1 تكامل اقترانات خاصة

الاقتران $f(x)$	تكامله $\int f(x)\,dx$
e^{ax+b}	$\frac{e^{ax+b}}{a}+c$
k^{ax+b}	$\frac{k^{ax+b}}{a\,lnk}+c$
$cos(ax+b)$	$\frac{sin(ax+b)}{a}+c$
$sin(ax+b)$	$\frac{-cos(ax+b)}{a}+c$
$sec^2(ax+b)$	$\frac{tan(ax+b)}{a}+c$
$csc^2(ax+b)$	$\frac{-cot(ax+b)}{a}+c$
$sec(ax+b)\,tan(ax+b)$	$\frac{sec(ax+b)}{a}+c$
$csc(ax+b)\,cot(ax+b)$	$\frac{-csc(ax+b)}{a}+c$
$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$ln\|f(x)\|+c$
$\frac{a}{ax+b}$	$ln\|ax+b\|+c$
$\frac{k}{ax+b}$	$\frac{k}{a}ln\|ax+b\|+c$
$tan(ax+b)$	$\frac{-1}{a}ln\|cos(ax+b)\|+c$
$cot(ax+b)$	$\frac{1}{a}ln\|sin(ax+b)\|+c$
$sec(ax+b)$	$\times\frac{sec(ax+b)+tan(ax+b)}{sec(ax+b)+tan(ax+b)}$ $=\frac{1}{a}\,ln\|\sec(ax+b)+\tan(ax+b)\|+c$
$csc(ax+b)$	$\times\frac{csc(ax+b)+cot(ax+b)}{csc(ax+b)+cot(ax+b)}$

الأستاذ ماهر ضمرة
0795195907

	$= -\frac{1}{a}\, ln\lvert\csc(ax+b)+\cot(ax+b)\rvert + c$
التسارع $a(t)$	السرعة المتجهة $v(t)+c$
$v(t)$	$S(t)+c$
$(ax+b)^n$	$\frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a}+c$

❖ أفكار وملاحظات

1) للتكامل المباشر جميع الأسس والزوايا خطية عدا ذلك نلجأ للتعويض

2) لمكاملة الاقترانات المثلثية التربيعة نستخدم متطابقات للتبديل

ضعف الزاوية:
- ✓ $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$
- ✓ $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$

نفس الزاوية:
- ✓ $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$
- ✓ $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$

3) لمكاملة الضرب المثلثي
- ✓ $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$
- ✓ $\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y)+\sin(x-y))$
- ✓ $\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y)+\cos(x-y))$
- ✓ $\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y))$

4) نضرب بالمرافق لتحرير المقام، ومن حالات المرافق إذا كان المقام

$$1 \mp \sin x \quad , 1 \pm \cos x$$

$$\sec x \mp \tan x \quad , \csc x \mp \cot x$$

$$\sec x \pm 1 \quad , \csc x \mp 1$$

5) بوجود مطلق في المسألة نعيد التعريف

6) من أقوى الأساليب المساعدة لحل التكامل العامل المشترك (الأصغر غالباً ، قليلاً الأكبر)

مــثلاً:

$$\int \frac{1}{1 \mp e^x}dx$$

$$\int \frac{\sec x}{\sin x - \cos x}dx$$

$$\int \frac{1}{x^{10}+x}dx$$

7) $\int \frac{\text{كثير حدود}}{\text{كثير حدود}}$

درجة البسط ≤ درجة المقام، نبدأ بالقسمة الطويلة

8)

❖ $\underset{\text{التسارع}}{a(t)} \xrightarrow{\text{نكامل}} \underset{\text{السرعة المتجهة}}{v(t)} \xrightarrow{\text{نكامل}} \underset{\text{الإزاحة}}{s(t)}$

❖ إذا طلب المسافة الكلية على $[\,t_1, t_2\,]$
نعيد التعريف $S = \int_{t_1}^{t_2} |V(t)|\, dt$

الأستاذ ماهر ضمرة
0795195907

مثال (1)

اختر الإجابة الصحيحة لما يلي:

1) إن $\int e^{\left(1-\frac{1}{2}x\right)}\,dx$ يساوي :

a) $\frac{-1}{2}e^{\left(1-\frac{1}{2}x\right)}+c$ b) $-2\,e^{\left(1-\frac{1}{2}x\right)}+c$

c) $e^{\left(1-\frac{1}{2}x\right)}+c$ d) $2e^{\left(1-\frac{1}{2}x\right)}+c$

2) إن $\int_1^3(2-|x-2|)\,dx$ يساوي:

a) 2 b) 3 c) 1 d) 5

3) إن $\int_0^{\pi}\cos^2\frac{1}{2}x\,dx$ يساوي:

a) π b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{\pi}{2}$ d) 0

4) إن $\int \cos 2x\sin x\,dx$ يساوي :

a) $\frac{-1}{6}\cos 3x+\frac{1}{2}\cos x+c$

b) $\frac{-1}{6}\cos 3x-\frac{1}{2}\cos x+c$

c) $\frac{-1}{2}\cos 3x+\frac{1}{2}\cos x+c$

d) $\frac{-1}{6}\cos 3x+\cos x+c$

5) إن $\int_e^{e^2}\frac{dx}{x\ln x}$ يساوي:

a) 0 b) $\ln 3$ c) $\ln 2$ d) $\ln\frac{1}{2}$

6) إن $\int\frac{\cos 2x}{\sin x\cos x}\,dx$ يساوي :

a) $\frac{1}{2}\ln|\sin 2x|+c$ b) $\ln|\sin 2x|+c$

c) $\frac{-1}{2}\ln|\cos 2x|+c$ d) $-\ln|cos2x|+c$

7) إذا علمت أن $\int_1^k\frac{4}{2x-1}\,dx=1$ ،

جد قيمة الثابت k، حيث $k>\frac{1}{2}$:

a) $\frac{e^{\frac{1}{2}}+1}{2}$ b) $\frac{e^{\frac{1}{2}}-1}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) 1

8) إذا كان $f(x)=\int\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{2}\right)dx$ وكان

$f(\pi)=3$ جد $f(0)$.

a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) 3 d) 2

9) إن $\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{e^x+4}\,dx$ يساوي:

a) $\ln 6$ b) $\ln\frac{6}{5}$ c) 6 d) 5

10) إن $\int\frac{1}{1+e^x}\,dx$ يساوي :

a) $\ln|1+e^x|+c$ b) $\ln|1+e^{-x}|+c$

c) $-\ln|1+e^{-x}|+c$ d) $-\ln|1+e^x|+c$

الأستاذ ماهر ضمرة
0795195907

11) إذا علمت أن $f(x)=\begin{cases}(2x+1)^2 & , x\ge 0\\ ax & , x<0\end{cases}$

وكان $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx=\frac{4}{3}$ ،جد قيمة a ، $a\in R$

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{116}{3}$ d) $\frac{2}{3}$

12) إن $\int \frac{1}{\cos(\pi+x)}dx$ يساوي:

a) $\frac{1}{\sin x}+c$

b) $\ln|\sec x+\tan x|+c$

c) $-\ln|\sec x+\tan x|+c$

d) $\ln|\csc x+\cot x|+c$

13) إن $\int \frac{2^{2x}-1}{2^x-1}dx$ يساوي:

a) $\frac{2^x}{\ln 2}+c$ b) $\frac{2^x}{\ln 2}-x+c$

c) $\frac{2^x}{\ln 2}+x+c$ d) $\frac{2^x}{2\ln 2}+x+c$

14) إن $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)^2\,dx$ يساوي:

a) $\frac{\pi}{2}+1$ b) $\frac{\pi}{2}+2$

c) $\pi-2$ d) $\frac{\pi}{2}-2$

15) إن $\int \frac{\sec x}{\sin x-\cos x}dx$ يساوي:

a) $\ln|\tan x|+c$ b) $\ln|\tan x|-x+c$

c) $\ln|\tan x-1|+c$ d) $\ln|\tan x|-1+c$

16) إن $\int \frac{x^3+1}{x-1}dx$ يساوي:

a) $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+c$

b) $\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x+c$

c) $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+2\ln|x-1|+c$

d) $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x-2\ln|x-1|+c$

17) إن $\int(\sin 3x\cos x-\cos 3x\sin x)\,dx$ يساوي:

a) $-\cos 2x+c$ b) $\frac{-1}{2}\cos 2x+c$

c) $\frac{1}{2}\sin 2x+c$ d) $\frac{-1}{2}\sin 2x+c$

18) إن $\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^4 x-\sin^4 x)\,dx$ يساوي:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{-1}{2}$ c) 0 d) $\frac{1}{4}$

مثال(2)

إذا علمت أن

أن $\int_1^a\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2x+1}\right)dx=\ln(4\sqrt{3})$ جد a حيث $a\in R^+$

الحل: نكامل a

$$\ln x|_1^a+\frac{1}{2}\ln|2x+1||_1^a=\ln(4\sqrt{3})$$

$$\ln a+\frac{1}{2}\ln(2a+1)-\frac{1}{2}\ln 3=\ln(4\sqrt{3})$$

$$\ln a+\frac{1}{2}\ln\frac{2a+1}{3}=\ln(4\sqrt{3})$$

$$\ln\left(a \times \sqrt{\frac{2a+1}{3}}\right) = \ln(4\sqrt{3})$$

نأخذ e للطرفين:

$$a \times \sqrt{\frac{2a+1}{3}} = 4\sqrt{3}$$

نربع الطرفين

$$a^2 \cdot \frac{2a+1}{3} = 48$$

$$2a^3 + a^2 - 144 = 0$$

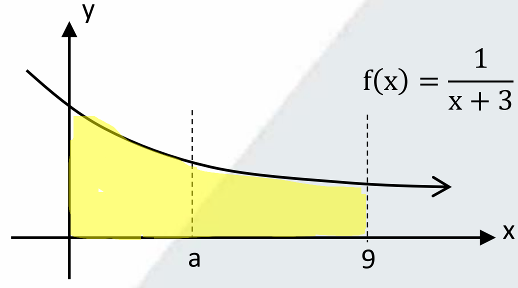
بالتجريب ← a = 4

	a^3	a^2	a	ثابت
4	2	1	0	-144
		8	36	144
	2	9	36	0

المميز سالب $2a^2 + 9a + 36 = 0$

مثال(3)

من الشكل التالي جد قيمة a التي تقسم المنطقة المظللة إلى منطقتين متساويتين في المساحة



الحل:

$$A = \int_0^9 \frac{1}{x+3}\,dx = \ln|x+3|\Big|_0^9$$

$$= \ln 12 - \ln 3 = \ln 4$$

$$\int_0^a \frac{1}{x+3}\,dx = \frac{1}{2}\ln 4 = \ln 2$$

$$\ln|x+3|\Big|_0^a = \ln 2$$

$$\ln|a+3| - \ln 3 = \ln 2$$

$$\ln a + 3 = \ln 2 + \ln 3 = \ln 6$$

$$a + 3 = 6 \quad \Rightarrow \quad a = 3$$

مثال(4)

جد $\int \frac{\sin^2 x + \cos x}{1 - \cos^2 x}\,dx$

الحل:

$$\int \frac{\sin^2 x + \cos x}{\sin^2 x}\,dx = \int (1 + \csc x \cot x)\,dx$$

$$= x - \csc x + c$$

مثال(5)

جد $\int \frac{\cos 3x}{\cos x}\,dx$

الحل:

$$\int \frac{\cos(2x + x)}{\cos x}\,dx$$

$$= \int \frac{\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x}{\cos x}\,dx$$

$$= \int \left(\cos 2x - \frac{2\sin^2 x \cos x}{\cos x}\right)dx$$

$$= \frac{\sin 2x}{2} - 2\int \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\,dx$$

$$= \sin 2x - x + c$$

الأستاذ ماهر ضمرة
0795195907

مثال(6)

يتحرك جسيم في مسار وفق العلاقة
$v(t) = \sin 2t$ جد:

a) إزاحة الجسم في الفترة $[0, \pi]$
b) المسافة الكلية في الفترة $[0, \pi]$

الحل:

a) $s(\pi) - s(0) = \int_0^{\pi} \sin 2t \, dt$

$$= \frac{-\cos 2t}{2}\Big|_0^{\pi} = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

b) $s = \int_0^{\pi} |\sin 2t| \, dt$

$$\sin 2t = 0 \rightarrow 2t = 0 , \pi \ , 2\pi$$

$$t = 0 , \frac{\pi}{2} , \pi$$

+ + + + +   - - - - -

0   $\frac{\pi}{2}$ π

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \, dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\sin 2t \, dt$$

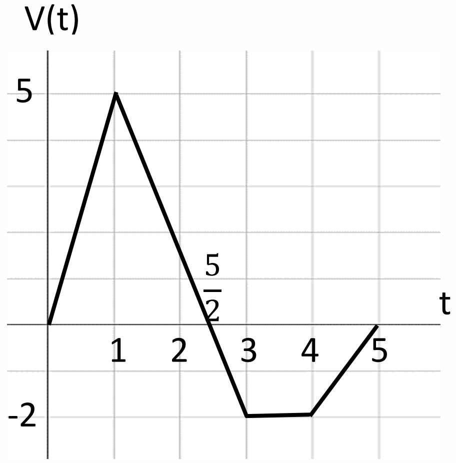
$$= \frac{-\cos 2t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\cos 2t}{2}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{-1}{2} = 2 \, m$$

مثال(7)

يبيّن الشكل التالي منحنى السرعة المتجهة – الزمن لجسيم يتحرك على المحور x في الفترة $[0 , 5]$، إذا بدأ الجسم الحركة من $x = 0$ عندما $t = 0$ جد :

a) جد إزاحة الجسم في الفترة $[0 , 5]$
b) المسافة المقطوعة في الفترة $[0 , 5]$
c) الموقع النهائي للجسيم .



الحل:

نجد المساحات

$$A_1 = \frac{I}{2} \times \frac{5}{2} \times 5 = \frac{25}{4}$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2} + 1\right)(2) = \frac{7}{2}$$

a) $s(5) - s(0) = \frac{25}{4} - \frac{7}{2} = \frac{11}{4} m$

b) $s = \frac{25}{4} + \frac{7}{2} = \frac{39}{4} \ m$

c) $s(5) - 0 = \frac{11}{4} \ m$

الأستاذ ماهر ضمرة
0795195907

2 تمييز طرق التكامل

(1) الـتعـويـض

نستخدمه في ضرب أو قسمة اقترانيين أحدهما (كلاهما مركب . ومشتقة أحدهما هي الأخرى أو مشتقة أس أو زاويته هي الأخرى.

A) أوضح حالاته

1) تكامل مثلثي زاويته ليست خطية
الزاوية = y

2) (e) ، (a) أسه ليس خطي
الأس = y

3) $\int (\quad)^n \times g(x)\,dx$
ما داخل القوس = y ، حيث هنالك علاقة بين $g(x)$ وما داخل القوس.

4) تكامل الجذور
الجذر كله = y

5) بوجود ln ، e في المقام، مركب
y = ln , e

B) حالات الفرض المثلثي

1) $\int \sin^n(ax)\,dx$
$\int \cos^n(ax)\,dx$

n

- زوجي: متطابقات
- فردي:
  1) نفصل sin والباقي بدلالة التربيع
  2) نبدل مطابقة
  $1-\cos^2 ⬚$ ، $1-\sin^2 ⬚$
  3) نفرض y ما داخل القوس بدون أس

2) $\int \sin^n x \cos^m x\,dx$

- كلاهما فردي: نفرض y صاحب الأس الأكبر
- أحدهما فردي والآخر زوجي: نفرض y صاحب الأس الزوجي
- كلاهما زوجي: ندمج الأسس

3) $\int \sec^n x \tan^m x\,dx$

نقرر من n

- n زوجي: $y=\tan x$
- n فردي:
  - m فردي: $y = \sec x$
  - n زوجي: بالأجزاء التجريبي

ملاحظات

1) قد تحتاج الرجوع للفرض في حال بقي لدينا x مع y

2) نستخدم أحياناً المتممة لتحويل

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

3) أحد أساليب فك لغز السؤال العامل المشترك الأصغر أو الأكبر. مثلاً:

- $\int \frac{(x+1)^7\,dx}{x^9}$
- $\int \sqrt{x^2+x^4}\,dx \quad ,x>0$
- $\int \frac{\sqrt{x^2-x^4}}{x^5}\,dx$

الأستاذ ماهر ضمرة
0795195907

4) زاوية $1 \mp \sin$

$= (\sin$ نصف الزاوية $\mp \cos$ نصف الزاوية$)^2$

(2) الأجــــزاء

إذا كان لدينا ضرب اقترانيين غير مركبين وهما غير متجانسين، (مثلاً: مثلثي وكثير حدود)

A) أوضح حالاته

1) $\int \ln(x)\,dx$

2)

$\int$ كثير حدود →
- أس خطي e
- أس خطي a
- مثلثي زاويته خطية
- $\ln x$
- $($خطي$)^n$

3) الأجزاء الدوري

$\int e^{\text{خطي}} \sin(\text{خطي})\,dx$

$\int e^{\text{خطي}} \cos(\text{خطي})\,dx$

B) القـانــون

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

C) أولية الاختبار

- ما تبقى dv ، u = ln
- بعدم وجود ln

ما تبقى = dv , u = كثير حدود

- الدوري لنا حرية الاختيار في المرة الأولى

ملاحظات

1) e^e ، e^{ln} ، نفصل ← نفرض ← أجزاء

2) $\int \frac{\ln x}{x}$ نستطيع حله على الأجزاء بشكل دوري، الأفضل على التعويض

3) $\int f(\quad) \times ....$ يعامل f معاملة المثلثي يجب أن يكون قوسه x غير ذلك نفرض، ثمّ نكمل أجزاء إذا كان مضروب بكثير حدود

4) إذا كان البسط جمع (طرح) جنسين مختلفين نتأكد هل الجواب ln مباشرة ؟ إذا لم يكن ln ← نجزء التكامل إلى تكاملين إلى $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$

5) أجزاء الجداول في حال

$\int$ كثير حدود $\times \cos($خطي$)$

$\int$ كثير حدود $\times \sin($خطي$)$

$\int$ كثير حدود $\times e^{\text{خطي}}$

$\int$ كثير حدود $\times ($خطي$)^n$

(3) الكســور الـجـزئيــة

الـشـروط

1) أهم شرط للكسور الجزئية أن يكون البسط والمقام كلاهما كثيرا حدود، أو ليسا كثيرا حدود، ومع الفرض يتحولا لكثيري حدود
2) درجة البسط أقل من درجة المقام وإلا نستخدم القسمة الطويلة

3) البسط ليس مشتقة المقام، نجزء التكامل بثلاثة أشكال:

a) المقام يتحلل إلى أقواس خطية مختلفة

$$\frac{k}{(x-x_1)(x-x_2)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}$$

b) أحد أقواس المقام مربع كامل

$$\frac{k}{(x-x_1)(x-x_2)^2}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}+\frac{c}{(x-x_2)^2}$$

c) أحد الأقواس لايتحلل (مميزه سالب)

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+c}{x^2+1}$$

جد التكاملات التالية في الأسئلة (1 – 24)

1) $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$

$$y=\sqrt{x} \;\rightarrow\; y^2=x$$

$$2y\,dy=dx$$

$$\int 2ye^{y}\,dy$$

أجزاء مرة واحدة

$$u=2y \qquad dv=e^{y}\,dy$$

$$du=2\,dy \qquad v=e^{y}$$

$$2ye^{y}-2e^{y}+c$$

$$=2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}-2e^{\sqrt{x}}+c$$

2) $\int \sin^5 2x\,dx$

$$\int \sin 2x(\sin^2 2x)^2\,dx$$

$$=\int \sin 2x(1-\cos^2 2x)^2\,dx$$

$$y=\cos 2x \;\rightarrow\; dx=\frac{dy}{-2\sin 2x}$$

$$\int \sin 2x(1-y^2)^2\frac{dy}{-2\sin 2x}$$

$$=\frac{-1}{2}\left(y-\frac{2y^3}{3}+\frac{y^5}{5}\right)+c$$

نـــرجـــع y

3) $\int x^2\cdot\sqrt[3]{x^7-5x^3}\,dx$

الفرض المباشر لايحل المسألة ⬅ عامل مشترك

$$\int x^3(x^4-5)^{\frac{1}{3}}\,dx$$

$$y=x^4-5 \;\rightarrow\; dx=\frac{dy}{4x^3}$$

$$\int x^3(y)^{\frac{1}{3}}\frac{dy}{4x^3}=\frac{3}{16}y^{\frac{4}{3}}+c$$

نـــرجـــع y

4) $\int_0^3 (x-2)^2e^{(x-2)^3}\,dx$

$$y=(x-2)^3$$

$$dx=\frac{dy}{3(x-2)^2}$$

نغيّر الحدود : $0\rightarrow -8$ و $3\rightarrow 1$

الأستاذ ماهر ضمرة
0795195907

$$\int_{-8}^{1} (x-2)^2 e^y \frac{dx}{3(x-2)^2}$$

$$= \frac{1}{3} e^y |_{-8}^{1} = \frac{1}{3}(e^1 - e^{-8})$$

5) $\int \sin 2x(1+\sin x)^3\, dx$

$$y = 1 + \sin x \quad \rightarrow \quad dx = \frac{dy}{\cos x}$$

$$\int 2\sin x \cos x y^3 \frac{dy}{\cos x}$$

$$= 2\int (y-1)y^3\, dy = 2\left(\frac{y^5}{5} - \frac{y^4}{4}\right) + c$$

نرجع y

6) $\int_1^{16} \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}\, dx$

نفرض $y = \sqrt[4]{x}$

عامل المشترك الأكبر بين 2 ، 4

$$y^4 = x \quad \rightarrow \quad dx = 4y^3\, dy$$

نغيّر الحدود : $1 \rightarrow 1$ و $16 \rightarrow 2$

$$\int_1^2 \frac{y^2}{1+y} \times 4y^3\, dy = \int_1^2 \frac{4y^5}{y+1}\, dy$$

بالقسمة الطويلة:

$$\begin{array}{r|l} & 4y^4 - 4y^3 + 4y^2 - 4y + 4 \\ \hline y+1 & 4y^5 \\ \ominus & 4y^5 + 4y^4 \\ \hline & -4y^4 \\ \ominus & -4y^4 - 4y^3 \\ \hline & 4y^3 \\ \ominus & 4y^3 + 4y^2 \\ \hline & -4y^2 \\ \ominus & -4y^2 - 4y \\ \hline & 4y \\ \ominus & 4y + 4 \\ \hline & -4 \end{array}$$

$$\int_1^2 \left(4y^4 - 4y^3 + 4y^2 - 4y + 4 + \frac{-4}{y+1}\right) dy$$

$$= \left(4\frac{y^5}{5} - y^4 + \frac{4y^3}{3} - 2y^2 + 4y - 4\ln|y+1|\right)\Big|_1^2$$

$$= -4\ln 3 + 4\ln 2 + \frac{257}{15}$$

7) $\int \cos^5 x \sin^2 x\, dx$

$$y = \sin x \quad \rightarrow \quad dx = \frac{dy}{\cos x}$$

$$\int \cos^5(x) \;\; y^2 \times \frac{dy}{\cos x}$$

$$= \int (\cos^2 x)^2 y^2\, dy = \int (1 - \sin^2 x)^2 y^2\, dy$$

الأستاذ ماهر ضمرة
0795195907

10) $\int \tan^3 x\, dx$

$$\int \tan x(\sec^2 x - 1)\, dx$$

$$= \int \tan x \sec^2 x\, dx - \int \tan x\, dx$$

$$y = \tan x \quad \rightarrow \quad dx = \frac{dy}{\sec^2 x}$$

$$\int y \sec^2 x \frac{dx}{\sec^2 x} = \ln|\cos x| + c$$

$$= \frac{y^2}{2} + \ln|\cos x| + c$$

نرجــع y

11) $\int \frac{x^5}{(x+1)^7} dx$

نخرج عامل مشترك

$$= \int \frac{x^5}{x^7(1+x^{-1})} dx = \int \frac{x^{-2}}{(1+x^{-1})^7} dx$$

$$y = 1 + x^{-1} \quad \rightarrow \quad dx = \frac{dy}{-x^{-2}}$$

$$\int \frac{x^{-2}}{y^7} \times \frac{dy}{-x^{-2}} = \frac{-y^{-6}}{-6} + c = \frac{1}{6y^6} + c$$

نرجــع y

12) أثبت أن

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx$$

نستخدم المتممة

$$= \int (1-y^2)^2 y^2\, dy$$

$$= \int (y^2 - 2y^4 + y^6)\, dy$$

$$= \frac{y^3}{3} - \frac{2y^5}{5} + \frac{y^7}{7} + c$$

نرجــع y

8) $\int \sec x \tan^3 x\, dx$

$$y = \sec x \quad \rightarrow \quad dx = \frac{dy}{\sec x \tan x}$$

$$\int y \tan^3 x \frac{dy}{y \tan x} = \int (\sec^2 x - 1)\, dy$$

$$= \int (y^2 - 1)\, dy = \frac{y^3}{3} - y + c$$

نرجــع y

9) $\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx$

ندمج الأسس

$$\int (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x\, dx$$

$$= \int \frac{1}{4}\sin^2 x \times \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)\, dx$$

$$= \int \frac{1}{8}\sin^2 2x\, dx + \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x\, dx$$

$$y = \sin 2x \rightarrow dx = \frac{dy}{2\cos 2x}$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{1}{2}(1 - \cos 4x)\, dx + \frac{1}{8}\int y^2 \cos 2x \frac{dy}{2\cos 2x}$$

$$= \frac{1}{16}\left(x - \frac{\sin 4x}{4}\right) + \frac{y^3}{48} + c$$

نرجــع y

الأستاذ ماهر ضمرة
0795195907

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx$$

$$y = \frac{\pi}{2} - x \quad \rightarrow \quad dx = -dy$$

نغيّر الحدود : $0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2} \rightarrow 0$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^n y \frac{dy}{-1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n y \, dx \qquad \#$$

13) $\int \frac{x}{x^2-5x+6} dx$

كسور جزئية

$$\frac{x}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

$$x = A(x-3) + B(x-2)$$

$$x = 2 \rightarrow 2 = -A \rightarrow A = -2$$

$$x = 3 \rightarrow B = 3$$

$$= -2\ln|x-2| + 3\ln|x-3| + c$$

14) $\int \frac{\cos x \ \sin^2 x}{2\sin^2 x + \sin x - 3} dx$

$$y = \sin x \quad \rightarrow \quad dx = \frac{dy}{\cos x}$$

$$\int \frac{\cos x \sin^2 x}{2y^2 + y - 3} \times \frac{dy}{\cos x}$$

$$\int \frac{y^2}{2y^2 + y - 3} dy$$

بالقسمة الطويلة

$$\begin{array}{r|l} & \frac{1}{2} \\ \hline 2y^2 + y - 3 & y^2 \\ \ominus & y^2 + \frac{1}{2}y - \frac{3}{2} \\ \hline & -\frac{1}{2}y + \frac{3}{2} \end{array}$$

$$\int \left(\frac{1}{2} + \frac{\frac{-1}{2}y + \frac{3}{2}}{2y^2 + y - 3} \right) dy$$

$$\frac{\frac{-1}{2}y + \frac{3}{2}}{(2y+3)(y-1)} = \frac{A}{2y+3} + \frac{B}{y-1}$$

$$\frac{-1}{2}y + \frac{3}{2} = A(y-1) + B(2y+3)$$

$$y = 1 \rightarrow 1 = 5B \rightarrow B = \frac{1}{5}$$

$$y = -\frac{3}{2} \rightarrow \frac{11}{6} = -\frac{5}{3}A \rightarrow A = -\frac{9}{10}$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{9}{20}\ln|2y+3| + \frac{1}{5}\ln|y-1| + c$$

نرجـع y

15) $\int \frac{7}{(x+1)(x-1)^2} dx$

$$\frac{7}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$$

$$7 = A(x-1)^2 + B(x+1)(x-1) + C(x+1)$$

الأستاذ ماهر ضمرة
0795195907

$$x = 1 \to 7 = 2c \to c = \frac{7}{2}$$

$$x = -1 \to 7 = 4A \to A = \frac{7}{4}$$

$$x = 0 \to 7 = \frac{7}{4} - B + \frac{7}{2}$$

$$B = \frac{21}{4} - 7 \to B = \frac{-7}{4}$$

$$= \frac{7}{4}\ln|x+1| - \frac{7}{4}\ln|x-1| - \frac{7}{2}(x+1)^{-1} + c$$

16) $$\int \frac{x^2-1}{x^3+4x}\,dx$$

$$\int \frac{x^2-1}{x(x^2+4)}\,dx$$

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+c}{x^2+4}$$

$$x^2 - 1 = A(x^2+4) + (Bx+c)x$$

$$x = 0 \to -1 = 4A \to A = \frac{-1}{4}$$

$$x = 1 \to 0 = \frac{-5}{4} + B + c$$

$$B + c = \frac{5}{4} \qquad \dots(1)$$

$$x = -1 \to 0 = \frac{-5}{4} + B - c$$

$$B - c = \frac{5}{4} \qquad \dots(2)$$

$$2B = \frac{10}{4} \to B = \frac{5}{4}$$

$$c = 0$$

$$= \frac{-1}{4}\ln|x| + \frac{5}{8}\ln|x^2+4| + c$$

17) $$\int \frac{\cos x}{(8+\cos^2 x)(\sin x+4)}\,dx$$

$$= \int \frac{\cos x}{(8+1-\sin^2 x)(\sin x+4)}\,dx$$

$$y = \sin x \quad \to \quad dx = \frac{dy}{\cos x}$$

$$\int \frac{\cos x}{(9-y^2)(y+4)} \times \frac{dy}{\cos x}$$

$$\frac{-1}{(y-3)(y+3)(y+4)} = \frac{A}{y-3} + \frac{B}{y+3} + \frac{C}{y+4}$$

نكمل

$$= \frac{1}{42}\ln|y-3| + \frac{1}{6}\ln|y+3| - \frac{1}{7}\ln|y+4| + c$$

18) $$\int \ln(x^2-1)\,dx$$

$$u = \ln(x^2-1) \qquad dv = dx$$

$$du = \frac{2x}{x^2-1}\,dx \qquad v = x$$

$$= x\ln(x^2-1) - \int \frac{2x^2}{x^2-1}\,dx$$

قسمة طويلة ثم كسور جزئية

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline x^2-1 & 2x^2 \\ \ominus & 2x^2-2 \\ \hline & 2 \end{array}$$

كسور جزئية

$$= x\ln(x^2-1) - \left[2 + \int \frac{2}{x^2-1}dx\right]$$

$$= x\ln|x^2-1| - 2x \quad - \ln|x-1| + \ln|x+1| + 11 + c$$

19) $\int \sin \sqrt[3]{x}\, dx$

$$y = \sqrt[3]{x} \rightarrow y^3 = x$$

$$3y^2\, dy = dx$$

$$\int 3y^2 \sin y\, dy$$

أجزاء مرتين جداول

U		dV
$3y^2$	+	$\sin y$
$6y$	-	$-\cos y$
6	+	$-\sin y$
0		$\cos y$

$$= -3y^2 \cos y + 6y \sin y + 6 \cos y + c$$

نرجـــع y

20) $\int \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx$

$$\int x \sec^2 x \tan x\, dx$$

$u = x$ $\qquad$ $dv = \sec^2 x \tan x\ dx$

$du = dx$ $\qquad$ $v = \frac{1}{2}\tan^2 x$

$\int \sec^2 x \tan x\, dx$ $\leftarrow$ v لايجاد

$$y = \tan x \rightarrow dx = \frac{dy}{\sec^2 x}$$

$$\int y\, dy = \frac{y^2}{2} = \frac{1}{2}\tan^2 x$$

$$= \frac{1}{2} x \tan^2 x - \frac{1}{2}\int \tan^2 x\, dx$$

$$= \frac{1}{2} x \tan^2 x - \frac{1}{2}\int (\sec^2 x - 1)\, dx$$

$$= \frac{1}{2} x \tan^2 x - \frac{1}{2}\tan x + \frac{1}{2} x + c$$

21) $\int e^{(x+2\ln x)}\, dx$

نبسط: $\int e^x e^{\ln x^2}\, dx = \int x^2 e^x\, dx$

أجزاء مرتين (جداول)

x^2	+	e^x
$2x$	-	e^x
2	+	e^x
0		e^x

$$x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c$$

22) $\int e^x \sin x \cos x\, dx$

أجزاء دوري لكن نبدأ بالتبسيط

$$\int e^x \cdot \frac{1}{2}\sin 2x\, dx = \int \frac{1}{2} e^x \sin 2x\, dx$$

24) $\int \frac{x+\sin 2x}{1-\cos 2x}\,dx$

نوزع $\int \frac{x}{1-\cos 2x}dx + \int \frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}dx$

1) $\int \frac{x}{1-\cos 2x}dx = \int \frac{x}{2\sin^2 x}dx$

$$= \int \frac{1}{2} x \csc^2 x\, dx$$

$u = \frac{1}{2}x \qquad dv = \csc^2 x\, dx$

$du = \frac{1}{2}dx \qquad v = -\cot x$

$$\frac{-1}{2}x\cot x - \frac{1}{2}\ln|\sin x|$$

2) $\int \frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}dx = \frac{1}{2}\ln|1-\cos 2x|$

الحل الكلي:

$$= \frac{-1}{2}x\cot x - \frac{1}{2}\ln|\sin x| + \frac{1}{2}\ln|1-\cos 2x| + c$$

25) $\int \frac{x^3 e^{x^2}}{(x^2+1)^2}\,dx$

$$y = x^2 \quad \rightarrow \quad dx = \frac{dy}{2x}$$

$$\int \frac{x^3 e^y}{(y+1)^2} \times \frac{dy}{2x} = \frac{1}{2}\int \frac{ye^y}{(y+1)^2}dy$$

$u = ye^y \qquad dv = (y+1)^{-2}\,dx$

$du = ye^y + e^y \times 1$

$= e^y(y+1)\,dy \qquad v = \frac{(y+1)^{-1}}{-1} = \frac{-1}{y+1}$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{-ye^y}{y+1} + e^y\right) + c$$

نرجـــع y

$u = \frac{1}{2}e^x \qquad dv = \sin 2x\, dx$

$du = \frac{1}{2}e^x\, dx \qquad v = \frac{-\cos 2x}{2}$

$$= \frac{-1}{4}e^x\cos 2x + \int \frac{1}{4}e^x \cos 2x\, dx$$

$u = \frac{1}{4}e^x \qquad dv = \cos 2x\, dx$

$du = \frac{1}{4}e^x\, dx \qquad v = \frac{\sin 2x}{2}$

$$\int \frac{1}{2}e^x \sin 2x\, dx$$

$$= \frac{-1}{4}e^x\cos 2x + \frac{1}{8}e^x \sin 2x - \frac{1}{8}\int e^x \sin 2x\, dx$$

ننقل

$$\frac{5}{8}\int e^x \sin 2x\, dx = \frac{-1}{4}e^x\cos 2x + \frac{1}{8}e^x\sin 2x$$

$$\int e^x \sin 2x\, dx = \frac{8}{5}\left(\frac{-1}{4}e^x\cos 2x + \frac{1}{8}e^x \sin 2x\right) + c$$

23) $\int \boldsymbol{sec^3\, x\, dx}$

$u = \sec x \qquad dv = \sec^2 x$

$du = \sec x \tan x \qquad v = \tan x$

$$\sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x\, dx$$

$$= \sec x \tan x - \int \sec x(\sec^2 x - 1)\, dx$$

$$\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x - \int \sec^3 x\, dx + \int \sec x\, dx$$

$$\frac{2}{2}\int \sec^3 x\, dx$$

$$= \frac{\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|}{2} + c$$

الأستاذ ماهر ضمرة
0795195907

3 المساحات والحجوم

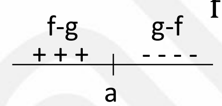
1) المساحة بين f و g وبين المستقيمين $x = b$ ، $x = a$

$$A = \int_a^b (\text{الأعلى}) - (\text{الأسفل})\, dx$$

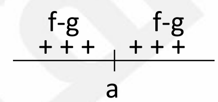
2) لمعرفة الأعلى والأسفل، إما نرسم أو نختبر نقطة وسطية

3) إذا لم يعطي السؤال المستقيمين $x = a$ ، $x = b$ نجد التقاطع $f = g$

إما تكون تقاطع



أو تماس



4) محور x اقتران $y = 0$ ←

محور y حد من الحدود (أحد المستقيمين) $x = 0$

5) المساحة مع محور x ، نختبر

إذا كان f هو أعلى من x $A = \int_a^b f(x)\, dx$

و $A = -\int_a^b f(x)\, dx$

إذا كان x هو الأعلى

أو $A = \int_a^b |f(x)|\, dx$ و نعيد التعريف

6) الحجم الدوراني الناتج من دوران المنطقة بين g , f والمستقيمين $x = a$, $x = b$ حول محور x ،

$$v = \pi \int_a^b (\text{الأعلى})^2 - (\text{الأسفل})^2\, dx$$

وإذا كان f مع محور x

$$v = \pi \int_a^b (f(x))^2\, dx$$

مثال(1)

جد المساحة المحصورة بين

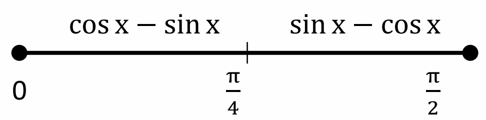
$$\mathbf{f(x) = \sin x \quad , \quad g(x) = \cos x}$$

والمستقيمين $\mathbf{x = 0 \quad , \quad x = \frac{\pi}{2}}$

أولا: نتأكد من التقاطع هل يوجد تجزئة للفترة

$$\sin x = \cos x \rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

نعم نجزء الفترة



$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x)\, dx$$

$$= 2\sqrt{2} - 2$$

مثال(2)

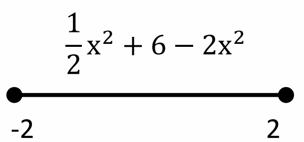
جد مساحة المنطقة المحصورة

بين $\mathbf{f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 6 \quad , \quad g(x) = 2x^2}$

$$f = g \rightarrow 2x^2 = \frac{1}{2}x^2 + 6$$

نضرب بـ 2 ← $4x^2 = x^2 + 12$

$$3x^2 = 12 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$$



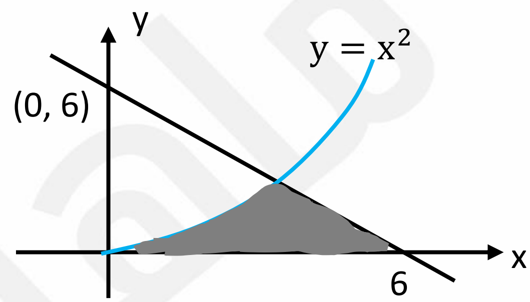
الأستاذ ماهر ضمرة
0795195907

$$A = \int_{-2}^{2} \left(\frac{-3}{2}x^2 + 6\right) dx$$

$$= \frac{-1}{2}x^3 + 6x\Big|_{-2}^{3} = 16$$

مثال(3)

من الشكل التالي احسب مساحة المنطقة المظللة



نجد معادلة المستقيم الذي يمر بـ $(6,0)$, $(0,6)$

$$m = -1 \rightarrow y - 0 = -1(x - 6)$$

$$y = 6 - x$$

نجد التقاطع: $6 - x = x^2$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x + 3)(x - 2) = 0$$

$$x = -3 \quad , \quad 2$$

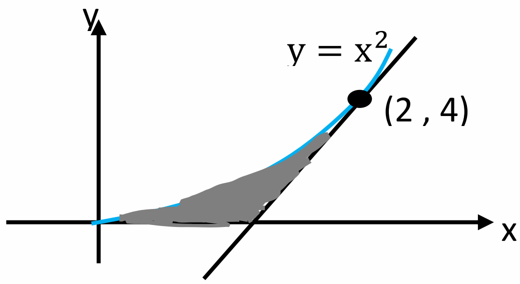
$$A = \int_{0}^{2} x^2\, dx + \int_{2}^{6} (6 - x)\, dx$$

$$= \frac{8}{3} + 24 - 16 = \frac{32}{3}$$

مثال(4)

احسب مساحة المنطقة المظللة

المحصورة بين $y = x^2$ ، ومماس y عند $(2, 4)$

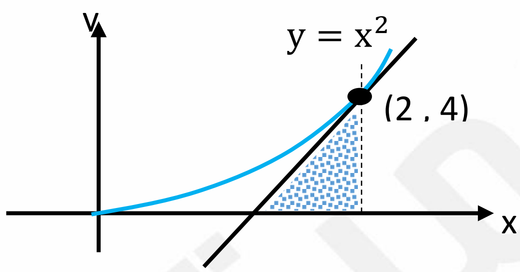


نجد معادلة المماس

$$y' = 2x \quad \rightarrow \quad m = 4$$

$$y - 4 = 4(x - 2) \quad \rightarrow \quad y = 4x - 4$$

نحسب A_1 ثم نحسب مساحة المثلث ونطرحها



A_1 بين y ومحور x والمستقيمين $x = 0 , x = 2$

$$A_1 = \int_{0}^{2} x^2\, dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{0}^{2} = \frac{8}{3}$$

نجد تقاطع المماس مع x

$$y = 4x - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 1$$

$$A_{\text{المثلث}} = \frac{1}{2}(2 - 1)(4) = 2$$

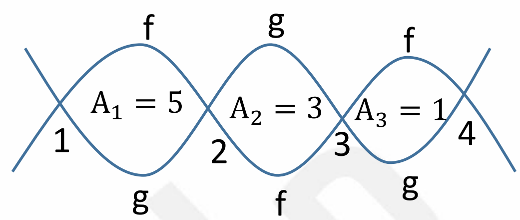
$$A_{\text{المحصورة}} = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}$$

الأستاذ ماهر ضمرة
0795195907

مثال(5)

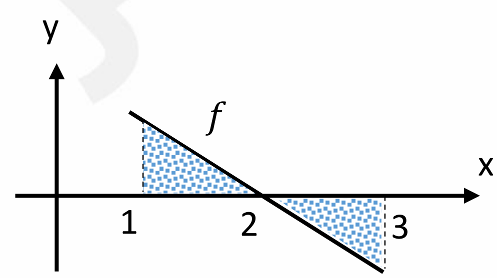
اختر رمز الإجابة الصحيحة في الفروع (1 – 5)

1) من الشكل التالي، فإن $\int_1^4 (f-g)\,dx$ يساوي



a) 7　　b) 1　　c) 9　　d) 3

2) من الشكل التالي، إن التكامل الذي يعبّر عن مساحة المنطقة المظللة هو:



a) $\int_1^3 f(x)\,dx$　　b) $2\int_1^{-2} f(x)\,dx$

c) $\int_1^3 |f(x)|\,dx$　　d) $\int_1^3 -f(x)\,dx$

3) إذا كانت المساحة المحصورة بين $f(x) = x^2$ والمستقيم $y = a$, $a \in R$ الواقعة في الربع الأول تساوي $\frac{16}{3}$ فإن a تساوي

a) 16　　b) $\sqrt[3]{16}$　　c) 4　　d) $2-\sqrt{3}$

4) إن مساحة المنطقة المحصورة بين $f(x) = x^3$, $g(x) = x$ تساوي:

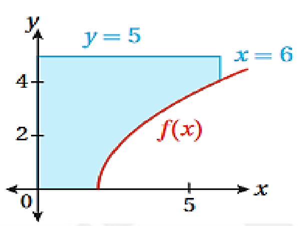
a) 2　　b) $\frac{1}{4}$　　c) 1　　d) $\frac{1}{2}$

5) إن الحجم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x$ حول محور x تساوي:

a) $\frac{\pi}{6}$　　b) π　　c) $\frac{\pi}{3}$　　d) $\frac{\pi}{2}$

مثال(6)

يبيّن الشكل التالي المنطقة المحصورة بين الإحداثيين في الربع الأول، ومنحنى الاقتران $f(x) = 2\sqrt{x-2}$ ، والمستقيمين $x = 6$ ، $y = 5$. جد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة حول x .



سنجزء المنطقة

$$2\sqrt{x-2} = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2$$

$$v_1 = \pi \int_0^2 (5)^2\,dx = 50\pi$$

$$v_2 = \pi \int_2^6 25 - 4(x-2)\,dx = 68\pi$$

$$v_T = 50\pi + 68\pi = 118\pi$$

4 المعادلات التفاضلية

نفصل x مع dx ، كذلك y مع dy بشرط

1) dx , dy بالبسط

2) ليس لهم أس أو جذر

ثم نكامل الطرفين

أمثلة

جد حل المعادلات التفاضلية التالية:

1) $\mathbf{\frac{dy}{dx} = \cos x \sin y}$

$$\cos x\, dx = \frac{dy}{\sin y} = \csc y\, dy$$

نكامل الطرفين

$$\sin x + c = -\ln|\csc y + \cot y|$$

2) $\mathbf{\frac{dy}{dx} = \sqrt{xy + x - y - 1}}$

حيث , $\boldsymbol{x > 1 \;,\; y > -1}$

نفصل المعادلة

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x(y+1) - (y+1)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{(y+1)(x-1)}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{y+1}} = \sqrt{x-1}\, dx$$

$$2(y+1)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + c$$

3) $\mathbf{2\tan^2 x\, dy + y^2\, dx = -2\, dy}$

$$2\tan^2 x\, dy - 2\, dy = -y^2\, dx$$

$$2\, dy[\tan^2 x + 1] = -y^2\, dy$$

$$2\sec^2 x\, dy = -y^2\, dx$$

$$\frac{-2}{y^2} dy = \cos^2 x\, dx$$

نكامل الطرفين

$$\frac{2}{y} = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)\, dx$$

$$\frac{2}{y} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right) + c$$

4) إذا علمت أن ميل العمودي للعلاقة y عند (x, y) يعطى بالصيغة $\frac{2}{xy+y}$ وكان منحنى y يمر بالنقطة $(2, e^2)$ ، جد العلاقة y .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy + y}{-2} = \frac{-1}{2} y(x+1)$$

$$\int -2 \times \frac{dy}{y} = \int (x+1)\, dx$$

$$-2\ln|y| = \frac{x^2}{2} + x + c$$

نعوض

$$-4 = 4 + c \quad \rightarrow \quad c = -8$$

$$-2\ln|y| = \frac{x^2}{2} + x - 8$$

$$\ln|y| = \frac{x^2}{-4} - \frac{1}{2}x + 4$$

الأستاذ ماهر ضمرة
0795195907

5) يتحرك جسم في مسار مستقيم وتعطى سرعته المتجهة بالمعادلة

$\frac{ds}{dt} = st\sqrt{t+4}$ ، جد موقع الجسيم بعد مرور 5 ثوان علماً بأن $s(0) = 1$

علماً بأن $s > 0$

$$\frac{ds}{s} = t(t+4)^{\frac{1}{2}}\,dt$$

نكامل الطرفين

$$\ln|s| = \int t(t+4)^{\frac{1}{2}}\,dt$$

$$y = t+4 \to dy = dt$$

$$\ln|s| = \int (y-4)y^{\frac{1}{2}}\,dy$$

$$\ln|s| = \frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}} - \frac{8}{3}y^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\ln|s| = \frac{2}{5}(t+4)^{\frac{5}{2}} - \frac{8}{3}(t+4)^{\frac{3}{2}} + c$$

نعوض $t = 0$

$$\ln|s(0)| = \frac{64}{5} - \frac{64}{3} + c = 1$$

$$c = \frac{128}{15}$$

$$\ln|s(t)| = \frac{2}{5}(t+4)^{\frac{5}{2}} - \frac{8}{3}(t+4)^{\frac{3}{2}} + \frac{128}{15}$$

$$\ln|s(5)| = \frac{2}{5}(243) - \frac{8}{3}(27) + \frac{128}{15}$$

$$S(5) \approx e^{33.73}$$

6) يمكن نمذجة معدّل تغيّر عدد الغزلان في إحدى الغابات بالمعادلة التفاضلية:

$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{20000}P(1000-P)$ ،

حيث P عدد الغزلان في الغابة بعد t سنة من بدء دراسة عليها ،

(علماً بأن $ln\left(\frac{27}{20}\right) = 0.3$)

a) أحل المعادلة التفاضلية لايجاد عدد الغزلان في الغابة بعد t سنة من بدء الدراسة، علماً بأن عددها عند بدء الدراسة هو 2500 غزال.

b) بعد كم سنة يصبح عدد الغزلان في الغابة 1800 غزال؟

$$a)\qquad \frac{dP}{dt} = \frac{1}{20000}P(1000-P)$$

$$\int \frac{dP}{P(1000-P)} = \int \frac{1}{20000}\,dt$$

تجزئة الكسر داخل التكامل في الطرف الأيسر:

$$\int \left(\frac{\frac{1}{1000}}{P} + \frac{\frac{1}{1000}}{1000-P}\right)dP = \int \frac{1}{20000}\,dt$$

$$\frac{1}{1000}\ln|p| - \frac{1}{1000}\ln|1000-p|$$

$$= \frac{1}{20000}t + c$$

$$20\ln|P| - 20\ln|1000-P| = t + c$$

$$20\ln\left|\frac{P}{1000-p}\right| = t + c$$

بتعويض $P = 2500$ عند $t = 0$ ينتج:

الأستاذ ماهر ضمرة
0795195907

$$c = 20\ln\frac{2500}{1500} = 20\ln\frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow \quad 20\ln\left|\frac{P}{1000-P}\right| = t + 20\ln\frac{5}{3}$$

b) نعوض $P = 1800$ في المعادلة الأخيرة

$$20\ln\left(\frac{9}{4}\right) = t + 20\ln\frac{5}{3}$$

$$t = 20\ln\frac{27}{20} \approx 6$$

إذن، يصبح عدد الغزلان 1800 غزال بعد 6 سنوات تقريبا من بدء الدراسة.

إجابة سؤال الدوائر ص3 + 4

رقم الدائرة	1	2	3	4	5	6	7	8	9
الإجابة	b	b	c	a	c	b	a	b	b

رقم الدائرة	10	11	12	13	14	15	16	17	18
الإجابة	c	c	c	c	a	c	c	b	a

إجابة سؤال الدوائر ص18

رقم الدائرة	1	2	3	4	5
الإجابة	d	c	c	d	a