



AWA2EL  
LEARN 2 BE



# الرياضيات

الصف الثاني عشر - الفرع العلمي

الفصل الدراسي الأول

12

## فريق التأليف

د. عمر محمد أبوغليون (رئيساً)

هبة ماهر التميمي      يوسف سليمان جرادات      أ.د. محمد صبح صباحه

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

☎ 06-5376262 / 237      📠 06-5376266      📧 P.O.Box: 2088 Amman 11941

📌 @nccdjor      @ feedback@nccd.gov.jo      🌐 www.nccd.gov.jo

قرّرت وزارة التربية والتعليم تدرّيس هذا الكتاب في مدارس المملكة الأردنية الهاشمية جميعها، بناءً على قرار المجلس الأعلى للمركز الوطني لتطوير المناهج في جلسته رقم (2022/3)، تاريخ 2022/5/12 م، وقرار مجلس التربية والتعليم رقم (2022/16)، تاريخ 2022/5/29 م، بدءاً من العام الدراسي 2022 / 2023 م.



© HarperCollins Publishers Limited 2022.

- Prepared Originally in English for the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

- Translated to Arabic, adapted, customised and published by the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

**ISBN: 978 - 9923 - 41 - 425 - 5**

المملكة الأردنية الهاشمية  
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية  
(2023/2/791)

373.19

الأردن. المركز الوطني لتطوير المناهج

كتاب التمارين: الصف الثاني عشر الفرع العلمي: الفصل الدراسي الأول/ المركز الوطني لتطوير

المناهج. - عمان: المركز، 2023

(38) ص.

ر.إ.: 2023/2/791

الواصفات: الرياضيات // التمارين // أساليب التدريس // التعليم الثانوي /

يتحمّل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مُصنّفه، ولا يُعبّر هذا المُصنّف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية.

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, sorted in retrieval system, or transmitted in any form by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, without the prior written permission of the publisher or a license permitting restricted copying in the United Kingdom issued by the Copyright Licensing Agency Ltd, Barnard's Inn, 86 Fetter Lane, London, EC4A 1EN.

British Library Cataloguing -in- Publication Data

A catalogue record for this publication is available from the Library.

1443 هـ / 2022 م

الطبعة الأولى (التجريبية)

1444 هـ / 2023 م

أعيدت طباعته

أعزّاءنا الطلبة ...



يحتوي هذا الكتاب على تمارين مُتَنوّعة أُعدّدت بعناية لتفنيكم عن استعمال مراجع إضافية، وهي تُعدُّ استكمالاً للتمارين الواردة في كتاب الطالب، وتهدف إلى مساعدتكم على ترسيخ المفاهيم التي تتعلمونها في كل درس، وتُتمّي مهاراتكم الحاسوبية.

قد يختار المعلم / المعلمة بعض تمارين هذا الكتاب واجباً منزلياً، ويترك لكم بعضها الآخر لكي تحلّوها عند الاستعداد للاختبارات الشهرية واختبارات نهاية الفصل الدراسي.

أما الصفحات التي تحمل عنوان (أستعد لدراسة الوحدة) فهي بداية كل وحدة، فإنّها تساعدكم على مراجعة المفاهيم التي درستوها سابقاً؛ ما يُعزّز قدرتكم على متابعة التعلّم في الوحدة الجديدة بسلاسة ويسر.

قد لا يتوافر فراغ كافٍ إزاء كل تمرين للكتابة خطوات الحلّ جميعها؛ لذا يُمكن استعمال دفتر إضافي للكتابة بوضوح.

تمنين لكم تعلّماً ممتعاً وميسراً.

المركز الوطني لتطوير المناهج



## الوحدة 1 التفاضل

6 ..... أستعد لدراسة الوحدة

9 ..... **الدرس 1** مشتقة اقترانات خاصة

10 ..... **الدرس 2** مشتقتا الضرب والقسمة والمشتقات العليا

11 ..... **الدرس 3** قاعدة السلسلة

13 ..... **الدرس 4** الاشتقاق الضمني



الوحدة 2 تطبيقات التفاضل

- 14 ..... أستعد لدراسة الوحدة
- 16 ..... **الدرس 1** المُعدَّلات المرتبطة
- 18 ..... **الدرس 2** القِيم القسوى والتقعر
- 20 ..... **الدرس 3** تطبيقات القِيم القسوى

الوحدة 3 الأعداد المُركَّبة

- 21 ..... أستعد لدراسة الوحدة
- 24 ..... **الدرس 1** الأعداد المُركَّبة
- 26 ..... **الدرس 2** العمليات على الأعداد المُركَّبة
- 28 ..... **الدرس 3** المحل الهندسي في المستوى المُركَّب
- 30 ..... أوراق الرسم البياني

أختبر معلوماتي قبل البدء بدراسة الوحدة، وفي حال عدم تأكدي من الإجابة أستعين بالمثل المعطى.



إيجاد المشتقة باستخدام التعريف العام

أجد مشتقة كل من الاقترانات الآتية باستخدام التعريف العام للمشتقة:

1  $f(x) = 3x - 8$

2  $f(x) = 4x^3 + 3x$

3  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$

مثال: أجد مشتقة  $f(x) = \sqrt{x}$  باستخدام التعريف العام للمشتقة.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

التعريف العام للمشتقة

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

بالتعويض:  $f(x+h) = \sqrt{x+h}$ ,  $f(x) = \sqrt{x}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \times \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

بضرب كل من البسط والمقام في المرافق  $(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

بالتبسيط

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

بالتبسيط

$$= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}}$$

بتعويض  $h = 0$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

بالتبسيط

مشتقة اقتران القوة

أجد مشتقة كل مما يأتي:

4  $f(x) = 7x^3$

5  $f(x) = 12x^{\frac{4}{3}}$

6  $f(x) = 3x^2 - 5\sqrt{x}$

7  $f(x) = -\frac{3}{x^7}$

8  $f(x) = x^2(x^3 - 2x)$

9  $y = \frac{7}{x^3} + \frac{3}{x} - 2$

مثال: أجد مشتقة كلِّ ممَّا يأتي:

a)  $f(x) = \frac{2x-7}{x^2}$

$$f(x) = \frac{2x-7}{x^2} = \frac{2x}{x^2} - \frac{7}{x^2}$$

$$= 2x^{-1} - 7x^{-2}$$

$$f'(x) = -2x^{-2} + 14x^{-3}$$

$$= -\frac{2}{x^2} + \frac{14}{x^3}$$

بقسمة كل حدِّ في البسط على  $x^2$

بكتابة الاقتران في صورة أُسية

قاعدتا مشتقة مضاعفات القوَّة، ومشتقة الفرق

تعريف الأُسِّ السالب

b)  $f(x) = \sqrt{x} + 6\sqrt{x^3} + 5$

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} + 6x^{\frac{3}{2}} + 5$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 9x^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} + 9\sqrt{x}$$

بكتابة الاقتران في صورة أُسية

قواعد مشتقة مضاعفات القوَّة، ومشتقة المجموع، ومشتقة الثابت

الصورة الجذرية

### • مشتقة الاقتران: $y = (ax + b)^n$

أجد مشتقة كلِّ ممَّا يأتي:

10  $y = (2x - 3)^6$

11  $y = \sqrt{9 - 3x}$

12  $y = \frac{1}{\sqrt{4x + 1}}$

مثال: أجد مشتقة الاقتران:  $y = \frac{1}{\sqrt{8-x}}$

$$y = \frac{1}{\sqrt{8-x}} = (8-x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}(8-x)^{-\frac{3}{2}} \times -1$$

$$= \frac{1}{2(8-x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{(8-x)^3}}$$

بكتابة الاقتران في صورة أُسية

قاعدة مشتقة الاقتران المُركَّب

تعريف الأُسِّ السالب

الصورة الجذرية

## إيجاد معادلة المماس عند نقطة ما

إذا كان الاقتران:  $f(x) = (3x + 2)^2$ ، فأستعمل المشتقة لإيجاد كلِّ ممّا يأتي:

13 معادلة المماس عند النقطة  $(-1, 1)$ .

14 معادلة العمودي على المماس عند النقطة  $(-1, 1)$ .



**مثال:** إذا كان الاقتران:  $f(x) = x^7 - x$ ، فأستعمل المشتقة لإيجاد كلِّ ممّا يأتي:

1 معادلة المماس عند النقطة  $(1, 0)$ .

**الخطوة 1:** أجد ميل المماس عند النقطة  $(1, 0)$ .

$$f(x) = x^7 - x$$

الاقتران المعطى

$$f'(x) = 7x^6 - 1$$

مشتقة اقتران القوة، ومشتقة الفرق

$$f'(1) = 7(1)^6 - 1$$

بتعويض  $x = 1$

$$= 6$$

بالتبسيط

**الخطوة 2:** أجد معادلة المماس.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

معادلة المستقيم بصيغة الميل ونقطة

$$y - 0 = 6(x - 1)$$

بتعويض  $x_1 = 1, y_1 = 0, m = 6$

$$y = 6x - 6$$

بالتبسيط

إذن، معادلة المماس هي:  $y = 6x - 6$ .

2 معادلة العمودي على المماس عند النقطة  $(1, 0)$ .

ميل العمودي على المماس هو  $-\frac{1}{6}$ . ومنه، فإنَّ معادلة العمودي على المماس عند النقطة  $(1, 0)$  هي:

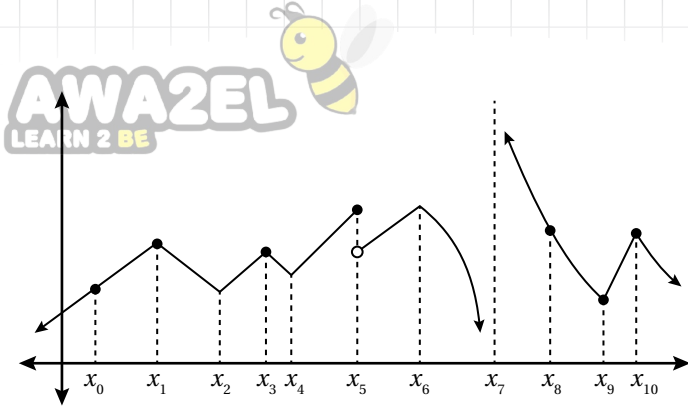
$$y - 0 = -\frac{1}{6}(x - 1)$$

$$y = -\frac{1}{6}x + \frac{1}{6}$$



## مشتقة اقترانات خاصة

### Differentiation of Special Functions



1 يُبيّن الشكل المجاور منحنى الاقتران  $f(x)$ . أحمّد قِيم  $x$  للنقاط التي يكون عندها الاقتران  $f(x)$  غير قابل للاشتقاق، مُبرِّراً إجابتي.

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

2  $f(x) = 9e^x + \frac{1}{3\sqrt{x}}$

3  $f(x) = 2e^x + \frac{1}{x^2}$

4  $f(x) = \frac{\pi}{2} \sin x - \cos x$

5 أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران:  $f(x) = 2e^x + x$  عندما  $x = 2$ .

6 أُثبت عدم وجود مماس أفقي لمنحنى الاقتران:  $f(x) = 3x + \sin x + 2$ .

يُمثّل الاقتران:  $s(t) = 3t^2 - t^3, t \geq 0$  موقع جُسيّم يتحرّك في مسار مستقيم، حيث  $s$  الموقع بالأمتار، و  $t$  الزمن بالثواني:

7 أجد سرعة الجُسيّم وتسارعه بعد  $t$  ثانية.

8 أجد الموقع (المواقع) الذي يكون عنده الجُسيّم في حالة سكون لحظي.

إذا كان:  $f(x) = \ln x^2$ ، حيث:  $x > 0$ ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تبعاً:

9 أجد معادلة مماس منحنى الاقتران عندما  $x = e^2$ .

10 أجد الإحداثي  $x$  للنقطة التي يكون المماس عندها موازياً للمستقيم  $6x - 2y + 5 = 0$

إذا كان:  $f(x) = 2 \sin x - 4 \cos x$ ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تبعاً:

11 أجد ميل المماس لمنحنى الاقتران  $f(x)$  عندما  $x = 0$ .

12 أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران  $f(x)$  عندما  $x = \frac{\pi}{2}$ .

## مشتقتا الضرب والقسمة والمشتقات العليا

### Product and Quotient Rules and Higher-Order Derivatives



1  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

2  $f(x) = -\csc x - \sin x$

3  $f(x) = \frac{x+c}{x+\frac{c}{x}}$

4  $f(x) = x \cot x$

5  $f(x) = 4x - x^2 \tan x$

6  $f(x) = \frac{\cos x}{x^2}$

7  $f(x) = x \left(1 - \frac{4}{x+3}\right)$

8  $f(x) = \frac{3(1 - \sin x)}{2 \cos x}$

9  $f(x) = (x+1)e^x$

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

أجد معادلة المماس لكل اقتران مما يأتي عند النقطة المعطاة:

10  $f(x) = x^2 \cos x, \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

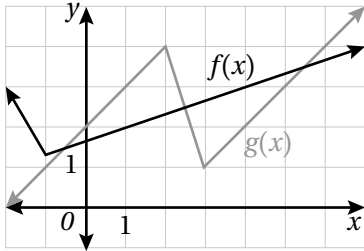
11  $f(x) = \frac{1 + \sin x}{\cos x}, (\pi, -1)$

أجد إحداثيي النقطة (النقاط) التي يكون عندها لمنحنى كل اقتران مما يأتي مماس أفقي:

12  $f(x) = \frac{2x-1}{x^2}$

13  $h(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

14  $g(x) = \frac{8(x-2)}{e^x}$



يُبين الشكل المجاور منحنىي الاقترانين:  $f(x)$  و  $g(x)$ . إذا كان:  $u(x) = f(x)g(x)$  وكان:  $v(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  فأجد كلاً مما يأتي:

15  $u'(1)$

16  $v'(4)$

17 إذا كان:  $f(x) = x \sec x$ ، فأثبت أن  $f'(x) = \sec x (1 + x \tan x)$ .

18 إذا كان:  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ، حيث:  $x > 0$ ، فأجد  $f'(x)$  و  $f''(x)$ .

يُمثل الاقتران:  $v(t) = \frac{10}{2t+15}, t \geq 0$  سرعة سيارة بدأت الحركة في مسار مستقيم، حيث تقاس  $v$  بالقدم لكل ثانية:

20 أجد تسارع السيارة عندما  $t = 20$ .

19 أجد تسارع السيارة عندما  $t = 5$ .

21 يعطى طول مستطيل بالمقدار  $6t + 5$ ، ويعطى عرضه بالمقدار  $\sqrt{t}$ ، حيث  $t$  الزمن بالثواني، والأبعاد بالسنتيمترات. أجد معدّل تغيّر مساحة المستطيل بالنسبة إلى الزمن.

قاعدة السلسلة  
The Chain Rule



أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

- |                               |  |   |
|-------------------------------|--|---|
| 1 $f(x) = 100e^{-0.1x}$       | 2 $f(x) = \sin(x^2 + 1)$                 | 3 $f(x) = \cos^2 x$                           |
| 4 $f(x) = \cos 2x - 2 \cos x$ | 5 $f(x) = \log_3 \frac{x\sqrt{x-1}}{2}$  | 6 $f(x) = 2\cot^2(\pi x + 2)$                 |
| 7 $f(x) = \log 2x$            | 8 $f(x) = \ln(x^3 + 2)$                  | 9 $f(x) = \left(\frac{x^2}{x^3 + 2}\right)^2$ |
| 10 $f(x) = x^2 \sqrt{20 - x}$ | 11 $f(x) = \frac{\sin(2x + 1)}{e^{x^2}}$ | 12 $f(x) = 3^{\cot x}$                        |

أجد معادلة المماس لكل اقتران مما يأتي عند قيمة  $x$  المعطاة:

- |   |                                 |  |
|---|---------------------------------|--|
| 13 $y = 2 \sin 5x - 4 \cos 3x, x = \frac{\pi}{2}$ | 14 $f(x) = (x^2 + 2)^3, x = -1$ | 15 $f(x) = \tan 3x, x = \frac{\pi}{4}$ |
|---|---------------------------------|--|

إذا كان الاقتران:  $f(x) = 3 \sin x - \sin^3 x$ , فأجيب عن السؤالين الآتيين تبعًا:

- 16 أثبت أن  $f'(x) = 3 \cos^3 x$ .  
17 أجد  $f''(x)$ .

18 يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطة:  $x = a \cos t, y = b \sin t$ , حيث:  $0 \leq t \leq 2\pi$ . أجد المقطع  $y$  لمماس المنحنى عندما  $t = \frac{\pi}{4}$  بدلالة  $a$  و  $b$ .

إذا كان الاقتران:  $y = e^{ax}$ , حيث  $a$  ثابت، و  $a > 0$ , فأجيب عن السؤالين الآتيين تبعًا:

- 19 أجد إحداثيي النقطة  $P$  التي تقع على منحنى الاقتران، ويكون ميل المماس عندها 1.  
20 أثبت أنه يُمكن كتابة معادلة العمودي على المماس عند النقطة  $P$  في صورة:  $x + y = k$ , ثم أجد قيمة الثابت  $k$ .

21 إذا كان:  $h(x) = \sqrt{4 + 3f(x)}$ , وكان:  $f(1) = 7, f'(1) = 4$ , فأجد  $h'(1)$ .

22 إذا كان الاقتران:  $f(x) = e^{2x} + e^{-2x}$ , فأثبت أن  $f''(x) = 4f(x)$ .

## قاعدة السلسلة The Chain Rule

# الدرس 3



23 إذا كان:  $f(x) = \sin 4x + \cos 4x$ ، فأثبت أن  $f''(x) + 16f(x) = 0$ .

يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطة:  $x = \sin^2 \theta$ ,  $y = 2 \cos \theta$ ، حيث:  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ :

24 أجد  $\frac{dy}{dx}$  بدلالة  $\theta$ .

25 أجد معادلة المماس عندما يكون الميل  $\sqrt{2}$ .

26 أجد النقطة التي يكون عندها المماس موازيًا للمحور  $y$ .

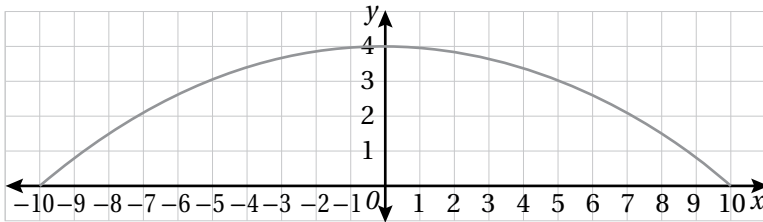
27 سيارّة: يُمثّل الاقتران:  $v(t) = 15t e^{-0.05t^2}$  سرعة (بالمتر لكل ثانية) سيارّة تتحرّك في مسار مستقيم، حيث:

$0 \leq t \leq 10$ . أجد سرعة السيارّة عندما يكون تسارعها صفرًا.

أجد  $(f \circ g)'(x)$  عند قيمة  $x$  المعطاة في كلِّ ممّا يأتي:

28  $f(u) = u^5 + 1$ ,  $u = g(x) = \sqrt{x}$ ,  $x = 1$

29  $f(u) = u + \frac{1}{\cos^2 u}$ ,  $u = g(x) = \pi x$ ,  $x = \frac{1}{4}$

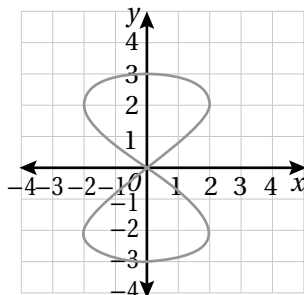


مَرور: يُبيّن التمثيل البياني المجاور شكل مَطَبِّ سرعةٍ صُمِّمَ للتخفيف من سرعة السيارّات على أحد الطرق. وفيه يُمثّل المحور  $x$  سطح الأرض، وتقاس جميع الأطوال بالسنتيمترات.

إذا كانت المعادلة الوسيطة التي تُمثّل منحنى المَطَبِّ هي:  $x = 10 \sin t$ ,  $y = 2 + 2 \cos 2t$ ، حيث:  $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ ، فأجد كُلاً ممّا يأتي:

30 ميل المماس لمنحنى المَطَبِّ بدلالة  $t$ .

31 قيمة  $t$  عند أعلى نقطة على منحنى المَطَبِّ.



32 تَبْريل: يُبيّن الشكل المجاور منحنى المعادلة الوسيطة:

$$x = 2 \sin 2t, \quad y = 3 \cos t \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

أجد ميل المماس لمنحنى المعادلة عند نقطة الأصل، مُبرّرًا إيجابتي.

الاشتقاق الضمني  
Implicit Differentiation

AWA2EL  
LEARN 2 BE



أجد  $\frac{dy}{dx}$  لكل ممّا يأتي:

1  $x^3 y^3 = 144$

2  $xy = \sin(x + y)$

3  $y^4 - y^2 = 10x - 3$

4  $x \sin y - y \cos x = 1$

5  $\cot y = x - y$

6  $\sqrt{xy} + x + y^2 = 0$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل علاقة ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

7  $x^2 + 3xy + y^2 = x + 3y$ , (2, -1)

8  $xe^y + y \ln x = 2$ , (1, ln 2)

9  $4xy = 9$ ,  $(1, \frac{9}{4})$

10  $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$ , (1, 2)

أجد  $\frac{d^2y}{dx^2}$  لكل ممّا يأتي:

11  $x^2 y - 4x = 5$

12  $x^2 + y^2 = 8$

13  $y^2 = x^3$

14 أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران:  $y = x^{x^2}$  عندما  $x = 2$ .

15 أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة:  $(x + y)^3 = x^2 + y$  عند النقطة (1, 0).

16 أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران:  $y = x(\ln x)^x$  عندما  $x = e$ .

أجد مشتقة كل من الاقترانات الآتية باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي:

17  $y = (x - 2)^{x+1}$

18  $y = \frac{x^{10} \sqrt{x^2 + 5}}{\sqrt[3]{8x^2 + 2}}$

19  $y = (\cos x)^x$

20 أجد إحداثيي النقطة الواقعة في الربع الأوّل على منحنى العلاقة:  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$  التي يكون ميل المماس عندها -0.5

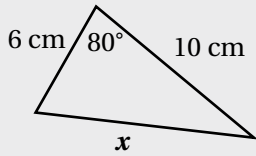
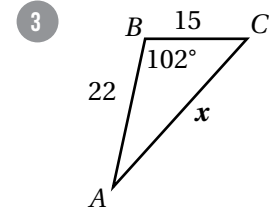
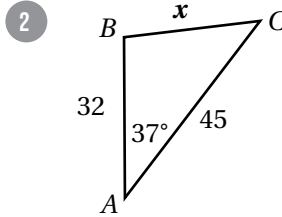
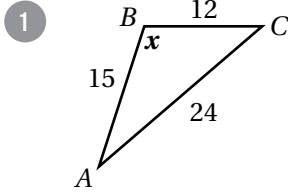
21 أجد نقطتي تقاطع منحنى العلاقة:  $x^2 + xy + y^2 = 7$  مع المحور  $x$ ، ثم أثبت أنّ مماسي منحنى العلاقة عند هاتين النقطتين متوازيان.

أختبر معلوماتي قبل البدء بدراسة الوحدة، وفي حال عدم تأكدي من الإجابة أستعين بالمثل المعطى.



حلّ المثلث باستعمال قانون جيب التمام

أجد قيمة  $x$  في كل من المثلثات الآتية:



$$x^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \times 6 \times 10 \cos 80^\circ$$

$$x^2 = 115.16$$

$$x = \pm \sqrt{115.16}$$

$$= \pm 10.7$$

مثال: أجد قيمة  $x$  في المثلث المجاور.

قانون جيب التمام

باستعمال الآلة الحاسبة

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

باستعمال الآلة الحاسبة

إذن،  $x = 10.7$ ؛ لأن  $x$  لا يُمكن أن تكون سالبة.

حلّ المعادلات المثلثية

أحلّ كل معادلة ممّا يأتي في الفترة  $[0, 2\pi)$ :

4  $\tan 2x + 1 = 0$

5  $2\sin^2 x + \sin x = 0$

6  $1 - \cos x = \frac{1}{2}$

مثال: أحلّ المعادلة:  $\sin 2x - \cos x = 0$  في الفترة  $[0, 2\pi)$ .

$$\sin 2x - \cos x = 0$$

المعادلة المعطاة

$$2 \sin x \cos x - \cos x = 0$$

متطابقات ضعف الزاوية

$$\cos x (2 \sin x - 1) = 0$$

بإخراج  $\cos x$  عاملاً مشتركاً

$$\cos x = 0 \quad \text{or} \quad 2 \sin x - 1 = 0$$

خاصية الضرب الصفري

$$\cos x = 0 \quad \text{or} \quad \sin x = \frac{1}{2}$$

بحلّ المعادلة الثانية لـ  $\sin x$

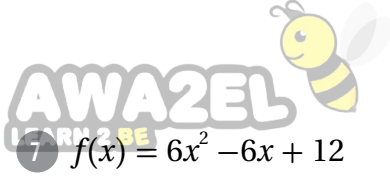
$$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

بحلّ كل معادلة لـ  $x$  في الفترة  $[0, 2\pi)$

تحديد فترات التزايد وفترات التناقص

أحدّد فترات التزايد وفترات التناقص لكل اقتران ممّا يأتي:



7  $f(x) = 6x^2 - 6x + 12$

8  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 3$

9  $f(x) = x^2 - 8x^4$

مثال: أحدّد فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران:  $f(x) = x^2 + 2x - 3$ .

الخطوة 1: أجد مشتقة الاقتران، ثم أحدّد أصفار المشتقة.

$$f'(x) = 2x + 2$$

مشتقة الاقتران

$$2x + 2 = 0$$

بمساواة المشتقة بالصفر

$$2x = -2$$

بطرح 2 من طرفي المعادلة

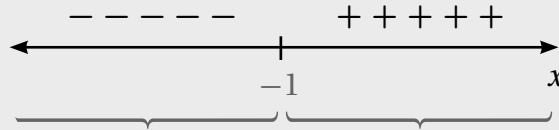
$$x = -1$$

بقسمة الطرفين على 2

إذن، صفر المشتقة هو:  $x = -1$ .

الخطوة 2: أدرس إشارة المشتقة.

أختار قيمة أقل من صفر المشتقة، ولتكن  $(-2)$ ، وأختار قيمة أخرى أكبر منه، ولتكن  $(0)$ ، ثم أحدّد إشارة المشتقة عند كلّ منهما.



	$x < -1$	$x > -1$
قيم الاختبار $(x)$	$x = -2$	$x = 0$
إشارة $f'(x)$	$f'(-2) < 0$	$f'(0) > 0$
تزايد الاقتران وتناقصه	متناقص ↘	متزايد ↗

إذن،  $f(x)$  متناقص في الفترة  $(-\infty, -1)$ ، ومتزايد في الفترة  $(-1, \infty)$ .

## المعدلات المرتبطة Related Rates



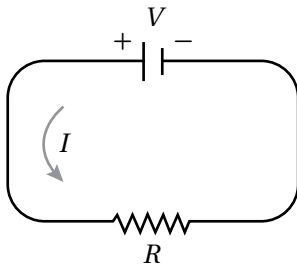
مُلَيَّ بالون كروي بالهيليوم بمُعدَّل  $8 \text{ cm}^3/\text{s}$ . أجد مُعدَّل تغيُّر نصف قُطر البالون في كلِّ من الحالات الآتية:

1 عندما يكون طول نصف قُطره  $12 \text{ cm}$ .

2 عندما يكون حجمه  $36 \pi \text{ cm}^3$  (أقرب إجابتي إلى أقرب جزء من مئة).

3 إذا مُلِيَ مَدَّة  $33.5 \text{ s}$ .

الوحدة 2: تطبيقات التفاضل.



4 تُمثِّل المعادلة:  $V = IR$  جُهد الدارة الكهربائيَّة (بالفولت) المُبيَّنة في الشكل المجاور، حيث  $I$  شِدَّة التيار بالأمبير، و  $R$  المقاومة بالأوم. إذا كان جُهد الدارة يزداد بمُعدَّل  $1 \text{ volt/s}$ ، وشِدَّة التيار تقلُّ بمُعدَّل  $\frac{1}{3} \text{ amp/s}$ ، فأجد مُعدَّل تغيُّر  $R$  عندما  $V = 12$ ،  $I = 2$ .

إذا كانت  $\theta$  الزاوية المحصورة بين الضلعين اللذين طول كلِّ منهما  $s$  في مثلث متطابق الضلعين، فأجيب عن السؤالين الآتيين تبعاً:

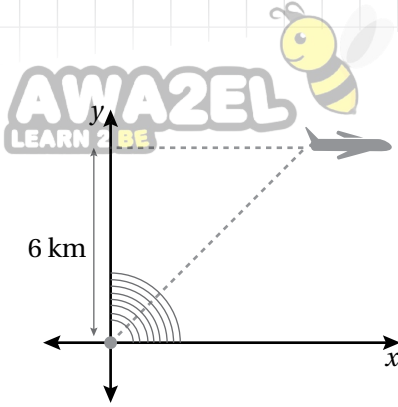
5 أثبت أنَّ مساحة المثلث تعطى بالمعادلة:  $A = \frac{1}{2} s^2 \sin \theta$ .

6 إذا كانت الزاوية  $\theta$  تزداد بمُعدَّل  $\frac{1}{2} \text{ rad/min}$ ، فأجد مُعدَّل تغيُّر مساحة المثلث عندما  $\theta = \frac{\pi}{6}$ ، علماً بأنَّ طول الضلعين المتطابقين ثابت.

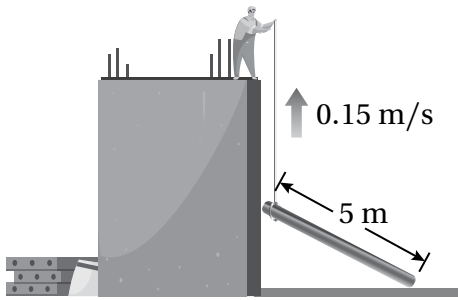
7 يتحرَّك جُسيْم على منحنى الاقتران:  $f(x) = \frac{10}{1+x^2}$ . إذا كان مُعدَّل تغيُّر الإحداثي  $x$  هو  $3 \text{ cm/s}$ ، فأجد مُعدَّل تغيُّر الإحداثي  $y$  عندما  $x = 20$ .



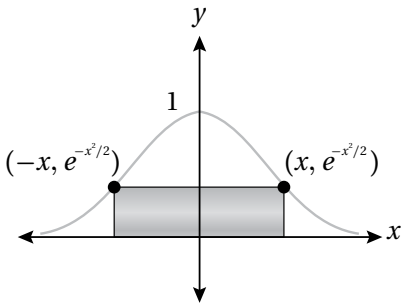
## المعدّلات المرتبطة Related Rates



8 حلقت طائرة على ارتفاع 6 km، ومَرَّت في أثناء تحليقها مباشرة فوق رادار كما في الشكل المجاور. وعندما أصبح البُعد بينها وبين الرادار 10 km، رصد الرادار مُعدّل تغيّر البُعد بينه وبين الطائرة، فكان 300 km/h. أجد سرعة الطائرة في هذه اللحظة.



9 بناء: يسحب عامل بناء لوحًا خشبيًا طوله 5 m إلى الأعلى بجانب مبنى لم يكتمل إنشاؤه بعد، وذلك باستعمال حبل رُبط به أحد طرفي اللوح كما في الشكل المجاور. إذا افترضت أن طرف اللوح المربوط بالحبل يتبع مسارًا عموديًا على جدار المبنى، وأن العامل يسحب الحبل بمُعدّل 0.15 m/s، بحيث يظلّ الطرف العلوي من اللوح مُلامسًا للجدار، فما سرعة انزلاق الطرف الآخر للوح على الأرض عندما يكون على بُعد 3 m من جدار المبنى؟

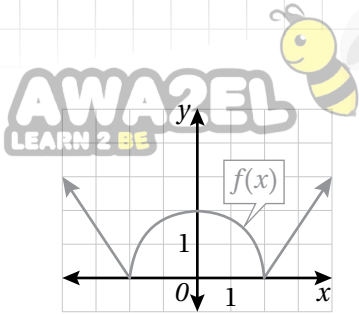


يُبيّن الشكل المجاور مستطيلًا مرسومًا داخل منحنى الاقتران:  $f(x) = e^{-x^2/2}$ . إذا كان  $x$  يتغيّر مع الزمن، مُغيّرًا معه موضع المستطيل، فأجيب عن السؤالين الآتيين تبعًا:

10 أجد مساحة المستطيل بدلالة  $x$ .

11 أجد مُعدّل تغيّر مساحة المستطيل عندما  $x = 4$  cm، وعندما  $\frac{dx}{dt} = 4$  cm/min.

## القيم القصوى والتقعّر Extreme Values and Concavity



1 أجد القيم الحرجة والقيم القصوى المحلية والمطلقة (إن وجدت) للاقتران  $f(x)$  الممثل بيانياً في الشكل المجاور.

أجد القيمة العظمى المطلقة والقيمة الصغرى المطلقة (إن وجدت) لكل اقتران مما يأتي في الفترة المعطاة:

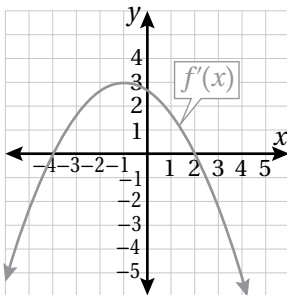
- 2  $f(x) = 1 + \cos^2 x, [\frac{\pi}{4}, \pi]$       3  $f(x) = (x^2 - 4)^3, [-2, 3]$   
 4  $f(x) = x - 2 \sin x, [-2\pi, 2\pi]$       5  $f(x) = x \ln(x+3), [0, 3]$   
 6  $f(x) = x + \frac{4}{x}, [-8, -1]$       7  $f(x) = 5e^x - e^{2x}, [-1, 2]$

أجد فترات التزايد وفترات التناقص، ثم أجد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) لكل اقتران مما يأتي:

- 8  $f(x) = \sin x + \cos x, [0, 2\pi]$       9  $f(x) = \frac{x}{x-5}$   
 10  $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$       11  $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 4)$   
 12  $f(x) = e^{-x^2}$       13  $f(x) = 2^{x^2 - 3}$

أجد فترات التقعّر إلى الأعلى وإلى الأسفل ونقاط الانعطاف (إن وجدت) لمنحنى كل اقتران مما يأتي:

- 14  $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 12$       15  $f(x) = x^3 - 3x$       16  $f(x) = (2 + 2x - x^2)^2$   
 17  $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$       18  $f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}$       19  $f(x) = 2x - \tan x, (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$



أستعمل التمثيل البياني المجاور لمنحنى  $f'(x)$  لإيجاد كل مما يأتي:

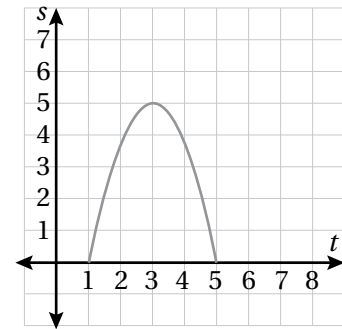
- 20 قيم  $x$  التي يكون عندها للاقتران  $f$  قيم قصوى محلية، مبيّناً نوعها.  
 21 فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران  $f$ .

أجد القيم القصوى المحلية لكل اقتران مما يأتي، مستعملاً اختبار المشتقة الثانية (إن أمكن):

- 22  $f(x) = 2 \sin x + \cos 2x, [0, 2\pi]$       23  $f(x) = x^3 + \frac{48}{x}$       24  $f(x) = (x^2 - 3)e^x$

## القيم القصوى والتقعّر Extreme Values and Concavity

25 إذا كان للاقتران:  $f(x) = ax^2 + bx + c$  قيمة عظمى محلية عند النقطة  $(3, 12)$ ، وقطع المحور  $y$  في النقطة  $(0, 1)$ ، فأجد قيمة كل من الثوابت:  $a$ ،  $b$ ، و  $c$ .



يُمثل الاقتران  $s(t)$  المُبيّن منحناه في الشكل المجاور موقع جسم يتحرّك في مسار مستقيم، حيث  $s$  الموقع بالأمتار، و  $t$  الزمن بالثواني:

26 أجد قيم  $t$  التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

27 ما الفترات الزمنية التي يتحرّك فيها الجسم في الاتجاه الموجب؟ وما الفترات الزمنية التي يتحرّك فيها الجسم في الاتجاه السالب؟

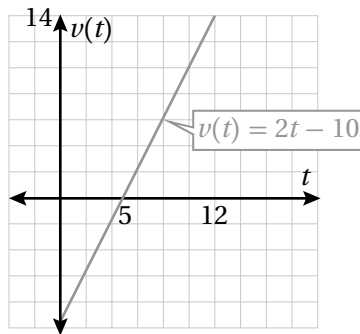
28 ما الفترات الزمنية التي تزايد فيها سرعة الجسم؟ وما الفترات الزمنية التي تناقص فيها سرعة الجسم؟

إذا كان الاقتران:  $f(x) = 3x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ ، فأجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تبعاً:

29 إذا كان لمنحنى الاقتران  $f$  مماس أفقي عند كل من النقطة  $(-2, -73)$  والنقطة  $(0, -9)$ ، فأجد قيمة كل من الثوابت:  $a$ ،  $b$ ،  $c$ ، و  $d$ .

30 إذا وُجِدَت نقطة ثالثة على منحنى الاقتران لها مماس أفقي، فأجد إحداثيي هذه النقطة.

31 أصنّف كلّاً من النقاط الثلاث إلى صغرى محلية، وعظمى محلية (إن أمكن).



يُمثل الاقتران  $v(t)$  المُبيّن منحناه في الشكل المجاور سرعة جسم يتحرّك في مسار مستقيم، حيث  $v$  السرعة بالمتر لكل ثانية، و  $t$  الزمن بالثواني:

32 أجد قيم  $t$  التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

33 ما الفترات الزمنية التي يتحرّك فيها الجسم في الاتجاه الموجب؟ وما الفترات الزمنية التي يتحرّك فيها الجسم في الاتجاه السالب؟

34 ما الفترات الزمنية التي تزايد فيها سرعة الجسم؟ وما الفترات الزمنية التي تناقص فيها سرعة الجسم؟

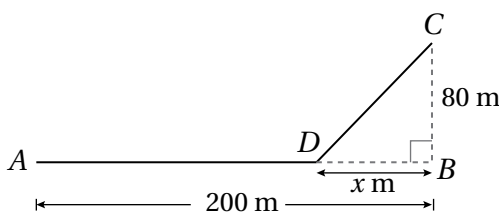
35 إذا كان للاقتران:  $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$  قيمة قصوى محلية عند النقطة  $(2, 11)$ ، ونقطة انعطاف عند النقطة  $(1, 5)$ ، فأجد قيمة كل من الثوابت:  $a$ ،  $b$ ، و  $c$ .

## تطبيقات القيم القصوى Optimization Problems



1 إذا كان  $a$  cm و  $b$  cm هما طولَي ضلعين ثابتين في مثلث، وكانت الزاوية بينهما  $\theta$ ، فأجد قيمة  $\theta$  التي تجعل مساحة المثلث أكبر ما يُمكن.

2 ترغب شركة في تصميم خزان من الفولاذ الرقيق المُقاوم للصدأ على شكل متوازي مستطيلات، حجمه  $500 \text{ m}^3$ ، وقاعدته مربعة الشكل، ومفتوح من الأعلى. أجد الأبعاد التي تجعل مساحة سطح الخزان أقل ما يُمكن.



يتمدُّ مسار للركض شرقاً من النقطة  $A$  إلى النقطة  $B$  مسافة  $200 \text{ m}$ ، وتقع النقطة  $C$  على بُعد  $80 \text{ m}$  شمال النقطة  $B$ .

انطلق راكب على دراجة من النقطة  $A$  إلى النقطة  $D$  بسرعة  $10 \text{ m/s}$ ، حيث تقع النقطة  $D$  على بُعد  $x$  متراً غرب النقطة  $B$ ، ثم سار في طريق مستقيم وعر من النقطة  $D$  إلى النقطة  $C$  بسرعة  $6 \text{ m/s}$ .

3 أجد اقتراناً بدلالة  $x$  يُمثّل الزمن الذي سيستغرقه راكب الدراجة في الانتقال من النقطة  $A$  إلى النقطة  $C$ .

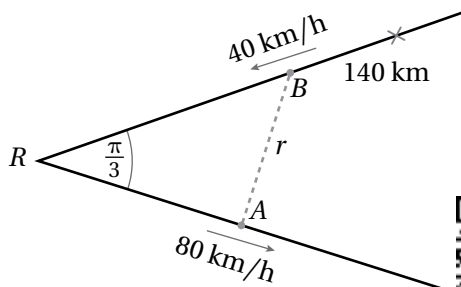
4 بافتراض أن  $x$  قيمة مُتغيِّرة، أجد قيمة  $x$  التي يكون عندها الزمن اللازم للانتقال من النقطة  $A$  إلى النقطة  $C$  أقل ما يُمكن.



سلك يبلغ طوله  $24 \text{ cm}$ ، ويراد قُصُّه إلى قطعتين لصنع دائرة ومربع:

5 أجد مكان القُصِّ، بحيث يكون مجموع مساحتي الدائرة والمربع أصغر ما يُمكن.

6 أجد مكان القُصِّ، بحيث يكون مجموع مساحتي الدائرة والمربع أكبر ما يُمكن.



7 يلتقي طريقان مستقيمان عند النقطة  $R$  بزاوية قياسها  $\frac{\pi}{3}$ . إذا انطلقت

السيارة  $A$  من النقطة  $R$  على أحد الطريقين بسرعة  $80 \text{ km/h}$ ، وفي الوقت نفسه انطلقت السيارة  $B$  بسرعة  $40 \text{ km/h}$  على الطريق الآخر

في اتجاه النقطة  $R$  من نقطة تبعد عنها مسافة  $140 \text{ km}$ ، فأجد أقصر مسافة مُمكنة بين السيارتين.



أختبر معلوماتي قبل البدء بدراسة الوحدة، وفي حال عدم تأكدي من الإجابة أستعين بالمثال المعطى.

حل معادلات كثيرات الحدود

أحلُّ كلاً من المعادلتين الآتيتين:



1  $x^2 - 4x - 12 = 0$

2  $2x^3 - 6x^2 + 7x - 60 = 0$

مثال: أحلُّ المعادلة:  $3x^3 + 7x^2 - 9x = 5x + 24$

أستعمل نظرية الأصفار النسبية لإيجاد أحد أصفار المعادلة على النحو الآتي:

$3x^3 + 7x^2 - 9x = 5x + 24$  المعادلة المعطاة

$3x^3 + 7x^2 - 14x - 24 = 0$  بطرح  $(5x + 24)$  من طرفي المعادلة

$3(2)^3 + 7(2)^2 - 14(2) - 24 \stackrel{?}{=} 0$  بتعويض  $x = 2$

$0 = 0 \checkmark$  بالتبسيط

إذن،  $x = 2$  هو أحد أصفار المعادلة، و  $x - 2$  هو أحد عوامل المقدار:  $(3x^3 + 7x^2 - 14x - 24)$ .

لإيجاد العامل الآخر، أقسم هذا المقدار على  $(x - 2)$ :

	$3x^2$	$13x$	$12$	
$x$	$3x^3$	$13x^2$	$12x$	$0$
$-2$	$-6x^2$	$-26x$	$-24$	

$(x-2)(3x^2 + 13x + 12) = 0$  بالتحليل وفق نتيجة القسمة

$3x^2 + 13x + 12 = 0$  or  $x - 2 = 0$  خاصية الضرب الصفري

$3x^2 + 13x + 12 = 0$  المعادلة التربيعية الناتجة

$(3x + 4)(x + 3) = 0$  بالتحليل إلى العوامل

$x + 3 = 0$ , or  $3x + 4 = 0$  خاصية الضرب الصفري

$x = -3$ , or  $x = \frac{-4}{3}$  بحل كل من المعادلتين

إذن، يوجد للمعادلة 3 حلول (أصفار)، هي:  $2, -3, \frac{-4}{3}$ .

تمثيل المتجهات في المستوى الإحداثي والعمليات عليها



3 إذا كانت  $A(4, 2)$ ، وكانت  $B(2, 6)$ ، فأكتب الصورة الإحداثية للمتجه  $\vec{AB}$ ، ثم أجد مقداره.

4 إذا كانت  $A(-2, 3)$ ، وكانت  $B(0, 7)$ ، فأكتب الصورة الإحداثية للمتجه  $\vec{AB}$ ، ثم أجد مقداره.

**مثال:** إذا كانت  $A(-5, 4)$ ، وكانت  $B(2, 7)$ ، فأكتب الصورة الإحداثية للمتجه  $\vec{AB}$ ، ثم أجد مقداره.

$$\vec{AB} = \langle x_B - x_A, y_B - y_A \rangle \quad \text{صيغة الصورة الإحداثية للمتجه}$$

$$= \langle 2 - (-5), 7 - 4 \rangle = \langle 7, 3 \rangle \quad \text{بتعويض } A(-5, 4) \text{ و } B(2, 7) \text{، والتبسيط}$$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \quad \text{صيغة مقدار المتجه } \mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{7^2 + 3^2} \quad \text{بتعويض } \vec{a} = \vec{AB} = \langle 7, 3 \rangle$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{58} \quad \text{بالتبسيط}$$

إذن،  $\vec{AB} = \langle 7, 3 \rangle$ ، ومقداره هو  $\sqrt{58}$

معادلة الدائرة

5 أكتب معادلة دائرة مركزها  $(-1, 8)$ ، وطول نصف قُطرها 5 وحدات.

6 أكتب معادلة دائرة مركزها  $(-7, 13)$ ، وتمرُّ بالنقطة  $(5, 4)$ .

**مثال:** أكتب معادلة دائرة مركزها  $(3, -4)$ ، وتمرُّ بنقطة الأصل.

أجد طول نصف القُطر  $r$ ؛ وهو المسافة بين المركز ونقطة تمرُّ بها الدائرة:

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \text{صيغة المسافة بين نقطتين}$$

$$= \sqrt{(3 - 0)^2 + (-4 - 0)^2} \quad \text{بتعويض } (x_1, y_1) = (0, 0), (x_2, y_2) = (3, -4)$$

$$= \sqrt{9 + 16} = 5 \quad \text{بالتبسيط}$$

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \quad \text{صيغة معادلة دائرة مركزها } (h, k) \text{، ونصف قُطرها } r$$

$$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25 \quad \text{بتعويض } r = 5 \text{، } (h, k) = (3, -4)$$

حلّ نظام متباينات خطية



7 أمثل بيانياً منطقة حلّ نظام المتباينات الآتي، ثم أتحدّق من صحة الحلّ:

$$4x + 3y \leq 12$$

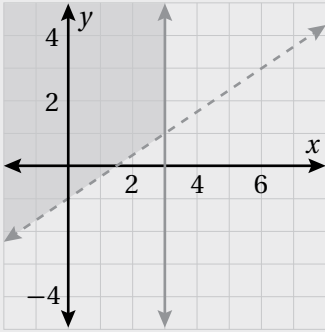
$$y - 2x < 0$$

مثال: أمثل بيانياً منطقة حلّ نظام المتباينات الآتي، ثم أتحدّق من صحة الحلّ:

$$x \leq 3$$

$$y > \frac{2}{3}x - 1$$

الخطوة 1: أمثل بيانياً المستقيمين الحدوديين.



أمثل بيانياً المستقيمين الحدوديين:  $x = 3$ ، و  $y = \frac{2}{3}x - 1$  في المستوى الإحداثي نفسه. وبما أنّه لا توجد مساواة في رمز المتباينة الثانية، فإنني أرسم المستقيم:  $y = \frac{2}{3}x - 1$  مُتَقَطَّعًا. أمّا المستقيم:  $x = 3$  فأرسمه متصلًا؛ نظرًا إلى وجود مساواة في رمز المتباينة الأولى كما في الشكل المجاور.

الخطوة 2: أحدّد منطقة التقاطع بين حلّي المتباينتين.

أظلل منطقة الحلّ لكل متباينة. ومن ثمّ تكون المنطقة المشتركة بين منطقتي حلّ المتباينتين هي حلّ نظام المتباينات كما في الشكل المجاور.

الخطوة 3: أتحدّق من صحة الحلّ.

أتحدّق من صحة الحلّ باختيار زوج مُرتّب يقع في منطقة حلّ النظام، مثل  $(0, 2)$ ، ثم أعوضه في متباينات النظام جميعها:

$$x \leq 3$$

المتباينة الأولى

$$0 \stackrel{?}{\leq} 3$$

بالتعويض

$$0 \leq 3 \quad \checkmark$$

العبارة صحيحة

$$y > \frac{2}{3}x - 1$$

المتباينة الثانية

$$2 \stackrel{?}{>} \frac{2}{3}(0) - 1$$

بالتعويض

$$2 > -1 \quad \checkmark$$

العبارة صحيحة

## الأعداد المركبة Complex Numbers



أجد قيمة الجذر الرئيس في كلِّ ممَّا يأتي بدلالة  $i$ :

1  $\sqrt{-128}$

2  $\sqrt{-14}$

3  $\sqrt{-81}$

4  $\sqrt{-125}$

5  $3\sqrt{-32}$

6  $\sqrt{\frac{-28}{9}}$

7  $i^7$

8  $i^{12}$

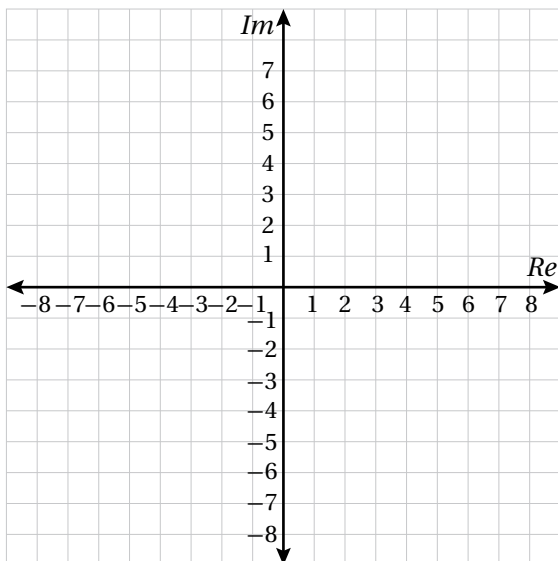
9  $i^{98}$

10  $i^{121}$

أجد ناتج كلِّ ممَّا يأتي في أبسط صورة، مُفترضًا أنَّ  $i = \sqrt{-1}$ :

11 أملأ الفراغ بما هو مُناسب في الجدول الآتي:

$z$	$Re(z)$	$Im(z)$
$-4 + 6i$		
$-3$		
$8i$		
	$-8$	$3$



أمثل كلاً من الأعداد المركبة الآتية في المستوى المركب المجاور:

12  $5$

13  $-4$

14  $4i$

15  $-3i$

16  $4 - 2i$

17  $-3 + 5i$

18  $-3 - 5i$

19  $i$

20  $7 - 4i$

21  $-5 + 4i$

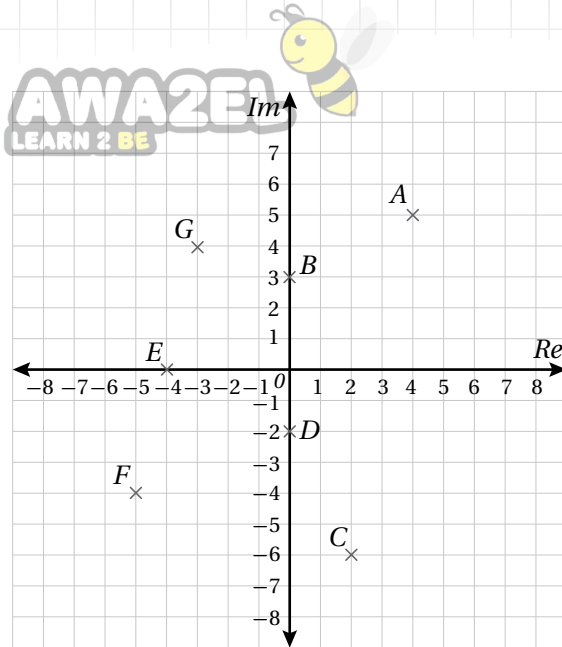
22  $-7 - 2i$

23  $5 + 5i$



# الأعداد المركبة

## Complex Numbers



24 أكتب كلاً من الأعداد المركبة المُمثَّلة بيانياً في المستوى المركَّب المجاور بالصورة القياسية، ثم أجد مقياسه وسعته.

أجد قيمة  $x$ ، وقيمة  $y$  الحقيقيتين اللتين تجعلان كل معادلة مما يأتي صحيحة:

25  $(2x + 1) + 4i = 7 - i(y - 3)$

26  $i(2x - 4y) + x + 3y = 26 + 32i$

أكتب كلاً من الأعداد المركبة الآتية بالصورة المثلثية:

27 6

28  $-5i$

29  $-2\sqrt{3} - 2i$

30  $-1 + i$

31  $4 - 2i$

32  $2 + 8i$

أكتب كلاً من الأعداد المركبة الآتية بالصورة القياسية:

33  $6(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$

34  $12(\cos \pi + i \sin \pi)$

35  $8(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})$

36  $3(\cos \frac{-\pi}{4} + i \sin \frac{-\pi}{4})$

أجد مُرافق كلٍّ من الأعداد المركبة الآتية، ثم أمثلها جميعاً في المستوى المركَّب نفسه:

37  $-1 - i\sqrt{5}$

38  $9 - i$

39  $2 - 8i$

40  $-9i$

41 12

42  $i - 8$

## العمليات على الأعداد المركبة Operations With Complex Numbers



أجد ناتج كلِّ ممَّا يأتي، ثم أكتبه بالصورة القياسية:

1  $(6 + 8i) + (3 - 5i)$

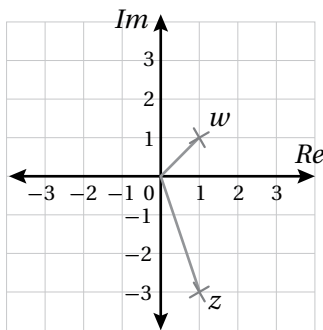
2  $(-6 - 3i) - (-8 + 2i)$

3  $4i(7 - 3i)$

4  $(8 - 6i)(8 + 6i)$

5  $(-2 + 2i\sqrt{3})^3$

6  $\frac{(2 + i)(1 - i)}{4 - 3i}$



مُعتمداً المستوى المُركَّب المجاور الذي يُبيِّن العددين المُركَّبين  $w$  و  $z$ ،  
أُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تبعاً:

7 أكتب كلاً من العددين  $w$  و  $z$  بالصورة القياسية.

8 أجد السعة والمقياس لكلِّ من العددين المُركَّبين  $wz$  و  $\frac{w}{z}$ .

9 أمثل العددين  $wz$  و  $\frac{w}{z}$  في المستوى المُركَّب.

إذا كان:  $z = -3 + 3i\sqrt{3}$ ، وكان:  $\text{Arg}(w) = -\frac{\pi}{6}$ ،  $|w| = 18$ ، فأجد ناتج كلِّ ممَّا يأتي:

10  $\text{Arg}(z)$

11  $|z|$

12  $\text{Arg}(zw)$

13  $|zw|$

أجد الجذرين التربيعيين لكل عدد مُركَّب ممَّا يأتي:

14  $-15 + 8i$

15  $-7 - 24i$

16  $105 + 88i$

17 إذا كان:  $\omega = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، فأكتبه بالصورة المثلثية، مُبيناً أنَّ  $\omega^3 = -1$ .

## العمليات على الأعداد المركبة

### Operations With Complex Numbers



إذا كان:  $z_1 = 3(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5})$ ، وكان:  $z_2 = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$ ، فأجد كلاً مما يأتي بالصورة المثلثية:

18  $z_1 z_2$

19  $z_1(\bar{z}_1)$

20  $z_2^3$

21  $\frac{z_2}{z_1}$

22 إذا كان:  $\left| \frac{u-9i}{3+i} \right| = 5$ ، فما قيمة  $u$ ، علماً بأنها سالبة؟

23 إذا كان:  $(1+4i)$  جذراً للمعادلة:  $x^3 + 5x^2 + ax + b = 0$ ، فأجد قيمة كل من العددين الحقيقيين  $a$ ، و  $b$ ، والجذرين الآخرين لهذه المعادلة.

24 أجد قيمتي الجذر التربيعي:  $\sqrt{\frac{362-153i}{2-3i}}$ .

25 أثبت أن أحد الجذرين التربيعيين للعدد:  $(7+24i)$  هو  $(4+3i)$ ، ثم أجد الجذر التربيعي الآخر.

26 أثبت أن سعة  $(7+24i)$  تساوي ضعف سعة  $(4+3i)$ .

27 أثبت أن مقياس  $(7+24i)$  يساوي مربع مقياس  $(4+3i)$ .

28 إذا كان:  $1-i = \frac{a}{3+i} + \frac{b}{1+2i}$ ، فأجد قيمة كل من العددين الحقيقيين  $a$ ، و  $b$ .

أحل كل معادلة مما يأتي:

29  $2z^3 = 8z^2 + 13z - 87$

30  $z^3 + 4z^2 - 10z + 12 = 0$

31 إذا كان:  $-2+i$  هو أحد جذور المعادلة:  $z^4 + az^3 + bz^2 + 10z + 25 = 0$ ، فأجد قيمة  $a$ ، وقيمة  $b$ ، ثم أجد جميع الجذور الحقيقية والجذور المركبة للمعادلة.

# المحل الهندسي في المستوى المركَّب

## Locus in the Complex Plane



أجد المحل الهندسي الذي تُمثِّله كل معادلة ممَّا يأتي، ثم أمثِّله في المستوى المركَّب، وأجد معادلته الديكارتية:

1  $|z + 5i| - 3 = 1$

2  $|z - 2 + 8i| = 13$

3  $|z + 4 - 3i| = 7$

4  $|z + 3 + 5i| = |z - i|$

5  $\frac{|z + 3i|}{|z - 6i|} = 1$

6  $|6 - 2i - z| = |z + 4i|$

أجد المحل الهندسي الذي تُمثِّله كلُّ من المعادلات الآتية، ثم أمثِّله في المستوى المركَّب:

7  $\text{Arg}(z + 3) = \frac{\pi}{4}$

8  $\text{Arg}(z + 3 - 2i) = \frac{2\pi}{3}$

9  $\text{Arg}(z + 2 + 2i) = -\frac{\pi}{4}$

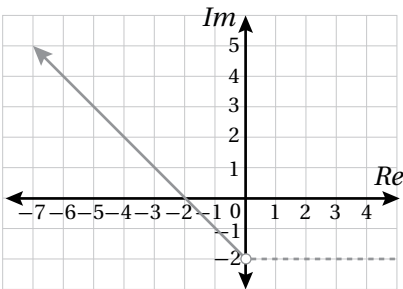
أمثِّل في المستوى المركَّب المحل الهندسي الذي تُمثِّله كل متباينة ممَّا يأتي:

10  $0 \leq \arg(z - 3i) \leq \frac{3\pi}{4}$

11  $|z - 2i| > 2$

12  $|z| \leq 8$

13 أمثِّل في المستوى المركَّب المحل الهندسي للنقاط التي تُحقِّق المتباينة:  $|z - 1 + i| \leq 1$ ، والمتباينة:  $-\frac{\pi}{3} < \text{Arg}(z) < 0$ .



14 أكتب (بدلالة  $z$ ) معادلة المحل الهندسي لمجموعة النقاط المُمثَّلة في المستوى المركَّب المجاور.

إذا كانت:  $u = -7 + 7i$ ، وكانت:  $v = 7 + 7i$ ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تبعاً:

15 أثبت أن قياس الزاوية الصغرى المحصورة بين  $u$  و  $v$  هو  $\frac{\pi}{2}$

16 أجد بصيغة:  $|z - z_1| = r$  معادلة الدائرة التي تمرُّ بنقطة الأصل، والنقطتين اللتين تُمثِّلان العددين المركَّبين  $u$ ، و  $v$ .

# المحل الهندسي في المستوى المركب

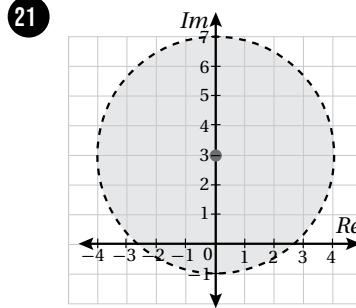
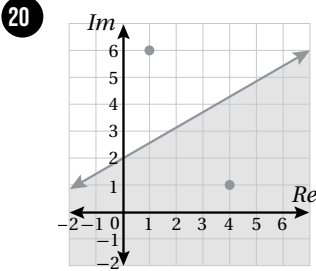
## Locus in the Complex Plane

17 إذا كانت:  $u = -1 - i$ ، فأجد  $u^2$ ، ثم أمثل في المستوى المركب المحل الهندسي للنقاط التي تُحقق المتباينة:  $|z| < 2$ ، والمتباينة:  $|z - u^2| < |z - u|$ .

18 أمثل في المستوى المركب المعادلة:  $|z - 3i| = 13$ ، والمعادلة:  $\text{Arg}(z - 4) = \frac{\pi}{4}$ ، ثم أجد العدد المركب  $z$  الذي يُحققهما معًا.

19 أمثل في المستوى المركب المعادلة:  $|z - 3 - 2i| = 5$ ، والمعادلة:  $|z - 6i| = |z - 7 + i|$ ، ثم أجد العددين المركبين اللذين يُحققان المعادلتين معًا.

أكتب (بدلالة  $z$ ) متباينة المحل الهندسي الذي تُمثله المنطقة المُظللة في كلِّ مما يأتي:



22 أكتب (بدلالة  $z$ ) نظام متباينات يُمثل المحل الهندسي الذي تُمثله المنطقة المُظللة في الشكل الآتي:

