سلسلة الاوائل في الرياضيات

التوجيهي العلمي و الصناعي

المعلم :صالح الزبيدي

المنهاج الجديد ٢٠٢٢ جيل ٢٠٠٥

الوحدة الأولى (التفاضل)

تحتوي على : أمثلة و اسئلة الكتاب مرتبة على شكل أفكار
أسئلة مهارات عليا
مكثف إختيار من متعدد على النمط الوزاري

الفصل الدراسي الأول

الدرس الأول   الإشتقاق   التفاضل

أولاً : الاتصال و الاشتقاق

العلاقة بين الاتصال و الاشتقاق

- متصل
  - نبحث قابلية الاشتقاق
    - المشتقة موجودة ← قابل للاشتقاق
    - المشتقة غيرموجودة ← غير قابل للاشتقاق
- غير متصل
  - غير قابل للاشتقاق

نرمز للمشتقة بالرمز $f'(x)$ وتكون المشتقة موجودة إذا كانت $f_-'(x) = f_+'(x)$

وتكون المشتقة غير موجودة إذا كانت $f_-'(x) \neq f_+'(x)$

لايجاد المشتقة نستعمل قانون التعريف العام :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ولايجاد المشتقة عند العدد a :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

مثـــال ١:

أبحث قابلية اشتقاق كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

1. $f(x) = \begin{cases} x+1 & , x<1 \\ 3 & , x \geq 1 \end{cases} \quad , x = 1$

أولا : نبحث الاتصال عند $x = 1$

$f(1) = 3$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x+1 = 2$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 3 = 3$

النهاية غيرموجودة وبالتالي الاقتران غير متصل عند $x = 1$

وبما أنه غير متصل فهو غيرقابل للاشتقاق عند $x = 1$

---

2. $f(x) = \begin{cases} x^3-5 & , x<2 \\ x+1 & , x \geq 2 \end{cases} \quad , x = 2$

أولا : نبحث الاتصال عند $x = 2$

$f(2) = 3$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} x^3-5 = 8 - 5 = 3$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} x+1 = 2+1 = 3$

$f(2) = \lim_{x \to 2} f(x) = 3$

الاقتران متصل عند $x = 2$

ثانيا: نبحث قابلية الاشتقاق عند $x = 2$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'_-(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^3 - 5 - f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{8} + 12h + 6h^2 + h^3 \cancel{-5 -3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(12 + 6h + h^2)}{\cancel{h}} = 12$$

$$f'_+(2) = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h) + 1 - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{3} + h \cancel{- 3}}{h} = 1$$

$$f'_-(2) \neq f'_+(2)$$

الاقتران غير قابل للاشتقاق عندما $x = 2$

---

3 $f(x) = |x| \quad , \quad x = 0$

اعادة تعريف اقتران القيمة المطلقة

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & , x < 0 \\ x & , x \geq 0 \end{cases}$$

الاقتران متصل عند $x = 0$

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

نبحث قابلية الاشتقاق عندما $x = 0$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h} = -1$$

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$$

$f'_-(0) \neq f'_+(0)$ الاقتران $f(x)$ غير قابل للاشتقاق عندما $x = 0$

4 $f(x) = x^{1/3} \quad , \quad x = 0$

الاقتران متصل عند $x = 0$ دائما الجذور الفردية متصلة

نبحث قابلية الاشتقاق عندما $x = 0$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^{1/3} - (0)^{1/3}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^{1/3}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^{2/3}}$$

عندما يكون ناتج التعويض في النهاية $\frac{\text{عدد}}{0}$ فإن الناتج يكون ∞ أو $-\infty$ أو من إحدى الجهتين ∞ ومن الجهة الأخرى $-\infty$ لذلك ندرس الإشارة حول $h = 0$.

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h^{2/3}}$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{1}{h^{2/3}} = \infty \qquad f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h^{2/3}} = \infty$$

بما أن الناتج ∞ فإن الاقتران $f(x)$ غير قابل للاشتقاق عندما $x = 0$

ســــؤال١ :

أبحث قابلية الاقتران: $f(x) = |x - 2|$ للاشتقاق عندما $x = 2$.

ســــؤال٢ :

أبحث قابلية الاقتران: $f(x) = (x+1)^{1/5}$ للاشتقاق عندما $x = -1$.

ملاحظات

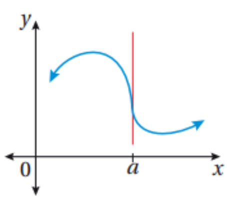
- إذا كان الاقتران $f(x)$ قابلًا للاشتقاق عندما $x = a$، فإنَّه يكون متصلًا عندما $x = a$؛ لذا، فإنَّ قابلية الاشتقاق تضمن الاتصال.
- قد يكون الاقتران $f(x)$ متصلًا عندما $x = a$، وغير قابل للاشـــتقاق عندما $x = a$؛ لذا، فإنَّ الاتصال لا يضمن قابلية الاشتقاق.

حالات يكون فيها الإقتران غير قابل للإشتقاق من الرسم

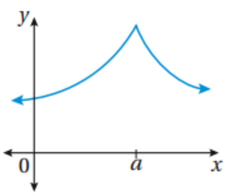
١) عندما يكون غير متصل (وجود قفزة ، ثقب)

٢) وجود رأس حاد أو زاوية

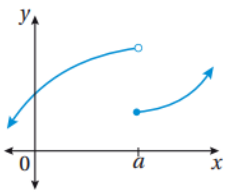
٣) وجود مماس راسي



مماس رأسي عندما $x = a$.



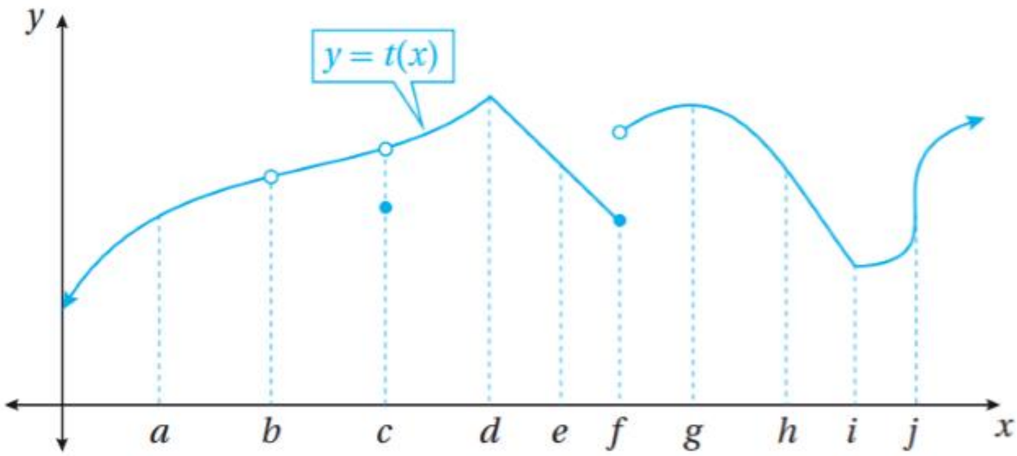
رأس حاد، أو زاوية عندما $x = a$.



عدم اتصال عندما $x = a$.

مثـــال٢:

الشكل الآتي يمثل منحنى الإقتران t(x) ، جد قيم x التي يكون عندها الإقتران غير قابل للإشتقاق



الحل:

الاقتــران غيــر قابــل للاشــتقاق **عند القيم :**

$x = b$، و $x = c$، و $x = f$؛ لأنَّــه غيــر متصــل

$x = i$، و $x = d$؛ نظـرًا إلـى وجـود رأس حــاد عنــد هاتيــن النقطتيــن

$x = j$؛ نظـرًا إلـى وجـود مماس رأسـي عنـد هـذه النقطة.

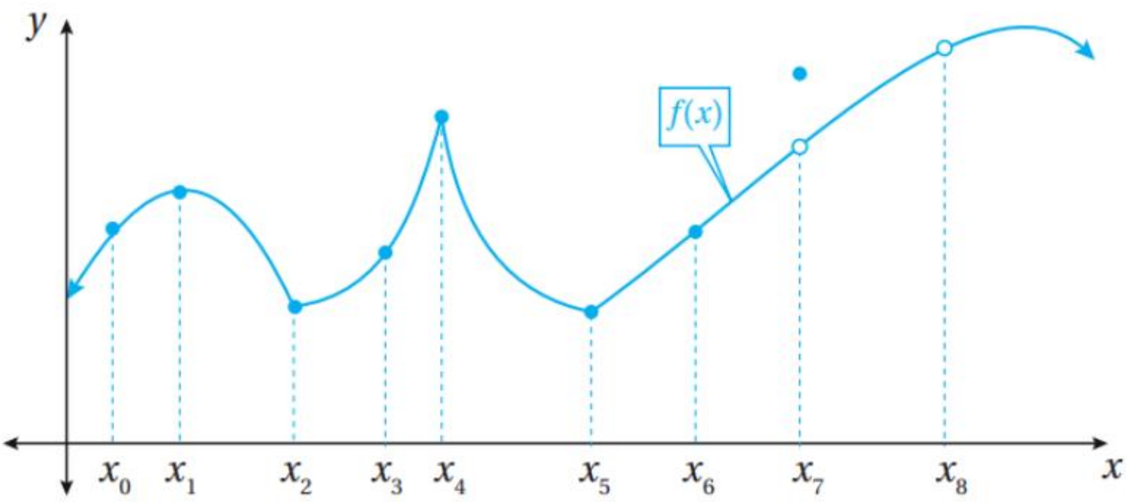
ملاحظة

لاحظ الإقتران قابل للإشتقاق عند القيم التي يكون فيها المنحنى متصل و أملس مثل a ، g ، h

---

سـؤال٣:

معتمداً الشكل الآتي الذي يمثل منحنى الإقتران f(x) ، أجب عن الفقرتين الآتيتين :



١) الإقتران غير قابل للإشتقاق عند القيم :

أ) x_0 ، x_1 ، x_6 ، x_7 ، x_8 ب) x_2 ، x_4 ، x_5 ، x_7 ، x_8

جـ) x_0 ، x_1 ، x_3 ، x_6 د) x_0 ، x_2 ، x_5 ، x_6 ، x_8

٢) الإقتران قابل للإشتقاق عند القيم :

أ) x_0 ، x_1 ، x_6 ، x_7 ، x_8 ب) x_2 ، x_4 ، x_5 ، x_7 ، x_8

جـ) x_0 ، x_1 ، x_3 ، x_6 د) x_0 ، x_2 ، x_5 ، x_6 ، x_8

ثانياً : مشتقة الاقتران الأسي الطبيعي و اللوغاريتمي الطبيعي

مشتقة الاقتران الأسي الطبيعي و اللوغاريتمي الطبيعي

١. إذا كان: $f(x) = e^x$، حيث e العدد النيبيري، فإنَّ: $f'(x) = e^x$

٢. إذا كان: $f(x) = \ln x$، حيث: $x > 0$، فإنَّ: $f'(x) = \frac{1}{x}$

أتذكَّر ....

- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ أس سالب ينزل على المقام
- $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ التبديل بين بين الصيغة الجذرية و الأس على صورة كسر
- $e^0 = 1$
- $e^{\ln x} = x$

خواص الاقتران الأسي

- $\ln e^x = x$
- $\ln e = 1$
- $\ln 1 = 0$
- $\log_b b^x = x$

خواص الاقتران اللوغاريتمي

في حالة عدم وجود أساس مع اقتران اللوغاريتم فإن الاساس هو 10 كما يلي : $\log 10^2 = 2$

إذا كانت b, x, y أعدادًا حقيقيةً موجبةً، وكان p عددًا حقيقيًّا، حيث: $b \neq 1$، فإنَّ:

- قانون الضرب: $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$
- قانون القسمة: $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$
- قانون القوَّة: $\log_b x^p = p \log_b x$

مثـــال٣:

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

4 $f(x) = \ln (x^4)$

$= 4 \ln x$

$f'(x) = \frac{4}{x}$

5 $f(x) = \ln (xe^x) + \ln (7x)$

$f(x) = \ln (xe^x) + \ln (7x)$

$= \ln x + \ln e^x + \ln 7 + \ln x$

$= 2 \ln x + x + \ln 7$

$f'(x) = \frac{2}{x} + 1$

1 $f(x) = 3e^x$

$f'(x) = 3e^x$

2 $f(x) = x^2 + e^x$

$f'(x) = 2x + e^x$

3 $y = \frac{\sqrt[3]{x} - 2xe^x}{x}$

$y = \frac{\sqrt[3]{x}}{x} - \frac{2xe^x}{x} = \frac{x^{1/3}}{x} - \frac{2xe^x}{x}$

$= x^{-2/3} - 2e^x$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}x^{-5/3} - 2e^x = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}} - 2e^x$

ســـؤال٤:

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

4 $f(x) = \sqrt{x} + \ln (4x)$

5 $f(x) = \ln (2x^3)$

1 $f(x) = 5e^x + 3$

2 $f(x) = \sqrt{x} - 4e^x$

3 $y = 8e^x + \frac{4}{\sqrt[5]{x}}$

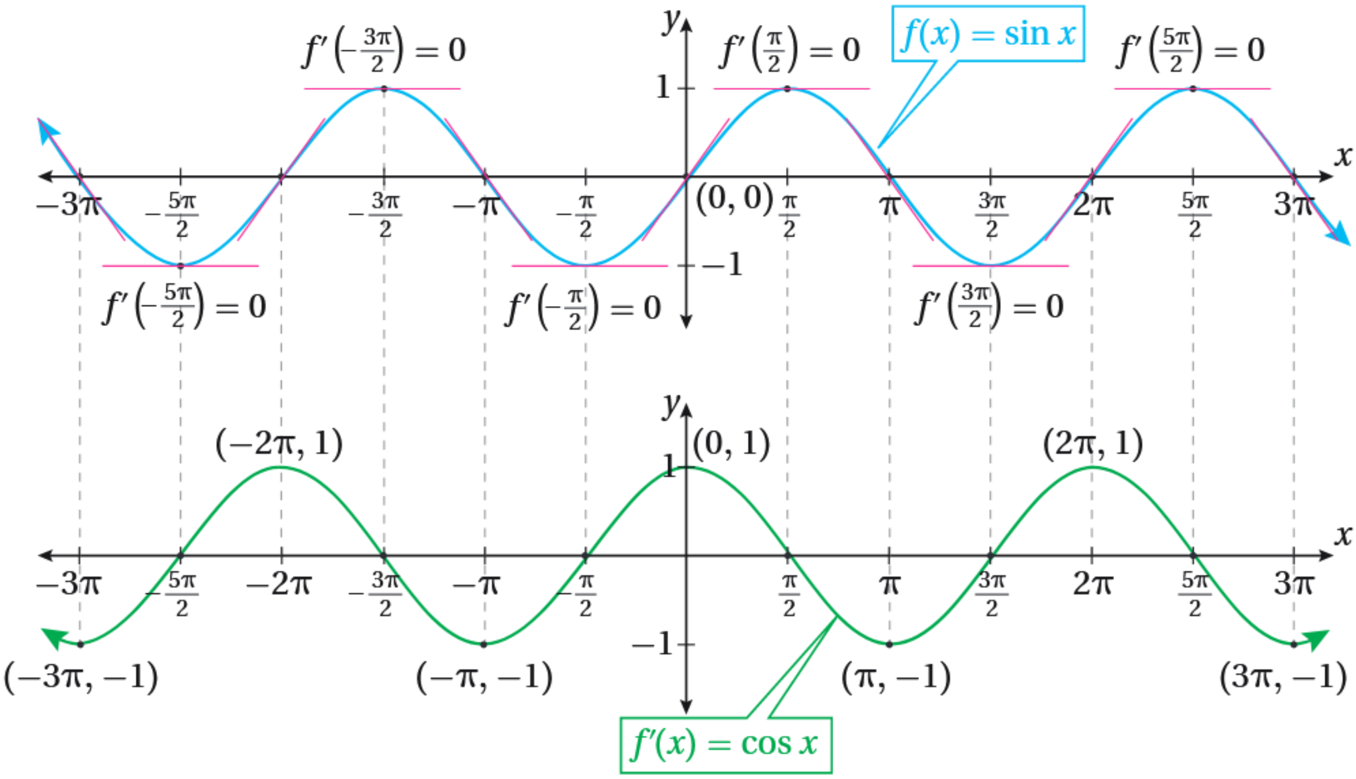
ثالثاً : مشتقة اقتران الجيب وجيب التمام

قاعدة اشتقاق الجيب و جيب التمام

- إذا كان: $f(x) = \sin x$، فإنَّ: $f'(x) = \cos x$.
- إذا كان: $f(x) = \cos x$، فإنَّ: $f'(x) = -\sin x$.

يُبيِّن الشكل الآتي كُلًّا من التمثيل البياني لمنحنى الاقتران: $f(x) = \sin x$، والتمثيل البياني لمنحنى $f'(x)$

لاحظ أن : أنَّ منحنى $f'(x)$ مُطابِق تمامًا لمنحنى جيب التمام؛ ما يعني أنَّ: $f'(x) = \cos x$.



مثـــال ٤:

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = 3\sin x + 4$ $\quad f'(x) = 3\cos x$

2) $y = \frac{1}{2}e^x - 7\cos x$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}e^x + 7\sin x$

ســـؤال٥:

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $y = \frac{\sin x}{2} + 3\cos x$

2) $f(x) = x^2 + \cos x + \sin\frac{\pi}{2}$

رابعاً : تطبيقات (ميل المماس والعمودي على المماس ومعادلة المماس و العمودي على المماس)

قوانين الميل

ميل المماس عند النقطة (x, y) = **المشتقة الأولى** $\quad m = f'(x)$

ميل العمودي على المماس عند النقطة (x, y) = $\frac{-1}{\text{ميل المماس}}$ $\quad m_{\text{العمودي}} = \frac{-1}{m_{\text{المماس}}}$

الميل من نقطتين (x_1, y_1) و (x_2, y_2) $\quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

معادلة ميل المماس : $\quad y - y_1 = m(x - x_1)$

معادلة العمودي على المماس: $\quad y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$

مثـــال٥:

إذا كان الاقتران: $f(x) = \ln\left(\frac{x}{e}\right)$، فأستعمل المشتقة لإيجاد كلٍّ ممّا يأتي:

1 معادلة المماس عند النقطة $(1, -1)$.

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{e}\right) = \ln x - \ln e = \ln x - 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

إذن، ميل المماس هو 1.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-1) = 1(x - 1)$$

إذن، معادلة المماس هي: $y = x - 2$

2 معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(1, -1)$.

$$y - (-1) = -1(x - 1)$$

$$y = -x$$

ســـؤال٦:

إذا كان الاقتران: $f(x) = \ln\sqrt{x}$، فأستعمل المشتقة لإيجاد كلٍّ ممّا يأتي:

1 معادلة المماس عند النقطة $(e, \frac{1}{2})$.

2 معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(e, \frac{1}{2})$.

خامساً : تطبيقات (الحركة في خط مستقيم)

من أمثلة الحركة في مسار مستقيم :

- حركة سيّارة على طول جزء مستقيم من الطريق
- وسقوط كرة رأسيًّا من سطح مبنى
- وتذبذب جسم مُعلَّق بزنبرك في مسار مستقيم،
- وحركة جسم مقذوف رأسيًّا إلى أعلى في مجال الجاذبية الأرضية.

السرعة المتجهة $v(t)$: هي معدل تغير الموقع بالنسبة للزمن وسميت متجهة لأنها تستخدم لتحديد إتجاه حركة الجسم بالإضافة لمقدار الحركة .

السرعة المتجهة

موجبة	سكون لحظي	سالبة
$v(t) > 0$	$v(t) = 0$	$v(t) < 0$
الجسم يتحرك إلى اليمين		الجسم يتحرك إلى اليسار

السرعة $|v(t)|$: هي القيمة المطلقة للسرعة المتجهة وهي تحدد مقدار الحركة بدون إتجاهها .

التسارع $a(t)$: معدل التغير في السرعة المتجهة بالنسبة للزمن .

نرمز لموقع الجسم : $s(t)$

و السرعة المتجهة للجسم : $v(t)$ **حيث :** $v(t) = s'(t)$

و تسارع الجسم : $a(t)$ **حيث :** $a(t) = v'(t) = s''(t)$

إذا طلب بالسؤال اتجاه الحركة : نجد السرعة المتجهة لمعرفة الاتجاه .

لمعرفة متى يعود الجسم لموقعه الابتدائي : نجد $s(0)$ **ثم** حُلَّ المعادلة $s(t) = s(0)$

مثـــال٦:

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = 6t^2 - t^3, t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

1 أجد سرعة الجسم المتجهة وتسارعه عندما $t = 2$.

سرعة الجسم المتجهة:

$$v(t) = s'(t) = 12t - 3t^2$$

$$v(2) = 12(2) - 3(2)^2 = 12$$

تسارع الجسم:

$$a(t) = v'(t) = s''(t) = 12 - 6t$$

$$= 12 - 6(2) = 0$$

2 أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

يكون الجسم في حالة سكون لحظي إذا كانت سرعته 0؛ أيْ عندما $v(t) = 0$:

$$12t - 3t^2 = 0$$

$$3t(4-t) = 0$$

إذن، يكون الجسم في حالة سكون لحظي عندما $t = 0$ or $t = 4$

3 في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = 5$؟

$$v(t) = 12t - 3t^2$$

$$v(5) = 12(5) - 3(5)^2 = -15$$

بما أنَّ إشارة السرعة المتجهة سالبة، فإنَّ الجسم يتحرَّك في الاتجاه السالب عندما $t = 5$.

4 متى يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي؟

يكون الجسم في موقعه الابتدائي أوَّل مَرَّة عندما $t = 0$. ومنه، فإنَّ: $s(0) = 0$.

لإيجاد الأوقات التي يعود فيها الجسم إلى هذه النقطة، أحُلُّ المعادلة: $s(t) = 0$:

$$6t^2 - t^3 = 0$$

$$t^2(6-t) = 0$$

إذن، يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي بعد 6 s. $\cancel{t = 0}$ or $t = 6$

سـؤال٧:

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = t^2 - 7t + 8, t \geq 0$ موقع جسـم يتحرَّك في مسـار مسـتقيم، حيث s الموقع بالأمتار، وt الزمن بالثواني:

1. أجد سرعة الجسم المتجهة وتسارعه عندما $t = 4$.

2. أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

3. في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = 2$؟

4. متى يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي؟

سادساً : تطبيقات (الحركة التوافقية البسيطة)

إذا كانـت المعادلة التي تَصِف الإزاحة y لجسـم عند الزمن t هي:

$y = a \sin \omega t$،

أو:

$y = a \cos \omega t$،

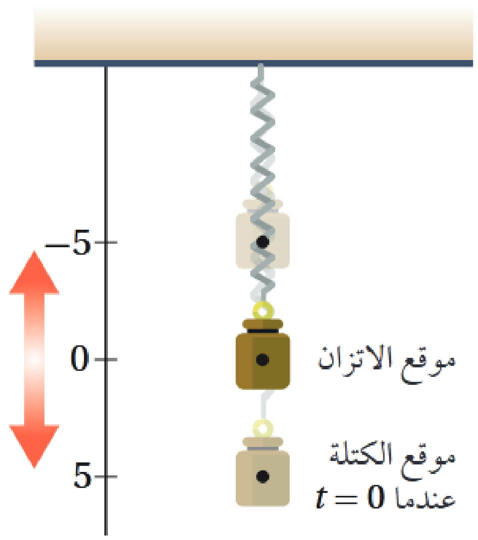
فإنَّ الجسم يكون في حركة توافقية بسيطة.

حيث تُسـتعمَل الاقترانات الجيبية لنمذجة السلوك الدوري في كثير من المواقف الحياتيـة والعلمية، مثل حركة اهتـزاز كتلة مُعلَّقة بزنبرك .

مثـــال٧:

من الحياة

زنبرك: يُبيِّن الشـكل المجاور جسـمًا مُعلَّقًا بزنبرك، شُدَّ 5 وحدات أسـفل الاتزان $(s = 0)$، ثم تُرِك عند الزمـن $t = 0$ ليتحـرَّك إلى الأعلى وإلى الأسـفل ويُمثِّل الاقتران: $s(t) = 5 \cos t$ موقع الجسـم عند أيِّ زمـن لاحق، حيث t الزمـن بالثواني، وs الموقع بالسنتيمترات:



1. أجد اقترانًا يُمثِّل سرعة الجسم المتجهة، واقترانًا آخرَ يُمثِّل تسارعه عند أيِّ لحظة.

اقتران السرعة المتجهة $v(t) = s'(t) = -5 \sin t$

اقتران التسارع $a(t) = v'(t) = -5 \cos t$

2. أَصِف حركة الجسم.

- اعتمـادًا علـى الخصائـص الجبريـة لاقتـران الموقع، فـإنّ الجسـم يتحرَّك بمـرور الزمن بيـن الموقـع $s = 5$ والموقـع $s = -5$ علـى المحور s، والقيمة السـالبة تعني أنَّ الجسـم فوق موقـع الاتزان.

- ألاحِـظ أنَّ قيمـة السـرعة تكـون أكبر مـا يُمكِن فـي الاتجـاه الموجب والاتجاه السـالب عندمـا $|\sin t| = 1$. وفـي هـذه الحالة، فإنَّ $\cos t = 0$ (متطابقـة فيثاغورس). وبالرجوع إلـى اقتـران الموقع، ألاحِـظ أنَّ قيمتـه تُصبِح صفرًا (موقـع الاتزان) عندمـا $\cos t = 0$؛ مـا يعني أنَّ سـرعة الجسـم تكون أكبـر ما يُمكِـن عندما يمرُّ الجسـم بموقـع الاتزان.

- اعتمـادًا علـى الخصائـص الجبريـة لاقتـران التسـارع، فـإنَّ قيمـة تسـارع الجسـم تكون دائمًـا معكـوس قيمـة موقـع الجسـم؛ ذلـك أنَّ مُحصِّلـة القـوى تسـحب الجسـم إلـى الأسـفل إذا كان أعلـى موقـع الاتـزان، وأنَّ مُحصِّلـة القوى تسـحب الجسـم إلى الأعلى إذا كان أسـفل موقـع الاتـزان.
- تكـون قيمـة التسـارع صفـرًا فقـط عنـد موقـع الاتـزان؛ لأنَّ قـوَّة الجاذبيـة وقـوَّة الزنبـرك تُلغـي إحداهمـا الأُخـرى عنـد هـذه النقطـة. ولكـنْ، إذا كان الجسـم عنـد أيِّ موقـع آخـر، فـإنَّ هاتيـن القوَّتيـن لا تكونـان متسـاويتين، والتسـارع لا يسـاوي صفـرًا.

سـؤال٨:

يتحرَّك جسـم مُعلَّق بزنبرك إلى الأعلى وإلى الأسفل، ويُمثِّل الاقتران: $s(t) = 7\sin t$ موقع الجسم عند أيِّ زمن لاحق، حيث t الزمن بالثواني، وs الموقع بالأمتار:

1. أجد اقترانًا يُمثِّل سرعة الجسم المتجهة، واقترانًا آخرَ يُمثِّل تسارعه عند أيِّ لحظة.

2. أَصِف حركة الجسم.

أبحث قابلية اشتقاق كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

1 $f(x) = |x-5|, x = 5$

2 $f(x) = x^{2/5}, x = 0$

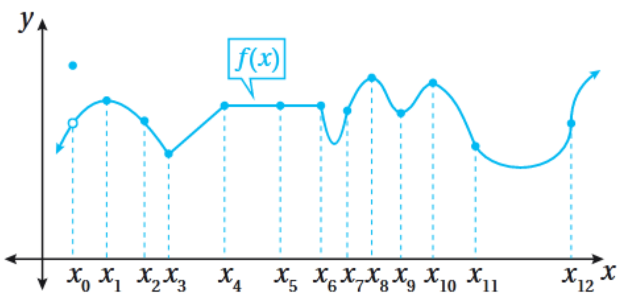
3 $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \leq 1 \\ x^2 - 2x & , x > 1 \end{cases} , x = 1$

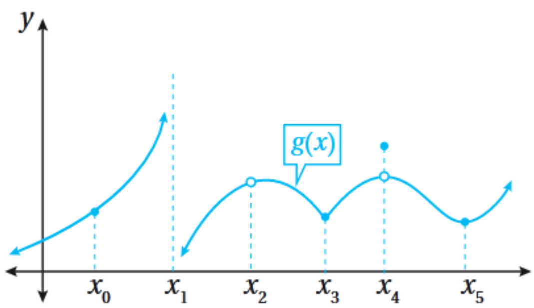
4 $f(x) = \frac{3}{x}, x = 4$

5 $f(x)=(x-6)^{2/3}, x=6$

6) $f(x) = \begin{cases} x+1 & , x \neq 4 \\ 3 & , x = 4 \end{cases} \quad , x = 4$

أُحدِّد قِيَم x للنقاط التي لا يكون عندها كل اقتران ممّا يأتي قابلًا للاشتقاق، مُبرِّرًا إجابتي:

7) 

8) 

أُحدِّد قيمة (قِيَم) x التي لا يكون عندها كل اقتران ممّا يأتي قابلًا للاشتقاق:

9) $f(x) = \dfrac{x-8}{x^2-4x-5}$

10) $f(x) = \sqrt[3]{3x-6} + 5$

11) $f(x) = |x^2 - 9|$

12) إذا كان: $f(x) = x\,|x|$، فأُثبِت أنَّ $f'(0)$ موجودة.

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي

13) $f(x) = 2\sin x - e^x$

14) $f(x) = \frac{\ln x}{4} - \pi \cos x$

15) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x^3}\right) + x^4$

16) $f(x) = e^{x+1} + 1$

17) $f(x) = e^x + x^e$

18) $f(x) = \ln\left(\frac{10}{x^n}\right)$

إذا كان: $f(x) = \sin x + \frac{1}{2} e^x$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

19) أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران f عند النقطة $(\pi, \frac{1}{2} e^{\pi})$.

20) أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران f عند النقطة $(\pi, \frac{1}{2} e^{\pi})$.

21) أجد قيمة x التي يكون عندها المماس أفقيًّا لمنحنى الاقتران: $f(x) = e^x - 2x$.

---

22) اختيار من مُتعدِّد: أيُّ الآتية تُمثِّل معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران $f(x) = \sin x + \cos x$ عندما $x = \pi$؟

a) $y = -x + \pi - 1$ b) $y = x - \pi - 1$ c) $y = x - \pi + 1$ d) $y = x + \pi + 1$

23 إذا كان: $f(x) = \ln(kx)$، حيث k عدد حقيقي موجب، و $x > 0$، فأُبيِّن أنَّ $f'(x) = \frac{1}{x}$.

إذا كان الاقتران: $f(x) = \ln x$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

24 أُثبِت أنَّ مماس منحنى الاقتران عند النقطة $(e, 1)$ يمرُّ بنقطة الأصل.

25 أُثبِت أنَّ المقطع x للعمودي على المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة $(e, 1)$ هو $e + \frac{1}{e}$.

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = t^3 - 4t^2 + 5t, t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

26 أجد سرعة الجسم وتسارعه عندما $t = 5$.

27 أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

28 في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = 4$؟

29 متى يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي؟

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = e^t - 4t, t \geq 0$ موقع جُسَيْم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، وt الزمن بالثواني:

30 أُحدِّد الموقع الابتدائي للجُسَيْم.

31 أجد تسارع الجُسَيْم عندما تكون سرعته المتجهة صفرًا.

زنبرك: يتحرَّك جسم مُعلَّق بزنبرك إلى الأعلى وإلى الأسفل، ويُحدِّد الاقتران: $s(t) = 4\cos t$ موقع الجسم عند أيِّ زمن لاحق، حيث t الزمن بالثواني، وs الموقع بالأمتار:

32 أجد اقترانًا يُمثِّل سرعة الجسم المتجهة، واقترانًا آخرَ يُمثِّل تسارعه عند أيِّ لحظة.

33 أجد سرعة الجسم المتجهة وتسارعه عندما $t = \frac{\pi}{4}$.

34 أَصِف حركة الجسم.

الدرس الثاني　　مشتقة الضرب و القسمة و المشتقات العليا　　التفاضل

بالكلمات　مشتقة الأول × الثاني + مشتقة الثاني × الأول = مشتقة حاصل ضرب اقترانين

بالرموز　$$(fg)'(x) = f(x)\ g'(x) + g(x)\ f'(x)$$

مثـــال ١:

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

① $f(x) = (x^3 - 2x^2 + 3)(7x^2 - 4x)$

$$f'(x) = (3x - 2x^2)(4) + (5 + 4x)(3 - 4x)$$

$$= (12x - 8x^2) + (15 - 8x - 16x^2)$$

$$f'(x) = -24x^2 + 4x + 15$$

② $f(x) = \ln x \ \cos x$

$$f'(x) = xe^x + e^x \times 1$$

$$f'(x) = xe^x + e^x$$

ســؤال ١:

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

① $f(x) = (x^3 - 2x^2 + 3)(7x^2 - 4x)$

② $f(x) = \ln x \ \cos x$

ســؤال ٢:

إذا كان: $f(x) = (x^2 + 2)(3x - 1)(x^3 - x + 1)$ ، فأجد $f'(-1)$:

مشتقة قسمة اقترانين و مشتقة المقلوب

بالكلمات : مشتقة قسمة اقترانين = $\dfrac{\text{مشتقة المقام} \times \text{البسط} - \text{مشتقة البسط} \times \text{المقام}}{(\text{المقام})^2}$

بالرموز :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x) \times f'(x) - f(x) \times g'(x)}{(g(x))^2}$$

بالكلمات : مشتقة المقلوب $\dfrac{\text{ثابت}}{\text{اقتران}}$ = $\dfrac{-\text{الثابت} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2}$

بالرموز :

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$$

مثــال٢:

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$

$$f'(x) = \frac{(1+x^2)(-2x) - (1-x^2)(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{-2x - 2x^3 - 2x + 2x^3}{(1+x^2)^2} = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$$

---

2) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x+1}$

$$f'(x) = \frac{(x+1)\left(\frac{1}{x}\right) - (\ln x)(1)}{(x+1)^2} = \frac{1 + \frac{1}{x} - \ln x}{(x+1)^2} = \frac{x + 1 - x\ln x}{x(x+1)^2}$$

3 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

$$f'(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

---

4 $f(t)=\dfrac{1}{t+\frac{1}{t}}$

$$f'(t)=\frac{-1+\frac{1}{t^2}}{(t+\frac{1}{t})^2}=\frac{1-t^2}{t^2(t+\frac{1}{t})^2}$$

سـؤال ٣:

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x)=\dfrac{1}{5x-x^2}$

2 $f(x)=\dfrac{1}{e^x+\sqrt{x}}$

سـؤال ٣:

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق عندما $x=2$ ، وكان $f(2)=5, f'(2)=-3, g(2)=-1, g'(2)=2$،

فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1 $(fg)'(2)$

2 $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(2)$

3 $(4f-2fg)'(2)$

مثـــال ٣:

مثال 3 : من الحياة

مرض: تعطى درجة حرارة مريض في أثناء مرضه بالاقتران: $T(t)=\dfrac{4t}{1+t^2}+98.6$، حيــث t الزمن بالســاعات بعد ظهور أعراض المرض، و T درجة الحرارة بالفهرنهايت:

أجد مُعدَّل تغيُّر درجة حرارة المريض بالنسبة إلى الزمن.

تعني المشتقة بالنسبة للزمن

1 أجد $T'(t)$:

$$T'(t)=\frac{(1+t^2)(4)-(4t)(2t)}{(1+t^2)^2}=\frac{4+4t^2-8t^2}{(1+t^2)^2}=\frac{4-4t^2}{(1+t^2)^2}$$

إذن، مُعدَّل تغيُّر درجة حرارة المريض بالنسبة إلى الزمن هو: $T'(t)=\dfrac{4-4t^2}{(1+t^2)^2}$.

2 أجد مُعدَّل تغيُّر درجة حرارة المريض عندما $t=2$، مُفسِّرًا معنى الناتج.

أجد $T'(2)$:

$$T'(2)=\frac{4-4(2)^2}{(1+(2)^2)^2}=-0.48$$

ســؤال ٤:

سكّان: يعطى عدد سكّان مدينة صغيرة بالاقتران: $P(t)=\dfrac{500t^2}{2t+9}$، حيث t الزمن بالسنوات، و P عدد السكّان بالآلاف:

1 أجد مُعدَّل تغيُّر عدد السكّان في المدينة بالنسبة إلى الزمن.

2 أجد مُعدَّل تغيُّر عدد السكّان في المدينة عندما $t=12$، مُفسِّرًا معنى الناتج.

مشتقة الاقترانات المثلثية

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x \qquad \frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

مثـــال ٤:

أَثبِت أن : $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$ المتطابقات النسبية

$$f'(x) = \frac{(\cos x)(\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{(\cos x)^2}$$ قاعدة مشتقة القسمة

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$ متطابقات فيثاغورس

$$= \sec^2 x$$ متطابقات المقلوب

ســـؤال ٥:

أَثبِت أن : $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$

مثـــال ٥:

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = x^2 \sec x$

$$f'(x) = x^2 \sec x \tan x + 2x \sec x$$

قاعدة مشتقة الضرب

---

2) $f(x) = \dfrac{\csc x}{1 + \tan x}$

$$f'(x) = \frac{(1+\tan x)(-\csc x \cot x) - (\csc x)(\sec^2 x)}{(1+\tan x)^2}$$

قاعدة مشتقة القسمة

$$= \frac{-\csc x \cot x - \csc x \cot x \tan x - \csc x \sec^2 x}{(1+\tan x)^2}$$

$$= \frac{-\csc x \cot x - \csc x - \csc x \sec^2 x}{(1+\tan x)^2}$$

بالتبسيط

ســـؤال ٦:

جد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي :

1) $f(x) = x \cot x$

2) $f(x) = \dfrac{\tan x}{1 + \sin x}$ عندما $x = \dfrac{\pi}{6}$:

المشتقات العليا

المشتقة الأولى	المشتقة الثانية	المشتقة الثالثة	المشتقة n
$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f^{(n)}(x)$
y'	y''	y'''	$y^{(n)}$
$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d^2y}{dx^2}$	$\frac{d^3y}{dx^3}$	$\frac{d^ny}{dx^n}$
$\frac{d}{dx}(f(x))$	$\frac{d^2}{dx^2}(f(x))$	$\frac{d^3}{dx^3}(f(x))$	$\frac{d^n}{dx^n}(f(x))$

مثـــال ٦:

أجد المشتقات الأربع الأولى للاقتران: $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$.

المشتقة الأولى: $f'(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$

المشتقة الثانية: $f''(x) = 2 - \frac{2}{x^3}$

المشتقة الثالثة: $f'''(x) = \frac{6}{x^4}$

المشتقة الرابعة: $f^{(4)}(x) = -\frac{24}{x^5}$

ســـؤال ٧:

أجد المشتقات الثلاث الأولى للاقتران: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

أسئلة الكتاب : أتدرب و أحل المسائل

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = \frac{x^3}{2x-1}$

2) $f(x) = x^3 \sec x$

3) $f(x) = \frac{x+1}{\cos x}$

4) $f(x) = e^x (\tan x - x)$

5) $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{e^x}$

6) $f(x) = x^3 \sin x + x^2 \cos x$

7) $f(x) = \sqrt[3]{x}(\sqrt{x} + 3)$

8) $f(x) = \frac{1+\sec x}{1-\sec x}$

9) $f(x) = \frac{2-\frac{1}{x}}{x-3}$

10) $f(x) = (x^3 - x)(x^2 + 2)(x^2 + x + 1)$

11) $f(x) = (\csc x + \cot x)^{-1}$

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق عندما $x = 0$، وكان $f(0) = 5, f'(0) = -3, g(0) = -1, g'(0) = 2$،

فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

12) $(fg)'(0)$

13) $\left(\frac{f}{g}\right)'(0)$

14) $(7f - 2fg)'(0)$

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

15 $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4}, x = -2$

16 $f(x) = \dfrac{1 + x}{1 + \sqrt[3]{x}}, x = 8$

17 $f(x) = \dfrac{1}{1 + \sqrt{x}}, x = 4$

أجد معادلة المماس لكل اقتران ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

18 $f(x) = \dfrac{1 + x}{1 + e^x}, (0, \frac{1}{2})$

19 $f(x) = e^x \cos x + \sin x, (0, 1)$

أُثبِت صحة كلٍّ ممّا يأتي مُعتمِدًا أنَّ $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ ، $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$:

21 $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

20 $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$

22 $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$

ألاحِظ المشتقة المعطاة في كلٍّ ممّا يأتي، ثم أجد المشتقة العليا المطلوبة:

25 $f^{(4)}(x) = 2x+1, f^{(6)}(x)$

24 $f'''(x) = 2\sqrt{x}\ , f^{(4)}(x)$

23 $f''(x) = 2 - \frac{2}{x}\ , f'''(x)$

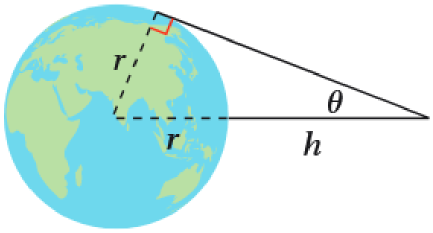
---

26 نباتــات هجينة: وجد فريق بحث زراعي أنَّه يُمكِــن التعبير عن ارتفاع نبتة مُهجَّنة من نبات تبّاع الشمس h بالأمتار، باســتعمال الاقتران: $h(t) = \frac{3t^2}{4+t^2}$، حيث t الزمن بالأشهر بعد زراعة البذور. أجد مُعدَّل تغيُّر ارتفاع النبتة بالنسبة إلى الزمن.

إذا كان الاقتران: $y = e^x \sin x$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

27 أجد $\frac{dy}{dx}$ ، و $\frac{d^2y}{dx^2}$.

28 أُثبِت أنَّ $\frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{dy}{dx} - 2y$.



أقمار صناعية: عندمــا ترصد الأقمارُ الصناعيــةُ الأرضَ، فإنَّه يُمكِنها مســح جزء فقط من ســطح الأرض. وبعض الأقمار الصناعية تحوي مُستشعِرات لقياس الزاوية θ (بالراديان) المُبيَّنة في الشكل المجاور.

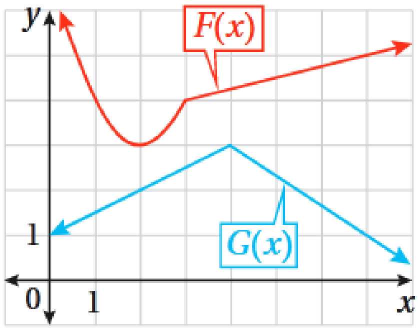
إذا كان h يُمثِّل المسافة بين القمر الصناعي وسطح الأرض بالكيلومتر، و r يُمثِّل نصف قُطْر الأرض بالكيلومتر، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

29 أُثبِت أنَّ $h = r(\csc\theta - 1)$.

30 أجد مُعدَّل تغيُّر h بالنسبة إلى θ عندما $\theta = \frac{\pi}{6}$ rad (أفترض أنَّ $r = 6371$ km).

---

31 إذا كان: $f(x) = 9\ln x + \frac{1}{2x^2}$، فأُثبِت أنَّ $f'(x) = \frac{(3x-1)(3x+1)}{x^3}$.



يُبيِّن الشكل المجاور منحنيي الاقترانين: $F(x)$، و $G(x)$.

إذا كان: $P(x) = F(x)G(x)$، وكان: $Q(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

32 $P'(2)$

33 $Q'(7)$

تبرير: إذا كان: $y = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

34 أجد ميل المماس عند نقطة الأصل.

35 أُبيِّن عدم وجود مماس أفقي للاقتران y، مُبرِّرًا إجابتي.

تحدٍّ: إذا كان: $y = \frac{x + 1}{x - 1}$، حيث: $x \neq 1$، فأُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا:

36 أجد $\frac{dy}{dx}$.

37 أُعيد كتابة المعادلة بالنسبة إلى المُتغيِّر x (x اقتران بالنسبة إلى y)، ثم أجد $\frac{dx}{dy}$.

38 أُبيِّن أنَّ $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$.

تبرير: إذا كان: $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

39 أُثبِت أنَّ $f''(x) = \frac{6 \ln x - 5}{x^4}$، مُبرِّرًا إجابتي.

40 أجد قيمة المقدار: $x^4 f''(x) + 4x^3 f'(x) + 2x^2 f(x) + 1$.

الدرس الثالث قاعدة السلسلة التفاضل

فكرة قاعدة السلسلة : ايجاد مشتقة اقتران مركب من اقترانين احدهما داخلي و الآخر خارجي كما في المثال التالي:

قاعدة السلسلة : $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$

مثـــال ١ إذا كان $h(x) = (5x^3 - 2x)^4$ أوجد $\frac{dy}{dx}$

$$h(x) = \underbrace{(\overbrace{5x^3 - 2x}^{\text{اقتران داخلي}})^4}_{\text{اقتران خارجي}}$$

الحل : نفرض أن : $u = 5x^3 - 2x$ اقتـــران داخلـــي، فيكون $y = u^4$ اقتـــران خارجي

قانون السلسلة $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$

إشتق الأقتران الخارجي ثم الاقتران الداخلي $= 4u^3 \times (15x^2 - 2)$

استبدل u بقيمتها داخل اقواس بدلالة x $= 4(5x^3 - 2x)^3 (15x^2 - 2)$

ملاحظة

إذا كان f(x) و g(x) قابلين للإشتقاق فإن :

$(fog)(x) = f(g(x))$ تقرأ f بعد g

تعني مشتقة تركيب اقترانين

$(fog)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$

أو بالصيغة التالية

$\frac{d}{dx}((fog)(x)) = f'(g(x)) \times g'(x)$

قاعدة السلسلة والاقترانات المشهورة

إذا كان $g(x)$ اقترانًا قابلًا للاشتقاق، فإنَّ:

$$\frac{d}{dx}\left(\csc g(x)\right) = -\csc\left(g(x)\right)\cot\left(g(x)\right) \times g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sin g(x)\right) = \cos\left(g(x)\right) \times g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sec g(x)\right) = \sec\left(g(x)\right)\tan\left(g(x)\right) \times g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\cos g(x)\right) = -\sin\left(g(x)\right) \times g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\cot g(x)\right) = -\csc^2\left(g(x)\right) \times g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\tan g(x)\right) = \sec^2\left(g(x)\right) \times g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\ln g(x)\right) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{(g(x))}\right) = e^{g(x)} \times g'(x)$$

مثـــال٢:

جد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

2) $f(x) = e^{(x+x^2)}$

$$f(x) = e^{(x+x^2)}$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(e^{(x+x^2)}\right) = e^{(x+x^2)} \times (1+2x)$$

1) $f(x) = \cos 2x$

$$f(x) = \cos 2x$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(\cos 2x) = -\sin 2x \times 2$$

$$= -2\sin 2x$$

ســـؤال 1 جد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

3) $f(x) = \ln(\cot x)$

2) $f(x) = e^{\ln x}$

1) $f(x) = \tan 3x^2$

قاعدة سلسلة القوة (مشتقة قوس مرفوع لقوة)

إذا كان n أيَّ عدد حقيقي، وكان: $u = g(x)$ اقترانًا قابلًا للاشتقاق، فإنَّ:

$$\frac{d}{dx}(g(x))^n = n(g(x))^{n-1} \times g'(x)$$

وبصيغة أُخرى، فإنَّ: $\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1} \times \frac{du}{dx}$

مثـــال٣:

إذا كان $y = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$ أوجد مايلي :

1) $\frac{dy}{dx}$ عندما $x=3$

$$y = (x^2-1)^{2/3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}(x^2-1)^{-1/3} \times \frac{d}{dx}(x^2-1)$$

$$= \frac{2}{3}(x^2-1)^{-1/3} \times 2x \qquad = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=3} = \frac{4(3)}{3\sqrt[3]{(3)^2-1}} \quad = \quad \frac{12}{6} \quad =2$$

---

2) معادلة المماس لمنحنى الاقتران عندما $x=3$.

$y = \sqrt[3]{((3)^2-1)^2} = 4$

$m = 2$

$y-y_1= m(x-x_1)$

$y-4=2(x-3)$

$y-4=2x-6$

$y=2x-2$

مثـــال ٤ :

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = \tan^4 x$

$$f(x) = \tan^4 x = (\tan x)^4$$

$$f'(x) = 4\,(\tan x)^3 \times \frac{d}{dx}(\tan x)$$

$$= 4\tan^3 x \times \sec^2 x$$

2) $f(x) = \sqrt{\ln x}$

$$f(x) = \sqrt{\ln x} = (\ln x)^{1/2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^{-1/2} \times \frac{d}{dx}(\ln x)$$

$$= \frac{1}{2}(\ln x)^{-1/2} \times \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$$

ســؤال ٢ :

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = \sqrt[5]{(x^2 - 1)^2}$

2) $f(x) = \sqrt{\cos x}$

3) $f(x) = (\ln x)^5$ عندما $x = \frac{1}{e}$

الإستعمال المتكرر لقاعدة السلسلة

في بعض المسائل نحتاج استعمال قاعدة السلسلة أكثر من مرة فمثلاً إذا كان :

$y = f(u), u = g(x), x = h(t)$، حيث f و g و h اقترانات، كلٌّ منها قابل للاشتقاق في مجاله، فإنَّه يُمكِن إيجاد مشتقة y بالنسبة إلى t باستعمال قاعدة السلسلة مَرَّتين كالآتي:

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dt} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \times \frac{dx}{dt}}$$

مثــال ٥:

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = \sin\left(\tan\sqrt{3x^2+4}\right)$

الحل : نستعمل قانون السلسلة متكرر

خارجي   داخلي اول   دخلي ثاني

$$f(x) = \sin\left(\tan\sqrt{3x^2+4}\right)$$

ماداخل الأقواس يبقى   الداخلي يبقى   نشتق الجذر التربيعي

$$= \frac{d}{dx}\sin\left(\tan\sqrt{3x^2+4}\right) \times \frac{d}{dx}\tan\sqrt{3x^2+4} \times \frac{d}{dx}\sqrt{3x^2+4}$$

$$= \cos\left(\tan\sqrt{3x^2+4}\right) \times \sec^2\sqrt{3x^2+4} \times \frac{6x}{2\sqrt{3x^2+4}}$$

$$f'(x) = \frac{3x\cos\left(\tan\sqrt{3x^2+4}\right) \times \sec^2\sqrt{3x^2+4}}{\sqrt{3x^2+4}}$$

2 $f(x) = e^{\csc 4x}$

$$f'(x) = \frac{d}{dx} e^{\csc 4x} \times \frac{d}{dx}(\csc 4x) \times \frac{d}{dx}(4x)$$

$$= -4e^{\csc 4x} \csc 4x \cot 4x$$

سـؤال ٣:

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = \cos^2(7x^3 + 6x - 1)$

2 $f(x) = (2 + (x^2 + 1)^4)^3$

سـؤال ٤:

إذا كان $y = \frac{\cos \pi}{5 \cos (\pi x)^2}$ أوجد $\frac{dy}{dx}$ عندما $x = \frac{1}{\pi}$

أمثلة على المماس (تستعمل فيها قاعدة السلسلة مع قواعد الاشتقاق للضرب و القسمة)

مثـــال ٦:

أجد ميل المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = e^{-0.2x}\sin 4x$ عندما $x = \frac{\pi}{8}$.

$$f(x) = e^{-0.2x} \sin 4x$$

$$f'(x) = e^{-0.2x} \times 4\cos 4x + \sin 4x \times -0.2e^{-0.2x}$$

$$f'(\tfrac{\pi}{8}) = 4e^{-0.2(\pi/8)} \cos 4(\tfrac{\pi}{8}) - 0.2e^{-0.2(\pi/8)} \sin 4(\tfrac{\pi}{8})$$

$$= -0.2e^{-0.025\pi}$$

حل آخر　استعمال مشتقة قسمة اقترانين

$$f(x) = \frac{\sin 4x}{e^{0.2x}}$$

أكمل ....

مثـــال ٧: إختيار من متعدد

ميل العمودي على المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = \left(\frac{3x-1}{x^2+3}\right)^2$ عندما $x = 0$.

$$f'(x) = 2\left(\frac{3x-1}{x^2+3}\right) \times \left(\frac{(x^2+3)(3)-(3x-1)(2x)}{(x^2+3)^2}\right) = \frac{2(3x-1)(-3x^2+2x+9)}{(x^2+3)^3}$$

$$f'(0) = \frac{2(3(0)-1)(-3(0)^2+2(0)+9)}{((0)^2+3)^3} = \frac{-18}{27} = \frac{-2}{3}$$

إذن، ميل العمودي على المماس : $\frac{3}{2}$

أ) $\frac{3}{2}$　　ب) $\frac{-2}{3}$　　جـ) -1　　د) 1

ســؤال ٥:

أجد ميل المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = (2x+1)^5 (x^3 - x + 1)^4$ عندما $x = 1$.

سـؤال ٦:

أجد ميل العمودي على المماس لمنحنى الاقتران: $f(x)=\dfrac{\cos^2 x}{e^{2x}}$ عندما $x=\dfrac{\pi}{2}$.

مثـــال ٨: من الحياة

طرحت إحدى الشــركات مُنتَجًا جديدًا في الأسواق، ثم رصدت عدد القطع المَبيعة منذ طرحه.

إذا مثَّــل الاقتــران: $N(t)=\dfrac{250000\,t^2}{(2t+1)^2}\,,\ t>0$ عــدد القطع المَبيعة منذ طرحه،حيث t الزمن بالأسابيع، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

1) أجد مُعدَّل تغيُّر عدد القطع المَبيعة بالنسبة إلى الزمن.

المطلوب: $N'(t)$:

قاعدة مشتقة القسمة

$$N'(t)=\frac{(2t+1)^2\,\frac{d}{dt}(250000\,t^2)-(250000\,t^2)\,\frac{d}{dt}(2t+1)^2}{((2t+1)^2)^2}$$

قاعدتا مشتقة اقتران القوَّة، ومشتقة السلسلة

$$=\frac{(2t+1)^2\,(500000\,t)-(250000\,t^2)\,2(2t+1)\times 2}{(2t+1)^4}$$

بالتبسيط

$$=\frac{(2t+1)^2\,(500000\,t)-(1000000\,t^2)(2t+1)}{(2t+1)^4}$$

بإخراج العامل المشترك

$$=\frac{(2t+1)(500000\,t)\,((2t+1)-2t)}{(2t+1)^4}$$

بقسمة البسط والمقام على $(2t+1)$

$$=\frac{500000\,t}{(2t+1)^3}$$

2 أجد $N'(52)$، مُفسِّرًا معنى الناتج.

مشتقة الاقتران $N(t)$

$$N'(t) = \frac{500000\,t}{(2t+1)^3}$$

بتعويض $t = 52$

$$N'(52) = \frac{500000\,(52)}{(2(52)+1)^3} \approx 22$$

إذن، $N'(52) = 22$، وهــذا يعني أنَّ إجمالــي عدد القطع المَبيعة مــن المُنتَج يزداد بمُعدَّل 22 قطعة لكل أسبوع بعد مرور 52 أسبوعًا على طرح المُنتَج في الأسواق.

سـؤال ٧:

تُحسَب قيمة بدل الخدمة لأحد المُنتَجات بالدينار باستعمال الاقتران: $U(x) = 80\sqrt{\frac{2x+1}{3x+4}}$، حيث x عدد القطع المَبيعة من المُنتَج:

1) أجد مُعدَّل تغيُّر قيمة بدل الخدمة بالنسبة إلى عدد القطع المَبيعة من المُنتَج.

2) أجد $U'(20)$، مُفسِّرًا معنى الناتج.

مشتقة $a^{g(x)}$, $\log_a g(x)$

مشتقة $a^{g(x)}$

إذا كان a عددًا حقيقيًّا موجبًا، و $a \neq 1$، وكان $g(x)$ اقترانًا قابلًا للاشتقاق، فإنَّ:

$$\frac{d}{dx}(a^{g(x)}) = \ln a \times a^{g(x)} \times g'(x) \qquad \frac{d}{dx}(a^x) = a^x \times \ln a$$

مشتقة $\log_a g(x)$

إذا كان a عددًا حقيقيًّا موجبًا، و $a \neq 1$، وكان $g(x)$ اقترانًا قابلًا للاشتقاق، فإنَّ:

$$\frac{d}{dx}(\log_a g(x)) = \frac{g'(x)}{(\ln a)g(x)} \qquad \frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$$

مثـــال ٩ :

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = 8^{5x}$

$$f'(x) = (\ln 8)8^{5x}(5) = (5\ln 8)8^{5x}$$

2) $f(x) = 6^{x^2}$

$$f'(x) = (\ln 6)6^{x^2}(2x) = (2x\ln 6)\,6^{x^2}$$

3) $f(x) = e^{3x} + 2^{3x}$

$$f'(x) = 3e^{3x} + (3\ln 2)2^{3x}$$

4 $f(x) = \log \cos x$

$$f'(x) = \frac{-\sin x}{(\ln 10)\cos x} = -\frac{\tan x}{\ln 10}$$

5 $f(x) = \log_2\left(\frac{x^2}{x-1}\right)$

$$f(x) = \log_2\left(\frac{x^2}{x-1}\right) = \log_2 x^2 - \log_2 (x-1)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{(\ln 2)\, x^2} - \frac{1}{(\ln 2)\,(x-1)} = \frac{2}{(\ln 2)\, x} - \frac{1}{(\ln 2)\,(x-1)}$$

سـؤال ٨:

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = \pi^{\pi x}$

2 $f(x) = 6^{1-x^3}$

3 $f(x) = e^{4x} + 4^{2x}$

4 $f(x) = \log \sec x$

5 $f(x) = \log_8 (x^2 + 3x)$

6 $f(x) = \log \sqrt[3]{\sin x} + 2^{3x}$

صالح الزبيدي
0797825868

مشتقة المعادلات الوسيطية و إيجاد معادلة المماس و العمودي على المماس لها

مثـــال ١٠ :

أجد معادلة مماس منحنى المعادلة الوسيطية الآتية عندما $t=\frac{\pi}{4}$:

$$x=2\sin t\,,\qquad y=3\cos t\,,\qquad 0\le t\le 2\pi$$

نجد ميل المماس

$$\frac{dx}{dt}=2\cos t$$

$$\frac{dy}{dt}=-3\sin t$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-3\sin t}{2\cos t}=-\frac{3}{2}\tan t$$

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}=-\frac{3}{2}\tan\frac{\pi}{4}=-\frac{3}{2}$$

نجد قيم x , y

$$x=2\sin\frac{\pi}{4}=\frac{2}{\sqrt{2}}\quad,\quad y=3\cos\frac{\pi}{4}=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

نعوض في المعادلة

$$y-\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{3}{2}\left(x-\frac{2}{\sqrt{2}}\right)$$

$$2y+3x=6\sqrt{2}$$

إضافي : أكمل معادلة العمودي على المماس ....

ســؤال ٩:

أجد معادلة مماس منحنى المعادلة الوسيطية الآتية عندما $t=\frac{\pi}{4}$:

$$x=\sec t\;,\qquad y=\tan t$$

$$-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$$

أسئلة الكتاب : أتدرب و أحل المسائل

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = e^{4x+2}$

2) $f(x) = 50e^{2x-10}$

3) $f(x) = \cos(x^2 - 3x - 4)$

4) $f(x) = 10x^2 e^{-x^2}$

5) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$

6) $f(x) = x^2 \tan \frac{1}{x}$

7) $f(x) = 3x - 5\cos(\pi x)^2$

8) $f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{1-e^x}\right)$

9) $f(x) = (\ln x)^4$

10) $f(x) = \sin \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{\sin x}$

11) $f(x) = \sqrt[5]{x^2 + 8x}$

12) $f(x) = \frac{3^{2x}}{x}$

13) $f(x) = 2^{-x} \cos \pi x$

14) $f(x) = \frac{10 \log_4 x}{x}$

15) $f(x) = \left(\frac{\sin x}{1 + \cos x}\right)^2$

16) $f(x) = \log_3(1 + x \ln x)$

17) $f(x) = e^{\sin 2x} + \sin(e^{2x})$

18) $f(x) = \tan^4(\sec(\cos x))$

أجد معادلة المماس لكل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

20. $f(x) = x + \cos 2x \, , x = 0$

19. $f(x) = 4e^{-0.5x^2} \, , x = -2$

---

22. $f(x) = \sqrt{x+1} \sin \frac{\pi x}{2} \, , x = 3$

21. $f(x) = 2^x \, , x = 0$

---

23. إذا كان: $A(x) = f(g(x))$، وكان: $f(-2) = 8, f'(-2) = 4, f'(5) = 3, g(5) = -2, g'(5) = 6$،

فأجــد $A'(5)$.

---

24. إذا كان: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$، فأُثبِت أنَّ $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.

بكتيريا: يُمثِّل الاقتران: $A(t) = Ne^{0.1t}$ عدد الخلايا البكتيرية بعد t ساعة في مجتمع بكتيري:

25 أجد مُعدَّل نمو المجتمع بعد 3 ساعات بدلالة الثابت N.

26 إذا كان مُعدَّل نمو المجتمع بعد k ساعة هو 0.2 خلية لكل ساعة، فما قيمة k بدلالة الثابت N؟

أجد المشتقة العليا المطلوبة في كلٍّ ممّا يأتي:

27 $f(x) = \sin \pi x \,, f'''(x)$

---

28 $f(x) = \cos\,(2x + 1), f^{(5)}\,(x)$

---

29 $f(x) = \cos x^2, f''(x)$

---

30 إذا كان الاقتران: $y = e^{\sin x}$، فأجد ميل مماس منحنى الاقتران عند النقطة $(0, 1)$.

31 مواد مُشِـــعَّة: يُمكِن نمذجة الكمية A (بالغرام) المتبقية من عيِّنةٍ كتلتها الابتدائية $20\ \text{g}$ من عنصر البلوتونيوم بعد t يومًا باستعمال الاقتران: $A(t) = 20\left(\frac{1}{2}\right)^{t/140}$. أجد مُعدَّل تحلُّل عنصر البلوتونيوم عندما $t = 2$.

زنبرك: تتحرَّك كرة مُعلَّقة بزنبرك إلى الأعلى وإلى الأســفل، ويُحدِّد الاقتران: $s(t) = 0.1 \sin 2.4t$ موقع الكرة عند أيِّ زمن لاحق، حيث t الزمن بالثواني، وs الموقع بالسنتيمترات:

32 أجد السرعة المتجهة للكرة عندما $t = 1$.

33 أجد موقع الكرة عندما تكون سرعتها صفرًا.

34 أجد موقع الكرة عندما يكون تسارعها صفرًا.

أجد معادلة المماس لمنحنى كل معادلة وسيطية ممّا يأتي عند النقطة المُحدَّدة بقيمة t المعطاة:

35 $x = t + 2, y = t^2 - 1, t = 1$

36 $x=\frac{t}{2}, y=t^2-4, t=-1$

---

37 $x=t-\sin t, y=1-\cos t, t=\frac{\pi}{3}$

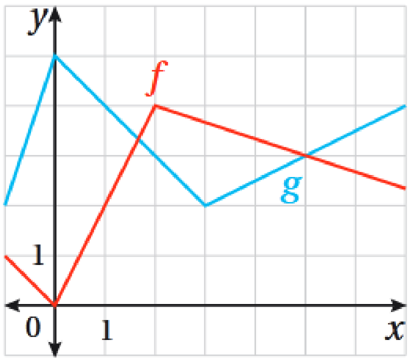
---

38 $x=\sec^2 t-1, y=\tan t, t=-\frac{\pi}{4}$

---

39 يعطى منحنى بالمعادلة الوسـيطية: $x=2(t-\sin t), y=2(1-\cos t)$، حيث: $0\le t\le 2\pi$. أُثبِت أنَّ ميل المماس وميل العمودي على المماس لمنحنى هذه العلاقة عندما $t=\frac{\pi}{4}$ هما: $1+\sqrt{2}$، و$1-\sqrt{2}$ على الترتيب.

يُبيِّن الشكل المجاور منحنيي الاقترانين $f(x)$ و $g(x)$. إذا كان: $h(x) = f(g(x))$، وكان: $p(x) = g(f(x))$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:



40 $h'(1)$

41 $p'(1)$

أسئلة الكتاب : مهارات التفكير العليا

تبريــر: إذا كان الاقتران: $y = \ln(ax+b)$، حيث a و b ثابتان موجبان، وكان ميل المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة P هو 1، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

42 أُثبِت أنَّ الإحداثي x للنقطة P أقل من 1

43 أجد إحداثيي النقطة التي يكون عندها ميل المماس $\frac{1}{2}$، علمًا بأنَّ P هي النقطة $(0, 2)$، ثم أُبرِّر إجابتي.

تبرير: يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية: $x = t^2 , y = 2t$:

44 أجد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة t.

45 أجد معادلة العمودي على مماس المنحنى عند النقطة $(t^2 , 2t)$.

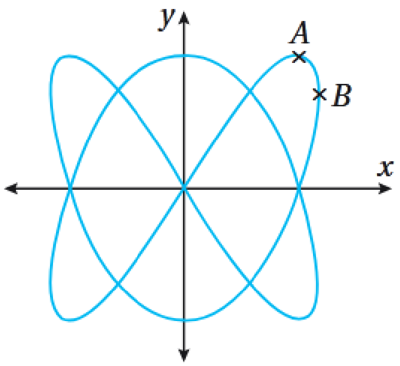
46 أُثبِت أنَّ مساحة المثلث المُكوَّن من العمودي على المماس، والمحورين الإحداثيين، هي $\frac{1}{2}|t|(2+t^2)^2$.

تحدٍّ: أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

47 $y=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$

48 $y=e^x\sin^2 x\cos x$

تحدٍّ: يُبيِّن الشكل المجاور منحنى المعادلة الوسيطية: $x=\sin 2t,\quad y=\sin 3t,\quad 0\le t\le 2\pi$



49 إذا كان مماس منحنى المعادلة أفقيًّا عند النقطة A الواقعة في الربع الأوَّل، فأجد إحداثيي A.

50 إذا كان مماس المنحنى موازيًا للمحور y عند النقطة B، فأجد إحداثيي B.

51 إذا مَرَّ فرعان من المنحنى بنقطة الأصل كما هو مُوضَّح في الشكل، فأجد ميل المماس لكلٍّ منهما عند هذه النقطة.

تبريـــر: يُمثِّل الاقتران: $s(t) = \ln(t^2 - 2t + 1.9), t \geq 0$ موقع جُسَـــيْم يتحرَّك في مســـار مســـتقيم، حيث s الموقع بالأمتار، وt الزمن بالثواني:

52 أجد سرعة الجُسَيْم المتجهة وتسارعه بعد t ثانية.

53 أجد موقع الجُسَيْم وتسارعه عندما تكون سرعته صفرًا.

54 متى يعود الجُسَيْم إلى موقعه الابتدائي؟

الدرس الرابع   الإشتقاق الضمني   التفاضل

نلاحظ بالدروس السابقة أن الإشتقاق يكون للعلاقات التي تكون على الصورة $y = x^3+5x$

ولكن بالنسبة للإقترانات التي يصعب كتابة **y** كموضع للقانون كما يلي : نستخدم طريقة الإشتقاق الضمني

الجدول الآتي يوضح أمثلة على الإشتقاق الضمني :

اشتقاق ضمني	
$2y\dfrac{dy}{dx}$	y^2
$2x\dfrac{dy}{dx}+2y$	$2xy$
$1=-\sin y\dfrac{dy}{dx}$	$x=\cos y$

خطوات ايجاد $\dfrac{dy}{dx}$ عند استخدام الإشتقاق الضمني :

١. نشتق المعادلة ضمنيا بالنسبة للمتغير x .

٢. نجعل $\dfrac{dy}{dx}$ على الطرف الأيسر و باقي الحدود على الطرف الآخر .

٣. نخرج $\dfrac{dy}{dx}$ عامل مشترك بحيث تصبح على الصورة $\dfrac{dy}{dx}=$.......... .

مثـــال ١ :

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

② $\sin x + \cos y = 2x - 3y$

$$\cos x - \sin y \frac{dy}{dx} = 2 - 3\frac{dy}{dx}$$

$$3\frac{dy}{dx} - \sin y \frac{dy}{dx} = 2 - \cos x$$

$$\frac{dy}{dx}(3 - \sin y) = 2 - \cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 - \cos x}{3 - \sin y}$$

① $x^2 + y^2 = 4$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

مثـــال ٢ :

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

ملاحظة
يمكن استخدام y' بدلاً من $\frac{dy}{dx}$

④ $\sin(x+y) = y^2 \cos x$

$$\cos(x+y)\left(1 + \frac{dy}{dx}\right) = -y^2 \sin x + \cos x\left(2y\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\cos(x+y) + \cos(x+y)\frac{dy}{dx} = -y^2 \sin x + 2y\cos x\frac{dy}{dx}$$

$$\cos(x+y)\frac{dy}{dx} - 2y\cos x\frac{dy}{dx} = -y^2 \sin x - \cos(x+y)$$

$$\frac{dy}{dx}(\cos(x+y) - 2y\cos x) = -y^2 \sin x - \cos(x+y)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y^2 \sin x - \cos(x+y)}{\cos(x+y) - 2y\cos x}$$

③ $2xy - y^3 = 1$

$$2x\,y' + 2y - 3y^2\,y' = 0$$

$$y'(2x - 3y^2) = -2y$$

$$y' = -\frac{2y}{2x - 3y^2}$$

5 $y^2 = \frac{x-1}{x+1}$

$$2y\frac{dy}{dx} = \frac{(x+1)(1)-(x-1)(1)}{(x+1)^2}$$

$$2y\frac{dy}{dx} = \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}$$

$$2y\frac{dy}{dx} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{2y\,(x+1)^2} \quad = \frac{1}{y\,(x+1)^2}$$

سـؤال ١:

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

1 $3xy^2 + y^3 = 8$

---

2 $\tan(x-y) = 2xy^3 + 1$

---

3 $x^2 = \frac{x-y}{x+y}$

سـؤال ٢:

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي عند القيمة المعطاة:

1) $x^4 + 2x^2y^2 = 9 \quad , (1,2)$

---

2) $x + y - 1 = \ln(x^2 + y^2) \quad , (1,0)$

---

3) $x = \sqrt{y^2 + 3y} \quad , x = 2$

---

4) $\left(\frac{2}{x} + \frac{5}{y}\right) = 2xy \quad , y = 5$

أمثلة على المماس (تُحل بالإشتقاق الضمني)

مثـــال ٣ :

إذا كان : $e^{2x}\ln y = x + y - 2$ ، فجد قيمة ميل المماس والعمودي على المماس عند النقطة $(1, 1)$.

$$e^{2x} \times \frac{1}{y} \times \frac{dy}{dx} + \ln y \times 2e^{2x} = 1 + \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{e^{2x}}{y} \times \frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = 1 - 2e^{2x}\ln y$$

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{e^{2x}}{y} - 1\right) = 1 - 2e^{2x}\ln y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2e^{2x}\ln y}{\frac{e^{2x}}{y} - 1}$$

إذن : ميل المماس $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,1)} = \frac{1 - 2e^{2(1)}\ln(1)}{\frac{e^{2(1)}}{1} - 1} = \frac{1}{e^2 - 1}$

ميل العمودي على المماس $1 - e^2$

مثـــال ٤ :

أجد ميل مماس منحنى العلاقة: $y^2 = x$ عندما $x = 4$.

نجد y

$$y^2 = x$$

$$y^2 = 4$$

$$y = \pm 2$$

$$2y\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(4,-2)} = -\frac{1}{4} \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(4,2)} = \frac{1}{4}$$

مثـــال ٥ :

أجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة: $x^2 - xy + y^2 = 7$ عند النقطة $(-1, 2)$.

$$2x - x\,y' - y + 2y\,y' = 0$$

$$2(-1) - (-1)\,y' - (2) + 2(2)\,y' = 0$$

$$y'_{(-1,2)} = \frac{4}{5}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (2) = \frac{4}{5}(x - (-1))$$

$$y = \frac{4}{5}x + \frac{14}{5}$$

ســــؤال ٣:

إذا كان : $y^2 = \ln x$ **فما قيمة ميل المماس** عند النقطة $(e, 1)$.

ســــؤال ٣:

إذا كان : $(y-3)^2 = 4(x-5)$ **فما قيمة ميل العمودي على المماس** عندما $x = 6$.

سـؤال ٤:

أجد معادلة **العمودي على** المماس لمنحنى العلاقة: $x^3 + y^3 - 3xy = 17$ عند النقطة $(2, 3)$.

المشتقة الثانية (للعلاقات الضمنية)

مثـال ٦ :

إذا كان: $2x^3 - 3y^2 = 8$ ، فأجد $\frac{d^2y}{dx^2}$.

$$6x^2 - 6y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2xy - x^2\frac{dy}{dx}}{y^2} \quad = \frac{2xy - x^2\left(\frac{x^2}{y}\right)}{y^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2xy^2 - x^4}{y^3}$$

سـؤال ٥:

إذا كان: $xy + y^2 = 2x$ ، فأجد $\frac{d^2y}{dx^2}$.

المشتقة الثانية (للمعادلات الوسيطية)

خطوات الحل :

* نجد $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ للمعادلة الوسيطية .

* يفضل تبسيط $\frac{dy}{dx}$ قبل ايجاد المشتقة الثانية للمعادلة الوسيطية .

* ايجاد المشتقة الثانية كما يلي: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}$

مثـــال ٧ :

أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ للمعادلة الوسيطية الآتية عندما $t=1$: $x = t^3 + 3t^2, y = t^4 - 8t^2$

$$\frac{dx}{dt} = 3t^2 + 6t \qquad \frac{dy}{dt} = 4t^3 - 16t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4t^3 - 16t}{3t^2 + 6t} = \frac{4t(t^2 - 4)}{3t(t+2)} = \frac{4(t+2)(t-2)}{3(t+2)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{3}(t-2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{4}{3}}{3t^2 + 6t} = \frac{4}{3(3t^2 + 6t)}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1} = \frac{4}{3(3\,(1)^2 + 6(1))} = \frac{4}{27}$$

سـؤال ٦:

أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ للمعادلة الوسيطية الآتية عندما $t=2$: $y=t^3-2t^2$ ، $x=3t^2+1$

الإشتقاق اللوغاريتمي

يستعمل الإشتقاق اللوغاريتمي لإيجاد مشـتقات اقترانات غير لوغاريتمية مُعقَّدة، تتضمَّن ضربًا، أو قسمةً، أو قوًى.
و خاصة عندما يكون الأس و الأساس متغيران .

خطوات الحل :

يُمكِن استعمال الاشتقاق اللوغاريتمي لإيجاد مشتقة بعض الاقترانات، باتِّباع الخطوات الآتية:

- **الخطوة 1:** أخـذ اللوغاريتم الطبيعـي لطرفي المعادلة: $y=f(x)$، ثم اسـتعمال قوانين اللوغاريتمات لكتابة المقادير بالصورة المُطوَّلة.
- **الخطوة 2:** اشتقاق المعادلة ضمنيًّا بالنسبة إلى x.
- **الخطوة 3:** حلُّ المعادلة الناتجة لـ $\frac{dy}{dx}$، ثم وضع $f(x)$ بدلًا من y.

مثـــال ٨:

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي:

1. $y = x^x \ , \ x > 0$

$$\ln y = \ln x^x$$

$$\ln y = x \ln x$$

$$\frac{y'}{y} = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x}$$

$$y' = y(\ln x + 1)$$

$$y' = x^x(\ln x + 1)$$

2. $y = \dfrac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2+9}}$

$$\ln y = \ln \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2+9}}$$

$$\ln y = 2\ln(x-1) - \frac{1}{2}\ln(x^2+9)$$

$$\frac{y'}{y} = 2 \times \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2+9}$$

$$y' = y\left(\frac{x^2+x+18}{(x-1)(x^2+9)}\right)$$

$$y' = \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2+9}}\left(\frac{x^2+x+18}{(x-1)(x^2+9)}\right)$$

$$= \frac{(x-1)(x^2+x+18)}{(x^2+9)^{3/2}}$$

ســـــؤال ٧:

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي:

1. $y = x^{\sqrt{x}}, x > 0$

2 $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{x^4+1}}$

---

3 $y=\dfrac{x^{10}\sqrt{x^2+5}}{\sqrt[3]{8x^2+2}}$

---

4 $y=(\cos x)^x$

أسئلة الكتاب : أتدرب و أحل المسائل

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

1) $x^2 - 2y^2 = 4$

2) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{10}$

3) $(x^2 + y^2)^2 = 50(x^2 - y^2)$

4) $e^x y = xe^y$

5) $3^x = y - 2xy$

6) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$

7) $x = \sec \frac{1}{y}$

8) $(\sin \pi x + \cos \pi y)^2 = 2$

9) $\frac{x}{y^2} + \frac{y^2}{x} = 5$

10) $x + y = \cos(xy)$

11) $x^2 + y^2 = \ln(x + y)^2$

12) $\sin x \cos y = x^2 - 5y$

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي عند القيمة المعطاة:

14) $y^3 + 2x^2 = 11y, \ y = 1$

13) $2y^2 + 2xy - 1 = 0, x = \frac{1}{2}$

أجد ميل المماس لمنحنى كل علاقة ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

15 $x^2 + y^2 = 25, (3, -4)$

16 $x^2 y = 4(2 - y), (2, 1)$

17 $e^{\sin x} + e^{\cos y} = e + 1, \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

18 $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 5, (8, 1)$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل علاقة ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

19 $x^2 + xy + y^2 = 13, (-4, 3)$

20 $x + y - 1 = \ln (x^2 + y^2), (1, 0)$

أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

21 $x + y = \sin y$

22 $4y^3 = 6x^2 + 1$

23 $xy + e^y = e$

24 أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة: $(x-6)(y+4)=2$ عند النقطة $(7,-2)$.

---

25 أُثبِت أنَّ لمنحنى العلاقة: $3x^2+2xy+y^2=6$ مماسين أفقيين، ثم أجد إحداثيي نقطتي التماس.

---

26 أجد إحداثيي نقطة على المنحنى: $x+y^2=1$، بحيث يكون عندها مماس المنحنى موازيًا للمستقيم: $x+2y=0$.

---

27 أجـد إحداثيي نقطة (نقاط) على المنحنى: $y^3=x^2$، بحيث يكون عندها مماس المنحنى عموديًا على المسـتقيم: $y+3x-5=0$.

28 إذا كان: $\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{\frac{x}{y}}=10$ ، حيث: $x\neq y\neq 0$، فأُثبِت أنَّ $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$.

---

29 أجد إحداثيي النقطة على منحنى الاقتران: $y=x^{1/x}, x>0$، التي يكون عندها ميل المماس صفرًا.

---

30 أجد إحداثيات جميع النقاط على منحنى الدائرة: $x^2+y^2=100$، التي يكون عندها ميل المماس $\frac{3}{4}$.

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = t^{1/t}, t > 0$ موقع جُسَيْم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، وt الزمن بالثواني:

31 أجد سرعة الجُسَيْم المتجهة وتسارعه.

32 أجد تسارع الجُسَيْم عندما تكون سرعته المتجهة صفرًا.

---

33 إذا كان $y = \ln x$ ، حيث: $x > 0$، فأُثبِت أنَّ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ باستعمال الاشتقاق الضمني.

أجد مشتقة كلٍّ من الاقترانات الآتية باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي:

35 $y = \frac{(x^4 + 1)\sqrt{x+2}}{2x^2 + 2x + 1}$

34 $y = (x^2 + 3)^x$

36 $y=\sqrt{x^2(x+1)(x+2)}$

37 $y=x^{\sin x}, x>0$

أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكل معادلة وسيطية ممّا يأتي عند قيمة t المعطاة:

38 $x=\sin t, y=\cos t,\ t=\frac{\pi}{4}$

---

39 $x=e^{-t},\ y=t^3+t+1, t=0$

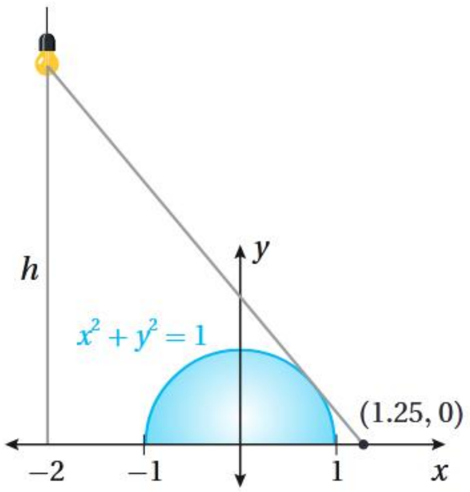
إذا كانت العلاقة: $x^3 + y^3 = 6xy$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

40 أجد معادلة المماس عند نقطة تقاطع منحنى المعادلة مع منحنى $y = x$ في الربع الأوَّل.

41 أجد إحداثيي نقطة على منحنى العلاقة في الربع الأوَّل، بحيث يكون عندها مماس المنحنى أفقيًّا.

---

42 مصباح: يُبيِّن الشكل المجاور مصباحًا على ارتفاع h وحدة من المحور x. إذا وقعت النقطة $(1.25, 0)$ في نهاية الشعاع الصادر من المصباح، الذي يمسُّ منحنى العلاقة: $x^2 + y^2 = 1$، فأجد ارتفاع المصباح h.



تبرير: إذا كان: $x^2 - y^2 = 1$، فأُجيب عن الأسئلة الأربعة الآتية تباعًا:

43 أجد $\frac{dy}{dx}$.

44 يُمكِن التعبير عن منحنى العلاقة: $x^2 - y^2 = 1$ بالمعادلة الوسيطية: $x = \sec t, y = \tan t$، حيث: $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.
أستعمل هذه الحقيقة لإيجاد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة t.

45 أُثبِت أنَّ المقدارين الجبريين اللذين يُمثِّلان $\frac{dy}{dx}$ الناتجين في الفرعين السابقين متكافئان، مُبرِّرًا إجابتي.

46 أجد إحداثيات النقاط التي يكون عندها ميل المماس 2.

---

47 تبرير: إذا مثَّــل l أيَّ مماس لمنحنى المعادلة: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{k}$، حيث k عدد حقيقي موجب، فأُثبِت أنَّ مجموع المقطع x والمقطع y للمستقيم l يساوي k، مُبرِّرًا إجابتي.

48 تحــدٍّ: إذا كان مماس منحنى الاقتران: $y = x^{\sqrt{x}}$ عند النقطة $(4, 16)$ يقطع المحور x في النقطة B، والمحور y في النقطة C، فأجد مساحة ΔOBC، حيث O نقطة الأصل.

١) قيمة (قِيَم) x التي لا يكون عندها الاقتران $f(x)=\frac{x+9}{x^2-2x-3}$ قابلًا للاشتقاق:

a) -9 b) {-1،3} c) 0 d) {-3،1}

٢) قِيَم x التي يكون عندها الاقتران $f(x)=\frac{x-4}{(e^{x+2}-1)(\ln x-5)}$ غير قابل للاشتقاق:

a) $\{0، 4\}$ b) $\{0، 5\}$ c) $\{0، e^5\}$ d) $\{-2، e^5\}$

٣) أي الاقترانات الآتية قابل للإشتقاق عندما $x=1$ ؟

a) $F(x)=|x^2-1|$

b) $G(x)=\begin{cases} x^2 & ,x\le 1 \\ x^2-2x & ,x>1 \end{cases}$

c) $P(x)=\frac{3}{x-x^2}$

d) $Q(x)=(x-6)^{2/3}$

٤) إذا كان الاقتـران: $s(t)=7-\sin t, t\ge 0$ يُمثِّل موقع جُسَيْم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني ، ما قيمة موقع الجسيم عندما كان في حالة سكون لحظي للمرة الثانية بعد انطلاقه ؟

a) 8 b) 1 c) 7 d) 6

٥) إذا كان الاقتران: $y=e^x-\frac{x}{2}$ ، فأيُّ الآتية تُمثِّل معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران عند نقطة تقاطع الاقتران مع المحور y :

a) $y=2x+1$ b) $y=-2x+1$ c) $y=\frac{x}{2}+1$ d) $y=\frac{x}{2}-1$

٦) إذا كان $f(x)=\ln\left(\frac{e^{2x}}{x^{10}}\right)+x\ln e^3$ ، فإن ميل المماس عندما x=5 يساوي:

a) -37 b) 3 c) $-\frac{1}{3}$ d) 0

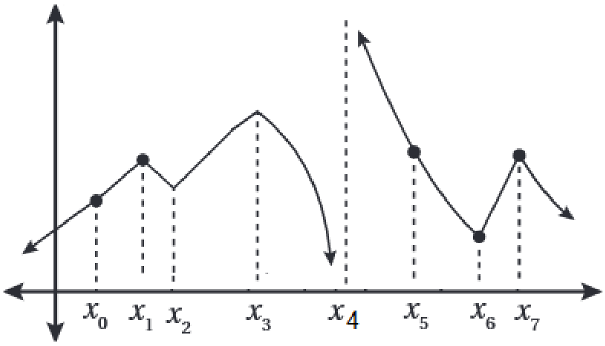
٧) إذا كان: $f(x)=\begin{cases} ax^3+bx & , x<-1 \\ ax^2+9bx-12 , & x\geq -1 \end{cases}$ ، فما قيمة كلٍّ من b و a على الترتيب

اللتين تجعلان f قابلًا للاشـــتقاق عند جميع قِيَم x الحقيقية

a) $0 , 5$ b) $4 , \frac{-5}{2}$ c) $20 , -8$ d) $-4 , \frac{-5}{2}$

يُبيِّن الشـــكل المجاور منحنـــى الاقتران $f(x)$

إعتماداً على الشكل أجب عن الفقرتين ٨ , ٩ تباعاً .



٨) ما قِيَـــم x للنقـــاط التي يكون عندها الاقتران $f(x)$ غير قابل للاشـــتقاق ؟

a) $x_0 ، x_1 ، x_3 ، x_6 ، x_7$ b) $x_1 ، x_2 ، x_3 ، x_4 ، x_6 ، x_7$

c) $x_1 ، x_4 ، x_7 ، x_5$ d) $x_0 ، x_1 ، x_3 ، x_5 ، x_6$

٩) ما قِيَـــم x للنقـــاط التي يكون عندها الاقتران $f(x)$ قابلاً للاشـــتقاق ؟

a) $x_0 ، x_5$ b) $x_1 ، x_2 ، x_3 ، x_4 ، x_6 ، x_7$

c) $x_0 ، x_5 ، x_7$ d) $x_0 ، x_1 ، x_3 ، x_5 ، x_6$

١٠) إذا كان $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$, فإن $f''(-1)$ تساوي :

a) 1 b) 8 c) 6 d) -1

١١) إذا كان $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ ، فإن المشتقة الثالثة تساوي :

a) $\frac{3}{4\sqrt{x^5}}$ b) $\frac{-15}{8\sqrt{x^7}}$ c) $\frac{15\sqrt{x^7}}{8}$ d) $\frac{3\sqrt{x^5}}{4}$

١٢) إذا كان: $f(x)=e^{2x}+\ln(3x+1)$ ، فإنَّ $f'(0)$ هي:

a) 5 b) 2 c) 4 d) 3

١٣) إذا كان $y=\frac{\cos\pi}{2x+3}$ ، فإن قيمة $\frac{dx}{dy}$ عندما $x=-2$ هي :

a) 2 b) $\frac{1}{2}$ c) 0 d) $\frac{2}{49}$

١٤) إذا كان $f(x)=\frac{\pi}{\sec x}$ ، فإن قيمة $f^{(4)}(\frac{\pi}{6})$ تساوي :

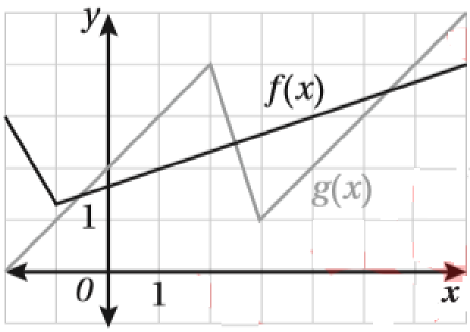
a) $-\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$ c) $-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{\pi}{2}$

١٥) إذا كان $f(x)=(1-\cos x)(1+\sin x)^3$ فإن قيمة $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ تساوي :

a) 12 b) 20 c) 8 d) 4

***

إعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنيي الاقترانين: $f(x)$ و $g(x)$. أجب عن الفقرات ١٦، ١٧، ١٨ :



١٦) إذا كان: $u(x)=f(x)\,g(x)$، فإن $u'(1)$ تساوي:

a) 6 b) 0 c) 11 d) 3

١٧) إذا كان: $v(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$، فإن $v'(4)$ تساوي:

a) $-\frac{28}{3}$ b) 0 c) $\frac{-7}{3}$ d) 1

١٨) ما قيمة $(f \circ g)'(4)$ ؟

a) $\frac{1}{3}$ b) 0   c) 3   d) 1

١٩) ما إحداثيات النقطة الواقعة على منحنى العلاقة $8y = 81 - x^2$ و التي يكون عندها المماس للمنحنى موازياً للمستقيم الذي معادلته $3x + 7 = 4y$ ؟

a) (5,7)   b) (3,9)   c) (-3,9)   d) (-5, 7)

٢٠) ما قيمة $\frac{d}{dx}\left(\ln\left(\sec^2 2x\right)\right)$ عندما $x = \frac{\pi}{6}$ ؟

a) $4\sqrt{3}$ b) 8   c) $2\sqrt{3}$ d) 6

٢١) إذا كان $0 \le t \le 2\pi$ ، $y = \frac{1}{\sin t}$ ، $x = \sin t$ فإن قيمة $\frac{dy}{dx}$ عندما $t = \frac{\pi}{4}$:

a) $-\frac{1}{2}$ b) 2   c) -2 d) $\sqrt{2}$

٢٢) قيمة $\frac{dy}{dx}$ للمعادلة الوسيطة الآتية $y = t^3 - 2t^2$ ، $x = 3t^2 + 1$ ، عندما $t = 2$:

a) 12   b) 3   c) $\frac{1}{3}$ d) 4

٢٣) قيمة $\frac{d^2y}{dx^2}$ للمعادلة الوسيطة الآتية $y = t^3 - 2t^2$ ، $x = 3t^2 + 1$ ، عندما $t = 1$:

a) 18   b) 6   c) $-\frac{1}{6}$ d) $\frac{1}{12}$

٢٤) إذا كان $x^2 - xy + y^2 = 3$ فإن قيمة $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة (1,-1) :

a) 0   b) 1   c) -1 d) 3

تم بحمد الله

في الختام أحمد الله الذي وفقني لهذا العمل

و اتمنى التوفيق و النجاح لكل طلابنا و طالباتنا الأعزاء