢} (س + ٣)$

٢) الفرق بين مربعين : القاعدة : $س^{٢} - أ^{٢} = (س - أ) (س + أ)$

$س^{٢} - ٩ = (س - ٣) (س + ٣)$

$٣٦ - س^{٢} = (٦ - س) (٦ + س)$ ، $س^{٢} - ١ = (س - ١) (س + ١)$

٣) العبارة التربيعية : القاعدة : $س^{٢} + ب س + جـ$

ملاحظة : * اذا كانت إشارة الحد الأخير (+) تكون إشارة القوسين نفس إشارة الحد الأوسط .
* اذا كانت إشارة الحد الأخير (-) تكون إشارة القوسين عكس بعض .

$س^{٢} + ٥س + ٦ = (س + ٢) (س + ٣)$

$س^{٢} - ٥س + ٦ = (س - ٢) (س - ٣)$

$س^{٢} - ٣س - ١٠ = (س - ٥) (س + ٢)$

$س^{٢} + ٢س - ١٥ = (س - ٣) (س + ٥)$

٤) فرق و جمع عددين مكعبين :

القاعدة : $س^{٣} - أ^{٣} = (س - أ) (س^{٢} + أس + أ^{٢})$
$س^{٣} + أ^{٣} = (س + أ) (س^{٢} - أس + أ^{٢})$

$س^{٣} - ٦٤ = (س - ٤) (س^{٢} + ٤س + ١٦)$

$س^{٣} - ٢٧ = (س - ٣) (س^{٢} + ٣س + ٩)$

$س^{٣} + ١ = (س + ١) (س^{٢} - س + ١)$

$س^{٣} + ٨ = (س + ٢) (س^{٢} - ٢س + ٤)$

*** ملاحظة** : تذكر أن $\sqrt[ن]{س^{م}} = س^{\frac{م}{ن}}$ ، $\frac{١}{س^{م}} = س^{-م}$, $\frac{س^{ن}}{س^{م}} = س^{ن-م}$

أ. فيصل السعدون

الدرس الأول :
التكامل غير المحدود

*** المقدمة :**

اذا كان ق (س) = س^{٣} فإن المشتقة ق ` (س) = ٣س^{٢}

و اذا اردنا إيجاد قاعدة الاقتران الذي مشتقته ٣س^{٢} فسوف نجد عدد لانهائي من الاقترانات

مثل : س^{٣} + ١ , س^{٣} + ٢ , س^{٣} + ٣ , ... الخ

سوف نلاحظ إن الفرق بين هذه الاقترانات هو عدد ثابت و نعبر عنه بـ (جـ)

و يمكن التعبير عن مجموعة الاقترانات بالصورة العامة : س^{٣} + جـ

*** الاستنتاج :** عملية إيجاد قاعدة الاقتران تسمى تكامل غير محدود و هو علاقة عكسية بينه و بين الاشتقاق .

* نرمز للتكامل غير المحدود بـ ($\int$)

* و بصورة عامة : ق (س) = $\int$ ق `(س) د س

*** مثال :**

اذا كان ق (س) = $\int$ (٣س^{٢} + ٤) د س , فجد ق ` (٢)

الحل : ق ` (س) = ٣س^{٢} + ٤

ق ` (٢) = ٣(٢)^{٢} + ٤ = ١٦

أ. فيصل السعدون

*** أسئلة :**

١) اذا كان ق (س) = $\int$ (جا س + جتا س) د س , فجد ق ´(س)

٢) اذا كان ق (س) = $\int \frac{\sqrt{س} - ٥}{س - ٢}$ د س , أوجد $\frac{ص}{س}$ عند س = ٤

٣) إذا كان (ق) اقتراناً متصلاً ، و كان $\int$ ق (س) د س = س^{٣} + ٢س ، فأوجد ق ´(س)

❖ **<u>قواعد التكامل غير المحدود :</u>**

❖ **قاعدة (١)** = $\int$ أ د س = أ س + جـ , حيث (أ) عدد حقيقي

*** أمثلة :**

١) $\int$ ٧ د س = ٧س + جـ

٢) $\int \sqrt{١١}$ دس = $\sqrt{١١}$ س + جـ

- أسئلة :

١) $\int$ - ٦ د س =

٢) $\int$ د س =

٣) $\int \frac{\text{د س}}{٤}$ =

❖ **قاعدة (٢) :** $\int$ س$^{\text{ن}}$ د س = $\frac{\text{س}^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١}$ + جـ , حيث (أ) عدد حقيقي

- أمثلة :

١) $\int$ س د س = $\frac{\text{س}^{٢}}{٢}$ + جـ ، ٢) $\int$ س^{٣} د س = $\frac{\text{س}^{٤}}{٤}$ + جـ

- أسئلة :

١) $\int$ س^{٢} د س =

٢) $\int$ س$^{-٥}$ د س =

*** تابع لقاعدة (٢) :** شرح الأسس في صفحة المراجعة رقم (٤)

*** خاصية (١) :** $\int \frac{١}{\text{س}^{\text{ن}}}$ د س = $\int$ س$^{-\text{ن}}$ = $\frac{\text{س}^{-\text{ن}+١}}{-\text{ن}+١}$ + جـ

ملاحظة : اذا كانت ن = ١ نستخدم اللوغاريتم , سيتم شرحه لاحقا في الدرس السادس...

- أمثلة :

١) $\int \frac{١}{س^{٢}}$ د س $= \int س^{-٢}$ د س $= \frac{س^{-١}}{-١} = \frac{-١}{س} +$ جـ

٢) $\int \frac{١}{س^{-٣}}$ د س $= \int س^{٣}$ د س $= \frac{س^{٤}}{٤} +$ جـ

- أسئلة :

١) $\int \frac{١}{س^{٤}}$ د س $=$

٢) $\int \frac{-٤}{س^{-٦}}$ د س $=$

٣) $\int \frac{٤س}{س^{٣}} =$

*** خاصية (٢) :** $\int \sqrt[ن]{س^{م}}$ د س $= \int س^{\frac{م}{ن}}$ د س $= \frac{س^{\frac{م}{ن}+١}}{\frac{م}{ن}+١} +$ جـ

- أمثلة :

١) $\int \sqrt{س}$ د س $= \int س^{\frac{١}{٢}}$ د س $= \frac{س^{\frac{١}{٢}+١}}{\frac{١}{٢}+١} = \frac{س^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} +$ جـ

٢) $\int \sqrt[٣]{س^{٢}}$ د س $= \int س^{\frac{٢}{٣}}$ د س $= \frac{س^{\frac{٢}{٣}+١}}{\frac{٢}{٣}+١} +$ جـ $= \frac{س^{\frac{٥}{٣}}}{\frac{٥}{٣}} +$ جـ $= \frac{٣}{٥} \sqrt[٣]{س^{٥}} +$ جـ

- أسئلة :

١) $\int \sqrt[3]{س^{2}}$ د س =

٢) $\int \sqrt[5]{س^{4}}$ د س =

٣) $\int \frac{١}{\sqrt{س}}$ د س =

*** خاصية (٣) :** $\int \frac{س^{ل}}{س^{ن}}$ د س = $\int س^{ل-ن}$ د س

- أمثلة :

١) $\int \frac{س^{٤}}{س^{٣}}$ د س = $\int س$ د س = $\frac{س^{٢}}{٢}$ + جـ

٢) $\int \frac{س^{٢}}{\sqrt{س}}$ د س = $\int س^{٢-\frac{١}{٢}}$ د س = $\int س^{\frac{٣}{٢}}$ د س

= $\frac{س^{\frac{٥}{٢}}}{\frac{٥}{٢}}$ + جـ = $\frac{٢}{٥}\sqrt{س^{٥}}$ + جـ

أ. فيصل السعدون

- أسئلة :

١) $\int \frac{س^{٥}}{س^{٣}}$ د س =

٢) $\int \frac{س^{٣}}{\sqrt[٤]{س}}$ د س =

٣) $\int \frac{س^{٣}}{س^{٧}}$ د س =

٤) $\int \frac{\sqrt[٨]{س}}{س}$ د س =

*** خاصية (٤) :** $\int$ أ ق (س) د س = أ $\int$ ق (س) د س , حيث (أ) عدد حقيقي

- أمثلة :

١) $\int ٥س^{٩}$ د س = ٥ $\int س^{٩}$ د س = $\frac{٥س^{١٠}}{١٠}$ + جـ = $\frac{س^{١٠}}{٢}$ + جـ

٢) $\int ٤س^{-٣}$ د س = ٤ $\int س^{-٣}$ د س = $\frac{٤س^{-٢}}{-٢}$ + جـ = $-٢س^{-٢}$ + جـ

= $\frac{-٢}{س^{٢}}$ + جـ

- أسئلة :

١) $\int ٣س^{٥}$ د س =

٢) $\int ٢س^{\frac{-١}{٢}}$ د س =

*** خاصية (٥) :** $\int$ (ق (س) ± هـ (س)) د س = $\int$ ق (س) د س ± $\int$ هـ (س) دس

- أمثلة :

١) $\int س - ٤$ د س = $\frac{س^{٢}}{٢} - ٤س + جـ$

٢) $\int س^{٣} - ٢س$ د س = $\frac{س^{٤}}{٤} - ٢\frac{س^{٢}}{٢} + جـ = \frac{س^{٤}}{٤} - س^{٢} + جـ$

- أسئلة :

١) $\int ٤س^{٣} - ٣س^{٢}$ د س =

أ. فيصل السعدون

٢) $\int (٣س^{٥} - \sqrt[٣]{س} + ٧)$ د س

٣) $\int (٣ - س)(٤س + ٢)$ د س

٤) $\int (٢س + ٣)^{٢}$ د س

٥) $\int \frac{س^{٢} + ٣}{س^{٥}}$ د س

٦) $\int \frac{س^{٢} + ٦س + ٨}{س + ٢}$ د س ، س ≠ -٢

أ. فيصل السعدون

٧) $\int \frac{س^{٢} - ٣س}{\sqrt{س}}$ د س ، س ≠ -٢

❖ **قاعدة (٣) : <u>الاقترانات المثلثية</u>**

* $\int$ جا س د س = - جتا س + جـ

* $\int$ جتا س د س = جا س + جـ

* $\int$ قا^{٢} س د س = ظا س + جـ

<u>ملاحظة :</u>

* $\frac{١}{جتا^{٢} س}$ = **قا^{٢} س**

* **ظا س =** $\frac{جاس}{جتاس}$

- أمثلة :

١) $\int$ جا س + جتا س د س = - جتا س + جا س + جـ

٢) $\int \frac{٣}{جتا^{٢} س}$ د س = ٣ $\int \frac{١}{جتا^{٢} س}$ د س = ٣ $\int$ قا^{٢}س دس = ٣ ظا س + جـ

- أسئلة :

١) $\int$ جتا س + قا^{٢} س د س =

٢) $\int$ -٣جا س + قا^{٢} س د س =

٣) $\int$ جتا س ٤ظا س د س =

٤) $\int$ ٢جتا س + $\frac{\text{قا}^{٢}\text{س}}{٣}$ د س =

٥) $\int$ $\frac{-٥}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$ + ٦ د س =

فيصل السعدون

أسئلة إضافية للدرس الأول (مهم)

١) إذا كان ⎰ ع ′(س) دس = ٦س^{٣} - ٣س^{٢} + ٦س - ٥ ، فأوجد ع ′(١) .

٢) اذا كان (ق) قابلاً للاشتقاق , وكان ن ′(س) = ٤س^{٣} + ٦س^{٢} - ٣ ، و كان ق (-٢) = صفر ، فجد قاعدة الاقتران (ق) .

٣) اذا كان (ق) قابلاً للاشتقاق , وكان ن ′(س) = $\frac{\text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ٨\text{س}^{٣}}{\text{س}}$ ، حيث س ≠ صفر

و كان ق (١) = ١٢ ، فجد قاعدة الاقتران (ق) .

٤) اذا كان (ق) قابلاً للاشتقاق , وكان ق´(س) = ٢س - ٥ ، و كان ق (٢) = ٤،
فجد قيمة ق (١) .

٥) اذا كان (ق) قابلاً للاشتقاق , وكان ق´(س) = ٣س(٦ - ٥س) + ٤س^{٣} ،
و كان ق (٢) = -١، فجد قيمة ق (١) .

٦) اذا كان (ل) قابلاً للاشتقاق , وكان ل´(س) = ٦س^{٢} - ٦س^{٣} - ٢س ، فجد قيمة ل (٣) - ل (١) .

الدرس الثاني : التكامل المحدود

يعبر عن التكامل المحدود بـ :

$$\int_{أ}^{ب} ق'(س)\ \ د س = ق(ب) - ق(أ)$$

حيث أ = الحد السفلي للتكامل المحدود ، ب = الحد العلوي للتكامل المحدود

❖ **قاعدة (١) :** اذا كان جـ عدداً ثابتاً فإن $\int_{أ}^{ب} جـ\ \ د س = جـ(ب - أ)$

*** أمثلة :**

١) $\int_{-١}^{٣} -٤\ \ د س = -٤(٣ - -١) = -٤ \times ٤ = -١٦$

٢) $\int_{٠}^{٥} \sqrt{٢}\ \ د س = \sqrt{٢}(٥ - ٠) = ٥\sqrt{٢}$

٣) $\int_{٢}^{٤} \frac{٥}{٦}\ \ د س = \frac{٥}{٦}(٤ - ٢) = \frac{٥}{٦}(٢) = \frac{١٠}{٦} = \frac{٥}{٣}$

*** أسئلة :**

١) $\int_{١}^{٣} -٨\ \ د س =$

٢) $\int_{-٢}^{٣} \sqrt{٣}\ \ د س =$

٣) $\int_{٣}^{-٣} \frac{٢}{٣}\ \ د س =$

أ. فيصل السعدون

❖ **إيجاد الثوابت :** تابع لقاعدة (١)

١) $\int_{٢}^{٥} ك$ د س = ٢١ , أوجد قيمة (ك) ؟

الحل : ك (٥ - ٢) = ٢١ >>> ٣ك = ٢١ >>> ك = ٧

---

٢) $\int_{١}^{٥} ك$ د س = - ٤٨ , أوجد قيمة (ك) ؟

الحل : ك (٥ - ١) = - ٤٨ >>> ٤ك = - ٤٨ >>> ك = - ١٢

*** أسئلة :**

١) $\int_{-٣}^{١} ك$ د س = ٢٨ , أوجد قيمة (ك) ؟

٢) $\int_{-٢}^{ب} ٨$ د س = ٢٤ , أوجد قيمة (ب) ؟

٣) $\int_{ل}^{٥} ٣$ د س = ٢٧ , أوجد قيمة (ل) ؟

أ. فيصل السعدون

❖ **قاعدة (٢) :** $\int_{أ}^{ب} س^{ن} \, د س = \left[\frac{س^{ن+١}}{ن+١} \right]_{أ}^{ب} = \frac{ب^{ن+١} - أ^{ن+١}}{ن+١}$ ، $ن \neq -١$ ، $ن \in ع$

*** أمثلة :**

١) $\int_{٢}^{٣} س \, د س = \left[\frac{س^{٢}}{٢} \right]_{٢}^{٣} = \frac{٣^{٢}}{٢} - \frac{٢^{٢}}{٢} = \frac{٩-٤}{٢} = \frac{٥}{٢}$

٢) $\int_{-١}^{٢} س^{٤} \, د س = \left[\frac{س^{٥}}{٥} \right]_{-١}^{٢} = \frac{٢^{٥}}{٥} - \frac{-١^{٥}}{٥} = \frac{-٣٢-(-١)}{٥} = \frac{٣٣}{٥}$

٣) $\int_{١}^{٣} \frac{١}{س^{٣}} \, د س = \int_{١}^{٣} س^{-٣} \, د س$

$$= \left[\frac{س^{-٢}}{-٢} \right]_{١}^{٣} = \left[\frac{-١}{٢س^{٢}} \right]_{١}^{٣} = \frac{-١}{٢(٣)^{٢}} - \frac{-١}{٢(١)^{٢}} = \frac{-١}{١٨} + \frac{١}{٢} = \frac{٨}{١٨} = \frac{٤}{٩}$$

*** أسئلة :**

١) $\int_{-٢}^{٣} س^{٢} \, د س =$

٢) $\int_{-١}^{١} \frac{١}{س^{٢}} \, د س =$

٣) $\int_{١}^{٤} \sqrt{س}$ د س =

٤) $\int_{١}^{٣} \frac{١}{\sqrt{س}}$ د س =

٥) $\int_{٠}^{١} ٢س^{٣} - ٣\sqrt{س}$ د س =

٦) $\int_{١}^{٢} \frac{١}{س^{٣}} + \frac{١}{س^{٢}}$ د س =

٧) $\int_{-٢}^{٢} (٣س - ٣)(س + ٢)$ د س

٨) $\int_{١}^{-١} (٢س - ٣)^{٢}$ د س

٩) $\int_{١}^{٣} ٣س(٤ - ٢س^{٢})$ د س

١٠) $\int_{ب}^{-٢} \frac{س^{٢} + ٦س - ٧}{س - ١}$ د س

❖ **إيجاد الثوابت :** تابع لقاعدة (٢)

١) $\int_{ب}^{ك} س$ د س = ٣٢ ، أوجد قيمة (ك) ؟

الحل : $\left[\frac{س^{٢}}{٢}\right]_{ب}^{ك} = \frac{ك^{٢}}{٢} - ٠ = ٣٢ \gg \frac{ك^{٢}}{٢} = ٣٢ \gg ك^{٢} = ٦٤ \gg ك = ٨ ، -٨$

---

٢) $\int_{٣}^{جـ} ٣س^{٢}$ د س = - ٣٥ ، أوجد قيمة (جـ) ؟

الحل :

$\left[\frac{٣س^{٣}}{٣}\right]_{٣}^{جـ} = -٣٥ \leftarrow [س^{٣}]_{٣}^{جـ} \gg جـ^{٣} - ٣^{٣} = -٣٥ \leftarrow جـ^{٣} = -٨ \leftarrow جـ = -٢$

فيصل السعدون

أسئلة :

١) $\int_{١}^{ك} ٣س^{٢}$ د س = ٢٦ ، أوجد قيمة (ك) ؟

٢) $\int_{٢}^{ل} س^{٢}$ د س = $\frac{١٩}{٣}$ ، أوجد قيمة (ل) ؟

٣) $\int_{١}^{ب} ٦س$ د س = ٩ ، أوجد قيمة (ب) ؟

٤) اذا كان $\int_{١}^{ب} ٢س - ٤$ د س = ١٥ ، **أوجد قيمة الثابت (ب) ؟؟**

٥) اذا كان $\int_{٢}^{ب} ١ - ٤س$ د س = ٥ ب ، **أوجد قيمة الثابت (ب) ؟؟**

٦) اذا كان $\int_{ن}^{١} ٢س - ٣$ د س = صفر ، **أوجد قيمة الثابت (ن) ؟؟**

أسئلة إضافية للدرس الثاني (مهم)

١) اذا كان ق (-٣) = ١٥ ، ق (-١) = - ٨ ، فجد $\int_{-٣}^{-١} ٣ق'(س)$ د س ؟

٢) اذا كان ق (٥) = - ٣ ، ق (٢) = ٢ ،

أوجد أ) $\int_{٢}^{٥} ق'(س)$ د س ب) $\int_{٥}^{٢} ق'(س)$ د س

٣) اذا كان $\int ل(س)$ د س = $س^{\frac{٢}{٣}} + جـ$ ، أوجد $\int_{-١}^{٨} ل(س)$ د س

أ. فيصل السعدون (٠٧٩٦٠٣٠٦١١)

٤) اذا كان هـ ´(س) = ٦س ، هي مشتقة الاقتران هـ (س) المعرف على الفترة [-٢ ، ٣] ،
اوجد هـ (٣) - هـ (-٢) ؟

٥) اذا كان الاقتران (ق) معرّفاً على الفترة [١ ، ٥] , و كان ق ´(س) = ٢س + ١ ،
فأوجد قيمة ق (٥) - ق (١) ؟

٦) اذا كان $\int_{٥}^{٢}$ ق ´(س) د س = ١٣ ، وكان ق (٥) = - ١٧ ، فأوجد ق (٢) .

أ. فيصل السعدون (٠٧٩٦٠٣٠٦١١)

الدرس الثالث : خواص التكامل المحدود

❖ **خاصية (١) :**

* $\int_{أ}^{ب} جـ \times ن(س)\ د س = جـ \times \int_{أ}^{ب} ن(س)\ د س$

* $\int_{أ}^{ب} (ن(س) \pm هـ(س))\ د س = \int_{أ}^{ب} ن(س)\ د س \pm \int_{أ}^{ب} هـ(س)\ د س$

*** أمثلة :**

١) $\int_{١}^{٣} ٦س\ د س = ٦ \times \left[\frac{س^{٢}}{٢}\right]_{١}^{٣} = ٦ \times (\frac{٩}{٢} - \frac{١}{٢}) = ٦ \times \frac{٨}{٢} = ٢٤$

٢) $\int_{١}^{٣} ٣س^{٢}\ د س = ٣ \times \left[\frac{س^{٣}}{٣}\right]_{١}^{٣} = [س^{٣}]_{١}^{٣} = ٣^{٣} - ١^{٣} = ٢٦$

٣) $\int_{٠}^{١} (٤س^{٣} - ٢\sqrt{س})\ د س =$

$$\int_{٠}^{١} (٤س^{٣} - ٢س^{\frac{١}{٢}})\ د س = \left[\frac{٤س^{٤}}{٤} - \frac{٢س^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}}\right]_{٠}^{١} = \left[س^{٤} - ٢ \times \frac{٢س^{\frac{٣}{٢}}}{٣}\right]_{٠}^{١}$$

$$= \left[س^{٤} - \frac{٤\sqrt{س^{٣}}}{٣}\right]_{٠}^{١} = (١ - \frac{٤ \times ١}{٣}) - (٠) = \frac{-١}{٣}$$

*** أسئلة :**

١) $\int_{١}^{٠} ٤س\ د س =$

٢) $\int_{٠}^{٣} (٣س^{٢} + ٤س)$ د س =

٣) $\int_{٤}^{١} (٢س - \frac{٣}{٢} \sqrt[٣]{س})$ د س =

٤) $\int_{٨}^{١} \frac{١}{\sqrt[٣]{س}} + ٣س^{-٢}$ د س =

٥) إذا كان $\int_{١}^{٣} و(س)$ د س = ٦ ، $\int_{١}^{٣} هـ(س)$ د س = -٢ ، فأوجد قيمة كل مما يأتي :

أ) $\int_{١}^{٣} ٢و(س)$ د س

ب) $\int_{١}^{٣} (٣هـ(س) - ٦و(س) + ٤)$ د س

٦) إذا كان $\int_{-١}^{٢} ٢ل(س)$ د س = -٢ ، $\int_{-١}^{٢} ع(س)$ د س = ٥ ، فأوجد قيمة كل مما يأتي :

أ) $\int_{-١}^{٢} \frac{٥ع(س)}{٢}$ د س

ب) $\int_{-١}^{٢} (ع(س) - ٣ل(س) - ٢س)$ د س

❖ **خاصية (٢) :** $\int_{أ}^{ب} ن(س)\ د س = -\int_{ب}^{أ} ن(س)\ د س$

*** أمثلة :**

١) اذا كان $\int_{٤}^{٥} ن(س)\ د س = ١٢$ ، أوجد $\int_{٥}^{٤} ن(س)\ د س$

الحل : $\int_{٥}^{٤} ن(س)\ د س = -١٢$

---

٢) اذا كان $\int_{٣}^{٦} ٢ن(س)\ د س = ١٢$ ، أوجد $\int_{٦}^{٣} ن(س)\ د س$

الحل : $\int_{٣}^{٦} ٢ن(س)\ د س = ١٢$ >>> $\int_{٣}^{٦} ن(س)\ د س = ٦$

اذن $\int_{٦}^{٣} ن(س)\ د س = -٦$

*** أسئلة :**

١) اذا كان $\int_{٣}^{٤} ن(س)\ د س = -٥$ ، أوجد $\int_{٤}^{٣} ن(س)\ د س$ ؟

٢) $\int_{-٣}^{-٨} \frac{١}{٢} ن(س)\ د س = -٤$ ، أوجد $\int_{-٨}^{-٣} ن(س)\ د س$

أ. فيصل السعدون

٣) $\int_{-١}^{٢} (٢ن(س)-١)$ د س = ٨ ، أوجد $\int_{٢}^{-١} ن(س)$ د س

٤) $\int_{٢}^{٠} (٣ن(س)-٤)$ د س = ١٨ ، أوجد $\int_{٢}^{٠} ن(س)$ د س

٥) إذا كان $\int_{٤}^{١} (٣ن(س)-٥)$ د س = ٩ ، أوجد $\int_{١}^{٤} (٢ن(س)+١)$ د س

٦) اذا كان $\int_{-١}^{٣} ن(س)$ د س = ٦ ، $\int_{٣}^{-١} \frac{ع(س)}{٢}$ د س = - ٥

أوجد : أ) $\int_{-١}^{٣} (٤ن(س) - ع(س))$ د س ب) $\int_{-١}^{٣} (٦س^{٢} - ٣ع(س) + ٢)$ د س

❖ **خاصية (٣) :** $\int_{أ}^{ب} ن(س)$ د س + $\int_{ب}^{ج} ن(س)$ = $\int_{أ}^{ج} ن(س)$ **(خاصية الإضافة)**

*** أمثلة :**

١) اذا كان $\int_{٢}^{٨} ن(س)$ د س = ١٢ ، $\int_{٨}^{١٠} ن(س)$ د س = ٥

أوجد : أ) $\int_{٢}^{١٠} ن(س)$ د س ب) $\int_{١٠}^{٢} ن(س)$ د س

الحل : أ) $\int_{٢}^{١٠} ن(س)$ د س = $\int_{٢}^{٨} ن(س)$ د س + $\int_{٨}^{١٠} ن(س)$ د س = ١٢ + ٥ = ١٧

ب) $\int_{١٠}^{٢} ن(س)$ د س = - ١٧

٢) اذا كان $\int_{-٤}^{-٢} ن(س)$ د س = - ٥ ، $\int_{-٤}^{٠} ن(س)$ د س = ٨

أوجد $\int_{-٢}^{٠} ن(س)$ د س ؟؟

الحل : $\int_{-٤}^{-٢} ن(س)$ د س + $\int_{-٢}^{٠} ن(س)$ د س = $\int_{-٤}^{٠} ن(س)$ د س

- ٥ + $\int_{-٢}^{٠} ن(س)$ د س = ٨ <<< $\int_{-٢}^{٠} ن(س)$ د س = ٨ + ٥ = ١٣

---

٣) اذا كان $\int_{٠}^{٣} ٥ن(س)$ د س = - ٥ ، $\int_{٣}^{٦} ٤ن(س)$ د س = ٨

أوجد : $\int_{٠}^{٦} ن(س)$ د س ؟؟؟

الحل : $\int_{٠}^{٣} ن(س)$ د س = - ١ ، $\int_{٣}^{٦} ن(س)$ د س = ٢

$\int_{٠}^{٣} ن(س)$ د س + $\int_{٣}^{٦} ن(س)$ د س = $\int_{٠}^{٦} ن(س)$ د س

- ١ + ٢ = ١

---

٤) اذا كان ق (س) = $\begin{cases} ٤س & ، ٠ < س < ٢ \\ ٢س & ، ٢ < س < ٤ \end{cases}$

أوجد ١) $\int_{٠}^{٢} ن(س)$ د س ٢) $\int_{٢}^{٤} ن(س)$ د س ٣) $\int_{٠}^{٤} ن(س)$ د س ؟؟؟

الحل : ١) $\int_{٠}^{٢} ٤س$ د س = $\left[\frac{٤س^{٢}}{٢}\right]_{٠}^{٢}$ = $[٢س^{٢}]_{٠}^{٢}$ = ٢(٢ ٢ - ٠ ٢) = (٤)٢ = ٨

٢) $\int_{٢}^{٤} ٢س$ د س = $\left[\frac{٢س^{٢}}{٢}\right]_{٢}^{٤}$ = $[س^{٢}]_{٢}^{٤}$ = ٤ ٢ - ٢ ٢ = ١٦ - ٤ = ١٢

٣) $\int_{٠}^{٢} ن(س)$ د س + $\int_{٢}^{٤} ن(س)$ د س = $\int_{٠}^{٤} ن(س)$ د س

= ٨ + ١٢ = ٢٠

أ. فيصل السعدون

*** أسئلة :**

١) اذا كان $\int_{-٢}^{٠} ق(س)\ د س = -٥$ ، $\int_{٠}^{٢} ق(س)\ د س = ٤$

أوجد : أ) $\int_{-٢}^{٢} ق(س)\ د س$ ب) $\int_{٢}^{-٢} ق(س)\ د س$ ؟؟

٢) اذا كان $\int_{-١}^{٢} ق(س)\ د س = ١٦$ ، $\int_{٣}^{٢} ق(س)\ د س = -٨$

أوجد : $\int_{-١}^{٣} ق(س)\ د س$ ؟؟

أ. فيصل السعدون (٠٧٩٦٠٣٠٦١١)

٣) اذا كان $\int_{٤}^{٢} ق(س)$ د س = ٤ ، $\int_{٤}^{١٠} -٣ق(س)$ د س = ٦

أوجد : أ) $\int_{٢}^{١٠} ق(س)$ د س ب) $\int_{١٠}^{٢} ق(س)$ د س

٤) اذا كان $\int_{ب}^{١} ٣ق(س)$ د س = - ١٢ ، $\int_{٣}^{١} ق(س)$ د س = - ٨

أوجد قيمة $\int_{ب}^{٣} ق(س)$ د س ؟؟؟

٥) اذا كان $\int_{١}^{٣} ٢ن(س)$ د س = ٤ ، $\int_{١}^{} ن(س)$ د س = ٧

أوجد قيمة $\int_{ب}^{٣} ٢ن(س) + ٧$ د س

٦) اذا كان ق (س) = $\begin{cases} ٥ - ٢س & ، ١ < س < ٣ \\ ٣س^{٢} & ، ٣ < س < ٥ \end{cases}$

أوجد : أ) $\int_{١}^{٣} ن(س)$ د س ب) $\int_{٣}^{ب} ن(س)$ د س جـ) $\int_{١}^{ب} ن(س)$ د س

٧) اذا كان ق (س) = $\begin{cases} ٤س - ٢ & ، -١ \leq س \leq ٢ \\ ٣س^{٢} - ٦ & ، ٢ < س \leq ٣ \end{cases}$

أوجد : $\int_{-١}^{٣} ق(س)$ د س

٨) اذا كان ق (س) = $\begin{cases} -٦ & ، ١ < س < ٣ \\ -٢ & ، ٣ < س < ٦ \\ ٤ & ، ٦ < س < ٨ \end{cases}$

أوجد : $\int_{٨}^{١} -٢ق(س)$ د س ؟؟؟

❖ **خاصية (٤) :** $\int_{أ}^{أ} ن(س)$ د س = **صفر**

*** أمثلة :**

١) $\int_{-٢}^{-٢} ٢س + \frac{٣}{٢} \sqrt{س}$ د س = **صفر**

٢) $\int_{٤}^{٤} ٤س + ٥س^{٢} - ٢$ د س = **صفر**

٣) $\int_{٣}^{٣} \sqrt{س} + \frac{٣}{س^{٤}} - س^{٥}$ د س = **صفر**

*** أسئلة :**

١) إذا كان $\int_{٢+أ}^{أ^{٢}-٤} ن(س)$ د س = صفر ، فأوجد قيمة الثابت (أ) .

٢) إذا كان $\int_{أ-١}^{٧+أ٥} ن(س)$ د س = صفر ، فأوجد قيمة الثابت (أ) .

أ. فيصل السعدون (٠٧٩٦٠٣٠٦١١)

٣) إذا كان $\int_{ب^{٢}+ب}^{-ب+٣} ق(س)$ د س = صفر ، فأوجد قيمة الثابت (ب) .

٤) إذا كان $\int_{م^{٣}+١}^{-٧} ق(س)$ د س = صفر ، فأوجد قيمة الثابت (م) .

الدرس الرابع : التكامل بالتعويض

بالرموز : $\int ع'(س) \times (ع(س))^{ن}$ د س

حيث : ص = ع (س) ، $\frac{د ص}{د س}$ = ع ′(س) ، د س = $\frac{د ص}{ع'(س)}$

*** يستخدم التكامل بالتعويض في حال وجود :**

١) اقتران مرفوع لقوة ٢) اقتران كسري ٣) اقتران مثلثي

❖ **حالة (١) :** $\int$ (مشتقة اقتران) × (اقتران)^{ن} د س ، حيث ص = (الاقتران)

*** أمثلة :**

١) $\int ٣س^{٢}(س^{٣}+٢)^{٣}$ د س

الحل : ص = $س^{٣}$ + ٢ ، $\frac{د ص}{د س}$ = $٣س^{٢}$ ، دس = $\frac{د ص}{٣س^{٢}}$

$$\int \cancel{٣س^{٢}}(ص)^{٣}\frac{د ص}{\cancel{٣س^{٢}}} = \int ص^{٣}\, د ص = \frac{ص^{٤}}{٤}+جـ$$

$$= \frac{(س^{٣}+٢)^{٤}}{٤}+جـ$$

---

٢) $\int (٤س-٣)^{٥}$ د س

الحل : ص = ٤س - ٣ ، $\frac{د ص}{د س}$ = ٤ ، دس = $\frac{د ص}{٤}$

$$\int (ص)^{٥}\frac{د ص}{٤} = \frac{١}{٤}\int (ص)^{٥}\, د ص = \frac{١}{٤}\times\frac{ص^{٦}}{٦}+جـ$$

$$= \frac{(٤س-٣)^{٦}}{٢٤}+جـ$$

---

٣) $\int (س^{٢}+١)\sqrt[٣]{س^{٣}+٣س+٥}$ د س

الحل : ص = $س^{٣}$ + ٣س + ٥ ، $\frac{د ص}{د س}$ = $٣س^{٢}$ + ٣ ، دس = $\frac{د ص}{٣س^{٢}+٣}$

$$= \int \cancel{(س^{٢}+١)}(ص)^{\frac{١}{٣}}\frac{د ص}{٣\cancel{(س^{٢}+١)}} = \frac{١}{٣}\int (ص)^{\frac{١}{٣}}\, د ص = \frac{١}{٣}\frac{ص^{\frac{٤}{٣}}}{\frac{٤}{٣}}+جـ$$

$$= \frac{١}{٣}\times\frac{٣}{٤}\times ص^{\frac{٤}{٣}}+جـ = \frac{١}{٤}\times\sqrt[٣]{(س^{٣}+٣س+٥)^{٤}}+جـ$$

أ. فيصل السعدون

*** أسئلة : جد كلاً من التكاملات التالية :**

١) $\int ٤س(٢س^{٢}+٢)^{٥}$ د س =

٢) $\int (٥س+٣)^{٣}$ د س =

٣) $\int س(٣س^{٢}+٢)^{٤}$ د س =

٤) $\int_{1}^{2} (٣س^{٢} + ٤س)(س^{٣} + ٢س^{٢})^{٧}$ د س =

٥) $\int (٢س + ١)\sqrt{س^{٢} + س - ٤}$ د س

٦) $\int \sqrt[٣]{(٥ - ٣س)^{٣}}$ د س =

❖ **حالة (٢) :** $\int \frac{\text{اقتران}}{(\text{اقتران})\ \text{مرفوع لقوة}}$ دس ، حيث ص = (الاقتران)

*** أمثلة :**

١) $\int \frac{٢س + ٥}{(س^{٢} + ٥س + ١٠)^{٤}}$ د س

الحل : ص = $س^{٢}$ + ٥س + ١٠ ، $\frac{د ص}{د س}$ = ٢س + ٥ ، دس = $\frac{د ص}{٢س + ٥}$

$$= \int \frac{٢س + ٥}{(ص)^{٤}} \frac{د ص}{٢س + ٥} = \int \frac{١}{(ص)^{٤}} د ص = \int (ص)^{-٤} د ص$$

$$= \frac{ص^{-٣}}{-٣} + جـ = \frac{(س^{٢} + ٥س + ١٠)^{-٣}}{-٣} + جـ$$

---

٢) $\int \frac{٢س - ٣}{(س^{٢} - ٣س + ١٠)^{٣}}$ د س

الحل : ص = $س^{٢}$ - ٣س + ١٠ ، $\frac{د ص}{د س}$ = ٢س - ٣ ، دس = $\frac{د ص}{٢س - ٣}$

$$= \int \frac{٢س - ٣}{(ص)^{٣}} \frac{د ص}{٢س - ٣} = \int \frac{١}{(ص)^{٣}} د ص = \int ص^{-٣} د ص = \frac{ص^{-٢}}{-٢} + جـ$$

$$= \frac{-٢}{ص^{٢}} + جـ = \frac{-٢}{(س^{٢} - ٣س + ١٠)^{٢}} + جـ$$

*** أسئلة : جد كلاً من التكاملات التالية :**

١) $\int \frac{١٠س - ٥}{(س^{٢} - س + ٥)^{٣}}$ د س =

أ. فيصل السعدون

٢) $\int \frac{٣س - ٩}{(س^{٢} - ٦س)^{٢}}$ د س =

٣) $\int \frac{٤س - ٦}{\sqrt[٣]{س^{٢} - ٣س + ١}}$ د س =

❖ **حالة (٣) :** $\int \frac{\text{عدد}}{\text{(اقتران) مرفوع لقوة}}$ دس ، حيث ص = (الاقتران)

*** أمثلة :**

١) $\int \frac{١}{(٥س+١)^{٥}}$ د س

الحل : ص = ٥س + ١ ، $\frac{د ص}{د س}$ = ٥ ، دس = $\frac{د ص}{٥}$

$$\int \frac{١}{(ص)^{٥}} \frac{د ص}{٥} = \frac{١}{٥} \int \frac{١}{(ص)^{٥}} د ص = \frac{١}{٥} \int (ص)^{-٥} د ص = \frac{١}{٥} \times \frac{ص^{-٤}}{-٤} + جـ$$

---

٢) $\int \frac{١}{(٣-٣س)^{٤}}$ د س

الحل : ص = ٣ - ٣س ، $\frac{د ص}{د س}$ = - ٣ ، دس = $\frac{د ص}{-٣}$

$$= \int \frac{١}{ص^{٤}} \frac{د ص}{-٣} = \int ص^{-٤} \frac{د ص}{-٣} = \frac{-١}{٣} \times \frac{ص^{-٣}}{-٣} + جـ = \frac{١}{٩ص^{٣}} + جـ$$

$$= \frac{١}{٩(٣-٣س)^{٣}} + جـ$$

*** أسئلة : جد كلاً من التكاملات التالية :**

١) $\int \frac{٣}{(٣س-١)^{-٢}}$ د س

أ. فيصل السعدون

٢) $\int \frac{٢}{\sqrt{٣س - ١٢}}$ د س

٣) $\int \frac{١}{(٥س + ١)^{٢}}$ د س

❖ **حالة (٤) :** $\int$ (مشتقة اقتران) × جا (اقتران) د س

حيث ص = (الاقتران) ، (ينطبق على جا و جتا و قا^{٢})

*** أمثلة :**

١) $\int ٢س \times جتا(س^{٢} - ٣)$ د س

الحل : ص = س^{٢} - ٣ ، $\frac{د ص}{د س}$ = ٢س ، دس = $\frac{د ص}{٢س}$

$= \int ٢س \times جتاص \frac{د ص}{٢س} = \int جتاص$ د ص = جا(س^{٢} − ٣)+جـ

٢) $\int$ جا(٢س + ٣) د س

الحل : ص = ٢س + ٣ ، $\frac{د ص}{د س}$ = ٢ ، دس = $\frac{د ص}{٢}$

= $\int$ جاص $\frac{د ص}{٢}$ = $\frac{١}{٢}\int$ جاص د ص = $\frac{-١}{٢}$ جتا(٢س + ٣) + جـ

*** أسئلة : جد كلاً من التكاملات التالية :**

١) $\int$ (س^{٢} − ١) جا(س^{٣} − ٣س) د س

٢) $\int$ س × قا^{٢} (س^{٢} + ٨) د س

٣) $\int ٢س جا(٤ - س^{٢})$ د س

٤) $\int جتا(٢س + ٦)$ د س

٥) $\int جا(٣ - ٤س)$ د س

٦) $\int$ قا^{٢} (٥س – ٨) د س

٧) $\int$ جتا$(\frac{س}{٣})$ د س

٨) $\int \frac{٢س + ١}{جتا^{٢}(س^{٢} + س)}$ د س

❖ **استخدام التكامل بالتعويض في حالة التكامل المحدود**

*** مثال:**

$$\int_{0}^{1} ٦س(س^{٢}+٢)^{٢} \, د س$$

الحل : ص = $س^{٢}$ + ٢ ، $\frac{د ص}{د س}$ = ٢س ، دس = $\frac{د ص}{٢س}$

س = ١ >>> ص = $١^{٢}+٢=٣$

س = ٠ >>> ص = $٠^{٢}+٢=٢$

$$= \int_{٢}^{٣} ٦س^{٢}(ص)^{٢} \frac{د ص}{٢س} = ٣\int_{٢}^{٣} ص^{٢} = ٣\frac{ص^{٣}}{٣}$$

$$= [ص^{٣}]_{٢}^{٣} = (٣^{٣}-٢^{٣}) = ٢٧-٨ = ١٩$$

*** أسئلة : جد قيمة التكاملات التالية :**

١) $\int_{٠}^{١} ٣س(٣س^{٢})^{٤} \, د س$

أ. فيصل السعدون

٢) $\int_{٢}^{٣} ٣(٣س - ٦)^{٣}$ د س

٣) $\int_{-١}^{١} (٤س - ١) \sqrt[٣]{٢س^{٢} - س - ٢}$ د س

٤) $\int_{1}^{2} \frac{س + ١}{(س^{٢} + ٢س + ١)^{٢}}$ د س

٥) $\int_{٠}^{٣} \frac{١}{\sqrt[٣]{٢س + ١}}$ د س

قواعد مهمة

* إذا كان أ , ب ثابتين ، حيث أ ≠ صفر ، ن ≠ -١ فإن :

١) $\int (أ س \pm ب)^{ن} \, د س = \frac{(أ س \pm ب)^{ن+١}}{أ(ن+١)} + جـ$

٢) $\int جا(أ س \pm ب) \, د س = \frac{-جتا(أ س \pm ب)}{أ} + جـ$

٣) $\int جتا(أ س \pm ب) \, د س = \frac{جا(أ س \pm ب)}{أ} + جـ$

٤) $\int قا^{٢}(أ س \pm ب) \, د س = \frac{ظا(أ س \pm ب)}{أ} + جـ$

*** أسئلة :**

١) $\int (٢س + ١)^{٣} \, د س$

أ. فيصل السعدون

٢) $\int_{-١}^{٢} ٦(١-٢س)^{٥}$ د س

٣) $\int_{٠}^{٢} ١ جا(١-٤س)$ د س

٤) $\int_{-١٣}^{٠} \frac{١}{\sqrt[٣]{٢س-١}}$ د س

٥) $\int ٢قا^{٢}(٢-س)$ د س

٦) $\int_{٠}^{٢} \sqrt{٤س+١}$ د س

٧) $\int -٣جتا(٥-٢س)$ د س

٨) $\int \sqrt{(٣س-٢)^{٢}}$ د س

أسئلة إضافية للدرس الرابع (مهم)

س١ : اذا علمت أن ق (٤) = ١٢ ، ق (١) = - ٨ ، **فاحسب قيمة** $\int_{-١}^{٢} ٢س ق'(س^{٢}) \, د س$.

س٢ : إذا علمت أن $\int_{٥}^{٢} ق(س) \, د س = ٣$ ، فجد قيمة التكامل الآتي : $\int_{-١}^{٢} ٨س \times ق(س^{٢} + ١) \, د س$

❖ **إيجاد قاعدة الاقتران :**

سؤال : اذا كان (ق) قابلاً للاشتقاق , وكان ق ´(س) = (٤س - ٢)^{٣} ، و كان ق (١) = ٨ ، فجد قاعدة الاقتران (ق) .

الدرس الخامس : تطبيقات التكامل

❖ **أولا : تطبيقات هندسية : إيجاد قاعدة الاقتران ق (س) عند النقطة (س$_{١}$ ، ص$_{١}$)**

* **مثال :** اذا كان ق ´(س) = ٣س^{٢} - ١٠س ، فجد قاعدة الاقتران (ق) ، علماً بأن النقطة (٢ ، ٣) تقع على منحنى الاقتران (ق) .

الحل : ق (س) = $\int$ ٣س^{٢} - ١٠س د س

= $\frac{٣س^{٣}}{٣} - \frac{١٠س^{٢}}{٢}$ + جـ = س^{٣} - ٥س^{٢} + جـ

ق (٢) = ٨ - ٥ × ٤ + جـ = ٣

= ٨ - ٢٠ + جـ = ٣ >>> جـ = ١٥

إذن ق (س) = س^{٣} - ٥س^{٢} + ١٥

- أسئلة :

١) اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق (س) عند النقطة (س ، ص) يساوي (٣س^{٢} - ٧) ، جد قاعدة الاقتران علماً بأن منحنى الاقتران يمر بالنقطة (٢ ، ٧) ؟

٢) اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق (س) عند النقطة (س ، ص) يساوي (٤س^{٣} + ٦س^{٢} - ٣) ، جد قاعدة الاقتران علماً بأن منحنى الاقتران يمر بالنقطة (-٢ ، ٠) ؟

٣) اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق (س) عند النقطة (س ، ص) يساوي (٦ - ٢س + ٩س^{٣}) ، جد قاعدة الاقتران (ق) علماً بأن ق (٠) = ٥

٤) جد قاعدة الاقتران ل (س) ، علماً بأن ميل المماس لمنحناه عند النقطة (س ، ص)
يعطى بالقاعدة : $\text{ل}'(\text{س}) = ٢\text{س}(٤ - ٣\text{س})$ ، و أن النقطة (٠ ، ٣) تقع على منحنى الاقتران (ل)

٥) جد قاعدة الاقتران ص = ق(س) ، علماً بأن ميل المماس لمنحناه عند النقطة (س ، ص)
يعطى بالقاعدة : $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{س} \sqrt{\text{س}^{٢} + ٩}$ ، و أن النقطة (-٤ ، ١) تقع على منحنى الاقتران (ص)

٦) اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق (س) عند النقطة (س ، ص) يساوي $\frac{٢\text{س}}{\sqrt[٣]{\text{س}^{٢} + ٨}}$ ،
جد قاعدة الاقتران علماً بأن منحنى الاقتران يمر بالنقطة (٠ ، ٤) ؟

٧) جد ق (١) ، علماً بأن ميل المماس لمنحنى الاقتران ق (س) عند النقطة (س ، ص) يساوي $٢٥(٥س+٤)^{٤}$ ، و أن منحنى الاقتران (ق) يمر بالنقطة (-١ ، ٧) ؟

٨) جد ق (١٤) ، علماً بأن ميل المماس لمنحنى الاقتران ق (س) عند النقطة (س ، ص) يعطى بالقاعدة : $ق'(س) = ٦\sqrt[٣]{٢س-١}$ ، و أن منحناه يمر بالنقطة (٠ ، ٥) ؟

٩) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران (هـ) يعطى بالقاعدة : $هـ'(س) = \frac{٢س^{٢}-٥س}{س}$ ، حيث س ≠ صفر ، علماً بأن منحنى الاقتران (هـ) يمر بالنقطة (-١ ، ٥) ؟

❖ ثانياً : تطبيقات فيزيائية :

*** للتذكير :**

- ن >>> الزمن (ث) - ف >>> المسافة (م)
- ع >>> السرعة (م / ث) - ت >>> التسارع (م / ث^{2})

*** القواعد :**

- التسارع ت (ن)
- السرعة ع (ن) = $\int$ ت (ن) د ن
- المسافة ف (ن) = $\int$ ع (ن) د ن

*** أمثلة :**

١) يتحرك جسيم في خط مستقيم بحيث تكون سرعته (ع) معطاه بالعلاقة ع (ن) = ٢ن + ٤ م/ث ، جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور (٣) ثواني من بدء الحركة ، علماً بأن الموقع الابتدائي للجسيم ف (٠) = ٦ م .

الحل :

* ف (ن) = $\int$ ٢ن + ٤ د ن = ن^{2} + ٤ن + جـ

* ف (٠) = (٠)^{2} + ٤(٠) + جـ = ٦ >>> جـ = ٦

* ف (ن) = ن^{2} + ٤ن + ٦ ، * ف (٣) = ٩ + ١٢ + ٦ = ٢٧ م

---

٢) تتحرك نقطة مادية في خط مستقيم بتسارع ثابت (ت) مقداره ت (ن) = ١٢ م/ ث^{2} ، جد سرعتها بعد زمن قدره (ن) ثانية ، غلماً بأن سرعتها الابتدائية ع (٠) = ٧ م / ث ، ثم جد سرعتها بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة .

الحل :

* ع (ن) = $\int$ ١٢ د ن = ١٢ن + جـ

* ع (٠) = ١٢(٠) + جـ = ٧ >>> جـ = ٧

* ع (ن) = ١٢ن + ٧ ، * ع (٢) = ١٢(٢) + ٧ = ٢٤ + ٧ = ٣١ م/ ث

أ. فيصل السعدون

*** أسئلة :**

١) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث إن سرعته بعد (ن) ثانية تساوي ع (ن) = ٤ن + ٨ م / ث ، جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد (ن) ثانية ، علماً بأن موقعه الابتدائي ف (٠) = ٣ م ؟

٢) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث إن تسارعه بعد (ن) ثانية تساوي ت (ن) = ٢ن + ٨ م / ث ، جد السرعة التي يقطعها الجسيم بعد مرور ثانية واحدة من بدء الحركة علماً بأن سرعة الجسيم كانت (٣) م / ث بعد (٢) ثانية ؟

٣) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث يكون تسارعه معطاه بالعلاقة ت (ن) = ٤٨(١ - ٢ن)^{٣} م/ث^{٢} ،
، إذا علمت أن السرعة الابتدائية للجسيم ع (٠) = ٢ م / ث ، و موقعه الابتدائي ف (٠) = ٥ م ،
فأوجد :

١) سرعة الجسيم بعد مرور ثانية واحدة من بدء الحركة

٢) موقع الجسيم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة .

٤) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث يكون تسارعه معطاه بالعلاقة ت (ن) = ٦ن م/ث^{٢} ،
إذا علمت أن السرعة الابتدائية للجسيم ع (٠) = ٢ م / ث ، و موقعه الابتدائي ف (٠) = ٥ م ،
فأوجد موقع الجسيم بعد مرور ٣ ثواني من بدء الحركة .

٥) تتحرك نقطة مادية على خط مستقيم بحيث تكون سرعتها بعد (ن) ثانية معطاه بالعلاقة
ع (ن) = ٦(ن + ٢)^{٢} م / ث ، جد موقع النقطة المادية بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة ،
علماً بأن الموقع الابتدائي للجسيم ف (٠) = ٥ م ؟

٦) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث إن سرعته بعد (ن) ثانية تساوي
ع (ن) = ١٢جتا (٢ن - ١) م / ث ،
جد القاعدة التي تمثل موقع الجسيم بعد مرور (ن) ثانية من بدء الحركة ؟

٧) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث تكون سرعته بعد مرور (ن) ثانية من بدء الحركة تعطى بالقاعدة ع (ن) = (٣ن - ١) (٤ن + ١) م/ث ، فأوجد :

١) القاعدة التي تمثل موقع الجسيم بعد مرور (ن) ثانية من بدء الحركة .
٢) موقع الجسيم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة ، علماً بأن موقعه الابتدائي ف (٠) = ٧ م

❖ ثالثاً : المساحة :

❖ **حالة (١) :** حساب المساحة المحصورة بين اقتران و محور السينات
((الاقتران **لا يقطع** محور السينات))

*** أمثلة :**

١) اذا كان ق (س) = س - ١ ، فاحسب المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران و محور السينات و المستقيمين س = ١ ، س = ٥

الحل : س - ١ = ٠ >>> س = ١ (اذن الاقتران لا يقطع محور السينات)

$$م = \int_{١}^{٥} ق(س)\ د س = \int_{١}^{٥} س - ١\ د س$$

$$= \left[\frac{س^{٢}}{٢} - س \right]_{١}^{٥} = (٥ - \frac{٢٥}{٢}) - (١ - \frac{١}{٢}) = ١ + \frac{١}{٢} - ٥ - \frac{٢٥}{٢} = ٨ \text{ وحدات مربعة}$$

٢) اذا كان ق (س) = ٢س + ٢ ، فاحسب المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران و محور السينات و المستقيمين س = ١ ، س = ٣ .

الحل : ٢س + ٢ = ٠ >>> ٢س = - ٢ >>> س = - ١

(اذن الاقتران لا يقطع محور السينات)

$$م = \int_{١}^{٣} |ق(س)| \, د س = \int_{١}^{٣} |٢س + ٢| \, د س$$

$$= \left[س^{٢} + ٢س \right]_{١}^{٣} = (٩ + ٦) - (١ + ٢) = ١٥ - ٣ = ١٢ \text{ وحدة مربعة}$$

*** أسئلة :**

١) اذا كان ق (س) = ٢س - ٤ ، فاحسب المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران و محور السينات و المستقيمين س = - ١ ، س = ٢

٢) اذا كان ق (س) = ٥ ، فاحسب المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران و محور السينات و المستقيمين س = - ٤ ، س = ٢

٣) اذا كان ق (س) = ٢ - س ، فاحسب المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران و محور السينات و المستقيمين س = ٢ ، س = ٦

٤) اذا كان ق (س) = ٢س - ١ ، فاحسب المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران و محور السينات و المستقيمين س = - ٢ ، س = - ١

❖ **حالة (٢) :** حساب المساحة المحصورة بين اقتران و محور السينات
((الاقتران **يقطع** محور السينات))

*** أمثلة :**

١) اذا كان ق (س) = ٤ - ٢س ، فاحسب المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران و محور السينات و المستقيمين س = - ١ ، س = ٣

الحل : ٤ - ٢س = ٠ >>> ٢س = ٤ >>> س = ٢
(اذن الاقتران يقطع محور السينات)

$$م_{١} = \int_{-١}^{٢} ق(س)\ د\ س = \int_{-١}^{٢} (٤ - ٢س)\ د\ س$$

$$= [٤س - س^{٢}]_{-١}^{٢} = (٨ - ٤) - (-٤ - ١) = ٤ + ٥ = ٩ \text{ وحدات مربعة}$$

$$م_{٢} = \int_{٢}^{٣} ق(س)\ د\ س = \int_{٢}^{٣} (٤ - ٢س)\ د\ س$$

$$= [٤س - س^{٢}]_{٢}^{٣} = (١٢ - ٩) - (٨ - ٤) = ٣ - ٤ = |-١| = ١ \text{ وحدة مربعة}$$

م = م١ + م٢ >>> ٩ + ١ = ١٠ وحدات مربعة

---

٢) اذا كان ق (س) = ٢س - ٦ ، فاحسب المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران و محور السينات في الفترة [٠ ، ٥] .

الحل : ٢س - ٦ = ٠ >>> ٢س = ٦ >>> س = ٣
(اذن الاقتران يقطع محور السينات)

$$م_{١} = \int_{٠}^{٣} ق(س)\ د\ س = \int_{٠}^{٣} (٢س - ٦)\ د\ س$$

$$= [س^{٢} - ٦س]_{٠}^{٣} = (٩ - ١٨) - (٠) = |-٩| = ٩ \text{ وحدات مربعة}$$

$$م_{٢} = \int_{٣}^{٥} ق(س)\ د\ س = \int_{٣}^{٥} (٢س - ٦)\ د\ س$$

$$= [س^{٢} - ٦س]_{٣}^{٥} = (٢٥ - ٣٠) - (٩ - ١٨) = -٥ + ٩ = ٤ \text{ وحدات مربعة}$$

م = م١ + م٢ >>> ٩ + ٤ = ١٣ وحدة مربعة

أ. فيصل السعدون

*** أسئلة :**

١) اذا كان ق (س) = ٤س - ٨ ، فاحسب المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران و محور السينات في الفترة [١ ، ٣] .

٢) اذا كان ق (س) = ٣س^{٢} ، فاحسب المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران و محور السينات في الفترة [- ١ ، ٣] .

أ. فيصل السعدون (٠٧٩٦٠٣٠٦١١)

٣) اذا كان ق (س) = ٨ - ٢س ، فاحسب المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران و محور السينات في الفترة [١ ، ٦] .

٤) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = $س^{٣}$ ، و المستقيم س = -١ ، و محور السينات .

❖ **حالة (٣) :** حساب المساحة المحصورة بين اقتران و محور السينات
(بدون ذكر الفترة)

*** أمثلة :**

١) اذا كان ق (س) = ٩ - س^{٢} ، فاحسب المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران و محور السينات .

الحل :

٩ - س^{٢} = ٠ <<< س^{٢} = ٩ <<< س = -٣ ، ٣

$$م = \int_{-٣}^{٣} ق(س)\ د س = \int_{-٣}^{٣} ٩ - س^{٢}\ د س$$

$$= \left[٩س - \frac{س^{٣}}{٣} \right]_{-٣}^{٣} = (٩ - ٢٧) - (-٩ + ٢٧) = ١٨ + ١٨ = ٣٦ \text{ وحدة مربعة}$$

---

٢) اذا كان ق (س) = س^{٢} - ٤س + ٣، فاحسب المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران و محور السينات .

الحل :

س^{٢} - ٤س + ٣= ٠ <<< (س - ١) (س - ٣) = ٠ <<< س = ١ ، ٣

$$م = \int_{١}^{٣} ق(س)\ د س = \int_{١}^{٣} س^{٢} - ٤س + ٣\ د س$$

$$= \left[\frac{س^{٣}}{٣} - ٢س^{٢} + ٣س \right]_{١}^{٣} = (٩ - ١٨ + ٩) - (\frac{١}{٣} - ٢ + ٣)$$

$$= (٠) - (١ + \frac{١}{٣}) = \left| \frac{-٣}{٤} \right| = \frac{٣}{٤} \text{ وحدة مربعة}$$

أ. فيصل السعدون

*** أسئلة :**

١) اذا كان ق (س) = س^{٢} - ٢س ، فاحسب المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران و محور السينات .

٢) اذا كان ق (س) = س^{٢} - ٢س -٣ ، فاحسب المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران و محور السينات .

٣) اذا كان ع (س) = ٥ - ٥س^{٢} ، فاحسب المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران و محور السينات .

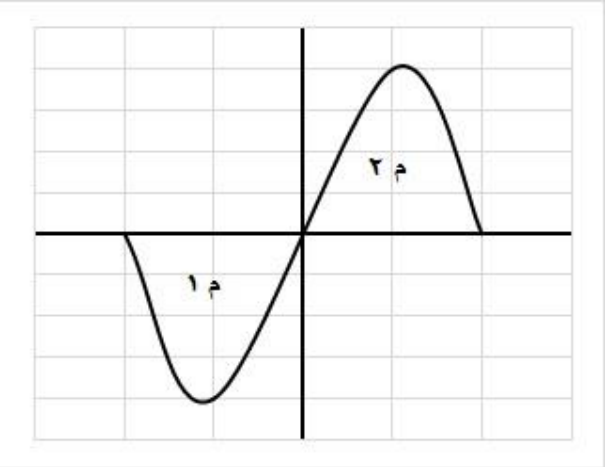
٤) اذا كان ص = س - س^{٣} ، فاحسب المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران و محور السينات .

٥) اذا كان ك (س) = $س^{٢}$ - ٢٥ ، فاحسب المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران و محور السينات .

٦) اذا كان ق (س) = $س^{٢}$ - ٤س ، فاحسب المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران و محور السينات .

❖ **استخدام الرسم البياني :**

*** مثال :**



يمثل الشكل المجاور المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى ق (س) و محور السينات في الفترة [أ ، ب] ، فإذا علمت :
أن مساحة م١ = ٤ وحدات مربعة ،
و مساحة م٢ = ٣ وحدات مربعة .

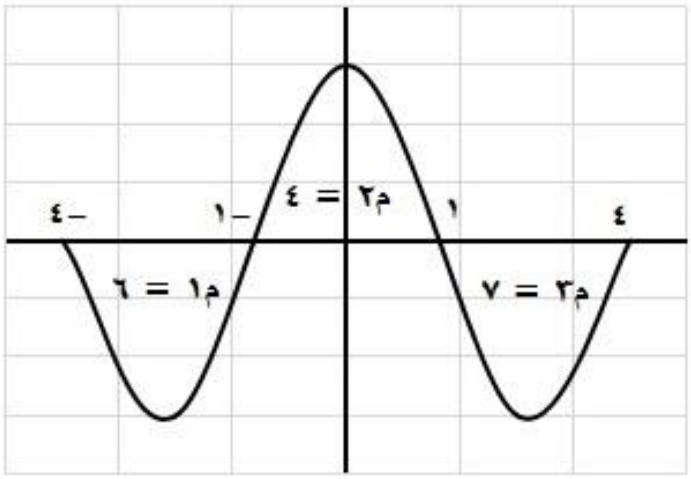
* احسب $\int_{أ}^{ب} ق(س)$ د س ؟؟

الحل : $\int_{أ}^{ب} ق(س)$ د س = $\int_{أ}^{جـ} ق(س)$ د س + $\int_{جـ}^{ب} ق(س)$ د س

= - ٤ + ٣ = -١

*** أسئلة :**

١) اعتماداً على الشكل المجاور أجب عمّا يلي :



* $\int_{-٤}^{-١} ق(س)$ د س =

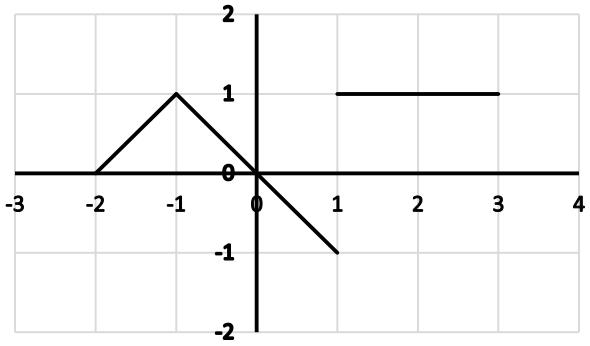
* $\int_{-١}^{-٤} ق(س)$ د س =

* $\int_{-٤}^{١} ق(س)$ د س =

* $\int_{-٤}^{٤} ق(س)$ د س =

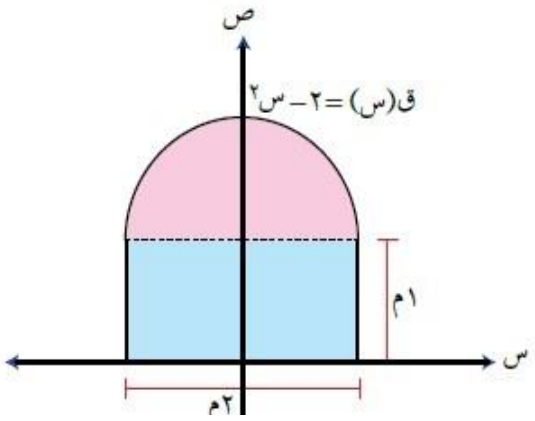
* احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران (ق) و محور السينات على الفترة [-٤ ، ٤]

٢) يمثل الشكل المجاور منحنى الاقتران ق (س) المعرف على الفترة [-٢ ، ٣] اعتماداً على الشكل :



* أوجد $\int_{-٢}^{٣} ق(س)$ د س

٣)



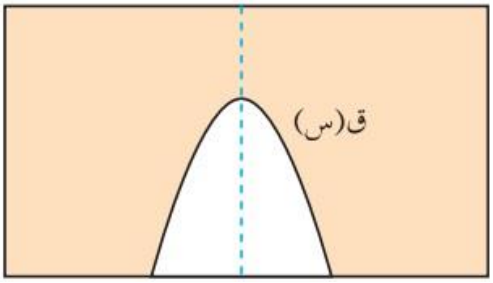
يمثل الشكل المجاور نافذة على شكل مستطيل طول قاعدته (٢) م ، و ارتفاعه (١) م ، يعلوه منحنى يعطى بالقاعدة : ص = ق (س) = ٢ - س٢

إذا أردنا وضع زجاج على النافذة ، و كانت تكلفة المتر المربع الواحد منه خمسة دنانير **فما التكلفة الكلية لزجاج النافذة ؟؟**

أ. فيصل السعدون (٠٧٩٦٠٣٠٦١١)

٤) يمثل الشكل المجاور الواجهة الأمامية لأحد المباني ، مدخل المبنى يمثله منحنى الاقتران

ق (س) = ٢ – $\frac{١}{٢}$ س^{٢} ، ما تكلفة إنشاء باب للمدخل إذا علمت أن سعر الوحدة المربعة منه يساوي ٦٠ دينار ؟



الدرس السادس :

الاقترانان : اللوغاريتمي الطبيعي
و الأسّي الطبيعي و تطبيقاتهما

❖ مشتقة الاقتران الأسي الطبيعي و الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي

* **الحالة الأولى :**

* ق (س) = هـ^{س} >>> ق$'$(س) = هـ^{س}

* ق (س) = لـو$_{هـ}$ س >>> ق$'$(س) = $\frac{١}{س}$

*** أمثلة :**

١) ص = ٢س^{٥} - ٣هـ^{س} - ٢س >>> $\frac{د ص}{د س}$ = ١٠س^{٤} - ٣هـ^{س} - ٢

٢) ص = ٤س – لـو$_{هـ}$ س ، حيث س = ١

$$\frac{د ص}{د س} = ٤ - \frac{١}{س} \quad >>> \quad \frac{د ص}{د س}\Big|_{س=١} = ٤ - \frac{١}{١} = ٣$$

*** سؤال : جد المشتقة الأولى لكل مما يلي :**

١) ق (س) = س^{٢} - ٣هـ^{س} + ٢ ، س = ٠

٢) ص = ٢س^{٤} + ٥ لـو$_{هـ}$ س ، س = ١

٣) ق (س) = ٣ لـو$_{هـ}$ س - ٤هـ^{س}

*** <u>الحالة الثانية :</u>**

$$ن(س) = لـو_{هـ} م(س) \quad >>> \quad ن'(س) = \frac{م'(س)}{م(س)}$$

$$ن(س) = لـو_{هـ} \frac{عدد}{س} \quad >>> \quad ن'(س) = \frac{-١}{س}$$

*** مثال :**

١) ص = لـــو$_{هـ}$ (س^{٣} − ٢س + ٤) <<< $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{٣س^{٢} - ٢}{س^{٣} - ٢س + ٤}$

٢) ص = لـــو$_{هـ}$ جاس <<< $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{جتاس}{جاس}$

*** السؤال الأول :** جد $\frac{د ص}{د س}$ لكل مما يلي :

١) ص = لـــو$_{هـ}$ (س^{٣} + ٨) ، س > - ٢

٢) ص = لـــو$_{هـ}$ (٤س^{٢} − ٥س) ، س = ١

٣) ص = لـــو$_{هـ}$ جتاس

٤) ص = ٤ لـــو$_{هـ}$ ظاس

٥) ص = لـــو$_{هـ}$ $\frac{٣}{س}$

*** السؤال الثاني :**

إذا كان ق (س) = لـــو$_{هـ}$ (أس + ٣) ، حيث (أ) عدد ثابت ، و كان ق$'$(-٢) = ١ ، **<u>فأوجد قيمة (أ)</u>** .

* **الحالة الثالثة :** مشتقة الاقتران الأسي الطبيعي

ص = هـ $^{م(س)}$ فإن $\frac{د ص}{د س}$ = م ` (س) × هـ $^{م(س)}$

*** أمثلة :**

١) ص = هـ $^{س^{٢}-٣س}$ >>> $\frac{د ص}{د س}$ = (٢س − ٣) × هـ $^{س^{٢}-٣س}$

٢) ص = هـ ^{جاس} >>> $\frac{د ص}{د س}$ = جتاس × هـ ^{جاس}

٣) ص = جتاس × هـ ^{جاس} >>> $\frac{د ص}{د س}$ = (جتاس)(جتاس × هـ ^{جاس}) + (−جاس)(هـ ^{جاس}) (قاعدة الضرب)

*** سؤال : جد $\frac{د ص}{د س}$ لكل مما يلي :**

١) ص = هـ $^{٤س^{٢}-٨س}$ =

٢) ص = هـ $^{س^{٢}+٦س-٤}$ =

٣) ص = هـ ^{جتاس} =

٤) ص = ظاس هـ ^{جاس} =

٥) ص = هـ $^{جا٣س^{٢}}$ =

أ. فيصل السعدون (٠٧٩٦٠٣٠٦١١)

٦) ص = ٢س^{٢} هـ^{٥س} − لـو$_{هـ}$(س^{٣} + ١) =

٧) ص = (هـ^{س})(لـو$_{هـ}$ س) =

٨) ص = $\frac{\text{هـ}^{٣س}}{\text{س}^{٢}+١}$ =

٩) ص = هـ$^{\text{جاس}}$ − ٢لـو$_{هـ}$(جتاس) =

❖ تكامل الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي

* $\int$ س$^{-١}$ دس = $\int \frac{١}{س}$ دس = لـو$_{هـ}$|س| + جـ

* $\int \frac{\text{مشتقة الإقتران}}{\text{الإقتران}}$ د س = لـو$_{هـ}$ | الإقتران | + جـ (أو باستخدام طريقة التكامل بالتعويض)

*** أمثلة :**

١) $\int \frac{٤}{س}$ د س = ٤ $\int \frac{١}{س}$ د س = ٤لـو$_{هـ}$|س| + جـ

٢) $\int \frac{٣}{٣س-١}$ د س = لـو$_{هـ}$|٣س − ١| + جـ

أ. فيصل السعدون

*** أسئلة :**

١) $\int \frac{٧}{س}$ د س =

٢) $\int \frac{٣}{٥س}$ د س =

٣) $\int \frac{٣}{٣س - ١٢}$ د س =

٤) $\int \frac{٢س + ٥}{س^{٢} + ٥س + ١٠}$ د س =

٥) $\int \frac{١}{٥س + ١}$ د س =

٦) $\int \frac{٥ - ١٠س}{س^{٢} - س + ٧}$ د س =

❖ <u>تكامل الاقتران الأسّي الطبيعي</u>

* $\int هـ^{س}$ د س = $هـ^{س}$ + جـ

* $\int هـ^{\text{الإقتران}}$ د س = $\frac{هـ^{\text{الإقتران}}}{\text{مشتقة الإقتران}}$ + جـ

أ. فيصل السعدون (٠٧٩٦٠٣٠٦١١)

*** أمثلة :**

١) $\int ٣هـ^{س}\ د س = ٣ \int هـ^{س} + جـ = ٣هـ^{س} + جـ$

٢) $\int هـ^{٥س+٢}\ د س = \frac{هـ^{٥س+٢}}{٥} + جـ$

أسئلة :

١) $\int ٥هـ^{س} - \frac{٢}{س^{٣}}\ د س =$

٢) $\int \frac{٢}{\sqrt[٣]{س}} + \frac{١}{٣}هـ^{س}\ د س =$

٣) $\int ٥هـ^{س+٢}\ د س =$

٤) $\int ٦هـ^{٩-٣س}\ د س =$

٥) $\int ٣س^{٢} هـ^{س^{٣}+٢}\ د س$

٦) $\int (٦س - ١) \times هـ^{٣س^{٢}-س}$ د س

٧) $\int ٦س هـ^{س^{٢}}$ د س

٨) $\int ٣س هـ^{٦س^{٢}-٣}$ د س

٩) $\int \frac{٦ ٤س}{هـ^{١-٢س}}$ د س

*** **<u>أسئلة إضافية للدرس السادس (مهمة جداً)</u>** :

١) اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق (س) عند النقطة (س١ ، ص١) يساوي (٢هـس +٢ س)، و كان المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ٤) ، فجد قاعدة الاقتران (ق) ؟

٢) اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران (ق) عند النقطة (س ، ص) يساوي (هـ$^{٣-س}$) ،
فاكتب قاعدة الاقتران (ق) علماً بأنه يمر بالنقطة (٣ ، ١) ؟

٣) تتحرك نقطة مادية على خط مستقيم بحيث تكون سرعتها بعد (ن) ثانية معطاه بالعلاقة
ع (ن) = هـ$^{ن+١}$ + $\frac{٨}{ن}$ ، حيث ن > صفر ،
جد الاقتران الذي يمثل موقع النقطة المادية بعد مرور (ن) ثانية من بدء الحركة

الدرس السابع : النمو و الاضمحلال

* قيمة الظاهرة المدروسة = ص = ع (ن)

* ع (ن) = $ع_{\circ} \times هـ^{أن}$

* حيث : $ع_{\circ}$ = القيمة الابتدائية

هـ = العدد النيبيري (٢,٧)

ن = الزمن

أ = عدد ثابت يمثل النسبة (المعدل)

*** مثال :**

إذا كان عدد سكان بلدة يخضع لقانون النمو ، و يتزايد بانتظام و استمرار بمعدل ٢% سنوياً ، و كان عدد سكانها (٤٠) ألف نسمة عام ١٩٩٠ م ، فكم سيبلغ عدد سكانها عام ٢٠٤٠ م ؟

الحل : $ع_{\circ}$ = ٤٠٠٠٠ ، أ = ٠,٠٢ ، ن = ٢٠٤٠ - ١٩٩٠ = ٥٠ عام

ع (ن) = $ع_{\circ} \times هـ^{أن}$

ع (٥٠) = ٤٠٠٠٠ x $(٢,٧)^{٠,٠٢ \times ٥٠}$

= ٤٠٠٠٠ x ٢,٧ = ١٠٨٠٠٠ نسمة (عدد سكان البلدة عام ٢٠٤٠)

*** أسئلة :**

١) اقترض أحمد مبلغ ١٠٠٠٠ دينار من مصرف يحسب ربحاً مركباً منتظماً وفق قانون النمو ، بنسبة ربح مقدارها ٤ % سنوياً ، جد جملة المبلغ الذي سيسدده أحمد للمصرف بعد مرور ٢٥ سنة ؟

أ. فيصل السعدون

٢) تتحلل مادة مشعة بصورة منتظمة وفق قانون الاضمحلال ، و بمعدل تناقص كقداره (٠,٠٠٠٢) سنوياً
جد كتلة المادة المشعة المتبقية بعد مرور (٥٠٠٠) سنة ، علماً بأن كتلة المادة الأصلية هي (٥٤٠) غراماً.

٣) يتناقص ثمن عقار بمرور الزمن ، وبصورة مستمرة منتظمة وفق قانون الاضمحلال
بمعدل ٥ % سنوياً ، فإذا كان ثمنه الأصلي ٨٠٠٠٠ دينار ، فكم يصبح ثمنه بعد مرور (٤٠) سنة ؟ .

٤) يتزايد سعر قطعة أرض وفق قانون النمو بمرور الزمن ، و بصورة مستمرة منتظمة ،
فإذا ازداد سعرها من (٤٠٠) ألف إلى (٨٠٠) ألف دينار خلال ١٠ سنوات ، فجد سعرها بعد (٣٠) سنة ؟

٥) تتكاثر البكتيريا بصورة مستمرة منتظمة وفق قانون النمو بنسبة ٢٠٠ % في الساعة ،
فجد عددها بعد نصف ساعة ، علماً بأن عددها الابتدائي (٥٠٠٠٠٠)

٦) يذوب ملح في الماء ، و تخضع كتلة الملح المتبقية من دون الذوبان في الماء لقانون الاضمحلال
إذا وضعت (١٠) كغم من الملح في الماء ، فذاب نصف الكمية بعد مرور ربع ساعة ،
فجد كتلة الملح المتبقية من دون الذوبان في الماء بعد ساعة و ربع الساعة .

بسم الله الرحمن الرحيم

الوحدة الثانية

(الإحصاء و الاحتمالات)

الدرس الأول : مبدأ العد

*** أمثلة :**

١) مطعم ما يقدم (٤) أنواع من الساندويتشات و (٦) أنواع من المشروبات ،
أوجد عدد الطرق التي يمكن لزبون معين أن يتناول بها وجبة مكونة من ساندويتش و مشروب ؟

الحل : ٤ × ٦ = ٢٤ طريقة

---

٢) أراد فيصل السفر من اربد إلى العقبة مروراً بعمان ، فإذا كان أمامه طريقتان للسفر من اربد إلى الطفيلة و هما السيارة أو الباص ، و ثلاثة طرق من عمّان إلى العقبة و هما السيارة أو الباص أو الطائرة ، فكم طريقة أمام فيصل للسفر من اربد إلى العقبة مرورا بعمّان ؟

الحل : ٢ × ٣ = ٦ طرق

---

٣) كم عدد من ثلاث منازل يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }

أ) اذا سُمح بتكرار الأرقام ؟

ب) اذا لم يُسمح بتكرار الأرقام ؟

الحل :

أ) ٤ × ٤ × ٤ = ٦٤ عدد

ب) ٤ × ٣ × ٢ = ٢٤ عدد

أ. فيصل السعدون

*** أسئلة :**

١) أراد أحد الطلبة شراء قلم و مسطرة و دفتر من إحدى المكتبات ، حيث وجد فيها ثلاثة أنواع مختلفة من الأقلام ، و نوعين من المساطر ، وأربعة أنواع من الدفاتر ، فبكم طريقة يمكن للطالب شراء قلم و مسطرة و دفتر ؟

٢) أراد خالد السفر من العقبة الى دمشق مروراً بعمان ، فإذا كان أمامه طريقتان للسفر من العقبة الى عمان و هما السيارة أو الطائرة ، و ثلاثة طرق من عمّان الى دمشق و هما السيارة أو القطار أو الطائرة ، فكم طريقة أمام خالد للسفر من العقبة الى دمشق مرورا بعمّان ؟

٣) اذا كان عدد المعلمين في إحدى المدارس ١٥ معلماً ، فبكم طريقة يمكن تكوين لجنة ثلاثية مؤلفة من رئيس و أمين سر و أمين صندوق ؟

٤) أرادت دائرة السير صنع لوحات معدنية للسيارات تحمل كل منها حرفاً من حروف الهجاء العربية متبوعاً بعدد من رقمين (خانتين) من مجموعة الأرقام { ١ ، ٢ ، ٣ ،.... ٩ } ، فبكم لوحة مختلفة يمكن صنعها اذا علمت أن عدد حروف اللغة العربية (٢٨) حرفاً ؟

٥) يتكون مجلس إدارة احدى الشركات من خمسة أعضاء ، كم طريقة يمكن بها اختيار رئيس و نائب الرئيس من بين أعضاء مجلس إدارة الشركة ؟

٦) ما هي عدد الطرق التي يمكن أن يجلس بها شخصان في خمسة مقاعد مختلفة و موضوعة في صف واحد (على استقامة واحدة) ؟

٨) تعمل ١٠ حافلات لنقل الركاب بين مدينتي مأدبا و عمّان و تعمل ٣٠ حافلة أخرى بين عمّان و الزرقاء ، فإذا أراد راكب أن يسافر من مأدبا إلى الزرقاء مروراً بعمّان ، ثم يعود سالكاً الطريق نفسه ، فبكم طريقة يمكنه عمل ذلك شريطة ألا يركب الحافلة نفسها في أثناء رحلته ؟

٩) بكم طريقة يمكن تكوين عدد من ٣ منازل من مجموعة الأعداد الفردية التي هي أكبر من ٤ و أقل من أو تساوي ١٥ ، في حال :
أ) سُمح بتكرار الأرقام ب) لم يُسمح بتكرار الأرقام .

❖ **المضروب :** يرمز له ن !

* القاعدة : ن ! = ن × (ن - ١) × (ن - ٢) × (ن - ٣) × ..... الخ

* للتوضيح :

٠ ! = ١ ، ١ ! = ١ ، ٢ ! = ٢ × ١ = ٢ ، ٣ ! = ٣ × ٢ × ١ = ٦

٤ ! = ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٢٤ ، ٥ ! = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ١٢٠

٦ ! = ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٧٢٠

*** أمثلة :**

١) ما هي عدد الطرق التي يمكن أن يجلس بها خمسة أشخاص في خمسة مقاعد و موضوعة في صف واحد (على استقامة واحدة) ؟

الحل : ٥ ! = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ١٢٠ طريقة

٢) جد قيمة كل مما يلي :

أ) (٢ x ٣) ! = ٦ ! = ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٧٢٠

ب) (٢ + ٣) ! = ٥ ! = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ١٢٠

ج) $\frac{٨!}{٦!} = \frac{٨ \times ٧ \times \cancel{٦!}}{\cancel{٦!}} = ٨ \times ٧ = ٥٦$

*** أسئلة :**

١) بكم طريقة يمكن ترتيب (٤) كتب على رف المكتبة في صف واحد ؟

٢) جد قيمة كل مما يلي :

أ) (١ x ٤) ! =

ب) ٢ ! x ٣ ! =

ج) ٣ ! - ٠ ! =

د) $= \frac{٧!}{(٢-٧)!}$

هـ) $= \frac{٦!}{٤! \times ٢!}$

ز) (٤ - ٤) ! =

و) ٤ ! + ٣ ! =

ي) (٤ - ٣) ! x ٣ ! =

أ. فيصل السعدون

٣) جد قيمة (ن) لكل مما يلي :

أ) ٣ (ن !) = ٣٦٠

ب) ٤ + ٢(ن !) = ٥٢

ج) (٢ن + ١) ! = ١٢٠

د) ن ! - ٤ ! = ٩٦

هـ) -٦ + (ن + ١) ! = ٠ ! + ١٧

و) $\frac{\text{ن!}}{(\text{ن}-٢)!} = ١٢$

ي) $\frac{(\text{ن}+١)!}{(\text{ن}-١)!} = ٣٠$

الدرس الثاني : التبادل و التوافيق

❖ **التباديل :** (الترتيب مهم و له معنى)

* الصورة العامة للتباديل : ل (ن ، ر) = $\frac{\text{ن!}}{\text{(ن – ر)!}}$

حيث ن = عدد العناصر ، ر = عدد الحدود

* **حالات خاصة :** ل (ن ، ١) = ن ، ل (ن ، ٠) = ١ ، ل (ن ، ن) = ن !

*** أمثلة :**

١) كم عدد تباديل مجموعة من ستة عناصر مأخوذة ثلاثة عناصر كل مرة ؟

الحل : ل (٦ ، ٣) = ٦ x ٥ x ٤ = ١٢٠

---

٢) جد قيمة كل مما يلي :

أ) ل (٧ ، ٤) = ٧ x ٦ x ٥ x ٤ = ٨٤٠

ب) $\frac{\text{ل(٨،٣)}}{\text{!٣}} = \frac{٦\times٧\times٨}{١\times٢\times٣} = \frac{\cancel{٦}\times٧\times٨}{\cancel{٦}} = ٥٦$

ج) ل (٥ ، ١) = ٥

د) ل (٤ ، ٠) = ١

هـ) ل (٣ ، ٣) = ٣ ! = ٦

*** أسئلة :**

١) كم كلمة مكونة من ثلاثة حروف يمكن تكوينها من مجموعة الأحرف { أ ، ب ، جـ ، د ، هـ } ، علما بأنه ليس ضرورياً أن يكون للكلمة معنى ؟

٢) بكم طريقة يمكن اختيار رئيس منتدى ثقافي ، ومساعد له ، و أمين سر ، و أمين صندوق مختلفين ، من بين ١٠ أعضاء منتسبين إلى هذا النادي ؟

٣) ما عدد طرائق اختيار رئيس شركة ، و نائب له ، و مدير مالي من بين ٢٠ موظفاً في الشركة ، علماً بأن الشخص الواحد لا يشغل أكثر من وظيفة واحدة في الشركة ؟

٤) جد قيمة كل مما يلي :

أ) ل (٧ ، ٢) =

ب) ل (٩ ، ٣) =

ج) ل (٨ ، ٠) =

د) ل (٩ ، ١) =

هـ (٧ ، ٧) =

أ. فيصل السعدون (٠٧٩٦٠٣٠٦١١)

و) $\frac{\text{ل}(٣،٦)}{!٣} =$

ي) $\frac{\text{ل}(٠،١٤)}{\text{ل}(٣،٨)} =$

*** أمثلة :**

١) اذا كان ل (٦ ، ر) = ١٢٠ ، **أوجد قيمة (ر) ؟؟**

الحل : نبدأ بالعدد الأول ثم نطرح (١) حتى نصل إلى أن حاصل ضربهم = القيمة المعطاة

٦ x ٥ x ٤ = ١٢٠

---

٢) اذا كان ل (ن ، ٢) = ٧٢ ، **أوجد قيمة (ن) ؟؟**

الحل : نبحث عن عددين متتاليين يكون حاصل ضربهما = القيمة المعطاة

٩ x ٨ = ٧٢

*** أسئلة :**

١) جد قيمة (ر) في كل مما يلي :

أ) ل (٥ ، ر) = ٦٠

ب) ٣ل (٦ ، ر) = ٩٠

ج) ٥ ل (٥ ، ر) = ١٠٠

أ. فيصل السعدون

د) ٣ + ٢ ل (٦ ، ر) = ٤ ! + ٣٩

---

٢) جد قيمة (ن) في كل مما يلي :

أ) ل (ن ، ٣) = ٦٠

ب) ل (ن ، ٢) = ٥٦

ج) ٤ل (ن ، ٢) = ١٢٠

د) ل (ن ، ٣) = ٩ل (ن ، ٢)

---

٣) عبّر عمّا يلي باستخدام التباديل :

أ) ١٧ x ١٦ x ١٥ x ١٤ x ١٣

ب) ك x (ك - ١) x (ك - ٢) ، ك ≥ ٣

أ. فيصل السعدون

❖ **التوافيق :** (الترتيب غير مهم و ليس له معنى)

* الصورة العامة : $\binom{ن}{ر} = \frac{ل(ن،ر)}{ر!} = \frac{ن!}{ر! \times (ن-ر)!}$ ، تقرأ (ن) فوق (ر)

* **حالات خاصة :** $\binom{ن}{٠} = ١$ ، $\binom{ن}{١} = ن$ ، $\binom{ن}{ن} = ١$

*** مثال : جد قيمة كل مما يلي :**

أ) $\binom{٦}{٢} = \frac{ل(٦،٢)}{٢!} = \frac{٦ \times ٥}{٢} = ١٥$

ب) $\binom{٥}{٢} \times \binom{٥}{٣} = \frac{٥ \times ٤}{٢!} \times \frac{٥ \times ٤ \times ٣}{٣!} = \frac{٢٠}{٢} \times \frac{٦٠}{٦} = ١٠٠$

ج) $\binom{٥}{٥} = \frac{ل(٥،٥)}{٥!} = \frac{٥!}{٥!} = ١$

د) $\binom{٧}{٠} = \frac{٧!}{٧!} = ١$

هـ) $\binom{٧}{١} = ٧$

*** سؤال : جد قيمة كل مما يلي :**

١) $\binom{٨}{٣} =$

٢) $\binom{١٠٠}{٩٧} =$

٣) $\binom{٥}{٤} =$

٤) $\binom{٦}{٤} \times \binom{٦}{٣} =$

٥) $\binom{٨}{١} \times \binom{٩}{٢} =$

٦) $\binom{٩}{٩} =$

٧) $\binom{١٤}{١} =$

٨) $\binom{٢}{٠} =$

❖ **قاعدة :** ١) $\binom{ن}{ر} = \binom{ن}{ن - ر}$

٢) اذا كان $\binom{ن}{ر_١} = \binom{ن}{ر_٢}$ ، فإن $ر_١ = ر_٢$ أو $ر_١ + ر_٢ = ن$

*** مثال : جد قيمة ما يلي :**

١) $\binom{٩}{٢}$ ، $\binom{٩}{٧}$

الحل : $\binom{٩}{٢} = \frac{ل(٩،٢)}{٢!} = \frac{٩ \times ٨}{!٢} = ٣٦$

$\binom{٩}{٧} = \frac{٩ \times ٨ \times \cancel{٧}}{!٢ \times \cancel{٧}} = \frac{٧٢}{٢} = ٣٦$

* نلاحظ أن $\binom{٩}{٢} = \binom{٩}{٧}$ و أن ٢ + ٧ = ٩

---

٢) $\binom{١٢}{س} = \binom{١٢}{٥}$ الحل : س = ٥ أو س + ٥ = ١٢ >> س = ٧

٣) $\binom{س}{٥} = \binom{س}{٨}$ الحل : س = ٥ + ٨ = ١٣

سؤال : حل المعادلات الآتية :

١) $\binom{٩}{س} = \binom{٩}{٥}$

٢) $\binom{١٢}{س} = \binom{١٢}{٧}$

٣) $\binom{١٥}{٣} = \binom{١٥}{س+١}$

٤) $\binom{٩}{٣س} = \binom{٩}{٣}$

٥) $\binom{س}{٣} = \binom{س}{٩}$

٦) $\binom{س}{٣} = \binom{س}{٧}$

٧) $\binom{٥}{س} = ١$

٨) $\binom{١١}{س} = ١١$

٩) $\binom{س}{١} = ٧$

*** مثال :**

١) بكم طريقة يمكن إجراء مباريات التصفية النهائية لكرة القدم بين أربعة فرق رياضية ؟

الحل : $\binom{٤}{٢} = \frac{ل(٢،٤)}{!٢} = \frac{٣ \times ٤}{٢} = ٦$

---

٢) مجموعة مكونة من (٨) معلمين و (٣) إداريين ، أوجد عدد الطرق التي يمكن من خلالها تكوين لجنة ثلاثية منهم في كل من الحالات التالية :

أ) تتكون اللجنة من معلمَيْن و إداري
ب) تتكون اللجنة من معلمَيْن على الأقل .
ج) رئيس اللجنة و نائبه من الإداريين و الباقي من المعلمين .
د) لا تضم اللجنة أي إداري .

الحل :

أ) عدد طرق اختيار معلمَيْن x عدد طرق اختيار الإداري

$$\binom{٨}{٢} \times \binom{٣}{١} = ٣ \times \frac{٧ \times ٨}{٢} = ٣ \times ٢٨ = ٨٤ \text{ طريقة}$$

ب) عدد طرق اختيار معلمَيْن x عدد طرق اختيار الإداري + عدد طرق اختيار ثلاثة معلمين

$$\binom{٨}{٢} \times \binom{٣}{١} + \binom{٨}{٣} = ٣ \times \frac{٧ \times ٨}{٢} + \frac{٦ \times ٧ \times ٨}{٦} = ٣ \times ٢٨ + ٥٦ = ١٤٠ \text{ طريقة}$$

ج) طرق تكوين اللجنة =

عدد طرق اختيار الرئيس x عدد طرق اختيار نائب الرئيس x عدد طرق اختيار معلم

$$\binom{٣}{١} \times \binom{٢}{١} \times \binom{٨}{١} = ٣ \text{ x } ٢ \text{ x } ٨ = ٤٨ \text{ طريقة}$$

د) تتألف اللجنة جميعها من المعلمين : $\binom{٨}{٣} = \frac{٦ \times ٧ \times ٨}{٦} = ٥٦$

*** أسئلة :**

١) ما عدد الطرق الممكنة لاختيار (٥) أسئلة للإجابة عنها في امتحان الرياضيات الذي يتكون من ٧ أسئلة ؟

٢) ما عدد الطرق التي يمكن بها إجراء مباريات التصفية النهائية للعبة الشطرنج من بين (٦) لاعبين ؟

٣) بكم طريقة يمكن اختيار معلمَيْن و طالبَيْن لتشكيل لجنة مكونة من بين (٥) معلمين و (٩) طلاب ؟

٤) اذا كان عدد أعضاء مجلس إدارة إحدى الشركات (١٠) أعضاء ، و كان من ضمنهم (٤) سيدات ، ما عدد طرق اختيار رجلين و سيدة من الأعضاء لتمثيل الشركة في أحد المؤتمرات ؟

٥) بكم طريقة يمكن اختيار (٣) معلمين و طالبَيْن لتشكيل لجنة مكونة من بين (٦) معلمين و (١٠) طلاب ؟

أ. فيصل السعدون (٠٧٩٦٠٣٠٦١١)

٦) يراد اختيار فريق طبي حماسي لتمثيل مستشفى في مؤتمر صحي ، من بين ٥ أطباء و ٦ ممرضين ، فبكم طريقة يمكن تكوين الفريق في كل من الحالات التالية :

أ) يتكون الفريق من (٣) أطباء و ممرضيْن إثنيْن .
ب) يتكون الفريق من طبيبيْن إثنين على الأكثر .
ج) رئيس الفريق و نائبه من الأطباء و الباقي من الممرضين .

*** أسئلة منوعة :** **١) حل المعادلات التالية :**

أ) $\binom{ن}{٣} = ١٠$

ب) $\binom{ن}{٢} = ٣٦$

أ. فيصل السعدون (٠٧٩٦٠٣٠٦١١)

٢) اذا كان $\binom{ن}{٣} = ٢٠$ ، **أوجد ل (ن ، ٣) ؟؟**

٤) اذا كان ل (ن ، ر) = ٢٠ و $\binom{ن}{ر} = ١٠$ ، **أوجد قيم (ن) و (ر) ؟؟**

٥) اذا كان ل (ن ، ر) = ٢١٠ و $\binom{ن}{ر} = ٣٥$ ، **أوجد قيم (ن) و (ر) ؟؟**

الدرس الثالث :
المتغير العشوائي المنفصل و توزيع ذات الحدين

❖ **أولا : المتغير العشوائي المنفصل**

* **التعريف :** هو اقتران معرّف من الفضاء العيني إلى مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية و تستخدم الرموز (س ، ص ، ع ، ....) للدلالة على المتغيرات العشوائية .

* الفضاء العيني يرمز له (Ω) و تلفظ أُميجا

*** مثال :**

اذا دلّ المتغير العشوائي (س) على عدد مرات ظهور الصورة عند رمي قطعة نقود مرتين و دلّ الرمز (ص) للصورة و الرمز (ك) للكتابة ،

أوجد القيم الممكنة للمتغير العشوائي (س) ، و جدول التوزيع الاحتمالي .

الحل : Ω = { (ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك) }

س (ص ، ص) = ٢
س (ص ، ك) = ١
س (ك ، ص) = ١
س (ك ، ك) = ٠

* قيم (س) = { ٠ ، ١ ، ١ ، ٢ }

*** احتمال الحادث (ح)** = $\frac{\text{عدد عناصر الحادث ح}}{\text{عدد عناصر } \Omega}$

ل (س = ٢) = ل (ص ، ص) = $\frac{١}{٤}$

ل (س = ١) = ل (ص ، ك) + ل (ك ، ص) = $\frac{٢}{٤}$

ل (س = ٠) = ل (ك ، ك) = $\frac{١}{٤}$

أ. فيصل السعدون

*** جدول التوزيع الاحتمالي :**

س	٠	١	٢
ل (س)	$\frac{١}{٤}$	$\frac{٢}{٤}$	$\frac{١}{٤}$

*** التوزيع الاحتمالي :**

$\{ (٠ ، \frac{١}{٤}) ، (١ ، \frac{٢}{٤}) ، (٢ ، \frac{١}{٤}) \}$

*** ملاحظة :**

١) ل (س) ≥ صفر

٢) $\sum$ ل (س) = ١

*** أسئلة :**

١) اذا دلّ المتغير العشوائي (س) على عدد الأطفال الإناث في تجربة اختيار عشوائي لعائلة لديها ٣ أطفال ، و تسجيل النتائج حسب الجنس و تسلسل الولادة ،

أوجد : أ) قيم (س) ب) جدول التوزيع الاحتمالي ج) بيّن أن (ل) هو اقتران احتمال .

أ. فيصل السعدون (٠٧٩٦٠٣٠٦١١)

٢) اذا دلّ المتغير العشوائي (س) على عدد مرات ظهور الكتابة عند رمي قطعة نقود مرتين و دلّ الرمز (ص) للصورة و الرمز (ك) للكتابة ،

أوجد : أ) القيم الممكنة للمتغير العشوائي (س) ب) جدول التوزيع الاحتمالي

٣) اذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س) معطى بالمجموعة :

{ (٠ ، ٠,٢) ، (١ ، ٠,٤) ، (٢ ، ب) } **، أوجد قيمة (ب) ؟؟**

٤) اذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س) معطى بالمجموعة :

{ (٠ ، ٠,٢) ، (١ ، ٠,٣) ، (٢ ، ٠,١) (٣ ، ٣ب) } **، أوجد قيمة (ب) ؟؟**

٥) يمثل الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س) :

س	٠	١	٢	٣
ل (س)	٠,١٢	ب	٠,٤٥	٠,٢٥

*** أوجد قيمة (ب) ؟؟**

❖ ثانيا : توزيع ذات الحدين

*** الصورة العامة :** $ل (س = ر) = \binom{ن}{ر} \times (أ)^{ر} \times (١ - أ)^{ن - ر}$

حيث أن :

ن = عدد مرات إجراء التجربة (العدد الكلي) .

ر = العدد المطلوب من التجربة .

أ = احتمال النجاح في المحاولة الواحدة .

س = عدد مرات النجاح .

*** مثال :** اذا كان (س) متغير عشوائياً ذا الحدين ، معاملاه ن = ٤ ، أ = ٠,٢ ، أوجد كل ما يلي :

١) ل (س = ٣) ٢) ل (س > ٣) ٣) ل (س ≥ ١)

الحل : ١) $ل (س = ٣) = \binom{٤}{٣} \times (٠,٢)^{٣} \times (٠,٨)^{١} = ٠,٠٢٥٦$

٢) $ل (س > ٣) = ل (س = ٤) = \binom{٤}{٤} \times (٠,٢)^{٤} \times (٠,٨)^{٠} = ٠,٠٠١٦$

٣) ل (س ≥ ١) = ل (س = ١) + ل (س = ٠)

$\binom{٤}{١} \times (٠,٢)^{١} \times (٠,٨)^{٣} + \binom{٤}{٠} \times (٠,٢)^{٠} \times (٠,٨)^{٤} = ٠,٨١٩٢$

أ. فيصل السعدون

*** أسئلة :**

١) اذا كان (س) متغير عشوائياً ذا الحدين ، معاملاه ن = ٥ ، أ = ٠,٣ ، **أوجد كل ما يلي :**

١) ل (س = ٢) ٢) ل (س < ١) ٣) ل (س ≤ ٤)

٢) اذا كان (س) متغير عشوائياً ذا الحدين ، معاملاه ن = ٥ ، أ = ٠,٤ ، **أوجد كل ما يلي :**

١) ل (س = ٢) ٢) ل (س = ٤) ٣) ل (س ≥ ١)

٤) ل (س > ٣) ٥) ل (٢ < س ≤ ٤)

أ. فيصل السعدون (٠٧٩٦٠٣٠٦١١)

*** أمثلة :**

١) عند رمي حجر نرد أربع مرات متتالية ، ما احتمال ظهور العدد (٢) في ثلاث رميات ؟

الحل : ل (س = ٣) = $\binom{٤}{٣} \times (\frac{١}{٦})^{٣} \times (\frac{٥}{٦})^{١}$

---

٢) إذا كان احتمال أن يصيب شخص هدفاً في كل سهم يرميه على الهدف يساوي (٠,٧) ، فإذا أطلق (٥) طلقات على الهدف فما احتمال :

أ) إصابة الهدف ٣ مرات **ب)** إصابة الهدف ٥ مرات **ج)** عدم إصابة الهدف

الحل : ن = ٥ ، أ = ٠,٧

أ) ل (س = ٣) = $\binom{٥}{٣}$ x (٠,٧)^{٣} x (٠,٣)^{٢} = ١٠ x ٠,٣٤٣ x ٠,٩ = ٠,٣٠٨٧

ب) ل (س = ٥) = $\binom{٥}{٥}$ x (٠,٧)^{٥} x (٠,٣)^{٠} = ٠,١٦٨٧

ج) ل (س = ٠) = $\binom{٥}{٠}$ x (٠,٧)^{٠} x (٠,٣)^{٥} = ٠,٠٠٢٤٣

*** أسئلة :**

١) عند رمي حجر نرد خمس مرات متتالية ، ما احتمال ظهور العدد (٤) في ثلاث رميات ؟

أ. فيصل السعدون

٢) إذا كان احتمال أن يصيب شخص هدفاً في كل سهم يرميه على الهدف يساوي (٠,٦) ،
فإذا أطلق (٤) طلقات على الهدف فما احتمال :

أ) إصابة الهدف ٣ مرات ب) إصابة الهدف ٤ مرات ج) عدم إصابة الهدف

د) إصابة الهدف مرة واحدة على الأكثر هـ) إصابة الهدف مرة واحدة على الأقل

أ. فيصل السعدون (٠٧٩٦٠٣٠٦١١)

٣) مصنع به (٥) آلات من نوع واحد ، اذا كان احتمال أن تحتاج أي آلة إلى إصلاح في السنة الخامسة من عمرها هو (٠,٢) **فاحسب احتمال** :

أ) ألّا تحتاج أي من الآلات إلى إصلاح .

ب) أن تحتاج اثنتان فقط إلى إصلاح .

ج) أن تحتاج اثنتان على الأكثر إلى إصلاح .

د) أن تحتاج واحدة على الأقل إلى إصلاح .

٤) اذا كانت نسبة الإنبات في بذور البندورة تساوي ٨٠ % ، و تم زراعة خمس بذرات في إحدى الحدائق ،
فما احتمال إنبات : **أ)** خمس بذرات **ب)** ثلاث بذرت على الأقل ؟؟

٥) اذا كانت نسبة القطع المعيبة في إنتاج أحد المصانع ١٠% ، فإذا أخذت (٥) قطع من إنتاج المصنع بطريقة عشوائية ، **فما احتمال** :

أ) أن لا تجد أي قطعة معيبة

ب) أن يكون بينها قطعة واحدة معيبة

ج) أن لا يزيد عدد القطع المعيبة على قطعة واحدة

٦) اذا كان احتمال نجاح عملية جراحية يساوي ٨٠ % ، فما احتمال نجاح عمليتين على الأقل ، في حال أجريت ثلاث عمليات ؟؟

٧) اذا كانت نسبة التالف من إنتاج مصنع لأجهزة الحاسوب تساوي (٠,٠٠١) ، وأخذت عينة حجمها (٥) أجهزة بطريقة عشوائية ، فما احتمال أن تكون جميعها صالحة ؟؟

٨) يحتوي صندوق على أربع كرات بيضاء و ست كرات حمراء ، سُحبت من الصندوق ثلاث كرات على التوالي مع الإرجاع ، اذا دلّ المتغير لعشوائي (س) على عدد الكرات البيضاء المسحوبة ، كوّن جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س) .

٩) إذا دلَّ المتغير العشوائي (س) على مجموع العددين الظاهريْن في تجربة إلقاء حجريْ نرد ، و ملاحظة الرقمين على الوجهيْن الظاهريْن ، فأجب عمّا يلي :

أ) جد القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي (س)
ب) اكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س) .
ج) بيّن أن (ل) هو اقتران احتمال .

*** أسئلة منوعة :**

١) اذا كان (س) متغيراً عشوائياً ذا الحدين معاملاه ن = ٣ ، أ = ٠,٢

أوجد : أ) قيم (س) ب) جدول التوزيع الاحتمالي .

٢) اذا كان (س) متغيراً عشوائياً ذا الحدين معاملاه ن = ٤ ، أ = ٠,٣

أوجد : أ) ل (س = ٢) ب) ل (س ≤ ٣)

أ. فيصل السعدون (٠٧٩٦٠٣٠٦١١)

٣) اذا كان (س) متغيراً عشوائياً ذا الحدين معاملاه ن = ٣ ، و كان ل (س ≤ ١) = $\frac{١٩}{٢٧}$

أوجد : **١) قيمة (أ)** **٢) ل (س = ٢)**

الدرس الرابع : العلامة المعيارية

❖ **العلامة المعيارية :** $ز_{س} = \frac{س - \bar{س}}{ع}$

حيث أن : $ز_{س}$ = العلامة المعيارية
س = العلامة الأصلية
$\bar{س}$ = الوسط الحسابي
ع = الانحراف المعياري

*** ملاحظة :**

في حالة المقارنة نأخذ العلامة المعيارية الأكبر

أ. فيصل السعدون (٠٧٩٦٠٣٠٦١١)

*** مثال :**

اذا كان الوسط الحسابي لعلامات طالبات الصف الثاني عشر الأدبي في العلوم الإسلامية (٦٥) و الانحراف المعياري لها (٥) ، **فجد العلامة المعيارية** لعلامات رنا ، حنان ، آمنة ، اذا كانت علاماتهن في العلوم الإسلامية على الترتيب : ٧٥ ، ٦٥ ، ٦٠ .

الحل :

$$ز_{٧٥} = \frac{٦٥ - ٧٥}{٥} = ٢ \quad ، \quad ز_{٦٥} = \frac{٦٥ - ٦٥}{٥} = \text{صفر} \quad ، \quad ز_{٦٠} = \frac{٦٥ - ٦٠}{٥} = -١$$

*** أسئلة :**

١) اذا كان الوسط الحسابي لتوزيع معين يساوي (٧٢) و الانحراف المعياري يساوي (٨) ، **فأوجد العلامات المعيارية** للعلامات ٨٤ ، ٢٠ ، ٧٥ ، ٧٢ .

٢) اذا كانت علامة سناء في اللغة العربية (٨٠) ، و في اللغة الإنجليزية (٧٠) ، و كان الوسط الحسابي لعلامات اللغة العربية (٦٨)، و الانحراف المعياري (٨) ، أما الوسط الحسابي للغة الإنجليزية (٥٠) و الانحراف المعياري (١٠) ، **أي المادتين كان مستوى تحصيل سناء افضل ؟؟**

أ. فيصل السعدون (٠٧٩٦٠٣٠٦١١)

٣) اذا كان الوسط الحسابي لعلامات طلاب الصف العاشر في الرياضيات (٧٠)
و الانحراف المعياري لها (١٠) ، **فجد العلامة المعيارية** لعلامات خالد ، محمد ، سامر ،
اذا كانت علاماتهم في الرياضيات على الترتيب : ٨٠ ، ٧٠ ، ٥٥ ؟

٤) اذا كان الوسط الحسابي لعلامات طلاب التوجيهي فرع العلمي في اللغة العربية (٧٥)
و الانحراف المعياري له (١٤) ، و الوسط الحسابي لعلامات شعبة الأدبي (٨٠) ،
و الانحراف المعياري لها (١٠) ، و كانت علامة إحدى الطلبة في شعبة العلمي (٦٠) ،
و علامة إحدى الطلبة في شعبة الأدبي (٩٠) ، **فأي العلامتين أفضل ؟**

* **ملاحظة :** تكون $|ز|$ مساوية لعدد الانحرافات المعيارية التي تنحرفها المشاهدة (س)
عن الوسط الحسابي للتوزيع ،

اما إشارة (ز) تدل على موقع المشاهدة (س) فوق الوسط الحسابي أو تحته .

*** اذا (ز) موجبة >>> فوق الوسط الحسابي ، اذا (ز) سالبة >>> تحت الوسط الحسابي**

*** مثال :** اذا كان الوسط الحسابي لعلامات صف هو (٦٠) و الانحراف المعياري لها (٨) ،

أوجد :

١) العلامة التي تنحرف فوق الوسط الحسابي بمقدار (٣) انحرافات معيارية

٢) العلامة التي تنحرف تحت (دون) الوسط الحسابي بمقدار انحرافين معارين .

٣) عدد الانحرافات المعيارية التي تنحرفها العلامة (٧٢) عن الوسط الحسابي .

الحل :

١) ٣ x ٨ = ٢٤

العلامة = ٦٠ + ٢٤ = ٨٤

٢) ٢ x ٨ = ١٦

العلامة = ٦٠ - ١٦ = ٤٤

٣) عدد الانحرافات = $\frac{٧٢-٦٠}{٨} = \frac{١٢}{٨}$ = ١,٥

*** أسئلة :**

١) اذا كان الوسط الحسابي لعلامات صف ما في مادة الرياضيات (٦٠) و الانحراف المعياري لها (٤) ، و كانت العلامة المعيارية لعلامة الطالب أحمد (- ٣) ، **أوجد علامته الفعلية التي حصل عليها ؟**

أ. فيصل السعدون

٢) اذا كان الوسط الحسابي لعلامات صف ما في اللغة الإنجليزية (٦٠) ، و الانحراف المعياري (١٠) ، **أوجد :**

أ) العلامة (س) التي قيمتها المعيارية (١,٥)

ب) القيمة المعيارية للعلامة (٥٥)

ج) العلامة التي تنحرف فوق الوسط الحسابي بمقدار $\frac{١}{٤}$ ٤ انحراف معياري

د) العلامة التي تنحرف تحت الوسط بمقدار ٢,٥ انحراف معياري

أ. فيصل السعدون (٠٧٩٦٠٣٠٦١١)

*** أمثلة :**

١) ثلاث طلاب في إحدى الصفوف علامتهم المعيارية (٤ ، ٢ ، ١,٥) على الترتيب ، و كان الوسط الحسابي لعلامات جميع الطلاب في الصف (٦٨) ، و الفرق بين علامتي الطالب الأول و الثالث هو (٢٠) ، **فجد ما يلي** :

أ) الانحراف المعياري لعلامات طلاب الصف .

ب) العلامات الفعلية للطلاب .

الحل : نفرض الطالب الأول (أ) و الثاني (ب) و الثالث (جـ)

أ >>> ٤ ، ب >>> ٢ ، جـ >>> ١,٥

أ - جـ = ٢٠ ، $\bar{س}$ = ٦٨

فرع (أ) :

$٤ = \frac{أ - ٦٨}{ع}$ >>> ٤ع = أ - ٦٨ ..... معادلة (١)

$١,٥ = \frac{جـ - ٦٨}{ع}$ >>> ١,٥ ع = جـ - ٦٨ ..... معادلة (٢)

معادلة (١) - معادلة (٢)

٢,٥ ع = ٢٠ >>> ع = ٨

فرع (ب) :

$٤ = \frac{أ - ٦٨}{٨}$ >>> أ - ٦٨ = ٣٢ >>> أ = ١٠٠ (الطالب الأول)

$٢ = \frac{ب - ٦٨}{٨}$ >>> ب - ٦٨ = ١٦ >>> ب = ٨٤ (الطالب الثاني)

$١,٥ = \frac{جـ - ٦٨}{٨}$ >>> جـ - ٦٨ = ١٢ >>> جـ = ٨٠ (الطالب الثالث)

أو أ - جـ = ٢٠ >>> ١٠٠ - جـ = ٢٠ >>> جـ = ٨٠

أ. فيصل السعدون

٢) اذا كانت علامات طالبيْن في اختبار الحاسوب (٧٠ ، ٦٠) على الترتيب ،
و علاماتهم المعيارية (٤ ، ٢) على الترتيب ، **أوجد كل ما يلي :**

أ) الانحراف المعياري لعلامات طلاب الصف
ب) الوسط الحسابي لعلامات الطلاب **ج)** العلامة المعيارية للعلامة ٨٠

الحل : أ) $\frac{\bar{س} - ٧٠}{ع} = ٤$ >>> ٤ع = ٧٠ - $\bar{س}$ ..... معادلة (١)

$\frac{\bar{س} - ٦٠}{ع} = ٢$ >>> ٢ ع = ٦٠- $\bar{س}$ ..... معادلة (٢)

معادلة (١) - معادلة (٢) >>> ٢ ع = ١٠ >>> ع = ٥

ب) $\frac{\bar{س} - ٧٠}{٥} = ٤$ >>> ٧٠ - $\bar{س}$ = ٢٠ >>> $\bar{س}$ = ٥٠

ج) $\frac{٨٠ - ٥٠}{٥} = \frac{٣٠}{٥} = ٦$

*** أسئلة :**

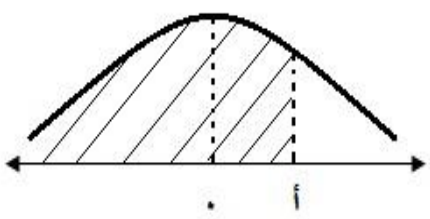
١) اذا كانت العلامات المعيارية للطلاب أحمد ، جاسر و وائل هي (١,٥ ، -١ ، -٢) على الترتيب ،
و كان الوسط الحسابي لعلامات الصف (٧٠) ، و الفرق بين علامتي أحمد و جاسر (١٠) ،
أوجد العلامات الفعلية للطلاب الثلاثة ؟

٢) صف مكوّن من (٢٠) طالبة ، إذا كانت علامات الطالبات هديل ، شروق و غدير هي :
(٩٠ ، ٨٠ ، س) على الترتيب ، و علاماتهن المعيارية (٣ ، ٢ ، -١) ،
أوجد علامة الطالبة غدير ؟؟

الدرس الخامس : التوزيع الطبيعي

❖ **التوزيع الطبيعي المعياري :** هي التوزيع الذي وسطه الحسابي يساوي (صفر) و انحرافه المعياري يساوي (١) و متغيره العشوائي هو العلامة المعيارية (ز) .

* يتم استخدام جدول التوزيع الطبيعي لإيجاد الاحتمالات
لقيم (ز) الأقل من (أ) ⟵ ل (ز ≤ أ)
حيث أ ≤ صفر



*** جدول التوزيع الطبيعي في الدوسية صفحة (١٢٨)**

*** أمثلة :**

١) ل (ز ≥ ١,٢٥) = ٠,٨٩٤٤

٢) ل (ز ≥ ١,٣) = ٠,٩٠٣٢

*** أسئلة :**

١) ل (ز ≥ ١,٣٥) =

٢) ل (ز ≥ ٠,٥٤) =

٣) ل (ز ≥ صفر) =

٤) ل (ز ≥ ٣) =

*** ملاحظة :** لإيجاد الاحتمالات على يسار أو يمين قيم (ز) السالبة أو على يمين قيم (ز) الموجبة ، فيتم استخدام خاصية التمثيل ، فإذا كانت أ > صفر فإن :

حالة (١) : ل (ز ≤ أ) = ١ - ل (ز ≥ أ)

حالة (٢) : ل (ز ≤ -أ) = ل (ز ≥ أ)

حالة (٣) : ل (ز ≥ -أ) = ل (ز ≤ أ) = ١ - ل (ز ≥ أ)

حالة (٤) : ل (أ ≥ ز ≥ ب) = ل (ز ≥ ب) - ل (ز ≥ أ)

*** أمثلة :**

١) ل (ز ≤ ٠,٦٥) = ١ - ل (ز ≥ ٠,٦٥) = ١ - ٠,٧٤٢٢ = ٠,٢٥٧٨

٢) ل (ز ≤ - ١,٥) = ل (ز ≥ ١,٥) = ٠,٩٣٣٢

٣) ل (ز ≥ - ٠,٨٥) = ل (ز ≤ ٠,٨٥) = ١ - ل (ز ≥ ٠,٨٥) = ١ - ٠,٨٠٢٣

= ٠,١٩٧٧

٤) ل (٠,٢ ≥ ز ≥ ٢,٣) = ل (ز ≥ ٢,٣) - ل (ز ≥ ٠,٢)

= ٠,٩٨٩٣ - ٠,٥٧٩٣ = ٠,٤١٠٠

أ. فيصل السعدون

*** أسئلة :**

١) ل (ز ≤ ١) =

٢) ل (ز ≤ ٠,٧٣) =

٣) ل (ز ≤ - ١,١) =

٤) ل (ز ≤ - ٠,٦٥) =

٥) ل (ز ≤ - ٠,٩٥) =

٦) ل (ز ≥ - ٢,٤) =

٧) ل (٠,٠٩ ≤ ز ≤ ١,٥) =

٨) ل (- ٠,٤ ≤ ز ≤ ١,٨) =

٩) ل (- ١,٧ ≤ ز ≤ صفر) =

❖ **<u>إيجاد قيمة (أ) :</u>**

*** أمثلة :**

١) ل (ز ≤ أ) = ٠,٨٥٩٩ >>> (أ) = ١,٠٨ (من الجدول)

٢) ل (ز ≤ أ) = ٠,٣ >>> ١ - ٠,٣ = ٠,٧ >>> (أ) = ٠,٥٢ (من الجدول)

أ. فيصل السعدون

*** أسئلة :**

١) ل (ز ≥ أ) = ٠,٨٥٣١

٢) ل (ز ≤ أ) = ٠,٣٠٥٠

٣) ل (ز ≤ أ) = ٠,٧٤٨٦

❖ **تطبيقات عملية على التوزيع الطبيعي :**

* يمكن الاستفادة من التوزيع الطبيعي المعياري في إيجاد الاحتمالات للمتغير العشوائي المتصل (س) التي يتبع التوزيع الطبيعي من خلال تحويل العلامة الخام (س) إلى العلامة المعيارية (ز) .

$$ز = \frac{\mu - س}{\sigma}$$

حيث μ = الوسط الحسابي (تلفظ مي) ، σ = الانحراف المعياري (تلفظ سيغما)

*** مثال :**

اذا كان (س) متغير عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي (٦٠) ، و انحرافه المعياري (٥) ، **فأوجد :**

١) القيمة المعيارية المقابلة للقيمة س = ٦٨

٢) قيمة (س) التي تقابل القيمة المعيارية (٢) .

الحل : ١) $ز = \frac{٦٨ - ٦٠}{٥} = \frac{٨}{٥} = ١,٦$

٢) $\frac{س - ٦٠}{٥} = ٢$ <<< س - ٦٠ = ١٠ <<< س = ٧٠

*** سؤال :** اذا كان (س) متغير عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي (٥٠) ،
و انحرافه المعياري (٤) ، **فأوجد :**

أ) القيمة المعيارية المقابلة للقيمة س = ٥٧ ، **ب)** قيمة (س) التي تقابل القيمة المعيارية (٣) .

*** مثال :** اذا كان (س) متغير عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي (٦٥) ،
و انحرافه المعياري (٦) ، **فأوجد :**

١) ل (س ≥ ٦٨) ٢) ل (س ≤ ٥٥)

الحل : ١) ل (ز ≥ $\frac{٦٨-٦٥}{٦}$) = ل (ز ≥ ٠,٥) = ٠,٦٩١٥

٢) ل (ز ≤ $\frac{٥٥-٦٥}{٦}$) = ل (ز ≤ -١,٦٧) = ل (ز ≥ ١,٦٧) = ٠,٩٥٢٥

*** سؤال :**

اذا كان (س) متغير عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي (٦٠) ،
و انحرافه المعياري (٨) ، **فأوجد :**

١) ل (س ≥ ٧٦) ٢) ل (س ≤ ٤٨)

فيصل السعدون

*** مثال :**

يخضع معامل الذكاء للطلبة المسجلين في إحدى الجامعات لتوزيع طبيعي ، وسطه (١٠٥) ،
و انحرافه المعياري (١٠) ، اذا تم اختيار أحد الطلبة عشوائياً ،
فما احتمال أن يكون من الطلبة الذين معامل ذكائهم أقل من (١١٠) ؟

الحل : ل (س ≥ ١١٠) = ل (ز ≥ $\frac{١١٠-١٠٥}{١٠}$) = ل (ز ≥ ٠,٥) = ٠,٦٩١٥

*** أسئلة :**

١) يخضع معامل النجاح في عينة لمصنع ما لتوزيع طبيعي ، وسطه (١١٥) ،
و انحرافه المعياري (٢٠) ، اذا تم اختيار أحد العينات عشوائياً ،
فما احتمال أن تكون من العينات التي معامل نجاحها أقل من (١٢٠) ؟

٢) اذا كانت أوزان الأطفال عند الولادة تتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي (٣,٢) كغم ،
و انحرافه المعياري (٠,٤) كغم ، اذا اختير طفل عشوائياً عند الولادة ،
فما احتمال أن يكون وزنه أكبر من (٤) كغم ؟؟

٤) اذا كانت أوزان سبائك ذهبية عند تتخذ شكل التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي (٥٠) غرام ، و انحرافه المعياري (١٠) غرام ، اذا تم اختيار إحدى السبائك ،

فما احتمال أن يقل وزنها عن (٤٤,٩) غراماً ؟؟

*** مثال :**

اذا كانت أوزان طلبة إحدى المدارس و عددهم (٥٠٠) طالب تتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي (٥٥) كغم ، و انحرافه المعياري (٦) كغم ، اذا تم اختيار أحد الطلبة عشوائياً :

١) ما احتمال أن يكون من الطلبة الذين تقل أوزانهم عن (٤٩) كغم ؟

٢) ما احتمال أن يكون من الطلبة الذين تزيد أوزانهم عن (٥٨) كغم ؟

٣) ما عدد الطلبة الذين تنحصر أوزانهم بين (٥٢) كغم و (٦١) كغم ؟

الحل : ١) $ل (س \geq ٤٩) = ل (ز \geq \frac{٤٩ - ٥٥}{٦}) = ل (ز \geq -١)$

$= ١ - ل (ز \geq ١) = ١ - ٠,٨٤١٣ = ٠,١٥٨٧$

٢) $ل (س \leq ٥٨) = ل (ز \leq \frac{٥٨ - ٥٥}{٦}) = ل (ز \leq ٠,٥)$

$= ١ - ل (ز \geq ٠,٥) = ١ - ٠,٦٩١٥ = ٠,٣٠٨٥$

٣) $ل (٥٢ \leq س \leq ٦١) = ل (\frac{٥٢ - ٥٥}{٦} \leq ز \leq \frac{٦١ - ٥٥}{٦})$

$ل (-٠,٥ \leq ز \leq ١) = ل (ز \geq ١) - ل (ز \geq -٠,٥)$

$= ل (ز \geq ١) - (١ - ل (ز \geq ٠,٥))$

$= ٠,٨٤١٣ - (١ - ٠,٦٩١٥) = ٠,٨٤١٣ - ٠,٣٠٨٥ = ٠,٥٣٢٨$

*** عدد الطلبة =** العدد الكلي x الاحتمال

$= ٥٠٠ \times ٠,٥٣٢٨ = ٢٢٦,٤ =$ ٢٦٦ طالباً

*** أسئلة :**

١) اذا كانت أوزان طلبة إحدى المدارس و عددهم (١٠٠٠) طالب تتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي (٦٠) كغم ، و انحرافه المعياري (٦) كغم ، اذا تم اختيار أحد الطلبة عشوائياً :

أ) ما احتمال أن يكون من الطلبة الذين تقل أوزانهم عن (٤٢) كغم ؟

ب) ما احتمال أن يكون من الطلبة الذين تزيد أوزانهم عن (٦٣) كغم ؟

ج) ما عدد الطلبة الذين تنحصر أوزانهم بين (٦٠) كغم و (٦٩) كغم ؟

٢) تخضع عبوات إحدى المنتجات الزراعية لتوزيع طبيعي ، وسطه (٢٥) كغم ،
و انحرافه المعياري (٢) كغم ، اذا تم اختيار إحدى العبوات عشوائياً :

أ) ما احتمال أن يزيد وزنها عن (٢٧) كغم ؟

ب) ما احتمال أن ينحصر وزنها بين (٢٤,٥) كغم و (٢٥,٥) كغم ؟

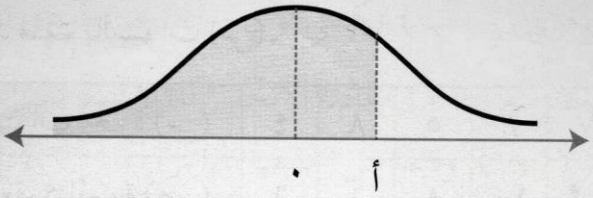
٣) تتخذ أعمار (٢٠٠٠٠) شخص شكل التوزيع طبيعي ، وسطه (٥٢) سنة ،
و انحرافه المعياري (١٠) سنة ، اذا اختير شخص عشوائياً :

فما احتمال أن يكون ممن تتراوح أعمارهم بين (٤٦) سنة و (٥٨) سنة ؟

٤) اذا كانت علامات (١٠٠٠) طالب تتخذ شكل التوزيع طبيعي ، وسطه (٦٥) ،
و انحرافه المعياري (١٠) ، و كان عدد الناجحين (٧٥٨) طالباً ، فما علامة النجاح ؟

٥) اذا كان رواتب (١٠٠٠٠) معلم تتخذ شكل التوزيع طبيعي ، وسطه (٢٠٠) دينار شهرياً ،
و انحرافه المعياري (١٠) دنانير ،
فما عدد المعلمين و المعلمات الذين تنحصر رواتبهم بين (١٨٠) دينار و (٢١٠) دينار ؟

جدول التوزيع الطبيعي المعياري



ز	٠,٠٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,٠٦	٠,٠٧	٠,٠٨	٠,٠٩
٠,٠	٠,٥٠٠٠	٠,٥٠٤٠	٠,٥٠٨٠	٠,٥١٢٠	٠,٥١٦٠	٠,٥١٩٩	٠,٥٢٣٩	٠,٥٢٧٩	٠,٥٣١٩	٠,٥٣٥٩
٠,١	٠,٥٣٩٨	٠,٥٤٣٨	٠,٥٤٧٨	٠,٥٥١٧	٠,٥٥٥٧	٠,٥٥٩٦	٠,٥٦٣٦	٠,٥٦٧٥	٠,٥٧١٤	٠,٥٧٥٣
٠,٢	٠,٥٧٩٣	٠,٥٨٣٢	٠,٥٨٧١	٠,٥٩١٠	٠,٥٩٤٨	٠,٥٩٨٧	٠,٦٠٢٦	٠,٦٠٦٤	٠,٦١٠٣	٠,٦١٤١
٠,٣	٠,٦١٧٩	٠,٦٢١٧	٠,٦٢٥٥	٠,٦٢٩٣	٠,٦٣٣١	٠,٦٣٦٨	٠,٦٤٠٦	٠,٦٤٤٣	٠,٦٤٨٠	٠,٦٥١٧
٠,٤	٠,٦٥٥٤	٠,٦٥٩١	٠,٦٦٢٨	٠,٦٦٦٤	٠,٦٧٠٠	٠,٦٧٣٦	٠,٦٧٧٢	٠,٦٨٠٨	٠,٦٨٤٤	٠,٦٨٧٩
٠,٥	٠,٦٩١٥	٠,٦٩٥٠	٠,٦٩٨٥	٠,٧٠١٩	٠,٧٠٥٤	٠,٧٠٨٨	٠,٧١٢٣	٠,٧١٥٧	٠,٧١٩٠	٠,٧٢٢٤
٠,٦	٠,٧٢٥٧	٠,٧٢٩١	٠,٧٣٢٤	٠,٧٣٥٧	٠,٧٣٨٩	٠,٧٤٢٢	٠,٧٤٥٤	٠,٧٤٨٦	٠,٧٥١٧	٠,٧٥٤٩
٠,٧	٠,٧٥٨٠	٠,٧٦١١	٠,٧٦٤٢	٠,٧٦٧٣	٠,٧٧٠٤	٠,٧٧٣٤	٠,٧٧٦٤	٠,٧٧٩٤	٠,٧٨٢٣	٠,٧٨٥٢
٠,٨	٠,٧٨٨١	٠,٧٩١٠	٠,٧٩٣٩	٠,٧٩٦٧	٠,٧٩٩٥	٠,٨٠٢٣	٠,٨٠٥١	٠,٨٠٧٨	٠,٨١٠٦	٠,٨١٣٣
٠,٩	٠,٨١٥٩	٠,٨١٨٦	٠,٨٢١٢	٠,٨٢٣٨	٠,٨٢٦٤	٠,٨٢٨٩	٠,٨٣١٥	٠,٨٣٤٠	٠,٨٣٦٥	٠,٨٣٨٩
١,٠	٠,٨٤١٣	٠,٨٤٣٨	٠,٨٤٦١	٠,٨٤٨٥	٠,٨٥٠٨	٠,٨٥٣١	٠,٨٥٥٤	٠,٨٥٧٧	٠,٨٥٩٩	٠,٨٦٢١
١,١	٠,٨٦٤٣	٠,٨٦٦٥	٠,٨٦٨٦	٠,٨٧٠٨	٠,٨٧٢٩	٠,٨٧٤٩	٠,٨٧٧٠	٠,٨٧٩٠	٠,٨٨١٠	٠,٨٨٣٠
١,٢	٠,٨٨٤٩	٠,٨٨٦٩	٠,٨٨٨٨	٠,٨٩٠٧	٠,٨٩٢٥	٠,٨٩٤٤	٠,٨٩٦٢	٠,٨٩٨٠	٠,٨٩٩٧	٠,٩٠١٥
١,٣	٠,٩٠٣٢	٠,٩٠٤٩	٠,٩٠٦٦	٠,٩٠٨٢	٠,٩٠٩٩	٠,٩١١٥	٠,٩١٣١	٠,٩١٤٧	٠,٩١٦٢	٠,٩١٧٧
١,٤	٠,٩١٩٢	٠,٩٢٠٧	٠,٩٢٢٢	٠,٩٢٣٦	٠,٩٢٥١	٠,٩٢٦٥	٠,٩٢٧٩	٠,٩٢٩٢	٠,٩٣٠٦	٠,٩٣١٩
١,٥	٠,٩٣٣٢	٠,٩٣٤٥	٠,٩٣٥٧	٠,٩٣٧٠	٠,٩٣٨٢	٠,٩٣٩٤	٠,٩٤٠٦	٠,٩٤١٨	٠,٩٤٢٩	٠,٩٤٤١
١,٦	٠,٩٤٥٢	٠,٩٤٦٣	٠,٩٤٧٤	٠,٩٤٨٤	٠,٩٤٩٥	٠,٩٥٠٥	٠,٩٥١٥	٠,٩٥٢٥	٠,٩٥٣٥	٠,٩٥٤٥
١,٧	٠,٩٥٥٤	٠,٩٥٦٤	٠,٩٥٧٣	٠,٩٥٨٢	٠,٩٥٩١	٠,٩٥٩٥	٠,٩٦٠٨	٠,٩٦١٦	٠,٩٦٢٥	٠,٩٦٣٣
١,٨	٠,٩٦٤١	٠,٩٦٤٩	٠,٩٦٥٦	٠,٩٦٦٤	٠,٩٦٧١	٠,٩٦٧٨	٠,٩٦٨٦	٠,٩٦٩٣	٠,٩٦٩٩	٠,٩٧٠٦
١,٩	٠,٩٧١٣	٠,٩٧١٩	٠,٩٧٢٦	٠,٩٧٣٢	٠,٩٧٣٨	٠,٩٧٤٤	٠,٩٧٥٠	٠,٩٧٥٦	٠,٩٧٦١	٠,٩٧٦٧
٢,٠	٠,٩٧٧٢	٠,٩٧٧٨	٠,٩٧٨٣	٠,٩٧٨٨	٠,٩٧٩٣	٠,٩٧٩٨	٠,٩٨٠٣	٠,٩٨٠٨	٠,٩٨١٢	٠,٩٨١٧
٢,١	٠,٩٨٢١	٠,٩٨٢٦	٠,٩٨٣٠	٠,٩٨٣٤	٠,٩٨٣٨	٠,٩٨٤٢	٠,٩٨٤٦	٠,٩٨٥٠	٠,٩٨٥٤	٠,٩٨٥٧
٢,٢	٠,٩٨٦١	٠,٩٨٦٤	٠,٩٨٦٨	٠,٩٨٧١	٠,٩٨٧٥	٠,٩٨٧٨	٠,٩٨٨١	٠,٩٨٨٤	٠,٩٨٨٧	٠,٩٨٩٠
٢,٣	٠,٩٨٩٣	٠,٩٨٩٦	٠,٩٨٩٨	٠,٩٩٠١	٠,٩٩٠٤	٠,٩٩٠٦	٠,٩٩٠٩	٠,٩٩١١	٠,٩٩١٣	٠,٩٩١٦
٢,٤	٠,٩٩١٨	٠,٩٩٢٠	٠,٩٩٢٢	٠,٩٩٢٥	٠,٩٩٢٧	٠,٩٩٢٩	٠,٩٩٣١	٠,٩٩٣٢	٠,٩٩٣٤	٠,٩٩٣٦
٢,٥	٠,٩٩٣٨	٠,٩٩٤٠	٠,٩٩٤١	٠,٩٩٤٣	٠,٩٩٤٥	٠,٩٩٤٦	٠,٩٩٤٨	٠,٩٩٤٩	٠,٩٩٥١	٠,٩٩٥٢
٢,٦	٠,٩٩٥٣	٠,٩٩٥٥	٠,٩٩٥٦	٠,٩٩٥٧	٠,٩٩٥٩	٠,٩٩٦٠	٠,٩٩٦١	٠,٩٩٦٢	٠,٩٩٦٣	٠,٩٩٦٤
٢,٧	٠,٩٩٦٥	٠,٩٩٦٦	٠,٩٩٦٧	٠,٩٩٦٨	٠,٩٩٦٩	٠,٩٩٧٠	٠,٩٩٧١	٠,٩٩٧٢	٠,٩٩٧٣	٠,٩٩٧٤
٢,٨	٠,٩٩٧٤	٠,٩٩٧٥	٠,٩٩٧٦	٠,٩٩٧٧	٠,٩٩٧٧	٠,٩٩٧٨	٠,٩٩٧٩	٠,٩٩٧٩	٠,٩٩٨٠	٠,٩٩٨١
٢,٩	٠,٩٩٨١	٠,٩٩٨٢	٠,٩٩٨٢	٠,٩٩٨٣	٠,٩٩٨٤	٠,٩٩٨٤	٠,٩٩٨٥	٠,٩٩٨٥	٠,٩٩٨٦	٠,٩٩٨٦
٣,٠	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٨	٠,٩٩٨٨	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٩٠	٠,٩٩٩٠
٣,١	٠,٩٩٩٠	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٣
٣,٢	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥
٣,٣	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٧
٣,٤	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٨

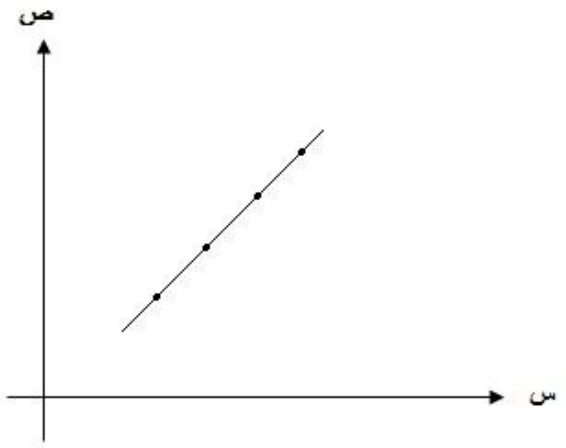
أ. فيصل السعدون (٠٧٩٦٠٣٠٦١١)

الدرس السادس : الارتباط و معامل الارتباط

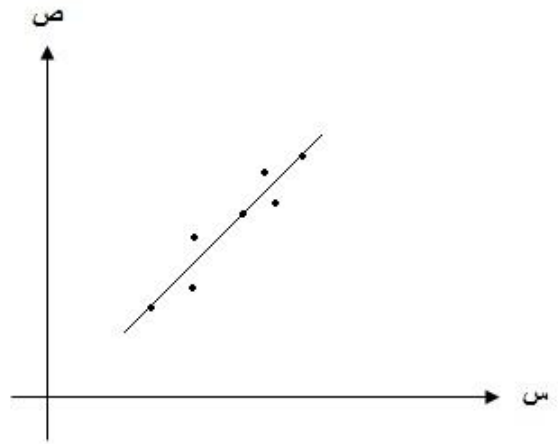
❖ **الارتباط** هو علاقة بين متغيرين اثنين بحيث اذا تغير أحدهما فإن الثاني سوف يتغير طردياً أو عكسياً .
و يحدد نوع الارتباط من شكل الانتشار .

*** نوع الارتباط :**

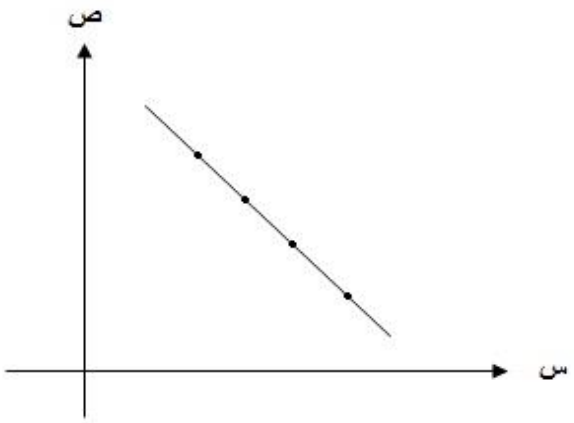
١) ارتباط خطي طردي تام (إيجابي)



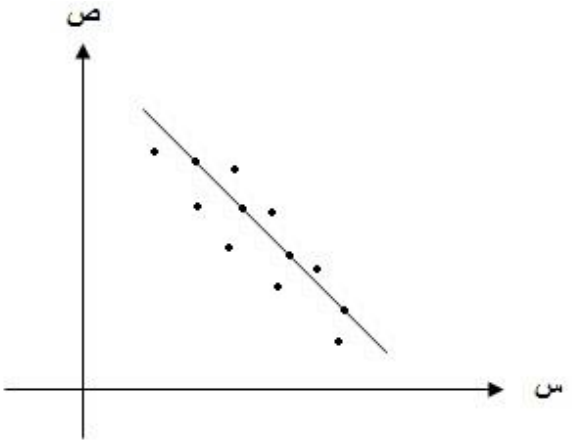
٢) ارتباط خطي طردي (إيجابي)



٣) ارتباط خطي عكسي تام (سلبي)

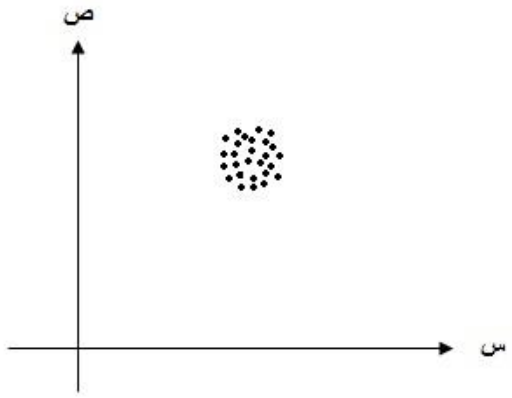


٤) ارتباط خطي عكسي (سلبي)



❖ **ملاحظة :**

هناك بعض الحالات التي لا تشير الى وجود أي نوع من الارتباط حيث تتجمع النقاط على شكل دائرة مما يدل على عدم وجود ارتباط خطّي .



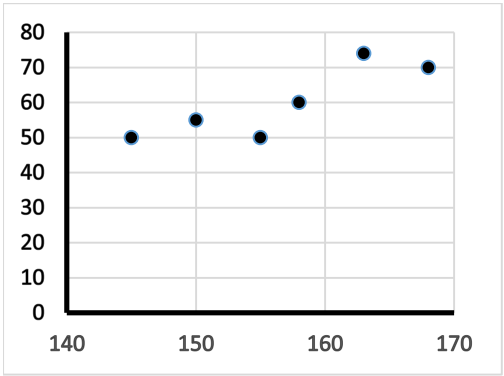
*** مثال :**

يبين الجدول ادناه أطوال عشرة طلاب بالسنتيمترات و أوزانهم بالكيلومترات :

الطول (س)	١٤٥	١٥٠	١٥٥	١٥٨	١٦٣
الوزن (ص)	٥٠	٥٥	٥٠	٦٠	٧٤

المطلوب : ارسم شكل الانتشار بين المتغيرين (س) و (ص) ، و بيّن نوع الارتباط ؟

الحل :



* نوع الارتباط :

ارتباط طردي (إيجابي)

*** سؤال :**

الجدول ادناه يبيّن علامات (٦) طلاب في مبحث الرياضيات و عدد أيام غياب كل منهم :

علامات الطالب في الرياضيات (س)	٦	٧	٤	١	٢	١
عدد أيام غياب الطالب (ص)	١	٢	٤	٦	٥	٨

المطلوب : ١) ارسم شكل الانتشار بين المتغيرين (س) و (ص)

٢) حدد نوع العلاقة بين المتغيرين (س) و (ص)

❖ **معامل ارتباط بيرسون الخطي** : يُستخدم لقياس قوة الارتباط الخطي بين متغيرين .

*** القانون :**

$$ر = \frac{\sum (س - \overline{س})(ص - \overline{ص})}{\sqrt{\sum (س - \overline{س})^{٢} \times \sum (ص - \overline{ص})^{٢}}}$$

*** ملاحظة :** اذا كان (ر) معامل الارتباط فيكون محصور بين (-١) و (١)

(٠ < ر ≤ ١) ⟵ ارتباط خطي طردي (إيجابي)

(-١ < ر ≤ ٠) ⟵ ارتباط خطي عكسي (سلبي)

ر = ١ ⟵ ارتباط خطي طردي تام (إيجابي)

ر = -١ ⟵ ارتباط خطي عكسي تام (سلبي)

*** مثال :**

يمثل الجدول أدناه علامات ستة طلاب في مبحثي الرياضيات (س) و الجغرافيا (ص) في امتحان قصير ، النهاية العظمى له (١٠) :

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥	٦
الرياضيات (س)	٦	٧	٥	٣	٥	٤
الجغرافيا (ص)	٥	٦	٤	١	٥	٣

المطلوب : احسب معامل ارتباط بيرسون الخطي بين (س) و (ص) ؟

الحل :

$$\overline{س} = \frac{٦+٧+٥+٣+٥+٤}{٦} = ٥$$

$$\overline{ص} = \frac{٥+٦+٤+١+٥+٣}{٦} = ٤$$

س	ص	$س - \overline{س}$	$ص - \overline{ص}$	$(س - \overline{س})(ص - \overline{ص})$	$(س - \overline{س})^{٢}$	$(ص - \overline{ص})^{٢}$
٦	٥	١	١	١	١	١
٧	٦	٢	٢	٤	٤	٤
٥	٤	٠	٠	٠	٠	٠
٣	١	٢-	٣-	٦	٤	٩
٥	٥	٠	١	٠	٠	١
٤	٣	١-	١-	١	١	١
المجموع				**١٢**	**١٠**	**١٦**

$$ر = \frac{\sum (س - \overline{س}) \times (ص - \overline{ص})}{\sqrt{\sum (س - \overline{س})^{٢} \times \sum (ص - \overline{ص})^{٢}}}$$

$$ر = \frac{١٢}{\sqrt{١٦ \times ١٠}} = \frac{١٢}{\sqrt{١٦٠}}$$

أ. فيصل السعدون

*** أسئلة :**

١) احسب معامل ارتباط بيرسون بين متغيرين (س) و (ص) في الجدول الآتي :

س	١١	١٠	١٢	١٤	٨
ص	١٤	١٠	٦	٩	١١

أ. فيصل السعدون (٠٧٩٦٠٣٠٦١١)

٢) يبين الجدول الآتي عدد سنوات الخبرة (س) و الأجر اليومي (ص) بالدينار ، لخمسة عمال في إحدى الشركات في مدينة سحاب الصناعية :

عدد سنوات الخبرة (س)	٥	٦	٧	٨	١٤
الأجر اليومي (ص)	٦	٧	٨	٩	١٠

*** المطلوب : احسب معامل ارتباط بيرسون الخطي بين (س) و (ص) ، وحدد نوع الارتباط .**

أ. فيصل السعدون (٠٧٩٦٠٣٠٦١١)

٣) يمثل الجدول أدناه معامل الذكاء (س) و علامة الرياضيات (ص) لخمسة طلاب :

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥
معامل الذكاء (س)	١٣٠	١٢٠	١١٥	١١٠	١٠٠
علامة الرياضيات (ص)	٩٥	٧٠	٨٥	٨٠	٥٠

*** المطلوب : احسب معامل ارتباط بيرسون بين معامل الذكاء و علامة الرياضيات .**

أ. فيصل السعدون (٠٧٩٦٠٣٠٦١١)

٤) اذا كان (س) و (ص) متغيرين ، عدد قيم كل منهما (١٠) ، و كان $\sum_{ر=١}^{١٠} (س_ر - \overline{س})^{٢} = ٣٦$ ،

$\sum_{ر=١}^{١٠} (ص_ر - \overline{ص})^{٢} = ١٦٠٠$ ، $\sum_{ر=١}^{١٠} (س_ر - \overline{س})(ص_ر - \overline{ص}) = ١٨٠$ ،

*** المطلوب : احسب معامل ارتباط بيرسون الخطي بين (س) و (ص) .**

٥) اذا كان (س) و (ص) متغيرين ، و كان $\sum (س - \overline{س})^{٢} = ٨٠$ ،

$\sum (ص - \overline{ص})^{٢} = ٢٠$ ، $\sum (س - \overline{س})(ص - \overline{ص}) = ٣٢$ ،

*** المطلوب : احسب معامل ارتباط بيرسون الخطي بين (س) و (ص) .**

❖ **أثر التعديلات الخطية في قيمة معامل ارتباط بيرسون**

* اذا كان معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين (س) و (ص) يساوي (ر) ،

و عُدّلت قيم كل من (س) و (ص) حسب العلاقة :

س* = أ س + ب ، ص* = جـ ص + د

فإن معامل الارتباط بين (س*) و (ص*) يساوي :

(ر) اذا كانت إشارتا (أ) و (جـ) متشابهتين .

(- ر) اذا كانت إشارتا (أ) و (جـ) مختلفتين .

*** مثال :**

اذا كان معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين (س) و (ص) هو (٠,٩) ،

أوجد معامل الارتباط بين (س*) و (ص*) في كل مما يأتي :

١) س* = ٣س - ١ ، ص* = ٤ص + ١

٢) س* = ٢س + ٣ ، ص* = ٢ - ص

الحل : ١) ٠,٩ ٢) - ٠,٩

*** أسئلة :**

١) اذا كان معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين (س) و (ص) هو (- ٠,٨) ،

أوجد معامل الارتباط بين (س*) و (ص*) في كل مما يأتي :

١) س* = ٢س - ٣ ، ص* = ص - ١

٢) س* = ٣ - ٢س ، ص* = ٥ - ص

أ. فيصل السعدون

٢) اذا كان معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين (س) و (ص) هو (٠,٢٤) ،

أوجد معامل الارتباط بين (س*) و (ص*) في كل مما يأتي :

١) س* = ٤س - ٣ ، ص* = ٢ص - ١

٢) س* = ٧ - ٤س ، ص* = ٥ - ٣ص

٣) س* = ٩س - ٣ ، ص* = - ٤ص - ٢

٤) س* = ٧ - ٤س ، ص* = ٥ص - ٦

الدرس السابع : الانحدار

❖ **معادلة الانحدار :** هي معادلة خطية تربط بين المتغيرين و تستخدم للتنبؤ بقيم أحد المتغيرين اذا عُلم قيمة المتغير الآخر .

*** معادلة الانحدار :** $\hat{ص} = أ س + ب$

حيث أن : $أ = \frac{\sum (س - \overline{س})(ص - \overline{ص})}{\sum (س - \overline{س})^{٢}}$

$ب = \overline{ص} - أ \overline{س}$

*** الخطأ في التنبؤ :** عند رسم شكل الانتشار بين متغيرين و وبحالة كانت العلاقة خطية سوف نلاحظ أن النقط تتجمع حول خط مستقيم يمر بعدد منها و يتوسط النقاط الباقية و لا يمر منها فهذا يسبب ما يسمى الخطأ في التنبؤ .

القانون : الخطأ في التنبؤ = القيمة الحقيقية - القيمة المتنبأ فيها

$= ص - \hat{ص}$

حيث أن : ص = القيمة الحقيقية ، $\hat{ص}$ = القيمة المتنبأ فيها

*** مثال :** الجدول الآتي يبيّن قيم لكل من (س) و (ص) :

س	٥	٦	٢	٨	٤
ص	٣٥	٥٠	٣٠	٦٠	٣٥

المطلوب : ١) جد معادلة الانحدار ، ٢) جد القيمة المتوقعة لـ (ص) اذا كانت س = ٤
٣) جد الخطأ في التنبؤ عند س = ٨

الحل : **فرع (١) :** $\overline{س} = \frac{٥+٦+٢+٨+٤}{٥} = \frac{٢٥}{٥} = ٥$

$\overline{ص} = \frac{٣٥+٥٠+٣٠+٦٠+٣٥}{٥} = \frac{٢١٠}{٥} = ٤٢$

س	ص	$س - \overline{س}$	$ص - \overline{ص}$	$(س - \overline{س})(ص - \overline{ص})$	$(س - \overline{س})^{٢}$
٥	٣٥	٠	٧ -	٠	٠
٦	٥٠	١	٨	٨	١
٢	٣٠	٣ -	١٢ -	٣٦	٩
٨	٦٠	٣	١٨	٥٤	٩
٤	٣٥	١ -	٧ -	٧	١
المجموع				**١٠٥**	**٢٠**

$أ = \frac{\sum (س - \overline{س}) \times (ص - \overline{ص})}{\sum (س - \overline{س})^{٢}} = \frac{١٠٥}{٢٠} = \frac{٢١}{٤}$

$ب = \overline{ص} - أ\overline{س} = ٤٢ - (\frac{٢١}{٤} \times ٥) = ٤٢ - \frac{١٠٥}{٤} = \frac{٦٣}{٤}$

$\hat{ص} = أس + ب = \frac{٢١س}{٤} + \frac{٦٣}{٤}$

فرع (٢) : $\hat{ص} = \frac{٢١س}{٤} + \frac{٦٣}{٤} = \frac{٢١ \times ٤}{٤} + \frac{٦٣}{٤} = \frac{٨٤}{٤} + \frac{٦٣}{٤} = \frac{١٤٧}{٤}$

فرع (٣) : $\hat{ص} = \frac{٢١س}{٤} + \frac{٦٣}{٤} = \frac{٢١ \times ٨}{٤} + \frac{٦٣}{٤} = \frac{١٦٨}{٤} + \frac{٦٣}{٤} = \frac{٢٣١}{٤}$

الخطأ في التنبؤ = القيمة الحقيقية - القيمة المتنبأ فيها

$= ص - \hat{ص} = ٦٠ - \frac{٢٣١}{٤} = \frac{٩}{٤}$

أ. فيصل السعدون

*** أسئلة :**

١) يمثل الجدول أدناه معامل الذكاء (س) و معدل التحصيل (ص) لستة طلاب :

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥	٦
معامل الذكاء (س)	٩٥	١٠٦	١١٩	١١٣	١١٥	١٢٤
معدل التحصيل (ص)	٥٣	٦٢	٨٧	٧٥	٨٦	٩٣

*** المطلوب :** ١) جد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم (ص) اذا علمت قيم (س) .
٢) قدّر معدل التحصيل المتنبأ به لطالب معامل ذكائه (١١٠) .

أ. فيصل السعدون (٠٧٩٦٠٣٠٦١١)

٢) يمثل الجدول أدناه معدلات خمس طالبات و عدد الساعات التي تقضيها الطالبة في الدراسة يومياً :

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥
عدد الساعات (س)	٨	٢	٥	٣	٧
المعدل (ص)	٩٥	٦٥	٩٠	٧٠	٩٠

المطلوب :

١) بافتراض أن العلاقة بين (س) و (ص) خطية ، جد معادلة خط الانحدار .

٢) قدّر المعدل المتوقع لطالبة تدرس ست ساعات يومياً .

٣) درست طالبة (٨) ساعات و حصلت على معدل (٩٥) ، جد الخطأ في التنبؤ .

أ. فيصل السعدون (٠٧٩٦٠٣٠٦١١)

٣) يمثل الجدول أدناه علامات خمسة طلاب في مبحثي التاريخ و الجغرافيا ، حيث العلامة العظمى (٢٠) :

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥
علامة التاريخ (س)	١١	١٢	١٠	١٣	١٤
علامة الجغرافيا (ص)	١٢	١٦	١٠	١٤	١٨

*** المطلوب : جد معادلة خط الانحدار .**

أ. فيصل السعدون (٠٧٩٦٠٣٠٦١١)

٤) يمثل الجدول الآتي عدد المركبات المشتركة في حوادث السير في الأردن في الفترة ٢٠٠٠ - ٢٠٠٤ :

السنة	٢٠٠٠	٢٠٠١	٢٠٠٢	٢٠٠٣	٢٠٠٤
رقم السنة (س)	١	٢	٣	٤	٥
عدد المركبات المشتركة بالحوادث (ص)	٩٥	٩٦	٩٤	١١٧	١٣٣

المطلوب : ١) جد معادلة خط الانحدار .

٢) جد الخطأ في التنبؤ بعدد المركبات المشتركة بالحوادث اذا كان العدد الفعلي (١١٧) .

٣) استخدم معادلة خط الانحدار للتنبؤ بعدد السيارات المشتركة بالحوادث عام (٢٠٠٦).

أ. فيصل السعدون (٠٧٩٦٠٣٠٦١١)

٥) اذا كان (س) و (ص) يمثلان رأس مال الشركة و أرباحها مقدرة بآلاف الدنانير ،
و جمعت البيانات الآتية لخمس شركات :

$\overline{س} = ١٠$ ، $\overline{ص} = ١٢$ ، $\sum_{ر=١}^{٥} (س_ر - \overline{س})^{٢} = ١٠٠٠$ ،

$\sum_{ر=١}^{٥} (س_ر - \overline{س})(ص_ر - \overline{ص}) = ٨٠$

* المطلوب : ١) جد معادلة خط الانحدار الخطي البسيط للتنبؤ بقيم (ص) اذا علمت قيم (س)
٢) قدّر أرباح شركة رأس مالها س = ١٠٠ الف دينار .

٦) اذا كان $\overline{س} = ٨$ ، $\overline{ص} = ١٠$ ، $\sum (س - \overline{س})^{٢} = ٢٤٠$ ،

$\sum (س - \overline{س})(ص - \overline{ص}) = ١٢٠$

*** المطلوب :** ١) جد معادلة خط الانحدار . ٢) قدّر قيمة (ص) اذا كانت س = ٤ .

٧) توصل مجموع من الباحثين في دراسة علامات الطالب مقارنة بعدد الساعات الدراسية يومياً إلى معادلة خط الانحدار الخطي للعلاقة بين عدد ساعات الدراسة اليومي (س) و معدل الطالب (ص)

فكانت $\hat{ص} = ٣س + ١٢$

*** المطلوب :**

١) أوجد قيمة (أ) و (ب)
٢) قدّر معدل الطلاب إذا كانت ساعات الدراسة اليومية هي (٥) ساعات
٣) اذا كانت قيمة (ص) = ٣٠ عند س = ٧ ، فأوجد الخطأ في التنبؤ .

٨) يبين الجدول الآتي نتائج دراسة أجريت لمعرفة تأثير عدد ساعات العمل المتواصل في دقة العمل ، من حيث الأخطاء التي يرتكبها الموظف :

عدد ساعات العمل (س)	٨	٨	١٢	١٢	١٦	٢٠	٢٠	٢٤
عدد الأخطاء (ص)	٦	٦	٦	١٠	٨	١٢	١٦	١٦

*** المطلوب :** ١) جد معادلة خط الانحدار .

٢) قدّر عدد الأخطاء اذا كانت عدد ساعات العمل (١٠) ساعات .

تم بحمد الله

أ. فيصل السعدون (٠٧٩٦٠٣٠٦١١)