الأستاذ عبدالقادر الحسنات 078 531 88 77

الدرس 3 قاعدة السلسلة The Chain Rule

1) قاعدة السلسلة

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$y = u^4$ ، $u = 5x^3 - 2x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= 4u^3 \times (15x^2 - 2) = 4(5x^3 - 2x)^3 (15x^2 - 2)$$

$y = \cos u$. $u = x^2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\sin u \times 2x$$

$$= -2x \sin x^2$$

$y = e^{x^3}$

$u = x^3 \Rightarrow y = e^u$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^u \times 3x^2$$

$$= 3x^2 e^{x^3}$$

$y = (2x - 5)^{10}$

$u = 2x - 5 \Rightarrow y = u^{10}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= 10u^9 \times 2$$

$$= 20(2x - 5)^9$$

وبشكل عام، يمكن تكرار القاعدة أكثر من مرة

$$y = f(u), u = g(t), t = h(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dt} \times \frac{dt}{dx}$$

$y \to u \to t \to x$

$$f(x) = g(h(x)) \Rightarrow f'(x) = g'(h(x)) \times h'(x)$$

بشـــرط قابليـــة الاشـــتقاق لكـــل مـــن $h(x), g(x)$

مشـــتقة الاقتران المُركّـــب $f(g(x))$ هي
حاصل ضرب مشـــتقة الاقتران الخارجي f عند الاقتران الداخلي $g(x)$ في مشتقة الاقتران الداخلي $g(x)$.

1) $f(x) = x^3 + 1$, $g(x) = x^2 - 1 \Rightarrow (fog)'(-2) = ?$

$f'(x) = 3x^2$, $g'(x) = 2x$

$g(-2) = 3$, $g'(-2) = -4$, $f'(3) = 27$

$$\Rightarrow (fog)'(-2) = f'(g(-2)) \times g'(-2) = f'(3) \times (-4) = 27 \times (-4) = -108$$

---

2) $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2 - 4 \Rightarrow (fog)'(2) = ?$

$f'(x) = \cos x$, $g'(x) = 2x$, $g(2) = 0$

$$\Rightarrow (fog)'(2) = f'(g(2)) \times g'(2) = f'(0) \times 2(2) = 1 \times 4 = 4$$

3) $f(x)=Lnx \quad , \quad g(x)=x^3+1 \Rightarrow (fog)'(x)=?$

$$f'(x)=\frac{1}{x} \quad , \quad g'(x)=3x^2$$

$$\Rightarrow (fog)'(2)=f'(g(x))\times g'(x)=f'(x^3+1)\times 3x^2=\frac{1}{x^3+1}\times 3x^2=\frac{3x^2}{x^3+1}$$

4) $f(5)=3 \ , f'(6)=2 \ , g(5)=6 \ , g'(5)=4 \Rightarrow (fog)'(5)=?$

$$(fog)'(5)=f'(g(5))\times g'(6)=f'(6)\times 4=(2)(4)=8$$

5) $f'(5)=6 \ , g(7)=5 \ ,(fog)'(7)=-12 \Rightarrow g'(7)=?$

$$\Rightarrow (fog)'(7)=f'(g(7))\times g'(7)=f'(5)\times g'(7)=-12$$

$$\Rightarrow 6\times g'(7)=-12 \quad \Rightarrow g'(7)=-2$$

6) $f'(x)=\frac{x}{x^2+1} \quad , \quad g'(1)=3 \quad , g(1)=2 \Rightarrow (fog)'(1)=?$

$$(fog)'(1)=f'(g(1))\times g'(1)$$

$$=f'(2)\times 3=\frac{2}{(2)^2+1}\times 3=\frac{6}{5}$$

7) $f(x)=3\tan x \quad , \quad g(x)=\frac{2x}{x^2+1} \Rightarrow (gof)'(\frac{\pi}{4})=?$

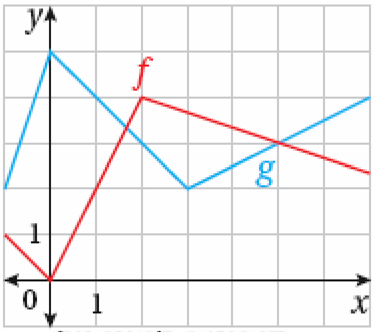
$$f'(x)=3\sec^2 x \quad , \quad g'(x)=\frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$(gof)'(\tfrac{\pi}{4})=g'(f(\tfrac{\pi}{4}))\times f'(\tfrac{\pi}{4})$$

$$=g'(3)\times 6=\frac{2-2(3)^2}{((3)^2+1)^2}\times 6=\frac{-16\times 6}{100}=\frac{-96}{100}$$

23 إذا كان: $A(x) = f(g(x))$، وكان: $f(-2) = 8, f'(-2) = 4, f'(5) = 3, g(5) = -2, g'(5) = 6$، فأجـــد $A'(5)$.

23	$A(x) = f(g(x))$ $A'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$ $A'(5) = f'(g(5)) \times g'(5) = f'(-2) \times g'(5) = 4 \times 6 = 24$



يُبيِّن الشكل المجاور منحنيي الاقترانين $f(x)$ و $g(x)$. إذا كان:
$h(x) = f(g(x))$، وكان: $p(x) = g(f(x))$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

40 $h'(1)$ **41** $p'(1)$

40	$h(x) = f(g(x))$ $h'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$ $h'(1) = f'(g(1)) \times g'(1) = f'(4) \times g'(1)$ $g'(1)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(3,2)$ و $(0,5)$ ويساوي -1 $f'(4)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(5,3)$ و $(2,4)$ ويساوي $-\frac{1}{3}$ $h'(1) = -\frac{1}{3} \times -1 = \frac{1}{3}$
41	$p(x) = g(f(x))$ $p'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$ $p'(1) = g'(f(1)) \times f'(1) = g'(2) \times f'(1)$ $g'(2)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(3,2)$ و $(0,5)$ ويساوي -1 $f'(1)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(0,0)$ و $(2,4)$ ويساوي 2 $p'(1) = -1 \times 2 = -2$

أجد $(f \circ g)'(x)$ عند قيمة x المعطاة في كلٍّ ممّا يأتي:

28 $f(u) = u^5 + 1, u = g(x) = \sqrt{x}, x = 1$ **29** $f(u) = u + \frac{1}{\cos^2 u}, u = g(x) = \pi x, x = \frac{1}{4}$

28	$f(u) = u^5 + 1 \Rightarrow f'(u) = 5u^4$ $u = g(x) = \sqrt{x} \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(fog)'(1) = f'(g(1)) \times g'(1) = f'(1) \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$
29	$f(u) = u + \frac{1}{\cos^2 u} \Rightarrow f'(u) = 1 + \frac{2\cos u \sin u}{\cos^4 u} = 1 + 2\sec^2 u \tan u$ $u = g(x) = \pi x \Rightarrow g'(x) = \pi$ $(fog)'\left(\frac{1}{4}\right) = f'\left(g\left(\frac{1}{4}\right)\right) \times g'\left(\frac{1}{4}\right) = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \pi = 5\pi$

2) نتائج قاعدة السلسلة: هناك خمس نتائج لقاعدة السلسلة ، وهي :

1) مشتقة الزاوية للاقتران المثلثي :

$$\boxed{f(x)=\sin(3x-2)} \leftarrow \text{الزاوية}$$

عندما تكون الزاوية في الاقتران المثلثي تختلف عن (x)، دائما نضرب في مشتقتها بعد اشتقاق الاقتران المثلثي

وكذلك بقية الاقترانات المثلثية

$$\boxed{f(x)=\sin(g(x)) \Rightarrow f'(x)=\cos(g(x))\times(g'(x))}$$

بشرط قابلية الاشتقاق للاقتران $g(x)$

خطأ شائع

$$1)\ f(x)=\sin 4x^3 \Rightarrow f'(x)=\cos 4x^3(12x^2)\ ,\ \boxed{f'(x)=\cos 12x^2}$$

$$2)\ f(x)=4\cos(Lnx) \Rightarrow f'(x)=-\ 4\sin(Lnx)(\frac{1}{x})$$

$$3)\ f(x)=x\tan(e^x) \Rightarrow f'(x)=(1)(\tan(e^x))+\sec^2(e^x)\times(e^x)(x)$$

$$4)\ f(x)=\csc(\sin x) \Rightarrow f'(x)=-\csc(\sin x)\cot(\sin x)\times(\cos x)$$

$$5)\ f(x)=\cot(1-x^2) \Rightarrow f'(x)=$$

$$6)\ f(x)=\sec(xe^x) \Rightarrow f'(x)=$$

$$7)\ f(x)=x^2\sin(2x) \Rightarrow f'(x)=$$

$$8)\ f(x)=\cos(\tan(x^3)) \Rightarrow f'(x)=$$

$$9)\ f(x)=\sin 2x\cos 3x \Rightarrow f'(x)=$$

$$10)\ f(x)=\frac{\tan 5x}{1-\sec 2x} \Rightarrow f'(x)=$$

2) مشتقة الاقتران الأسي :

عندما تكون القوة في الاقتران الأسي تختلف عن (x)، دائما نضرب في مشتقتها بعد (اشتقاق) الاقتران الأسي

$$f(x)=e^{g(x)} \Rightarrow f'(x)=e^{g(x)} \times (g'(x))$$

بشـــرط قابليـــة الاشــــتقاق للاقـــتران $g(x)$

1) $f(x)=7e^{3x-1} \Rightarrow f'(x)=7e^{3x-1}(3)$

2) $f(x)=e^{\sin 2x} \Rightarrow f'(x)=e^{\sin 2x}(\cos 2x)(2) \Rightarrow f'(0)=e^{0}(\cos 0)(2)=2$

3) $f(x)=(\tan 2x)\, e^{\sec 3x}$

$\Rightarrow f'(x)=(\sec^2 2x(2))(e^{\sec 3x})+(e^{\sec 3x}(\sec 3x \ \tan 3x(3))(\tan 2x)$

4) $f(x)=x^2 \ e^{\frac{1}{x}} \Rightarrow f'(x)=$

5) $f(x)=\sin x^2 \ e^{-x^3} \Rightarrow f'(x)=$

6) $f(x)=\dfrac{e^{3x}}{\sin 2x} \Rightarrow f'(x)=$

7) $f(x)=e^{x^2+x} \Rightarrow f'(0)=?$

8) $f(x)=\cos e^{x^2} \Rightarrow f'(x)=?$

9) $f(x)=\sin x \ e^{\cos x} \Rightarrow f'(x)=$

10) $f(x)=e^{x^2 \ \cot 3x} \Rightarrow f'(x)=$

3) مشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي (Ln( )) :
عندما يكون ما بداخل اللوغاريتم يختلف عن (x) ، تكون المشتقة =

مشتقة ما بداخل اللوغاريتم / ما بداخل اللوغاريتم

$$f(x)=Ln(g(x))\Rightarrow f'(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}$$

g(x) قابل للاشتقاق , $g(x)>0$

1) $f(x)=Ln(x^2-5x+7)\Rightarrow f'(x)=\dfrac{2x-5}{x^2-5x+7}$

2) $f(x)=Ln(\sin 3x)\Rightarrow f'(x)=\dfrac{3\cos 3x}{\sin 3x}=3\cot 3x$

3) $f(x)=x\ Ln(x^2+1)\Rightarrow f'(x)=(1)(Ln(x^2+1))+(\dfrac{2x}{x^2+1})(x)$

4) $f(x)=Ln(x^2+4)\Rightarrow f''(x)=$

5) $f(x)=Ln(\sec 2x)\Rightarrow f'(x)=$

6) $f(x)=\cot(x^2+1)+e^{x^2+2}+Ln(x^2+x)\ \Rightarrow f'(x)=$

7) $f(x)=Ln(x^2\tan 3x)\ \Rightarrow f'(x)=$

8) $f(x)=Ln(e^{\sin 2x\ \cos 3x}+\csc 4x)\ \Rightarrow f'(x)=$

9) $f(x)=Ln(x^2+\tan 3x)\Rightarrow f'(x)=$

10) $f(x)=Ln(x^4\cos 5x)\Rightarrow f'(x)=$

4) قاعدة سلسلة القوَّة : (القوس المرفوع إلى قوة)

عند اشتقاق القوس المرفوع إلى قوة ، نشتق القوة أولاً ثم نضرب في مشتقة ما بداخل القوس

$$\boxed{f(x)=(g(x))^n \Rightarrow f'(x)=n\,(g(x))^{n-1}(g'(x))}$$

بشـــرط قابليـــة الاشـــتقاق للاقـــتران $g(x)$

1) $f(x)=(2x+5)^3 \Rightarrow f'(x)=3(2x+5)^2(2)$

2) $f(x)=(2x^3+5x)^7 \Rightarrow f'(x)=7(2x^3+5x)^6(6x^2+5)$

3) $f(x)=\sqrt[4]{(x^2+5)^3} \Rightarrow f(x)=(x^2+5)^{\frac{3}{4}} \Rightarrow f'(x)=\frac{3}{4}(x^2+5)^{\frac{-1}{4}}(2x)$

4) $f(x)=\sqrt{\sin x+1} \Rightarrow f(x)=(\sin x+1)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}(\sin x+1)^{\frac{-1}{2}}(\cos x)$

5) $f(x)=(x^2+\sin 3x)^4 \Rightarrow f(x)=$

6) $f(x)=\sqrt[7]{x^3\sin 2x-3} \Rightarrow f(x)=$

7) $y=\dfrac{\sec x^2}{\sqrt{x^2+4}} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=$

ملاحظة: عند وجود اقتران مثلثي مرفوع إلى قوة ، يُفضل كتابته على شكل قوس مرفوع إلى قوة ثم الاشتقاق

$\boxed{\sin^2 x=(\sin x)^2}$ $\boxed{\cos^3 8x=(\cos 8x)^3}$ $\boxed{\tan^5(2x+1)^2=(\tan(2x+1)^2)^5}$

1) $y=\cot^3 x^2=(\cot x^2)^3 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=3(\cot x^2)^2(-\csc^2 x^2)(2x)$

2) $f(x)=\sin^4(x^2+1)=(\sin(x^2+1))^4 \Rightarrow f'(x)=4(\sin(x^2+1))^3(\cos(x^2+1)(2x)$

3) $f(x)=\tan^2(\sin 5x)=(\tan(\sin 5x))^2$

$\Rightarrow f'(x)=2\tan(\sin 5x)(\sec^2(\sin 5x)(\cos 5x)(5)$

5) حالة خاصة في مشتقة الجذر التربيعي :

$$f(x)=\sqrt{g(x)} \Rightarrow f'(x)=\frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$$

مشتقة الجذر التربيعي : $\frac{\text{مشتقة ما بداخل الجذر}}{2 \times \text{الجذر}}$

g(x) قابل للاشتقاق , $g(x)>0$

$$1)\ f(x)=\sqrt{x^2+\sec x} \Rightarrow f'(x)=\frac{2x\ \ \tan x\ \ \sec x}{2\sqrt{x^2+\sec x}}$$

$$2)\ f(x)=\sqrt{x^3\sin 2x} \Rightarrow f'(x)=\frac{(3x^2)(\sin 2x)+(\cos 2x)(2)(x^3)}{2\sqrt{x^3\sin 2x}}$$

$$3)\ f(x)=\sqrt{x^2\cot 2x} \Rightarrow f'(x)=$$

$$4)\ f(x)=\sqrt{\sin 2x\ \ \cos 3x} \Rightarrow f'(x)=$$

$$5)\ f(x)=\sqrt{8-x^3} \Rightarrow f'(-1)=?$$

ملخص نتائج السلسلة

	من نتائج قاعدة السلسلة	Abdulkadir Hasanat 078 531 88 77	f(x)=sin (3x−2) الزاوية
1	$\frac{d}{dx}\left(\sin g(x)\right)=\cos\left(g(x)\right)\times g'(x)$	مشتقة الاقتران المثلثي : نضرب في مشتقة الزاوية	
2	$\frac{d}{dx}\left(e^{(g(x))}\right)=e^{g(x)}\times g'(x)$	مشتقة الاقتران الأسي : نضرب في مشتقة القوة	
3	$\frac{d}{dx}\left(\ln g(x)\right)=\frac{g'(x)}{g(x)}$	مشتقة الاقتران اللوغاريتمي : $\frac{\text{مشتقة ما بداخل اللوغاريتم}}{\text{ما بداخل الوغاريتم}}$	
4	$\frac{d}{dx}\left(g(x)\right)^n=n\left(g(x)\right)^{n-1}\times g'(x)$	مشتقة القوس المرفوع لقوة : نضرب في مشتقة ما بداخل القوس	
5	$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{g(x)}\right)=\frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$	مشتقة الجذر التربيعي : $\frac{\text{مشتقة ما بداخل الجذر}}{2 \times \text{الجذر نفسه}}$	

أتحقّق من فهمي 41 أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = \tan 3x^2$ b) $f(x) = e^{\ln x}$ c) $f(x) = \ln(\cot x)$

a	$f(x) = \tan 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 6x\sec^2(3x^2)$	أتحقق من فهمي صفحة 41
b	$f(x) = e^{\ln x} = x \Rightarrow f'(x) = 1$	
c	$f(x) = \ln\cot x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-\csc^2 x}{\cot x}$	

أتحقّق من فهمي 42 أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = \sqrt[5]{(x^2-1)^2}$ b) $f(x) = \sqrt{\cos x}$ c) $f(x) = (\ln x)^5$

a	$f'(x) = \dfrac{2}{5}(x^2-1)^{-\frac{3}{5}}(2x) = \dfrac{4x}{5\sqrt[5]{(x^2-1)^3}}$	أتحقق من فهمي صفحة 42
b	$f'(x) = \dfrac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$	
c	$f'(x) = 5(\ln x)^4\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{5(\ln x)^4}{x}$	

أتحقّق من فهمي 45 أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = \cos^2(7x^3+6x-1)$ b) $f(x) = (2+(x^2+1)^4)^3$

a	$f(x) = \cos^2(7x^3+6x-1) = (\cos(7x^3+6x-1))^2$ $f'(x) = 2(\cos(7x^3+6x-1))^1(-\sin(7x^3+6x-1)(21x^2+6))$ $= -2(21x^2+6)\sin(7x^3+6x-1)\cos(7x^3+6x-1)$ $= -(21x^2+6)\sin 2(7x^3+6x-1)$
b	$f(x) = (2+(x^2+1)^4)^3$ $f'(x) = 3(2+(x^2+1)^4)^2\left(4(x^2+1)^3(2x)\right)$ $= 24x(x^2+1)^3(2+(x^2+1)^4)^2$

أتدرّب وأحُلّ المسائل 53 أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = e^{4x+2}$

2) $f(x) = 50e^{2x-10}$

3) $f(x) = \cos(x^2-3x-4)$

4) $f(x) = 10x^2 e^{-x^2}$

5) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$

6) $f(x) = x^2\tan\dfrac{1}{x}$

7) $f(x) = 3x - 5\cos(\pi x)^2$

8) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+e^x}{1-e^x}\right)$

9) $f(x) = (\ln x)^4$

10) $f(x) = \sin\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{\sin x}$

11) $f(x) = \sqrt[5]{x^2+8x}$

15) $f(x) = \left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2$

17) $f(x) = e^{\sin 2x} + \sin(e^{2x})$

18) $f(x) = \tan^4(\sec(\cos x))$

1	$f(x) = e^{4x+2}$ $f'(x) = 4e^{4x+2}$	2	$f(x) = 50e^{2x-10}$ $f'(x) = 100e^{2x-10}$
3	$f(x) = \cos(x^2 - 3x - 4)$ $f'(x) = -(2x-3)\sin(x^2 - 3x - 4)$ $= (3-2x)\sin(x^2 - 3x - 4)$		
4	$f(x) = 10x^2 e^{-x^2}$ $f'(x) = (10x^2)(-2xe^{-x^2}) + (e^{-x^2})(20x) = 20xe^{-x^2}(1 - x^2)$		
5	$f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x}} = \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{2\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = -\frac{-1}{2x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$		
6	$f'(x) = (x^2)\left(-\frac{1}{x^2}\sec^2\frac{1}{x}\right) + \left(\tan\frac{1}{x}\right)(2x)$ $= -\sec^2\frac{1}{x} + 2x\tan\frac{1}{x}$		

7	$f'(x) = 3 + 5(2)(\pi x)(\pi)\sin(\pi x)^2 = 3 + 10\pi^2 x\sin(\pi x)^2$
8	$f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{1-e^x}\right) = \ln(1+e^x) - \ln(1-e^x)$ $f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} + \frac{e^x}{1-e^x} = \frac{2e^x}{1-e^{2x}}$
9	$f'(x) = \frac{4}{x}(\ln x)^3$
10	$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\cos\sqrt[3]{x} + \frac{\cos x}{3\sqrt[3]{\sin^2 x}}$
11	$f(x) = \sqrt[5]{x^2 + 8x} = (x^2 + 8x)^{\frac{1}{5}}$ $f'(x) = \frac{2x+8}{5\sqrt[5]{(x^2+8x)^4}}$

15	$f(x) = \left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2$ $f'(x) = 2\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^1 \times \frac{(1+\cos x)(\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$ $= 2 \times \frac{\sin x}{1+\cos x} \times \frac{1}{1+\cos x}$ $= \frac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}$
17	$f(x) = e^{\sin 2x} + \sin(e^{2x})$ $f'(x) = 2e^{\sin 2x}\cos 2x + 2e^{2x}\cos(e^{2x})$
18	$f(x) = \tan^4(\sec(\cos x)) = (\tan(\sec(\cos x)))^4$ $f'(x) = 4(\tan(\sec(\cos x)))^3 \sec^2(\sec(\cos x)) \times \sec(\cos x)\tan(\cos x) \times (-\sin x)$ $= -4\tan^3(\sec(\cos x))\sec^2(\sec(\cos x))\sec(\cos x)\tan(\cos x)\sin x$

24 إذا كان: $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$، فأثبت أنّ $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.

24	$f'(x)=\frac{(\sqrt{x^2+1})(1)-(x)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{x^2+1}=\frac{\left(\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{x^2+1}$ $=\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$

أجد المشتقة العليا المطلوبة في كلٍّ ممّا يأتي:

27 $f(x)=\sin \pi x\ , f'''(x)$ 28 $f(x)=\cos(2x+1), f^{(5)}(x)$ 29 $f(x)=\cos x^2, f''(x)$

27	$f(x)=\sin \pi x$ $f'(x)=\pi\cos \pi x$ $f''(x)=-\pi^2\sin \pi x$ $f'''(x)=-\pi^3\cos \pi x$
28	$f(x)=\cos(2x+1)$ $f'(x)=-2\sin(2x+1)$ $f''(x)=-4\cos(2x+1)$ $f'''(x)=8\sin(2x+1)$ $f^{(4)}(x)=16\cos(2x+1)$ $f^{(5)}(x)=-32\sin(2x+1)$
29	$f(x)=\cos x^2$ $f'(x)=-2x\sin x^2$ $f''(x)=(-2x)(2x\cos x^2)+(\sin x^2)(-2)$ $=-4x^2\cos x^2-2\sin x^2$

تحدٍّ: أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

48 $y=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$ 49 $y=e^x\sin^2 x\cos x$

48	$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{\sin\sqrt{x}}}=\frac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\sqrt{\sin\sqrt{x}}}=\frac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x\sin\sqrt{x}}}$
49	$\frac{dy}{dx}=(e^x\sin^2 x)(-\sin x)+(\cos x)\left((e^x)(2\sin x\cos x)+(\sin^2 x)(e^x)\right)$ $=-e^x\sin^3 x+2e^x\cos^2 x\sin x+e^x\cos x\sin^2 x$

من كتاب التمارين

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = 100e^{-0.1x}$

2 $f(x) = \sin(x^2 + 1)$

3 $f(x) = \cos^2 x$

4 $f(x) = \cos 2x - 2\cos x$

6 $f(x) = 2\cot^2(\pi x + 2)$

8 $f(x) = \ln(x^3 + 2)$

9 $f(x) = \left(\dfrac{x^2}{x^3+2}\right)^2$

10 $f(x) = x^2\sqrt{20 - x}$

11 $f(x) = \dfrac{\sin(2x+1)}{e^{x^2}}$

إذا كان الاقتران: $f(x) = 3\sin x - \sin^3 x$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

16 أُثبِت أنَّ $f'(x) = 3\cos^3 x$.

17 أجد $f''(x)$.

21 إذا كان: $h(x) = \sqrt{4 + 3f(x)}$، وكان: $f(1) = 7, f'(1) = 4$، فأجد $h'(1)$.

22 إذا كان الاقتران: $f(x) = e^{2x} + e^{-2x}$، فأُثبِت أنَّ $f''(x) = 4f(x)$.

23 إذا كان: $f(x) = \sin 4x + \cos 4x$، فأُثبِت أنَّ $f''(x) + 16f(x) = 0$.

1	$f'(x) = -10e^{-0.1x}$
2	$f'(x) = 2x\cos(x^2+1)$
3	$f'(x) = -2\cos x \sin x = -\sin 2x$
4	$f'(x) = -2\sin 2x + 2\sin x$

6	$f(x) = 2(\cot(\pi x + 2))^2$ $f'(x) = -4\pi\cot(\pi x + 2)\csc^2(\pi x + 2)$
8	$f'(x) = \dfrac{3x^2}{x^3+2}$
9	$f'(x) = 2 \times \dfrac{x^2}{x^3+2} \times \dfrac{2x(x^3+2) - 3x^4}{(x^3+2)^2}$ $= \dfrac{2x^2}{x^3+2} \times \dfrac{4x - x^4}{(x^3+2)^2} = \dfrac{8x^3 - 2x^6}{(x^3+2)^3}$

10	$f'(x) = x^2 \times \frac{-1}{2\sqrt{20-x}} + 2x\sqrt{20-x}$ $= \frac{-x^2}{2\sqrt{20-x}} + 2x\sqrt{20-x} = \frac{80x - 5x^2}{2\sqrt{20-x}}$
11	$f'(x) = \frac{2e^{x^2}\cos(2x+1) - 2xe^{x^2}\sin(2x+1)}{e^{2x^2}}$ $= \frac{2\cos(2x+1) - 2x\sin(2x+1)}{e^{x^2}}$
16	$f'(x) = 3\cos x - 3\sin^2 x\cos x$ $= 3\cos x\,(1 - \sin^2 x)$ $= 3\cos x\,(\cos^2 x)$ $= 3\cos^3 x$
17	$f''(x) = -9\cos^2 x\sin x$
21	$h(x) = \sqrt{4+3f(x)} = (4+3f(x))^{\frac{1}{2}}$ $h'(x) = \frac{1}{2}(3f'(x))(4+3f(x))^{-\frac{1}{2}} = \frac{3f'(x)}{2\sqrt{4+3f(x)}}$ $h'(1) = \frac{3f'(1)}{2\sqrt{4+3f(1)}} = \frac{12}{2\sqrt{25}} = \frac{6}{5}$
22	$f'(x) = 2e^{2x} - 2e^{-2x}$ $f''(x) = 4e^{2x} + 4e^{-2x} = 4(e^{2x} + e^{-2x}) = 4f(x)$
23	$f'(x) = 4\cos 4x - 4\sin 4x$ $f''(x) = -16\sin 4x - 16\cos 4x$ $= -16(\sin 4x + \cos 4x) = -16f(x)$ $f''(x) + 16f(x) = 0$

3) قواعد الاشتقاق الأساسية ، وقاعدة السلسلة

***** تطبيقات الاشتقاق من هندسية ، فيزيائية وغيرها لاقترانات حلها عن طريق قاعدة السلسلة**

مثال1) جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x) = 4\sqrt{2x} - 6e^{2-x}$ **عند (x = 2)**

$$f(x) = 4(2x)^{\frac{1}{2}} - 6e^{2-x}$$

$$f'(x) = 4\left(\frac{1}{2}\right)(2x)^{-\frac{1}{2}}(2) - 6e^{2-x}(-1)$$

$$= 4(2x)^{-\frac{1}{2}} + 6e^{2-x} = \frac{4}{\sqrt{2x}} + 6e^{2-x}$$

$$f(2) = 4(2) - 6e^{0} = 2$$

$$f'(2) = \frac{4}{2} + 6e^{0} = 8$$

$y - y_1 = m(x - x_1)$ ⟹ $y - 2 = 8(x - 2) \rightarrow \boxed{y = 8x - 14}$

مثال2) يتحرك جسم على المحور (x) بحيث يعطى موقعه بالاقتران $s(t) = \cos(t^2 + 1)$ ،
جد سرعته اللحظية بدلالة (t)

الحل :

$s(t) = \cos(t^2 + 1)$

$v(t) = -\sin(t^2 + 1)(2t) = -2t\sin(t^2 + 1)$

أتحقق من فهمي

a) أجد ميل المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = (2x+1)^5(x^3 - x + 1)^4$ عندما $x = 1$.

b) أجد ميل العمودي على المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = \frac{\cos^2 x}{e^{2x}}$ عندما $x = \frac{\pi}{2}$.

أتحقق من فهمي صفحة 47

a	$f(x) = (2x+1)^5(x^3 - x + 1)^4$ $f'(x) = (2x+1)^5(4)(x^3 - x + 1)^3(3x^2 - 1) + (x^3 - x + 1)^4(5)(2x+1)^4(2)$ $f'(1) = (3)^5(4)(1)^3(2) + (1)^4(5)(3)^4(2) = 2754$
b	$f'(x) = \frac{e^{2x} \times 2(\cos x)^1(-\sin x) - (\cos x)^2 \times 2e^{2x}}{e^{4x}} = \frac{-\sin 2x - 2(\cos x)^2}{e^{2x}}$ $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-\sin \pi - 2\left(\cos \frac{\pi}{2}\right)^2}{e^{\pi}} = 0$ ميل المماس يساوي صفرًا أي أن المماس أفقي، ومنه يكون العمودي على المماس رأسيا وميله غير معرف.

أتحقق من فهمي

تُحسَب قيمة بدل الخدمة لأحد المُنتَجات بالدينار باستعمال الاقتران:

$U(x) = 80\sqrt{\frac{2x+1}{3x+4}}$ ، حيث x عدد القطع المَبيعة من المُنتَج:

a) أجد مُعدَّل تغيُّر قيمة بدل الخدمة بالنسبة إلى عدد القطع المَبيعة.

b) أجد $U'(20)$ ، مُفسِّرًا معنى الناتج.

a	$U'(x) = 80 \times \frac{\frac{(3x+4)(2) - (2x+1)(3)}{(3x+4)^2}}{2\sqrt{\frac{2x+1}{3x+4}}} = \frac{200}{(3x+4)^2}\sqrt{\frac{3x+4}{2x+1}}$
b	$U'(20) = \frac{200}{(64)^2}\sqrt{\frac{64}{41}} \approx 0.061$ وهذا يعني أنه عند بيع 20 قطعة فإن قيمة بدل الخدمة تتزايد بمقدار 0.061 دينار/قطعة تقريبا

أجد معادلة المماس لكل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

19 $f(x) = 4e^{-0.5x^2}$, $x = -2$ 20 $f(x) = x + \cos 2x$, $x = 0$ 22 $f(x) = \sqrt{x+1}\,\sin\frac{\pi x}{2}$, $x = 3$

19	$f(x) = 4e^{-0.5x^2} \Rightarrow f(-2) = 4e^{-0.5(-2)^2} = \frac{4}{e^2} \Rightarrow f'(x) = -4xe^{-0.5x^2}$ ميل المماس هو: $m = f'(-2) = -4(-2)e^{-0.5(-2)^2} = \frac{8}{e^2}$ معادلة المماس هي: $y - \frac{4}{e^2} = \frac{8}{e^2}(x+2) \Rightarrow y = \frac{8}{e^2}x + \frac{20}{e^2}$
20	$f(x) = x + \cos 2x \Rightarrow f(0) = 0 + \cos(0) = 1 \Rightarrow f'(x) = 1 - 2\sin 2x$ ميل المماس هو: $m = f'(0) = 1 - 2\sin 2(0) = 1$ معادلة المماس هي: $y - 1 = 1(x - 0) \Rightarrow y = x + 1$
22	$f(x) = \sqrt{x+1}\,\sin\frac{\pi x}{2}$ $f(3) = 2\sin\frac{3\pi}{2} = -2$ $f'(x) = \left(\sqrt{x+1}\right)\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}\right) + \left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)$ ميل المماس هو: $m = f'(3) = (2)(0) + (-1)\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}$ معادلة المماس هي: $y + 2 = -\frac{1}{4}(x - 3) \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$

بكتيريا: يُمثّل الاقتران: $A(t) = Ne^{0.1t}$ عدد الخلايا البكتيرية بعد t ساعة في مجتمع بكتيري:

25 أجد مُعدّل نمو المجتمع بعد 3 ساعات بدلالة الثابت N.

26 إذا كان مُعدّل نمو المجتمع بعد k ساعة هو 0.2 خلية لكل ساعة، فما قيمة k بدلالة الثابت N؟

25	$A(t) = Ne^{0.1t} \Rightarrow A'(t) = 0.1Ne^{0.1t} \Rightarrow A'(3) = 0.1Ne^{0.3}$
26	$A'(k) = 0.1Ne^{0.1k}$ $0.2 = 0.1Ne^{0.1k} \Rightarrow$ $e^{0.1k} = \frac{0.2}{0.1N} = \frac{2}{N} \Rightarrow 0.1k = \ln\frac{2}{N} \Rightarrow k = 10\ln\frac{2}{N}$

30 إذا كان الاقتران: $y = e^{\sin x}$، فأجد ميل مماس منحنى الاقتران عند النقطة $(0, 1)$.

30	$\frac{dy}{dx} = e^{\sin x}\cos x \Rightarrow$ ميل المماس هو: $m = \left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=0} = e^{\sin 0}\cos 0 = 1$

زنبرك: تتحرَّك كرة مُعلَّقة بزنبرك إلى الأعلى وإلى الأسفل، ويُحدِّد الاقتران: $s(t) = 0.1 \sin 2.4t$ موقع الكرة عند أيِّ زمن لاحق، حيث t الزمن بالثواني، وs الموقع بالسنتيمترات:

32 أجد سرعة الكرة عندما $t = 1$.

33 أجد موقع الكرة عندما تكون سرعتها صفرًا.

34 أجد موقع الكرة عندما يكون تسارعها صفرًا.

32	$s(t) = 0.1 \sin 2.4t$ $v(t) = 2.4 \times 0.1 \cos 2.4t = 0.24 \cos 2.4t$ $v(1) = 0.24 \cos 2.4 \approx -0.177\ \text{cm/s}$
33	$v(t) = 0 \Rightarrow 0.24 \cos 2.4t = 0 \Rightarrow \cos 2.4t = 0$ وهذا يعني أن: $\lvert\sin 2.4t\rvert = 1$ أي أن: $\sin 2.4t = 1, or -1$ لكن موقع الكرة هو: $s(t) = 0.1 \sin 2.4t$ وبتعويض قيمة $\sin 2.4t$ نجد أن الموقع هو: $s = 0.1(1) = 0.1$ or, $s = 0.1(-1) = -0.1$ إذن، عندما تكون سرعة الكرة صفرًا يكون موقعها عند 0.1cm أو $-0.1\ \text{cm}$
34	$a(t) = -0.24 \times 2.4 \sin 2.4t = -0.576 \sin 2.4t$ $a(t) = 0 \Rightarrow \sin 2.4t = 0$ لكن موقع الكرة هو: $s(t) = 0.1 \sin 2.4t$ وبتعويض قيمة $\sin 2.4t$ نجد أن الموقع هو: $s = 0.1(0) = 0$ إذن، عندما يكون تسارع الكرة صفرًا يكون موقعها عند $s = 0$،

مهارات التفكير العليا

تبريـــر: إذا كان الاقتران: $y = \ln(ax + b)$، حيث a وb ثابتان موجبان، وكان ميل المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة P هو 1، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

42 أُثبِت أنَّ الإحداثي x للنقطة P أقل من 1

43 أجد قيمة كلٍّ من a وb، علمًا بأنَّ P هي النقطة $(0, 2)$، ثم أُبرِّر إجابتي.

44 أجد إحداثيي النقطة التي يكون عندها ميل المماس $\frac{1}{2}$

42	$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{ax+b}$ ليكن إحداثيا P هما (x_1, y_1)، فيكون ميل المماس عند P هو: $\left.\frac{dy}{dx}\right\vert_{x=x_1} = \frac{a}{ax_1+b} \Rightarrow \frac{a}{ax_1+b} = 1 \Rightarrow a = ax_1 + b \Rightarrow x_1 = 1 - \frac{b}{a}$ المقدار $(1 - \frac{b}{a})$ أقل من 1 لأن $\frac{b}{a}$ مقدار موجب كون a, b موجبين. إذن، الإحداثي x للنقطة P أقل من 1
43	$y' = f'(x) = \frac{a}{ax+b}$ ميل المماس عند $P(0, 2)$ يساوي 1، أي أنّ: $f'(0) = 1$ $f'(0) = \frac{a}{b} = 1 \Rightarrow a = b \Rightarrow f(0) = \ln b = 2 \Rightarrow b = e^2 \Rightarrow a = b = e^2$
44	أفترض أن النقطة التي ميل المماس عندها يساوي $\frac{1}{2}$ هي (x_1, y_1)، بتعويض قيمة كل من a، وb نجد أن: $f(x) = \ln(e^2x + e^2) = \ln(e^2(x+1)) = 2 + \ln(x+1)$ $f'(x) = \frac{1}{x+1} \Rightarrow f'(x_1) = \frac{1}{x_1+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = 1$ $y_1 = f(x_1) = f(1) = \ln(e^2 + e^2) = \ln(2e^2) = \ln 2 + \ln e^2 = \ln 2 + 2$ إذن، النقطة التي ميل المماس عندها يساوي $\frac{1}{2}$ هي $(1, 2 + \ln 2)$.

تبريـــر: يُمثِّل الاقتران: $s(t) = \ln(t^2 - 2t + 1.9), t \geq 0$ موقع جُسَـيْم يتحرَّك في مســار مســتقيم، حيث s الموقع بالأمتار، وt الزمن بالثواني: 53 أجد سرعة الجُسَيْم وتسارعه بعد t ثانية.

54 أجد موقع الجُسَيْم وتسارعه عندما تكون سرعته صفرًا. 55 متى يعود الجُسَيْم إلى موقعه الابتدائي؟

53	$s(t) = \ln(t^2 - 2t + 1.9)$ $v(t) = \dfrac{2t-2}{t^2 - 2t + 1.9}$ $a(t) = \dfrac{(t^2 - 2t + 1.9)(2) - (2t-2)(2t-2)}{(t^2 - 2t + 1.9)^2} = \dfrac{-2t^2 + 4t - 0.2}{(t^2 - 2t + 1.9)^2}$
54	$v(t) = 0 \quad \Rightarrow 2t - 2 = 0 \quad \Rightarrow t = 1$ $s(1) = \ln(1 - 2 + 1.9) = \ln 0.9 \text{ m}$ $a(1) = \dfrac{-2 + 4 - 0.2}{(1 - 2 + 1.9)^2} = \dfrac{1.8}{(0.9)^2} \approx 2.2 \text{ m/s}^2$
55	الموقع الابتدائي هو: $s(0) = \ln(1.9)$ $s(t) = \ln(1.9) \quad \Rightarrow \ln(t^2 - 2t + 1.9) = \ln(1.9) \Rightarrow t^2 - 2t + 1.9 = 1.9$ $\Rightarrow t^2 - 2t = 0 \Rightarrow t(t-2) = 0 \Rightarrow t = 0 \text{ or } t = 2$ يعود الجسيم إلى موقعه الابتدائي بعد ثانيتين من بدء حركته.

من كتاب التمارين

أجد معادلة المماس لكل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

13 $y = 2\sin 5x - 4\cos 3x, x = \frac{\pi}{2}$ 14 $f(x) = (x^2+2)^3, x = -1$ 15 $f(x) = \tan 3x, x = \frac{\pi}{4}$

إذا كان الاقتران: $y = e^{ax}$، حيث a ثابت، و$a > 0$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

19 أجد إحداثيي النقطة P التي تقع على منحنى الاقتران، ويكون ميل المماس عندها 1.

20 أُثبِت أنَّه يُمكِن كتابة معادلة العمودي على المماس عند النقطة P في صورة: $x + y = k$، ثم أجد قيمة الثابت k.

27 ســيّارة: يُمثِّل الاقتران: $v(t) = 15te^{-0.05t^2}$ ســرعة (بالمتر لكل ثانية) ســيّارة تتحرَّك في مســار مســتقيم، حيث: $0 \leq t \leq 10$. أجد سرعة السيّارة عندما يكون تسارعها صفرًا.

13	$\frac{dy}{dx} = 10\cos 5x + 12\sin 3x$ عندما $x = \frac{\pi}{2}$ ، فإن $y = 2$ ميل المماس: $\left.\frac{dy}{dx}\right\rvert_{x=\frac{\pi}{2}} = -12$ معادلة المماس: $y - 2 = -12\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y = -12x + 6\pi + 2$
14	$f'(x) = 6x(x^2+2)^2$ ميل المماس: $f'(-1) = -54$ $x = -1 \rightarrow y = f(-1) = 27$ معادلة المماس: $y - 27 = -54(x+1) \Rightarrow y = -54x - 27$
15	$f'(x) = 3\sec^2 3x$ ميل المماس: $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 6$ $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow y = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$ معادلة المماس: $y + 1 = 6\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow y = 6x - \frac{3\pi}{2} - 1$

19	$a(t) = \frac{-20}{(2t+15)^2}$ $a(5) = \frac{-20}{(10+15)^2} = -0.032\ \text{ft/s}^2$
20	$a(20) = \frac{-20}{(40+15)^2} \approx -0.007\ \text{ft/s}^2$

27	$a(t) = -1.5t^2e^{-0.05t^2} + 15e^{-0.05t^2} = 15e^{-0.05t^2}(1 - 0.1t^2)$ $a(t) = 0 \Rightarrow 1 - 0.1t^2 = 0 \Rightarrow t^2 = 10 \Rightarrow t = \sqrt{10}$ $v(\sqrt{10}) = 15\sqrt{10}e^{-0.5} = \frac{15\sqrt{10}}{\sqrt{e}}\ \text{m/s}$

$a^x = e^{\ln a^x} \Rightarrow a^x = e^{x \ln a}$

4) مشتقة $a^{(g(x))}$

$y = a^x$

$y = a^x$

$y = e^{\ln(a)^x}$

$y = e^{x.\ln(a)}$

$\frac{dy}{dx} = \ln(a) . e^{x.\ln(a)}$

$= \ln(a) . e^{\ln(a)^x}$

$\frac{dy}{dx} = \ln(a) . a^x$

نظرية إذا كان a عددًا حقيقيًّا موجبًا، و $a \neq 1$، وكان $g(x)$ اقترانًا قابلًا للاشتقاق، فإنّ:

$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \times \ln a$

$\frac{d}{dx}(a^{g(x)}) = \ln a \times a^{g(x)} \times g'(x)$

عند اشتقاق الاقتران الأسي غير الطبيعي (أي أن أساسه يختلف عن e) : نضرب في Ln(الأساس)

مثال :

1) $f(x) = 3^{2x} \Rightarrow f'(x) = Ln(3)(3^{2x})(2) = 2Ln3(3^{2x})$

2) $f(x) = 4^{x^3-2x} \Rightarrow f'(x) = Ln(4)(4^{x^3-2x})(3x^2-2)$

3) $f(x) = 2^{x^2}\sin x^3 \Rightarrow f'(x) = Ln(2)(2^{x^2})(2x)(\sin x^3) + (\cos x^3)(3x^2)(2^{x^2})$

<u>تمارين</u>

1) $f(x) = x^5 e^{2x} \Rightarrow f'(x) =$

2) $f(x) = e^{3x+1} + 4^{2x-1} \Rightarrow f'(x) =$

3) $f(x) = \frac{3^{x+1}}{2^x} \Rightarrow f'(x) =$

4) $f(x) = \frac{3^x}{2^x+1} \Rightarrow f'(x) =$

5) $f(x) = 3^x Lnx \Rightarrow f'(x) =$

6) $y = 8^{x^2-5}\cos 3x \Rightarrow y' =$

أتحقّق من فهمي أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = \pi^{\pi x}$ b) $f(x) = 6^{1-x^3}$ c) $f(x) = e^{4x} + 4^{2x}$

a	$f'(x) = (\pi \ln \pi)\pi^{\pi x} = \pi^{\pi x+1}\ln\pi$
b	$f'(x) = (-3x^2 \ln 6)6^{1-x^3}$
c	$f'(x) = 4e^{4x} + (2\ln 4)4^{2x}$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

5) مشتقة $\log_a g(x)$

عند اشتقاق الاقتران اللوغاريتمي غير الطبيعي (أي أن أساسه يختلف عن e) : نقسم على Ln(الأساس)

نظرية

إذا كان a عددًا حقيقيًّا موجبًا، و $a \neq 1$، وكان $g(x)$ اقترانًا قابلًا للاشتقاق، فإنَّ:

$$\frac{d}{dx}(\log_a g(x)) = \frac{g'(x)}{(\ln a)g(x)}$$

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$$

1) $f(x) = \log \sin x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{\cos x}{(\ln 10)\sin x}$

2) $f(x) = \log(x^2+1) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{(2x)}{(x^2+1)\ln 10}$

3) $f(x) = \log_3 \dfrac{x^3+1}{x^2-1} = \log_3(x^3+1) - \log_3(x^2-1)$

$$f'(x) = \frac{3x^2}{(x^3+1)\ln 3} - \frac{2x}{(x^2-1)\ln 3}$$

4) $f(x) = 4Log_3(x^2-1) \Rightarrow f'(x) =$

5) $f(x) = \dfrac{1}{Log_4 x^3} \Rightarrow f'(x) =$

6) $f(x) = 4Log_8 \tan x \Rightarrow f'(x) =$

7) $f(x) = Log \dfrac{8}{\sqrt{x}+1} \Rightarrow f'(x) =$

8) $f(x) = 4Log_8 \sin 2x \Rightarrow f'(x) =$

أتحقَّق من فهمي أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = \log \sec x$

b) $f(x) = \log_8(x^2+3x)$

a	$f(x) = \log \sec x$ $f'(x) = \dfrac{\sec x \tan x}{\ln 10 \sec x} = \dfrac{\tan x}{\ln 10}$	b	$f(x) = \log_8(x^2+3x)$ $f'(x) = \dfrac{2x+3}{(x^2+3x)\ln 8}$

أتدرّب وأحُلّ المسائل أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

(12) $f(x)=\dfrac{3^{2x}}{x}$ (13) $f(x)=2^{-x}\cos \pi x$

(14) $f(x)=\dfrac{10\log_4 x}{x}$ (16) $f(x)=\log_3(1+x\ln x)$

12	$f'(x)=\dfrac{(x)(2\ln 3)3^{2x}-3^{2x}}{x^2}=\dfrac{(-1+2x\ln 3)3^{2x}}{x^2}$
13	$f'(x)=(2^{-x})(-\pi\sin \pi x)+(\cos \pi x)(-\ln 2)2^{-x}$ $=-\pi\, 2^{-x}\sin \pi x-2^{-x}(\cos \pi x)\ln 2$
14	$f'(x)=\dfrac{\frac{10x}{x\ln 4}-10\log_4 x}{x^2}=\dfrac{\frac{10}{\ln 4}-10\log_4 x}{x^2}$
16	$f'(x)=\dfrac{(x)\left(\frac{1}{x}\right)+(\ln x)(1)}{(\ln 3)(1+x\ln x)}=\dfrac{1+\ln x}{(\ln 3)(1+x\ln x)}$

أجد معادلة المماس لكل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة: (21) $f(x)=2^x,\ x=0$

21	$f(x)=2^x \Rightarrow f(0)=2^0=1 \Rightarrow f'(x)=(\ln 2)2^x$
	ميل المماس هو: $m=f'(0)=(\ln 2)2^0=\ln 2$
	معادلة المماس هي: $y-1=(\ln 2)(x-0) \Rightarrow y=(\ln 2)x+1$

(31) مواد مُشِعَّة: يُمكِن نمذجة الكمية A (بالغرام) المتبقية من عيِّنةٍ كتلتها الابتدائية 20 g من عنصر البلوتونيوم بعد t يومًا باستعمال الاقتران: $A(t)=20\left(\frac{1}{2}\right)^{t/140}$. أجد مُعدَّل تحلُّل عنصر البلوتونيوم عندما $t=2$.

31	$A(t)=20\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{140}} \Rightarrow A'(t)=\dfrac{20}{140}\left(\ln\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{140}}$
	$A'(2)=\dfrac{20}{140}\left(\ln\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{140}}\approx -0.098$

من كتاب التمارين

(5) $f(x)=\log_3\dfrac{x\sqrt{x-1}}{2}$	(7) $f(x)=\log 2x$	(12) $f(x)=3^{\cot x}$

5	$f(x)=\log_3\dfrac{x\sqrt{x-1}}{2}=\log_3 x+\dfrac{1}{2}\log_3(x-1)-\log_3 2$
	$f'(x)=\dfrac{1}{x\ln 3}+\dfrac{1}{2(x-1)\ln 3}$

7	$f'(x)=\dfrac{2}{2x\ln 10}=\dfrac{1}{x\ln 10}$
12	$f'(x)=-(3^{\cot x}\ln 3)\csc^2 x$

6) مشتقة المعادلات الوسيطية

إذا كان h و g اقترانين قابلين للاشتقاق عند t، وكان $x = h(t)$، و $y = g(t)$، فإنَّ: $\frac{dx}{dt} \neq 0$ ، $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

$x = 3\cos t ,\; y = 2\sin 2t$

$\frac{dx}{dt} = -3\sin t$

$\frac{dy}{dt} = 4\cos t$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4\cos t}{-3\sin t}$

جد $\frac{dy}{dx}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}$ $\quad x = 2\sin t ,\; y = 3\cos t ,\; 0 \le t \le 2\pi$

الجواب : $\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{2}$

a. $x(t) = t^2 - 3, \quad y(t) = 2t - 1, \quad -3 \le t \le 4$

b. $x(t) = 2t + 1, \quad y(t) = t^3 - 3t + 4, \quad -2 \le t \le 2$

c. $x(t) = 5\cos t, \quad y(t) = 5\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

الجواب

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{t}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2 - 3}{2}.$

$\frac{dy}{dx} = -\cot t.$

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

(a) $x = 2t^3 + 1 ,\; y = te^{-2t}$

(b) $x = 3\cos t ,\; y = 3\sin t$

(c) $x = t + \sqrt{t} ,\; y = t - \sqrt{t}$

(d) $x = 2t^3 + 1 ,\; y = t^2\cos t$

(e) $x = te^{-t} ,\; y = 2t^2 + 1$

$x(t) = t^2 - 4t, \quad y(t) = 2t^3 - 6t, \quad -2 \le t \le 3$

$x(t) = t^2 - 3, \quad y(t) = 2t - 1, \quad -3 \le t \le 4$

$x = t^5 - 4t^3 \;, \quad y = t^2$

الجواب

$\frac{3t^2 - 3}{t - 2}$

$\frac{1}{t}$

$\frac{2}{5t^3 - 12t}$

أتحقَّق من فهمي أجد معادلة مماس منحنى المعادلة الوسيطية الآتية عندما $t = \frac{\pi}{4}$:

$$x = \sec t \;, \quad y = \tan t \;, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

$\frac{dy}{dt} = \sec^2 t \;, \quad \frac{dx}{dt} = \sec t \tan t$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sec^2 t}{\sec t \tan t} = \frac{\sec t}{\tan t} \qquad m = \frac{dy}{dx}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sec\frac{\pi}{4}}{\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$

$x = \sec\frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \;, \quad y = \tan\frac{\pi}{4} = 1$

معادلة المماس هي: $y - 1 = \sqrt{2}(x - \sqrt{2}) \;\rightarrow\; y = \sqrt{2}x - 1$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل معادلة وسيطية ممّا يأتي عند النقطة المُحدَّدة بقيمة t المعطاة:

35) $x = t + 2,\ y = t^2 - 1,\ t = 1$

36) $x = \frac{t}{2},\ y = t^2 - 4,\ t = -1$

37) $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t,\ t = \frac{\pi}{3}$

38) $x = \sec^2 t - 1,\ y = \tan t,\ t = -\frac{\pi}{4}$

35	$\frac{dy}{dt} = 2t$, $\frac{dx}{dt} = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t}{1} = 2t$ $m = \frac{dy}{dx}\Big\vert_{t=1} = 2 \times 1 = 2$ $x = 1 + 2 = 3$, $y = (1)^2 - 1 = 0 \Rightarrow y - 0 = 2(x-3) \Rightarrow y = 2x - 6$
36	$\frac{dy}{dt} = 2t$, $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t}{\frac{1}{2}} = 4t$ $m = \frac{dy}{dx}\Big\vert_{t=-1} = 4 \times -1 = -4$ $x = -\frac{1}{2}$, $y = (-1)^2 - 4 = -3 \Rightarrow y + 3 = -4\left(x + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow y = -4x - 5$

37	$\frac{dy}{dt} = \sin t$, $\frac{dx}{dt} = 1 - \cos t$ $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} \Rightarrow m = \frac{dy}{dx}\Big\vert_{t=\frac{\pi}{3}} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{1 - \cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{3}$ $x = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$, $y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ $y - \frac{1}{2} = \sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow y = \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}\pi}{3} + 2$

38	$\frac{dy}{dt} = \sec^2 t$, $\frac{dx}{dt} = 2 \times \sec t \times \sec t \tan t = 2\sec^2 t \tan t$ $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sec^2 t}{2\sec^2 t \tan t} = \frac{1}{2}\cot t \Rightarrow m = \frac{dy}{dx}\Big\vert_{t=-\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\cot\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$ $x = \sec^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) - 1 = 1$, $y = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$ $y + 1 = -\frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

39 يعطى منحنى بالمعادلة الوسـيطية: $x = 2(t - \sin t), y = 2(1 - \cos t)$، حيث: $0 \le t \le 2\pi$. أُثبِت أنَّ ميل المماس وميل العمودي على المماس لمنحنى هذه العلاقة عندما $t = \frac{\pi}{4}$ هما: $1+\sqrt{2}$، و$1-\sqrt{2}$ على الترتيب.

39

$$\frac{dy}{dt} = 2\sin t \quad , \qquad \frac{dx}{dt} = 2(1-\cos t)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2\sin t}{2(1-\cos t)} = \frac{\sin t}{1-\cos t}$$

ميل المماس: $m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{1-\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}+1$

ميل العمودي على المماس: $m = \frac{-1}{\sqrt{2}+1} \times \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = 1-\sqrt{2}$

تبرير: يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية: $x = t^2, y = 2t$:

45 أجد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة t.

46 أجد معادلة العمودي على مماس المنحنى عند النقطة $(t^2, 2t)$.

47 أُثبِت أنَّ مساحة المثلث المُكوَّن من العمودي على المماس، والمحورين الإحداثيين، هي $\frac{1}{2}|t|(2+t^2)^2$

45

$$\frac{dy}{dt} = 2 \ , \qquad \frac{dx}{dt} = 2t \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2}{2t} = \frac{1}{t}$$

46

$$\underbrace{m = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{t}}_{\text{ميل المماس}} \Rightarrow \underbrace{m = \frac{-1}{\frac{1}{t}} = -t}_{\text{ميل العمودي}}$$

$$y - 2t = -t(x - t^2) \Rightarrow y = -tx + t^3 + 2t$$

47

لإيجاد المقطع x للعمودي على المماس نضع $y = 0$ في معادلته:

$$0 = -tx + t^3 + 2t \Rightarrow x = \frac{t^3+2t}{t} = t^2+2$$

لإيجاد المقطع y للعمودي على المماس نضع $x = 0$:

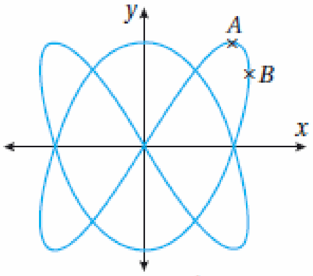
$$y = -t(0) + t^3 + 2t = t^3 + 2t$$

مساحة المثلث:

$$A = \frac{1}{2}|t^2+2||t^3+2t| = \frac{1}{2}|t^2+2||t(t^2+2)|$$

$$= \frac{1}{2}|t(t^2+2)^2| = \frac{1}{2}|t|(t^2+2)^2$$

تحدٍّ: يُبيِّن الشكل المجاور منحنى المعادلة الوسيطة: $x = \sin 2t, \quad y = \sin 3t, \quad 0 \le t \le 2\pi$



50 إذا كان مماس منحنى المعادلة أفقيًّا عند النقطة A الواقعة في الربع الأوَّل، فأجد إحداثيي A.

51 إذا كان مماس المنحنى موازيًا للمحور y عند النقطة B، فأجد إحداثيي B.

52 إذا مَرَّ فرعان من المنحنى بنقطة الأصل كما هو مُوضَّح في الشكل، فأجد ميل المماس لكلٍّ منهما عند هذه النقطة.

50	$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3\cos 3t}{2\cos 2t}$ $\quad \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{3\cos 3t}{2\cos 2t} = 0$ $\Rightarrow \cos 3t = 0 \Rightarrow 3t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$ $x_A = \sin 2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $y_A = \sin 3\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ إذن، إحداثيا A هما $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$.
51	عند النقطة B يكون المماس موازيًا لمحور y أي إن ميله غير معرف، ومنه يكون: $\cos 2t = 0 \Rightarrow 2t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$ $x_B = \sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ $\quad y_B = \sin 3\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ إذن، إحداثيا B هما $\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

52	عند نقطة الأصل $x = y = 0$ أي أنّ: $\sin 2t = \sin 3t = 0$ تتحقق هاتان المعادلتان معًا عندما $t = 0$، وعندها يكون ميل المماس: $m = \left.\frac{dy}{dx}\right\|_{t=0} = \frac{3\cos 3(0)}{2\cos 2(0)} = \frac{3\cos 0}{2\cos 0} = \frac{3}{2}$ كما تتحققان أيضًا عندما $t = \pi$، وعندها يكون ميل المماس: $m = \left.\frac{dy}{dx}\right\|_{t=\pi} = \frac{3\cos 3\pi}{2\cos 2\pi} = \frac{3\cos\pi}{2\cos 0} = \frac{-3}{2}$

من كتاب التمارين

18 يعطى منحنى بالمعادلة الوسـيطية: $x = a\cos t, y = b\sin t$، حيث: $0 \le t \le 2\pi$.
أجد المقطع y لمماس المنحنى عندما $t = \frac{\pi}{4}$ بدلالة a و b.

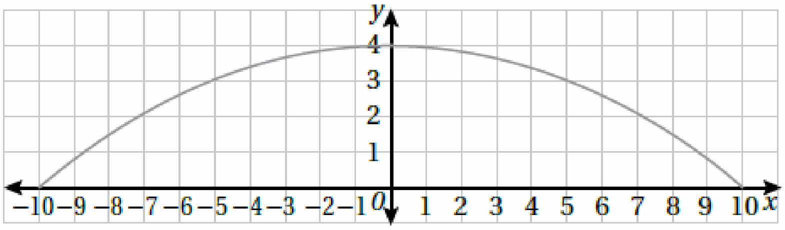
18	$\frac{dy}{dt} = b\cos t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -a\sin t \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\cot t$ ميل المماس: $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=\frac{\pi}{4}} = -\frac{b}{a}\cot\frac{\pi}{4} = -\frac{b}{a}$ $t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = a\cos\frac{\pi}{4} = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $y = b\sin\frac{\pi}{4} = \frac{b}{\sqrt{2}}$ معادلة المماس: $y - \frac{b}{\sqrt{2}} = -\frac{b}{a}\left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow y = -\frac{b}{a}x + \sqrt{2}b \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = \sqrt{2}b$

يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية: $x = \sin^2\theta, y = 2\cos\theta$، حيث: $0 \le \theta \le 2\pi$:

24 أجد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة θ. **25** أجد معادلة المماس عندما يكون الميل $\sqrt{2}$.

26 أجد النقطة التي يكون عندها المماس موازيًا للمحور y.

24	$\frac{dy}{d\theta} = -2\sin\theta \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = 2\sin\theta\cos\theta \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-2\sin\theta}{2\sin\theta\cos\theta} = -\sec\theta$
25	$\frac{dy}{dx} = \sqrt{2} \rightarrow -\sec\theta = \sqrt{2} \rightarrow \sec\theta = -\sqrt{2} \rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $y = 2\cos\theta = -\sqrt{2}$ معادلة المماس: $y + \sqrt{2} = \sqrt{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow y = \sqrt{2}x - \frac{3}{\sqrt{2}}$
26	$\frac{dy}{dx} = -\sec\theta = -\frac{1}{\cos\theta}$ يكون المماس موازيًا لمحور y عندما يكون $\frac{dy}{dx}$ غير معرف، أي عندما $\cos\theta = 0$ وعندها يكون: $x = \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - 0 = 1$, $y = 2\cos\theta = 2 \times 0 = 0$ فالنقطة المطلوبة هي: $(1, 0)$



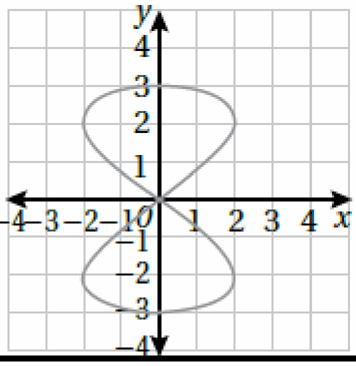
مـرور: يُبيِّن التمثيل البياني المجاور شكل مَطَبِّ سرعةٍ صُمِّم للتخفيف من سرعة السيّارات على أحد الطرق. وفيه يُمثِّل المحور x سطح الأرض، وتقاس جميع الأطوال بالسنتيمترات.

إذا كانت المعادلة الوسيطية التي تُمثِّل منحنى المَطَبِّ هي: $x = 10\sin t,\ y = 2 + 2\cos 2t$ حيث: $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

30 ميل المماس لمنحنى المَطَبِّ بدلالة t.

31 قيمة t عند أعلى نقطة على منحنى المَطَبِّ.

30	$\frac{dy}{dt} = -4\sin 2t\ ,\ \frac{dx}{dt} = 10\cos t$ $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-4\sin 2t}{10\cos t} = -\frac{4}{5}\sin t \quad , -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$
31	يكون المماس عند أعلى نقطة في المنحنى المعطى أفقيًا، إذن ميله يساوي صفرًا $\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \sin t = 0 \Rightarrow t = 0$ أو أن قيمة x عند أعلى نقطة تساوي صفرًا $10\sin t = 0 \Rightarrow t = 0$ أو أن قيمة y عند أعلى نقطة تساوي 4، $2 + 2\cos 2t = 4 \Rightarrow 2\cos 2t = 2$ $\Rightarrow \cos 2t = 1 \Rightarrow 2t = 0 \Rightarrow t = 0$



32 تبرير: يُبيِّن الشكل المجاور منحنى المعادلة الوسيطية:

$$x = 2\sin 2t\ ,\ y = 3\cos t \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

أجد ميل المماس لمنحنى المعادلة عند نقطة الأصل، مُبرِّرًا إجابتي.

32	$\frac{dy}{dt} = -3\sin t \quad , \quad \frac{dx}{dt} = 4\cos 2t$ $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-3\sin t}{4\cos 2t}\ , 0 \le t \le 2\pi$ $(x, y) = (0,0) \Rightarrow (2\sin 2t\ , 3\cos t) = (0,0) \Rightarrow \sin 2t = 0$ و $\cos t = 0$ $\sin 2t = 0 \quad \Rightarrow t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi \qquad \cos t = 0 \quad \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ يتحقق الشرطان معًا عندما $t = \frac{\pi}{2}$ أو $t = \frac{3\pi}{2}$ $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$ إذن ميل مماس أحد فرعي المنحنى عند نقطة الأصل هو $\frac{3}{4}$ $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{t=\frac{3\pi}{2}} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$ وميل مماس الفرع الآخر $-\frac{3}{4}$

أسئلة الوزارة / العلمي

1) إذا كان: $f(x) = e^{\sqrt[3]{x}}$ ، فإنّ $f'(x)$ هي:

a) $2\sqrt[3]{x}e^{\sqrt[3]{x}}$ b) $\frac{1}{2\sqrt[3]{x}}e^{\sqrt[3]{x}}$ c) $3\sqrt[3]{x^2}e^{\sqrt[3]{x}}$ d) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}e^{\sqrt[3]{x}}$

6) إذا كان: $x > 0$, $f(x) = \sqrt{\ln x}$ ، فإنّ $f'(x)$ هي:

a) $\frac{2f(x)}{x}$ b) $\frac{x}{f(x)}$ c) $\frac{1}{2xf(x)}$ d) $\frac{x}{2f(x)}$

b) جد مشتقة الاقتران: $f(x) = \left(\cot\left(\tan^2\sqrt{2x^3+1}\,\right)\right)^5$ (10 علامات)

أسئلة الوزارة / الصناعي

1- إذا كان: $f(x) = e^{2x} + \ln(4x)$ ، فإنّ $f'(x)$ هي:

a) $e^{2x} + \frac{4}{x}$ b) $2e^{2x} + \frac{1}{4x}$ c) $2e^{2x} + \frac{1}{x}$ d) $e^{2x} + \frac{1}{x}$

3- إذا كان: $f(t) = \cos 4t$ ، فإنّ $f'(t)$ هي:

a) $\sin 4t$ b) $-\sin 4t$ c) $4\sin 4t$ d) $-4\sin 4t$

b) جد $\frac{dy}{dx}$ لكل ممّا يأتي عند القيمة المعطاة إزاء كل منها:

1) $y = \frac{\sin 2x}{e^x}$, $x = 0$