Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

طريق التفوق

في

الرياضيات العلمي

الوحدة الثانية

تطبيقات التفاضل

2006

إعداد

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

Dr. Khaled jalal

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad
Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad
Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

0799948198

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

الفهرس

رقم الدرس	أسم الدرس	رقم الصفحة
الأول	المعدلات المرتبطة بالزمن (كتاب الطالب)	4
الأول	المعدلات المرتبطة بالزمن (كتاب التمارين)	11
الثاني	القيم القصوى و التقعر (كتاب الطالب)	13
الثاني	القيم القصوى و التقعر (كتاب التمارين)	19
الثالث	تطبيقات القيم القصوى (كتاب الطالب)	22
الثالث	تطبيقات القيم القصوى (كتاب التمارين)	29
	أختبار نهاية الوحدة	30

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

الدرس الاول

المعدلات المرتبطة بالزمن

كتاب الطالب

مثال 1 :

عند سقوط قطرة ماء على مسطح مائي ، تتكون موجات دائرية متحدة المركز . إذا كان نصف قطر إحدى الدوائر يزداد بمعدل $3\ cm/s$ ، فأجد كلا مما يأتي :

1) معدل تغير محيط الدائرة عندما يكون نصف قطرها $5\ cm$.

2) معدل تغير مساحة الدائرة عندما يكون نصف قطرها $9\ cm$.

أتحقق من فهمي صفحة (76) :

تنفخ ماجدة بالونا على شكل كرة فيزداد حجمه بمعدل $80\ cm^3/s$. أجد معدل زيادة نصف قطر البالون عندما يكون نصف القطر $6\ cm$.

مثال 2 :

تتحرك السيارة A في اتجاه الغرب بسرعة $80\ km/h$ ، و تتحرك السيارة B في اتجاه الشمال بسرعة $100\ km/h$ ، و هما تتجهان نحو تقاطع مروري . أجد معدل تغير البعد بين السيارتين عندما تكون السيارة A و السيارة B على بعد $0.3\ km$ و $0.4\ km$ (على الترتيب) من التقاطع .

أتحقق من فهمي صفحة (78) :

تحركت السيارة A و السيارة B في الوقت نفسه ، و من النقطة نفسها ، بحيث اتجهت السيارة A نحو الشمال بسرعة $45\ km/h$ ، و اتجهت السيارة B نحو الشرق بسرعة $40\ km/h$. أجد معدل تغير البعد بين السيارتين بعد ساعتين من انطلاقهما .

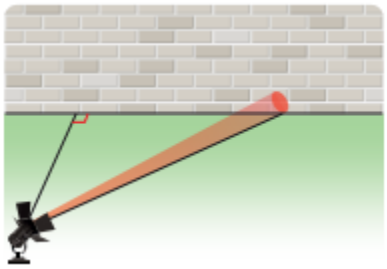
مثال 3 :

رصدت كاميرا مثبتة عند مستوى سطح الأرض لحظة إطلاق صاروخ رأسيا إلى الأعلى ، و قد أعطي ارتفاعه بالاقتران : $s(t) = 50t^2$ ، حيث s الموقع بالأقدام ، و t الزمن بالثواني . إذا كانت الكاميرا تبعد مسافة 2000 ft عن منصة الإطلاق ، فأجد معدل تغير زاوية ارتفاع الصاروخ بعد 10 ثوان من انطلاقه .

أتحقق من فهمي صفحة (80):

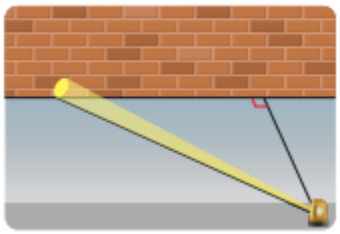
أمسك ولد بكرة خيط طائرة ورقية تحلق على ارتفاع $50\ m$ فوق سطح الأرض ، و تتحرك افقيا بسرعة $2\ m/s$. أجد معدل تغير الزاوية بين الخيط و المستوى الأفقي عندما يكون طول الخيط $100\ m$ ، علما بأن ارتفاع يد الولد عن الأرض $1.5\ m$.

مثال 4 :



يدور مصباح مثبت بالأرض حول نفسه 3 دورات في الدقيقة و يبعد مسافة $4\ m$ عن جدار مستقيم كما بالشكل المجاور . أجد سرعة تحرك بقعة ضوء المصباح على الجدار عندما تكون على بعد $4\ m$ من أقرب نقطة إلى المصباح على الجدار أثناء حركتها مبتعدة عن هذه النقطة .

أتحقق من فهمي صفحة (84):

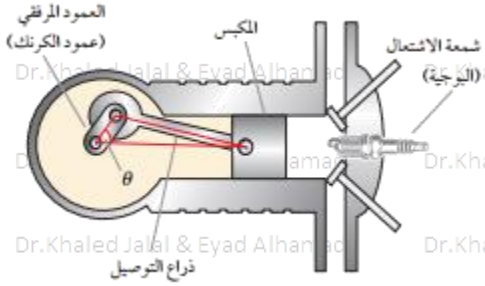


يدور مصباح مثبت بالأرض حول نفسه 4 دورات في الدقيقة و يبعد مسافة $3\ m$ عن جدار مستقيم كما بالشكل المجاور . أجد سرعة تحرك بقعة ضوء المصباح على الجدار عندما تكون على بعد $1\ m$ من أقرب نقطة إلى المصباح على الجدار أثناء حركتها مقتربة من هذه النقطة .

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

مثال 5 :

يبين الشكل المجاور:

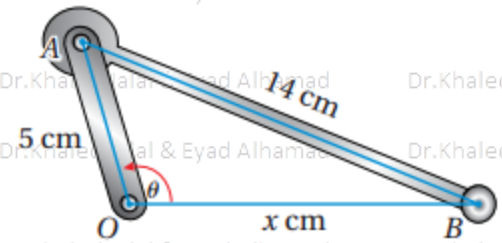


محرك سيارة يحتوي على ذراع توصيل طولها $7\ in$ ، وهي مثبتة بعمود مرفقي طوله $3\ in$.

إذا دار العمود المرفقي عكس اتجاه دوران عقارب الساعة 200 دورة في الدقيقة فما سرعة المكبس عندما $\theta = \frac{\pi}{3}$ ؟

أتحقق من فهمي صفحة (84):

في المخطط المجاور :



تمثل $\overline{AB}$ ذراع توصيل مكبس طولها $14\ cm$ في محرك سيارة ، و تمثل $\overline{OA}$ عمودا مرفقيا طوله $5\ cm$ ، وهو مثبت بطرف ذراع التوصيل و يدور حول النقطة O التي تبعد مسافة $x\ cm$ عن المكبس . أجد سرعة دوران العمود المرفقي عندما يكون المكبس على بعد $11\ cm$ من النقطة O ، و يتحرك مقتربا منها بسرعة مقدارها $120\ cm/s$ في تلك اللحظة .

مثال 6 :

خزان ماء على شكل مخروط دائري قائم ، ارتفاعه $5\ m$ ، و نصف قطر قاعدته $2\ m$ ، و رأسه إلى الأسفل . تسرب الماء من الخزان بمعدل $\frac{1}{12}\ m^3/min$. ما معدل تغير ارتفاع الماء في الخزان عندما يكون ارتفاعه $2\ m$ ؟

أتحقق من فهمي صفحة (86):

خزان ماء على شكل مخروط دائري قائم رأسه إلى الأسفل ، و ارتفاعه $10\ m$ ، و نصف قطر قاعدته $5\ m$. صب الماء في الخزان بمعدل $\pi\ m^3/min$. ما معدل تغير ارتفاع الماء في الخزان عندما يكون ارتفاعه $8\ m$.

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

مسألة اليوم

تستعمل المعادلة : $s = \frac{\sqrt{h\,m}}{19}$ لحساب المساحة التقريبية لسطح جسم الإنسان ، حيث h طوله بالسنتيمتر ، و m كتلته بالكيلو غرام .

يتبع خالد حمية غذائية تجعله يخسر من كتلته $2\ kg$ شهريا ما معدل النقصان في مساحة سطح جسمه عندما تصبح كتلته $70\ kg$ ، علما بأن طوله $170\ cm$ ؟

أتدرب و أحل المسائل صفحة (86) ، (87) ، (88) ، (89) :

يزداد طول أحد أضلاع مستطيل بمعدل $2\ cm/s$ ، ويقل طول ضلعه الأخر بمعدل $3\ cm/s$ ، بحيث يحافظ المستطيل على شكله ، و في لحظة معينة بلغ طول الضلع الأول $20\ cm$ ، و طول الضلع الثاني $50\ cm$:

1) ما معدل تغير مساحة المستطيل في تلك اللحظة ؟
2) ما معدل تغير محيط المستطيل في تلك اللحظة ؟
3) ما معدل تغير طول قطر المستطيل في تلك اللحظة ؟
4) أي الكميات في المسألة متزايدة ؟ أيها متناقصة ؟ أبرر إجابتي .

مكعب طول ضلعه $10\ cm$. بدأ المكعب يتمدد ، فزاد طول ضلعه بمعدل $6\ cm/s$ ، و ظل محافظا على شكله :

5) أجد معدل تغير حجم المكعب بعد $4\ s$ من بدء تمدده .
6) أجد معدل تغير مساحة سطح المكعب بعد $6\ s$ من بدء تمدده .

خزان أسطواني الشكل ، ارتفاعه $15\ m$ ، و قطر قاعدته $2\ m$. ملئ الخزان بالوقود بمعدل $500\ L/min$:

7) أجد معدل أرتفاع الوقود في الخزان عند أي لحظة .
8) أجد معدل تغير المساحة الجانبية عند أي لحظة .

9) يمثل الاقتران : $T(x) = \frac{200}{1+x^2}$ درجة الحرارة (بالسليسيوس) التي يشعر بها شخص على بعد x مترا من النار . إذا كان الشخص يبتعد عن النار بمعدل $2\ m/s$ ، فاجد سرعة تغير درجة الحرارة التي يشعر بها الشخص عندما يكون على بعد $5\ m$ من النار .

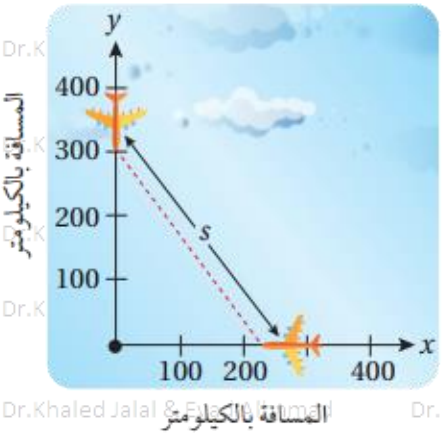
يسقط الرمل من حزام ناقل بمعدل $10\ m^3/min$ على قمة كومة مخروطية الشكل . إذا كان ارتفاع الكومة يساوي دائما ثلاثة أثمان طول قطر قاعدتها ، فأجد كلا مما يأتي :

10) سرعة تغير ارتفاع الكومة عندما يكون ارتفاعها $4\ m$.

11) سرعة تغير طول نصف قطر قاعدة الكومة عندما يكون ارتفاعها $4\ m$.

12) سرعة تغير مساحة قاعدة الكومة عندما يكون ارتفاعها $4\ m$.

رصد مراقب الحركة الجوية في أحد المطارات طائرتين تحلقان على الارتفاع نفسه ، و تقتربان من نقطة التقاء مسار حركتيهما في زاوية قائمة كما بالشكل المجاور .



كانت الطائرة الأولى تسير بسرعة $450\ km/h$ في حين كانت الطائرة الثانية تسير بسرعة $600\ km/h$:

13) أجد معدل تغير المسافة بين الطائرتين في اللحظة التي تبعد فيها الطائرة الأولى مسافة $255\ km$ عن نقطة التقاء مسار حركة الطائرتين ، في حين تبعد الطائرة الثانية مسافة $450\ km$ عن النقطة نفسها .

14) هل يجب على مراقب الحركة الجوية توجيه إحدى الطائرتين لاتخاذ مسار مختلف ؟ أبرر إجابتي .

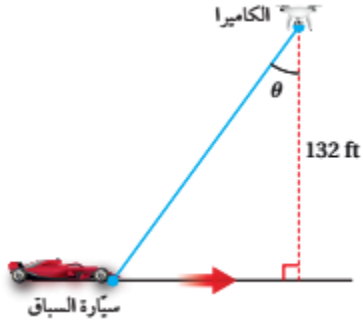
15) تحركت دراجتان في الوقت نفسه ، و من النقطة نفسها ، على طريقين مستقيمين ، قياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{3}\ rad$. إذا كانت سرعة الدراجة الأولى $15\ km/h$ ، و سرعة الدراجة الثانية $20\ km/h$ ، فأجد سرعة ابتعاد كل منهما عن الأخرى بعد ساعتين من انطلاقهما .

16) تعطى المقاومة المكافئة R بالأوم (Ω) للمقاومتين R_1 و R_2 الموصولتين على التوازي كما في الشكل المجاور

بالعلاقة الأتية : $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$. إذا كانت R_1 و R_2 تزدادان بمعدل $0.3\ \Omega/s$ و $0.2\ \Omega/s$ على الترتيب ، فأجد معدل تغير R عندما $R_1=80\ \Omega$ و $R_2=100\ \Omega$.

17) يسحب جمال قاربه إلى رصيف الاصطفاف باستعمال بكرة سحب ترتفع $1\ m$ عن مقدمة القارب . إذا طوت البكرة حبل السحب بسرعة $1\ m/s$ ، و كان القارب يبعد عن الرصيف مسافة $8\ m$ في لحظة ما ، فما سرعة اقتراب القارب من الرصيف عندئذ ؟

ترتفع كاميرا عن الأرض مسافة $132\ ft$ ، و ترصد سيارة تتحرك على مضمار سباق ، و تبلغ سرعتها $264\ ft/s$ كما بالشكل المجاور :

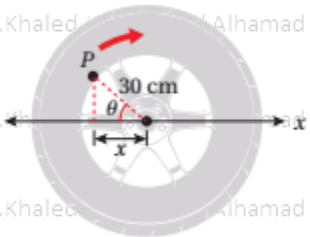


18) أجد سرعة تغير الزاوية θ عندما تكون السيارة أسفل الكاميرا تماما .

19) أجد سرعة تغير الزاوية θ بعد نصف ثانية من مرور السيارة أسفل الكاميرا .

20) يتحرك جسيم على منحنى الاقتران $f(x)=2\ sin\ \frac{\pi\ x}{2}$. و عند مروره بالنقطة $(1\ ,\frac{1}{3})$ ، فإن الإحداثي x لموقعه يزداد بمعدل $\sqrt{10}$ وحدة طول لكل ثانية . أجد معدل تغير المسافة بين الجسيم و نقطة الأصل في هذه اللحظة .

عجلة سيارة طول نصف قطرها الداخلي $30\ cm$ ، و هي تدور بمعدل 10 دورات في الثانية . رسمت النقطة P على حافة العجلة كما بالشكل المجاور :

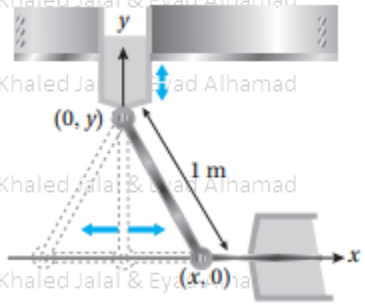


21) أجد $\frac{dx}{dt}$ بدلالة θ .

22) أجد $\frac{dx}{dt}$ عندما $\theta=45°$.

23) مصباح مثبت بالأرض ، و هو يضيئ على جدار يبعد مسافة $12\ m$. إذا سار رجل طوله $2\ m$ من موقع المصباح إلى الجدار بسرعة $1.6\ m/s$ ، فأجد معدل تغير طول ظله على الجدار عندما يكون على بعد $4\ m$ من الجدار .

يبين الشكل المجاور :



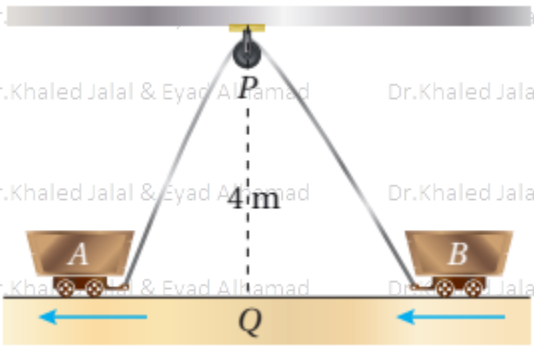
ذراعا معدنيا متحركة طولها $1\ m$، و إحداثيات نهايتها $(x\ ,0)$ و $(0\ ,y)$ و يمثل الاقتران : $x(t)=\frac{1}{2}\ sin\frac{\pi t}{6}$ موقع طرف الذراع على المحور x ، حيث t الزمن بالثواني :

24) أجد أعلى نقطة على المحور y يصلها طرف الذراع

25) أجد سرعة طرف الذراع الواقع على المحور y عندما يكون الطرف الأخر عند النقطة $(\frac{1}{4}\ ,\ 0)$.

مهارات التفكير العليا صفحة (92)

26) ربطت العربتان A و B بحبل طول $12\ m$ ، و هو يمر بالبكرة P كما بالشكل المجاور .



إذا كانت النقطة Q تقع على الأرض بين العربتين أسفل P مباشرة ، و تبعد عنها مسافة $4\ m$ ، و كانت العربة A تتحرك بعيدا عن النقطة Q بسرعة $0.5\ m/s$ ، فاجد سرعة أقتراب العربة B من النقطة Q في اللحظة التي تكون فيها العربة A على بعد $3\ m$ من النقطة Q ، مبررا إجابتي .

27) يركض عداء في مضمار دائري ، طول نصف قطره $100\ m$ ، بسرعة ثابتة مقدارها $7\ m/s$ ، و يقف صديقه على بعد $200\ m$ من مركز المضمار . أجد معدل تغير المسافة بين العداء و صديقه عندما تكون المسافة بينهما $200\ m$. (تنبيه : أجد جميع الحلول الممكنة .)

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

الدرس الاول

المعدلات المرتبطة بالزمن

كتاب التمارين

ملئ بالون كروي بالهيليوم بمعدل $8\ cm^3/s$. أجد معدل تغير طول نصف قطر البالون في كل من الحالات الأتية :

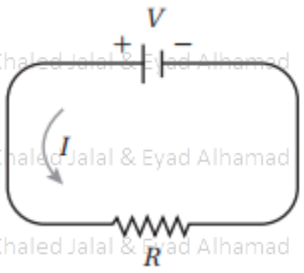
(1) عندما يكون طول نصف قطره $12\ cm$.

(2) عندما يكون حجمه $1435\ cm^3$

(3) إذا ملئ مدة $33.5\ s$.

---

(4) تمثل المعادلة : $V = IR$ جهد الدارة الكهربائية (بالفولت) المبينة في الشكل المجاور، حيث I شدة التيار بالأمبير ، R المقاومة (بالأوم) إذا كان جهد الدارة الكهربائية يزداد بمعدل $1\ volt/sec$ ، و شدة التيار تقل بمعدل $\frac{1}{3}\ amp/sec$ ، فأجد معدل تغير R عندما $V = 12$ و $I = 2$.



إذا كانت θ الزاوية المحصورة بين الضلعين اللذين طول كل منهما s في مثلث متطابق الضلعين ، فأجب عن السؤالين الأتيين تباعا :

(5) أثبت أن مساحة المثلث تعطى بالمعادلة : $A = \frac{1}{2}\ s^2 \sin\theta$.

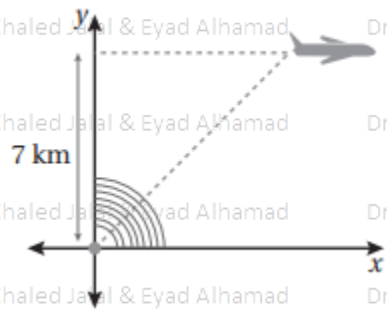
(6) إذا كانت θ الزاوية تزداد بمعدل $\frac{1}{2}\ rad/min$ ، فأجد معدل تغير مساحة المثلث عندما $\theta = \frac{\pi}{6}$ ، علما بأن طول الضلعين المتطابقين ثابت .

---

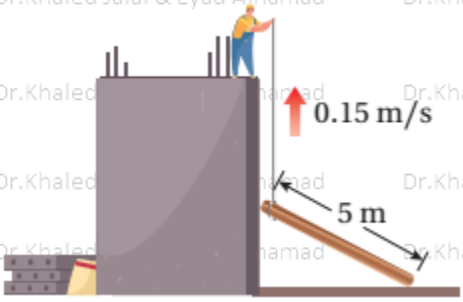
(7) يتحرك جسيم على منحنى الاقتران : $f(x) = \frac{10}{1+x^2}$. إذا كان معدل تغير الأحداثي x هو $3\ cm/s$ فأجد معدل تغير الأحداثي y عندما $x = 20$.

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

(8) حلقت طائرة على ارتفاع $7km$ ، و مرت أثناء تحليقها مباشرة فوق رادار كما بالشكل المجاور . و عندما أصبح البعد بينها و بين الرادار $10km$ رصد الرادار معدل تغير البعد بينه و بين الطائرة ، فكان $300\ km/h$. أجد سرعة الطائرة في هذه اللحظة .



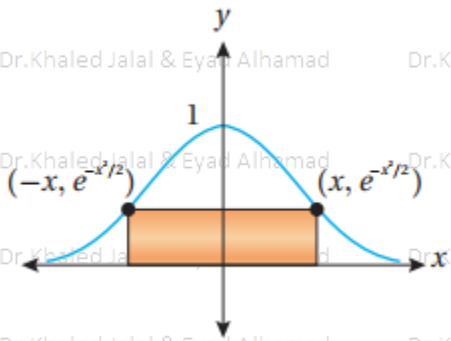
(9) يسحب عامل بناء لوحا خشبيا طوله $5\ m$ إلى الأعلى بجانب مبنى لم يكتمل إنشاؤه بعد ، و ذلك باستعمال حبل ربط به أحد طرفي اللوح كما في الشكل المجاور . إذا افترضت أن طرف اللوح المربوط بالحبل يتبع مسارا عموديا على جدار المبنى ، و أن العامل يسحب الحبل بمعدل $0.15\ m/s$ ، بحيث يظل الطرف العلوي من اللوح ملامسا للجدار ، فما سرعة انزلاق الطرف الاخر للوح على الأرض عندما يكون على بعد $3\ m$ من جدار المبنى ؟



يبين الشكل المجاور مستطيلا مرسوما داخل منحنى الاقتران $f(x) = e^{-x^2/2}$. إذا كان x يتغير مع الزمن ، مغيرا معه موضع المستطيل ، فأجيب عن السؤالين الاتيين تباعا :

(10) أجد مساحة المستطيل بدلالة x .

(11) أجد معدل تغير مساحة المستطيل عندما $x = 4\ cm$ ، و عندما $\frac{dx}{dt} = 4\ cm/min$



Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

القيم القصوى و التقعر

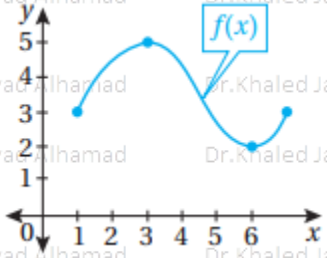
كتاب الطالب

الدرس الثاني

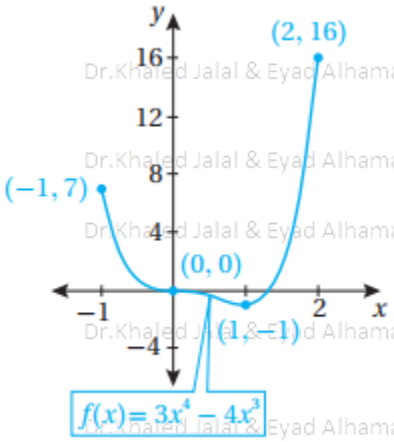
مثال 1 :

أجد القيم القصوى المحلية و المطلقة (إن وجدت) للاقتران المعطى تمثيله البياني في كل مما يأتي :

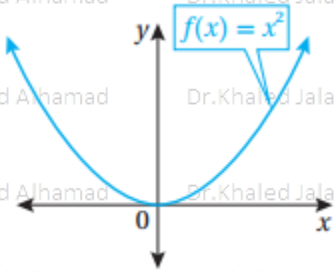
1)



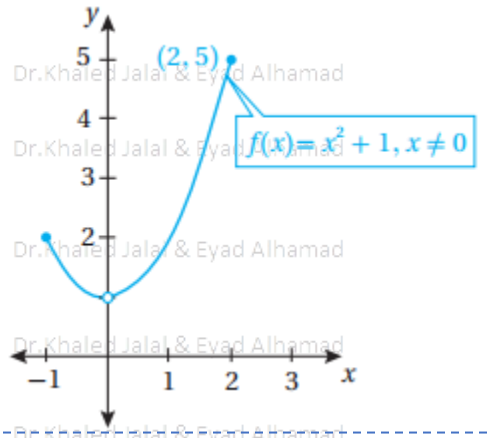
2)



3)



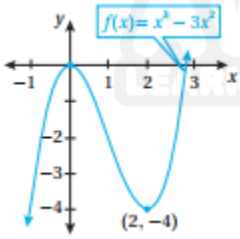
4)



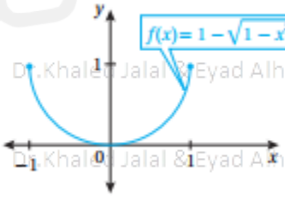
أتحقق من فهمي صفحة (93):

أجد القيم القصوى المحلية و المطلقة (إن وجدت) للاقتران المعطى تمثيله البياني في كل يأتي :

a)



b)



مثال ❷ :

أجد القيمة العظمى المطلقة و القيمة الصغرى المطلقة (إن وجدت) لكل اقتران مما يأتي في الفترة المعطاة :

1) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2 \ , \ [-2\,,2]$

2) $f(x) = x^{2/3} \ , \ [-1\,,2]$

3) $f(x) = 2\sin x - \cos 2x \ , \ [0\,,2\pi]$

أتحقق من فهمي صفحة (99):

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5 \ , \ [-3\,,5]$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x} \ , \ [-8\,,8]$

c) $f(x) = sin^2 x + \cos x \ , \ [0\,,2\pi]$

مثال ❸ :

أجد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقتران : $f(x) = (x^2 - 3)\,e^x$.

أتحقق من فهمي صفحة (102):

أجد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقتران : $f(x) = (x - 1)\,e^x$.

مثال ❹ :

أجد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقتران : $f(x) = (x^2 - 4)^{2/3}$.

أتحقق من فهمي صفحة (103):

أجد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقتران : $f(x) = \sqrt[3]{x - 3}$.

مثال ❺ :

أجد فترات التقعر للأعلى و للأسفل و نقاط الانعطاف (إن وجدت) لمنحنى كل اقتران مما يأتي :

1) $f(x) = e^{-x^2/2}$

2) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

أتحقق من فهمي صفحة (108):

أجد فترات التقعر للأعلى و للأسفل و نقاط الانعطاف (إن وجدت) لمنحنى كل اقتران مما يأتي :

1) $f(x) = (x - 2)^3(x - 1)$

2) $f(x) = \dfrac{x}{x - 1}$

مثال ❻ :

إذا كان $f(x) = (x^2 - 4)^4$ ، فأستعمل اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم القصوى المحلية للاقتران f

أتحقق من فهمي صفحة (110):

إذا كان $f(x) = x\,e^x$ ، فأستعمل اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم القصوى المحلية للاقتران f .

مثال 7 :

يمثل الاقتران $s(t) = 3t^2 - 2t^3$ ، $t > 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث

s الموقع بالأمتار ، و t الزمن بالثواني :

1) ما الفترات الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه الموجب و الاتجاه السالب ؟

2) ما الفترات التي تتزايد فيها سرعة الجسم المتجهة ؟ و ما الفترات التي تتناقص فيها ؟

أتحقق من فهمي صفحة (112):

يمثل الاقتران $s(t) = t^3 - 3t + 3$ ، $t > 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث

s الموقع بالأمتار ، و t الزمن بالثواني :

a) ما الفترات الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه الموجب و الاتجاه السالب ؟

b) ما الفترات التي تتزايد فيها سرعة الجسم المتجهة ؟ و ما الفترات التي تتناقص فيها ؟

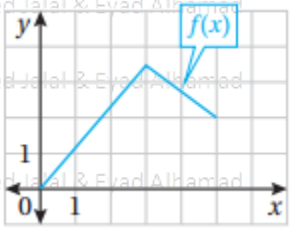
مسألة اليوم

يمثل الاقتران : $C(t) = 3.59 + 8\,(1.5\,e^{-0.4t-1} - e^{-0.6t})$ تركيز جرعة دواء في دم مريض بعد t ساعة من تناوله ، حيث C مقيسة بوحدة $\mu g/mL$. أحدد الزمن الذي يكون فيه تركيز الدواء أكبر ما يمكن خلال أول 12 ساعة من تناوله .

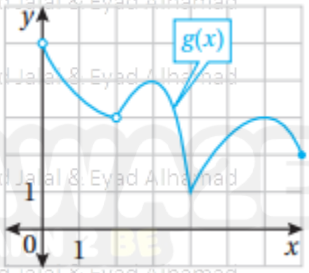
أتدرب و أحل المسائل صفحة (112) ، (113) ، (114):

أجد القيم الحرجة و القيم القصوى المحلية و المطلقة (إن وجدت) للاقتران الممثل بيانيا في كل مما يأتي :

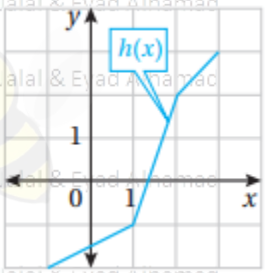
1)



2)



3)



أجد القيمة العظمى المطلقة و القيمة الصغرى المطلقة (إن وجدت) لكل اقتران مما يأتي في الفترة المعطاة :

4) $f(x) = 1 + 6x - 3x^2 \quad , \quad [0\,,4]$

5) $f(x) = (x+3)^{2/3} - 5 \quad , \quad [-3\,,3]$

6) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1} \quad , \quad [-2\,,2]$

7) $f(x) = \sqrt[3]{x} \quad , \quad [8\,,64]$

8) $f(x) = 2\cos x + \sin 2x \quad , \quad [0\,, \dfrac{\pi}{2}]$

9) $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x^2} \quad , \quad [0\,,3]$

10) $f(x) = \dfrac{lnx}{x^2} \quad , \quad [\dfrac{1}{2}\,,4]$

11) $f(x) = secx \quad , \quad [-\dfrac{\pi}{6}\,, \dfrac{\pi}{3}]$

12) $f(x) = \sqrt{4-x^2} \quad , \quad [-2\,,2]$

أجد فترات التزايد و فترات التناقص لكل اقتران مما يأتي ، ثم أجد القيم القصوى المحلية :

13) $f(x) = x^3 + 6x^2 - 135$

14) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+9}$

15) $f(x) = x^2 lnx$

16) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$

17) $f(x) = x^{2/3}(x-3)$

18) $f(x) = sin^2 x + sinx \quad , [0\,,2\pi]$

19) $f(x) = x + sinx \quad , [0\,,2\pi]$

أجد فترات التقعر للأعلى و للأسفل و نقاط الانعطاف (إن وجدت) لمنحنى كل اقتران مما يأتي :

20) $f(x) = x^3 - 12x + 1$

21) $f(x) = \sqrt{sinx} \quad , [0\,,\pi]$

22) $f(x) = \dfrac{3}{x^2+1}$

23) $f(x) = \ln(x^2+5)$

24) $f(x) = \sqrt{x}(x+3)$

25) $f(x) = x\,e^x$

أجد القيم القصوى المحلية لكل اقتران مما يأتي ، مستعملا اختبار المشتقة الثانية (إن أمكن) :

26) $f(x) = 6x - x^2$

27) $f(x) = cosx - x \quad , [0\,,4\pi]$

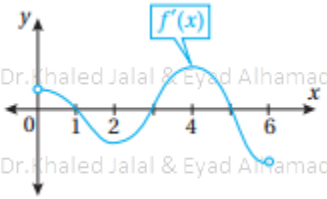
28) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

29) $f(x) = x\,lnx$

30) $f(x) = \dfrac{x}{2^x}$

31) $f(x) = x^{2/3} - 3$

يبين الشكل المجاور : منحنى المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$ المتصل على الفترة $[0\,,6]$. أستعمل التمثيل البياني لإيجاد كل مما يأتي :



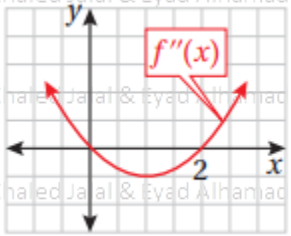
32) قيم x التي يكون عندها للاقتران f قيم قصوى محلية مبينا نوعها

33) فترات التزايد و فترات التناقص للاقتران f .

34) إذا كان للاقتران : $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ قيمة عظمى محلية عندما $x=-3$ ، و قيمة صغرى محلية عند النقطة $(1,-14)$ ، فأجد قيمة كل من الثوابت a ، و b ، و c .

35) إذا كان للاقتران : $f(x)=\sqrt{x+1}+\frac{b}{x}$ نقطة انعطاف عندما $x=3$ ، فأجد قيمة الثابت a .

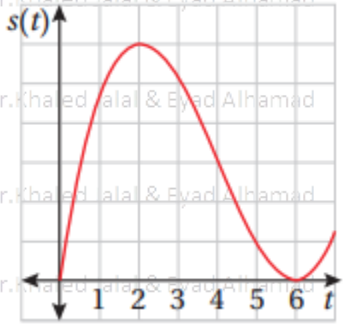
أستعمل التمثيل البياني المجاور لمنحنى $f^{(2)}(x)$ ، لإيجاد كل مما يأتي :



36) فترات التقعر للأعلى و للأسفل لمنحنى الاقتران f .

37) الإحداثي x لنقاط انعطاف منحنى الاقتران f .

يمثل الاقتران : $s(t)$ المبين منحناه في الشكل المجاور موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار ، و t الزمن بالثواني :



38) أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي .

39) ما الفترات الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه الموجب و الاتجاه السالب ؟

40) إذا كان تسارع الجسم صفرا عندما $t=4$ ، فما الفترات التي تتزايد فيها سرعة الجسم ؟ و ما الفترات التي تتناقص فيها سرعة الجسم ؟

41) يمثل الاقتران : $f(x)=\frac{1500}{x^2-6x+10}-150$ الربح الأسبوعي (بالدينار) لأحد المصانع من إنتاجه ، حيث x عدد مكبرات الصوت المبيعة . أجد عدد مكبرات الصوت الذي يحقق أكبر ربح ممكن .

يمثل الاقتران : $s(t)=t^3-5t^2+4t$ ، $t\geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار ، و t الزمن بالثواني :

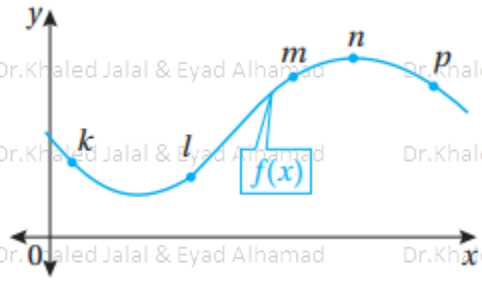
42) ما الفترات الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه الموجب و الاتجاه السالب ؟

43) ما الفترات التي تتزايد فيها سرعة الجسم المتجهة ؟ و ما الفترات التي تتناقص فيها ؟

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

مهارات التفكير العليا صفحة (115)

يبين الشكل المجاور : منحنى الاقتران $f(x)$.



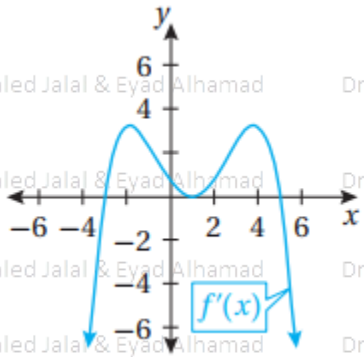
أحدد النقطة (النقاط) من بين مجموعة النقاط $\{k\ ,l\ ,m\ ,n\ ,p\}$ على منحنى الاقتران التي تحقق كلا من الشروط الاتية ، مبررا إجابتي .

44) أن تكون إشارة كل من $f'(x)$ ، $f^{(2)}(x)$ موجبة .

45) أن تكون إشارة كل من $f'(x)$ ، $f^{(2)}(x)$ سالبة .

46) أن تكون إشارة كل من $f'(x)$ سالبة ، $f^{(2)}(x)$ موجبة .

أستعمل التمثيل البياني المجاور لمنحنى $f'(x)$ لإيجاد كل مما يأتي ، مبررا إجابتي :



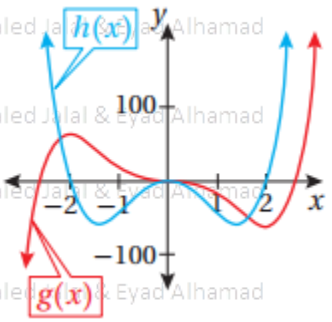
47) قيم x التي يكون عندها للاقتران f قيم قصوى محلية ، مبينا نوعها .

48) فترات التزايد و فترات التناقص للاقتران f .

49) فترات التقعر للأعلى و للأسفل لمنحنى الاقتران f .

50) الإحداثي x لنقاط الانعطاف .

51) أستعمل التمثيل البياني المجاور لمنحنى الاقترانين $h(x)$ ، $g(x)$ لتحديد الاقتران الذي يمثل مشتقة للأخر ، مبررا إجابتي .



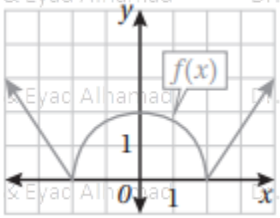
Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

الدرس الثاني

القيم القصوى و التقعر

كتاب التمارين

(1) أجد القيم الحرجة و القيم القصوى المحلية و المطلقة (إن وجدت) للاقتران $f(x)$ الممثل بيانيا في الشكل المجاور :



أجد القيمة العظمى المطلقة و القيمة الصغرى المطلقة (إن وجدت) لكل اقتران مما يأتي في الفترة المعطاة :

(2) $f(x) = 1 + cos^2 x \ , \ [\frac{\pi}{4} , \ \pi]$

(3) $f(x) = (x^2 - 4)^3 \ , [-2 , 3]$

(4) $f(x) = x - 2sinx \ , \ [-2\pi , 2\pi]$

(5) $f(x) = x \ ln(x + 3) \ , [0 , 3]$

(6) $f(x) = x + \frac{4}{x} \ , \ [-8 , -1]$

(7) $f(x) = 5e^x - e^{2x} \ , \ [-1 , 2]$

أجد فترات التزايد و فترات التناقص ، ثم أجد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) لكل اقتران مما يأتي :

(8) $f(x) = sinx + cosx \ , \ [0 , 2\pi]$

(9) $f(x) = \frac{x}{x - 5}$

(10) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$

(11) $f(x) = ln(x^2 - 3x + 4)$

(12) $f(x) = e^{-x^2}$

(13) $f(x) = 2^{x^2 - 3}$

أجد فترات التقعر إلى الأعلى و إلى الأسفل و نقط الانعطاف (إن وجدت) لكل اقتران مما يأتي :

(14) $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 12$

(15) $f(x) = x^6 - 3x^4$

(16) $f(x) = (2 + 2x - x^2)^2$

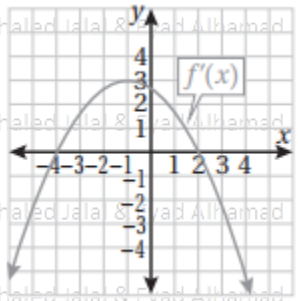
(17) $f(x) = x \sqrt{4 - x^2}$

(18) $f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}$

(19) $f(x) = 2x - tanx \ , (-\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2})$

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

أستعمل التمثيل البياني المجاور لمنحنى $f'(x)$ لإيجاد كل مما يأتي :



(20) قيم x التي يكون عندها للاقتران f قيم قصوى محلية ، مبينا نوعها .

(21) فترات التزايد و فترات التناقص للاقتران f .

أجد القيم القصوى المحلية لكل اقتران مما يأتي ، مستعملا اختبار المشتقة الثانية (إن أمكن) :

(22) $f(x) = 2sinx + cos2x \ , \ [0\ , 2\pi]$

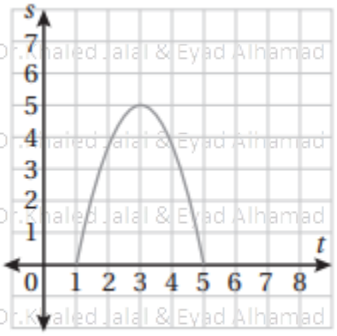
(23) $f(x) = x^3 + \dfrac{48}{x}$

(24) $f(x) = (\ x^2 - 3)\ e^x$

---

(25) إذا كان للاقتران : $f(x) = ax^2 + bx + c$ قيمة عظمى محلية عند النقطة $(\ 3\ , 12\ )$ ، و قطع المحور في النقطة $(\ 0\ , 1\ )$ ، فأجد قيمة كل من الثوابت a ، و b ، و c .

يمثل الاقتران : $s(t)$ المبين منحناه في الشكل المجاور موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار ، و t الزمن بالثواني :



(26) أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي .

(27) ما الفترات الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه الموجب؟ و ما الفترات الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه السالب؟

(28) ما الفترات التي تتزايد فيها سرعة الجسم المتجهة ؟ وما الفترات التي تتناقص فيها سرعة الجسم المتجهة ؟

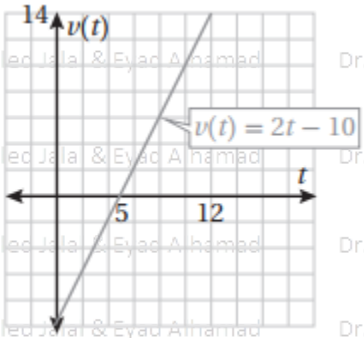
إذا كان للاقتران : $f(x) = 3x^4 + ax^3 + bx^2 + c\,x + d$ ، فأجيب عن الاسئلة الثلاثة الآتية تباعا :

(29) إذا كان لمنحنى الاقتران مماس أفقي عند كل من النقطة $(\ -2\ , -73\ )$ و النقطة $(\ 0\ , -9\ )$ فأجد قيمة كل من الثوابت : a ، و b ، و c ، و d .

(30) إذا وجد نقطة ثالثة على منحنى الاقتران لها مماس أفقي ، فأجد أحداثي هذه النقطة .

(31) أصنف كلا من النقاط الثلاثة إلى صغرى محلية ، عظمى محلية (إن أمكن) .

يمثل الاقتران : $v(t)$ المبين منحناه في الشكل المجاور السرعة المتجهة لجسم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث v السرعة المتجهة بالمتر لكل ثانية ، و t الزمن بالثواني :



(32) أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي .

(33) ما الفترات الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه الموجب؟ و ما الفترات الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه السالب؟

(34) ما الفترات التي تتزايد فيها سرعة الجسم المتجهة ؟ وما الفترات التي تتناقص فيها سرعة الجسم المتجهة ؟

---

(35) إذا كان للاقتران : $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ قيمة قصوى محلية عند النقطة $(2, 11)$ ، و نقطة انعطاف عندما $x = 1$ ، فأجد قيمة كل من الثوابت : a ، و b ، و c .

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

الدرس الثالث

تطبيقات القيم القصوى

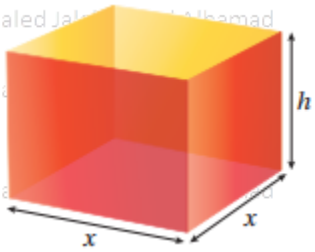
كتاب الطالب

مثال 1 :

صندوق على شكل متوازي مستطيلات ، صنع من قطعة كرتون رقيقة ، مربعة الشكل ، طولها $8\ dm$ و ذلك بقطع 4 مربعات متطابقة من زواياها ، و طي الجوانب إلى الأعلى . أجد أبعاد الصندوق ليكون حجمه أكبر ما يمكن .

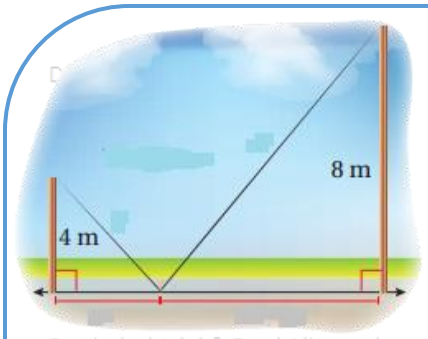
أتحقق من فهمي صفحة (118):

ترغب شركة في تصميم صندوق مفتوح من الأعلى ، و قاعدته مربعة الشكل ، و مساحة سطحه الكلية $1080\ cm^2$ كما بالشكل المجاور . أجد أبعاد الصندوق ليكون حجمه أكبر ما يمكن .



مثال 2 :

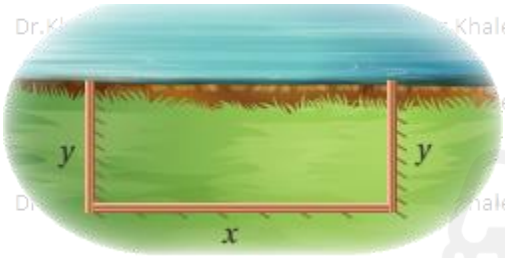
عمودان طول أحدهما $8\ m$ ، و طول الأخر $4\ m$ ، و المسافة بينهما $9\ m$ ، و هما مثبتان بسلكين يصلان قمة كل عمود بوتد عند سطح الأرض كما بالشكل المجاور . أجد الموقع المناسب لتثبيت الوتد بين العمودين بحيث يكون طول السلك المستعمل أقل ما يمكن



أتحقق من فهمي صفحة (121):

خطط مزارع لتسييج حظيرة مستطيلة الشكل قرب نهر كما بالشكل المجاور . و حدد مساحة الحظيرة بـ $245000m^2$ لتوفير كمية عشب كافية لأغنامه . أجد أبعاد الحظيرة التي تجعل طول السياج أقل ما يمكن .

علما بأن الجزء المقابل للنهر لا يسيج



مثال ❸ :

تتدرب أسراء و أميرة يوميا استعدادا لسباق العدو (الماراثون) . في أحد الأيام ، انطلقت إسراء من منزلها الذي يقع على بعد $20\ km$ شمال منزل أميرة الساعة $9:00\ a.m.$ ، و اتجهت جنوبا بسرعة $8\ km/h$ و في الوقت نفسه ، انطلقت أميرة في اتجاه الشرق بسرعة $8\ km/h$. في أي ساعة تكون إسراء و أميرة أقرب ما يمكن إلى بعضهما ، علما بأن كلا منهما ركضت مدة $2.5\ h$ ؟

أتحقق من فهمي صفحة (123):

انطلق قطار من إحدى المحطات الساعة $10:00\ a.m.$ ، و تحرك في اتجاه الجنوب بسرعة $60\ km/h$ حيث المحطة التالية . و في الوقت نفسه ، انطلق قطار أخر نحو الغرب بسرعة $45\ km/h$ ، ثم وصل إلى محطة انطلاق القطار الأول الساعة $11:00\ a.m$. في أي ساعة يكون القطاران أقرب ما يمكن إلى بعضهما ؟

مثال ❹ :

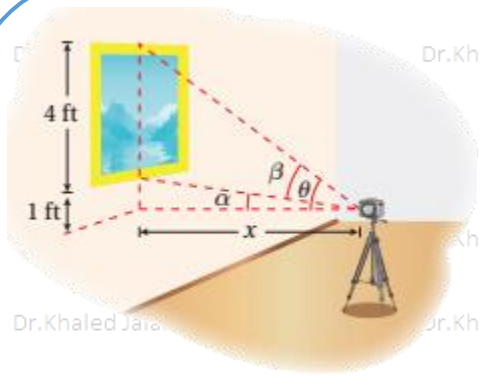
لاحظت إدارة أحد المسارح أن متوسط عدد الحضور لعرض ما هو 1000 شخص إذا كان سعر بيع التذكرة 26 JD ، و أن عدد الحضور يزيد بمقدار 50 شخصا مقابل كل دينار يخصم من سعر التذكرة . إذا كان متوسط ما ينفقه كل شخص 4 JD على الخدمات داخل المسرح ، فما سعر بيع التذكرة الذي يحقق للمسرح أعلى إيراد ؟

أتحقق من فهمي صفحة (125):

يبيع متجر 200 شاشة تلفاز شهريا بسعر 350 JD للشاشة الواحدة . و قد و قد أشار مسح للسوق أعده خبير التسويق في المتجر إلى أن عدد الشاشات المبيعة شهريا يزيد بمقدار 20 شاشه عند خصم مقداره 10 JD من سعر الشاشة الواحدة . أجد سعر بيع الشاشة الواحدة الذي يحقق للمتجر أعلى إيراد ممكن .

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

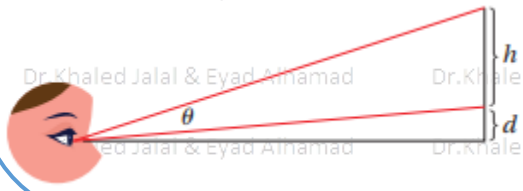
مثال 5 :



يريد مصور التقاط صورة للوحة ارتفاعها $4\ \text{ft}$ ، وهي معلقة في معرض فني . إذا كانت عدسة الكاميرا تقع أسفل الحافة السفلية للوحة بمقدار $1\ \text{ft}$ كما يظهر في الشكل المجاور ، فأجد بعد الكاميرا اللازم عن اللوحة لتكون زاوية تصوير عدستها $(\ \beta\ )$ أكبر ما يمكن .

أتحقق من فهمي صفحة (126):

نظرت سارة إلى لوحة معلقة على حائط في منزلها ، ارتفاعها h مترا ، و ارتفاع حافتها السفلية d مترا فوق عينها كما بالشكل المجاور . كم مترا يجب أن تبتعد سارة عن الجدار لتكون زاوية نظرها θ أكبر ما يمكن ؟



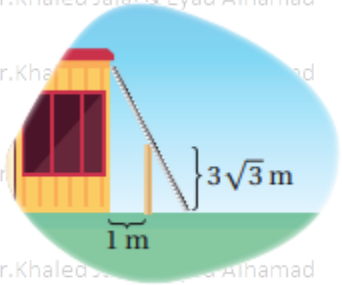
مثال 6 :

أجد النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران $f(x)=4-x^2$ ، التي هي أقرب ما يمكن إلى النقطة $(\ 0\ ,\ 2\ )$.

أتحقق من فهمي صفحة (128):

أجد النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران $f(x)=\sqrt{8\,x}$ ، التي هي أقرب ما يمكن إلى النقطة $(\ 4\ ,\ 2\ )$.

مسألة اليوم

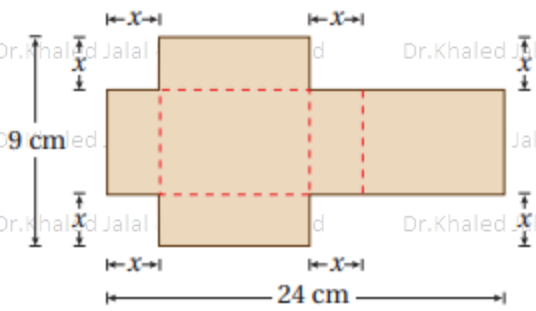


يحيط سياج ارتفاعه $3\sqrt{3}\ m$ بمبنى ، و يبعد عنه مسافة $1\ m$ كما في الشكل المجاور . أجد طول أقصر سلم قد يصل من الأرض إلى المبنى ، و يمر فوق السياج ملامسا له .

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

أتدرب و أحل المسائل صفحة (128) ، (129) ، (130) ، (131)

قطعة كرتون طولها $24\ cm$ ، و عرضها $9\ cm$ أزيل منها مربعان متطابقان و مستطيلان متطابقان كما بالشكل المجاور، بحيث أمكن طيها، و تكوين صندوق له غطاء منها :



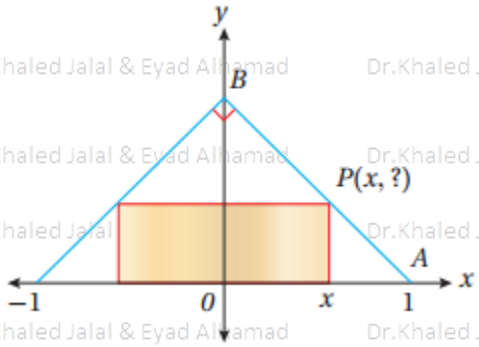
1) أكتب الاقتران $V(x)$ الذي يمثل حجم الصندوق.

2) أحدد مجال الاقتران V .

3) أجد أبعاد الصندوق بحيث يكون حجمه أكبر ما يمكن .

4) أجد النقطة الواقعة على منحنى العلاقة $4x^2 + y^2 = 4$ التي أقرب ما يمكن إلى النقطة $(0\ ,\ 1)$.

يبين الشكل المجاور مستطيلا مرسوم داخل مثلث قائم الزاوية . و هو متطابق الضلعين ، و طول قاعدته 2 وحدة طول :



5) أجد الإحداثي y للنقطة بدلالة p .

6) أكتب مساحة المستطيل بدلالة x .

7) أجد أكبر مساحة ممكنة للمستطيل .

8) أجد أبعاد المستطيل التي تجعل مساحته أكبر ما يمكن .

يمثل الاقتران : $p = 150 - 0.5x$ سعر البدلة الرجالية (بالدينار) الذي حددته إحدى الشركات ، حيث x عدد البدلات المبيعة . و يمثل الاقتران : $C(x) = 4000 + 0.25x^2$ تكلفة إنتاج x بدلة :

9) أجد اقتران الإيراد .

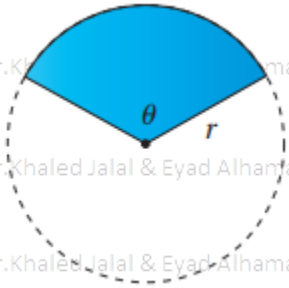
10) أجد اقتران الربح .

11) أجد عدد البدلات اللازم بيعها لتحقيق أكبر ربح ممكن ، ثم أجد أكبر ربح ممكن .

12) أجد سعر البدلة الواحدة الذي يحقق أعلى ربح ممكن .

13) تنتج مزرعة للتفاح 30 صندوقا من الشجرة الواحدة تقريبا عند زراعة 20 شجرة في كل فدان من الأرض .
و يقل إنتاج الشجرة الواحدة بمقدار صندوق عند زراعة شجرة إضافية في كل فدان بسبب قرب الأشجار الشديد بعضها من بعض . ما عدد الأشجار التي يجب زراعتها في كل فدان لتحقيق أكبر إنتاج ممكن ؟

لدى مزارع P مترا طوليا من سياج ، يرغب في استعماله كاملا لتسييج حقل رعي على شكل قطاع دائري ، زاويته θ بالراديان ، في دائرة نصف قطرها r مترا كما بالشكل المجاور :

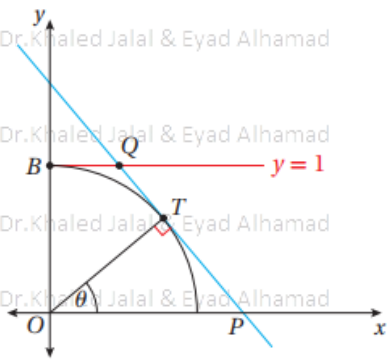


14) أثبت أن طول السياج اللازم إحاطة الحقل به هو : $P = r(\theta + 2)$

15) أثبت أن مساحة القطاع هي : $A = \frac{1}{2}Pr - r^2$.

16) أجد نصف قطر القطاع بدلالة P الذي تكون عنده مساحة الحقل أكبر ما يمكن .

تقع النقطة T على دائرة الوحدة التي معادلتها : $x^2 + y^2 = 1$ ، عند الزاوية θ من المحور x الموجب ، حيث : $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ كما بالشكل المجاور :



17) أثبت أن معادلة المستقيم PT هي :

$$x\cos\theta + y\sin\theta = 1$$

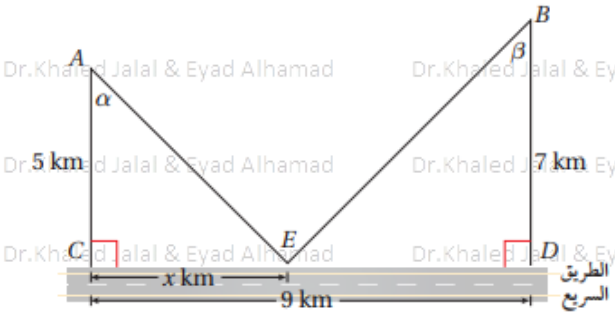
18) أثبت أن مساحة شبه المنحرف $OBQP$ تعطى بالاقتران :

$$A = \frac{2 - \sin\theta}{2\cos\theta}$$

19) أجد قياس الزاوية θ الذي تكون عنده مساحة شبه المنحرف أقل ما يمكن .

20) يبين الشكل المجاور نافذة مكونة من جزأين أحدهما علوي على شكل نصف دائرة قطرها $x\ m$ ، و الأخر سفلي على شكل مستطيل عرضه $x\ m$ ، و ارتفاعه $y\ m$. صنع الجزء العلوي من زجاج ملون يسمح بمرور 1 وحدة ضوء لكل متر مربع ، و صنع الجزء السفلي من زجاج شفاف يسمح بمرور 3 وحدات ضوء لكل متر مربع . أجد قيمة كل من x و y التي تجعل كمية الضوء المار خلال النافذة أكبر ما يمكن ، علما بأن $10\ m$ من المعدن الرقيق استعمل في تشكيل إطار النافذة كاملا ، بما في ذلك القطعة الفاصلة بين الجزأين .

يمارس يوسف هواية ركوب الدراجات .و في أحد الأيام ، انطلق على دراجته من البيت عند النقطة A إلى المدرسة عند النقطة B ، مارا بالنقطة E الواقعة على حافة الطريق السريع كما في الشكل المجاور :

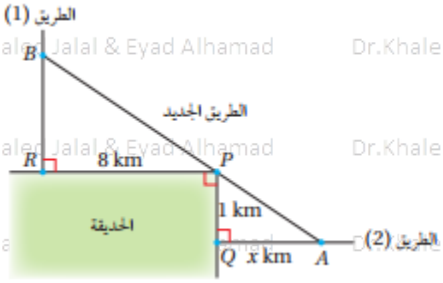


21) إذا كان الاقتران L يمثل المسافة التي يقطعها يوسف من البيت إلى المدرسة ، فأكتب L بدلالة x

22) أثبت أنه إذا كان : $\frac{dL}{dx} = 0$ ، فإن : $sin\alpha = sin\beta$

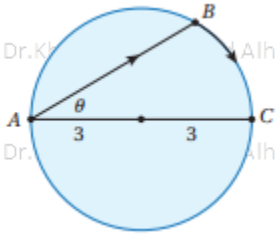
23) أجد قيمة x التي تجعل المسافة التي يقطعها يوسف أقل ما يمكن .

24) يبين الشكل المجاور مدخلين لحديقة عامة عند النقطة R و النقطة Q ، و يمكن الوصول إلى هذين المدخلين من طريقين عموديين على ضلعي الحديقة . أرادت البلدية إنشاء طريق جديد يصل بين الطريقين القديمين ، و يمر بالنقطة P التي تمثل زاوية الحديقة ، فاختارت النقطة A و النقطة B على الطريقين ليكون طول الطريق الجديد إقصر ما يمكن ، علما بأن النقطة A تقع على بعد $x\ km$ من النقطة Q . أجد قيمة x التي تجعل طول الطريق الجديد أقصر ما يمكن .



مهارات التفكير العليا صفحة (131)

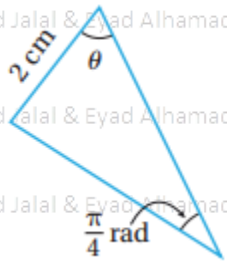
25) يقف رجل عند النقطة A على شاطئ بحيرة دائرية نصف قطرها $3\ km$ ، و هو يريد الوصول إلى النقطة C المقابلة تماما للنقطة A ، على الجانب الاخر من من البحيرة ، في أقصر وقت ممكن كما في الشكل المجاور . يمكن للرجل أن يجدف بزورق من النقطة A إلى النقطة B بسرعة $3\ km/h$ ، ثم يركض حول حافة البحيرة بسرعة $6\ km/h$. أحدد موقع النقطة B ليصل الرجل من النقطة A إلى النقطة C في أقل وقت ممكن ؟ أبرر إجابتي .



يبين الشكل المجاور :

مثلثا قياس إحدى زواياه $\frac{\pi}{4}\ rad$ ،

و مقابلها ضلع طوله $2\ cm$:



26) أثبت أن مساحة المثلث A تعطى بالاقتران

$$A = sin\,2x - cos\,2x + 1$$

27) أجد مجال الاقتران في السؤال السابق .

28) أثبت أن أكبر مساحة ممكنة للمثلث هي : $(1 + \sqrt{2})\ cm^2$

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

الدرس الثالث

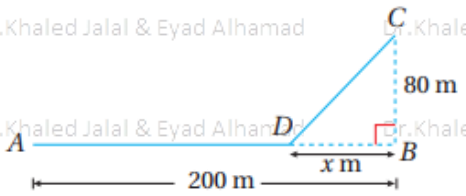
تطبيقات القيم القصوى

كتاب التمارين

(1) إذا كان $a\ cm$ و $b\ cm$ هما طولي ضلعين ثابتين في مثلث ، وكانت الزاوية بينهما θ ، فأجد قيمة θ التي تجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن .

(2) ترغب شركة في تصميم خزان من الفولاذ الرقيق المقاوم للصدأ على شكل متوازي مستطيلات ، حجمه $500\ m^3$ ، و قاعدته مربعة الشكل ، و مفتوح من الأعلى . أجد الأبعاد التي تجعل مساحة سطح الخزان أقل ما يمكن .

يمتد مسار للركض شرقا من النقطة A إلى النقطة B مسافة $200\ m$، و تقع النقطة C على بعد $80\ m$ شمال النقطة B



انطلق راكب على دراجة من النقطة A إلى النقطة D بسرعة $10\ m/s$ ، حيث تقع النقطة D على بعد x مترا غرب النقطة B ، ثم سار في طريق مستقيم وعر من النقطة D إلى النقطة C بسرعة $6\ m/s$:

(3) أجد اقترانا بدلالة x يمثل الزمن الذي سيستغرقه راكب الدراجة في الانتقال من النقطة A إلى C .

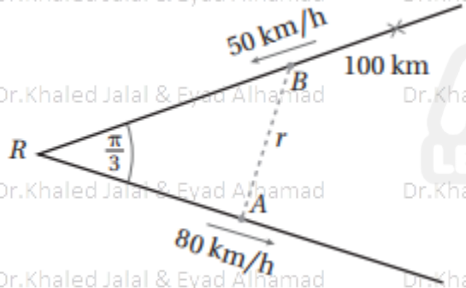
(4) بافتراض أن x قيمة متغيرة ، أجد قيمة التي يكون عندها الزمن اللازم للانتقال من النقطة A إلى النقطة C أقل ما يمكن .

سلك يبلغ طوله $24\ cm$ ، و يراد قصه إلى قطعتين لصنع دائرة و مربع .

(5) أحدد مكان القص ، بحيث يكون مجموع مساحتي الدائرة و المربع أصغر ما يمكن .

(6) أحدد مكان القص ، بحيث يكون مجموع مساحتي الدائرة و المربع أكبر ما يمكن .

(7) يلتقي طريقان مستقيمان عند النقطة R بزاوية قياسها $\frac{\pi}{3}$.



إذا انطلقت السيارة A من النقطة R على أحد الطريقين بسرعة $80\ km/h$ ، و في الوقت نفسه انطلقت السيارة B بسرعة $50\ km/h$ على الطريق الأخر في اتجاه النقطة R من نقطة تبعد عنها مسافة $100\ km$. فأجد أقصر مسافة ممكنة بين السيارتين .

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

اختبار نهاية وحدة
تطبيقات التفاضل

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي :

(1) مثلث قائم الزاوية ، ساقاه x و y ، و وتره z . إذا كان $\frac{dz}{dt}=1$ ، وكان $\frac{dx}{dt}=3\ \frac{dy}{dt}$ ، فان $\frac{dx}{dt}$ عندما $x=4$ ، و $y=3$ هي :

a) $\frac{1}{3}$ b) 1 c) 2 d) 5

(2) القيمة العظمى المطلقة للاقتران $f(x)=4x-x^2+6$ في الفترة $[0\ ,4]$ هي :

a) 6 b) 2 c) 10 d) 12

(3) الإحداثي x لنقطة انعطاف الاقتران : $f(x)=x^5-5x^4+3x+7$ هو :

a) 0 b) 1 c) 3 d) -1

(4) قيمة x التي عندها قيمة عظمى محلية للاقتران $f(x)=(x-2)(x-3)^2$ هي :

a) 3 b) $-\frac{7}{3}$ c) $-\frac{5}{3}$ d) $\frac{7}{3}$

(5) إذا كانت الفترة $[1\ ,25]$ هي مجال الاقتران المتصل f ، الذي مداه $[3\ ,30]$ ، وكان : $f'(x)<0$

لجميع قيم x بين 1 و 25 ، فإن $f(25)$ تساوي :

a) 1 b) 3 c) 25 d) 30

(6) القيمة العظمى (بالوحدات المربعة)لمساحة مثلث قائم الزاوية ، طول وتره 10 وحدات هي :

a) 24 b) 25 c) 48 d) 50

(7) إذا زاد حجم مكعب بمعدل $24\ cm^3/min$ ، و زادت مساحة سطحه بمعدل $12\ cm^2/min$ ، فإن طول ضلعه في تلك اللحظة هو :

a) $2\ cm$ b) $2\sqrt{2}\ cm$ c) $4\ cm$ d) $8\ cm$

(8) عدد النقاط الحرجة للاقتران : $f(x) = (x-2)^5(x+3)^4$ هو :

a) 1 b) 2 c) 3 d) 5

أجد القيمة العظمى المطلقة و القيمة الصغرى المطلقة (إن وجدت) لكل اقتران مما يأتي في الفترة المعطاة :

(9) $f(x) = 3x^2 - 2x^3$, $[-5, 1]$ (10) $f(x) = \frac{x}{x+3}$, $[-1, 6]$

(11) $f(x) = x\, e^{x/2}$, $[-3, 1]$ (12) $f(x) = 3\cos x$, $[0, 2\pi]$

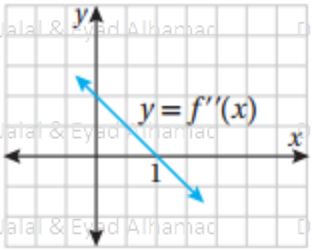
أجد فترات التزايد و فترات التناقص لكل اقتران مما يأتي . ثم أجد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) لكل اقتران :

(13) $f(x) = x^5 + x^3$ (14) $f(x) = x^4 e^{-x}$ (15) $f(x) = \frac{x^2}{3} - lnx$

أجد فترات التقعر للأعلى و فترات التقعر للأسفل و نقط الانعطاف (إن وجدت) لمنحنى كل اقتران مما يأتي :

(16) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$ (17) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ (18) $f(x) = (3 - x^2)^2$

أستعمل التمثيل البياني



المجاور لمنحنى $f^{(2)}(x)$ ، لإيجاد كل مما يأتي :

(19) فترات التقعر للأعلى و للأسفل لمنحنى الاقتران f .

(20) الإحداثي x لنقاط انعطاف منحنى الاقتران f .

يمثل الاقتران : $p(x) = 5 - 0.002\, x$ سعر منتج (بالدينار) في إحدى الشركات ، حيث x عدد القطع من المنتج . و يمثل الاقتران : $C(x) = 3 + 1.1\, x$ تكلفة إنتاج x قطعة (بالدينار) من المنتج :

(21) أجد اقتران الإيراد .

(22) أجد اقتران الربح .

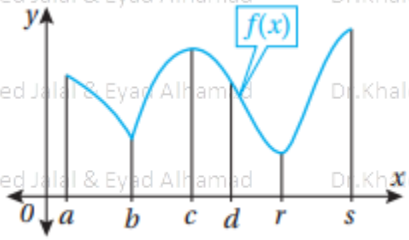
(23) أجد عدد القطع اللازم بيعها من المنتج لتحقيق أكبر ربح ممكن ، ثم أجد أكبر ربح ممكن .

(24) أجد سعر المنتج الذي يحقق أكبر ربح ممكن .

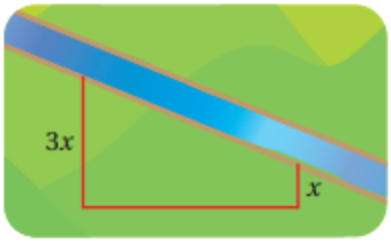
Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

(25) يبين الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x)$. أي النقاط الواقعة على المنحنى تمثل نقطة صغرى أو نقطة عظمى محلية ؟ أيها تمثل قيمة صغرى أو قيمة عظمى مطلقة ؟ أبرر إجابتي .



(26) لدى مزارع $400\ m$ من السياج ، وهو يريد تسييج حقله الذي يأخذ شكل شبه منحرف ، و يوجد على حافة النهر كما بالشكل المجاور . إذا كان طول أحد الضلعين المتوازيين يساوي 3 أمثال طول الضلع الاخر ، فأجد أكبر مساحة يمكن للمزارع أن يحيطها بهذا السياج ، علما بأن الجزء المقابل للنهر لا يحتاج إلى تسييج .



(27) يرتفع بالون رأسيا فوق مستوى طريق مستقيم بمعدل $1\ ft/s$. و في اللحظة التي كان فيها البالون على ارتفاع $65\ ft$ فوق سطح الأرض ، مرت أسفله دراجة تتحرك بسرعة $17\ ft/s$ كما بالشكل المجاور . أجد سرعة تغير المسافة بين البالون و الدراجة بعد 3 ثوان من هذه اللحظة .