Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

طريق التفوق

في

الرياضيات العلمي

الوحدة الأولى

التفاضل

2006

إعداد

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

Dr. Khaled jalal

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad
Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad
Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

0799948198

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

الفهرس

رقم الدرس	أسم الدرس	رقم الصفحة
الأول	مشتقة اقترانات خاصة (كتاب الطالب)	4
الأول	مشتقة اقترانات خاصة (كتاب التمارين)	10
الثاني	مشتقتا الضرب و القسمة و المشتقات العليا (كتاب الطالب)	11
الثاني	مشتقتا الضرب و القسمة و المشتقات العليا (كتاب التمارين)	16
الثالث	قاعدة السلسلة (كتاب الطالب)	17
الثالث	قاعدة السلسلة (كتاب التمارين)	24
الرابع	الاشتقاق الضمني (كتاب الطالب)	26
الرابع	الاشتقاق الضمني (كتاب التمارين)	30
	أختبار نهاية الوحدة	33

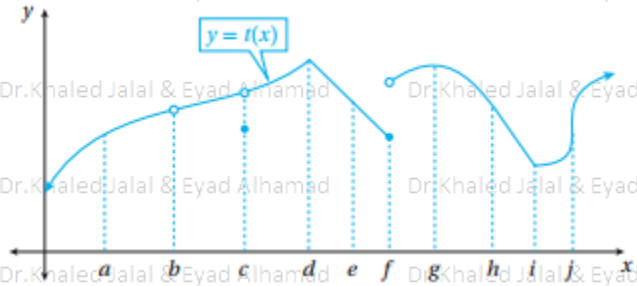
Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

مشتقة اقترانات خاصة

كتاب الطالب

الدرس الاول

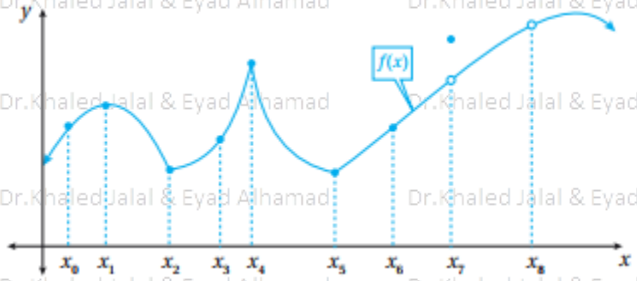
مثال 1 :



يبين الشكل المجاور منحنى الأقتران $t(x)$.

أحدد قيم x للنقاط التي يكون عندها الاقتران $t(x)$ غير قابل للأشتقاق ، مبررا إجابتي .

أتحقق من فهمي صفحة (10) :



يبين الشكل المجاور منحنى الأقتران $f(x)$.

أحدد قيم x للنقاط التي يكون عندها الاقتران $f(x)$ غير قابل للأشتقاق ، مبررا إجابتي .

مثال 2 :

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

1) $f(x) = 3e^x$ (2 $f(x) = x^2 + e^x$ 3) $y = \dfrac{\sqrt[3]{x} - 2xe^x}{x}$

أتحقق من فهمي صفحة (12):

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

a) $f(x) = 5e^x + 3$ b) $f(x) = \sqrt{x} - 4e^x$ c) $y = 8e^x + \dfrac{4}{\sqrt[5]{x}}$

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

مثال 3 :

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

1) $f(x) = ln(x^4)$ 2) $f(x) = ln(xe^x) + ln(7x)$

أتحقق من فهمي صفحة (14):

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

a) $f(x) = \sqrt{x} + ln(4x)$ b) $f(x) = ln(2x^3)$

مثال 4 :

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

1) $f(x) = 3\,sin\,x + 4$ 2) $y = \frac{1}{2}e^x - 7\,cos\,x$

أتحقق من فهمي صفحة (16):

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

a) $f(x) = \frac{1}{2}\,sin\,x + 3\,cos\,x$ b) $f(x) = x^2 + cos\,x + sin\,\frac{\pi}{2}$

مثال 5 :

إذا كان الاقتران $f(x) = ln\left(\frac{x}{e}\right)$ ، فأستعمل المشتقة لإيجاد كل مما يأتي :

1) معادلة المماس عند النقطة $(1\,,-1)$.

2) معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(1\,,-1)$.

أتحقق من فهمي صفحة (17):

إذا كان الاقتران $f(x) = ln\sqrt{x}$ ، فأستعمل المشتقة لإيجاد كل مما يأتي :

a) معادلة المماس عند النقطة $(e\,,\frac{1}{2})$.

b) معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(e\,,\frac{1}{2})$.

مثال 6 :

يمثل الاقتران $s(t) = 6t^2 - t^3$ ، $t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار ، t الزمن بالثواني :

1) أجد سرعة الجسم المتجهة و تسارعه عندما $t = 2$.

2) أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي .

3) في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t = 5$.

4) متى يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي؟

أتحقق من فهمي صفحة (20):

يمثل الاقتران $s(t) = t^2 - 7t + 8$ ، $t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار ، t الزمن بالثواني :

a) أجد سرعة الجسم المتجهة و تسارعه عندما $t = 4$.

b) أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي .

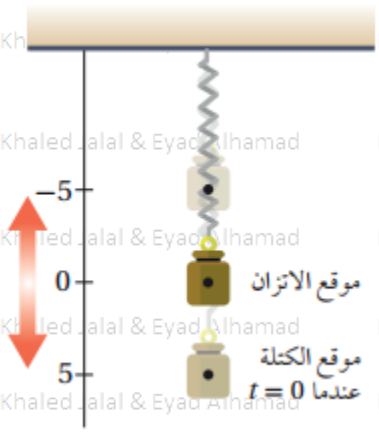
c) في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t = 2$.

d) متى يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي ؟

مثال 7 :

يبين الشكل المجاور جسما معلقا بزنبرك ، شد 5 وحدات أسفل الاتزان $(s = 0)$ ، ثم ترك عند الزمن $t = 0$ ليتحرك إلى الأعلى و إلى الأسفل . و يمثل الاقتران :

$s(t) = 5\cos t$ موقع الجسم عند أي زمن لاحق t حيث t الزمن بالثواني ، s الموقع بالسنتيمترات :



1) أجد اقترانا يمثل سرعة الجسم المتجهة ، و اقترانا أخر يمثل تسارعه عند أي لحظة .

2) أصف حركة الجسم .

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

أتحقق من فهمي صفحة (22):

يتحرك جسم معلق بزنبرك إلى الأعلى و إلى الأسفل و يمثل الاقتران : $s(t) = 7\,sin\,t$ موقع الجسم

عند أي زمن لاحق ، حيث t الزمن بالثواني ، s الموقع بالأمتار :

a) أجد اقترانا يمثل سرعة الجسم المتجهة ، و اقترانا أخر يمثل تسارعه عند أي لحظة .

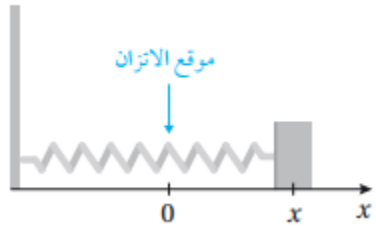
b) أصف حركة الجسم .

مسألة اليوم

يهتز جسم مثبت في زنبرك أفقيا عل سطح أملس

كما بالشكل المجاور . و يمثل الاقتران $x(t) = 8\,sin\,t$

موقع الجسم ، حيث الزمن بالثواني ، الموقع بالسنتيمترات



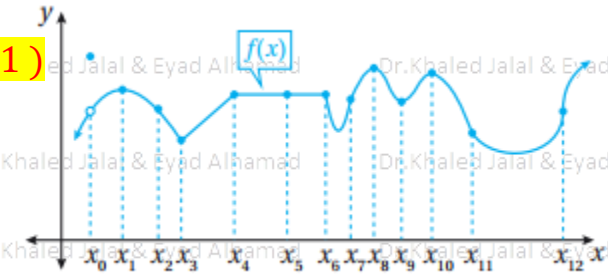
1) أجد موقع الجسم ، و سرعته المتجهه ، و تسارعه عندما $t = \frac{2}{3}$.

2) في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t = \frac{2}{3}$ ؟

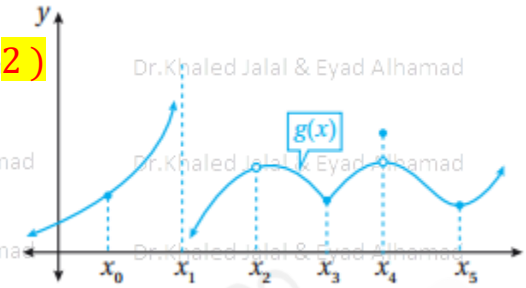
أتدرب و أحل المسائل صفحة (22) ، (23) ، (24):

أحدد قيم للنقاط التي لا يكون عندها كل اقتران مما يأتي قابلا للاشتقاق :

1)



2)



أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

3) $f(x) = 2\,sin\,x - e^x$

4) $f(x) = \frac{ln\,x}{4} - \pi\,cos\,x$

5) $f(x) = ln\left(\frac{1}{x^3}\right) + x^4$

6) $f(x) = e^{x+1} + 1$

7) $f(x) = e^x + x^e$

8) $f(x) = \ln\left(\frac{10}{x^n}\right)$

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

إذا كان $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\, e^x$ ، فأجيب عن السؤالين الاتيين تباعا :

9) أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران f عند النقطة $(\pi\ ,\ \frac{1}{2}\, e^{\pi})$.

10) أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران f عند النقطة $(\pi\ ,\ \frac{1}{2}\, e^{\pi})$.

11) أجد قيمة x التي يكون عندها المماس أفقيا لمنحنى الاقتران $f(x) = e^x - 2x$.

12) أي الاتية تمثل معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران $f(x) = \sin x + \cos x$ عند $x = \pi$ ؟

a) $y = -x + \pi - 1$ b) $y = x - \pi - 1$ c) $y = x - \pi + 1$ d) $y = x + \pi + 1$

13) إذا كان $f(x) = ln(kx)$ ، حيث k عدد حقيقي موجب ، $x > 0$ ، فأبين أن $f\ (x) = \frac{1}{x}$

إذا كان الاقتران $f(x) = ln\, x$ ، فأجيب عن السؤالين الاتيين تباعا :

14) أثبت أن مماس منحنى الاقتران عند النقطة $(e\ ,\ 1)$ يمر بنقطة الأصل .

15) أثبت أن المقطع x للعمودي على المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة $(e\ ,\ 1)$ هو $e + \frac{1}{e}$

يمثل الاقتران $s(t) = t^3 - 4t^2 + 5t$ ، $t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار ، t الزمن بالثواني :

16) أجد سرعة الجسم المتجهة و تسارعه عندما $t = 5$.

17) أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي .

18) في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t = 4$.

19) متى يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي ؟

يمثل الاقتران $s(t) = e^t - 4t$ ، $t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار ، t الزمن بالثواني :

20) أحدد الموقع الابتدائي للجسم

21) أجد تسارع الجسم عندما تكون سرعته المتجهة صفرا

يتحرك جسم معلق بزنبرك إلى الأعلى و إلى الأسفل و يمثل الاقتران : $s(t) = 4\cos t$ موقع الجسم عند أي زمن لاحق ، حيث t الزمن بالثواني ، s الموقع بالأمتار :

22) أجد اقترانا يمثل سرعة الجسم المتجهة ، و اقترانا أخر يمثل تسارعه عند أي لحظة .

23) أجد سرعة الجسم المتجهة و تسارعه عندما $t = \frac{\pi}{4}$ 24) أصف حركة الجسم

مهارات التفكير العليا صفحة (25)

25) إذا كان الاقتران $y = e^x - ax$ ، حيث a عدد حقيقي ، فأجد معادلة المماس عند نقطة تقاطع الاقتران مع المحور y مبررا إجابتي .

26) أثبت عدم وجود مماس ميله 2 للاقتران $y = 2e^x + 3x + 5x^3$

إذا كان الاقتران $y = k\,e^x$ ، حيث $k > 0$ ، وكان منحناه يقطع المحور y عند النقطة p ، فأجيب عن السؤالين الاتيين تباعا :

27) أجد نقطة تقاطع مماس منحنى الاقتران عند النقطة p مع المحور x .

28) إذا كان العمودي على المماس عند النقطة p يقطع المحور عند النقطة $(0, 100)$، فأجد قيمة k

إذا كان الاقتران $y = \log x$ ، فأجيب عن السؤالين الاتيين تباعا :

29) أثبت أن : $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln 10}$

30) معتمدا على النتيجة من السؤال السابق ، أجد $\frac{dy}{dx}$ للاقتران $y = \log ax^2$ ، حيث $a > 0$

يمثل الاقتران $s(t) = 4 - \sin t$ ، $t \geq 0$ موقع جسيم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار ، t الزمن بالثواني :

31) أجد سرعة الجسيم المتجهة و تسارعه بعد t ثانية .

32) أحدد موقع الجسيم عندما كان في حالة سكون لحظي أول مرة بعد انطلاقه .

33) أحدد موقع الجسيم عندما يصل إلى أقصى سرعة ، مبررا إجابتي .

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

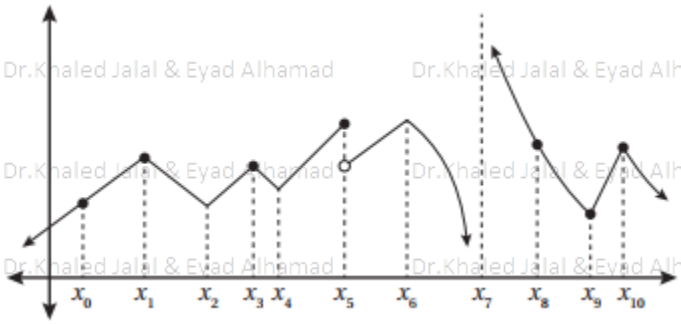
الدرس الاول

مشتقة اقترانات خاصة

كتاب التمارين

(1) يبين الشكل المجاور:

منحنى الأقتران $f(x)$. أحدد قيم x للنقاط التي يكون عندها الاقتران $f(x)$ غير قابل للأشتقاق ، مبررا إجابتي .



أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

(2) $f(x) = 9e^x + \frac{1}{3\sqrt{x}}$ (3) $f(x) = 2e^x + \frac{1}{x^2}$ (4) $f(x) = \frac{\pi}{2} \sin x - \cos x$

(5) أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x) = 2e^x + x$ عند $x = 2$.

(6) أثبت عدم وجود مماس أفقي لمنحنى الاقتران $f(x) = 3x + \sin x + 2$.

يمثل الاقتران $s(t) = 3t^2 - t^3$ ، $t \geq 0$ موقع جسيم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار ، t الزمن بالثواني :

(7) أجد سرعة الجسيم المتجهة و تسارعه بعد t ثانية .

(8) أحدد موقع (المواقع) الذي يكون عنده الجسيم في حالة سكون.

إذا كان $f(x) = \ln x^2$ ، حيث $x > 0$ ، فأجيب عن السؤالين الاتيين تباعا :

(9) أجد معادلة مماس منحنى الاقتران عندما $x = e^2$.

(10) أجد الاحداثي x للنقطة التي يكون المماس عندها موازيا المستقيم $6x - 2y + 5 = 0$.

إذا كان $f(x) = 2 \sin x - 4 \cos x$ ، فأجيب عن السؤالين الاتيين تباعا :

(11) أجد ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عندما $x = 0$.

(12) أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عندما $x = \frac{\pi}{2}$.

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

الدرس الثاني

مشتقتا الضرب و القسمة و المشتقات العليا

كتاب الطالب

مثال 1 :

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

1) $f(x) = (3x - 2x^2)(5 + 4x)$

2) $f(x) = x\,e^x$

أتحقق من فهمي صفحة (28):

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

a) $f(x) = (x^3 - 2x^2 + 3)(7x^2 - 4x)$

b) $f(x) = lnx\ cosx$

مثال 2 :

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

1) $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$

2) $f(x) = \dfrac{lnx}{x + 1}$

أتحقق من فهمي صفحة (30):

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

a) $f(x) = \dfrac{x + 1}{2x + 1}$

b) $f(x) = \dfrac{sinx}{e^x}$

مثال 3 :

تعطى درجة حرارة مريض في أثناء مرضه بالاقتران :

$T(t) = \dfrac{4t}{1 + t^2} + 98.6$ ، حيث t الزمن

بالساعات بعد ظهور أعراض المرض ، و T درجة بالفهرنهايت :

1) أجد معدل تغير درجة حرارة المريض بالنسبة للزمن .

2) أجد معدل تغير درجة حرارة المريض عندما $t = 2$ ، مفسرا معنى الناتج .

أتحقق من فهمي صفحة (32):

يعطى عدد سكان مدينة صغيرة بالاقتران $P(t)=\frac{500t^2}{2t+9}$ ، حيث t الزمن بالسنوات ، و P عدد السكان بالالاف :

a) أجد معدل تغير عدد السكان في المدينة بالنسبة للزمن .

b) أجد معدل تغير عدد السكان في المدينة عندما $t=12$ ، مفسرا معنى الناتج .

مثال 4 :

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

1) $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$

2) $f(t)=\frac{1}{t+\frac{1}{t}}$

أتحقق من فهمي صفحة (33):

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

a) $f(x)=\frac{1}{5x-x^2}$

b) $f(x)=\frac{1}{e^x+\sqrt{x}}$

مثال 5 :

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

1) $f(x)=x^2\sec x$

2) $f(x)=\frac{cscx}{1+tanx}$

أتحقق من فهمي صفحة (35):

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

a) $f(x)=x\cot x$

b) $f(x)=\frac{tanx}{1+sinx}$

مثال 6 :

أجد المشتقات الأربع الاولى للاقتران : $f(x)=x^2-\frac{1}{x}$

أتحقق من فهمي صفحة (36):

أجد المشتقات الثلاث الاولى للاقتران : $f(x)=\frac{sinx}{x}$

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

أتدرب و أحل المسائل صفحة (36) ، (37) ، (38)

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

1) $f(x)=\frac{x^3}{2x-1}$ 2) $f(x)=x^3 secx$ 3) $f(x)=\frac{x+1}{cosx}$

4) $f(x)=e^x(tanx-x)$ 5) $f(x)=\frac{sinx+cosx}{e^x}$ 6) $f(x)=x^3 sinx+x^2 cosx$

7) $f(x)=\sqrt[3]{x}(\sqrt{x}+3)$ 8) $f(x)=\frac{1+secx}{1-secx}$ 9) $f(x)=\frac{2-\frac{1}{x}}{x-3}$

10) $f(x)=(x^3-x)(x^2+2)(x^2+x+1)$ 11) $f(x)=(cscx+cotx)^{-1}$

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق عندما $x=0$ ، وكان $g'(0)=2$ ، $g(0)=-1$
$f'(0)=-3$ ، $f(0)=5$ ، فأجد كلا مما يأتي :

12) $(f.g)'(0)$ 13) $\left(\frac{f}{g}\right)'(0)$ 14) $(7f-2fg)'(0)$

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة :

15) $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+4}$, $x=-2$ 16) $f(x)=\frac{1+x}{1+\sqrt[3]{x}}$, $x=8$

17) $f(x)=\frac{1}{1+\sqrt{x}}$, $x=4$

أجد معادلة المماس لكل اقتران مما يأتي عند النقطة المعطاة:

18) $f(x)=\frac{1+x}{1+e^x}$, $(0,\frac{1}{2})$ 19) $f(x)=e^x cosx+sinx$, $(0,1)$

أثبت صحة كل مما يأتي معتمدا أن : $\frac{d}{dx}(sinx)=cosx$ ، $\frac{d}{dx}(cosx)=-sinx$

20) $\frac{d}{dx}(cotx)=-csc^2 x$ 21) $\frac{d}{dx}(secx)=secx\ tanx$

22) $\frac{d}{dx}(cscx)=-cscx\ cotx$

ألاحظ المشتقة المعطاة في كل مما يأتي ، ثم أجد المشتقة العليا المطلوبة :

23) $f^{(2)}(x) = 2 - \frac{2}{x}$ ، $f^{(3)}(x)$

24) $f^{(3)}(x) = 2\sqrt{x}$ ، $f^{(4)}(x)$

25) $f^{(4)}(x) = 2x + 1$ ، $f^{(6)}(x)$

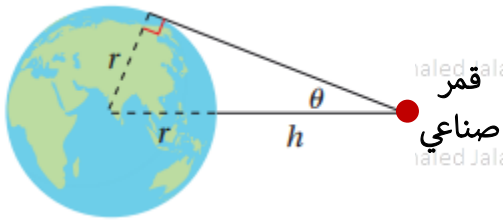
26) وجد فريق بحث زراعي أنه يمكن التعبير عن أرتفاع نبته مهجنة من نبات تباع الشمس h بالأمتار ، باستعمال الاقتران $h(t) = \frac{3t^2}{4+t^2}$ ، حيث t الزمن بالأشهر بعد زراعة البذور . أجد معدل تغير ارتفاع النبتة بالنسبة للزمن .

إذا كان الاقتران $y = e^x \sin x$ ، فأجيب عن السؤالين الاتيين تباعا :

27) أجد $\frac{dy}{dx}$ و $\frac{d^2y}{dx^2}$.

28) أثبت أن $\frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{dy}{dx} - 2y$

إذا كان h يمثل المسافة بين القمر الصناعي و سطح الأرض بالكيلومتر و يمثل r نصف قطر الأرض بالكيلومتر .، فأجيب عن السؤالين الاتيين تباعا :

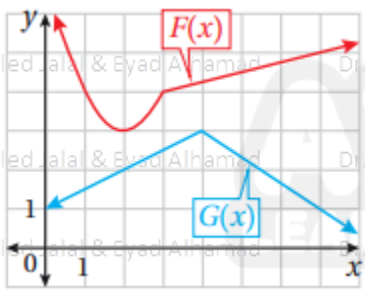


29) أثبت أن $h = r(\csc\theta - 1)$

30) أجد معدل تغير h بالنسبة إلى θ عندما $\theta = \frac{\pi}{6}$ ، (أفترض أن $r = 6371\,km$)

31) إذا كان : $f(x) = 9\ln x + \frac{1}{2x^2}$ ، فأثبت أن $f'(x) = \frac{(3x-1)(3x+1)}{x^3}$.

يبين الشكل المجاور منحنيي الاقترانين : $F(x)$ ، $G(x)$



إذا كان : $P(x) = F(x)\,G(x)$

، و كان $Q(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$ ، فأجد كلا مما يأتي :

32) $P'(2)$

33) $Q'(7)$

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

مهارات التفكير العليا صفحة (38)

إذا كان : $y = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{x}}$ ، فأجيب عن السؤالين الاتيين تباعا :

34) أجد ميل المماس عند نقطة الأصل .

35) أبين عدم وجود مماس أفقي للاقتران y ، مبررا إجابتي .

إذا كان : $y = \frac{x + 1}{x - 1}$ ، حيث $x \neq 1$ ، فأجيب عن الاسئلة الثلاثة الاتية تباعا :

36) أجد $\frac{dy}{dx}$

37) أعيد كتابة المعادلة بالنسبة إلى المتغير x (x اقتران بالنسبة إلى y) ، ثم أجد $\frac{dx}{dy}$

38) أبين أن $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

إذا كان : $f(x) = \frac{lnx}{x^2}$ ، فأجيب عن السؤالين الاتيين تباعا :

39) أثبت أن : $f^{(2)}(x) = \frac{6\,lnx - 5}{x^4}$ مبررا إجابتي .

40) أجد قيمة المقدار : $x^4 f^{(2)}(x) + 4x^3 f^{(1)}(x) + 2x^2 f(x) + 1$.

مسألة اليوم

كلما ازداد سطوع الضوء الساقط على بؤبؤ العين تقلصت مساحة البؤبؤ . يستعمل الاقتران : $A(b) = \frac{40 + 24b^{0.4}}{1 + 4b^{0.4}}$ لحساب مساحة بؤبؤ العين بالمليمترات المربعة ، حيث b مقدار سطوع الضوء بوحدة اللومن (lm) وتعرف حساسية العين للضوء بأنها مشتقة اقتران مساحة البؤبؤ بالنسبة إلى السطوع . أجد اقترانا يمثل حساسية العين للضوء .

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

الدرس الثاني

مشتقتا الضرب و القسمة و المشتقات العليا

كتاب التمارين

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

(1) $f(x)=\frac{sinx}{x}$ (2) $f(x)=-cscx-sinx$ (3) $f(x)=\frac{x+c}{x+\frac{c}{x}}$

(4) $f(x)=x\,cotx$ (5) $f(x)=4x-x^2\,tanx$ (6) $f(x)=\frac{cosx}{x^2}$

(7) $f(x)=x\left(1-\frac{4}{x+3}\right)$ (8) $f(x)=\frac{3(1-sinx)}{2cosx}$ (9) $f(x)=(x+1)e^x$

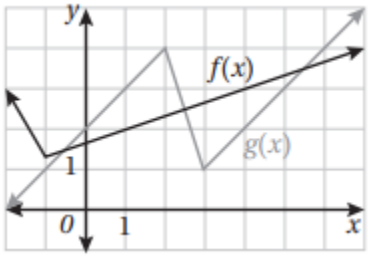
أجد معادلة المماس لكل اقتران مما يأتي عند النقطة المعطاة :

(10) $f(x)=x^2\,cosx$, $(\frac{\pi}{2},0)$ (11) $f(x)=\frac{1+sinx}{cosx}$, $(\pi,-1)$

أجد إحداثيي نقطة (النقاط) التي يكون عندها لمنحنى كل اقتران مما يأتي مماس أفقي :

(12) $f(x)=\frac{2x-1}{x^2}$ (13) $h(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$ (14) $g(x)=\frac{8(x-2)}{e^x}$

يبين الشكل المجاور منحنيي الاقترانين : $f(x)$ ، $g(x)$.



إذا كان : $u(x)=f(x)\,g(x)$ ، وكان $v(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$

، فأجد كلا مما يأتي :

(15) $u'(1)$ (16) $v'(4)$

(17) إذا كان : $f(x)=x\,secx$ ، فأثبت أن $f'(x)=secx\,(1+x\,tanx)$.

(18) إذا كان : $f(x)=\frac{lnx}{x}$ ، حيث $x>0$ ، فأجد $f'(x)$ ، و $f^{(2)}(x)$.

يمثل الاقتران $v(t)=\frac{10}{2t+15}$ السرعة المتجهة لسيارة بدأت الحركة في مسار مستقيم ، حيث تقاس v بالقدم لكل ثانية ، $t\geq 0$:

(19) أجد تسارع السيارة عندما $t=5$ (20) أجد تسارع السيارة عندما $t=5$

(21) يعطى طول مستطيل بالمقدار $5t+6$ ، ويعطى عرضه بالمقدار $\sqrt{t}$ ، حيث t الزمن بالثواني والابعاد بالسنتيمترات . أجد معدل تغير مساحة المستطيل بالنسبة للزمن .

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

الدرس الثالث

قاعدة السلسلة

كتاب الطالب

مثال 1 :

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

1) $f(x) = cos\,2x$ 2) $f(x) = e^{(x+x^2)}$ 3) $f(x) = ln(sinx)$

أتحقق من فهمي صفحة (41):

a) $f(x) = tan\,3x^2$ b) $f(x) = e^{ln\,x}$ c) $f(x) = ln(cotx)$

مثال 2 :

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

1) $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$ 2) $f(x) = tan^4x$ 3) $f(x) = \sqrt{ln\,x}$

أتحقق من فهمي صفحة (42):

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

a) $f(x) = \sqrt[5]{(x^2-1)^2}$ b) $f(x) = \sqrt{cosx}$ c) $f(x) = (\,lnx)^5$

مثال 3 :

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

1) $f(x) = e^{\csc 4x}$ 2) $f(x) = sin(tan\sqrt{3x^2+4}\,)$

أتحقق من فهمي صفحة (44):

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

a) $f(x) = cos^2(\,7x^3+6x-1)$ b) $f(x) = (\,2+(x^2+1)^4)^3$

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

مثال 4 :

1) أجد ميل المماس لمنحنى الاقتران : $f(x) = e^{-0.2x}\ sin\ 4x$ عندما $x = \frac{\pi}{8}$

2) أجد ميل العمودي على المماس لمنحنى الاقتران : $f(x) = \left(\frac{3x-1}{x^2+3}\right)^2$ عندما $x = 0$.

أتحقق من فهمي صفحة (45):

a) أجد ميل المماس لمنحنى الاقتران : $f(x) = (2x+1)^5(x^3-x+1)^4$ عندما $x = 1$.

b) أجد ميل العمودي على المماس لمنحنى الاقتران : $f(x) = \frac{cos^2 x}{e^{2x}}$ عندما $x = \frac{\pi}{2}$

مثال 5 :

طرحت إحدى الشركات منتجا جديدا في الأسواق ، ثم رصدت عدد القطع المبيعة منذ طرحه . إذا مثل الاقتران $N(t) = \frac{250000\ t^2}{(2t+1)^2}$ ، حيث $t > 0$

عدد القطع المبيعة منذ طرحه ، حيث t الزمن بالأسابيع ، فأجيب عن السؤالين الاتيين تباعا :

1) أجد معدل تغير عدد القطع المبيعة بالنسبة للزمن . 2) أجد $N'(52)$ مفسرا معنى الناتج .

أتحقق من فهمي صفحة (46):

تحسب قيمة بدل الخدمة لأحد المنتجات بالدينار باستعمال الاقتران $U(x) = 80\sqrt{\frac{2x+1}{3x+4}}$

حيث x عدد القطع المبيعة من المنتج :

a) أجد معدل تغير قيمة بدل الخدمة بالنسبة إلى عدد القطع المبيعة من المنتج .

b) أجد $U'(20)$ مفسرا معنى الناتج .

مثال 6 :

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

1) $f(x) = 8^{5x}$ 2) $f(x) = 6^{x^2}$ 3) $f(x) = e^{3x} + 2^{3x}$

أتحقق من فهمي صفحة (48):

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

a) $f(x) = \pi^{\pi x}$ b) $f(x) = 6^{1-x^3}$ c) $f(x) = e^{4x} + 4^{2x}$

مثال 7 :

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

1) $f(x) = log\, cosx$ 2) $f(x) = log_2\left(\frac{x^2}{x-1}\right)$

أتحقق من فهمي صفحة (49):

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

a) $f(x) = log\, secx$ b) $f(x) = log_8(x^2 + 3x)$

مثال 8 :

أجد معادلة مماس منحنى المعادلة الوسيطية الاتية عندما : $t = \frac{\pi}{4}$

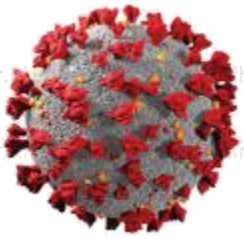
$x = 2\,sin\,t$, $y = 3\,cos\,t$, $0 \le t \le 2\pi$

أتحقق من فهمي صفحة (52):

أجد معادلة مماس منحنى المعادلة الوسيطية الاتية : عندما $t = \frac{\pi}{4}$:

$x = sec\,t$, $y = tan\,t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

مسألة اليوم



يمكن نمذجة انتشار الإنفلونزا في إحدى المدارس باستعمال الاقتران $P(t) = \frac{100}{1 + e^{3-t}}$ ، حيث $P(t)$ العدد التقريبي الكلي للطلبة المصابين بعد t يوما من ملاحظة الإنفلونزا أول مرة في المدرسة .

أجد سرعة انتشار الإنفلونزا في المدرسة بعد 3 أيام ، مبررا إجابتي .

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

أتدرب و أحل المسائل صفحة (53) ، (54)

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

1) $f(x) = e^{4x+2}$

2) $f(x) = 50\, e^{2x-10}$

3) $f(x) = cos\,(x^2 - 3x - 4)$

4) $f(x) = 10\, x^2\, e^{-x}$

5) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$

6) $f(x) = x^2\ tan\ \dfrac{1}{x}$

7) $f(x) = 3x - 5\,cos(\pi x)^2$

8) $f(x) = ln\left(\dfrac{1+e^x}{1-e^x}\right)$

9) $f(x) = (ln\, x)^2$

10) $f(x) = sin\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{sin\, x}$

11) $f(x) = \sqrt[5]{x^2 + 8x}$

12) $f(x) = \dfrac{3^{2x}}{x}$

13) $f(x) = 2^{-x}\ cos\,\pi x$

14) $f(x) = \dfrac{10\log_4 x}{x}$

15) $f(x) = \left(\dfrac{sinx}{1+cosx}\right)^2$

16) $f(x) = log_3(1 + x\, ln\, x)$

17) $f(x) = e^{sin\,2x} + sin(e^{2x})$

18) $f(x) = tan^4(\sec(cosx))$

أجد معادلة المماس لكل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة :

19) $f(x) = 4\, e^{-0.5x^2}$ ، $x = -2$

20) $f(x) = x + cos\, 2x$ ، $x = 0$

21) $f(x) = 2^x$ ، $x = 0$

22) $f(x) = \sqrt{x+1}\ \ sin\dfrac{\pi x}{2}$ ، $x = 3$

23) إذا كان : $A(x) = f(g(x))$ ، وكان : $g(5) = -2$ ، $g'(5) = 6$ ، $f'(5) = 3$ ، $f'(-2) = 4$ ، $f(-2) = 8$ ، فأجد $A'(5)$.

24) إذا كان : $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ، فأثبت أن : $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$

يمثل الاقتران $A(t) = Ne^{0.1t}$ عدد الخلايا البكتيرية بعد t ساعة في مجتمع بكتيري :

25) أجد معدل نمو المجتمع بعد 3 ساعات بدلالة الثابت N .

26) إذا كان معدل نمو المجتمع بعد k ساعة هو 0.2 خلية لكل ساعة ، فما قيمة k بدلالة الثابت N ؟

أجد المشتقة العليا المطلوبة في كل مما يأتي : (ملحوظة : المطلوب فقط للمشتقة الرابعة فقط)

27) $f(x) = \sin \pi x$ ، $f^{(3)}(x)$ 28) $f(x) = \cos(2x+1)$ ، $f^{(4)}(x)$

29) $f(x) = \cos x^2$ ، $f^{(2)}(x)$

30) إذا كان : $y = e^{\sin x}$ ، فأجد ميل مماس منحنى الاقتران عند النقطة $(0, 1)$.

31) يمكن نمذجة الكمية A (بالغرام) المتبقية من عينة كتلتها الابتدائية $20\ g$ من عنصر البلوتونيوم بعد t يوما باستعمال الاقتران $A(t) = 20\left(\frac{1}{2}\right)^{t/140}$.

أجد معدل تحلل عنصر البلوتونيوم عندما $t = 2$

تتحرك كرة معلقة بزنبرك إلى الأعلى و إلى الأسفل ، و يحدد الاقتران $s(t) = 0.1 \sin 2.4t$ موقع الكرة عند أي زمن لاحق ، حيث t الزمن بالثواني ، s الموقع بالسنتيمترات :

32) أجد السرعة المتجهة للكرة عندما $t = 1$.

33) أجد موقع الكرة عندما تكون سرعتها صفرا .

34) أجد موقع الكرة عندما يكون تسارعها صفرا .

أجد معادلة المماس لمنحنى كل معادلة وسيطية مما يأتي عند النقطة المحددة بقيمة t المعطاة :

35) $x = t + 2$ ، $y = t^2 - 1$ ، $t = 1$ 36) $x = \frac{t}{2}$ ، $y = t^2 - 4$ ، $t = -1$

37) $x = t - \sin t$ ، $y = 1 - \cos t$ ، $t = \frac{\pi}{2}$

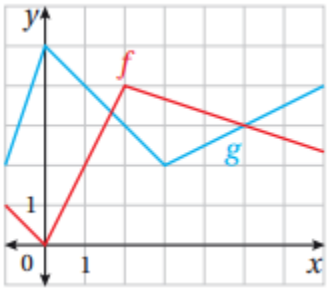
38) $x = \sec^2 t - 1$ ، $y = \tan t$ ، $t = -\frac{\pi}{4}$

39) يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية $x = 2(t - \sin t)$ ، $y = 2(1 - \cos t)$ حيث $0 \le t \le 2\pi$.

أثبت أن ميل المماس و ميل العمودي على المماس لمنحنى هذه العلاقة عندما $t = \frac{\pi}{4}$ هما على الترتيب $1 + \sqrt{2}$ ، و $1 - \sqrt{2}$.

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

يبين الشكل المجاور :



منحنيي الاقترانين : $f(x)$ ، $g(x)$

إذا كان : $h(x) = f(\,g(x)\,)$

، وكان : $p(x) = g(\,f(x)\,)$

، فأجد كلا مما يأتي :

40) $h'(1)$ 41) $p'(1)$

مهارات التفكير العليا صفحة (55)

إذا كان الاقتران : $y = ln(ax + b)$ ، حيث a و b ثابتان موجبان ، وكان ميل المماس لمنحنى الاقتران الاقتران عند النقطة p هو 1 ، فأجيب عن السؤالين الاتيين تباعا :

42) أثبت أن الإحداثي x للنقطة p أقل من 1 .

43) أجد كل من a ، b علما بأن p هي النقطة $(\,0\,,2\,)$ ، ثم أبرر إجابتي .

44) أجد إحداثيي النقطة التي يكون عندها ميل المماس $\frac{1}{2}$

يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية : $y = 2t$, $x = t^2$:

45) أجد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة t .

46) أجد معادلة العمودي على مماس المنحنى عند النقطة $(\,t^2\,,2t\,)$.

47) أثبت أن مساحة المثلث المكون من العمودي على المماس ، و المحورين الإحداثيين ، هي :

$\frac{1}{2}\,|t|\,(2 + t^2)^2$.

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

48) $y = \sqrt{sin\sqrt{x}}$ 49) $y = e^x\,sin^2x\,cosx$

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

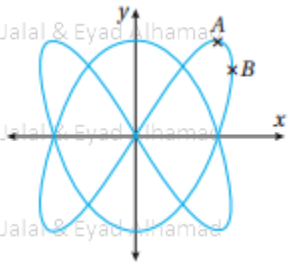
يبين الشكل المجاور :

منحنى المعادلة الوسيطية :

$$x = \sin 2t \ ,$$

$$y = \sin 3t$$

حيث : $0 \le t \le 2\pi$



50) إذا كان مماس منحنى المعادلة أفقيا عند النقطة A الواقعة في الربع الأول ، فأجد إحداثي A .

51) إذا كان مماس المنحنى موازيا للمحور Y عند النقطة B

فأجد إحداثي B .

52) إذا مر فرعان من المنحنى بنقطة الأصل كما هو موضح في الشكل ، فأجد ميل المماس لكل منهما عند هذه النقطة .

يمثل الاقتران $s(t) = ln\ (t^2 - 2t + 1.9)$ ، $t \ge 0$ موقع جسيم يتحرك في مسار مستقيم ،

حيث s الموقع بالأمتار ، t الزمن بالثواني :

53) أجد سرعة الجسيم المتجهة و تسارعه بعد t ثانية .

54) أجد موقع الجسيم و تسارعه عندما تكون سرعته صفرا .

55) متى يعود الجسيم إلى موقعه الابتدائي ؟

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

الدرس الثالث

قاعدة السلسلة

كتاب التمارين

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

(1) $f(x) = 100e^{-o.1x}$ (2) $f(x) = sin(x^2 + 1)$ (3) $f(x) = cos^2 x$

(4) $f(x) = cos\,2x - 2\,cos\,x$ (5) $f(x) = log_3 \dfrac{x\sqrt{x-1}}{2}$ (6) $f(x) = 2cot^2(\pi x + 2)$

(7) $f(x) = log\,2x$ (8) $f(x) = ln(x^3 + 1)$ (9) $f(x) = \left(\dfrac{x^2}{x^3+2}\right)^2$

(10) $f(x) = x^2\sqrt{20 - x}$ (11) $f(x) = \dfrac{sin(2x+1)}{e^{x^2}}$ (12) $f(x) = 3^{cotx}$

أجد معادلة المماس لكل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة :

(13) $y = 2\,sin\,5x - 4\,cos\,3x$, $x = \dfrac{\pi}{2}$ (14) $f(x) = (x^2+2)^3$, $x = -1$

(15) $f(x) = tan\,3x$, $x = \dfrac{\pi}{4}$

إذا كان الاقتران : $f(x) = 3\,sin\,x - sin^2 x$ ، فأجيب عن السؤالين الاتيين تباعا :

(16) أثبت أن : $f'(x) = 3\,cos^3 x$. (17) أجد $f^{(2)}(x)$.

(18) يعطي منحنى بالمعادلة الوسيطية : $x = a\,cos\,t$, $y = b\,sin\,t$ ، حيث $0 \le t \le 2\pi$

أجد المقطع y لمماس المنحنى عندما $t = \dfrac{\pi}{4}$ بدلالة a و b .

إذا كان الاقتران : $y = e^{ax}$ ، حيث a ثابت ، و $a > 0$ ، فأجيب عن السؤالين الاتيين تباعا :

(19) أجد إحداثيي النقطة P التي تقع على منحنى الاقتران ، و يكون ميل المماس عندها 1 .

(20) أثبت أنه يمكن كتابة معادلة العمودي على المماس عند النقطة P في صورة $x + y = k$ ، ثم أجد قيمة الثابت k .

(21) إذا كان : $h(x) = \sqrt{4 + 3f(x)}$ ، و كان : $f'(1) = 4$ ، $f(1) = 7$ ، فأجد $h'(1)$.

(22) إذا كان الاقتران : $f(x) = e^{2x} + e^{-2x}$ ، فأثبت أن $f^{(2)}(x) = 4\,f(x)$.

(23) إذا كان الاقتران : $f(x) = \sin 4x + \cos 4x$ ، فأثبت أن $f^{(2)}(x) + 16\, f(x) = 0$.

يعطي منحنى بالمعادلة الوسيطية : $y = 2\cos\theta$, $x = \sin^2\theta$ ، حيث $0 \le \theta \le 2\pi$ ،

فأجيب عن ما يلي :

(24) أجد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة θ . (25) أجد معادلة المماس عندما يكون الميل $\sqrt{2}$.

(26) أجد النقطة التي يكون عندها المماس موازيا للمحور y .

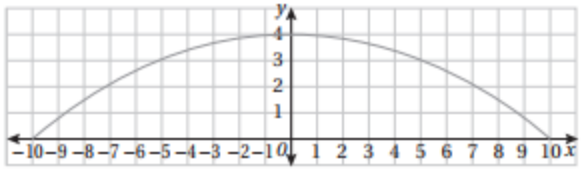
(27) يمثل الاقتران : $v(t) = 15\, t\, e^{-0.05t^2}$ السرعة المتجهة (بالمتر لكل ثانية) لسيارة تتحرك في مسار مستقيم ، حيث $0 \le t \le 10$. أجد السرعة المتجهة للسيارة عندما يكون تسارعها صفرا .

أجد $(f \circ g)'(x)$ ، عند قيمة x المعطاة في كل مما يأتي :

(28) $f(u) = u^5 + 1$, $u = g(x) = \sqrt{x}$, $x = 1$

(29) $f(u) = u + \frac{1}{\cos^2 x}$, $u = g(x) = \pi x$, $x = \frac{1}{4}$

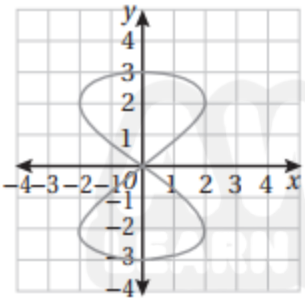
يبين التمثيل البياني المجاور شكل مطب سرعة صمم للتخفيف من سرعة السيارات على أحد الطرق . و فيه يمثل المحور x سطح الأرض وتقاس جميع الأطوال بالسنتيمترات .



إذا كانت المعادلة الوسيطية التي تمثل منحنى المطب هي : $x = 10\sin t$, $y = 2 + 2\cos 2t$ ، حيث $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$ ، فأجد كلا مما يأتي :

(30) ميل المماس لمنحنى المطب بدلالة t . (31) قيمة t عند أعلى نقطة على منحنى المطب .

(32) يبين الشكل المجاور :



منحنى المعادلة الوسيطية :

$x = 2\sin 2t$, $y = 3\cos t$

حيث : $0 \le t \le 2\pi$

أجد ميل المماس لمنحنى المعادلة عند نقطة الأصل ، مبررا أجابتي .

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

الدرس الرابع

الاشتقاق الضمني

كتاب الطالب

مثال 1 :

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

1) $x^2 + y^2 = 4$

2) $\sin x + \cos y = 2x - y$

أتحقق من فهمي صفحة (58):

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

a) $x^2 + y^2 = 13$

b) $2x + 5\,y^2 = \sin y$

مثال 2 :

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

1) $2\,x\,y - y^3 = 1$

2) $\sin(x + y) = y^2 \cos x$

3) $y = \frac{x - 1}{x + 1}$

أتحقق من فهمي صفحة (60):

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

a) $3\,x\,y^2 + y^3 = 8$

b) $\tan(x - y) = 2\,xy^2 + 1$

c) $x^2 = \frac{x - y}{x + y}$

مثال 3 :

1) أجد ميل مماس منحنى العلاقة : $e^{2x}\,\ln y = x + y - 2$ عند النقطة $(1, 1)$.

2) أجد ميل مماس منحنى العلاقة : $y^2 = x$ عندما $x = 4$.

أتحقق من فهمي صفحة (61):

a) أجد ميل مماس منحنى العلاقة : $y^2 = \ln x$ عند النقطة $(e, 1)$.

b) أجد ميل مماس منحنى العلاقة : $(y - 3)^2 = 4\,(x - 5)$ عندما $x = 6$.

مثال 4 :

أجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة : $x^2 - x\,y + y^2 = 7$ عند النقطة $(-1\,,2)$.

أتحقق من فهمي صفحة (63):

أجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة : $x^2 + y^2 - 3\,x\,y = 17$ عند النقطة $(2\,,3)$.

مثال 5 :

إذا كان $2x^3 - 3y^2 = 8$ ، فأجد $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

أتحقق من فهمي صفحة (64):

إذا كان $x\,y + y^2 = 2\,x$ ، فأجد $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

مثال 6 :

أجد $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ للمعادلة الوسيطية : $y = t^4 - 8\,t^2$, $x = t^3 + 3\,t^2$ عندما $t = 1$.

أتحقق من فهمي صفحة (65):

أجد $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ للمعادلة الوسيطية : $y = t^3 - 2\,t^2$, $x = 3t^2 + 1$ عندما $t = 2$.

مثال 7 :

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي :

1) $y = x^x$, $x > 0$

2) $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2+9}}$

أتحقق من فهمي صفحة (67):

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي :

1) $y = x^{\sqrt{x}}$, $x > 0$

2) $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x^4+1}}$

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

أتدرب و أحل المسائل صفحة (67) ، (68) ، (69)

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

1) $x^2 - 2y^2 = 4$

2) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{10}$

3) $(x^2 + y^2)^2 = 50(x^2 - y^2)$

4) $e^x y = x\, e^y$

5) $3^x = y - 2xy$

6) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$

7) $x = sec\, \frac{1}{y}$

8) $(sin\, \pi x + cos\, \pi y)^2 = 2$

9) $\frac{x}{y^2} + \frac{y^2}{x} = 5$

10) $x + y = cos\ (xy)$

11) $x^2 + y^2 = ln(x + y)^2$

12) $sinx\ cosy = x^2 - 5y$

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي عند القيمة المعطاة :

13) $2\, y^2 + 2xy - 1 = 0$, $x = \frac{1}{2}$

14) $y^3 + 2x^2 = 11\, y$, $y = 1$

أجد ميل المماس لمنحنى كل علاقة مما يأتي عند النقطة المعطاة :

15) $x^2 + y^2 = 25$, $(3, -4)$

16) $x^2 y = 4(2 - y)$, $(2, 1)$

17) $e^{sinx} + e^{cosy} = e + 1$, $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

18) $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 5$, $(8, 1)$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل علاقة مما يأتي عند النقطة المعطاة :

19) $x^2 + xy + y^2 = 13$, $(-4, 3)$

20) $x + y - 1 = ln(x^2 + y^2)$, $(1, 0)$

أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكل مما يأتي :

21) $x + y = sin\, y$

22) $4\, y^3 = 6\, x^2 + 1$

23) $xy + e^y = e$

24) أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة : $(x - 6)(y + 4) = 2$ عند النقطة $(7, -2)$

25) أثبت أن لمنحنى العلاقة : $3\, x^2 + 2xy + y^2 = 6$ مماسين أفقيين ، ثم أجد إحداثي نقطتي التماس .

26) أجد إحداثيي نقطة على المنحنى : $x + y^2 = 1$، بحيث يكون عندها مماس المنحنى موازيا للمستقيم : $x + 2y = 0$.

27) أجد إحداثيي نقطة (نقاط) على المنحنى : $y^3 = x^2$ ، بحيث يكون عندها مماس المنحنى عموديا على المستقيم $y + 3x - 5 = 0$.

28) إذا كان $\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{\frac{x}{y}} = 10$ ، حيث $x \neq y \neq 0$ ، فأثبت أن $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$

29) أجد إحداثيي النقطة على منحنى الاقتران : $y = x^{1/x}$ ، $x > 0$ ، والتي يكون عندها ميل المماس صفرا .

30) أجد إحداثيات جميع النقاط على منحنى الدائرة : $x^2 + y^2 = 100$ ، التي يكون عندها ميل المماس $\frac{3}{4}$.

31) يمثل الاقتران $s(t) = t^{1/t}$ ، $t > 0$ ، موقع جسيم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار t الزمن بالثواني . أجد سرعة الجسيم المتجهة و تسارعه .

32) إذا كان $y = lnx$ ، حيث $x > 0$ ، فأثبت أن $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ باستعمال الاشتقاق الضمني .

أجد مشتقة كل من الاقترانات الاتية باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي :

33) $y = (x^2 + 3)^x$

34) $y = \frac{(x^4 + 1)\sqrt{x + 2}}{2x^2 + 2x + 1}$

35) $y = \sqrt{x^2(x+1)(x+2)}$

36) $y = x^{sinx}$, $x > 0$

أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكل معادلة وسيطية مما يأتي عند قيمة t المعطاة .

37) $x = sin\, t$, $y = cos\, t$, $t = \frac{\pi}{4}$

38) $x = e^{-t}$, $y = t^2 + t + 1$, $t = 0$

إذا كانت العلاقة : $x^3 + y^3 = 6\,x\,y$ ، فأجيب عن السؤالين الاتيين تباعا :

39) أجد معادلة المماس عند نقطة تقاطع منحنى المعادلة مع منحنى $y = x$ في الربع الأول .

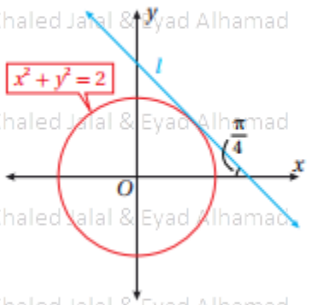
40) أجد إحداثي نقطة على منحنى العلاقة في الربع الأول ، بحيث يكون عندها مماس المنحنى أفقيا .

41) يبين الشكل المجاور :

منحنى العلاقة : $x^2 + y^2 = 2$ ،

و المستقيم l يمثل مماسا لمنحنى العلاقة في الربع الأول .

أجد معادلة المستقيم l .



مهارات التفكير العليا صفحة (69)

إذا كان : $x^2 - y^2 = 1$ ، فأجيب عن الأسئلة الأربعة الاتية تباعا :

42) أجد $\frac{dy}{dx}$.

43) يمكن التعبير عن منحنى العلاقة : $x^2 - y^2 = 1$ بالمعادلة الوسيطية $x = sec\,t\ , y = tan\,t$

حيث : $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$. أستعمل هذه الحقيقة لايجاد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة t .

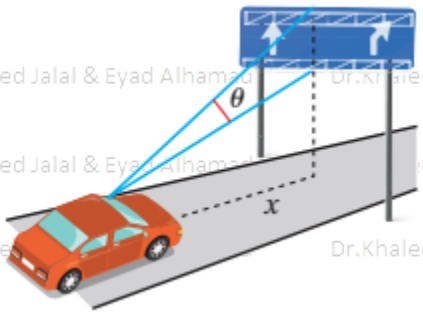
44) أثبت أن المقدارين الجبريين اللذين يمثلان $\frac{dy}{dx}$ الناتجين في الفرعين السابقين متكافئان ، مبررا إجابتي .

45) أجد إحداثيات النقاط التي يكون عندها ميل المماس 2 .

46) إذا مثل l أي مماس لمنحنى المعادلة $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{k}$ ، حيث k عدد حقيقي موجب ، فأثبت أن مجموع المقطع x و المقطع y للمستقيم l يساوي k ، مبررا إجابتي .

47) إذا كان مماس منحنى الاقتران : $y = (x-3)^{\sqrt{x}}$ عند النقطة $(4\,,1)$ يقطع المحور x في النقطة B والمحور y في النقطة C، فأجد مساحة $\Delta\ OBC$ ، حيث O نقطة الأصل .

مسألة اليوم



يقود سائق سيارته في اتجاه لافته على طريق سريع كما بالشكل المجاور. إذا كانت θ زاوية رؤية السائق للافته ، و x المسافة بينه و بين اللافتة بالأمتار وكانت العلاقة التي تربط θ بـ x هي :

$$\tan\theta = \frac{4x}{x^2 + 252}$$

فما معدل تغير θ بالنسبة إلى x ؟

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

الدرس الرابع

الاشتقاق الضمني

كتاب التمارين

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

(1) $x^3\,y^3 = 144$ (2) $x\,y = sin\,(x+y)$ (3) $y^4 - y^2 = 10x - 3$

(4) $x\,sin\,y - y\,cos\,x = 1$ (5) $\cot y = x - y$ (6) $\sqrt{xy} + x + y^2 = 0$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل علاقة مما يأتي عند النقطة المعطاة :

(7) $x^2 + 3xy + y^2 = x + 3y$, $(2, -1)$ (8) $x\,e^y + y\,lnx = 2$, $(1, ln2)$

(9) $3xy = 9$, $(1, \frac{9}{4})$ (10) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$, $(1, 2)$

أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكل مما يأتي :

(11) $x^2\,y - 4x = 5$ (12) $x^2 + y^2 = 8$ (13) $y^2 = x^3$

(14) أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران : $y = x^{x^2}$ عندما $x = 2$.

(15) أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة : $(x+y)^3 = x^2 + y$ عند النقطة $(1, 0)$.

(16) أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران : $y = x\,(lnx)^x$ عندما $x = e$.

أجد مشتقة كل من الاقترانات الاتية باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي :

(17) $y = (x-2)^{x+1}$ (18) $y = \frac{x^{10}\sqrt{x^2+5}}{\sqrt[3]{8x^2+2}}$ (19) $y = (cos\,x)^x$

(20) أجد إحداثي النقطة الواقعة في الربع الاول على منحنى العلاقة : $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ التي يكون ميل المماس عندها -0.5 .

(21) أجد نقطتي تقاطع منحنى العلاقة : $x^2 + xy + y^2 = 7$ مع المحور x ، ثم أثبت أن مماسي منحنى العلاقة عند هاتين النقطتين متوازيان .

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

اختبار نهاية وحدة
التفاضل

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي :

(1) يمثل الاقتران : $s(t) = 3 + \sin t$ حركة توافقية بسيطة لجسيم . إحدى الاتية تمثل الزمن الذي تكون عنده سرعة الجسيم صفرا :

a) $t = 0$ b) $t = \frac{\pi}{4}$ c) $t = \frac{\pi}{2}$ d) $t = \pi$

---

(2) إذا كان : $y = u\,v$ ، وكان : $v(1) = -1$ ، $v'(1) = 1$ ، $u(1) = 2$ ، $u'(1) = 3$ ، فإن $y'(1)$ تساوي :

a) 1 b) -1 c) 4 d) -4

---

(3) إذا كان : $f(x) = x - \frac{1}{x}$ ، فإن $f^{(2)}(x)$ هي :

a) $1 + \frac{1}{x^2}$ b) $1 - \frac{1}{x^2}$ c) $\frac{2}{x^3}$ d) $-\frac{2}{x^3}$

---

(4) إذا كان : $y = \tan 4t$ ، فإن $\frac{dy}{dt}$ هو :

a) $4\sec 4t \tan 4t$ b) $\sec 4t \tan 4t$ c) $\sec^2 4t$ d) $4\sec^2 4t$

---

(5) إذا كان : $y^2 - x^2 = 1$ ، فإن ميل المماس لمنحنى العلاقة عند النقطة $(1, \sqrt{2})$ هو :

a) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $-\sqrt{2}$ c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ d) $\sqrt{2}$

---

(6) إذا كان : $f(x) = \log(2x - 3)$ ، فإن $f'(x)$ هي :

a) $\frac{2}{(2x-3)\ln 10}$ b) $\frac{2}{(2x-3)}$ c) $\frac{1}{(2x-3)\ln 10}$ d) $\frac{1}{(2x-3)}$

---

(7) إذا كان : $y = 2^{1-x}$ ، فإن ميل المماس لمنحنى العلاقة عندما $x = 2$ هو :

a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{\ln 2}{2}$ d) $-\frac{\ln 2}{2}$

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

(8) $f(x)=e^x(x+x\sqrt{x})$ (9) $f(x)=\frac{x}{tanx}$ (10) $f(x)=\frac{1}{x}-12secx$

(11) $f(x)=\frac{e^x}{lnx}$ (12) $f(x)=\frac{lnx}{x^4}$ (13) $f(x)=5^{2-x}$

(14) $f(x)=10\,sin\,0.5x$ (15) $f(x)=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^3\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$

(16) $f(x)=e^{-1.5x}\,\cos x^2$

إذا كان : $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق عندما $x=2$ ، وكان : $g(2)=1$ ، $g'(2)=2$

$f(2)=3$ ، $f'(2)=-4$ ، فأجد كلا مما يأتي :

(17) $(f.g)'(2)$ (18) $\left(\frac{f}{g}\right)'(2)$ (19) $(3f-4f.g)(2)$

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران مما يأتي :

(20) $f(x)=x^7\,lnx$ (21) $f(x)=\frac{cosx}{x}$ (22) $f(x)=\frac{x}{1+\sqrt{x}}$

(23) $f(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$

أجد معادلة المماس لكل اقتران مما يأتي عند القيمة المعطاة :

(24) $f(x)=\frac{x^2}{1+x}$ ، $x=1$ (25) $f(x)=\frac{x^2}{cosx}$ ، $x=\frac{\pi}{4}$

(26) $f(x)=ln(x+5)$ ، $x=0$ (27) $f(x)=sin\,x+sin\,3x$ ، $x=\frac{\pi}{4}$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل معادلة وسيطية مما يأتي عن النقطة المحددة بقيمة t المعطاة :

(28) $x=t^2$ ، $y=t+2$ ، $t=4$ (29) $x=4\,cos\,t$ ، $y=3\,sin\,t$ ، $t=\frac{\pi}{4}$

إذا كان : $y=x\,lnx$ ، حيث : $x>0$ ، فأجيب عن السؤالين الاتيين تباعا :

(30) أجد معادلة المماس عند النقطة $(1,0)$.

(31) أجد إحداثي النقطة التي يكون ميل المماس عندها 2 .

Dr.Khaled Jalal & Eyad Alhamad

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

(32) $x(x+y)=2y^2$

(33) $x=\frac{2y}{x^2-y}$

(34) $y\cos x=x^2+y^2$

(35) $2xe^y+ye^x=3$

(36) أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة : $y^2=\frac{x^3}{2-x}$ عند النقطة $(1,-1)$.

أجد مشتقة كل من الاقترانات الاتية باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي :

(37) $y=\frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$,$x>2$

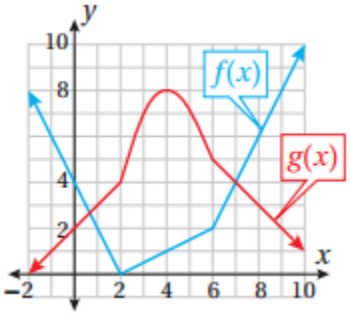
(38) $y=x^{lnx}$,$x>0$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل علاقة مما يأتي عند النقطة المعطاة :

(39) $x^2+3xy+y^2=x+3y$, $(2,-1)$

(40) $x^2e^y=1$, $(1,0)$

يبين الشكل المجاور منحنيي الاقترانين : $g(x)$ ، $f(x)$. إذا كان : $p(x)=f(x)\,g(x)$ ، وكان $q(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ ، فأجد كلا مما يأتي :



(41) $p'(1)$

(42) $p'(4)$

(43) $q'(7)$

(44) يمكن نمذجة الكمية R (بالغرام) المتبقية من عينة كتلتها $200\ g$ من عنصر مشع بعد t يوما باستعمال الاقتران : $R(t)=200\,(0.9)^t$. أجد $\frac{dR}{dt}$ عندما $t=2$.

(45) يمثل الاقتران $s(t)=10+\frac{1}{4}sin(10\pi t)$ ، موقع جسيم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالسنتيمترات ، t الزمن بالثواني . أجد سرعة الجسيم و تسارعه بعد t ثانية .