الدرس 2 مشتقتا الضرب والقسمة والمشتقات العليا
Product and Quotient Rules and Higher-Order Derivatives

1) مشتقة ضرب اقترانين

$$\boxed{A(x)=f(x)\times g(x)\Rightarrow A'(x)=f'(x)\times g(x)+g'(x)\times f(x)}$$

بشرط قابلية الاشتقاق لكل من $f(x),g(x)$

أو :

(مشتقة حاصل ضرب اقترانين = مشتقة الأول × الثاني + مشتقة الثاني × الأول) : أربعة أقواس:( )( )+( )( )

1) $f(x)=(x^2+1)(2x^3-5x)$

$$\Rightarrow f'(x)=(2x)(2x^3-5x)+(6x^2-5)(x^2+1)$$

2) $f(x)=x^5\sin x$

$$\Rightarrow f'(x)=(5x^4)(\sin x)+(\cos x)(x^5)$$

3) $f(x)=e^x\cos x$

$$\Rightarrow f'(x)=(e^x)(\cos x)+(-\sin x)(e^x)=e^x\cos x-e^x\sin x$$

4) $f(x)=x\,Lnx\Rightarrow f'(e)=?$

$$\Rightarrow f'(x)=(1)(Lnx)+(\frac{1}{x})(x)=Lnx+1$$

$$\Rightarrow f'(e)=Lne+1=1+1=2$$

5) $f(6)=4\ ,\ f'(6)=-2\ ,\ g(6)=-3\ ,\ g'(6)=1\Rightarrow (f\times g)'(6)=?$

$$\Rightarrow (f\times g)'(6)=f'g+g'f=(-2)(-3)+(1)(4)=10$$

$$\boxed{(f\times g)'(a)=f'(a)g(a)+g'(a)f(a)}$$

6) $f(2)=-7\ ,\ f'(2)=-1\ ,\ g(2)=2\ ,\ (f\times g)'(2)=12\Rightarrow g'(2)=?$

$$\Rightarrow (f\times g)'(2)=f'g+g'f$$

$$12=(-1)(2)+(g')(-7)\Rightarrow g'(2)=-2$$

ويمكن استعمال هذه القاعدة لإيجاد مشتقة حاصل ضرب أي مقدارين

7) $f(x)=5x^3=(5)(x^3)$

$$f'(x)=(0)(x^3)+(3x^2)(5)$$

$$=(0)+15x^2=15x^2$$

Hasanat

8) أثبت أنه : إذا كان $A(x)=f(x)g(x)$ فإنَّ $A'(x)=f(x)g'(x)+g(x)f'(x)$

الكتاب : صفحة 26

الحل:

$$A'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{A(x+h)-A(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\,g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\,g(x+h)-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}f(x+h)\times\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+\lim_{h\to 0}g(x)\times\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=f(x)g'(x)+g(x)f'(x)$$

أتحقَّق من فهمي أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x)=(x^3-2x^2+3)(7x^2-4x)$ b) $f(x)=\ln x\cos x$

a	$f'(x)=(x^3-2x^2+3)(14x-4)+(7x^2-4x)(3x^2-4x)$ $=14x^4-4x^3-28x^3+8x^2+42x-12+21x^4-28x^3-12x^3+16x^2$ $=35x^4-72x^3+24x^2+42x-12$
b	$f'(x)=(\ln x)(-\sin x)+(\cos x)\left(\frac{1}{x}\right)=-\ln x\sin x+\frac{\cos x}{x}$

تمارين / واجب

1) $f(x)=(x^3-2)(3x^2+1)\Rightarrow f'(-1)=?$

2) $f(x)=3x\cos x\Rightarrow f'(x)=?$

3) $f(x)=x^3\,Lnx\Rightarrow f'(1)=?$

4) $f(e)=-2$, $f'(e)=-1$, $g'(e)=4$, $(f\times g)'(e)=8\Rightarrow g(e)=?$

2) مشتقة قسمة اقترانين

$$A(x)=\frac{f(x)}{g(x)}\Rightarrow A'(x)=\frac{f'(x)\times g(x)-g'(x)\times f(x)}{(g(x))^2}$$

بشـرط قابليـة الاشـتقاق لكـل مـن $f(x),g(x)$ $\quad g(x)\neq 0$

مشتقة خارج قسمة اقترانين = $\dfrac{\text{مشتقة البسط} \times \text{المقام} - \text{مشتقة المقام} \times \text{البسط}}{(\text{المقام})^2}$

خمسة أقواس: $\dfrac{(\ )(\ )-(\ )(\ )}{(\ )^2}$

$$1)\ f(x)=\frac{\cos x}{1+e^x}\Rightarrow f'(x)=\frac{(-\sin x)\times(1+e^x)-(e^x)\times(\cos x)}{(1+e^x)^2}$$

$$2)\ f(x)=\frac{x}{1+\sin x}\Rightarrow f'(x)=\frac{(1)\times(1+\sin x)-(\cos x)\times(x)}{(1+\sin x)^2}$$

$$3)\ f(x)=\frac{x+1}{x^2+1}\Rightarrow f'(-2)=?$$

$$f'(x)=\frac{(1)\times(x^2+1)-(2x)\times(x+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(-2)=\frac{(1)\times(4+1)-(-4)\times(-2+1)}{(4+1)^2}=\frac{5-4}{(5)^2}=\frac{1}{25}$$

$$4)\ f(7)=5\ ,\ f'(7)=-1\ ,\ g(7)=-2\ ,\ g'(7)=1\Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)'(7)=?$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(7)=\frac{f'g-g'f}{(g)^2}=\frac{(-1)(-2)-(1)(5)}{(-2)^2}=\frac{2-5}{4}=\frac{-3}{4}$$

$$5)\ f(3)=-2\ ,\ f'(3)=1\ ,\ g'(3)=3\ ,\ \left(\frac{f}{g}\right)'(3)=1\Rightarrow g(3)=?$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(3)=\frac{(1)(g)-(3)(-2)}{(g)^2}=1\Rightarrow g^2=g+6\Rightarrow g^2-g-6=0$$

$$\Rightarrow (g-3)(g+2)=0\Rightarrow \boxed{g(3)=3}\ \ \boxed{\text{or}}\ \ \boxed{g(3)=-2}$$

أتحقّق من فهمي 30 أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = \dfrac{x+1}{2x+1}$ b) $f(x) = \dfrac{\sin x}{e^x}$

a	أتحقق من فهمي صفحة 30 $f(x) = \dfrac{x+1}{2x+1}$ $f'(x) = \dfrac{(2x+1)(1)-(x+1)(2)}{(2x+1)^2} = \dfrac{-1}{(2x+1)^2}$	b	$f(x) = \dfrac{\sin x}{e^x}$ $f'(x) = \dfrac{e^x(\cos x) - (\sin x)e^x}{e^{2x}} = \dfrac{\cos x - \sin x}{e^x}$

تمارين / واجب

1) إذا كان $f(2) = 4 \; , \; f\,'(2) = -3 \; , \; g(2) = -1 \; , \; g\,'(2) = -5$

فجد $a)(f \times g)'(2)$ $b)(\dfrac{f}{g})'(2)$ $c)\ (2f - 3g)'(2)$

2) $f(5) = 2 \; , \; f\,'(5) = -2 \; , \; g(5) = -3 \; , \; g\,'(5) = 3 \Rightarrow$

$a)(f \times g)'(5)$ $b)(\dfrac{g}{f})'(5)$ $c)\ (4f - 2g)'(5)$ $d)(f - f \times g)'(5)$

3) $f(1) = 4 \; , \; f\,'(1) = 5 \; , \; g(1) = -3$

$a)(f \times g)'(1) = 8 \Rightarrow g\,'(1) =$

$b)(\dfrac{g}{f})'(1) = 6 \Rightarrow g\,'(1) =$

الأستاذ:عبدالقادر الحسنات
078 531 88 77

3) **مشتقة المقلوب** : إذا كان بسط الاقتران الكسري (ثابتا) فإن المشتقة = $\dfrac{\text{سالب الثابت} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2}$

$$f(x)=\frac{c}{g(x)}\Rightarrow f'(x)=\frac{-c\,f'(x)}{(g(x))^2}$$

بشـــرط قابليـــة الاشـــتقاق ل $g(x)$, $g(x)\neq 0$

$$1)\ f(x)=\frac{4}{x+x^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{-(4)\times(1+2x)}{(x+x^2)^2}$$

$$2)\ f(x)=\frac{3}{\sin x-e^x}\Rightarrow f'(x)=\frac{-(3)\times(\cos x-e^x)}{(\sin x-e^x)^2}$$

$$3)\ f(x)=\frac{1}{5+\sqrt[3]{x^2}}\Rightarrow f(x)=\frac{1}{5+x^{\frac{2}{3}}}\Rightarrow f'(x)=\frac{-(1)\times(\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}})}{(5+x^{\frac{2}{3}})^2}$$

ملاحظة : يُمكن الاستغناء عن هذه القاعدة وعدم حفظها بتطبيق قاعدة القسمة حيث البسط مشتقته صفر

$$1^{+})\ f(x)=\frac{4}{x+x^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{(0)(x+x^2)-(1+2x)(4)}{(x+x^2)^2}=\frac{-(1+2x)(4)}{(x+x^2)^2}$$

أتحقّق من فهمي 33 أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x)=\dfrac{1}{5x-x^2}$ b) $f(x)=\dfrac{1}{e^x+\sqrt{x}}$

a $f(x)=\dfrac{1}{5x-x^2}$

$f'(x)=\dfrac{-(5-2x)}{(5x-x^2)^2}=\dfrac{2x-5}{(5x-x^2)^2}$

b $f(x)=\dfrac{1}{e^x+\sqrt{x}}$

$f'(x)=\dfrac{-\left(e^x+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(e^x+\sqrt{x}\right)^2}=-\dfrac{2\sqrt{x}e^x+1}{2\sqrt{x}\left(e^x+\sqrt{x}\right)^2}$

$$1)\ f(x)=\frac{7}{x-\cos x}\Rightarrow f'(x)=?$$

$$2)\ f(x)=\frac{1}{\text{Ln}x}\Rightarrow f'(x)=?$$

$$3)\ f(3)=5\ ,\ f'(3)=4\Rightarrow (\frac{1}{f})'(3)=?$$

أتدرّب وأحُلّ المسائل

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x)=\frac{x^3}{2x-1}$

3) $f(x)=\frac{x+1}{\cos x}$

5) $f(x)=\frac{\sin x+\cos x}{e^x}$

6) $f(x)=x^3\sin x+x^2\cos x$

7) $f(x)=\sqrt[3]{x}\,(\sqrt{x}+3)$

9) $f(x)=\frac{2-\frac{1}{x}}{x-3}$

10) $f(x)=(x^3-x)(x^2+2)(x^2+x+1)$

1	$f'(x)=\frac{(2x-1)(3x^2)-(x^3)(2)}{(2x-1)^2}=\frac{4x^3-3x^2}{(2x-1)^2}$
3	$f'(x)=\frac{(\cos x)(1)-(x+1)(-\sin x)}{(\cos x)^2}=\frac{\cos x+x\sin x+\sin x}{\cos^2 x}$
5	$f'(x)=\frac{(e^x)(\cos x-\sin x)-(\sin x+\cos x)(e^x)}{(e^x)^2}=\frac{-2\sin x}{e^x}$
6	$f'(x)=(x^3)(\cos x)+(\sin x)(3x^2)+(x^2)(-\sin x)+(\cos x)(2x)$ $=x^3\cos x+2x^2\sin x+2x\cos x$
7	$f(x)=\sqrt[3]{x}(\sqrt{x}+3)=x^{\frac{5}{6}}+3x^{\frac{1}{3}}$ $f'(x)=\frac{5}{6}x^{-\frac{1}{6}}+x^{-\frac{2}{3}}=\frac{5}{6\sqrt[6]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$
9	$f(x)=\frac{2-\frac{1}{x}}{x-3}=\frac{2x-1}{x^2-3x}$ $f'(x)=\frac{(x^2-3x)(2)-(2x-1)(2x-3)}{(x^2-3x)^2}=\frac{-2x^2+2x-3}{(x^2-3x)^2}$
10	$f'(x)=(x^3-x)\left((x^2+2)(2x+1)+(x^2+x+1)(2x)\right)$ $+(x^2+2)(x^2+x+1)(3x^2-1)$ $=(x^3-x)(x^2+2)(2x+1)+(x^3-x)(x^2+x+1)(2x)$ $+(x^2+2)(x^2+x+1)(3x^2-1)$

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق عندما $x=0$، وكان $f(0)=5, f'(0)=-3, g(0)=-1, g'(0)=2$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

12) $(fg)'(0)$

13) $\left(\frac{f}{g}\right)'(0)$

14) $(7f-2fg)'(0)$

12	$(fg)'(0)=f(0)g'(0)+g(0)f'(0)$ $=5\times 2-1\times -3=13$
13	$\left(\frac{f}{g}\right)'(0)=\frac{g(0)f'(0)-f(0)g'(0)}{g^2(0)}=\frac{-1\times -3-5\times 2}{(-1)^2}=-7$
14	$(7f-2fg)'(0)=7f'(0)-2(fg)'(0)=7(-3)-2(13)=-47$

أجد معادلة المماس لكل اقتران ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

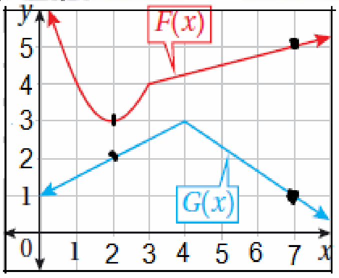
18 $f(x)=\dfrac{1+x}{1+e^x},\ (0,\frac{1}{2})$

19 $f(x)=e^x\cos x+\sin x,\ (0,1)$

18	$f'(x)=\dfrac{(1+e^x)(1)-(1+x)(e^x)}{(1+e^x)^2}=\dfrac{1-xe^x}{(1+e^x)^2}$ ميل المماس عند النقطة $(0,\frac{1}{2})$ هو: $f'(0)=\frac{1}{4}$ معادلة المماس هي: $y-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}(x-0)\ \Rightarrow y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$
19	$f'(x)=(e^x)(-\sin x)+(\cos x)(e^x)+\cos x$ ميل المماس عند النقطة $(0,1)$ هو: $f'(0)=(1)(0)+(1)(1)+1=2$ معادلة المماس هي: $y-1=2(x-0)\ \Rightarrow y=2x+1$

31 إذا كان: $f(x)=9\ln x+\dfrac{1}{2x^2}$، فأُثبِت أنّ $f'(x)=\dfrac{(3x-1)(3x+1)}{x^3}$.

31	$f'(x)=9\left(\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{-1(4x)}{4x^4}=\dfrac{9}{x}-\dfrac{1}{x^3}=\dfrac{9x^2-1}{x^3}=\dfrac{(3x-1)(3x+1)}{x^3}$



يُبيِّن الشكل المجاور منحنيي الاقترانين: $F(x)$، و $G(x)$.

إذا كان: $P(x)=F(x)G(x)$، وكان: $Q(x)=\dfrac{F(x)}{G(x)}$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

32 $P'(2)$

33 $Q'(7)$

32	$P'(2)=F(2)G'(2)+G(2)F'(2)$ $G'(2)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(2,2)$ و $(4,3)$ ويساوي $\frac{1}{2}$ $F'(2)$ ميل المماس الأفقي، ويساوي صفرًا $P'(2)=3\times\frac{1}{2}+2\times 0=\frac{3}{2}$
33	$Q'(7)=\dfrac{G(7)F'(7)-F(7)G'(7)}{G^2(7)}=\dfrac{1\times\frac{1}{4}-5\times-\frac{2}{3}}{1}=\dfrac{43}{12}$

مهارات التفكير العليا

تبرير: إذا كان: $y=\dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

34 أجد ميل المماس عند نقطة الأصل.

35 أُبيِّن عدم وجود مماس أفقي للاقتران y، مُبرِّرًا إجابتي.

34	$y=\dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}=\dfrac{1-\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(e^x+1)(e^x)-(e^x-1)(e^x)}{(e^x+1)^2}=\dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}\Rightarrow \left.\dfrac{dy}{dx}\right\vert_{x=0}=\dfrac{2(1)}{(1+1)^2}=\dfrac{1}{2}$
35	إذا وجد مماس أفقي فإن ميله يساوي صفرًا، أي أنّ: $\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}=0$ ، وهذا لا يتحقق إلّا إذا كان $e^x=0$، ولكن $e^x>0$ لجميع الأعداد الحقيقية x، ولذا لا يوجد لهذا المنحنى مماسات أفقية.

نحدٍّ: إذا كان: $y=\frac{x+1}{x-1}$، حيث: $x\neq 1$، فأُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا:

36 أجد $\frac{dy}{dx}$.   37 أُعيد كتابة المعادلة بالنسبة إلى المُتغيِّر x (x اقتران بالنسبة إلى y)، ثم أجد $\frac{dx}{dy}$.   38 أُبيِّن أنَّ $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$.

36	$\frac{dy}{dx}=\frac{(x-1)(1)-(x+1)(1)}{(x-1)^2}=\frac{-2}{(x-1)^2}$
37	$y=\frac{x+1}{x-1}\rightarrow x+1=y(x-1)\rightarrow x(1-y)=-y-1$ $x=\frac{y+1}{y-1}$ $\frac{dx}{dy}=\frac{-2}{(y-1)^2}$
38	$\frac{dx}{dy}=\frac{-2}{(y-1)^2}=\frac{-2}{\left(\frac{x+1}{x-1}-1\right)^2}=\frac{-2}{\left(\frac{2}{x-1}\right)^2}=\frac{(x-1)^2}{-2}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

كتاب التمارين

أجد معادلة المماس لكل اقتران ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

10 $f(x)=x^2\cos x\,,\left(\frac{\pi}{2},0\right)$

11 $f(x)=\frac{1+\sin x}{\cos x}\,,(\pi,-1)$

10	$f'(x)=-x^2\sin x+2x\cos x \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi^2}{4}$ ميل المماس: $y-0=-\frac{\pi^2}{4}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow y=-\frac{\pi^2}{4}x+\frac{\pi^3}{8}$ معادلة المماس:
11	$f'(x)=\frac{(\cos x)(\cos x)+\sin x\,(1+\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{1+\sin x}{\cos^2 x}\Rightarrow f'(\pi)=\frac{1}{1}=1$ ميل المماس: $y+1=1(x-\pi)\Rightarrow y=x-\pi-1$ معادلة المماس:

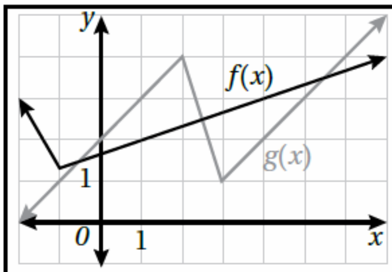
أجد إحداثيي النقطة (النقاط) التي يكون عندها لمنحنى كل اقتران ممّا يأتي مماس أفقي:

12 $f(x)=\frac{2x-1}{x^2}$

13 $h(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$

14 $g(x)=\frac{8(x-2)}{e^x}$

12	$f'(x)=\frac{2x^2-4x^2+2x}{x^4}=\frac{-2x+2}{x^3}=0\Rightarrow x=1 \Rightarrow (1,f(1))=(1,1)$
13	$h'(x)=\frac{2x(x^2+1)-2x^3}{(x^2+1)^2}=\frac{2x}{(x^2+1)^2}=0\Rightarrow x=0 \Rightarrow (0,h(0))=(0,0)$
14	$g(x)=\frac{8(x-2)}{e^x}$ $g'(x)=\frac{8e^x-8e^x(x-2)}{e^{2x}}=\frac{8e^x(3-x)}{e^{2x}}=\frac{8(3-x)}{e^x}=0\Rightarrow x=3 \Rightarrow \left(3,\frac{8}{e^3}\right)$



يُبيِّن الشكل المجاور منحنيي الاقترانين: $f(x)$، و $g(x)$. إذا كان: $u(x)=f(x)g(x)$، وكان: $v(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

15 $u'(1)$ 16 $v'(4)$

15	$u'(1)=f(1)g'(1)+g(1)f'(1)=2\times 1+3\times\frac{1}{3}=3$
16	$v'(4)=\frac{g(4)f'(4)-f(4)g'(4)}{(g(4))^2}=\frac{2\times\frac{1}{3}-3\times 1}{(2)^2}=-\frac{7}{12}$

يُمثِّل الاقتران: $v(t)=\frac{10}{2t+15}, t\geq 0$ سرعة سيّارة بدأت الحركة في مسار مستقيم، حيث تقاس v بالقَدم لكل ثانية:

19 أجد تسارع السيّارة عندما $t=5$.

20 أجد تسارع السيّارة عندما $t=20$.

19	$a(t)=\frac{-20}{(2t+15)^2} \Rightarrow a(5)=\frac{-20}{(10+15)^2}=-0.032\ \text{ft/s}^2$
20	$a(20)=\frac{-20}{(40+15)^2}\approx -0.007\ \text{ft/s}^2$

تمارين واجب

1) $f(x)=Lnx\ \sin x \Rightarrow f'(x)=?$

2) $f(x)=x(e^x-x^2) \Rightarrow f'(0)=?$

3) $f(x)=\frac{5}{x} \Rightarrow f'(3)=?$

4) $f(x)=\frac{Ln2x}{x-2} \Rightarrow f'(x)=?$

5) $f(x)=\frac{x-1}{x+1} \Rightarrow f'(2)=?$

6) $f(x)=ax+4\sin x\ ,\ f'(0)=2 \Rightarrow a=?$

7) $f(x)=\frac{2x-1}{x^3}\ ,\ f'(a)=0 \Rightarrow a=?$

***$f(2)=-4\ ,\ f'(2)=-5\ ,\ g(2)=1\ ,\ g'(2)=-1 \Rightarrow$

8) $(f\times g)'(2)=$

9) $(\frac{g}{f})'(2)=$

10) $(f-3g)'(2)=$

11) إذا كان $f(x)=\sin x\ \cos x$ فأثبت أن $f'(x)=\cos 2x$

12) إذا كان $f(x)=e^x\sin x+\cos x$ فجد معادلة المماس لمنحنى f(x) عند x = π

4) مشتقات الاقترانات المثلثية

$f(x)$	$f'(x)$
$\tan x$	$\sec^2 x$
$\cot x$	$-\csc^2 x$
$\sec x$	$\sec x \tan x$
$\csc x$	$-\csc x \cot x$

$$f(x)=\sin x \Rightarrow f'(x)=\cos x$$

$$f(x)=\cos x \Rightarrow f'(x)=-\sin x$$

1) $f(x)=\sin x+\tan x-x^2$

$$\Rightarrow f'(x)=\cos x+\sec^2 x-2x$$

2) $f(x)=\sec x+\cos x-x$

$$\Rightarrow f'(x)=\sec x \tan x-\sin x-1$$

3) $f(x)=x^2 \cot x \Rightarrow f'(x)=(2x)(\cot x)+(-\csc^2 x)(x^2)$

4) $f(x)=\tan x \sec x \Rightarrow f'(x)=(\sec^2 x)(\sec x)+(\sec x \tan x)(\tan x)$

$$=\sec^3 x+\sec x \tan^2 x$$

5) $f(x)=\dfrac{e^x+\cot x}{1+\sec x}$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{(e^x-\csc^2 x)(1+\sec x)-(\sec x \tan x)(e^x+\cot x)}{(1+\sec x)^2}$$

$\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}$ $\csc\theta=\dfrac{1}{\sin\theta}$ $\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $\cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}$

أتحقّق من فهمي أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x)=x\cot x$

b) $f(x)=\dfrac{\tan x}{1+\sin x}$

a	$f'(x)=(x)(-\csc^2 x)+(\cot x)(1)=-x\csc^2 x+\cot x$
b	$f'(x)=\dfrac{(1+\sin x)(\sec^2 x)-(\tan x)(\cos x)}{(1+\sin x)^2}=\dfrac{\sec^2 x+\sin x\sec^2 x-\sin x}{(1+\sin x)^2}$

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

أتدرّب وأحُلُّ المسائل

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

2 $f(x) = x^3 \sec x$ 4 $f(x) = e^x(\tan x - x)$ 8 $f(x) = \frac{1+\sec x}{1-\sec x}$ 11 $f(x) = (\csc x + \cot x)^{-1}$

2	$f'(x) = (x^3)(\sec x \tan x) + (\sec x)(3x^2)$ $= x^3 \sec x \tan x + 3x^2 \sec x$
4	$f'(x) = (e^x)(\sec^2 x - 1) + (\tan x - x)(e^x)$ $= e^x \tan^2 x + e^x \tan x - xe^x$
8	$f'(x) = \frac{(1-\sec x)(\sec x \tan x) - (1+\sec x)(-\sec x \tan x)}{(1-\sec x)^2}$ $= \frac{2\sec x \tan x}{(1-\sec x)^2}$
11	$f(x) = (\csc x + \cot x)^{-1} = \frac{1}{\csc x + \cot x}$ $f'(x) = \frac{-1(-\csc x \cot x - \csc^2 x)}{(\csc x + \cot x)^2} = \frac{\csc x \cot x + \csc^2 x}{(\csc x + \cot x)^2}$ $= \frac{\csc x(\cot x + \csc x)}{(\csc x + \cot x)^2} = \frac{\csc x}{\cot x + \csc x}$

أُثبِت صحة كلٍّ ممّا يأتي مُعتمِدًا أنَّ $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ ، $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$:

20 $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$ 21 $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$ 22 $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$

20	$\frac{d}{dx}(\cot x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)$ $= \frac{(\sin x)(-\sin x) - (\cos x)(\cos x)}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$ $= -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$
21	$\frac{d}{dx}(\sec x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos x}\right)$ $= \frac{-(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} \times \frac{\sin x}{\cos x} = \sec x \tan x$
22	$\frac{d}{dx}(\csc x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sin x}\right)$ $= \frac{-(\cos x)}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin x} \times \frac{\cos x}{\sin x} = -\csc x \cot x$

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

كتاب التمارين

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

2) $f(x) = -\csc x - \sin x$

3) $f(x) = \frac{x+c}{x+\frac{c}{x}}$

4) $f(x) = x\cot x$

5) $f(x) = 4x - x^2\tan x$

6) $f(x) = \frac{\cos x}{x^2}$

7) $f(x) = x\left(1 - \frac{4}{x+3}\right)$

8) $f(x) = \frac{3(1-\sin x)}{2\cos x}$

9) $f(x) = (x+1)e^x$

1	$f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$
2	$f'(x) = \csc x\cot x - \cos x$
3	$f'(x) = \frac{(2x+c)(x^2+c) - 2x(x^2+cx)}{(x^2+c)^2} = \frac{2cx - cx^2 + c^2}{(x^2+c)^2}$
4	$f'(x) = -x\csc^2 x + \cot x$
5	$f'(x) = 4 - x^2\sec^2 x - 2x\tan x$
6	$f'(x) = \frac{-x^2\sin x - 2x\cos x}{x^4} = \frac{-x\sin x - 2\cos x}{x^3}$
7	$f'(x) = 1 - \frac{4(x+3) - 4x}{(x+3)^2} = 1 - \frac{12}{(x+3)^2}$
8	$f'(x) = \frac{-6\cos^2 x - (3 - 3\sin x)(-2\sin x)}{(2\cos x)^2} = \frac{-6 + 6\sin x}{4\cos^2 x}$
9	$f'(x) = (x+1)e^x + e^x = (x+2)e^x$

17) إذا كان: $f(x) = x\sec x$، فأُثبِت أنَّ $f'(x) = \sec x\,(1 + x\tan x)$.

17	$f'(x) = x\sec x\tan x + \sec x = \sec x\,(1 + x\tan x)$

تمارين / واجب

1) $f(x) = x\sec x \Rightarrow f'(x) =$

2) $f(x) = \frac{\cot x}{1+\csc x} \Rightarrow f'(x) =$

3) $f(x) = (Lnx^4)(sex) \Rightarrow f'(x) =$

المشتقات العليا

المشتقة	الأولى	الثانية	الثالثة	رتبتها n
	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f^{(n)}(x)$
رموزها	y'	y''	y'''	$y^{(n)}$
	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d^2y}{dx^2}$	$\frac{d^3y}{dx^3}$	$\frac{d^ny}{dx^n}$

1) $f(x)=x^4 \Rightarrow f'(x)=4x^3$

$\Rightarrow f''(x)=12x^2$

$\Rightarrow f'''(x)=24x$

2) $y=x^2+\sin x \Rightarrow \frac{dy}{dx}=2x+\cos x$

$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=2-\sin x \Rightarrow \frac{d^3y}{dx^3}=-\cos x$

أتحقّق من فهمي 38

أجد المشتقات الثلاث الأولى للاقتران: $f(x)=\frac{\sin x}{x}$.

$$f'(x)=\frac{(x)(\cos x)-(\sin x)(1)}{x^2}=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x}{x}-\frac{\sin x}{x^2}$$

$$f''(x)=\frac{(x)(-\sin x)-(\cos x)(1)}{x^2}-\frac{(x^2)(\cos x)-(\sin x)(2x)}{x^4}$$

$$=\frac{-x^2\sin x-2x\cos x+2\sin x}{x^3}$$

$$f'''(x)=\frac{-x^3\cos x+3x^2\sin x+6x\cos x-6\sin x}{x^4}$$

ويمكن التوصل إلى الإجابة نفسها بتحويل الاقتران إلى $x^{-1}\sin x$ وتطبيق قاعدة مشتقة ضرب اقترانين.

أتدرّب وأحلّ المسائل

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

15) $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+4}, x=-2$

16) $f(x)=\frac{1+x}{1+\sqrt[3]{x}}, x=8$

17) $f(x)=\frac{1-x}{1+\sqrt{x}}, x=4$

15

$$f'(x)=\frac{(x^2+4)(2x)-(x^2-4)(2x)}{(x^2+4)^2}=\frac{16x}{(x^2+4)^2}$$

$$f''(x)=\frac{(x^2+4)^2(16)-(16x)(2)(x^2+4)^1(2x)}{(x^2+4)^4}$$

$$f''(-2)=\frac{(16)(8)-(-32)(2)(-4)}{(8)^3}=-\frac{1}{4}$$

16

$$f(x)=\frac{1+x}{1+\sqrt[3]{x}}=\frac{(1+\sqrt[3]{x})(1-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{1+\sqrt[3]{x}}=1-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}$$

$$f'(x)=-\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$f''(x)=\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}-\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}=\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}-\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$$

$$f''(8)=\frac{2}{9\sqrt[3]{8^5}}-\frac{2}{9\sqrt[3]{8^4}}=\frac{2}{9}\left(\frac{1}{32}-\frac{1}{16}\right)=-\frac{1}{144}$$

17

$$f'(x)=\frac{-\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(1+\sqrt{x})^2}=\frac{-1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$$

$$f''(x)=\frac{2\sqrt{x}(2)(1+\sqrt{x})^1\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)+(1+\sqrt{x})^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{4x(1+\sqrt{x})^4}=\frac{2+\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{4x(1+\sqrt{x})^3}$$

$$f''(4)=\frac{2+\frac{1+2}{2}}{16(1+2)^3}=\frac{7}{864}$$

ألاحِظ المشتقة المعطاة في كلٍّ ممّا يأتي، ثم أجد المشتقة العليا المطلوبة:

23 $f''(x)=2-\frac{2}{x}, f'''(x)$ 24 $f'''(x)=2\sqrt{x}, f^{(4)}(x)$ 25 $f^{(4)}(x)=2x+1, f^{(6)}(x)$

23	$f''(x)=2-\frac{2}{x}$ $f'''(x)=\frac{2}{x^2}$
24	$f'''(x)=2\sqrt{x}$ $f^{(4)}(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$
25	$f^{(4)}(x)=2x+1$ $f^{(5)}(x)=2$ $f^{(6)}(x)=0$

إذا كان الاقتران: $y=e^x \sin x$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

27 أجد $\frac{dy}{dx}$، و $\frac{d^2y}{dx^2}$. 28 أُثبِت أنّ $\frac{d^2y}{dx^2}=2\frac{dy}{dx}-2y$.

27	$\frac{dy}{dx}=(e^x)(\cos x)+(\sin x)(e^x)=e^x(\cos x+\sin x)$ $\frac{d^2y}{dx^2}=e^x(-\sin x+\cos x)+e^x(\cos x+\sin x)=2e^x\cos x$
28	$2\frac{dy}{dx}-2y=2e^x(\cos x+\sin x)-2e^x\sin x$ $=2e^x\cos x=\frac{d^2y}{dx^2}$

مهارات التفكير العليا

تبرير: إذا كان: $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

39 أُثبِت أنّ $f''(x)=\frac{6\ln x-5}{x^4}$، مُبرِّرًا إجابتي.

40 أجد قيمة المقدار: $x^4 f''(x)+4x^3 f'(x)+2x^2 f(x)+1$.

39	$f'(x)=\frac{x^2\left(\frac{1}{x}\right)-(\ln x)(2x)}{x^4}=\frac{1-2\ln x}{x^3}$ $f''(x)=\frac{x^3\left(-\frac{2}{x}\right)-(1-2\ln x)(3x^2)}{x^6}=\frac{-5x^2+6x^2\ln x}{x^6}=\frac{-5+6\ln x}{x^4}$
40	$x^4f''(x)+4x^3f'(x)+2x^2f(x)+1$ $=x^4\times\frac{-5+6\ln x}{x^4}+4x^3\times\frac{1-2\ln x}{x^3}+2x^2\times\frac{\ln x}{x^2}+1$ $=-5+6\ln x+4-8\ln x+2\ln x+1=0$

كتاب التمارين

18 إذا كان: $f(x)=\frac{\ln x}{x}$، حيث: $x>0$، فأجد $f'(x)$ و $f''(x)$.

18	$f'(x)=\frac{x\times\frac{1}{x}-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}=\frac{1}{x^2}-\frac{\ln x}{x^2}$ $f''(x)=-\frac{2}{x^3}-\frac{x^2\times\frac{1}{x}-2x\ln x}{x^4}=\frac{-3+2\ln x}{x^3}$

مُعدَّل التغيُّر

المشتقة هي مُعدَّل تغيُّر كمية بالنسبة إلى كمية أُخرى عند لحظة مُعيَّنة. فمثلاً، إيجاد $\frac{dy}{dx}$ يعني إيجاد مُعدَّل تغيُّر y بالنسبة إلى x ، وفي كثير من المواقف الحياتية يكون التغير بالنسبة إلى الزمن.

مثال : ينتقل الدم من القلب إلى الشرايين الرئيسة والشعيرات الدموية، ثم يعود إليه من خلال الأوردة، إذا كان ضغط الدم الانقباضي P لشخص ما (بالملمتر الزئبقي) يتناقص باستمرار خلال 10 ثوانٍ وفقًا للاقتران :

$$P(t) = \frac{25t^2 + 125}{t^2 + 1} \quad , \quad 0 \leq t \leq 10$$

حيث t بالثواني،

فكم يكون معدل ضغط دم هذا الشخص في الثانية الخامسة؟

$$P'(t) = \frac{\frac{d}{dt}(25t^2+125)\cdot(t^2+1) - (25t^2+125)\cdot\frac{d}{dt}(t^2+1)}{(t^2+1)^2}$$

$$= \frac{(50t)\cdot(t^2+1) - (25t^2+125)\cdot(2t)}{(t^2+1)^2}$$

$$P'(5) = \frac{(50(5))\,((5)^2+1) - (25(5)^2+125)(2(5))}{((5)^2+1)^2} = \frac{-1000}{676} \approx -1.48$$

أتحقق من فهمي يعطى عدد سكّان مدينة صغيرة بالاقتران: $P(t) = \frac{500t^2}{2t+9}$،

حيث t الزمن بالسنوات، وP عدد السكّان بالآلاف:

a) أجد مُعدَّل تغيُّر عدد السكّان في المدينة بالنسبة إلى الزمن.

b) أجد مُعدَّل تغيُّر عدد السكّان في المدينة عندما $t = 12$، مُفسِّرًا معنى الناتج.

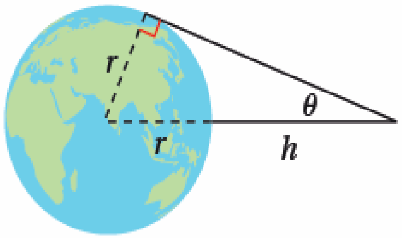
a	$P'(t) = \frac{(2t+9)(1000t) - (500t^2)(2)}{(2t+9)^2} = \frac{9000t + 1000t^2}{(2t+9)^2}$
b	$P'(12) = \frac{9000(12) + 1000(12)^2}{(24+9)^2} \approx 231.405$

أتدرّب وأحلُّ المسائل

26 نباتات هجينة: وجد فريق بحث زراعي أنّه يُمكِن التعبير عن ارتفاع نبتة مُهجَّنة من نبات تبّاع الشمس h بالأمتار، باستعمال الاقتران: $h(t) = \frac{3t^2}{4+t^2}$، حيث t الزمن بالأشهر بعد زراعة البذور. أجد مُعدَّل تغيُّر ارتفاع النبتة بالنسبة إلى الزمن.

26	$h'(t) = \frac{(4+t^2)(6t)-(3t^2)(2t)}{(4+t^2)^2} = \frac{24t}{(4+t^2)^2}$

الأستاذ: عبدالقادر الحسنات
078 531 88 77



أقمار صناعية: عندما ترصد الأقمارُ الصناعيةُ الأرضَ، فإنَّه يُمكِنها مسح جزء فقط من سطح الأرض. وبعض الأقمار الصناعية تحوي مُستشعِرات لقياس الزاوية θ (بالراديان) المُبيَّنة في الشكل المجاور.

إذا كان h يُمثِّل المسافة بين القمر الصناعي وسطح الأرض بالكيلومتر، و r يُمثِّل نصف قُطْر الأرض بالكيلومتر، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

29 أُثبِت أنَّ $h = r(\csc\theta - 1)$.

30 أجد مُعدَّل تغيُّر h بالنسبة إلى θ عندما $\theta = \frac{\pi}{6}$ rad (أفترض أنَّ $r = 6371$ km).

29	$\csc\theta = \frac{r+h}{r} \rightarrow r + h = r\csc\theta$ $\rightarrow h = r(\csc\theta - 1)$

30	$\frac{dh}{d\theta} = r(-\csc\theta\cot\theta)$ $\left.\frac{dh}{d\theta}\right\vert_{\theta=\frac{\pi}{6}} = 6371\left(-\csc\frac{\pi}{6}\cot\frac{\pi}{6}\right) = 6371(-2\times\sqrt{3}) \approx -22070\ km/rad$

كتاب التمارين

21 يعطى طول مستطيل بالمقدار $6t + 5$، ويعطى عرضه بالمقدار $\sqrt{t}$، حيث t الزمن بالثواني، والأبعاد بالسنتيمترات. أجد مُعدَّل تغيُّر مساحة المستطيل بالنسبة إلى الزمن.

21	$A = \sqrt{t}(6t+5) = 6t^{\frac{3}{2}} + 5t^{\frac{1}{2}}$ $\frac{dA}{dt} = 9t^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{2}t^{-\frac{1}{2}} = 9\sqrt{t} + \frac{5}{2\sqrt{t}}\quad cm^2/s$

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

تمارين / واجب

1) $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2+1} \Rightarrow f''(-1)=\ldots\ldots$ $\boxed{\text{الجـواب:} -1}$

2) $f(x)=x^5 \Rightarrow f^{(5)}(-1)=\ldots\ldots$ $\boxed{\text{الجـواب:} 120}$

3) $f(x)=x^2\sin x \Rightarrow f''(x)=$

4) $f(x)=x^2+\cos x \Rightarrow f''(x)=$

5) $f(x)=Lnx \Rightarrow f^{(4)}(2)=\ldots\ldots$ $\boxed{\text{الجـواب:} \frac{-3}{8}}$

تمارين عامة / واجب

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d	c	c	a	b	b	b	b	c	b

1) $f(x) = x\cos x \Rightarrow f'(x) =$

$a)\ -\sin x$ $\qquad b)\ 1-\sin x$

$c)\ \cos x + x\sin x$ $\qquad d)\ \cos x - x\sin x$

2) $f(x) = e^{x}\sin x \Rightarrow f''(x) =$ $a)\ 0$ $\qquad b)\ 2e^{x}\sin x$

$c)\ 2e^{x}\cos x$ $\qquad d)\ -2e^{x}\cos x$

3) $f(x) = \dfrac{x}{Lnx} \Rightarrow f'(x) =$ $a)\ \dfrac{Lnx-1}{2Lnx}$ $\qquad b)\ x$ $\qquad c)\ \dfrac{Lnx-1}{(Lnx)^2}$ $\qquad d)\ \dfrac{Lnx+1}{(Lnx)^2}$

4) $f(x) = \dfrac{x}{g(x)}$ $, g(x) \neq 0,\ g(3) = 1\ ,\ g'(3) = -1 \Rightarrow f'(3) =$

$a)\ 4$ $\qquad b)\ -2$ $\qquad c)\ 3$ $\qquad d)\ -3$

5) $f(5) = -1\ ,\ f'(5)\ = 1\ ,\ g(5) = -2\ , g'(5) = 3 \Rightarrow \left(\dfrac{g}{f}\right)'(5) =$

$a)\ 1$ $\qquad b)\ -1$ $\qquad c)\ \dfrac{5}{4}$ $\qquad d)\ \dfrac{-1}{4}$

6) $f(x) = \dfrac{e^{x-1}}{x+Lnx} \Rightarrow f'(1) =$ $a)\ 1$ $\qquad b)\ -1$ $\qquad c)\ 2$ $\qquad d)\ -2$

7) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x + 1} \Rightarrow f'(x) =$ $a)\ \dfrac{\cos x}{1-\sin x}$ $\qquad b)\ \dfrac{1}{1+\cos x}$

$c)\ \dfrac{-\cos x}{\sin x + 1}$ $\qquad d)\ \dfrac{\cos x}{\sin x - 1}$

8) $f(x) = \dfrac{\sec x}{\sec x - 1} \Rightarrow f'(x) =$ $a)\ 1$ $\qquad b)\ \dfrac{\sin x}{(1-\cos x)^2}$

$c)\ \dfrac{\sin x}{1-\cos x}$ $\qquad d)\ \dfrac{\sin x}{1-\cos^2 x}$

9) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1} \Rightarrow f''(-1) =$ $a)\ 0$ $\qquad b)\ 1$ $\qquad c)\ -1$ $\qquad d)\ 3$

10) $f(x) = Ln(x)^2 \Rightarrow f^{(4)}(2) =$ $a)\ \dfrac{3}{4}$ $\qquad b)\ \dfrac{-3}{4}$ $\qquad c)\ -\dfrac{1}{4}$ $\qquad d)\ Ln4$

ملخص الدرس الثاني ثم اختبار ��� ورقة عمل (4) ��� مشتقتا الضرب والقسمة

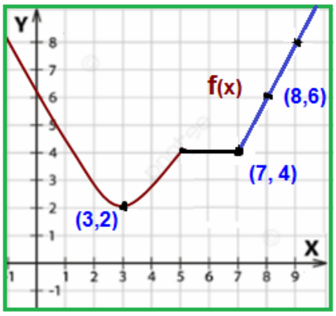
إذا كان الاقتران $f(x)$ والاقتران $g(x)$ قابلين للاشتقاق، فإنَّ: $(fg)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$

إذا كان الاقتران $f(x)$ والاقتران $g(x)$ قابلين للاشتقاق، وكان $g(x) \neq 0$، فإنَّ: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x) \times f'(x) - f(x) \times g'(x)}{(g(x))^2}$

$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f^{(n)}(x)$
$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d^2y}{dx^2}$	$\frac{d^3y}{dx^3}$	$\frac{d^ny}{dx^n}$
y'	y''	y'''	$y^{(n)}$

$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$	$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$
$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$	$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$

*** بالنسبة للمشتقة الأولى لنقطة من خلال الرسم ، على الأغلب هناك ثلاثة احتمالات :



1) أن تقع النقطة على خط مستقيم : عندها المشتقة = ميل ذلك المستقيم

$$f'(9) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6-4}{8-7} = 2$$

2) أن تقع النقطة على رأس مدبب: عندها المشتقة = غير موجودة مثل f '(7) , f '(5)

3) أن تقع النقطة على مستقيم أفقي أو تكون قيمة قصوى (صغرى أو عظمى) :
عندها المشتقة = صفر : f '(3) = 0 , f '(6) = 0

السؤال الأول : اختر رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي :

1) إذا كان $f(x) = x e^x$, فإن $f'(0) =$

$a)\ 1 \qquad b)\ 0 \qquad c)\ e^2 \qquad d)\ e$

2) إذا كان $f(x) = \frac{x}{x+1}$, فإن $f'(2) =$

$a)\ \frac{1}{2} \qquad b)\ \frac{1}{9} \qquad c)\ \frac{5}{9} \qquad d)\ \frac{-1}{9}$

3) إذا كان $f(x) = \ln x^2$, فإن $f''(x)$ يساوي :

$a)\ 2\ln x \qquad b)\ \frac{-2}{x^2} \qquad c)\ \frac{2}{x} \qquad d)\ \frac{2}{x^2}$

4) إذا كان $f(x) = \frac{2x-8}{e^x}$, فإن قيم (x) التي عندها مماس أفقي هي:

$a)\ 4 \qquad b)\ -2 \qquad c)\ 5 \qquad d)\ 5,0$

5) إذا كان $f(x) = (x^2-1)(x^2+1)$ فإن $f'(x)$ تساوي :

$a)\ 4x^2 \qquad b)\ -4x \qquad c)\ 4x \qquad d)\ 4x^3$

الأستاذ عبدالقادر الحسنات
078 531 88 77

6) إذا كان $f(x)=\sin x \cos x$ فإن $f'(x)$ تساوي :

$a)\ \sin 2x \quad b)\ \cos 2x \quad c)\ 1 \quad d)\ -\sin x \cos x$

$\sin 2x = 2\sin x \cos x$ | $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

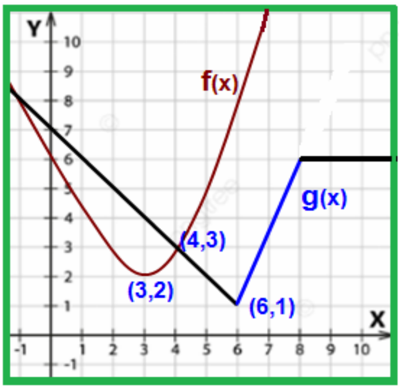
***معتمداً المعلومات الآتية ، أجب عن الأسئلة (7، 8، 9): $f(1)=5, f'(1)=-2, g(1)=2, g'(1)=4$

7) $(f\ g)'(1)$ تساوي: $a)\ 16 \quad b)\ -2 \quad c)\ -24 \quad d)\ -8$

8) $(\frac{f}{g})'(1)$ تساوي: $a)\ 6 \quad b)\ 4 \quad c)\ -4 \quad d)\ -6$

9) $(3f-g)'(1)$ تساوي: $a)\ -2 \quad b)\ -8 \quad c)\ -10 \quad d)\ -6$

معتمداً الشكل المجاور والذي يمثل منحنيي الاقترانين ، أجب عن الأسئلة (10 – 16)



10) $g'(6)$ تساوي: $a)\ 3 \quad b)\ 0 \quad c)\ 5 \quad d)$ غير موجودة

11) $g'(9)$ تساوي: $a)\ 3 \quad b)\ 0 \quad c)\ 5 \quad d)$ غير موجودة

12) $f'(3)$ تساوي : $a)\ 4 \quad b)\ 0 \quad c)\ 2 \quad d)$ غير موجودة

13) $g'(2)$ تساوي : $a)\ -1 \quad b)\ 0 \quad c)\ 5 \quad d)\ 1$

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

14) $(f\ g)'(3)$ تساوي : $a)\ 4 \quad b)\ 2 \quad c)\ 0 \quad d)\ -2$

15) $(\frac{g}{f})'(3)$ تساوي : $a)\ \frac{-1}{4} \quad b)\ \frac{1}{2} \quad c)\ 0 \quad d)\ -\frac{1}{2}$

16) $g''(5)$ تساوي $a)\ 2 \quad b)\ 0 \quad c)\ 1 \quad d)$ غير موجودة

17) إذا كان $f(2)=4,\ g(2)=1,\ g'(2)=2$ وكانت $(f\ g)'(2)=5$ فإن $f'(2)=$

$a)\ 2 \qquad b)\ 13 \qquad c)\ -3 \qquad d)\ -2$

18) إذا كان $f(3)=g'(3)=4,\ f'(3)=8$ وكانت $(\frac{f}{g})'(3)=1$ فإن $g(3)=$

$a)\ -4 \qquad b)\ 8 \qquad c)\ -4,4 \qquad d)\ 4$

19) إذا كان $f(x)=x^3\ g(x)$, $g(-1)=-2$, $g'(-1)=2$ فإن $f'(-1)=$

$a)\ -4 \qquad b)\ -8 \qquad c)\ -6 \qquad d)\ 8$

20) يتحرك جسم في مسار مستقيم حيث يُعطى موقعه بالاقتران : $s(t)=t^2\ e^{-t}$

فإن قيمة (t) التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي بعد حركته هي :

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

a) 2 b) 1 c) 0.5 d) 1.5

21) إذا كان $f(x)=\frac{1}{x}+x$, فإن $f'(3)$ يساوي :

$a)\ 0 \qquad b)\ \frac{8}{9} \qquad c)\ \frac{-8}{9} \qquad d)\ \frac{2}{9}$

22) إذا كان $f(x)=\frac{1}{x}+x$, فإن $f''(x)$ يساوي :

$a)\ 0 \qquad b)\ \frac{2}{x} \qquad c)\ \frac{-2}{x^3} \qquad d)\ \frac{2}{x^3}$

23) إذا كان $f(x)=e^x+\ln x$, فإن $f'(1)$ يساوي :

$a)\ e+1 \qquad b)\ e \qquad c)\ 0 \qquad d)\ \frac{1}{e}$

24) إذا كان $f(x)=e^x\ln x$, فإن $f'(1)$ يساوي :

$a)\ e+1 \qquad b)\ e \qquad c)\ 0 \qquad d)\ \frac{1}{e}$

25) إذا كان $f(x)=e^x\sin x$, فإن $f'(0)$ يساوي:

$a)\ 1 \qquad b)\ 2e \qquad c)\ 0 \qquad d)\ 2$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	b	b	c	d	b	a	d	c	d

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
b	b	a	d	d	b	c	d	b	a

21	22	23	24	25
b	d	a	b	a

السؤال الثاني :إذا كان عدد السكان في بلدة ما يُعطى بالعلاقة $P(t)=\dfrac{100\,t^2}{2\,t+5}$ حيث (t) الزمن بالسنوات

جد معدل التغير في عدد السكان بعد (10) سنوات

السؤال الثالث : إذا كـان $f(x)=\cot x$ فأثبـــــت أن $f'(x)=-\csc^2 x$

السؤال الرابع : جد المشتقة الثانية لكل من الاقترانات الآتية عند قيمة (x) المعطاة :

$$1)\ f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}\quad ,\ x=-2$$

$$2)\ f(x)=x\ \sin x\quad ,\ x=\pi$$

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

$$3)\ f(x)=x^2\ \ln x\quad ,\ x=e$$

السؤال الخامس : جـد معادلــة المماس لمنحـنى الاقـتران $f(x)=\dfrac{x^2}{\ln x}$ عنـد $x=e$

السؤال السادس : جـد معادلـة العمـودي علـى المماس لمنحـنى $f(x)=\dfrac{x-2}{1+e^x}$ عنـد النقطة $(0,-1)$

السؤال السابع :

إذا كان $f(x)=\dfrac{g(x)}{x^2h(x)}$, $f(1)=g'(2)=2$, $g(1)=8$, $f'(1)=5$ فجـد قيمـة $h'(1)$

الجواب : 17 –

السؤال الثامن : إذا كـان $f(x)=x^n$, $f''(x)=12x^{n-2}$, فجـد قيمـة n

الجواب : 4 , 3 –

الأستاذ عبدالقادر الحسنات
رياضيات

أسئلة الوزارة 2023 / العلمي

2) إذا كان: $f(x) = (x-1)\cos x$ ، فإنّ $f'(x)$ هي:

a) $\cos x + (1-x)\sin x$ c) $\cos x\,(1-x) + \sin x$

b) $\cos x\,(x-1) + \sin x$ d) $\cos x + (x-1)\sin x$

4) إذا كان: $y = \frac{\sqrt{2}}{\sin x}$ ، فإنّ $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{4}}$ هي:

a) $\sqrt{2}$ b) 2 c) $-\sqrt{2}$ d) -2

5) إذا كان: $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{2(x^3-1)}{x^3}$ ، فإنّ $f^{(3)}(x)$ هي:

a) $-120x^6$ b) $\frac{6}{x^4}$ c) $-24x^5$ d) $-\frac{24}{x^5}$

أسئلة الوزارة 2023 / الصناعي

7- إذا كان: $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق عند $x = 1$ ، وكان:

$f(1) = -1\,, f'(1) = 5\,, g(1) = 1\,, g'(1) = 2$ ، فإنّ قيمة $(fg)'(1)$ هي:

a) 3 b) -7 c) 10 d) -3

9- إذا كان: $f(x) = \frac{2x}{5x-1}$ ، فإنّ قيمة $f'(1)$ هي:

a) $\frac{1}{8}$ b) $-\frac{1}{8}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $-\frac{1}{4}$

b) جد $\frac{dy}{dx}$ لكل ممّا يأتي عند القيمة المعطاة إزاء كل منها:

2) $y = \frac{2}{3+\sqrt{x}}$, $x = 4$