الفاتن

في الرياضيات

الصف الثاني عشر

الفرع العلمي

الفصل الدراسي الثاني

محمد نمر

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمة

إلى الطلاب الأعزاء:

أقدم هذا الكتاب بلغته الميسرة والمبسطة وبأسلوب سهل ليكون بإمكان الطالب فهمه واستيعاب مادته دون صعوبة، ولقد اعتمدت على الإكثار من الأمثلة المتنوعة على نفس الموضوع للمساعدة على تعميق المفهوم في ذهن الطالب وإكسابه مهارة الحل، وهذا وإنني أنصح الطلبة الأعزاء بالإكثار من حل الأمثلة والتمارين بأنفسهم حتى يكتسبوا مثل هذه المهارة.

وفي الختام أتمنى أن أكون قد أوفيت الموضوع حقه لتعم الفائدة، والله أسأل أن يوفقكم جميعاً إلى الخير والنجاح والتفوق.

وأعتذر عن أي خطأ أو سهو غير مقصود وأرحب بأي اقتراح في تطوير هذا الكتاب.

محمد نمر

الفهرس

الموضوع الصفحة

الوحـــدة الرابعـــة

الـتـكـــامـل

مراجعة لقواعد التكامل السابقة

1) $\int k\,dx = kx + C$ حيث k :ثابت

مثال

جد التكاملات الآتية:

1) $\int 7.\,dx = 7x + C$

2) $\int -13\,dx = -13x + C$

3) $\int \frac{3}{4}\,dx = \frac{3}{4}x + C$

2) $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ حيث $n \neq -1$

مثال

جد التكاملات الآتية:

1) $\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C$

2) $\int x^{-4}\,dx = \frac{x^{-3}}{-3} + C$

3) $\int x^{\frac{5}{7}}\,dx = \frac{7}{12}x^{\frac{12}{7}} + C$

4) $\int \sqrt[5]{x^2}\,dx = \int x^{\frac{2}{5}}\,dx = \frac{5}{7}x^{\frac{7}{5}} + C$

5) $\int \frac{1}{x^5}\,dx = \int x^{-5}\,dx = \frac{x^{-4}}{-4} + C$

3) $\int kx^n\,dx = k\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

مثال

جد التكاملات الآتية:

1) $\int 5x^6\,dx = 5\frac{x^7}{7} + C$

2) $\int 7x^3\,dx = 7\frac{x^4}{4} + C$

3) $\int \frac{8}{x^3}\,dx = \int 8x^{-3}\,dx = \frac{8x^{-2}}{-2} + C$

$= \frac{-4}{x^2} + C$

4) $\int \frac{5}{\sqrt{x}}\,dx = \int 5x^{\frac{-1}{2}}\,dx$

$= \frac{5}{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + C = 10\,x^{\frac{1}{2}} + C$

4) $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)dx$

مثال

جد التكاملات الآتية:

1) $\int (7x^3 + 5x^2 - 3x + 2)\,dx$

$= \frac{7x^4}{4} + \frac{5x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x + C$

2) $\int x^3(x^2 + 4)\,dx = \int (x^5 + 4x^3)\,dx$

$= \frac{x^6}{6} + \frac{4x^4}{4} + C = \frac{x^6}{6} + x^4 + C$

3) $\int (x^2 + 2)^2\,dx = \int (x^4 + 4x^2 + 4)\,dx$

$= \frac{x^5}{5} + \frac{4x^3}{3} + 4x + C$

4) $\int \frac{x^3 + 3x^2 + 6}{x^2}\,dx = \int \frac{x^3}{x^2} + \frac{3x^2}{x^2} + \frac{6}{x^2}\,dx$

$= \int (x + 3 + 6x^{-2})\,dx$

$= \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{6x^{-1}}{-1} + C = \frac{x^2}{2} + 3x - \frac{6}{x} + C$

5) $\int \frac{x^3-8}{x-2}\,dx = \int \frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{\cancel{x-2}}\,dx$

$= \int (x^2+2x+4)\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} + 4x + C$

6) $\int \sqrt{x}\,(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})\,dx$

$= \int (x+1)\,dx = \frac{x^2}{2} + x + C$

وعند وجود حدود تكامل نقوم بإجراء التكامل بشكل عادي ثم نعوض الحد الأعلى – التعويض بالحد الأسفل

مثال

جد التكاملات

1) $\int_1^3 x^3\,dx$

الحل

$= \frac{x^4}{4}\Big|_1^3$

$= \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = \frac{80}{4} = 20$

2) $\int_{-1}^3 (3x^2 - 6x + 5)\,dx$

الحل

$= x^3 - 3x^2 + 5x\Big|_{-1}^3$

$= (27 - 27 + 15) - (-1 - 3 - 5)$

$= 15 + 9 = 24$

3) $\int_1^3 \frac{18}{x^3}\,dx$

الحل

$= \int_1^3 18x^{-3}\,dx = \frac{18x^{-2}}{-2}\Big|_1^3 = \frac{-9}{x^2}\Big|_1^3$

$= (\frac{-9}{9}) - (\frac{-9}{1}) = -1 + 9 = 8$

4) $\int_1^6 \frac{2x^2+6}{x^2}\,dx$

الحل

$= \int_1^6 \frac{2x^2}{x^2} + \frac{6}{x^2}\,dx = \int_1^6 2 + 6x^{-2}\,dx$

$= 2x + \frac{6x^{-1}}{-1}\Big|_1^6 = 2x - \frac{6}{x}\Big|_1^6$

$= (12 - 1) - (2 - 6) = 11 + 4 = 15$

5) $\int_1^9 \frac{7}{\sqrt{x}}\,dx$

الحل

$= \int_1^9 7x^{\frac{-1}{2}}\,dx = \frac{7x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Big|_1^9 = 14\sqrt{x}\Big|_1^9$

$= 14(\sqrt{9} - \sqrt{1}) = 14(3 - 1) = 28$

6) $\int_0^1 x^3(x^2+4)\,dx$

الحل

$= \int_0^1 x^5 + 4x^3\,dx = \frac{x^6}{6} + x^4\Big|_0^1$

$= (\frac{1}{6} + 1) - 0 = \frac{7}{6}$

الفاتن في الرياضيات

الدرس الأول

تكامل اقترانات خاصة

تكامل الاقترانات الأسية

قاعدة

$$\int e^{x}\,dx = e^{x} + C$$

$$\int e^{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$$

مثال

جد التكاملات الآتية:

1) $\int_{0}^{2} (5x^{4} + 4e^{x})\,dx = x^{5} + 4e^{x}\Big|_{0}^{2}$

$= (32 + 4e^{2}) - (0 + 4) = 28 + 4e^{2}$

2) $\int e^{4x}\,dx = \frac{1}{4}e^{4x} + C$

3) $\int e^{5x-2}\,dx = \frac{1}{5}e^{5x-2} + C$

4) $\int 5e^{\frac{x}{2}+1}\,dx = 10\,e^{\frac{x}{2}+1} + C$

مثال

جد التكاملات الآتية:

1) $\int_{0}^{\ln 5} e^{2x}\,dx$　　2) $\int e^{\ln(3x+4)}\,dx$

3) $\int \sqrt[3]{e^{6x}}\,dx$　　4) $\int \sqrt{e^{2x+4}}\,dx$

الحل

تذكر أن:

$e^{\ln f(x)} = f(x)$, $\ln e^{f(x)} = f(x)$

1) $\int_{0}^{\ln 5} e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_{0}^{\ln 5}$

$= \frac{1}{2}(e^{2\ln 5} - e^{0}) = \frac{1}{2}(e^{\ln 25} - 1)$

$= \frac{1}{2}(25 - 1) = 12$

2) $\int e^{\ln(3x+4)}\,dx = \int (3x+4)\,dx$

$= \frac{3x^{2}}{2} + 4x + C$

3) $\int \sqrt[3]{e^{6x}}\,dx = \int (e^{6x})^{\frac{1}{3}}\,dx$

$= \int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$

4) $\int \sqrt{e^{2x+4}}\,dx = \int (e^{2x+4})^{\frac{1}{2}}\,dx$

$= \int e^{x+2}\,dx = e^{x+2} + C$

مثال

جد التكاملات الآتية:

1) $\int (e^{2x+3})^{5}\,dx$　　2) $\int e^{4x}(e^{2x} + 3)\,dx$

3) $\int \frac{e^{5x} + 2}{e^{3x}}\,dx$　　4) $\int \frac{e^{3x} + 1}{e^{x} + 1}\,dx$

الحل

1) $\int (e^{2x+3})^{5}\,dx = \int e^{10x+15}\,dx$

$= \frac{1}{10}e^{10x+15} + C$

2) $\int e^{4x}(e^{2x} + 3)\,dx = \int e^{6x} + 3\,e^{4x}\,dx$

$= \frac{1}{6}e^{6x} + \frac{3}{4}e^{4x}$

3) $\int \frac{e^{5x} + 2}{e^{3x}}\,dx = \int \frac{e^{5x}}{e^{3x}} + \frac{2}{e^{3x}}\,dx$

$= \int e^{2x} + 2e^{-3x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{2}{3}e^{-3x} + C$

4) $$\int \frac{e^{3x}+1}{e^{x}+1}\,dx = \int \frac{\cancel{(e^{x}+1)}(e^{2x}-e^{x}+1)}{\cancel{e^{x}+1}}\,dx$$

$$= \int e^{2x} - e^{x} + 1\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} - e^{x} + x + C$$

قاعدة

$$\int k^{x}\,dx = \frac{k^{x}}{\ln k} + C$$

$$\int k^{ax+b}\,dx = \frac{k^{ax+b}}{a\ln k} + C$$

مثال

جد التكاملات الآتية:

1) $\int 7^{x}\,dx$

2) $\int 4^{2x+6}\,dx$

3) $\int 5^{2x+1}\,dx$

4) $\int 3^{x+1}\,dx$

الحل

1) $$\int 7^{x}\,dx = \frac{7^{x}}{\ln 7} + C$$

2) $$\int 4^{2x+6}\,dx = \frac{4^{2x+6}}{2\ln 4} + C$$

3) $$\int 5^{2x+1}\,dx = \frac{5^{2x+1}}{2\ln 5} + C$$

4) $$\int_{0}^{2} 3^{x+1}\,dx = \frac{3^{x+1}}{\ln 3}\bigg|_{0}^{2} = \frac{27-3}{\ln 3} = \frac{24}{\ln 3}$$

أتحقّق من فهمي

صفحة (10) : أجد كلاً من التكاملات الآتية:

a) $\int (5x^{2} - 3e^{7x})dx$

الحل:

$$= \frac{5x^{3}}{3} - \frac{3}{7}e^{7x} + C$$

b) $\int_{0}^{\ln 3} 8e^{4x}\,dx$

الحل:

$$= \frac{8}{4}e^{4x}\bigg|_{0}^{\ln 3} = 2(e^{4\ln 3} - e^{0})$$

$$= 2(e^{\ln 3^{4}} - 1) = 2(3^{4} - 1)$$

$$= 2(81 - 1) = 2(80) = 160$$

c) $\int \sqrt{e^{1-x}}\,dx$

الحل:

$$= \int (e^{1-x})^{\frac{1}{2}}\,dx = \int e^{\frac{1}{2}-\frac{x}{2}}\,dx$$

$$= -2\,e^{\frac{1}{2}-\frac{x}{2}} + C$$

d) $\int (3^{x} + 2\sqrt{x})\,dx$

الحل:

$$= \int 3^{x} + 2x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{3^{x}}{\ln 3} + \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{3^{x}}{\ln 3} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

تكامل الاقترانات المثلثية

يمكن ايجاد تكاملات الاقترانات المثلثية الناتجة عن مشتقات الاقترانات الست بصورة مباشرة.

صيغ تكاملات اقترانات مثلثية (1)

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \sec^{2} x\,dx = \tan x + C$$

$$\int \csc^{2} x\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$$

$$\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$$

أما الاقترانات المثلثية التي تكون زواياها في صورة $ax + b$ حيث $a \neq 0$، فيمكن إيجاد تكاملاتها على النحو الآتي:

صيغ تكاملات اقترانات مثلية (2)

إذا كان a,b عددين حقيقيين، و $a \neq 0$، فإن:

$$\int \sin(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$$

$$\int \cos(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$$

$$\int \sec^2(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + C$$

$$\int \csc^2(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + C$$

$$\int \sec(ax+b)\tan(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\sec(ax+b) + C$$

$$\int \csc(ax+b)\cot(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\csc(ax+b) + C$$

مثال

جد التكاملات الآتية:

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos x + 4\sin x)\,dx$

الحل

$$= 3\sin x - 4\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= (3\sin\frac{\pi}{2} - 4\cos\frac{\pi}{2}) - (3\sin 0 - 4\cos 0)$$

$$= (3(1) - 4(0)) - (3\sin 0 - 4\cos 0)$$

$$= (3 - 0) - (0 - 4) = 3 + 4 = 7$$

2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 3\sec^2 x\ dx$

الحل

$$= 3\tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= 3(\tan\frac{\pi}{4} - \tan 0) = 3(1 - 0) = 3$$

3) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 4\csc x\cot x\ dx$

الحل

$$= -4\csc x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= -4(\csc\frac{\pi}{3} - \csc\frac{\pi}{6}) = -4(\frac{2}{\sqrt{3}} - 2)$$

مثال

جد التكاملات الآتية:

1) $\int 6\sin 5x\,dx$

2) $\int 8\cos(3x+4)\,dx$

3) $\int 5\csc 4x\cot 4x\,dx$

4) $\int 6\sec^2 2x + \sqrt[3]{x^2}\ dx$

الحل

1) $\int 6\sin 5x\,dx = \frac{-6}{5}\cos x + C$

2) $\int 8\cos(3x+4)\,dx = \frac{8}{3}\sin(3x+4) + C$

3) $\int 5\csc 4x\cot 4x\,dx = \frac{-5}{4}\csc 4x + C$

4) $\int 6\sec^2 2x + \sqrt[3]{x^2}\ dx = \int 6\sec^2 2x + x^{\frac{2}{3}}\,dx$

$$= \frac{6}{2}\tan 2x + \frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5} + C$$

$$= 3\tan 2x + \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C$$

مثال

جد التكاملات الآتية:

1) $\int e^{3x} + 4\csc^2 5x\,dx$

2) $\int 6\sin(5x-4) + x^2\,dx$

3) $\int 5^{2x} + 7\sec 3x\tan 3x\,dx$

4) $\int 6(\sin(2-7x))\,dx$

الحل

1) $\int e^{3x} + 4\csc^2 5x\,dx = \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{4}{5}\cot 5x + C$

2) $\int 6\sin(5x-4)+x^2\,dx$

$$=\frac{-6}{5}\cos(5x-4)+\frac{x^3}{3}+C$$

3) $\int 5^{2x}+7\sec 3x\tan 3x\,dx$

$$=\frac{5^{2x}}{2\ln 5}+\frac{7}{3}\sec 5x+C$$

4) $\int 6(\sin(2-7x))\,dx$

$$=\frac{-6}{-7}\cos(2-7x)+C$$

$$=\frac{6}{7}\cos(2-7x)+C$$

أتحقّق من فهمي

صفحة (12) : أجد كلاً من التكاملات الآتية:

a) $\int \cos(3x-\pi)dx$

الحل:

$$=\frac{1}{3}\sin(3x-\pi)+C$$

b) $\int (\csc^2(5x)+e^{2x})dx$

الحل:

$$=\frac{-1}{5}\cot(5x)+\frac{1}{2}e^{2x}+C$$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin 2x-\cos 4x)\,dx$

الحل:

$$=\frac{-1}{2}\cos 2x-\frac{1}{4}\sin 4x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\left(\frac{-1}{2}\cos\frac{2\pi}{3}-\frac{1}{4}\sin\frac{4\pi}{3}\right)-\left(\frac{-1}{2}\cos 0-\frac{1}{4}\sin 0\right)$$

$$=\left(\frac{-1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)\right)-\frac{1}{4}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right))-\left(-\frac{1}{2}-0\right)$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{8}$$

استخدام المتطابقات في التكامل

مفهوم أساسي

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$

$\cos^2 x=1-\sin^2 x$

$\sin^2 x=1-\cos^2 x$

$1+\tan^2 x=\sec^2 x$

$\tan^2 x=\sec^2 x-1$

$1+\cot^2 x=\csc^2 x$

$\cot^2 x=\csc^2 x-1$

مثـــال

جد التكاملات الآتية:

1) $\int\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}dx$

2) $\int 5x+\cot^2 3x\,dx$

3) $\int\frac{4-\sin^3 x}{1-\cos^2 x}dx$

الحـــل

1) $\int\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}dx$

$$=\int\frac{\cancel{(1-\cos x)}(1+\cos x)}{\cancel{1-\cos x}}dx$$

$$=\int 1+\cos x\,dx=x+\sin x+C$$

2) $\int 5x+\cot^2 3x\,dx$

$$=\int(5x+\csc^2 3x-1)\,dx$$

$$=\frac{5x^2}{2}-\frac{1}{3}\cot 3x+x+C$$

3) $\int\frac{4-\sin^3 x}{1-\cos^2 x}dx=\int\frac{4-\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$

$$=\int\frac{4}{\sin^2 x}-\frac{\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$$

$$=\int 4\csc^2 x-\sin x\,dx$$

$$=-4\cot x+\cos x+C$$

مثـــال

جد التكاملات الآتية:

1) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (3+3\tan^2 x)\,dx$

2) $\int 3\tan^2 x - 5\cot^2 x\,dx$

3) $\int (\tan x+\sec x)^2\,dx$

4) $\int \frac{\cos^2 5x}{\sin^2 5x}\,dx$

الحـــل

$$1)\int_0^{\frac{\pi}{4}} (3+3\tan^2 x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 3(1+\tan^2 x)\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 3\sec^2 x\,dx = 3\tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= 3(\tan\frac{\pi}{4} - \tan 0) = 3(1-0) = 3$$

$$2)\int 3\tan^2 x - 5\cot^2 x\,dx$$

$$= \int 3(\sec^2 x - 1) - 5(\csc^2 x - 1)\,dx$$

$$= \int 3\sec^2 x - 3 - 5\csc^2 x + 5\,dx$$

$$= \int (3\sec^2 x - 5\csc^2 x + 2)\,dx$$

$$= 3\tan x + 5\cot x + 2x + C$$

$$3)\int (\tan x+\sec x)^2\,dx$$

$$= \int \tan^2 x + 2\tan x\sec x + \sec^2 x\,dx$$

$$= \int (\sec^2 x - 1 + 2\tan x\sec x + \sec^2 x)\,dx$$

$$= \int (2\sec^2 x + 2\tan x\sec x - 1)\,dx$$

$$= 2\tan x + 2\sec x - x + C$$

$$4)\int \frac{\cos^2 5x}{\sin^2 5x}\,dx = \int \cot^2 5x\,dx$$

$$= \int \csc^2 5x - 1\,dx = \frac{-1}{5}\cot 5x - x + C$$

عند وجود مثل التكاملات

$$1)\int \frac{dx}{1-\cos x}\ ,\ 2)\int \frac{dx}{1+\cos x}\ ,$$

$$3)\int \frac{dx}{1-\sin x}\ ,\ 4)\int \frac{dx}{1+\sin x}$$

يفضل الضرب بالمرافق لنأخذ مثلاً:

$$1)\int \frac{dx}{1-\sin x} = \int \frac{dx}{1-\sin x} \times \frac{1+\sin x}{1+\sin x}$$

$$= \int \frac{1+\sin x}{1-\sin^2 x}\,dx = \int \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx$$

$$= \int \sec^2 x + \frac{\sin x}{\cos x\,.\,\cos x}\,dx$$

$$= \int \sec^2 x + \tan x\,.\,\sec x\,dx$$

$$= \tan x + \sec x + C$$

مثـــال

جد التكاملات الآتية:

1) $\int \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx$ 2) $\int \frac{1}{\sec x - 1}\,dx$

الحـــل

$$1)\int \frac{\sin x}{1+\sin x}\,.\,\frac{1-\sin x}{1-\sin x}\,dx$$

$$= \int \frac{\sin x - \sin^2 x}{1-\sin^2 x}\,dx$$

$$= \int \frac{\sin x - \sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx$$

$$= \int \frac{\sin x}{\cos x\,.\,\cos x} - \tan^2 x\,dx$$

$$= \int \tan x\sec x - (\sec^2 x - 1)\,dx$$

$$= \sec x - \tan x + x + C$$

2) $$\int \frac{1}{\sec x - 1}\ dx = \int \frac{1}{\frac{1}{\cos x} - 1}\ dx$$

$$= \int \frac{1}{\frac{1-\cos x}{\cos x}}\ dx = \int \frac{\cos x}{1-\cos x}\ dx$$

$$= \int \frac{\cos x}{1-\cos x} \times \frac{1+\cos x}{1+\cos x}\ dx$$

$$= \int \frac{\cos x + \cos^2 x}{1-\cos^2 x}\ dx$$

$$= \int \frac{\cos x + \cos^2 x}{\sin^2 x}\ dx = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$= \int \frac{\cos x}{\sin\ x \,.\, \sin x} + \cot^2 x\, dx$$

$$= \int \cot x \,.\, \csc x + \csc^2 x - 1\ dx$$

$$= -\csc x - \cot x - x + C$$

عند وجود $\int \sin^n x\, dx\ ,\ \int \cos^n x\, dx$

حيث n عدد زوجي نستخدم:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

بشكل عام

$$\cos^2 ax = \frac{1}{2}(1 + \cos 2ax)$$

$$\sin^2 ax = \frac{1}{2}(1 - \cos 2ax)$$

مثال

جد التكاملات:

1) $\int \sin^2 x\, dx$ 2) $\int \frac{5}{\sec^2 3x}\, dx$

3) $\int \cos^4 x\, dx$

الحل

1) $$\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\ dx$$

$$= \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}\sin 2x) + C$$

2) $$\int \frac{5}{\sec^2 3x}\, dx = \int 5\cos^2 3x\ \ dx$$

$$= \int 5\,(\frac{1}{2})\ (1 + \cos 6x)\ dx$$

$$= \frac{5}{2}\,(x + \frac{1}{6}\ \sin 6x) + C$$

3) $$\int \cos^4 x\, dx = \int (\cos^2 x)^2\, dx$$

$$= \int (\frac{1}{2}\,(1 + \cos 2x))^2\ dx$$

$$= \int (\frac{1}{4}\,(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x\ dx$$

$$= \int (\frac{1}{4}\,(1 + 2\cos 2x + \frac{1}{2}\,(1 + \cos 4x)\ dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{3}{2} + 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x\ dx$$

$$= \frac{1}{4}\,(\frac{3}{2}\,x + 2(\frac{1}{2})\sin 2x + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}\ \sin 4x) + C$$

متطابقة $\cos 2x$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$= 1 - 2\sin^2 x$$
$$= 2\cos^2 x - 1$$

مثال

جد التكاملات:

1) $\int \frac{4}{1 - \cos 2x}\, dx$ 2) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \,.\, \cos^2 x}\, dx$

3) $\int \frac{1}{(\cos^4 x - \sin^4 x)^2}\ dx$

الحل

1) $\int \frac{4}{1-\cos 2x}\,dx = \int \frac{4}{1-(1-2\sin^2 x)}\,dx$

$= \int \frac{4}{2\sin^2 x} = \int 2\csc^2 x\,dx$

$= -2\cot x + C$

2) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x\,.\,\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x\,.\,\cos^2 x}\,dx$

$= \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x\,.\,\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x\,.\,\cos^2 x}\,dx$

$= \int \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int \csc^2 x - \sec^2 x\,dx$

$= -\cot x - \tan x + C$

3) $\int \frac{1}{(\cos^4 x-\sin^4 x)^2}\,dx$

$= \int \frac{1}{((\cos^2 x+\sin^2 x)(\cos^2 x-\sin^2 x))^2}$

$= \int \frac{1}{((1)(\cos 2x))^2} = \int \frac{1}{\cos^2 2x}\,dx$

$= \int \sec^2 2x\,dx = \frac{1}{2}\tan 2x + C$

متطابقات تحويل الضرب إلى جمع

$\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)]$

$\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y)]$

$\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y)]$

$\cos x \sin y = \frac{-1}{2}[\sin(x-y) - \sin(x+y)]$

مثال

جد التكاملات:

1) $\int \sin 5x \cos 3x\,dx$ 2) $\int x^3 + 2\cos 4x \cos x\,dx$

الحل

1) $\int \sin 5x \cos 3x\,dx$

$= \int \frac{1}{2}(\sin(5x-3x) - \sin(5x+3x)]$

$= \frac{1}{2}\int (\sin 2x - \sin 8x)\,dx$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 8x\right) + C$

2) $\int x^3 + 2\cos 4x \cos x\,dx$

$= \int x^3 + 2(\frac{1}{2})(\cos(4x-x) + \cos(4x+x)]dx$

$= \int x^3 + \cos 3x + \cos 5x\,dx$

$= \frac{x^4}{4} + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + C$

أتحقق من فهمي

صفحة (14) : أجد كلاً من التكاملات الآتية:

a) $\int \cos^4 x\,dx$

الحل:

$= \int (\cos^2 x)^2\,dx = \int (\frac{1}{2}(1+\cos 2x)^2\,dx$

$= \int \frac{1}{4}(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x\,dx$

$= \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1+\cos 4x)\,dx$

$= \frac{1}{4}\int \frac{3}{2} + 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x\,\,dx$

$= \frac{1}{4}(\frac{3}{2}x + 2(\frac{1}{2})(\sin 2x) + \frac{1}{2}(\frac{1}{4})\sin 4x) + C$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x \sin x\,dx$

الحل:

$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\frac{1}{2})(\cos(3x-x) - \cos(3x+x))\,dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2x - \cos 4x)\,dx$

$$= \frac{1}{2}[\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{4}\sin 4x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{6} - \frac{1}{4}\sin\frac{4\pi}{6}\right] - \left(\frac{1}{2}\sin 0 - \frac{1}{4}\sin 0\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right] - 0]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right] = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{8}$$

c) $\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{dx}{1+\cos x} \times \frac{1-\cos x}{1-\cos x}$

$$= \int \frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x}dx = \int \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}dx$$

$$= \int \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx$$

$$= \int \csc^2 x - \csc x \cot x = -\cot x + \csc x + C$$

تكاملات ينتج عنها اقتران لوغاريتمي طبيعي

مفهوم أساسي

1) $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C \quad , x \neq 0$

2) $\int \frac{1}{ax+b}dx$

$$= \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C \ , x \neq -\frac{b}{a}$$

3) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C \ , f(x) \neq 0$

مثـــال

جد التكاملات:

1) $\int (\frac{1}{x} + e^{4x})dx$

2) $\int_1^{e^3} \frac{4}{x}dx$

3) $\int_5^{15} \frac{2}{x}dx$

4) $\int \frac{x+1}{x}dx$

الحـــل

1) $\int (\frac{1}{x} + e^{4x})dx = \ln|x| + \frac{1}{4}e^{4x} + C$

2) $\int_1^{e^3} \frac{4}{x}dx = 4\ln|x|\Big|_0^{e^3} = 4(\ln e^3 - \ln 1)$

$$= 4(3-0) = 12$$

3) $\int_5^{15} \frac{2}{x}dx = 2\ln|x|\Big|_5^{15} = 2(\ln 15 - \ln 5)$

$$= 2\ln\frac{15}{5} = 2\ln 3$$

4) $\int \frac{x+1}{x}dx = \int \frac{x}{x} + \frac{1}{x}dx$

$$= \int 1 + \frac{1}{x}dx = x + \ln|x| + C$$

مثـــال

جد التكاملات:

1) $\int \frac{1}{5x-6}dx$

2) $\int \frac{4}{7x+2}dx$

3) $\int \frac{8}{7-5x}dx$

4) $\int_1^2 \frac{6}{2-3x}dx$

الحـــل

1) $\int \frac{1}{5x-6}dx = \frac{1}{5}\ln|5x-6| + C$

2) $\int \frac{4}{7x+2}dx = \frac{4}{7}\int \frac{7}{7x+2}dx$

$$= \frac{4}{7}\ln|7x+2| + C$$

3) $\int \frac{8}{7-5x}dx = \frac{8}{-5}\int \frac{-5}{7-5x}dx$

$$= -\frac{8}{5}\ln|7-5x| + C$$

4) $\int_1^2 \frac{6}{2-3x}dx = \frac{6}{-3}\int_1^2 \frac{-3}{2-3x}dx$

$$= -2\ln(2-3x)\Big|_1^2 = -2\ln|-1| - \ln|-4|$$

$$= -2(0 - \ln 4) = 2\ln 4$$

مثال

جد التكاملات:

1) $\int \frac{2x+5}{x^2+5x-4}\,dx$ 2) $\int \frac{3x^2-\sin x}{x^3+\cos x+2}\,dx$

3) $\int \frac{7x}{2x^2+3}\,dx$ 4) $\int \frac{x^2+2}{x^3+6\,x}\,dx$

5) $\int \frac{5x}{7-x^2}\,dx$

الحل

1) $(x^2+5x-4)' = 2x+5$

$$\int \frac{2x+5}{x^2+5x-4}\,dx = \ln|x^2+5x-4| + C$$

---

2) $(x^3+\cos x+2)' = 3x^2-\sin x$

$$\int \frac{3x^2-\sin x}{x^3+\cos x+2}\,dx = \ln|x^3+\cos x+2| + C$$

---

3) $(2x^2+3)' = 4x$

$$\int \frac{7x}{2x^2+3}\,dx = \frac{7}{4}\int \frac{4x}{2x^2+3}\,dx$$

$$= \frac{7}{4}\ln|2x^2+3| + C$$

---

4) $(x^3+6\,x)' = 3x^2+6 = 3(x^2+2)$

$$\int \frac{x^2+2}{x^3+6\,x}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3(x^2+2)}{x^3+6\,x}$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x^3+6\,x| + C$$

---

5) $(7-x^2)' = -2x$

$$\int \frac{5x}{7-x^2}\,dx = \frac{5}{-2}\int \frac{-2x}{7-x^2}\,dx$$

$$= \frac{-5}{2}\ln|7-x^2| + C$$

مثال

جد التكاملات:

1) $\int \tan x\,dx$ 2) $\int \cot x\,dx$

3) $\int \sec x\,dx$ 4) $\int \csc x\,dx$

الحل

1) $\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + C$

---

2) $\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \ln|\sin x| + C$

3) $\int \sec x\,dx = \int \sec x\,\frac{(\sec x+\tan x)}{\sec x+\tan x}\,dx$

$$= \ln|\sec x+\tan x| + C$$

---

4) $\int \csc x\,dx = \int \csc x\,\frac{(\csc x+\cot x)}{\csc x+\cot x}\,dx$

$$= -\ln|\csc x+\cot x| + C$$

مثال

جد التكاملات:

1) $\int \cot 5x\,dx$ 2) $\int \frac{\sin 3x}{1+\cos 3x}\,dx$

3) $\int \frac{5+5\tan^2 x}{\tan x}\,dx$ 4) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{3+3\cot^2 x}{\cot x}\,dx$

الحل

1) $\int \cot 5x\,dx = \int \frac{\cos 5x}{\sin 5x}\,dx$

$(\sin 5x)' = 5\cos 5x \Longrightarrow \frac{1}{5}\int \frac{5\cos 5x}{\sin 5x}\,dx$

$$= \frac{1}{5}\ln|\sin 5x| + C$$

---

2) $(1+\cos 3x)' = -3\sin 3x$

$$= \frac{1}{-3}\int \frac{-3\sin 3x}{1+\cos 3x}\,dx$$

$$= \frac{-1}{3}\ln|1+\cos 3x| + C$$

---

3) $5+5\tan^2 x = 5(1+\tan^2 x) = 5\sec^2 x$

$$\Longrightarrow \int \frac{5+5\tan^2 x}{\tan x}\,dx = \int \frac{5\sec^2 x}{\tan x}\,dx$$

$$= 5\ln|\tan x| + C$$

4) $3 + 3\cot^2 x = 3(1 + \cot^2 x) = 3\csc^2 x$

$$\Longrightarrow \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{3 + 3\cot^2 x}{\cot x}\, dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{3\csc^2 x}{\cot x}\, dx$$

$$= -3\ln|\cot x| \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= -3(\ln\cot\frac{\pi}{3} - \ln\cot\frac{\pi}{6})$$

$$= -3(\ln\frac{1}{\sqrt{3}} - \ln\sqrt{3}) = -3\ln\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}$$

$$= -3\ln\frac{1}{3} = -3(\ln 1 - \ln 3)$$

$$= -3(0 - \ln 3) = 3\ln 3$$

مثال

جد التكاملات:

1) $\int \frac{e^x}{1 + e^x}\, dx$ 2) $\int \frac{5e^{3x}}{4 + 2e^{3x}}\, dx$

3) $\int \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}\, dx$ 4) $\int \frac{1 + \ln x}{x\ln x}\, dx$ 5) $\int_1^{e^2} \frac{1}{e - 1}\, dx$

الحل

1) $(1 + e^x)' = e^x$

$$\int \frac{e^x}{1 + e^x}\, dx = \ln|1 + e^x| + C$$

2) $(4 + 2e^{3x})' = 6e^{3x}$

$$\int \frac{5e^{3x}}{4 + 2e^{3x}}\, dx = \frac{5}{6}\int \frac{6e^{3x}}{4 + 2e^{3x}}\, dx$$

$$= \frac{5}{6}\ln|4 + 2e^{3x}| + C$$

3) $\int \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}\, dx = \int \frac{e^x}{e^x + \frac{1}{e^x}}\, dx$

$$= \int \frac{e^x}{\frac{e^{2x} + 1}{e^x}}\, dx = \int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1} = \frac{1}{2}\int \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + 1}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|e^{2x} + 1| + C$$

4) $(x\ln x)' = x(\frac{1}{x}) + \ln x\,(1) = 1 + \ln x$

$$\int \frac{1 + \ln x}{x\ln x}\, dx = \ln|x\ln x|$$

5) $\int_1^{e^2} \frac{1}{e - 1}\, dx = \frac{1}{e - 1}(e^2 - 1)$ لأنه ثابت

$$= \frac{1}{\cancel{e - 1}}(\cancel{e - 1})(e + 1) = e + 1$$

أتحقق من فهمي

صفحة (16) : أجد كلاً من التكاملات الآتية:

a) $\int (\sin x - \frac{5}{x})dx$

الحل:

$$= -\cos x - 5\ln|x| + C$$

b) $\int \frac{5}{3x + 2}\, dx$

الحل:

$$= \frac{5}{3}\ln|3x + 2| + C$$

c) $\int \frac{x^2 - 7x + 2}{x^2}\, dx$

الحل:

$$= \int \frac{x^2}{x^2} - \frac{7x}{x^2} + \frac{2}{x^2}\, dx$$

$$= \int 1 - \frac{7}{x} + 2x^{-2}\, dx$$

$$= x - 7\ln|x| + \frac{2x^{-1}}{-1} + C$$

$$= x - 7\ln|x| - \frac{2}{x} + C$$

d) $\int \frac{2x + 3}{x^2 + 3x}\, dx$

الحل:

$$= \ln|x^2 + 3x| + C$$

e) $\int \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}\, dx$

الحل:

$$= \frac{-1}{2}\ln|1 + \cos 2x| + C$$

f) $\int \cot x \, dx$

الحل:

$$= \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln|\sin x| + C$$

g) $\int \frac{e^x}{e^x + 7} dx$

الحل:

$$= \ln|e^x + 7| + C$$

h) $\int \csc x \, dx$

الحل:

$$= \int \csc x \frac{(\csc x + \cot x)}{\csc x + \cot x} dx$$

$$= -\ln|\csc x + \cot x| + C$$

عندما تكون درجة البسط أكبر أو تساوي درجة المقام فنقوم بعملية القسمة أولاً ثم إيجاد التكامل.

مثـــال

جد التكاملات:

1) $\int \frac{x}{x+2} dx$ **2)** $\int \frac{x^3 + 6x}{x-3} dx$

3) $\int \frac{(x-2)^2}{x-1} dx$

الحـــل

$$\begin{array}{r l}
 & 1 \\ \cline{2-2}
x+2\big) & x \\
 & -\,x \overset{\ominus}{+} 2 \\ \cline{2-2}
 & -2
\end{array}$$

1) $\int \frac{x}{x+2} dx$

$$= \int 1 + \frac{-2}{x+2} dx$$

$$= x - 2\ln|x+2| + C$$

2)

$$\begin{array}{r l}
 & x^2 + 3x + 15 \\ \cline{2-2}
x-3\big) & \cancel{x^3} + 6x \\
 & -\cancel{x^2} \overset{\oplus}{-} 3x^2 \\ \cline{2-2}
 & \cancel{3x^2} + 6x \\
 & -\cancel{3x^2} \overset{\oplus}{-} 9x \\ \cline{2-2}
 & 15\cancel{x} \\
 & -\cancel{15x} \overset{\oplus}{-} 45 \\ \cline{2-2}
 & 45
\end{array}$$

$$\int \frac{x^3 + 6x}{x-3} dx = \int x^2 + 3x + 15 + \frac{45}{x-3}$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 15x + 45\ln|x-3| + C$$

3) $\int \frac{(x-2)^2}{x-1} dx = \int \frac{x^2 - 4x + 4}{x-1} dx$

$$\begin{array}{r l}
 & x\ -3 \\ \cline{2-2}
x-1\big) & \cancel{x^2} - 4x + 4 \\
 & -\cancel{x^2} \overset{\oplus}{-} x \\ \cline{2-2}
 & -\cancel{3x} + 4 \\
 & \overset{\oplus}{-}\cancel{3x} \overset{\ominus}{+} 3 \\ \cline{2-2}
 & 1
\end{array}$$

$$\int \frac{(x-2)^2}{x-1} dx = \int x - 3 + \frac{1}{x-1} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - 3x + 1\ln|x-1| + C$$

أتحقّق من فهمي

صفحة (17) : أجد: $\int \frac{x^2 + x + 1}{x+1} dx$

الحل:

$$\begin{array}{r l}
 & x - 2 \\ \cline{2-2}
x+1\big) & \cancel{x^2} + \cancel{x} + 1 \\
 & -\cancel{x^2} \overset{\ominus}{+} \cancel{x} \\ \cline{2-2}
 & 1
\end{array}$$

$$= \int x + \frac{1}{x+1} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + \ln|x+1| + C$$

تكاملات الاقترانات المتشعبة

تذكر الخاصية

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

مثال

جد التكاملات:

1) $f(x) = \begin{cases} x^2+4 & : x \le 3 \\ 2x+4 & : x > 3 \end{cases}$ جد: $\int_0^5 f(x)\,dx$

2) $\int_0^5 |2x+3|\,dx$ 3) $\int_0^5 |2x-6|\,dx$

4) $\int_{-2}^5 3x\,|x|\,dx$ 5) $\int_0^6 \sqrt{x^2-4x+4}\,dx$

6) $f(x) = \begin{cases} e^{2x} & : x \le 2 \\ \dfrac{5}{x-1} & : x > 2 \end{cases}$ جد: $\int_0^5 f(x)\,dx$

الحل

1) $\int_0^5 f(x)\,dx = \int_0^3 (x^2+4)\,dx + \int_3^5 (2x+4)dx$

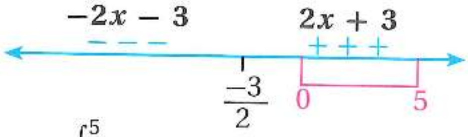
$= \frac{x^3}{3} + 4x \Big|_0^3 + x^2 + 4x \Big|_3^5$

$= (9+12) - (0) + (25+20) - (9+12)$

$= 21 - 0 + 45 - 21 = 45$

---

2) $= 2x+3 = 0 \longrightarrow x = \frac{-3}{2}$

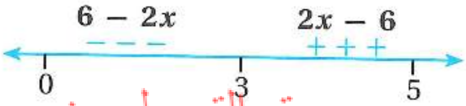


$\int_0^5 |2x+3|\,dx = \int_0^5 (2x+3)dx$

$= x^2 + 3x \Big|_0^5 = (25+15) - (0) = 40$

---

3) $= 2x-6 = 0 \longrightarrow x = 3$



$\int_0^5 |2x-6|dx = \int_0^3 6-2x\,dx + \int_3^5 2x-6\,dx$

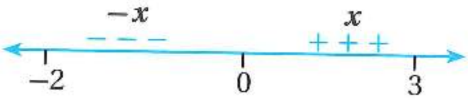
$= 6x - x^2 \Big|_0^3 + x^2 - 6x \Big|_3^5$

$= (18-9) - (0) + (25-30) - (9-18)$

$= 9 - 0 + -5 + 9 = 13$

---

4) $x = 0$



$\int_{-2}^3 3x|x|\,dx = \int_{-2}^0 3x\,(-x)dx + \int_0^3 3x\,(x)dx$

$= \int_{-2}^0 -3x^2\,dx + \int_0^3 3x^2\,dx$

$= -x^3 \Big|_{-2}^0 + x^3 \Big|_0^3$

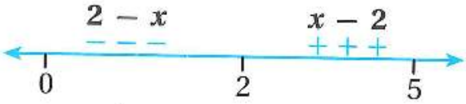
$= 0 - (-8) + 27 - 0 = 8 + 27 = 35$

---

5) $\int_0^6 \sqrt{x^2-4x+4}\,dx = \int_0^6 \sqrt{(x-2)^2}\,dx$

$= \int_0^6 |x-2|\,dx$

$x - 2 = 0 \longrightarrow x = 2$



$= \int_0^2 (2-x)dx + \int_2^6 (x-2)\,dx$

$= 2x - \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 + \frac{x^2}{2} - 2x \Big|_2^6$

$= (4-2) - (0) + (18-12) - (2-4)$

$= 2 - 0 + 6 + 2 = 10$

---

6) $\int_0^5 f(x)\,dx = \int_0^2 e^{2x}\,dx + \int_2^5 \frac{5}{x-1}\,dx$

$= \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^2 + 5\ln|x-1|\Big|_2^5$

$= \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2} + 5(\ln 4 - \ln 1)$

$= \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2} + 5\ln 4 - 0$

أتحقَّق من فهمي

صفحة (19) :

a) إذا كان:
$$f(x)=\begin{cases}1+x & :x<1\\ 2x & :x\ge 1\end{cases}$$

فأجد قيمة: $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$

الحل:

$$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}(1+x)\,dx+\int_{1}^{3}2x\,dx$$

$$=x+\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1}+x^2\Big|_{1}^{3}$$

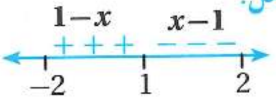
$$=(1+\frac{1}{2})-(-1+\frac{1}{2})+9-1$$

$$=1+\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}+8=10$$

b) إذا كان: $f(x)=|1-x|$ فأجد قيمة $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$

الحل:

$$1-x=0\longrightarrow x=1$$



$$\int_{-2}^{1}1-x\,dx+\int_{1}^{2}x-1dx$$

$$=x-\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{1}+\frac{x^2}{2}-x\Big|_{1}^{2}$$

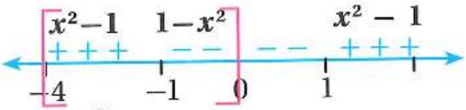
$$=(1-\frac{1}{2})-(-2-2)+(2-2)-(\frac{1}{2}-1)$$

$$=\frac{1}{2}+4+0+\frac{1}{2}=5$$

c) إذا كان: $f(x)=|x^2-1|$ فأجد قيمة $\int_{-4}^{0} f(x)\,dx$

الحل:

$$x^2-1=0\quad x=\pm 1$$



$$\int_{-4}^{-1}x^2-1\,dx+\int_{-1}^{0}1-x^2\,dx$$

$$=\frac{x^3}{3}-x\Big|_{-4}^{-1}+(x-\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{0}$$

$$=(-\frac{1}{3}+1)-(-\frac{64}{3}+4)+(0)-(-1+\frac{1}{3})$$

$$=-\frac{1}{3}+1+\frac{64}{3}-4+1-\frac{1}{3}$$

$$=\frac{62}{3}-2=\frac{62-6}{3}=\frac{56}{3}$$

تطبيقات : الشرط الأولي

إذا علمت $f'(x)$ فإن $f(x)=\int f'(x)\,dx$

مثـــال

يعالج التلوث في بحيرة باستعمال مضاد للبكتيريا إذا كان عدد الخلايا البكتيرية الضارة في البحيرة يتغير بمعدل: $N'(t)=-\frac{2000t}{1+t^2}$، حيث $N(t)$ عـدد الخـلايــا البكتيرية لكل مليلتر من الماء، بعد t يوماً من استعمال المضاد، فأجد $N(t)$، علماً بأن العدد الابتدائي للخلايا هو 5000 خلية لكل مليلتر.

الحـــل

الخطوة (1) : أجد تكامل الاقتران : $N'(t)$

$N(t)=\int N'(t)dt$

$$N(t)=\int -\frac{2000t}{1+t^2}\,dt$$

بالضرب في 2 والقسمة على 2

$$=-1000\int\frac{2t}{1+t^2}\,dt$$

تكامل $\frac{f'(x)}{f(x)}$

$$=-1000\ln|1+t^2|+C$$

$|1+t^2|=1+t^2$

$$=-1000\ln(1+t^2)+C$$

الخطوة (2) : أجد ثابت الاقتران C

قاعدة الاقتران

$$N(t)=-1000\ln(1+t^2)+C$$

بتعويض $t=0, N(0)=5000$

$$5000=-1000\ln(1+(0)^2)+C$$

بالتبسيط

$$5000=C$$

$$N(t)=-1000\ln(1+t^2)+5000$$

أتحقَّق من فهمي

صفحة (20) : تسرب نفط من ناقلة بحرية، مكوناً بقعة دائرية الشكل على سطح الماء، نصف قطرها $R(t)$ قدماً بعد t دقيقة من بدء التسرب. إذا كان نصف قطر الدائرة يزداد بمعدل $R'(t)=\frac{21}{0.07t+5}$، فأجد $R(t)$، علماً بأن $R(0)=0$

الحل:

$$R'(t)=\frac{21}{0.07t+5}$$

$$R(t)=\int\frac{21}{0.07t+5}\,dt$$

$$=\frac{21}{0.07}\ln|0.07t+5|+C$$

$$=300\ln(0.07t+5)+C$$

$$R=0\ ,\ t=0$$

$$0=300\ln(0+5)+C$$

$$0=300\ln 5+C$$

$$C=-300\ln 5$$

$$R(t)=300\ln|\,0.07t+5\,|-300\ln 5$$

الحركة في خط مستقيم

يطلق على التغير في موقع الجسم اسم الإزاحة فإذا كان $s(t)$ موقع الجسم فإن الإزاحة في الفترة الزمنية $[t_1, t_2]$ هي $s(t_2)-s(t_1)$ وإذا علم اقتران السرعة المتجهة $v(t)$ فإن الإزاحة في الفترة الزمنية $[t_1, t_2]$ هي

$$s(t_2)-s(t_1)=\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$$

وإذا كان المطلوب إيجاد المسافة الكلية التي قطعها يجب الانتباه إلى الفترات التي تكون منها $v(t)\leq 0$ وتلك التي تكون $v(t)\geq 0$ حيث المسافة الكلية هي $\int_{t_1}^{t_2}|v(t)|dt$ (يقصد بالمسافة هي الطول الكلي للمسار الذي يتبعه الجسم) (أما الإزاحة فهي التغير في موقع الجسم)

ملاحظة

$$s(t)=\int v(t)dt$$

وأيضاً $v(t)=\int a(t)dt$

مثال

تحرك جسم من نقطة الأصل وكان اقتران السرعة المتجهة هو $v(t)=4\sin 2t$

1) جد موقع الجسم بعد مرور $\frac{\pi}{6}$ ثانية

الحل

$$s(t)=\int v(t)dt$$

$$=\int 4\sin 2t\,dt=-2\cos 2t+C$$

ولأن الجسم تحرك من نقطة الأصل فيكون $s(0)=0$

$$s(0)=\ -2\cos\ 0+C=0$$

$$s(0)=\ -2+C=0\ \longrightarrow\ \ C=2$$

$$s(t)=\ -2\cos 2t+2$$

$$s(\tfrac{\pi}{6})=-2\cos\frac{\pi}{3}+2=-2\,(\tfrac{1}{2})+2=1$$

2) احسب ازاحة الجسم في الفترة $[0,\pi]$

الحل

$$s(\pi)-s(0)=\int_0^{\pi}4\sin 2t\,dt$$

$$=-2\cos 2t\Big|_0^{\pi}$$

$$=-\cos 2\pi-(-2\cos 0)$$

$$=-2+2=0$$

3) جد المسافة الكلية التي قطعها الجسم في $[0,\pi]$

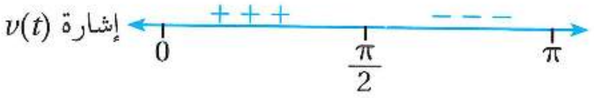
الحل

ندرس إشارة اقتران السرعة المتجهة

$$v(t)=4\sin 2t\,dt=0$$

$$\sin 2t=0\longrightarrow\ \ 2t=0\ ,\pi\ ,2\pi$$

$$\longrightarrow\ \ t=0\ ,\frac{\pi}{2}\ ,\pi$$



المسافة $=\int_0^{\pi}|v(t)|dt$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\sin 2t\,dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-4\sin 2t\,dt$$

$$= -2\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\cos 2t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= -2\left(\cos 2\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) + 2(\cos 2\pi - \cos\pi)$$

$$= -2(-1-1) + 2(1-(-1))$$

$$= 4 + 4 = 8$$

أتحقَّق من فهمي

صفحة (23): يتحرك جسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران $v(t) = 3\cos t$، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية:

a) إذا بدأ الجسيم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقع الجسم بعد $\frac{\pi}{6}$ ثانية من بدء الحركة

الحل:

$$s(t) = \int v(t)dt = \int 3\cos t\, dt$$

$$= 3\sin t + C$$

تحرك من نقطة الأصل $s(0) = 0$

$$s(0) = 3\sin 0 + C = 0$$

$$\longrightarrow 0 + C = 0 \longrightarrow C = 0$$

$$s(t) = 3\sin t$$

$$s\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\sin\frac{\pi}{6} = 3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

b) أجد إزاحة الجسيم في الفترة $[0, 2\pi]$

الحل:

$$s(2\pi) - s(0) = \int_0^{2\pi} 3\cos t\, dt$$

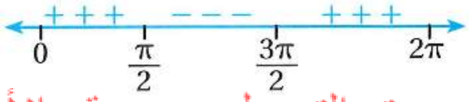
$$= 3\sin t\Big|_0^{2\pi} = 3(\sin 2\pi - \sin 0)$$

$$= 3(0-0) = 0$$

c) أجد المسافة الكلية التي قطعها الجسيم في الفترة $[0, 2\pi]$

الحل:

$$3\cos t = 0 \longrightarrow \cos t = 0 \longrightarrow t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$



$$\int_0^{2\pi} |v(t)|dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos t\, dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} -3\cos t + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} 3\cos t\ dt$$

$$= 3\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 3\sin t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} + 3\sin t\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}$$

$$= 3\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) - 3\left(\sin\frac{3\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\right) + 3\left(\sin 2\pi - \sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

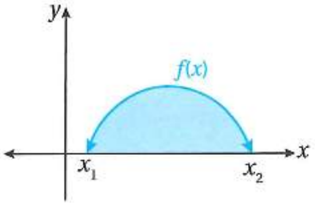
$$= 3(1-0) - 3(-1-1) + 3(0-(-1))$$

$$= 3 + 6 + 3 = 12$$

المساحة المحصورة بين المنحنى $f(x)$ ومحور x

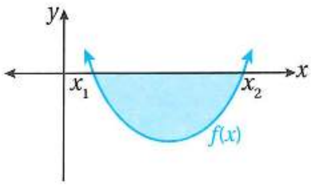
يقطع المنحنى محور x عندما $f(x) = 0$ فتكون أمام إحدى الحالات:

- إذا كان $f(x)$ فوق محور x فإن:



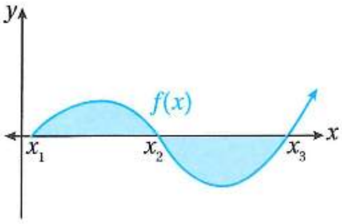
$$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx$$

- إذا كان $f(x)$ تحت محور x فإن:



$$A(x) = \int_{x_1}^{x_2} |f(x)|\, dx = -\int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx$$

- وإذا قطع المنحنى $f(x)$ محور x عدة مرات فإن:



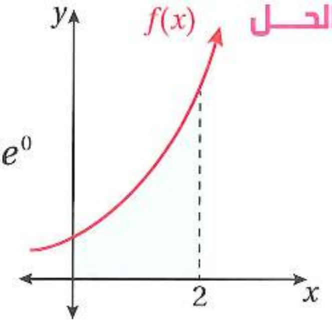
$$A(x) = \int_{x_1}^{x_3} |f(x)|\, dx$$

مثــال

جد المساحة المطلقة في الحالات التالية:

1) حيث $f(x) = 4e^{2x}$

الحــل



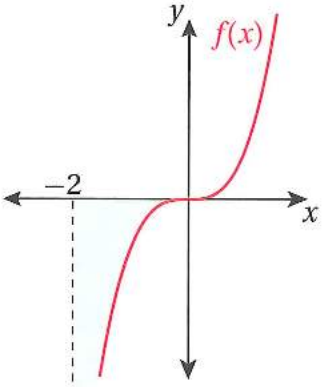
$$A = \int_6^2 4e^{2x}\, dx$$

$$= 2\, e^{2x} \Big|_0^2 = 2e^4 - 2e^0$$

$$= 2e^4 - 2$$

2) حيث $f(x) = x^3$

الحــل



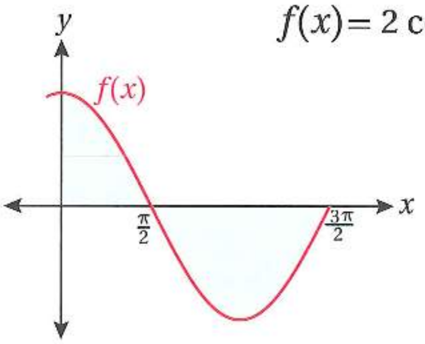
$$A = -\int_{-2}^{0} x^3\, dx$$

$$= -\frac{x^4}{4} \Big|_{-2}^{0}$$

$$= -(0 - 4) = 4$$

3) حيث $f(x) = 2\cos x$

الحــل



$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos x\, dx + -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 2\cos x\, dx$$

$$= 2\sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$= 2(1 - 0) - 2(-1 - 1)$$

$$= 2 + 4 = 6$$

أتدرّب وأحلُّ المسائل

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

① $\int (e^{2x-3} - \sqrt{x}\,)\, dx$

الحل:

$$= \int (e^{2x-3} - x^{\frac{1}{2}})\, dx = \frac{1}{2} e^{2x-3} - \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

② $\int (e^{0.5x} - \frac{3}{e^{0.5x}})\, dx$

الحل:

$$= \int (e^{0.5x} - 3e^{-0.5x})\, dx = \frac{1}{0.5} e^{0.5x} - \frac{3}{-0.5} e^{-0.5x}$$

$$= 2e^{0.5x} + 6e^{-0.5x}$$

③ $\int (4 \sin 5x - 5 \cos 4x)\, dx$

الحل:

$$= \frac{-4}{5} \cos 5x - \frac{5}{4} \sin 4x + C$$

④ $\int (3 \sec x \tan x - \frac{2}{5x})\, dx$

الحل:

$$= 3 \sec x - \frac{2}{5} \ln |x| + C$$

⑤ $\int (\sqrt{e^x} - \frac{1}{\sqrt{e^x}})^2\, dx$

الحل:

$$= \int e^x - 2 + \frac{1}{e^x}\, dx = \int e^x - 2 + e^{-x}\, dx$$

$$= e^x - 2x - e^{-x} + C$$

⑥ $\int (\sin (5 - 3x) + 2 + 4x^2)\, dx$

الحل:

$$= \frac{-1}{-3} \cos (5 - 3x) + 2x + \frac{4x^3}{3} + C$$

$$= \frac{1}{3} \cos (5 - 3x) + 2x + \frac{4x^3}{3} + C$$

⑦ $\int (e^x + 1)^2\, dx$

الحل:

$$= \int (e^{2x} + 2\, e^x + 1)\, dx$$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} + 2\, e^x + x + C$$

⑧ $\int (e^{4-x} + \sin(4-x) + \cos(4-x))\, dx$

الحل:

$$= \frac{1}{-1} e^{4-x} - \frac{1}{-1} \cos(4-x) + \frac{1}{-1} \sin(4-x) + C$$

$$= -\, e^{4-x} + \cos(4-x) - \sin(4-x) + C$$

---

⑨ $\int \frac{x^4 - 6}{2x}\, dx$

الحل:

$$= \int \left(\frac{x^4}{2x} - \frac{6}{2x}\right) dx = \int \left(\frac{x^3}{2} - \frac{3}{x}\right) dx$$

$$= \frac{x^4}{8} - 3 \ln|x| + C$$

---

⑩ $\int (3 \csc^2(3x+2) + \frac{5}{x})\, dx$

الحل:

$$= \frac{-3}{3} \cot(3x+2) + 5 \ln|x| + C$$

$$= -\cot(3x+2) + 5 \ln|x| + C$$

---

⑪ $\int \frac{e^x + 1}{e^x}\, dx$

الحل:

$$= \int \frac{e^x}{e^x} + \frac{1}{e^x}\, dx = \int 1 + e^{-x}\, dx$$

$$= x - e^{-x} + C = x - \frac{1}{e^x} + C$$

---

⑫ $\int \frac{e^x}{e^x + 4}\, dx$

الحل:

$$(e^x + 4)' = e^x$$

$$= \ln|e^x + 4| + C$$

---

⑬ $\int \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x + 4}\, dx$

الحل:

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$(\frac{1}{2} \sin 2x)' = \cos 2x$$

$$= \int \frac{\cos 2x}{\frac{1}{2} \sin 2x + 4} = \ln|\frac{1}{2} \sin 2x + 4| + C$$

---

⑭ $\int \frac{dx}{5 - \frac{x}{3}}$

الحل:

$$= -3 \ln|5 - \frac{x}{3}| + C$$

---

⑮ $\int \frac{1}{1 - \sin x}\, dx$

الحل:

$$= \int \frac{dx}{1 - \sin x} \times \frac{1 + \sin x}{1 + \sin x}$$

$$= \int \frac{(1 + \sin x)}{1 - \sin^2 x}\, dx$$

$$= \int (\frac{1 + \sin x}{\cos^2 x}) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx$$

$$= \int \sec^2 x + \tan x \sec x\, dx$$

$$= \tan x + \sec x + C$$

---

⑯ $\int \sec^2 x\, (1 + e^x \cos^2 x)\, dx$

الحل:

$$= \int \sec^2 x + \sec^2 e^x \cos^2 x\, dx$$

$$= \int \sec^2 x + \sec^2 e^x \cos^2 x\, dx$$

$$= \int \sec^2 x + \frac{1}{\cancel{\cos^2 x}} e^x \cancel{\cos^2 x}\, dx$$

$$= \int \sec^2 x + e^x\, dx = \tan x + e^x + C$$

---

⑰ $\int (\frac{2}{x} - 2^x)\, dx$

الحل:

$$= 2 \ln|x| - \frac{2^x}{\ln 2} + C$$

---

⑱ $\int \sin 3x \cos 2x\, dx$

الحل:

$$= \int \frac{1}{2} (\sin(3x - 2x) + \sin(3x + 2x))\, dx$$

$$= \int \frac{1}{2} (\sin x + \sin 5x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2} (-\cos x - \frac{1}{5} \cos 5x) + C$$

⑲ $\int \frac{2x+2}{3x^2+9x-1}\,dx$

الحل:

$$(3x^2+9x-1)' = 6x+9 = 3(2x+3)$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{3(2x+3)}{3x^2+9x-1}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln|3x^2+9x-1| + C$$

⑳ $\int \frac{x^2+x+1}{x^2+1}\,dx$

الحل:

$$\begin{array}{r|l} & \;1 \\ \hline x^2+1 & \cancel{x^2}+x+1 \\ & \overset{\ominus}{-}\cancel{x^2}+1 \\ \hline & \quad x \end{array}$$

$$= \int 1 + \frac{x}{x^2+1}\,dx$$

$$= x + \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C$$

㉑ $\int \left(\frac{1+\cos x}{\sin^2 x} + (\sin^2 x\csc x)\right)dx$

الحل:

$$= \int \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \sin^2 x\left(\frac{1}{\sin x}\right)dx$$

$$= \int \csc^2 x + \cot x\csc x + \sin x\,dx$$

$$= -\cot x - \csc x - \cos x + C$$

㉒ $\int (\sec x + \tan x)^2\,dx$

الحل:

$$= \int \sec^2 x + 2\sec x\tan x + \tan^2 x\;\;dx$$

$$= \int \sec^2 x + 2\sec x\tan x + \sec^2 x - 1\,dx$$

$$= \int 2\sec^2 x + 2\sec x\tan x - 1\,dx$$

$$= 2\tan\;x + 2\sec x - x + C$$

㉓ $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx$

الحل:

$$((e^x + e^{-x})' = e^x - e^{-x})$$

$$= \ln|e^x + e^{-x}| + C$$

㉔ $\int \frac{x^2}{x^3-3}\,dx$

الحل:

$$= \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{x^3-3}\,dx = \frac{1}{3}\ln|x^3-3| + C$$

㉕ $\int (9\cos^2 x - \sin^2 x - 6\sin x\cos x)\,dx$

الحل:

$$= \int (9\cos^2 x - (1-\cos^2 x) - 6\left(\frac{1}{2}\right)\sin 2x\,dx$$

$$= \int 10\cos^2 x - 1 - 3\sin 2x\,dx$$

$$= \int 10\left(\frac{1}{2}\right)(1+\cos 2x) - 1 - 3\sin 2x\,dx$$

$$= \int 5 + 5\cos 2x - 1 - 3\sin 2x\,dx$$

$$= \int 4 + 5\cos 2x - 3\sin 2x\,dx$$

$$= 4x + \frac{5}{2}\sin 2x + \frac{3}{2}\cos 2x + C$$

㉖ $\int (\cos^4 x - \sin^4 x)dx$

الحل:

$$= \int (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x)\,dx$$

$$= \int 1(\cos 2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x + C$$

أجد قيمة كل من التكاملات الآتية

㉗ $\int_0^{\pi} 2\cos\frac{1}{2}x\,dx$

الحل:

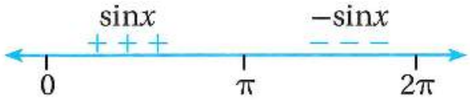
$$= 4\sin\frac{1}{2}x\Big|_0^{\pi} = 4(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0)$$

$$= 4(1-0) = 4$$

㉘ $\int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx$

الحل:

$$\sin x = 0 \longrightarrow x = 0\,,\,\pi\,,\,2\pi$$



$$= \int_0^{\pi} \sin x \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin x \, dx$$

$$= -\cos x \Big|_0^{\pi} + \cos x \Big|_{\pi}^{2\pi}$$

$$= -(\cos \pi - \cos 0) + (\cos 2\pi - \cos\pi)$$

$$= -(-1 - 1) + (1 - (-1) = 2 + 2 = 4$$

---

29 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 3 \tan^2 x \, dx$

الحل:

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 3 \, (\sec^2 x - 1) \, dx$$

$$= 3 \, (\tan \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}) - 3(\tan \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6})$$

$$= 3(2 - \frac{2}{\sqrt{3}}) = 2\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}$$

---

30 $\int_1^e \frac{8x}{x^2 + 1} dx$

الحل:

$$= \int_1^e 4 \, \frac{(2x)}{x^2 + 1} dx \; = 4 \ln (x^2 + 1) \Big|_1^e$$

$$= 4(\ln (e^2 + 1) - \ln 2)$$

---

31 $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x \cos x \, dx$

الحل:

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2} (\sin (3x - x) + \sin (3x + x)) \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2} (\sin 2x + \sin 4x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} (-\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{4} \cos 4x) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{1}{2} [(-\frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{3} - \frac{1}{4} \cos \frac{2\pi}{3}) -$$

$$(-\frac{1}{2} \cos 0 - \frac{1}{4} \cos 0)]$$

$$= \frac{1}{2} [(-\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{4} (-\frac{1}{2}) -(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4})$$

$$= \frac{1}{2} (-\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}) = \frac{5}{16}$$

---

32 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cot^2 x}{1 + \cot^2 x} dx$

الحل:

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}{1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x}{1} dx \; = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} (1 + \cos 2x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \, (x + \frac{1}{2} \sin 2x) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{1}{2} (\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \sin (\frac{2\pi}{3}) - (\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{4}))$$

$$= \frac{1}{2} (\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} (\frac{\sqrt{3}}{2})) - (\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} (1))$$

$$= \frac{1}{2} (\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2})$$

---

33 $\int_0^3 (x - 5^x) \, dx$

الحل:

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{5^x}{\ln 5} \Big|_0^3 = (\frac{9}{2} - \frac{5^3}{\ln 5}) \; - (0 - \frac{1}{\ln 5})$$

$$= (\frac{9}{2} - \frac{124}{\ln 5})$$

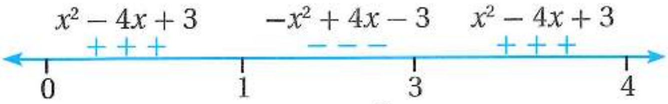
---

34 $\int_0^4 |x^2 - 4x + 3| \, dx$

الحل:

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x - 3) \, (x - 1) = 0 \longrightarrow x = 1 \, , 3$$



$$= \int_0^1 (x^2 - 4x + 3)dx + \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3)dx$$

$$+ \int_3^4 (x^2 - 4x + 3)dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \Big|_0^1 + -\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x \Big|_1^3$$

$$+ \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \Big|_3^4$$

$$= (\frac{1}{3} - 2 + 3) - (0) + (-9 + 18 - 9) - (-\frac{1}{3} + 2 - 3)$$

$$+(\frac{64}{3} - 32 + 12) - (9 - 18 + 9)$$

$$= \frac{4}{3} + 0 + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} - 0 = \frac{12}{3} = 4$$

35 $\int_1^4 (3 - |x - 3|)\, dx$

الحل:

$x - 3 = 0 \longrightarrow x = 3$

$$= \int_1^3 3 - (3 - x)\, dx + \int_3^4 3 - (x - 3)\, dx$$

$$= \int_1^3 x\, dx + \int_3^4 6 - x\, dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\Big|_1^3 + 6x - \frac{x^2}{2}\Big|_3^4$$

$$= (\frac{9}{2} - \frac{1}{2}) + (24 - 8) - (18 - \frac{9}{2})$$

$$= 4 + 16 - \frac{27}{2} = 20 - \frac{27}{2} = \frac{13}{2}$$

36 إذا كان:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & : x < 0 \\ 4 - x & : x \geq 0 \end{cases}$$

فأجد قيمة: $\int_{-1}^1 f(x)\, dx$

الحل:

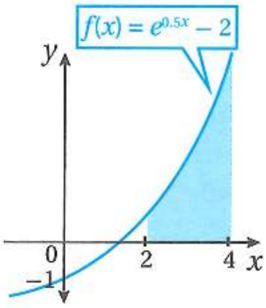
$$\int_{-1}^1 f(x)\, dx = \int_{-1}^0 x^2 + 4\, dx + \int_0^1 4 - x\, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + 4x \Big|_{-1}^0 + 4x - \frac{x^2}{2}\Big|_0^1$$

$$= (0 + 0) - (\frac{-1}{3} - 4) + (4 - \frac{1}{2}) - (0)$$

$$= 0 + \frac{13}{3} + \frac{7}{2} = \frac{26 + 21}{6} = \frac{47}{6}$$

37 أجد مساحة المنطقة المظللة بين المحور x ومنحنى الاقتران $f(x) = e^{0.5x} - 2$ الممثل في الشكل المجاور



الحل:

$$A = \int_2^4 e^{0.5x} - 2\, dx$$

$$= \frac{1}{0.5} e^{0.5x} - 2x \Big|_2^4 = (2e^2 - 8) - (2e - 4)$$

38 إذا كان: $\int_a^{3a} \frac{2x + 1}{x}\, dx = \ln 12$، فأجد قيمة الثابت a حيث: $a > 0$

الحل:

$$\int_a^{3a} \frac{2x + 1}{x}\, dx = \int_a^{3a} (\frac{2x}{x} + \frac{1}{x})\, dx$$

$$= \int_a^{3a} 2 + \frac{1}{x}\, dx = 2x + \ln |x| \Big|_a^{3a}$$

$$= 6a + \ln 3a - (2a + \ln a)$$

$$= 4a + \ln 3a - \ln a = 4a + \ln 3 + \ln a - \ln a$$

$$= 4a + \ln 3 = \ln 12$$

$$4a + \ln 3 = (\ln 4 + \ln 3) \longrightarrow 4a = \ln 4$$

$$\longrightarrow a = \frac{\ln 4}{4}$$

39 أثبت أن: $\int_0^a \frac{x}{x^2 + a^2}\, dx = \ln\sqrt{2}$ حيث: $a \neq 0$

الحل:

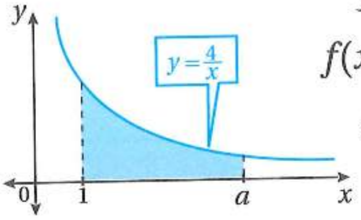
$$\int_0^a \frac{x}{x^2 + a^2}\, dx = \frac{1}{2} \ln (x^2 + a^2) \Big|_0^a$$

$$= \frac{1}{2} (\ln (a^2 + a^2) - \ln a^2)$$

$$= \frac{1}{2} (\ln (2a^2) - \ln a^2) = \frac{1}{2} \ln \frac{2a^2}{a^2}$$

$$= \frac{1}{2} \ln 2 = \ln 2^{\frac{1}{2}} = \ln \sqrt{2}$$

㊵ يبين الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x) = \frac{4}{x}$ إذا كانت مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$ والمحور x والمستقيمين $x = 1$ و $x = a$ هي 10 وحدات مربعة، فأجد قيمة الثابت a



الحل:

$$A = \int_1^a \frac{4}{x}\,dx = 4\ln x\Big|_1^a$$

$$= 4(\ln a - \ln 1) = 4\ln a = 10$$

$$\ln a = \frac{10}{4} = 2.5 \longrightarrow \mathrm{a} = e^{2.5}$$

㊶ إذا كان: $f(x)=\int \cos(\frac{1}{2}x+\pi)\,dx$ ، وكان $f(\pi) = 3$ فأجد $f(0)$

الحل:

$$f(x) = \int \cos(\frac{1}{2}x + \pi)\,dx$$

$$= 2\sin(\frac{1}{2}x + \pi) + C$$

$$f(\pi) = 2\sin(\frac{\pi}{2} + \pi) + C = 3$$

$$= 2\sin\frac{3\pi}{2} + C = 3$$

$$2(-1) + C = 3 \longrightarrow C = 3 + 2 = 5$$

$$f(x) = 2\sin(\frac{1}{2}x + \pi) + 5$$

$$f(0) = 2\sin(0) + 5 = 2(0) + 5 = 5$$

㊷ إذا كان: $y = \int \sin(\frac{\pi}{2} - 2x)\,dx$ وكان $y=1$ عندما $x = \frac{\pi}{4}$ فأثبت أنه يمكن كتابة y في صورة $y = \frac{1 + \sin 2x}{2}$

الحل:

$\sin(\frac{\pi}{2} - 2x) = \cos 2x$ متطابقة

$$y = \int \sin(\frac{\pi}{2} - 2x)\,dx = \int \cos 2x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x + C$$

$$y = 1, \quad x = \frac{\pi}{4}$$

$$\longrightarrow 1 = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} + C$$

$$1 = \frac{1}{2} + C \longrightarrow C = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2} = \frac{\sin 2x + 1}{2}$$

㊸ يمثل الاقتران $\frac{dy}{dx} = e^{2x} - 2e^{-x}$ ميل المماس لمنحنى الاقتران y أجد قاعدة الاقتران y إذا علمت أن منحناه يمر بالنقطة (0,1)

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x} - 2e^{-x}$$

$$dy = (e^{2x} - 2e^{-x})dx$$

$$\int dy = \int(e^{2x} - 2e^{-x})dx$$

$$y = \frac{1}{2}e^{2x} + 2e^{-x} + C$$

$$(0, 1) \longrightarrow 1 = \frac{1}{2} + 2 + C$$

$$C = 1 - 2\frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}e^{2x} + 2e^{-x} - \frac{3}{2}$$

㊹ إذا كان: $\int_{\frac{\pi}{9}}^{\pi}(9 + \sin 3x)\,dx = a\pi + b$ ، فأجد قيمة الثابتين النسبيين: a و b

الحل:

$$\int_{\frac{\pi}{9}}^{\pi}(9 + \sin 3x)\,dx = 9x - \frac{1}{3}\cos 3x\Big|_{\frac{\pi}{9}}^{\pi}$$

$$= (9\pi - \frac{1}{3}\cos 3\pi) - (\pi - \frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{3})$$

$$= (9\pi - \frac{1}{3}(-1)) - \pi + \frac{1}{3}(\frac{1}{2})$$

$$= 9\pi + \frac{1}{3} - \pi + \frac{1}{6}$$

$$= 8\pi + \frac{1}{2} = a\pi + b$$

$$a = 8\,, \quad b = \frac{1}{2}$$

㊺ يمثل الاقتران $f'(x) = \cos^2 x$ ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ أجد قاعدة الاقتران f إذا علمت أن منحناه يمر بنقطة الأصل.

الحل:

$$f'(x) = \cos^2 x$$

$$f(x) = \int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1}{2}\,(1 + \cos 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\,(x + \frac{1}{2}\sin 2x) + C$$

$f(0) = 0$ يمر بنقطة الأصل

$$f(0) = \frac{1}{2}\,(0 + 0) + C = 0$$

$$0 + C = 0 \longrightarrow C = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\,(x + \frac{1}{2}\sin 2x)$$

يتحرك جسيم في مسار مستقيم وتعطى سرعته بالاقتران: $v(t) = e^{-2t}$ حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا كان الموقع الابتدائي للجسيم هو 3m فأجد كلاً مما يأتي:

㊻ موقع الجسيم بعد t ثانية

الحل:

$$s(t) = \int v(t) dt = \int e^{-2t}\, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\, e^{-2t} + C$$

$$s(0) = 3$$

$$s(0) = -\frac{1}{2} + C = 3 \longrightarrow C = \frac{7}{2}$$

$$s(t) = -\frac{1}{2}\, e^{-2t} + \frac{7}{2}$$

㊼ موقع الجسيم بعد 100 ثانية

الحل:

$$s(100) = -\frac{1}{2}\, e^{-200} + \frac{7}{2}$$

بيئة: في دراسة تناولت أحد أنواع الحيوانات المهددة بالانقراض في غابة، تبين أن عدد حيوانات هذا النوع $P(t)$ يتغير بمعدل $P'(t) = -0.51e^{-0.03t}$ حيث t الزمن بالسنوات بعد بدء الدراسة:

㊽ أجد قاعدة الاقتران $P(t)$ عند أي زمن t علماً بأن عدد حيوانات هذا النوع عند بدء الدراسة هو 500 حيوان.

الحل:

$$P'(t) = -0.51e^{-0.03t}$$

$$P(t) = \int -0.51e^{-0.03t}\, dx$$

$$= \frac{-0.51}{-0.03}\, e^{-0.03t} + C = 17\, e^{-0.03t} + C$$

$$P(0) = 500$$

$$P(0) = 17(1) + C = 500 \longrightarrow C = 483$$

$$P(t) = 17e^{-0.03t} + 483$$

㊾ أجد عدد الحيوانات بعد 10 سنوات من بدء الدراسة مقرباً إجابتي إلى أقرب عدد صحيح.

الحل:

$$P(10) = 17e^{-0.3} + 483$$

طب: في تجربة لدواء جديد أعطي لمريض لديه ورم حميد، حجمه 30cm^3 تبين أن حجم الورم بعد t يوماً من بدء التجربة يتغير بمعدل $P'(t) = 0.15 - 0.9e^{0.006t}$ مقيساً بوحدة (cm^3/day)

㊿ أجد قاعدة حجم الورم بعد t يوماً من بدء التجربة

الحل:

$$P'(t) = 0.15 - 0.9e^{0.006t}$$

$$P(t) = \int 0.15 - 0.9e^{0.006t}\, dx$$

$$= 0.15\,t - \frac{0.9}{0.006}\,e^{0.006t} + C$$

$$= 0.15\,t - 150\,e^{0.006t} + C$$

$$P(0) = 30$$

$$P(0) = 0 - 150(1) + C = 30$$

$$C = 180$$

$$P(t) = \ 0.15\,t - 150\,e^{0.006t} + 180$$

(51) أجد حجم الورم بعد 10 أيام من بدء التجربة

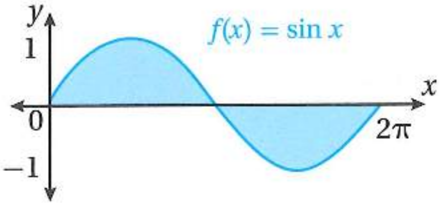
الحل:

$$P(10) = 1.5 - 150\,e^{0.06} + 180$$

$$= 181.5 - 150\,e^{0.06}$$

تبرير: أجد مساحة المنطقة المظللة في كل من التمثيلين البيانيين الآتيين، مبرراً إجابتي:

(52)



الحل:

$$\sin x = 0 \longrightarrow x = 0\,,\,\pi\ ,\,2\pi$$

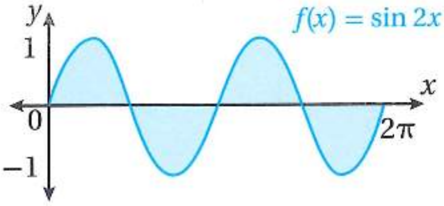
$$A = \int_0^{\pi} \sin x\,dx + -\int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,dx$$

$$= -\cos x\Big|_0^{\pi} + \cos\pi\Big|_{\pi}^{2\pi}$$

$$= -(-1-1) + (1-(-1))$$

$$= 2 + 2 = 4$$

(53)



الحل:

$$\sin 2x = 0 \longrightarrow 2x = 0\,,\,\pi\ ,\,2\pi\,,\,3\pi\,,\,4\pi$$

$$x = 0\,,\,\frac{\pi}{2}\,,\,\pi\,,\,\frac{3\,\pi}{2}\,,\,2\pi$$

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx + -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2x\,dx + \int_{\pi}^{3\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx$$

$$+ -\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin 2x\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\cos 2x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$-\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} + \frac{1}{2}\cos 2x\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}$$

$$= -\frac{1}{2}(-1-1) + \frac{1}{2}(1-(-1)) + -\frac{1}{2}(-1-1)$$

$$+ \frac{1}{2}(1-(-1))$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

تحدٍ: أجد كلاً من التكاملات الآتية:

(54) $\displaystyle\int \frac{\sec x}{\sin x - \cos x}\,dx$

الحل:

$$= \int \frac{\sec x}{\sin x - \cos x} \times \frac{\sec x}{\sec x}\,dx$$

$$= \int \frac{\sec^2 x}{\sin x\,.\,\sec x - \cos x \sec x}\,dx$$

$$= \int \frac{\sec^2 x}{\tan x - 1}\,dx = \ln|\tan x - 1| + C$$

(55) $\displaystyle\int \frac{\cot x}{2 + \sin x}\,dx$

الحل:

$$= \int \frac{\cot x}{2 + \sin x} \times \frac{\csc x}{\csc x}\,dx$$

$$= \int \frac{\cot x \csc x}{2\csc x + \sin x \csc x}\,dx$$

$$= \int \frac{\cot x\,.\,\csc x}{2\csc x + 1}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|2\csc x + 1| + C$$

(56) $\displaystyle\int \frac{1}{x \ln x^3}\,dx$

الحل:

$$= \int \frac{1}{x\,(3\ln x)}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x \ln x}\,dx$$

حيث $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$$= \frac{1}{3} \ln |\ln x| + C$$

---

57 تبرير: إذا كان: $\int_1^a (\frac{1}{x} - \frac{1}{2x+3})\, dx = 0.5 \ln 5$

فأجد قيمة الثابت a حيث: $a > 0$

الحل:

$$\int_1^a (\frac{1}{x} - \frac{1}{2x+3})dx = \ln |x| - \frac{1}{2} \ln |2x+3| \Big|_1^a$$

$$= (\ln a - \frac{1}{2} \ln (2a+3)) - (\ln 1 - \frac{1}{2} \ln 5)$$

$$= \ln a - \frac{1}{2} \ln (2a+3) + \frac{1}{2} \ln 5$$

$$= \ln a - \ln (2a+3)^{\frac{1}{2}} + \ln 5^{\frac{1}{2}}$$

$$= \ln \frac{a(5)^{\frac{1}{2}}}{(2a+3)^{\frac{1}{2}}} = 0.5 \ln 5$$

$$\ln \frac{a(5)^{\frac{1}{2}}}{(2a+3)^{\frac{1}{2}}} = \ln 5^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{a(5)^{\frac{1}{2}}}{(2a+3)^{\frac{1}{2}}} = 5^{\frac{1}{2}} \longrightarrow \frac{a}{(2a+3)^{\frac{1}{2}}} = 1$$

$$\frac{a^2}{2a+3} = 1 \longrightarrow a^2 = 2a+3$$

$$a^2 - 2a - 3 = 0$$

$$(a-3)\,(a+1) = 0$$

$$a = -1\,, a = 3 \longrightarrow a = 3$$

---

58 تبرير: أثبت بطريقتين مختلفتين أن:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cos 3x\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \sin 3x\, dx = 0$$

الحل:

$$1)\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 4x) - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x)\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \cancel{\cos 2x} + \frac{1}{2} \cos 4x - \frac{1}{2} \cancel{\cos 2x} + \frac{1}{2} \cos 4x\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 4x\, dx = \frac{1}{4} \sin 4x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{4} (\sin \pi - \sin 0) = \frac{1}{4} (0 - 0) = 0$$

---

2) نجد كل تكامل لوحده

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\ \cos 3x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 4x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2} [\frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{4} \sin 4x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} (\frac{1}{2} (1) + 0\,) - (0) = \frac{1}{4}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \sin 3x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2} [\frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{4} \sin 4x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} (\frac{1}{2} (1) - 0\,) - (0) = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

---

59 تبرير: إذا كان

$$\int_{\frac{\pi}{4k}}^{\frac{\pi}{3k}} (1 - \pi \sin kx)\, dx = \pi(7 - 6\sqrt{2})$$

فأجد قيمة الثابت k مبرراً إجابتي

الحل:

$$\int_{\frac{\pi}{4k}}^{\frac{\pi}{3k}} (1 - \pi \sin kx)\, dx = (\frac{\pi}{3k} - \frac{\pi}{4k}) + \frac{\pi}{k} \cos kx$$

$$=(\frac{4\pi - 3\pi}{12k}) + \frac{\pi}{k} (\cos k\,(\frac{\pi}{3k}) - \cos k\,(\frac{\pi}{4k}))$$

$$= \frac{\pi}{12k} - \frac{\pi}{k} (\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$= \frac{\pi}{12k} - \frac{\pi}{k} (\frac{1 - \sqrt{2}}{2})$$

$$= \frac{\pi + 6\pi - \pi\, 6\sqrt{2}}{12k} = \pi\,(7 - 6\sqrt{2})$$

$$\frac{7 - 6\sqrt{2}}{12k} = 7 - 6\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{12k} = 1 \longrightarrow 12k = 1 \longrightarrow k = \frac{1}{12}$$

تحدٍ: يتحرك جسيم في مسار مستقيم وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران:

$$v(t) = \begin{cases} 2t + 4 & : 0 \leq t \leq 6 \\ 20 - (t-8)^2 & : 6 < t \leq 10 \end{cases}$$

حيث t الزمن بالثواني و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية إذا بدأ الجسيم حركته من نقطة الأصل فأجد كلاً مما يأتي:

(60) موقع الجسيم بعد 5 ثوانٍ من بدء الحركة

الحل:

$$s(5) - s(0) = \int_0^5 2t + 4dt$$

$$= t^2 + 4t\Big|_0^5 = (25 + 20) - 0 = 45$$

(61) موقع الجسيم بعد 9 ثوانٍ من بدء الحركة

الحل:

$$s(9) - s(0) = \int_0^9 v(t)dt$$

$$= \int_0^6 (2t+4)dt + \int_6^9 20 - (t-8)^2\, dt$$

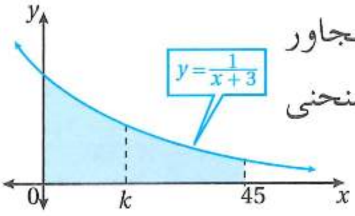
$$= t^2 + 4t\Big|_0^6 + 20\, t - \frac{(t-8)^3}{3}\Big|_6^9$$

$$= (36 + 24) - (0) + (180 - \frac{1}{3}) - (120 + \frac{8}{3})$$

$$= 60 + 180 - \frac{1}{3} - 120 - \frac{8}{3} = 60 + 60 - \frac{9}{3}$$

$$= 120 - 3 = 117$$

(62) **تحدٍ:** يبين الشكل المجاور المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $y = \frac{1}{x+3}$ والمحور x والمستقيمين $x = 45$ و $x = 0$ أجد قيمة k التي تقسم المنطقة المظللة إلى منطقتين متساويتين في المساحة



الحل:

$$\int_0^{45} \frac{1}{x+3}\, dx = \ln|x+3|\Big|_0^{45}$$

$$= \ln 48 - \ln 3 = \ln \frac{48}{3} = \ln 16$$

$$\int_0^k \frac{1}{x+3}\, dx = \ln(x+3)\Big|_0^k$$

$$= \ln(k+3) - \ln 3 = \ln\left|\frac{(k+3)}{3}\right|$$

$$\ln(\frac{k+3}{3}) = \frac{1}{2} \ln 16 = \ln (16)^{\frac{1}{2}} = \ln 4$$

$$\frac{k+3}{3} = 4 \longrightarrow k + 3 = 12 \longrightarrow k = 9$$

كتاب التمارين ص 9

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

① $\int 4e^{-5x} = -\frac{4}{5} e^{-5x} + C$

② $\int (\sin 2x - \cos 2x)\, dx$

الحل:

$$= -\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \sin 2x + C$$

③ $\int \cos^2 2x\, dx$

الحل:

$$= \int \frac{1}{2} (1 + \cos 4x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2} (x + \frac{1}{4} \sin 4x) + C$$

④ $\int \frac{e^x + 4}{e^{2x}}\, dx$

الحل:

$$= \int \frac{e^x}{e^{2x}} + \frac{4}{e^{2x}}\, dx$$

$$= \int e^{x-2x} + 4e^{-2x}\, dx = \int e^{-x} + 4e^{-2x}\, dx$$

$$= -e^{-x} - 2e^{-2x} + C$$

⑤ $\int (\frac{\cos x}{\sin^2 x} - 2e^x)\, dx$

الحل:

$$= \int \csc x \,.\, \cot x - 2e^x\, dx$$

$$= -\csc x - 2e^x + C$$

⑥ $\int (3\cos 3x - \tan^2 x)dx$

الحل:

$$= \int 3\cos 3x - (\sec^2 x - 1)\, dx$$

$$= \frac{3}{3}\sin 3x - \tan x + x + C$$

⑦ $\int \cos x\ (1 + \csc^2 x)dx$

الحل:

$$= \int \cos x + \cos . \csc^2 x\ dx$$

$$= \int \cos x + \cos x\ (\frac{1}{\sin^2 x})\ dx$$

$$= \int \cos x + \cot x\ .\ \csc x\ dx$$

$$= \sin x - \csc x + C$$

⑧ $\int \frac{x^2 + x - 4}{x + 2} dx$

الحل:

$$\begin{array}{rl} & x - 1 \\ \cline{2-2} x + 2\,\big) & \cancel{x^2} + x - 4 \\ & -\cancel{x^2} \overset{\ominus}{+} 2x \\ \cline{2-2} & -\cancel{x} - 4 \\ & \overset{\oplus}{-}\cancel{x} \overset{\oplus}{-} 2 \\ \cline{2-2} & -2 \end{array}$$

$$\int x - 1 + \frac{-2}{x + 2} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - x - 2\ln|x + 2| + C$$

⑨ $\int \frac{1}{\sqrt{e^x}} dx$

الحل:

$$= \int \frac{1}{(e^x)^{\frac{1}{2}}} dx = \int \frac{1}{e^{\frac{x}{2}}} dx$$

$$= \int e^{-\frac{x}{2}} dx = -2e^{-\frac{x}{2}} + C$$

⑩ $\int (\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{x^2})\ dx$

الحل:

$$= \int \sec^2 x\ + x^{-2}\, dx$$

$$= \tan x + \frac{x^{-1}}{-1} + C = \tan x - \frac{1}{x} + C$$

⑪ $\int \frac{x^2 - 2x}{x^3 - 3x^2} dx$

الحل:

$$(x^3 - 3x^2)' = 3x^2 - 6x$$

$$= 3(x^2 - 2x)$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{3(x^2 - 2x)}{x^3 - 3x^2} dx = \frac{1}{3}\ln|x^3 - 3x^2| + C$$

⑫ $\int \ln e^{\cos x}\, dx$

الحل:

$$= \int \cos x\, dx = \sin x + C$$

⑬ $\int \sin^2 \frac{x}{2}\, dx$

الحل:

$$= \int \frac{1}{2}(1 - \cos x)\ dx$$

$$= \frac{1}{2}(x - \sin x)\ + C$$

⑭ $\int \frac{3}{2x - 1} dx$

الحل:

$$= \frac{3}{2}\ln|2x - 1|\ + C$$

⑮ $\int \frac{3 - 2\cos\frac{1}{2}x}{\sin^2 \frac{1}{2}x} dx$

الحل:

$$= \int \frac{3}{\sin^2 \frac{1}{2}x} - \frac{2\cos\frac{1}{2}x}{\sin^2 \frac{1}{2}x} dx$$

$$= \int 3\csc^2 \frac{1}{2}x - 2\cot\frac{1}{2}x\csc\frac{1}{2}x\, dx$$

$$= -6\cot\frac{1}{2}x + 4\csc\frac{1}{2}x + C$$

أجد قيمة كل من التكاملات الآتية

⑯ $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 4} dx$

الحل:

$$= \ln (e^x + 4)\Big|_0^1$$

$$= \ln (e + 4) - \ln (1 + 4) = \ln \frac{e+4}{5}$$

---

17 $$\int_1^2 \frac{dx}{3x-2}$$

الحل:

$$= \frac{1}{3} \ln | 3x - 2 | \Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{3} (\ln (6 - 2) - \ln (3 - 2))$$

$$= \frac{1}{3} (\ln 4 - \ln 1) = \frac{1}{3} \ln 4$$

---

18 $$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos x \, dx$$

الحل:

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} \sin 2x \, dx = -\frac{1}{4} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= -\frac{1}{4} (\cos \frac{2\pi}{3} - \cos 0)$$

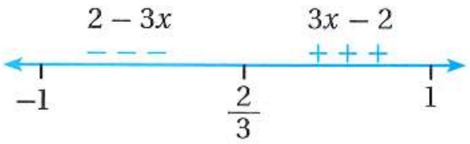
$$= -\frac{1}{4} (-\frac{1}{2} - 1) = \frac{3}{8}$$

---

19 $$\int_{-1}^1 | 3x - 2 | \, dx$$

الحل:

$$3x - 2 = 0 \longrightarrow 3x = 2 \longrightarrow x = \frac{2}{3}$$



$$= \int_{-1}^{\frac{2}{3}} 2 - 3x \, dx + \int_{\frac{2}{3}}^1 3x - 2 \, dx$$

$$= 2x - 3\frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^{\frac{2}{3}} + 3\frac{x^2}{2} - 2x \Big|_{\frac{2}{3}}^1$$

$$= \frac{4}{3} - \frac{2}{3} + 2 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} - 2 - \frac{2}{3} + \frac{4}{3}$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{6}{2} = \frac{4}{3} + 3 = \frac{13}{3}$$

---

20 $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x + 3 \sin x)^2 \, dx$$

الحل:

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x + 6 \cos x \sin x + 9 \sin^2 x$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 - \sin^2 x + 6 (\frac{1}{2} \sin 2x) + 9 \sin^2 x$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 + 8 \sin^2 x + 3 \sin 2x \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 + 8 (\frac{1}{2})(1 - \cos 2x) + 3 \sin 2x \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 5 - 4 \cos 2x + 3 \sin 2x \, dx$$

$$= 5x - 2 \sin 2x - \frac{3}{2} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=(\frac{5\pi}{4} - 2\sin \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2} \cos \frac{\pi}{2}) - (0 + 0 - \frac{3}{2} \cos 0)$$

$$= \frac{5\pi}{4} - 2 - 0 - 0 + \frac{3}{2} = \frac{5\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

---

21 $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx$$

الحل:

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \ln |\cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= -(\ln \frac{1}{\sqrt{2}} - \ln 1) = -\ln \frac{1}{\sqrt{2}} = \ln \sqrt{2}$$

---

22 $$\int_0^{\frac{\pi}{16}} \cos^2 2x - 4\sin^2 x \cos^2 x \, dx$$

الحل:

$$= \int_0^{\frac{\pi}{16}} \cos^2 2x - (2 \sin x \cos x)^2 \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{16}} \cos^2 2x - \sin^2 2x \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{16}} \cos 4x \, dx$$

$$= \frac{1}{4}\sin 4x\Big|_0^{\frac{\pi}{16}} = \frac{1}{4}(\sin\frac{\pi}{4} - \sin 0)$$

$$= \frac{1}{4}(\frac{1}{\sqrt{2}} - 0)$$

㉓ $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}\,dx$$

الحل:

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + 2\sin x + \sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{2\sin x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x + 2\sec x\tan x + \tan^2 x\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x + 2\sec x\tan x + \sec^2 x - 1\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sec^2 x + 2\sec x\tan x \ - 1\,dx$$

$$= 2\tan x + 2\sec x - x\ \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= (2(1) + 2\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}) - (2)$$

$$= 2\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}$$

㉔ $$\int_0^1 \frac{6x}{3x+2}\,dx$$

الحل:

$$\begin{array}{r|l} & \quad 2 \\ \hline 3x+2 & \ \cancel{6x} \\ & \overset{\ominus}{+}\cancel{6x} \overset{\ominus}{+} 4 \\ \hline & \qquad -4 \end{array}$$

$$= \int_0^1 2 - \frac{4}{3x+2}\,dx$$

$$= 2x - \frac{4}{3}\ln|3x+2|\ \Big|_0^1$$

$$= (2 - \frac{4}{3}\ln 5) - (0 - \frac{4}{3}\ln 2)$$

$$= 2 + \frac{4}{3}\ln\frac{2}{5}$$

㉕ إذا كان:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & : x \le 3 \\ 10 - x & : x > 3 \end{cases}$$

فأجد قيمة: $\int_1^5 f(x)\,dx$

الحل:

$$\int_1^5 f(x)\,dx = \int_1^3 2x + 1\,dx + \int_3^5 10 - x\,dx$$

$$= x^2 + x\Big|_1^3 + 10x - \frac{x^2}{2}\Big|_3^5$$

$$= (9+3) - (1+1) + (50 - \frac{25}{2}) - (30 - \frac{9}{2})$$

$$= 12 - 2 + 50 - \frac{25}{2} - 30 + \frac{9}{2}$$

$$= 30 - \frac{16}{2} = 30 - 8 = 22$$

㉖ إذا كان: $\int_1^k \frac{4}{2x-1}\,dx = 1$ فأجد قيمة الثابت k حيث: $k > 0$

الحل:

$$\int_1^k \frac{4}{2x-1}\,dx = 2\ln|2x-1|\Big|_1^k$$

$$= 2(\ln(2k-1) - \ln 1$$

$$= 2\ln(2k-1) = 1$$

$$= \ln(2k-1) = \frac{1}{2}$$

$$= 2k - 1 = e^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 2k = e^{\frac{1}{2}} + 1$$

$$k = \frac{\sqrt{e} + 1}{2}$$

㉗ إذا كان: $\int_0^{\ln a} (e^x + e^{-x})\,dx = \frac{48}{7}$ فأجد قيمة الثابت a حيث: $a > 0$

الحل:

$$\int_0^{\ln a} (e^x + e^{-x}) = dx = e^x - e^{-x}\Big|_0^{\ln a}$$

$$= (e^{\ln a} - e^{-\ln a}) - (1 - 1)$$

$$= a - \frac{1}{a} = \frac{a^2 - 1}{a} = \frac{48}{7}$$

$$48a = 7^2 a - 7 \longrightarrow 7a^2 - 48a - 7 = 0$$

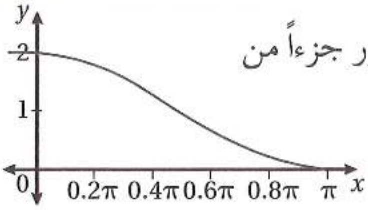
$(7a+1)\,(a-7)=0$

$a=\frac{-1}{7}\,,\,a=7 \longrightarrow a=7$

---

28 يبين الشكل المجاور جزءاً من منحنى الاقتران:

$f(x)=2\cos^2 0.5x$



أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران، والمحورين الإحداثيين الموجبين.

الحل:

$$A=\int_0^{\pi} 2\cos^2 0.5\,x\,dx=\int_0^{\pi} 2(\tfrac{1}{2})(1+\cos x)\,dx$$

$$=x+\sin x\Big|_0^{\pi}=(\pi+\sin\pi)-(0+\sin 0)$$

$$=\pi-0=\pi$$

يمثل الاقتران $f'(x)$ في كل مما يأتي ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ المار بالنقطة المعطاة. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$

29 $f'(x)=e^{-x}+x^2\,;\,(0,\,4)$

الحل:

$$f(x)=\int e^{-x}+x^2\,dx$$

$$=-e^{-x}+\frac{x^3}{3}+C$$

$$f(0)=-1+0+C=4 \longrightarrow C=5$$

$$f(x)=-e^{-x}+\frac{x^3}{3}+5$$

---

30 $f'(x)=\frac{3}{x}-4\,;\,(1,\,0)$

الحل:

$$f(x)=\int\frac{3}{x}-4\,dx=3\ln x-4x+C$$

$$f(1)=3\ln 1-4+C=0$$

$$0-4+C=0 \longrightarrow C=4$$

$$f(x)=3\ln x-4x+4$$

يتحرك جسيم في مسار مستقيم وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t)=\frac{-t}{1+t^2}$ حيث t الزمن بالثواني و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية:

31 أجد إزاحة الجسيم في الفترة $[0\,,3]$

الحل:

$$\int_0^3\frac{-t}{1+t^2}\,dt=\frac{-1}{2}\ln(1+t^2)\Big|_0^3$$

$$=\frac{-1}{2}(\ln(10)-\ln 1)=\frac{-1}{2}\ln 10$$

---

32 أجد المسافة الكلية التي قطعها الجسيم في الفترة $[0\,,3]$

لأن $v(t)\geq 0$ في $[0\,,3]$ لذلك تكون

المسافة $=\int_0^3\frac{t}{1+t^2}=\frac{1}{2}\ln 10$

يتحرك جسيم في مسار مستقيم وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t)=6\sin 3t$ حيث t الزمن بالثواني و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية:

33 أجد إزاحة الجسيم في الفترة $[0\,,\frac{\pi}{2}]$

الحل:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 6\sin 3\,t\,dt=-2\cos 3t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-2(\cos\frac{3\pi}{2}-\cos 0)=-2\,(0-1)=2$$

---

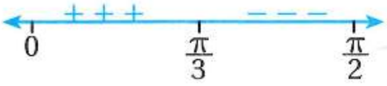
34 أجد المسافة الكلية التي قطعها الجسيم في الفترة $[0\,,\frac{\pi}{2}]$

الحل:

$$6\sin 3\,t=0 \longrightarrow \sin 3t=0$$

$$3t=0\,,\,\pi\ \,,\,2\pi$$

$$t=0\,,\frac{\pi}{3}\,,\frac{2\pi}{3}$$



المسافة $=\int_0^{\frac{\pi}{3}} 6\sin 3\,t\,dt+-\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 6\sin 3\,t\,dt$

$$=-2\cos 3t\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}+2\cos 3t\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -2(\cos\pi - \cos 0) + 2(\cos\frac{3\pi}{2} - \cos\pi)$$

$$= -2(-1-1) + 2(0) - 2(-1))$$

$$= 4 + 2 = 6$$

---

35 يتحرك جسيم في مسار مستقيم وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران:

$$v(t) = \begin{cases} 8t - t^2 & : 0 \le t \le 6 \\ 15 - \frac{1}{2}t & : t > 6 \end{cases}$$

حيث t الزمن بالثواني وv سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية إذا انطلق الجسيم من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد 40 ثانية من بدء الحركة.

الحل:

$$s(40) = \int_0^{40} v(t)dt$$

$$= \int_0^6 8t - t^2\,dt + \int_6^{40} 15 - \frac{1}{2}t\,dt$$

$$= 4t^2 - \frac{t^3}{3}\Big|_0^6 + 15\,t - \frac{1}{4}t^2\Big|_6^{40}$$

$$= (144 - 72) - (0) + (600 - 400) - (90 - 9)$$

$$= 72 + 200 - 81 = 191$$

الدرس الثاني

التكامل بالتعويض

القاعدة الأساسية في التكامل بالتعويض عندما يكون التكامل على الصورة

مفهوم أساسي

$$\int (f(g(x))\, g'(x)\, dx$$

نقوم بفرض $g(x) = u$ ثم نشتقه $\frac{du}{dx} = g'(x)$

ومنه $du = g'(x)\, dx \leftarrow dx = \frac{du}{g'(x)}$

ويمكن مباشرة $dx = \frac{du}{\text{المشتقة}}$

مثال

جد التكاملات:

1) $\int (3x^2 + 5)(x^3 + 5x + 7)^9\, dx$

2) $\int \frac{x^3 + 5}{\sqrt[3]{x^4 + 20x}}\, dx$

3) $\int \sin^4 2x \cos 2x\, dx$

4) $\int (x^2 + 5)e^{x^3 + 15x}\, dx$

5) $\int \frac{4x \ln \sqrt{x^2 + 5}}{x^2 + 5}\, dx$

6) $\int 6x^2\, 3^{x^3 + 7}\, dx$

الحل

1) $\int (3x^2 + 5)(x^3 + 5x + 7)^9\, dx$

نفرض $u = x^3 + 5x + 7 \leftarrow \frac{du}{dx} = 3x^2 + 5$

$du = (3x^2 + 5)\, dx \leftarrow dx = \frac{du}{3x^2 + 5}$

بالعودة إلى التكامل

$$\int (3x^2 + 5)u^9\, \frac{du}{3x^2 + 5} = \int u^9\, du$$

$$= \frac{u^{10}}{10} + C = \frac{(x^3 + 5x + 7)^{10}}{10} + C$$

لاحظ الخطوات الأساسية

بدأ بفرض المقدار الذي مشتقه موجودة ثم الاشتقاق وإيجاد dx ثم العودة إلى المقدار والتعويض مكان المقدار الذي فرضناه بـ (u) والتعويض مكان dx بـ $\frac{du}{\text{المشتقة}}$ ثم إجراء التكامل وبعد التكامل نعوض مكان u بالمقدار الذي فرضناه

2) $\int \frac{x^3 + 5}{\sqrt[3]{x^4 + 20x}}\, dx = \int (x^3 + 5)\, (x^4 + 20x)^{\frac{-1}{3}}\, dx$

$$u = x^4 + 20x \longrightarrow du = \frac{dx}{4x^3 + 20}$$

$$= \frac{dx}{4(x^3 + 5)} \longrightarrow \int (x^3 + 5)\frac{u^{\frac{-1}{3}} du}{4(x^3 + 5)}$$

$$= \frac{1}{4}\int u^{\frac{-1}{3}} du = \frac{1}{4} \times \frac{3\, u^{\frac{2}{3}}}{2} + C$$

$$= \frac{3}{8}\, (x^4 + 20x)^{\frac{4}{3}} + C$$

---

3) $\int \sin^4 2x \cos 2x\, dx$

$$u = \sin 2x \longrightarrow dx = \frac{du}{2\cos 2x}$$

$$\longrightarrow \int u^4\, \cancel{\cos 2x}\, \frac{du}{\cancel{2\cos 2x}} = \frac{1}{2}\int u^4\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\, \frac{u^5}{5} + C = \frac{1}{10} \sin^5 2x + C$$

---

4) $\int (x^2 + 5)e^{x^3 + 15x}\, dx$

$$u = x^3 + 15x \longrightarrow dx = \frac{du}{3x^2 + 15}$$

$$= \frac{du}{3(x^2+5)} \longrightarrow \int \cancel{(x^2+5)} e^u \frac{du}{3\cancel{(x^2+5)}}$$

$$= \frac{1}{3} \int e^u \, du = \frac{1}{3} e^u + C$$

$$= \frac{1}{3} e^{x^3 + 15x} + C$$

$$5) \int \frac{4x \ln \sqrt{x^2+5}}{x^2+5} dx = \int \frac{4x \ln (x^2+5)^{\frac{1}{2}}}{x^2+5} dx$$

$$= \int 4x(\frac{1}{2}) \frac{\ln (x^2+5)}{x^2+5} dx$$

$$= \int \frac{2x \ln (x^2+5)}{x^2+5} dx$$

$$u = \ln (x^2+5) \longrightarrow \frac{du}{dx} = \frac{2x}{(x^2+5)}$$

$$\longrightarrow dx = \frac{(x^2+5)}{2x} du$$

$$\longrightarrow \int \frac{\cancel{2x}\, u}{\cancel{x^2+5}} \; \frac{\cancel{(x^2+5)}\, du}{\cancel{2x}} = \int u \, . \, du$$

$$= \frac{u^2}{2} + C = \frac{(\ln (x^2+5))^2}{2} + C$$

$$6) \int 6x^2 \, 3^{x^3+7} \, dx$$

$$u = x^3 + 7 \longrightarrow dx = \frac{du}{3x^2}$$

$$\longrightarrow \int 6x^2 \, 3^u \, . \frac{du}{3x^2} = 2 \int 3^u \, du$$

$$= \frac{2}{\ln 3} (3^u) + C = \frac{2}{\ln 3} 3^{x^3+7} \, dx$$

وعندما يكون التكامل محدود نقوم باستبدال الحدود بدلالة u

مثـــال

جد التكاملات

$$1) \int_0^4 \frac{6\,x}{\sqrt{x^2+9}} dx \qquad 2) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x \, e^{\tan x} \, dx$$

$$3) \int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} dx$$

الحـــل

$$1) \int_0^4 \frac{6\,x}{\sqrt{x^2+9}} dx = \int_0^4 6\,x (x^2+9)^{\frac{-1}{2}} \, dx$$

$$x^2 + 9 = u \longrightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

نقوم باستبدال الحدود

عند $x = 0$ وعند $x = 4$

فإن $u = (0)^2 + 9 = 9$ فتكون $u = (4)^2 + 9 = 25$

ليصبح التكامل $\int_9^{25} 6x \, u^{\frac{-1}{2}} \frac{du}{2x}$

$$= 3 \int_9^{25} u^{\frac{-1}{2}} \, dx = 3 \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \Big|_9^{25} = 6\sqrt{u} \Big|_9^{25}$$

$$= 6\,(\sqrt{25} - \sqrt{9}\,) = 6(5-3) = 12$$

$$2) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x \, e^{\tan x} \, dx$$

$$u = \tan x \longrightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x}$$

$x = \frac{\pi}{4}$ $\qquad$ $x = 0$

$u = \tan \frac{\pi}{4} = 1$ $\qquad$ $u = \tan 0 = 0$

$$\int_0^1 \cancel{\sec^2 x} \, e^u \frac{du}{\cancel{\sec^2 x}} = \int_0^1 e^u \, dx$$

$$= e^u \Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$$

3) $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}\, dx$

$u = \sqrt{1+\ln x} \longrightarrow u^2 = 1 + \ln x$

$2u\, du = \frac{1}{x}\, dx \longrightarrow dx = 2u\, x\, du$

$x = e^3$	$x = 1$
$u = \sqrt{1+\ln e^3}$	$u = \sqrt{1+\ln 1}$
$u = \sqrt{1+3} = 2$	$= \sqrt{1+0} = 1$

$$\int_1^2 \frac{2\cancel{u}\,\cancel{x}\,du}{\cancel{x}\,\cancel{u}} = \int_1^2 2\, dx = 2(2-1) = 2$$

قاعدة

$$\int (ax+b)^n\, dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C$$

مثال

جد التكاملات

1) $\int (8x+2)^5\, dx$

2) $\int (6-4x)^2\, dx$

3) $\int 7(1+2x)^5\, dx$

4) $\int_0^5 \frac{14}{\sqrt{1+7x}}\, dx$

5) $\int (9x^2+6x+1)^5\, dx$

6) $\int_6^7 \frac{10}{x^2-10x+25}\, dx$

الحل

1) $\int (8x+2)^5\, dx = \frac{1}{8}\, \frac{(8x+2)^6}{6} + C$

---

2) $\int (6-4x)^2\, dx = \frac{1}{-4}\, \frac{(6-4x)^3}{3} + C$

$= \frac{-1}{12}\, (6-4x)^3 + C$

---

3) $\int 7(1+2x)^5\, dx = \frac{7}{2}\, \frac{(1+2x)^6}{6} + C$

$= \frac{7}{12}\, (1+2x)^6 + C$

4) $\int_0^5 \frac{14}{\sqrt{1+7x}}\, dx = \int_0^5 14\, (1+7x)^{\frac{-1}{2}} dx$

$= \frac{14(1+7x)^{\frac{1}{2}}}{(7)\frac{1}{2}} \Big|_0^5 = 4\sqrt{1+7x}\ \Big|_0^5$

$= 4\,(\sqrt{36} - \sqrt{1}) = 4(6-1) = 20$

---

5) $\int (9x^2+6x+1)^5\, dx = \int ((3x+1)^2)^5\, dx$

$= \int (3x+1)^{10}\, dx = \frac{1}{3}\, \frac{(3x+1)^{11}}{11} + C$

$= \frac{1}{33}\, (3x+1)^{11} + C$

---

6) $\int_6^7 \frac{10}{x^2-10x+25}\, dx = \int_6^7 \frac{10}{(x-5)^2}\, dx$

$= \int_6^7 10(x-5)^{-2}\, dx = 10\, \frac{(x-5)^{-1}}{-1} \Big|_6^7$

$= \frac{-10}{x-5} \Big|_6^7 = (\frac{-10}{2} - \frac{-10}{1})$

$= -5 + 10 = 5$

أتحقَّق من فهمي

صفحة (32) : أجد كلاً من التكاملات الآتية:

a) $\int 4x^2\, \sqrt{x^3-5}\ dx$

الحل:

$= \int 4x^2\, (x^3-5)^{\frac{1}{2}}\, dx$

$u = x^3 - 5 \longrightarrow dx = \frac{du}{3x^2}$

$\longrightarrow \int 4x^2\ (u)^{\frac{1}{2}}\, \frac{dx}{3x^2} = \frac{4}{3} \int u^{\frac{1}{2}}\, du$

$= \frac{4}{3} \times \frac{2\, u^{\frac{3}{2}}}{3} + C$

$= \frac{8}{9}\ (x^3-5)^{\frac{3}{2}}\ + C$

b) $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} dx$

الحل:

$$\sqrt{x} = u \longrightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \longrightarrow dx = 2\sqrt{x}\, du$$

$$= \int \frac{1}{\cancel{2\sqrt{x}}} e^{u} . \cancel{2\sqrt{x}}\, du = \int e^{u}\, du$$

$$= e^{u} + C = e^{\sqrt{x}} + C$$

c) $\int \frac{(\ln x)^3}{x} dx$

الحل:

$$u = \ln x \longrightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \longrightarrow dx = x\, du$$

$$= \int \frac{u^3}{\cancel{x}} \cancel{x}\, du = \int u^3\, du = \frac{u^4}{4} + C$$

$$= \frac{(\ln x)^4}{4} + C$$

d) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$

الحل:

$$u = \ln x \longrightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \longrightarrow dx = x\, du$$

$$= \int \frac{\cos u}{x} \times x\, du = \int \cos u\, du$$

$$= \sin u + C = \sin(\ln x) + C$$

e) $\int \cos^4 5x \sin 5x\, dx$

الحل:

$$u = \cos 5x \longrightarrow dx = \frac{du}{-5\sin 5x}$$

$$= \int u^4 \sin 5x . \frac{du}{-5\sin 5x} = \frac{1}{5} \times \frac{u^5}{-5} + C$$

$$= \frac{-1}{25} \sin^5 5x + C$$

f) $\int x\, 2^{x^2} dx$

الحل:

$$u = x^2 \longrightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$= \int x\, 2^{u} \frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int 2^{u} du = \frac{1}{2\ln 2} 2^{u} + C$$

$$= \frac{1}{2\ln 2} 2^{x} + C$$

لا يقتصر استعمال التكامل بالتعويض على التكاملات التي تحوي اقتران ومشتقته حيث يمكن استخدام التعويض لتبسيط التكامل ويجب كتابة التكامل كاملاً باستخدام المتغير الجديد ويمكن القيام بذلك باستخدام الفرض الأصلي أو استخدام متطابقة مثلثية.

مثـــال

جد التكاملات

1) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx$ **2)** $\int 6x(x-2)^5 dx$

3) $\int 4x(x^2 - 2x + 1)^3 dx$

4) $\int x^3(x^4 - 4x^2 + 4)^5 dx$

الحــل

1) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int x^3(1+x^2)^{\frac{-1}{2}} dx$

$$1 + x^2 = u \longrightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$\Longrightarrow \int x^3 (u)^{\frac{-1}{2}} \frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int x^2 u^{\frac{-1}{2}} du$$

بالرجوع إلى الفرض الأصلي

$$1 + x^2 = u \longrightarrow x^2 = u - 1$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}\int (u-1)\, u^{\frac{-1}{2}} du = \frac{1}{2}\int (u^{\frac{1}{2}} - u^{\frac{-1}{2}})\, du$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2\,u^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{2\,u^{\frac{1}{2}}}{1}\right)+C$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2\,(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{3}-2\,(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\right)+C$$

$$2)\int 6x\,(x-2)^5\,dx$$

$$u=x-2\longrightarrow du=\ dx$$

$$\Rightarrow\int 6x\,(u)^5\,du \qquad u=x-2$$

$$=6\int(u+2)u^5\,du \qquad u+2=x$$

$$=6\int u^6+2\,u^5\,du=6\left(\frac{u^7}{7}+2\,\frac{u^6}{6}\right)+C$$

$$=6\left(\frac{(x-2)^7}{7}+\frac{(x-2)^6}{3}\right)+C$$

$$3)\int 4x(x^2-2x+1)^3\,dx$$

$$=\int 4x\,((x-1)^2)^3\,dx=\int 4x\,(x-1)^6\,dx$$

$$u=x-1\longrightarrow du=\ dx$$

$$=\int x\,u^6\,dx \qquad x=u+1$$

$$=4\int(u+1)u^6\,du\ =4\int(u^7+u^6)du$$

$$=4\left(\frac{u^8}{8}+\frac{u^7}{7}\right)+C$$

$$=4\left(\frac{(x-1)^8}{8}+\frac{(x-1)^7}{7}\right)+C$$

$$4)\int x^3(x^4-4x^2+4)^5\,dx$$

$$=\int x^3\,((x^2-2)^2)^5\,dx=\int x^3\,(x^2-2)^{10}\,dx$$

$$x^2-2=u\longrightarrow dx=\frac{du}{2x}$$

$$=\int x^3\,(u^{10})\,\frac{du}{2x}=\frac{1}{2}\int x^2\,u^{10}\,du$$

$$=\int(u+2)u^{10}\,du=\int u^{11}+2u^{10}\,du$$

$$=\frac{u^{12}}{12}+\frac{2u^{11}}{11}+C$$

$$=\frac{(x^2-2)^{12}}{12}+\frac{2}{11}(x^2-2)^{11}+C$$

مثال

جد التكاملات

$$1)\int(x+2)^3\,(x^2+4x+7)^5\,dx$$

$$2)\int x^5(x^2-2)^6\,dx$$

$$3)\int\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\sin x}}\,dx$$

الحل

$$1)\int(x+2)^3\,(x^2+4x+7)^5\,dx$$

$$x^2+4x+7=u\ \longrightarrow dx=\frac{du}{2x+4}$$

$$=\frac{du}{2(x+2)}$$

$$\int(x+2)^3\,(u)^5\,\frac{du}{2(x+2)}=\frac{1}{2}\int(x+2)^2\,u^5du$$

$$=\frac{1}{2}\int(x^2+4x+4)u^5\,du$$

لكن

$$x^2+4x+7=u$$

$$x^2+4x=u-7$$

$$x^2+4x+4=u-7+4=u-3$$

$$=\frac{1}{2}\int(u-3)u^5\,du$$

$$=\frac{1}{2}\int u^6-3u^5\,du=\frac{1}{2}\left(\frac{u^7}{7}-\frac{3u^6}{6}\right)+C$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{(x^2+4x+7)^7}{7}-\frac{1}{2}(x^2+4x+7)^6\right)+C$$

2) $\int x^5(x^2-2)^6\,dx$

$$x^2-2=u \longrightarrow dx=\frac{du}{2x}$$

$$\longrightarrow \int x^5\,(u)^6\,\frac{du}{2x}=\frac{1}{2}\int x^4\,u^6\,du$$

لكن $x^2-2=u \longrightarrow x^2=u+2$

$$(x^2)^2=(u+2)^2=u^2+4u+4$$

$$\longrightarrow \frac{1}{2}\int (u^2+4u+4)u^6\,du$$

$$=\frac{1}{2}\int (u^8+4u^7+4\,u^6)\,du$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{u^9}{9}+\frac{4u^8}{8}+\frac{4u^7}{7}\right)+C$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{(x^2-2)^9}{9}+\frac{1}{2}(x^2-2)^8+\frac{4}{7}\,(x^2-2)^7\right)+C$$

---

3) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\sin x}}\,dx$

$$u=\sqrt{1+\sin x} \longrightarrow u^2=1+\sin x$$

$$2u\,du=\cos x\,dx \longrightarrow dx=\frac{2u\,du}{\cos x}$$

$\sin 2x=2\sin x\cos x$ متطابقة

$$\int \frac{2\sin x\cos x}{u}\cdot\frac{2u\,du}{\cos x}$$

$=4\int \sin x\,du\ ,\quad \sin x=u^2-1$ لكن

$$=4\int (u^2-1)\,du=4\left(\frac{u^3}{3}-u\right)+C$$

$$=4\left(\frac{(\sqrt{1+\sin x}\,)^3}{3}-\sqrt{1+\sin x}\,\right)+C$$

أتحقَّق من فهمي

صفحة (34) : أجد كلاً من التكاملات الآتية:

a) $\int \frac{x}{\sqrt{1+2x}}\,dx$

الحل:

$$=\int x\,(1+2x)^{\frac{-1}{2}}\,dx$$

$$\sqrt{1+2x}=u \longrightarrow u^2=1+2x$$

$$\longrightarrow 2u\,du=2\,dx \longrightarrow dx=u\,du$$

$$u^2=1+2x \longrightarrow 2x=u^2-1$$

$$x=\frac{1}{2}(u^2-1)$$

$$=\int \frac{\frac{1}{2}(u^2-1)\,\cancel{u}\,du}{\cancel{u}}=\frac{1}{2}\int (u^2-1)\,du$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{u^3}{3}-u\right)+C$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\sqrt{1+2x}}{3}\right)^3-\sqrt{1+2x}\right)+C$$

---

b) $\int x^7(x^4-8)^3\,dx$

الحل:

$$u=x^4-8 \longrightarrow dx=\frac{du}{4\,x^3}$$

$$=\int x^7\,(u^3)\,\frac{du}{4\,x^3}=\frac{1}{4}\int x^4\,u^3\,dx$$

$$=\frac{1}{4}\int (u+8)u^3\,du=\frac{1}{4}\int u^4+8u^3\,du$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{u^5}{5}+\frac{8\,u^4}{4}\right)+C$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{(x^4-8)^5}{5}+2\,(x^4-8)^4\right)+C$$

---

c) $\int \frac{e^{3x}}{(1-e^x)^2}\,dx$

الحل:

$$u=1-e^x \longrightarrow dx=\frac{du}{-\,e^x}$$

$$=\int \frac{e^{3x}}{u^2}\cdot\frac{du}{-\,e^x}=-\int \frac{e^{2x}}{u^2}\,dx$$

$$u=1-e^x \longrightarrow e^x=1-u$$

$$e^{2x} = (e^x)^2 = (1-u)^2 = 1-2u+u^2$$

$$\longrightarrow -\int \frac{1-2u+u^2}{u^2}\,du$$

$$= -\int \frac{1}{u^2} - \frac{2u}{u^2} + \frac{u^2}{u^2}\,du = -\int (u^{-2} - \frac{2}{u} + 1)\,du$$

$$= -(\frac{u^{-1}}{-1} - 2\ln u + u) + C$$

$$= -(\frac{-1}{u} - 2\ln u + u) + C$$

$$= -(\frac{-1}{1-e^x} - 2\ln(1-e^x) + (1-e^x)) + C$$

أتحقّق من فهمي

صفحة (35) : أجد كلاً من التكاملات الآتية:

a) $\int \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}}$

الحل:

$$u = \sqrt[3]{x} \longrightarrow u^3 = x$$

$$3u^2\,du = dx$$

$$\int \frac{3u^2\,du}{u^3+u} = \int \frac{3u^2}{u(u^2+1)}\,du$$

$$= 3\int \frac{u}{u^2+1}\,du \qquad (u^2+1)' = 2u$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2u}{u^2+1}\,du = \frac{3}{2}\ln|u^2+1| + C$$

$$= \frac{3}{2}\ln|(\sqrt[3]{x})^2+1| + C$$

---

b) $\int x\sqrt[3]{(1-x)^2}\,dx$

الحل:

$$1-x = u \longrightarrow \frac{du}{dx} = -1 \longrightarrow dx = -du$$

$$1-u = x$$

$$= \int x\sqrt[3]{u^2}\,(-du) = -\int (1-u)\,(u^{\frac{2}{3}})\,du$$

$$= -\int u^{\frac{2}{3}} - u^{\frac{5}{3}}\,du = -(\frac{3\,u^{\frac{5}{3}}}{5} - \frac{3\,u^{\frac{8}{3}}}{8}) + C$$

$$= -\frac{3}{5}(1-x)^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{8}(1-x)^{\frac{8}{3}} + C$$

مثال

يمثل الاقتران $V(t)$ سعر دونم أرض زراعية بالدينار بعد t سنة من الآن. إذا كان $V'(t) = \frac{0.4t^3}{\sqrt{0.2t^4+8000}}$ هو معدل تغير سعر دونم الأرض، فأجد $V(t)$ علماً بأن سعر دونم الأرض الآن هو JD 5000

الحل

الخطوة (1) : أجد تكامل الاقتران : $V'(t)$

$$V(t) = \int \frac{0.4t^3}{\sqrt{0.2t^4+8000}}\,dt \qquad V(t) = \int V'(t)dt$$

أفترض أن: $u = 0.2t^4 + 8000$ ومن ثم فإن:

$$\frac{du}{dt} = 0.8t^3 \Longrightarrow dt = \frac{du}{0.8t^3}$$

بتعويض $u = 0.2t^4 + 8000$, $dt = \frac{du}{0.8t^3}$

$$V(t) = \int \frac{0.4t^3}{\sqrt{0.2t^4+8000}}\,dt = \int \frac{0.4t^3}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{0.8t^3}$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{\frac{-1}{2}}\,du \qquad \text{بالتبسيط، والصورة الأسية}$$

$$= u^{\frac{1}{2}} + C \qquad \text{تكامل اقتران القوة المضروب في ثابت}$$

$$= \sqrt{u} + C \qquad \text{الصورة الجذرية}$$

$$= \sqrt{0.2t^4+8000} + C \qquad \text{بتعويض } u = 0.2t^4 + 8000$$

الخطوة (2) : أجد ثابت الاقتران C

$$V(t) = \sqrt{0.2t^4+8000} + C \qquad \text{قاعدة الاقتران}$$

بتعويض $t= 0, V(0)=5000$

$$5000 = \sqrt{0.2(0)^4+8000} + C$$

$$5000 = 40\sqrt{5} + C \qquad \text{بالتبسيط}$$

$$C = 5000 - 40\sqrt{5} \qquad \text{بحل المعادلة}$$

إذن اقتران سعر دونم الأرض بعد t سنة من الآن هو:

$$V(t) = \sqrt{0.2t^4+8000} + 5000 - 40\sqrt{5}$$

أتحقّق من فهمي

صفحة (37) : أسعار:

يمثل الاقتران $p(x)$ سعر قطعة (بالدينار) تستعمل في أجهزة الحاسوب، حيث x عدد القطع المبيعة منها بالمئات. إذا كان $p'(x) = \dfrac{-135x}{\sqrt{9+x^2}}$ هو معدل تغير سعر هذه القطعة، فأجد $p(x)$ علماً بأن سعر القطعة الواحدة هو 30 JD عندما يكون عدد القطع المبيعة منها 400 قطعة

الحل:

$$p'(x) = \frac{-135x}{\sqrt{9+x^2}}$$

$$p(x) = \int p'(x)dx = \int \frac{-135x}{\sqrt{9+x^2}}\,dx$$

$$= \int -135x\,(9+x^2)^{\frac{-1}{2}}\,dx$$

$$u = 9+x^2 \quad \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$= \int \frac{-135x}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{2x} = \frac{-135}{2}\int u^{\frac{-1}{2}}\,du$$

$$= \frac{-135}{2} \times \frac{2\,u^{\frac{1}{2}}}{1} + C = -135\sqrt{u} + C$$

$$= -135\sqrt{9+x^2} + C$$

بما أن x بالمئات فيكون 400 قطعة تعني $x = 4$

$$30 = -135\sqrt{9+16} + C$$

$$30 = -135(5) + C \longrightarrow C = 30 + 675 = 705$$

$$p(x) = -135\sqrt{9+x^2} + 705$$

عند وجود $\int \sin^n x \cos^m x$

1)إذا كانت احدى الأسس (1) نفرض الأخرى

2) إذا كانت n,m فرديتان نفرض أي منهما ويفضل الكبرى إن وجد.

3) إذا كانت إحدى الأسس فردية والأخرى زوجية نفرض الزوجية.

4) إذا كانت m,n زوجيتان نستخدم المتطابقات.

مثال

جد التكاملات

1) $\int \sin^5(7x+2)\cos(7x+2)\,dx$

2) $\int \sin^3 5x \cos^3 5x\,dx$

3) $\int \cos^4 3x \sin^3 3x\,dx$

4) $\int \dfrac{1}{\sec^2 x \csc^2 x}\,dx$

الحـــل

1) $\int \sin^5(7x+2)\cos(7x+2)\,dx$

$$u = \sin(7x+2) \longrightarrow dx = \frac{du}{7\cos(7x+2)}$$

$$= \int u^5 \cos(7x+2)\,\frac{du}{7\cos(7x+2)}$$

$$= \frac{1}{7}\int u^5\,du = \frac{1}{7}\,\frac{u^6}{6} + C$$

$$= \frac{1}{42}\sin^6(7x+2) + C$$

---

2) $\int \sin^3 5x \cos^3 5x\,dx$

$$u = \sin 5x \longrightarrow dx = \frac{du}{5\cos 5x}$$

$$= \int u^3 \cos^3 5x\,\frac{du}{5\cos 5x}$$

$$= \frac{1}{5}\int u^3\cos^2 5x\,du$$

$$\sin^2 5x + \cos^2 5x = 1 \longrightarrow \cos^2 5x = 1 - \sin^2 5x$$

$$= \frac{1}{3}\int u^3(1-\sin^2 5x)dx = \frac{1}{3}\int u^3(1-u^2)\,du$$

$$= \frac{1}{3}\int (u^3 - u^5)\,du$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{u^4}{4} - \frac{u^6}{6}\right) + C$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\sin^4 5x}{4} - \frac{\sin^6 5x}{6}\right) + C$$

---

3) $\int \cos^4 3x \sin^3 3x\, dx$

$$u = \cos 3x \longrightarrow dx = \frac{du}{-3\sin 3x}$$

$$= \int u^4 \sin^3 3x \; \frac{du}{-3\sin 3x}$$

$$= \frac{-1}{3}\int u^4 \sin^2 3x\, du$$

$$= \frac{-1}{3}\int u^4(1 - \cos^2 3x)dx$$

$$= \frac{-1}{3}\int u^4(1 - u^2)\, du = \frac{-1}{3}\int (u^4 - u^6)\, du$$

$$= \frac{-1}{3}\left(\frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7}\right) + C$$

$$= \frac{-1}{3}\left(\frac{\cos^5 3x}{5} - \frac{\sin^7 3x}{7}\right) + C$$

---

4) $\int \frac{1}{\sec^2 x \csc^2 x}\, dx = \int \cos^2 x \sin^2 dx$

$$= \int (\sin x \cos x)^2\, dx = \int \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \sin^2 2x\;\, dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1 - \cos 4x)\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x\right) + C$$

مثال

جد التكاملات

1) $\int \sin^3 x\, dx$

2) $\int \cos^4 x \sin^2 x\, dx$

الحل

1) $\int \sin^3 x\, dx = \int \sin^2 x \sin x\, dx$

$$= \int (1 - \cos^2 x) \sin x\, dx$$

$$\cos x = u \qquad dx = \frac{du}{-\sin x}$$

$$= \int (1 - u^2) \sin x \frac{du}{-\sin x}$$

$$= \int (-1 + u^2)\, du$$

$$= -u + \frac{u^3}{3} + C = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

بنفس الطريقة $\int \sin^n x\, dx$, $\int \cos^n x\, dx$ حيث n فردية

---

2) $\int \cos^4 x \sin^2 x\, dx$

$$= \int \cos^2 x \,.\, \cos^2 x \sin^2 x\, dx$$

$$= \int \cos^2 x (\sin x \cos x)^2\, dx = \int \cos^2 x \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2$$

$$= \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)\left(\frac{1}{4}\right)\sin^2 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \underset{(1)}{\sin^2 2x} + \underset{(2)}{\sin^2 2x \cos 2x\, dx}$$

$$(1)\int \sin^2 2x = \int \frac{1}{2}(1 - \cos 4x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x\right)$$

$$(2)\int \sin^2 2x \cos 2x\, dx$$

$$\sin 2x = u \longrightarrow dx = \frac{du}{2\cos 2x}$$

$$= \int u^2 \cos 2x \; \frac{du}{2\cos 2x} = \frac{1}{2}\int u^2\, du$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{u^3}{3}\right) = \frac{1}{6}\sin^3 2x$$

التكامل

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x\right) + \frac{1}{6}\sin^3 2x\right) + C$$

عند وجود $\int \tan^n x \sec^m x$

1)إذا كانت m زوجية نفرض $\tan x$

2) إذا كانت m فردية، n فردية نفرض $\sec x$

مثال

جد التكاملات

1) $\int \tan^4 5x \sec^4 5x \, dx$

2) $\int \tan^3 4x \sec^5 4x \, dx$

الحل

1) $\int \tan^4 5x \sec^4 5x \, dx$

$$\tan 5x = u \longrightarrow dx = \frac{du}{5\sec^2 5x}$$

$$= \int u^4 \sec^4 5x \frac{du}{5\sec^2 5x} = \frac{1}{5}\int u^4 \sec^2 5x \, du$$

$$= \frac{1}{5}\int u^4(\tan^2 5x + 1) = \frac{1}{5}\int u^4(u^2+1)\, du$$

$$= \frac{1}{5}\int (u^6 + u^4)\, du = \frac{1}{5}\int (\frac{u^7}{7} + \frac{u^5}{5}) + C$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{\tan^7 5x}{7} + \frac{\tan^5 5x}{5}\right) + C$$

2) $\int \tan^3 4x \sec^5 4x \, dx$

$$u = \sec 4x \longrightarrow dx = \frac{du}{4\sec 4x \tan 4x}$$

$$= \int \tan^3 4x \, u^5 \frac{du}{4\sec 4x \tan 4x}$$

$$= \frac{1}{4}\int \tan^2 4x \, u^4 \, du$$

$$= \frac{1}{4}\int (\sec^2 4x - 1)\, u^4 \, du = \frac{1}{4}\int (u^2 - 1)\, u^4 \, du$$

$$= \frac{1}{4}\int (u^6 - u^4)\, du = \frac{1}{4}(\frac{u^7}{7} - \frac{u^5}{5}) + C$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{\tan^7 5x}{7} - \frac{\tan^5 5x}{5}\right) + C$$

بنفس الطريقة يتم التعامل مع $\int \cot^n x \csc^m x \, dx$

أتحقَّق من فهمي

صفحة (39) : أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

a) $\int \sin^3 x \, dx$

الحل:

$$\int \sin^3 x = \int \sin^2 x \sin x \, dx$$

$$= \int (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx$$

$$\cos x = u \longrightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$$

$$= \int (1 - u^2) \sin x \frac{du}{-\sin x} = \int (-1 + u^2)\, du$$

$$= -u + \frac{u^3}{3} + C = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

b) $\int \cos^5 x \sin^2 x \, dx$

الحل:

$$\sin x = u \longrightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$= \int \cos^5 x \, u^2 \frac{du}{\cos x} = \int \cos^4 x \, u^2 \, du$$

$$= \int (\cos^2 x)^2 (u^2 \, du) = \int (1 - \sin^2 x)^2 u^2 \, du$$

$$= \int (1 - u^2)^2 u^2 \, du = \int (1 - 2u^2 + u^4) u^2 \, du$$

$$= \int (u^2 - 2u^4 + u^6)\, dx$$

$$= \frac{u^3}{3} - 2\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + C$$

$$= \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{\sin^7 x}{7} + C$$

أتحقَّق من فهمي

صفحة (41) : أجد كلاً من التكاملات الآتية:

a) $\int \tan^4 x \, dx$

الحل:

$$= \int \tan^2 x \, . \tan^2 x \, dx$$

$$= \int (\sec^2 x - 1)\tan^2 x \, dx$$

$$= \int \underbrace{\sec^2 x \tan^2 x}_{(1)} \; - \underbrace{\tan^2 x}_{(2)} \, dx$$

$$(1) \int \sec^2 x \tan^2 x \, dx$$

$$\tan x = u \longrightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x}$$

$$= \int \sec^2 x \, u^2 \frac{du}{\sec^2 x} dx$$

$$= \int u^2 \, du = \frac{u^3}{3} = \frac{\tan^3 x}{3}$$

$$(2) \int \tan^2 x \, dx = \int (\sec^2 x - 1) \, dx$$

$$= \tan x - x$$

$$= \frac{\tan^3 x}{3} + \tan x - x + C$$ التكامل

b) $\int \cot^5 x \, dx$

الحل:

$$= \int \cot^2 x \, . \cot^3 x \, dx$$

$$= \int (\csc^2 x - 1) \cot^3 x \, dx$$

$$= \int \underbrace{-\cot^3 x}_{(1)} \; + \underbrace{\csc^2 x \cot^2 x}_{(2)} \, dx$$

$$(1) \int \cot^3 x \, dx = \int \cot x \, (\cot^2 x) \, dx$$

$$= \int \cot x \, (\csc^2 x - 1) \, dx$$

$$= \int \cot x \csc^2 x - \cot x \, dx$$

$$\cot x = u \longrightarrow dx = \frac{du}{-\csc^2 x}$$

$$= \int u \, . \csc^2 x \, \frac{du}{-\csc^2 x} = -\frac{u^2}{2} = -\frac{\cot^2 x}{2}$$

$$\int \cot x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \ln|\sin x|$$

$$(2) \int \csc^2 x \cot^2 x \, dx$$

$$u = \cot x \quad \longrightarrow dx = \frac{du}{-\csc^2 x}$$

$$= \int \csc^2 x \, u^3 \frac{du}{-\csc^2 x} dx$$

$$= \int -u^3 \, du = -\frac{u^4}{4} = -\frac{\cot^4}{4}$$

التكامل

$$= -(\frac{\cot^2 x}{2} - \ln|\sin x|) + \frac{\cot^4}{4} + C$$

c) $\int \sec^4 x \tan^6 x \, dx$

الحل:

$$\tan x = u \longrightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x}$$

$$= \int \sec^4 x \, u^6 \frac{du}{\sec^2 x} dx = \int \sec^2 x \, u^6 \, du$$

$$= \int (1 + \tan^2 x) \, u^6 \, du = \int (1 + u^2) \, u^6 \, du$$

$$= \int u^6 + u^8 \, du = \frac{u^7}{7} + \frac{u^9}{9} + C$$

$$= \frac{\tan^7 x}{7} + \frac{\tan^9 x}{9} + C$$

أتحقّق من فهمي

صفحة (43) : أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

a) $\int_0^2 x(x+1)^3 \, dx$

الحل:

$$x + 1 = u \longrightarrow dx = du$$

$x = 2$ $\quad\quad$ $x = 0$

$u = 2 + 1 = 3$ $\quad\quad$ $u = 0 + 1 = 1$

$$\int_1^3 x\,u^3\,du = \int_1^3 (u-1)\,u^3\,du$$

$$= \int_1^3 u^4 - u^3\,du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^4}{4}\Big|_1^3$$

$$= (\frac{243}{5} - \frac{81}{4}) - (\frac{1}{5} - \frac{1}{4})$$

$$= (\frac{243}{5} - \frac{1}{5}) - (\frac{81}{4} - \frac{1}{4})$$

$$= \frac{242}{5} - \frac{80}{4} = \frac{968 - 400}{20} = \frac{568}{20} = \frac{142}{5}$$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec x \ \tan x \sqrt{\sec x + 2}\ dx$

الحل:

$u = \sqrt{\sec x + 2} \longrightarrow u^2 = \sec x + 2$

$2u\,du = \sec x \ \tan x\,dx \longrightarrow dx = \dfrac{2u\,du}{\sec x \ \tan x}$

$x = \dfrac{\pi}{3}$ | $x = 0$

$u = \sqrt{2+2} = 2$ | $u = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$

$$\int_{\sqrt{3}}^{2} \sec x \ \tan x\, u \,.\, \frac{2u\,du}{\sec x \ \tan x}$$

$$= \int_{\sqrt{3}}^{2} 2u^2\,du = 2\,\frac{u^3}{3}\Big|_{\sqrt{3}}^{2}$$

$$= \frac{2}{3}\left((2)^3 - (\sqrt{3})^3\right)$$

تكاملات إضافية

جد التكاملات الآتية:

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x - \sin^3 x}\ dx$ 2) $\int \dfrac{\sin^5 x}{\cos^7 x}\,dx$

3) $\int (1 + \cos 2x)^5 \sin x\,dx$

4) $\int (1 + \sin x)^5 \cos^3 x\,dx$

5) $\int (\sin x + \cos x)^5 \cos\ 2x\,dx$

6) $\int (\sec x + \tan x)^5\,(\sec x)\,dx$

الحل

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x - \sin^3 x}\ dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x\,(1 - \sin^2 x)}\ dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x \,.\, \cos^2 x}\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x}\,.|\cos x|\ dx$$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{1}{2}} \cos x\,dx$ لأن $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

$u = \sin x \longrightarrow dx = \dfrac{du}{\cos x}$

$x = \dfrac{\pi}{2}$ | $x = 0$

$u = \sin\dfrac{\pi}{2} = 1$ | $u = \sin 0 = 0$

$$= \int_0^1 u^{\frac{1}{2}} \cos x\,\frac{du}{\cos x} = \frac{2\,u^{\frac{3}{2}}}{3}\Big|_0^1$$

$$= \frac{2}{3}(1 - 0) = \frac{2}{3}$$

---

2) $\int \dfrac{\sin^5 x}{\cos^7 x}\,dx = \int \dfrac{\sin^5 x}{\cos^5 x \,.\, \cos^2 x}\,dx$

$$= \int \tan^5 x \sec^2 x\,dx$$

$u = \tan x \longrightarrow dx = \dfrac{du}{\sec^2 x}$

$$= \int (\sin x + \cos x)^6 (\cos x - \sin x)\, dx$$

$$u = \sin x + \cos x \longrightarrow dx = \frac{du}{\cos x - \sin x}$$

$$\Rightarrow \int u^6 \cancel{(\cos x - \sin x)}\, \frac{du}{\cancel{\cos x - \sin x}}$$

$$= \int u^6\, du = \frac{u^7}{7} + C$$

$$= \frac{(\sin x + \cos x)^7}{7} + C$$

6) $\int (\sec x + \tan x)^5 (\sec x)\, dx$

$$u = \sec x + \tan x$$

$$\longrightarrow dx = \frac{du}{\sec x \,.\, \tan x + \sec^2 x}$$

$$= \frac{du}{\sec x\, (\tan x + \sec x)}$$

$$= \int u^5 \cancel{\sec x}\, \frac{du}{\cancel{\sec x}\,\underbrace{(\tan x + \sec x)}_{u}}$$

$$= \int u^4\, du = \frac{u^5}{5} + C$$

$$= \frac{(\sec x + \tan x)^5}{5} + C$$

تكاملات إضافية

جد التكاملات الآتية:

1) $\int \frac{\sqrt[3]{1 + 3\tan x}}{2 - 2\sin^2 x}\, dx$ **2)** $\int x^2\, \sqrt[3]{x^6 + 2x^{11}}\, dx$

3) $\int \frac{(2x+3)^7}{x^9}\, dx$ **4)** $\int \frac{x^5}{(x+2)^7}\, dx$

5) $\int \frac{(1+\sqrt{x}\,)^7}{x^5}\, dx$ **6)** $\int \frac{(x^2+1)^5}{x^{13}}\, dx$

الحل

1) $\int \frac{\sqrt[3]{1 + 3\tan x}}{2 - 2\sin^2 x}\, dx = \int \frac{(1 + 3\tan x)^{\frac{1}{3}}}{2(1 - \sin^2 x)}\, dx$

$$\int u^5 \sec^2 x\, \frac{du}{\sec^2 x} = \int u^5\, du$$

$$= \frac{u^6}{6} + C = \frac{\tan^6 x}{6} + C$$

3) $\int (1 + \cos 2x)^5 \sin x\, dx$

$$= \int (1 + 2\cos^2 x - 1)^5 \sin x\, dx$$

$$= \int (2\cos^2 x)^5 \sin x\, dx = \int 32 \cos^{10} x \sin x\, dx$$

$$u = \cos x \longrightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$$

$$= 32 \int u^{10} \cancel{\sin x}\, \frac{du}{-\cancel{\sin x}} = -32\, \frac{u^{11}}{11} + C$$

$$= \frac{-32}{11} \cos^{11} x + C$$

4) $\int (1 + \sin x)^5 \cos^3 x\, dx$

$$1 + \sin x = u \longrightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$= \int u^5 \cos^3 x\, \frac{du}{\cos x} = \int u^5 \cos^2 x\, du$$

$$\sin x = u - 1 \longrightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$1 - (u-1)^2 = 1 - (u^2 - 2u + 1)$$

$$= -u^2 + 2u$$

$$\Rightarrow \int u^5 (-u^2 + 2u)\, du = \int -u^7 + 2\, u^6\, du$$

$$= -\frac{u^8}{8} + \frac{2u^7}{7} + C$$

$$= \frac{-(1 + \sin x)^8}{8} + \frac{2}{7} (1 + \sin x)^7 + C$$

5) $\int (\sin x + \cos x)^5 \cos 2x\, dx$

$$\downarrow$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\downarrow$$

$$(\cos x - \sin x)\, (\cos x + \sin x)$$

$$u = \frac{x}{x+2} \longrightarrow \frac{du}{dx} = \frac{(x+2)\,(1) - x\,(1)}{(x+2)^2}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{2}{(x+2)^2} \longrightarrow dx = \frac{(x+2)^2}{2}\, du$$

$$= \int (u)^5 \frac{1}{\cancel{(x+2)^2}} \cdot \frac{\cancel{(x+2)^2}}{2}\, du$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{u^6}{6} + C = \frac{1}{12}\left(\frac{x}{x+2}\right)^6 + C$$

5) $\int \frac{(1+\sqrt{x}\,)^7}{x^5}\, dx$

$$\sqrt{x} = u \longrightarrow x = u^2 \longrightarrow dx = 2u\, du$$

$$= \int \frac{(1+u)^7}{(u^2)^5}\,(2u\, du) = \int \frac{(1+u)^7}{u^{10}}\, 2u\, du$$

$$= 2\int \frac{(1+u)^7}{u^9}\, du = 2\int \frac{(1+u)^7}{u^7 \,.\, u^2}\, du$$

$$= 2\int \left(\frac{1+u}{u}\right)^7 \left(\frac{1}{u^2}\right) du$$

$$= 2\int \left(\frac{1}{u}+1\right)^7 \left(\frac{1}{u^2}\right) du$$

$$L = \frac{1}{u} + 1 \quad , \quad \frac{dL}{du} = \frac{-1}{u^2} \longrightarrow du = -u^2\, dL$$

$$= 2\int L^7 \left(\frac{1}{u^2}\right)(-u^2)\, dL = -2\int L^7\, dL$$

$$= -2\, \frac{L^8}{8} + C = \frac{-1}{4}\left(\frac{1}{u} + 1\right)^8 + C$$

$$= \frac{-1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 1\right)^8 + C$$

6) $\int \frac{(x^2+1)^5}{x^{13}}\, dx = \int \frac{(x^2+1)^5}{x^{10} \,.\, x^3}\, dx$

$$= \int \frac{(x^2+1)^5}{(x^2)^5} \times \frac{1}{x^3}\, dx = \int \left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^5 \left(\frac{1}{x^3}\right) dx$$

$$= \int \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^5 \left(\frac{1}{x^3}\right) dx$$

$$u = 1 + \frac{1}{x^2} \longrightarrow \frac{du}{dx} = \frac{-(2x)}{x^4} = \frac{-2}{x^3}$$

$$\longrightarrow dx = \frac{x^3}{-2}\, du$$

$$= \int \frac{(1+3\tan x)^{\frac{1}{3}}}{2\cos^2 x}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (1+3\tan x)^{\frac{1}{3}} \,.\, \sec^2 x\, dx$$

$$1 + 3\tan x = u \longrightarrow dx = \frac{du}{3\sec^2 x}$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{3}}\, \cancel{\sec^2 x}\, \frac{du}{3\,\cancel{\sec^2 x}} = \frac{1}{6}\int u^{\frac{1}{3}}\, du$$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{3\, u^{\frac{4}{3}}}{4} + C = \frac{1}{8}\,(1 + 3\tan x)^{\frac{1}{3}} + C$$

2) $\int x^2 \sqrt[3]{x^6 + 2x^{11}}\, dx = \int x^2 \sqrt[3]{\;x^6\,(1+2x^5)\;}\, dx$

$$= \int x^2 \,.\, x^2\,(1+2x^5)^{\frac{1}{3}}\, dx = \int x^4 (1+2x^5)^{\frac{1}{3}}\, dx$$

$$1 + 2x^5 = u \longrightarrow dx = \frac{du}{10x^4}$$

$$= \int x^4 (u)^{\frac{1}{3}} \frac{du}{10x^4} = \frac{1}{10}\int u^{\frac{1}{3}}\, du$$

$$= \frac{1}{10} \times \frac{3\, u^{\frac{4}{3}}}{4} + C = \frac{3}{40}\,(1+2x^5)^{\frac{4}{3}} + C$$

3) $\int \frac{(2x+3)^7}{x^9}\, dx = \int \frac{(2x+3)^7}{x^7 \,.\, x^2}\, dx$

$$= \int \frac{1}{x^2}\left(\frac{2x+3}{x}\right)^7 dx = \int \frac{1}{x^2}\left(\frac{2x}{x} + \frac{3}{x}\right)^7 dx$$

$$= \int \frac{1}{x^2}\left(2 + \frac{3}{x}\right)^7 dx$$

$$2 + \frac{3}{x} = u \longrightarrow \frac{-3}{x^2} = \frac{du}{dx} \longrightarrow dx = \frac{x^2}{-3}\, du$$

$$= \int \frac{1}{\cancel{x^2}}\,(u)^7 \left(-\frac{\cancel{x^2}}{3}\right) du = \frac{-1}{3} \times \frac{u^8}{8} + C$$

$$= \frac{-1}{24}\left(2 + \frac{3}{x}\right)^8 + C$$

4) $\int \frac{x^5}{(x+2)^7}\, dx = \int \frac{x^5}{(x+2)^2\,(x+2)^5}\, dx$

$$= \int \left(\frac{x}{x+2}\right)^5 \times \frac{dx}{(x+2)^2}$$

$$=\int u^5\left(\frac{1}{x^3}\right)\left(\frac{x^3}{-2}\right)du$$

$$=\frac{-1}{2}\int u^5\,du=\frac{-1}{2}\left(\frac{u^6}{6}\right)+C$$

$$=\frac{-1}{12}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^6+C$$

تكاملات إضافية

جد التكاملات الآتية:

1) $\int\frac{1}{x^2+2x-3}\sqrt{\frac{x+3}{x-1}}\,dx$

2) $\int\frac{x}{1+x\tan x}\,dx$

3) $\int\frac{\sqrt{x^2+x^4}}{x^5}\,dx$

4) $\int\tan x\ln\sec x\,dx$

5) $\int(x^8-4x)^6\,dx$

6) $\int x^8\left(\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x}\right)^4dx$

7) $\int\sin x\left(\cot x-\frac{1}{\sec^2 x}\right)dx$

8) $\int\frac{2x-1}{\tan^2 x\,(x^2-x+2)}\,dx$

الحل

1) $\int\frac{1}{x^2+2x-3}\sqrt{\frac{x+3}{x-1}}\,dx$

$$=\int\frac{1}{x^2+2x-3}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$u=\frac{x+3}{x-1}\longrightarrow\frac{du}{dx}=\frac{(x-1)(1)-(x+3)(1)}{(x-1)^2}$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{-4}{(x-1)^2}\longrightarrow dx=\frac{(x-1)^2}{-4}du$$

$$=\int\frac{1}{(x+3)\,(x-1)}\,.\,u^{\frac{1}{2}}\,.\,\frac{(x-1)^2}{-4}du$$

$$=\frac{-1}{4}\int\frac{x-1}{x+3}\,.\,u^{\frac{1}{2}}\,du$$

$$=\frac{-1}{4}\int\frac{1}{u}\,.\,u^{\frac{1}{2}}\,du=\frac{-1}{4}\int u^{\frac{-1}{2}}du$$

$$=\frac{-1}{4}\times\frac{2\,u^{\frac{1}{2}}}{1}+C=\frac{-1}{2}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}}+C$$

---

2) $\int\frac{x}{1+x\tan x}\,dx=\int\frac{x}{1+x\,\frac{\sin x}{\cos x}}\,dx$

$$=\int\frac{x}{\frac{\cos x+x\sin x}{\cos x}}dx=\int\frac{x\cos x}{\cos x+x\sin x}dx$$

$u=\cos x+x\sin x\longrightarrow$

$$\frac{du}{dx}=-\cancel{\sin x}+x\cos x+\cancel{\sin x}\longrightarrow$$

$$dx=\frac{du}{x\cos x}$$

$$=\int\frac{x\cos x}{u}\,.\,\frac{du}{x\cos x}=\int\frac{1}{u}\,du$$

$$=\ln|u|+C=\ln|\cos x+x\sin x|+C$$

---

3) $\int\frac{\sqrt{x^2+x^4}}{x^5}\,dx=\int\frac{\sqrt{x^4\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}}{x^5}dx$

$$=\int\frac{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)^{\frac{1}{2}}}{x^5}dx=\int\frac{1}{x^3}\left(\frac{1}{x^2}+1\right)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$\frac{1}{x^2}+1=u\longrightarrow\frac{du}{dx}=\frac{-2x}{x^4}=\frac{-2}{x^3}\longrightarrow$$

$$dx=\frac{x^3}{-2}\,du$$

$$=\int\frac{1}{x^3}\,(u)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{-x^3}{-2}\right)du=\frac{-1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}\,du$$

$$=\frac{-1(2)}{2}\,\frac{u^{\frac{3}{2}}}{3}=\frac{-1}{3}\left(\frac{1}{x^2}+1\right)^{\frac{3}{2}}+C$$

---

4) $\int\tan x\ln\sec x\,dx$

$u=\ln\sec x$

$$\frac{du}{dx}=\frac{\cancel{\sec x}\tan x}{\cancel{\sec x}}\longrightarrow dx=\frac{du}{\tan x}$$

$$= \int \tan x \,.\, u \,.\, \frac{du}{\tan x} \;=\; \int u\, du$$

$$= \frac{u^2}{2} + C \;=\; \frac{(\ln \sec x)^2}{2} + C$$

---

5) $$\int (x^8 + 4x)^6\, dx = \int (x(x^7 - 4)^6) dx$$

$$= \int x^6 (x^7 - 4)^6\, dx$$

$$x^7 - 4 = u \;\longrightarrow\; dx = \frac{du}{7\,x^6}$$

$$= \int x^6\, u^6\, \frac{du}{7\,x^6} \;=\; \frac{1}{7}\int u^6\, du$$

$$= \frac{1}{7}\,\frac{u^7}{7} + C = \frac{1}{49}\,(x^7 - 4)^7 + C$$

---

6) $$\int x^8 \left(\frac{2}{x^2} - \frac{3}{x}\right)^4 dx = \int x^8 \left(\frac{2 - 3x}{x^2}\right)^4 dx$$

$$= \int x^8 \frac{(2 - 3x)^4}{x^8}\; dx = \int (2 - 3x)^4\, dx$$

$$= \frac{1}{-3}\;\frac{(2 - 3x)^5}{5} + C = \frac{-1}{15}\,(2 - 3x)^5 + C$$

---

7) $$\int \sin x\,(\cot x + \frac{1}{\sec^2 x})dx$$

$$= \int \sin x\,(\frac{\cos x}{\sin x} \;+\; \cos^2 x)dx$$

$$= \int \cos x \;+ \sin x \cos^2 x\, dx$$

$$\cos x = u \quad\longrightarrow\; dx = \frac{du}{-\sin x}$$

$$= \sin x + \int \sin x\;\; u^2\; \frac{du}{-\sin x}\, dx$$

$$= \sin x - \int u^2\, du \;= \sin x - \frac{u^3}{3} + C$$

$$= \sin x - \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

---

8) $$\int \frac{2x - 1}{\tan^2 x\,(x^2 - x + 2)}\, dx$$

$$u = x^2 - x + 2 \;\longrightarrow\; dx = \frac{du}{2x - 1}$$

$$= \int \frac{2x - 1}{\tan^2(u)}\;\frac{du}{2x - 1}\, dx = \int \cot^2 u\, du$$

$$= \int (\csc^2\; u - 1)\, du \;\; - \cot u - \; u + C$$

$$= -\cot(x^2 - x + 2) - (x^2 - x + 2) + C$$

أتدرّب وأحلّ المسائل

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

① $$\int x^2 (2x^3 + 5)^4\, dx$$

الحل:

$$u = 2x^3 + 5 \longrightarrow\; dx = \frac{du}{6x^2}$$

$$= \int x^2 (u)^4\, \frac{du}{6x^2} \;= \frac{1}{6}\int u^4\, du$$

$$= \frac{1}{6}\,\frac{u^5}{5} + C = \frac{1}{30}\,(2x^3 + 5)^5 + C$$

---

② $$\int x^2 \sqrt{x + 3}\;\; dx$$

الحل:

$$= \int x^2 (x + 3)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$\sqrt{x + 3} = u \longrightarrow u^2 = x + 3 \;\longrightarrow\; 2\,u\,du = dx$$

$$= \int x^2 (x + 3)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= \int x^2\, u \,.\, 2\,u\,du = \int (u^2 - 3)^2\, 2\,u^2\, du$$

$$= \int (u^4 - 6\,u^2 + 9)\,.\,2\,u^2\, du$$

$$= 2\int u^6\; - 6\,u^4\; + 9\,u^2\, du$$

$$= 2(\frac{u^7}{7} - \frac{6u^5}{5} + \frac{9u^3}{3})\; du$$

$$= 2(\frac{(\sqrt{x + 3}\,)^7}{7} - \frac{6}{5}(\sqrt{x + 3}\,)^5 \;+\; 3\,(\sqrt{x + 3}\,)^3\,) + C$$

③ $\int x\,(x+2)^3\,dx$

الحل:

$$x+2=u \longrightarrow dx=du$$

$$=\int x\,u^3\,du \longrightarrow \;=\int (u-2)\,u^3\,du$$

$$=\int u^4-2\,u^3\,du=\frac{u^5}{5}-\frac{2\,u^4}{4}+C$$

$$=\frac{(x+2)^5}{5}-\frac{1}{2}\,(x+2)^4+C$$

④ $\int \frac{x}{\sqrt{x+4}}\;dx$

الحل:

$$u=\sqrt{x+4}\;\longrightarrow u^2=x+4$$

$$\longrightarrow 2\,u\,du\;=du$$

$$=\int \frac{u^2-4}{u}\,.\,2\,u\,du\;=2\int u^2-4\;du$$

$$=2\,(\frac{u^3}{3}-4\,u)+C$$

$$=2\,(\frac{(\sqrt{x+4}\,)^3}{3}-4\sqrt{x+4}\,)+C$$

⑤ $\int \sin x\cos 2x\,dx$

الحل:

$$=\int \sin x\,(2\cos^2-1)\,dx$$

$$\cos x=u\;\longrightarrow\; dx=\frac{du}{-\sin x}$$

$$=\int \sin x\,(2\,u^2-1)\;\frac{du}{-\sin x}$$

$$=\int(-2u^2+1)\,du\;=\frac{-2\,u^3}{3}\;+u+C$$

$$=\frac{-2}{3}\;\cos^3 x+\cos x+C$$

⑥ $\int \frac{e^{3x}}{e^x+1}\,dx$

الحل:

$$u=e^x+1\longrightarrow dx=\frac{du}{e^x}$$

$$=\int \frac{e^{3x}}{u}\,.\,\frac{du}{e^x}=\int \frac{e^{2x}}{u}\,du=\int \frac{(e^x)^2}{u}\,du$$

$$=\int \frac{(u-1)^2}{u}\,du=\int \frac{u^2-2u+1}{u}\,du$$

$$=\int \frac{u^2}{u}-\frac{2u}{u}+\frac{1}{u}\,du=\int u-2+\frac{1}{u}\,du$$

$$=\frac{u^2}{2}-2u+\ln|u|+C$$

$$=\frac{(e^x+1)^2}{2}-2\,(e^x+1)+\ln|\,e^x+1|+C$$

⑦ $\int \sec^4 x\,dx$

الحل:

$$=\int \sec^2 x\,.\,\sec^2 x\,dx=\int (1+\tan^2 x)\,\sec^2 x\,dx$$

$$u=\tan x\;\longrightarrow dx=\frac{du}{\sec^2 x}$$

$$=\int (1+u^2)\,\sec^2 x\;\frac{du}{\sec^2 x}=\int (1+u^2)\,du$$

$$=u+\;\frac{u^3}{3}\;+C\;=\tan x+\frac{\tan^3 x}{3}\;+C$$

⑧ $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}\;dx$

الحل:

$$=\int \tan x\sec^2 x\,dx$$

$$u=\tan x\;\longrightarrow dx=\frac{du}{\sec^2 x}$$

$$=\int u\sec^2 x\;\frac{du}{\sec^2 x}\;=\int u\,du$$

$$=\frac{u^2}{2}+C=\frac{\tan^2 x}{2}\;+C$$

⑨ $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\;dx$

الحل:

$$\ln x=u\;\longrightarrow \frac{du}{dx}=\frac{1}{x}\;\longrightarrow dx=x\,du$$

$$=\int \frac{\sin u}{x}\,.\;x\,du\;=\int \sin u\;du$$

$$=\;-\cos u+C=-\cos\,(\ln x)+C$$

⑩ $\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^2 x}\, dx$

الحل:

$$1+\sin^2 x = u \longrightarrow dx = \frac{du}{2\sin x \cos x}$$

$$= \int \frac{\sin x \cos x}{u} \cdot \frac{du}{2\sin x \cos x}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} \ln |u| + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln |\, 1+\sin^2 x \,| + C$$

⑪ $\int \frac{2e^x - 2e^{-x}}{(e^x+e^{-x})^2}\, dx$

الحل:

$$e^x + e^{-x} = u \longrightarrow dx = \frac{du}{e^x - e^{-x}}$$

$$= \int 2\, \frac{(e^x - e^{-x})}{u^2} \cdot \frac{du}{e^x - e^{-x}}$$

$$= 2\int \frac{1}{u^2} du = 2\int u^{-2}\, du$$

$$= \frac{2u^{-1}}{-1} + C = \frac{-2}{u} + C = \frac{-2}{e^x + e^{-x}} + C$$

⑫ $\int \frac{-x}{(x+1)\sqrt{x+1}}\, dx$

الحل:

$$u = \sqrt{x+1} \longrightarrow u^2 = x+1 \longrightarrow 2u\, du = dx$$

$$= \int \frac{-(u^2-1)}{u^2 \,.\, \cancel{u}} \,.\; 2\cancel{u}\, du = -2\int \frac{u^2-1}{u^2} du$$

$$= -2\int \frac{u^2}{u^2} - \frac{1}{u^2}\, du = -2\int 1 - u^{-2}\, du$$

$$= -2(u - \frac{u^{-1}}{-1}) + C = -2(u + \frac{1}{u}) + C$$

$$= -2\,(\sqrt{x+1} + \frac{1}{\sqrt{x+1}}) + C$$

⑬ $\int x \sqrt[3]{x+10}\, dx$

الحل:

$$u = \sqrt[3]{x+10} \longrightarrow u^3 = x+10 \longrightarrow 3u^2 du = dx$$

$$= \int (u^3-10)(u)(3u^2)\, du = \int (3u^6 - 30u^3)\, du$$

$$= \frac{3u^7}{7} - 30\, \frac{u^4}{4} + C$$

$$= \frac{3}{7}(\sqrt[3]{x+10}\,)^7 - \frac{30}{4}\,(\sqrt[3]{x+10}\,)^4 + C$$

⑭ $\int (\sec^2 \frac{x}{2} \tan^7 \frac{x}{2})\, dx$

الحل:

$$u = \tan \frac{x}{2} \longrightarrow dx = \frac{du}{\frac{1}{2}\sec^2 \frac{1}{2}}$$

$$= \int \sec^2 \frac{x}{2}\, u^7 \frac{du}{\frac{1}{2}\sec^2\frac{1}{2}} = 2\int u^7\, du$$

$$= \frac{2u^8}{8} + C = \frac{1}{4} \tan^8 \frac{x}{2} + C$$

⑮ $\int \frac{\sec^3 x + e^{\sin x}}{\sec x}\, dx$

الحل:

$$= \int \frac{\sec^3 x}{\sec x} + \frac{e^{\sin x}}{\sec x}\, dx$$

$$= \int \sec^2 x + e^{\sin x} \cos x\, dx$$

$$\sin x = u \longrightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$= \tan x + \int e^u \cos x \frac{du}{\cos x} = \tan x + \int e^u\, du$$

$$= \tan x + e^u + C = \tan x + e^{\sin x} + C$$

⑯ $\int (1 + \sqrt[3]{\sin x}\,) \cos^3 x\, dx$

الحل:

$$\sqrt[3]{\sin x} = u \longrightarrow u^3 = \sin x$$

$$3u^2 du = \cos x\, dx \longrightarrow dx = \frac{3u^2 du}{\cos x}$$

$$= \int (1+u) \cos^3 x \frac{3u^2 du}{\cos x}$$

$$= \int (3u^2 + 3u^3)\cos^2 x \;\, du$$

$$= \int (3u^2 + 3u^3)\,(1 - \sin^2 x)du$$

$$= \int (3u^2 + 3u^3)\,(1 - u^6)du$$

$$= \int (3u^2 - 3u^8 + 3u^3 - 3u^9)\; du$$

$$= \frac{3u^3}{3} - \frac{3u^9}{9} + \frac{3u^4}{4} - \frac{3u^{10}}{10} + C$$

$$= (\sqrt[3]{\sin x})^3 - \frac{1}{3}(\sqrt[3]{\sin x})^9 + \frac{3}{4}(\sqrt[3]{\sin x})^4 - \frac{3}{10}(\sqrt[3]{\sin x})^{10} + C$$

---

17 $\int \sin x \sec^5 x \, dx$

الحل:

$$= \int \frac{\sin x}{\cos^5 x}\, dx$$

$$u = \cos x \longrightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$$

$$= \int \frac{\sin x}{u^5}\;\frac{du}{-\sin x} = \int -u^{-5}\, du = \frac{-u^{-4}}{-4} + C$$

$$= \frac{1}{4\,u^4} + C = \frac{1}{4\cos^4 x} + C$$

---

18 $\int \frac{\sin x + \tan x}{\cos^3 x}\, dx$

الحل:

$$= \int \underset{(1)}{\frac{\sin x}{\cos^3 x}} + \underset{(2)}{\frac{\tan x}{\cos^3 x}}\, dx$$

$$(1)\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\, dx$$

$$u = \cos x \longrightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$$

$$= \int \frac{\sin x}{u^3} \,.\, \frac{du}{-\sin x} = \int -u^{-3} du$$

$$= \frac{-u^{-2}}{-2} = \frac{1}{2\,u^2} = \frac{1}{2\cos^2 x}$$

$$(2)\int \frac{\tan x}{\cos^3 x}\, dx = \int \tan x \sec^3 x \, dx$$

$$\sec x = u \longrightarrow dx = \frac{du}{\sec x \tan x}$$

$$= \int \tan x \, u^3 \;\frac{du}{\sec x \tan x}$$

$$= \int u^2\, du = \frac{u^3}{3} = \frac{\sec^3 x}{3}$$

$$= \frac{1}{2\cos^2 x} + \frac{\sec^3 x}{3} + C$$ التكامل

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

19 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \sqrt{1 - \cos^2 2x}\;\, dx$

الحل:

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \sqrt{\sin^2 2x}\;\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \,(\sin 2x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \sin 2x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \,(2\cos x \sin x) dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos x \, dx$$

$$\sin x = u \longrightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

$x = \frac{\pi}{4}$ | $x = 0$

$u = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ | $u = \sin 0 = 0$

$$= 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} u^2 \cancel{\cos x}\; \frac{du}{\cancel{\cos x}} = 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} u^2\, du$$

$$= \frac{2\,u^3}{3}\Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2}{3}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 - 0\right) = \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

---

20 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x^2 \, dx$

الحل:

$$x^2 = u \longrightarrow dx = \frac{du}{2\,x}$$

$x = \frac{\pi}{2}$ | $x = 0$

$u = \frac{\pi^2}{4}$ | $u = 0$

$$=\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} x\sin u\,\frac{du}{2\,x}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi^2}{4}}\sin u\,du$$

$$=-\frac{1}{2}\cos u\Big|_0^{\frac{\pi^2}{4}}=-\frac{1}{2}(\cos\frac{\pi^2}{4}-\cos 0)$$

---

21 $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

الحل:

$u=\sqrt{1+x^2}\longrightarrow u^2=1+x^2$

$2u\,du=2x\,dx\longrightarrow dx=\frac{u\,du}{x}$

$x=1$ | $x=0$

$u=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ | $u=\sqrt{1+0}=1$

$$=\int_1^{\sqrt{2}}\frac{x^3}{u}\cdot\frac{u\,du}{x}=\int_1^{\sqrt{2}}x^2\,du$$

$$=\int_1^{\sqrt{2}}(u^2-1)\,du=(\frac{u^3}{3}-u)\Big|_1^{\sqrt{2}}$$

$$=(\frac{(\sqrt{2})^3}{3}-\sqrt{2})-(\frac{1}{3}-1)$$

$$=(\frac{2\sqrt{2}}{3}-\sqrt{2})-(\frac{-2}{3})=\frac{-\sqrt{2}}{3}+\frac{2}{3}$$

---

22 $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sec^2 x\tan^5 x\,dx$

الحل:

$\tan x=u\longrightarrow dx=\frac{du}{\sec^2 x}$

$x=\frac{\pi}{3}$ | $x=0$

$u=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ | $u=\tan 0=0$

$$=\int_0^{\sqrt{3}}\sec^2 x\;.\;u^5\;.\;\frac{du}{\sec^2 x}=\int_0^{\sqrt{3}}u^5\,du$$

$$=\frac{u^6}{6}\Big|_0^{\sqrt{3}}=\frac{1}{6}((\sqrt{3})^6-0)$$

$$=\frac{1}{6}(27-0)=\frac{27}{6}=\frac{9}{2}$$

---

23 $\int_0^2(x-1)\,e^{(x-1)^2}\,dx$

الحل:

$u=(x-1)^2\longrightarrow dx=\frac{du}{2(x-1)}$

$x=2$ | $x=0$

$u=(2-1)^2=1$ | $u=(0-1)^2=1$

$$=\int_1^1(x-1)\,e^u\cdot\frac{du}{2(x-1)}=\frac{1}{2}\int_1^1 e^u\,du$$

= صفر

---

24 $\int_1^4\frac{\sqrt{2+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

الحل:

$\sqrt{x}=u\quad\longrightarrow\quad\frac{du}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\longrightarrow dx=2\sqrt{x}\,du$

$x=4$ | $x=1$

$u=\sqrt{4}=2$ | $u=\sqrt{1}=1$

$$=\int_1^2\frac{\sqrt{2+u}}{\cancel{\sqrt{x}}}\,.\,2\cancel{\sqrt{x}}\,du=2\int_1^2(2+u)^{\frac{1}{2}}\,du$$

$$=2(2)\frac{(2+u)^{\frac{3}{2}}}{3}\Big|_1^2=\frac{4}{3}((4)^{\frac{3}{2}}-(3)^{\frac{3}{2}})$$

---

25 $\int_0^1\frac{10\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x^3})^2}\,dx$

الحل:

$u=\sqrt{x^3}=x^{\frac{3}{2}}\longrightarrow\frac{du}{dx}=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$

$\longrightarrow dx=\frac{du}{\frac{3}{2}\sqrt{x}}$

$x=1$ | $x=0$

$u=1$ | $u=0$

$$=\int_0^1\frac{10\cancel{\sqrt{x}}}{(1+u)^2}\cdot\frac{du}{\frac{3}{2}\cancel{\sqrt{x}}}=\frac{20}{3}\int_0^1\frac{1}{(1+u)^2}\,du$$

$$= \frac{20}{3}\int_0^1 (1+u)^{-2}\,du$$

$$= \frac{20}{3}\,\frac{(1+u)^{-1}}{-1}\Big|_0^1 = -\frac{20}{3}\left(\frac{1}{1+u}\right)\Big|_0^1$$

$$= -\frac{20}{3}\left(\frac{1}{2}-1\right) = -\frac{20}{3}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{10}{3}$$

26 $$\int_0^{\frac{\pi}{6}} 2^{\cos x}\sin x\,dx$$

الحل:

$$u = \cos x \qquad dx = \frac{du}{-\sin x}$$

$$x = 0 \longrightarrow u = 1$$

$$x = \frac{\pi}{6} \longrightarrow u = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\int_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} 2^u \sin x\,.\,\frac{du}{-\sin x} = \int_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} 2^u\,du$$

$$= -\frac{2^u}{\ln 2}\Big|_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\left(\frac{2^{\frac{\sqrt{3}}{2}}-2}{\ln 2}\right)$$

27 $$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \csc^2 x\cot^5 x\,dx$$

الحل:

$$\cot x = u \longrightarrow dx = \frac{du}{-\csc^2 x}$$

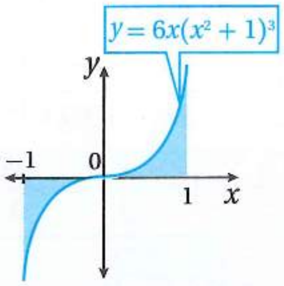
$$\begin{array}{l|l} x = \frac{\pi}{2} & x = \frac{\pi}{4} \\ u = \cot\frac{\pi}{2} = 0 & u = \cot\frac{\pi}{4} = 1 \end{array}$$

$$= \int_1^0 \csc^2 x\,u^5 .\,\frac{du}{-\csc^2 x} = -\int_1^0 u^5\,du$$

$$= \frac{-u^6}{6}\Big|_1^0 = \frac{-1}{6}(0-1) = \frac{1}{6}$$

أجد مساحة المنطقة المظللة في كل من التمثيلات البيانية الآتية

28



الحل:

$$A = -\int_{-1}^0 6x(x^2+1)^3\,dx + \int_0^1 6x(x^2+1)^3\,dx$$

$$x^2 + 1 = u \longrightarrow du = 2x\,dx$$

$$\begin{array}{l|l|l} x = -1 & x = 1 & x = 0 \\ u = 2 & u = 2 & u = 1 \end{array}$$

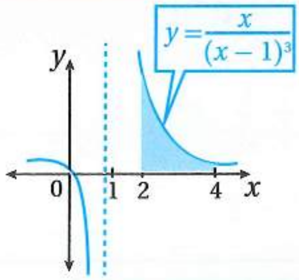
$$A = -\int_2^1 6x\,u^3\,\frac{du}{2x} + \int_1^2 6x\,u^3\,\frac{du}{2x}$$

$$= -3\int_2^1 u^3\,du + 3\int_1^2 u^3\,du$$

$$= 3\int_1^2 u^3\,du + 3\int_1^2 u^3\,du = 2(3)\int_1^2 u^3\,du$$

$$= 6\,\frac{u^4}{4}\Big|_1^2 = \frac{6}{4}(16-1) = \frac{3}{2}(15) = \frac{45}{2}$$

29



الحل:

$$A = \int_2^4 \frac{x}{(x-1)^3}\,dx$$

$$x - 1 = u \longrightarrow dx = du$$

$$\begin{array}{l|l} x = 4 & x = 2 \\ u = 3 & u = 1 \end{array}$$

$$A = \int_1^3 \frac{u+1}{u^3}\,du = \int_1^3 \frac{u}{u^3} + \frac{1}{u^3}\,du$$

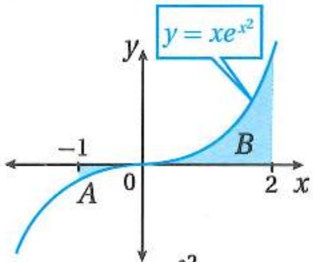
$$= \int_1^3 \frac{1}{u^2} + u^{-3}\,du = \int_1^3 u^{-2} + u^{-3}\,du$$

$$= \frac{u^{-1}}{-1} + \frac{u^{-2}}{-2}\Big|_1^3 = \frac{-1}{u} + \frac{-1}{2u^2}\Big|_1^3$$

$$= (-\frac{1}{3} + \frac{-1}{18}) - (-1 - \frac{1}{2}) = \frac{10}{9}$$

---

⑳30



الحل:

$$A = -\int_{-1}^0 x\,e^{x^2}\,dx + \int_0^2 x\,e^{x^2}\,dx$$

$$x^2 = u \longrightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$\begin{array}{l|l|l} x = 2 & x = 0 & x = -1 \\ u = 4 & u = 0 & u = 1 \end{array}$$

$$A = -\int_1^0 x\,e^u\,\frac{du}{2x} + \int_0^4 x\,e^u\,\frac{du}{2x}$$

$$= -\frac{1}{2}\int_1^0 e^u\,du + \frac{1}{2}\int_0^4 e^u\,du$$

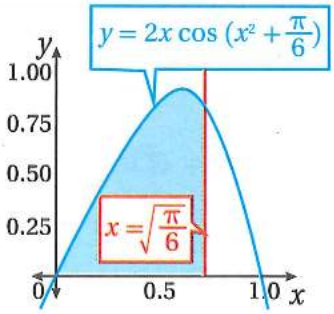
$$= -\frac{1}{2}\,e^u\Big|_1^0 + \frac{1}{2}\,e^u\Big|_0^4$$

$$= -\frac{1}{2}(1 - e) + \frac{1}{2}(e^4 - 1)$$

$$= \frac{1}{2}e + \frac{1}{2}e^4 - 1$$

---

(31)



الحل:

$$A = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{6}}} 2x\cos(x^2 + \frac{\pi}{6})\,dx$$

$$x^2 + \frac{\pi}{6} = u \longrightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$\begin{array}{l|l} x = \sqrt{\frac{\pi}{6}} & x = 0 \\ u = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} & u = 0 + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \end{array}$$

$$A = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 2x\cos u\,\frac{du}{2x} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos u\,du$$

$$= \sin u\,\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = (\sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{6})$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$$

في كل مما يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$ ونقطة يمر بها منحنى $y = f(x)$ أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$

(32) $f'(x) = 2x(4x^2 - 10)^2 \quad ;(2, 10)$

الحل:

$$f(x) = \int 2x(4x^2 - 10)^2\,dx$$

$$u = 4x^2 - 10 \longrightarrow dx = \frac{du}{8x}$$

$$= \int 2x\,u^2\,\frac{du}{8x} = \frac{1}{4}\int u^2\,du$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{u^3}{3} + C = \frac{1}{12}(4x^2 - 10)^3 + C$$

$$f(2) = \frac{1}{12}(6)^3 + C = 10 \longrightarrow 18 + C = 10$$

$$\longrightarrow C = -8$$

$$f(x) = \frac{1}{12}(4x^2 - 10)^3 - 8$$

---

(33) $f'(x) = x^2\,e^{-0.2x^3} \quad ;(0, \frac{3}{2})$

الحل:

$$f(x) = \int x^2\,e^{-0.2x^3}\,dx$$

$$u = -0.2\,x^3 \longrightarrow dx = \frac{du}{-0.6\,x^2}$$

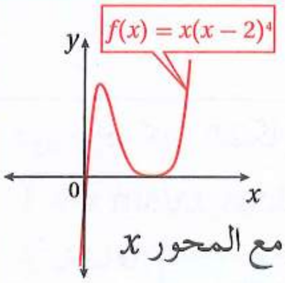
$$= \int x^2\,e^u\,\frac{du}{-0.6\,x^2} = \frac{1}{-0.6}\int e^u\,du$$

$$= \frac{-10}{6} e^{u} + C = \frac{-10}{6} e^{-0.2x^3} + C$$

$$f(0) = \frac{-10}{6}(1) + C = \frac{3}{2}$$

$$C = \frac{3}{2} + \frac{10}{6} = \frac{9+10}{6} = \frac{19}{6}$$

$$f(x) = \frac{-10}{6} e^{-0.2x^3} + \frac{19}{6}$$



يبين الشكل المجاور جزءاً من منحنى الاقتران $f(x)=x(x-2)^4$

㉞ أجد إحداثيي نقطة التماس مع المحور x

الحل:

$$f(x) = x(x-2)^4 = 0 \longrightarrow x = 0 \, , x = 2$$
$$\longrightarrow x = 2$$

㉟ أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$ والمحور x

الحل:

$$A = \int_0^2 x(x-2)^4 \, dx$$

$$x - 2 = u \longrightarrow dx = du$$

$$\begin{array}{l|l} x = 2 & x = 0 \\ u = 0 & u = -2 \end{array}$$

$$A = \int_{-2}^{0} x\,(u)^4 \, du = \int_{-2}^{0} (u+2)\, u^4 \, du$$

$$= 3\int_{-2}^{0} u^5 + 2u^4 du = \frac{u^6}{6} + 2\,\frac{u^5}{5}\Big|_{-2}^{0}$$

$$= (0) - (\frac{64}{6} - \frac{64}{5}) = (\frac{320-384}{30}) = \frac{64}{30}$$

㊱ يتحرك جسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = \sin \omega t \cos^2 \omega t$ ، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية، وω ثابت إذا انطلق الجسيم من قطة الأصل، فأجد موقعه بعد t ثانية.

الحل:

$$v(t) = \sin \omega t \cos^2 \omega t$$

$$s(t) = \int \sin \omega t \cos^2 \omega t \, dt$$

$$u = \cos \omega t \longrightarrow dt = \frac{du}{-\omega \sin \omega t}$$

$$= \int \sin \omega t \, u^2 \frac{du}{-\omega \sin \omega t} = \frac{-1}{\omega} \int u^2 \, du$$

$$= \frac{-1}{\omega} \frac{u^3}{3} + C = \frac{-1}{3\omega} \cos^3 \omega t + C$$

$$s(0) = 0 \longrightarrow s(0) = \frac{-1}{3\omega} + C = 0$$

$$\longrightarrow C = \frac{1}{3\omega}$$

$$s(t) = \frac{-1}{3\omega} \cos^3 \omega t + \frac{1}{3\omega}$$

㊲ طب: يمثل الاقتران $C(t)$ تركيز دواء في الدم بعد t دقيقة من حقنه في جسم مريض، حيث C مقيسة بالمليغرام لكل سنتيمتر مكعب (mg/cm^3) . إذا كان تركيز الدواء لحظة حقنه في جسم المريض $0.5mg/cm^3$ وأخذ يتغير بمعدل $C'(t) = \frac{-0.01e^{-0.01t}}{(1+e^{-0.01t})^2}$، فأجد $C(t)$

الحل:

$$C'(t) = \frac{-0.01e^{-0.01t}}{(1+e^{-0.01t})^2}$$

$$C(t) = \int \frac{-0.01e^{-0.01t}}{(1+e^{-0.01t})^2} \, dt$$

$$u = 1 + e^{-0.01t} \longrightarrow dt = \frac{du}{-0.01e^{-0.01t}}$$

$$= \int \frac{-0.01e^{-0.01t}}{u^2} \cdot \frac{du}{-0.01e^{-0.01t}}$$

$$= \int \frac{1}{u^2} \, du = \int u^{-2} \, du = \frac{u^{-1}}{-1} + C$$

$$= \frac{-1}{u} + C = \frac{-1}{1+e^{-0.01t}} + C$$

$$C(0) = \frac{-1}{1+1} + C = 0.5$$

$$\longrightarrow C = 0.5 + \frac{1}{2} = 1$$

$$C(t) = \frac{-1}{1+e^{-0.01t}} + 1$$

38 أجد قيمة $\int_{\ln 3}^{\ln 4} \frac{e^{4x}}{e^x - 2}\, dx$، ثم أكتب الإجابة بالصيغة الآتية: $\frac{a}{b} + c \ln d$، حيث a، وb، وc، وd ثوابت صحيحة.

الحل:

$$\int_{\ln 3}^{\ln 4} \frac{e^{4x}}{e^x - 2} dx$$

$$e^x = u \longrightarrow dx = \frac{du}{e^x}$$

$$x = \ln 3 \longrightarrow u = e^{\ln 3} = 3$$

$$x = \ln 4 \longrightarrow u = e^{\ln 4} = 4$$

$$= \int_3^4 \frac{e^{4x}}{u-2} \frac{du}{e^x} = \int_3^4 \frac{e^{3x}}{u-2} du = \int_3^4 \frac{u^3}{u-2} du$$

$$\begin{array}{r|l} & u^2 + 2u + 4 \\ \hline u-2 & \cancel{u^3} \\ & -\cancel{u^3} \overset{\oplus}{-} 2u^2 \\ \hline & \quad 2\cancel{u^2} \\ & \quad -2\cancel{u^2} \overset{\oplus}{-} 4u \\ \hline & \qquad 4\cancel{u} \\ & \qquad -4\cancel{u} \overset{\oplus}{-} 8 \\ \hline & \qquad\qquad 8 \end{array}$$

$$= \int_3^4 u^2 + 2u + 4 + \frac{8}{u-2} du$$

$$= \frac{u^3}{3} + u^2 + 4u + 8 \ln |u - 2| \Big|_3^4$$

$$= (\frac{64}{3} + 16 + 16 + 8 \ln 2) - (9 + 9 + 12 + 8 \ln 1)$$

$$= \frac{64}{3} + 32 + 8 \ln 2 - 30 - 0$$

$$= \frac{64}{3} + 2 + 8 \ln 2 = \frac{70}{3} + 8 \ln 2$$

39 إذا كان $f'(x) = \tan x$، وكان $f(3) = 5$، فأثبت أن: $f(x) = \ln \left| \frac{\cos 3}{\cos x} \right| + 5$

الحل:

$$f(x) = \int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$= -\ln |\cos x| + C$$

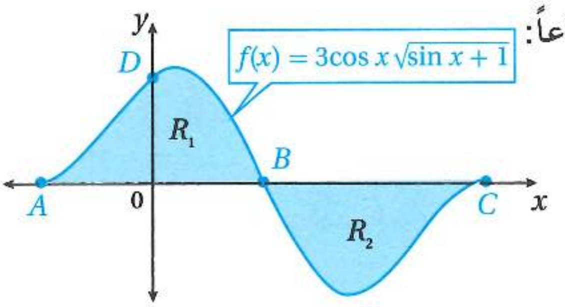
$$f(3) = -\ln |\cos 3| + C = 5$$

$$C = \ln |\cos 3| + 5$$

$$f(x) = -\ln |\cos x| + \ln |\cos 3| + 5$$

$$= \ln \left| \frac{\cos 3}{\cos x} \right| + 5$$

تبرير: إذا كان الشكل المجاوريمثل منحنى الاقتران: $f(x) = 3\cos x\sqrt{\sin x + 1}$ فأجيب عن الأسئلة الآتية تباعاً:



40 أجد إحداثيي كل من النقاط: A، وB، وC، وD

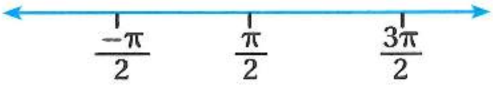
الحل:

$$f(x) = 3\cos x \sqrt{\sin x + 1} = 0$$

$$3\cos x = 0 \longrightarrow \cos x = 0 \longrightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

$$\sqrt{\sin x + 1} = 0 \longrightarrow \sin x + 1 = 0 \longrightarrow \sin x = -1$$

$$\longrightarrow x = \frac{-\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$



$$A = (\frac{-\pi}{2}, 0), \quad B = (\frac{\pi}{2}, 0), \quad C = (\frac{3\pi}{2}, 0)$$

$$D = f(0) = 3(1)\sqrt{0 + 1} = 3 : \quad D\ (0, 3)$$

41 أجد مساحة المنطقة المظللة

الحل:

$$R_1 = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3\cos x \sqrt{\sin x + 1}\, dx$$

$$u=\sqrt{\sin x+1} \longrightarrow u^2=\sin x+1$$

$$2u\,du=\cos x\,dx \longrightarrow dx=\frac{2u\,du}{\cos x}$$

$$x=\frac{3\pi}{2} \longrightarrow u=\sqrt{-1+1}=0$$

$$x=\frac{-\pi}{2} \longrightarrow u=\sqrt{-1+1}=0$$

$$x=\frac{\pi}{2} \longrightarrow u=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

$$=\int_0^{\sqrt{2}} 3\cos x\, u\,.\,\frac{2u\,du}{\cos x}=2\int_0^{\sqrt{2}} 3u^2\,du$$

$$=2\,u^3\Big|_0^{\sqrt{2}}=2\,(\sqrt{2})^3=4\sqrt{2}$$

$$R_2=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 3\cos x\sqrt{\sin x+1}\,dx$$

$$=-\int_{\sqrt{2}}^{0} 3\cos x\, u\,.\,\frac{2u\,du}{\cos x}=-3\int_{\sqrt{2}}^{0} 2\,u^2\,du$$

$$=-2u^3\Big|_{\sqrt{2}}^{0}=-2(0-(\sqrt{2})^3$$

$$=2(\sqrt{2})^3=4(\sqrt{2})$$

$$A=R_1+R_2=4(\sqrt{2})+4(\sqrt{2})=8(\sqrt{2})$$

42 أثبت أن للمنطقة R_1 والمنطقة R_2 المساحة نفسها

الحل:

$$R_1=R_2=4(\sqrt{2})$$

43 تحدٍ: أجد قيمة: $\int_1^{16}\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}\,dx$

الحل:

$$u=\sqrt[4]{x^3}=x^{\frac{3}{4}}$$

$$dx=\frac{du}{\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}}=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{4}}\,du$$

$x=16$ | $x=1$

$u=\sqrt[4]{(16)^3}=8$ | $u=1$

$$\int_1^8\frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+u}\cdot\frac{4}{3}x^{\frac{1}{4}}\,du=\frac{4}{3}\int_1^8\frac{x^{\frac{3}{4}}}{1+u}\,du$$

$$=\frac{4}{3}\int_1^8\frac{u}{1+u}\,du$$

$$\begin{array}{r} 1\\ u+1\,\big)\,\overline{\cancel{u}\qquad}\\ \underline{\overset{\ominus}{-\cancel{u}+1}}\\ -1 \end{array}$$

$$=\frac{4}{3}\int_1^8 1+\frac{-1}{1+u}\,du$$

$$=\frac{4}{3}\,(u-\ln|1+u|\,\Big|_1^8$$

$$=\frac{4}{3}((8-\ln 9)-(1-\ln 2))=\frac{4}{3}(7-\ln 9+\ln 2)$$

44 تبرير: إذا كان f اقتراناً متصلاً، فأثبت أن:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx$$

الحل:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin(\frac{\pi}{2}-x))\,dx$$

$$\frac{\pi}{2}-x=u \longrightarrow dx=-\,du$$

$x=0$ | $x=\frac{\pi}{2}$

$u=\frac{\pi}{2}$ | $u=0$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(u)(-du)=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(u)\,du=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)\,du$$

45 تبرير: إذا كان a و b عددين حقيقيين موجبين، فأثبت أن:

$$\int_0^1 x^a(1-x)^b\,dx=\int_0^1 x^b(1-x)^a\,dx$$

الحل:

$$\int_0^1 x^a(1-x)^b\,dx$$

$1-x=u$ $\quad x=1$ $\quad x=0$

$-du=dx$ $\quad u=0$ $\quad u=1$

$$\longrightarrow\int_1^0 (1-u)^a\,(u)^b\,(-du)$$

$$=-\int_1^0 u^b(1-u)^a\,du=+\int_0^1 u^b(1-u)^a\,du$$

تحدٍ: أجد كلاً من التكاملات الآتية:

㊻ $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x(\ln(\ln x))}\, dx$

الحل:

$$\ln(\ln x) = u$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \frac{1}{x\ln x} \longrightarrow dx = x\ln x\, du$$

$$\int \frac{x\ln x\, dx}{x\ln x(\ln(\ln x))}\ \frac{du}{u}$$

$$= \ln|u| + C = \ln|\ln(\ln x)| + C$$

㊼ $\displaystyle\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\, dx$

الحل:

$$u = \sin x + \cos x \longrightarrow dx = \frac{du}{\cos x - \sin x}$$

$$= \int -\frac{\cancel{(\cos x - \sin x)}}{u}\ \frac{du}{\cancel{\cos x - \sin x}}$$

$$= \int -\frac{du}{u} = -\ln|u| + C$$

$$= -\ln|\sin x + \cos x| + C$$

㊽ $\displaystyle\int \sin 2x\,(1 + \sin x)^3\, dx$

الحل:

$$1 + \sin x = u \longrightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$= \int 2\sin x\cos x\,(1 + \sin x)^3\, dx$$

$$= 2\int (u-1)\cancel{\cos x}\, u^3\, \frac{du}{\cancel{\cos x}}$$

$$= 2\int u^4 - u^3\, du = 2\left(\frac{u^5}{5} - \frac{u^4}{4}\right) + C$$

$$= 2\left(\frac{(1+\sin x)^5}{5} - \frac{1}{4}(1+\sin x)^4\right) + C$$

كتـاب التماريـن ص 13

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

① $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\, dx$

الحل:

$$u = \sqrt{x^2+4} \longrightarrow u^2 = x^2 + 4$$

$$\longrightarrow 2u\, du = 2x\, dx \longrightarrow dx = \frac{u\, du}{x}$$

$$= \int \frac{x}{u} \cdot \frac{u\, du}{x} = \int 1\ .\ du$$

$$= u + C = \sqrt{x^2+4} + C$$

② $\displaystyle\int (1 - \cos\frac{x}{2})^2 \sin\frac{x}{2}\, dx$

الحل:

$$u = 1 - \cos\frac{x}{2} \longrightarrow dx = \frac{du}{\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}}$$

$$= \int u^2 \sin\frac{x}{2}\, \frac{du}{\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}} = 2\int u^2\, du$$

$$= \frac{2u^3}{3} + C = \frac{2}{3}(1 - \cos\frac{x}{2})^3 + C$$

③ $\displaystyle\int \csc^5 x\cos^3 x\, dx$

الحل:

$$= \int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}\, dx = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x\sin^2 x}\, dx$$

$$= \int \cot^3 x\csc^2 x\, dx$$

$$\cot x = u \longrightarrow dx = \frac{du}{-\csc^2 x}$$

$$= \int u^3\csc^2 x\, .\, \frac{du}{-\csc^2 x} = -\int u^3\, du$$

$$= \frac{-u^4}{4} + C = -\frac{\cot^4 x}{4} + C$$

④ $\displaystyle\int x\sin x^2\, dx$

الحل:

$$x^2 = u \longrightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$=\int x\sin u\,.\,\frac{du}{2x}=\frac{1}{2}\int \sin u\,du$$

$$=-\frac{1}{2}\cos u+C=-\frac{1}{2}\cos x^2+C$$

⑤ $\int x^3(x+2)^7\,dx$

الحل:

$$u=x+2\longrightarrow du=dx$$

$$=\int x^3\,u^7\,.\,du=\int (u-2)^3\,u^7\,du$$

$$=\int (u^3-6u^2+12u-8)\,.\,u^7\,du$$

$$=\int u^{10}-6u^9+12u^8-8u^7\,dx$$

$$=\frac{u^{11}}{11}-\frac{6u^{10}}{10}+\frac{12u^9}{9}-\frac{8u^8}{8}+C$$

$$=\frac{(x+2)^{11}}{11}-\frac{6}{10}(x+2)^{10}+\frac{12}{9}(x+2)^9$$
$$-(x+2)^8+C$$

⑥ $\int \frac{\ln\sqrt{x}}{x}\,dx$

الحل:

$$=\int\frac{\frac{1}{2}\ln x}{x}$$

$$u=\ln x\longrightarrow\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}\longrightarrow dx=x\,du$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{u}{x}x\,du=\frac{1}{2}\int u\,.\,du$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{u^2}{2}+C=\frac{1}{4}(\ln x)^2+C$$

⑦ $\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

الحل:

$$u=\sqrt{x}\longrightarrow\frac{du}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\longrightarrow dx=2\sqrt{x}\,du$$

$$=\int\frac{e^u}{\sqrt{x}}2\sqrt{x}\,du=\int 2\,e^u du$$

$$=2\,e^u+C=2e^{\sqrt{x}}+C$$

⑧ $\int\frac{\sin(\ln 4x^2)}{x}\,dx$

الحل:

$$u=\ln 4x^2\longrightarrow\frac{du}{dx}=\frac{8x}{4x^2}=\frac{2}{x}\longrightarrow dx=\frac{x}{2}du$$

$$=\int\frac{\sin u}{x}\,.\,\frac{x}{2}\,du=\frac{1}{2}\int\sin u\,du$$

$$=-\frac{1}{2}\cos u+C=-\frac{1}{2}\cos(\ln 4x^2)+C$$

⑨ $\int\sec^2x\cos^3(\tan x)\,dx$

الحل:

$$u=\tan x\longrightarrow dx=\frac{du}{\sec^2x}$$

$$=\int\cancel{\sec^2x}\cos^3u\,.\,\frac{du}{\cancel{\sec^2x}}$$

$$=\int\cos^3u\,du=\int\cos^2u\,.\cos u\,du$$

$$=\int(1-\sin^2u)\cos u\,du$$

$$\sin u=L\longrightarrow du=\frac{dL}{\cos u}$$

$$=\int(1-L^2)\cancel{\cos u}\,.\,\frac{dL}{\cancel{\cos u}}$$

$$=\int(1-L^2)\,dL=L-\frac{L^3}{3}+C$$

$$=\sin u-\frac{\sin^3u}{3}+C$$

$$=\sin(\tan x)-\frac{\sin^3(\tan x)}{3}+C$$

أجد قيمة كل من التكاملات الآتية:

⑩ $\int_6^{20}\frac{8x}{\sqrt{4x+1}}\,dx$

الحل:

$$u=\sqrt{4x+1}\longrightarrow u^2=4x+1\longrightarrow x=\frac{u^2-1}{4}$$

$$2u\,du=4\,dx\longrightarrow dx=\frac{2u\,du}{4}=\frac{u\,du}{2}$$

$$x=6\longrightarrow u=\sqrt{24+1}=5$$

$$x=20\longrightarrow u=\sqrt{80+1}=9$$

$$=\int_5^9 \frac{8x}{u}\cdot\frac{u\,du}{2}=\int_5^9 4x\,du$$

$$=\int_5^9 4\,\frac{u^2-1}{4}\,dx=\int_5^9 (u^2-1)\,du$$

$$=\left(\frac{u^3}{3}-u\right)\Big|_5^9=\left(\frac{(9)^3}{3}-9\right)-\left(\frac{(5)^3}{3}-5\right)$$

⑪ $\displaystyle\int_2^5 \frac{1}{1+\sqrt{x-1}}\,dx$

الحل:

$u=\sqrt{x-1}\longrightarrow u^2=x-1$

$2u\,du=dx$

$x=2\longrightarrow u=\sqrt{2-1}=1$

$x=5\longrightarrow u=\sqrt{5-1}=2$

$$=\int_1^2 \frac{1}{1+u}\cdot 2u\,du$$

$$\begin{array}{r} 2\\ u+1\,\overline{)\,\cancel{2u}}\\ \overset{\ominus}{-\cancel{2u}+2}\\ \hline -2 \end{array}$$

$$=\int_1^2 \frac{2\,u}{1+u}\,du$$

$$=\int_1^2 2+\frac{-2}{1+u}\,du=2u-2\ln|1+u|\Big|_1^2$$

$$=(4-2\ln 3)-(2-2\ln 2)$$

⑫ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+\cos x}\,dx$

الحل:

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x\cos x}{1+\cos x}\,dx$$

$1+\cos x=u\longrightarrow dx=\dfrac{du}{-\sin x}$

$x=0\longrightarrow u=1+1=2$

$x=\dfrac{\pi}{2}\longrightarrow u=1+0=1$

$$=\int_2^1 \frac{2\,\cancel{\sin x}\cos x}{u}\cdot\frac{du}{-\cancel{\sin x}}$$

$$=-2\int_2^1 \frac{\cos x}{u}\,du$$

$$=-2\int_2^1 \frac{u-1}{u}\,du=-2\int_2^1 \frac{u}{u}-\frac{1}{u}\,du$$

$$=-2\,(u-\ln u)\Big|_2^1$$

$$=-2((1-\ln 1)-(2-\ln 2))$$

$$=-2+4-2\ln 2=2-2\ln 2$$

⑬ $\displaystyle\int_1^4 \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}\,dx$

الحل:

$u=1+\sqrt{x}\longrightarrow \dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$\longrightarrow dx=2\sqrt{x}\,du$

$x=1\longrightarrow u=1+1=2$

$x=4\longrightarrow u=1+2=3$

$$=\int_2^3 \frac{u^3}{\sqrt{x}}\cdot 2\sqrt{x}\,du=\frac{2u^4}{4}\Big|_2^3$$

$$=\frac{1}{2}\,(81-16)=\frac{65}{2}$$

⑭ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\,dx$

الحل:

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\,e^{\tan x}\,dx$$

$u=\tan x\longrightarrow dx=\dfrac{du}{\sec^2 x}$

$x=0\longrightarrow u=0$

$x=\dfrac{\pi}{4}\longrightarrow u=1$

$$=\int_0^1 \cancel{\sec^2 x}\,e^{u}\,\frac{du}{\cancel{\sec^2 x}}=\int_0^1 e^{u}\,du$$

$$=e^{u}\Big|_0^1=e-1$$

⑮ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x\sin^3 x\,dx$

الحل:

$\cos x=u\longrightarrow dx=\dfrac{du}{-\sin x}$

$x=0\longrightarrow u=\cos 0=1$

$x=\dfrac{\pi}{3}\longrightarrow u=\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$

$$= \int_{1}^{\frac{1}{2}} u^2 \sin^3 x \, \frac{du}{-\sin x} = -\int_{1}^{\frac{1}{2}} u^2 \sin^2 x \; du$$

$$= -\int_{1}^{\frac{1}{2}} u^2 (1 - \cos^2 x) du = -\int_{1}^{\frac{1}{2}} u^2 (1 - u^2) \, du$$

$$= -\int_{1}^{\frac{1}{2}} u^2 - u^4 \, du = -(\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5})\Big|_{1}^{\frac{1}{2}}$$

$$= -((\frac{\frac{1}{8}}{3} - \frac{\frac{1}{32}}{5}) - (\frac{1}{3} - \frac{1}{5}))$$

$$= -(\frac{1}{24} - \frac{1}{160} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5})$$

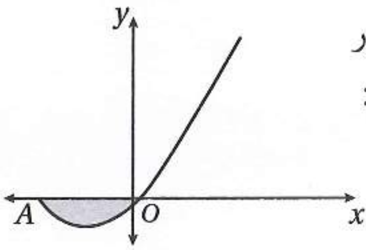
$$= -((\frac{1}{24} - \frac{1}{3}) - (\frac{1}{160} - \frac{1}{5})) = \frac{-7}{24} + \frac{31}{160}$$

---

⑯ يبين الشكل المجاور جزءاً من منحنى الاقتران:

$$f(x) = x\sqrt{x+1}$$

أجد مساحة المنطقة المظللة في هذا المنحنى



الحل:

$$f(x) = x\sqrt{x+1} = 0$$

$$x = 0 \;, x = -1$$

$$A = -\int_{-1}^{0} (x\sqrt{x+1}) \, \mathrm{dx}$$

$$u = \sqrt{x+1} \longrightarrow u^2 = x + 1$$

$$2u \, du = dx$$

$$x = -1 : u = 0 \quad , \quad x = 0 : u = 1$$

$$= -\int_{0}^{1} x(2u^2 \, du) = -\int_{0}^{1} (u^2 - 1) 2u^2 \, du$$

$$= -2\int_{0}^{1} u^4 - u^2 \, du = -2(\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3})\Big|_{0}^{1}$$

$$= -2((0) - (\frac{1}{5} - \frac{1}{3})) = -2(\frac{3-5}{15}) = \frac{4}{15}$$

يمثل الاقتران $f'(x)$ في كل مما يأتي ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ المار بالنقطة المعطاة. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$

⑰ $f'(x) = 16 \sin x \cos^3 x \quad ;(\frac{\pi}{4}, 0)$

الحل:

$$f(x) = \int 16 \sin x \cos^3 x \, dx$$

$$u = \cos x \longrightarrow \quad dx = \frac{du}{-\sin x}$$

$$= \int 16 \sin x \, u^3 \frac{du}{-\sin x} = -\int 16 \, u^3 \, du$$

$$= -\frac{16 \, u^4}{4} + C = -4 \, u^4 + C$$

$$= -4 \cos^4 + C$$

$$f(\frac{\pi}{4}) = -4 \, (\cos \frac{\pi}{4})^4 + C = 0$$

$$= -4(\frac{1}{\sqrt{2}})^4 + C = 0$$

$$\longrightarrow -1 + C = 0 \longrightarrow C = 1$$

$$f(x) = -4 \cos^4 x + 1$$

---

⑱ $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}} \quad ;(2, 1)$

الحل:

$$f(x) = \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}} \, dx$$

$$u = \sqrt{x^2 + 5} \longrightarrow u^2 = x^2 + 5$$

$$2u \, du = 2x \; dx \longrightarrow dx = \frac{u \, du}{x}$$

$$= \int \frac{x}{u} \cdot \frac{u \, du}{x} = \int 1 \, . \, du$$

$$= u + C = \sqrt{x^2 + 5} + C$$

$$f(2) = \sqrt{4 + 5} \; + C = 1$$

$$= 3 + C = 1 \longrightarrow C = -2$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 5} - 2$$

19 يتحرك جسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = \dfrac{-2t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}$ حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا كان الموقع الابتدائي للجسيم هو 4m فأجد موقع الجسيم بعد t ثانية.

الحل:

$$v(t) = \frac{-2t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$s(t) = \int \frac{-2t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\, dt$$

$$1 + t^2 = u \longrightarrow du = \frac{dt}{2t}$$

$$= \int \frac{-2t}{u^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{dt}{2t} = \int -u^{\frac{-3}{2}} \cdot dt$$

$$= \frac{-u^{\frac{-1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{u^{\frac{1}{2}}} + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+t^2}} + C$$

$$s(0) = \frac{2}{1} + C = 4 \longrightarrow C = 2$$

$$s(t) = \frac{2}{\sqrt{1+t^2}} + 2$$

الدرس الثالث

التكامل بالكسور الجزئية

الاستخدام الرئيسي لهذه الطريقة عند وجود $\int \frac{\text{كثير حدود}}{\text{كثير حدود}}$ ودرجة البسط أصغر من درجة المقام والمقام عبارة تربيعية تتحلل إلى عاملين مختلفين ونوضح ذلك من خلال المثال التالي:

مثال

جد: $\int \frac{x+5}{x^2-2x-3}\,dx$

الحل

$$\frac{x+5}{x^2-2x-3} = \frac{x+5}{(x-3)(x+1)}$$

$$= \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x+1)}$$ تحليل المقام

ثم تجزئة المقدار إلى كسرين جزئيين ولإيجاد قيم A و B نوحد المقام ونضع البسط يساوي البسط

$$A(x+1) + B(x-3) = x+5$$

ثم نأخذ أصفار الأقواس

$$x = -1 : 0 + B(-1-3) = -1+5$$

$$\longrightarrow -4B = 4 \longrightarrow B = -1$$

$$x = 3:\ A(3+1) + 0 = 3+5$$

$$\longrightarrow 4A = 8 \longrightarrow A = 2$$

بالعودة إلى التكامل:

$$\int \frac{x+5}{x^2-2x-3}\,dx = \int \frac{2}{(x-3)} + \frac{-1}{(x+1)}\,dx$$

$$= 2\ln|x-3| + -\ln|x+1| + C$$

مثال

جد: $\int \frac{6}{2x-x^2}\,dx$

الحل

$$\frac{6}{x(2-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2-x}$$

$$A(2-x) + B(x) = 6$$

$$x = 2 \longrightarrow 2B = 6 \quad \longrightarrow B = 3$$

$$x = 0 \longrightarrow 2A = 6 \quad \longrightarrow A = 3$$

$$\int \frac{6}{2x-x^2}\,dx = \int \frac{3}{x} + \frac{3}{2-x}\,dx$$

$$= 3\ln|x| - 3\ln|2-x| + C$$

أتحقّق من فهمي

صفحة (49) : أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

a) $\int \frac{x-7}{x^2-x-6}\,dx$

الحل:

$$\frac{x-7}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x+2)}$$

$$A(x+2) + B(x-3) = x-7$$

$$x = -2 \longrightarrow -5B = -9 \longrightarrow B = \frac{9}{5}$$

$$x = 3 \longrightarrow 5A = -4 \longrightarrow A = -\frac{4}{5}$$

$$\int \frac{-\frac{4}{5}}{x-3} + \frac{\frac{9}{5}}{x+2}\,dx$$

$$= -\frac{4}{5}\ln|x-3| + \frac{9}{5}\ln|x+2| + C$$

b) $\int \frac{3x-1}{x^2-1}\,dx$

الحل:

$$\frac{3x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)}$$

$$A(x+1) + B(x-1) = 3x-1$$

$$x = -1 \longrightarrow -2B = -4 \longrightarrow B = 2$$

$$x = 1 \longrightarrow 2A = 2 \longrightarrow A = 1$$

$$\int \frac{1}{(x-1)} + \frac{2}{(x+1)}\, dx$$

$$= \ln|x-1| + 2\ln|x+1| + C$$

عندما تكون عوامل المقام كثيرات حدود خطية أحدها مكرر. تذكر أن:

$$\frac{A_1}{(ax+b)^1} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \dots\dots\dots \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

مثال

جد: $\int \frac{2x^2+16}{x(x-4)^2}\, dx$

الحل

$$\frac{2x^2+16}{x(x-4)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-4)} + \frac{C}{(x-4)^2}$$

بالضرب في $x(x-4)^2$

$$A(x-4)^2 + B(x)(x-4) + C(x) = 2x^2 + 16$$

$$x = 4 : 0 + 0 + 4C = 32 + 16 = 48$$

$$\longrightarrow C = \frac{48}{4} = 12$$

$$x = 0 : 16A + 0 + 0 = 0 + 16$$

$$\longrightarrow A = \frac{16}{16} = 1$$

نأخذ أي عدد ما عدا 0 , 4 ليكن $x = 2$ مثلاً

$$1(2-4)^2 + B(2)(2-4) + 12(2) = 8 + 16 = 24$$

$$4 - 4B + 24 = 8 + 16 = 24$$

$$\longrightarrow -4B = -4 \quad \longrightarrow B = 1$$

$$\longrightarrow \int \frac{1}{x} + \frac{1}{(x-4)} + \frac{12}{(x-4)^2}\, dx$$

$$= \int \frac{1}{x} + \frac{1}{(x-4)} + 12(x-4)^{-2}\, dx$$

$$= \ln|x| + \ln|x-4| + 12\,\frac{(x-4)^{-1}}{-1} + C$$

$$= \ln|x| + \ln|x-4| - \frac{12}{x-4} + C$$

مثال

جد: $\int \frac{x+6}{x^3+2x^2+x}\, dx$

الحل

$$\frac{x+6}{x^3+2x^2+x} = \frac{x+6}{x(x^2+2x+1)}$$

$$= \frac{x+6}{x(x+1)^2}$$

$$\frac{x+6}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

$$A(x+1)^2 + B(x)(x+1) + C(x) = x + 6$$

$$x = 0 : A = 0 + 6 = 6$$

$$x = -1 : -C = -1 + 6 = 5 \longrightarrow C = -5$$

نضع $x = 1$

$$6(4) + B(2) - 5 = 7$$

$$2B = 7 - 19 = -12 \longrightarrow B = -6$$

$$\longrightarrow \int \frac{6}{x} + \frac{-6}{x+1} + \frac{-5}{(x+1)^2}\, dx$$

$$= \int \frac{6}{x} - \frac{6}{x+1} - 5(x+1)^{-2}\, dx$$

$$= 6\ln|x| - 6\ln|x+1| - 5\,\frac{(x+1)^{-1}}{-1} + C$$

$$= 6\ln|x| - 6\ln|x+1| + \frac{5}{x+1} + C$$

أتحقّق من فهمي

صفحة (51) : أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

a) $\int \frac{x+4}{(2x-1)(x-1)^2}\, dx$

الحل:

$$\frac{x+4}{(2x-1)(x-1)^2} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

$$A(x-1)^2 + B(2x-1)(x-1) + C(2x-1) = x + 4$$

$$x=1:\ 0+0+C=1+4=5$$

$$x=\frac{1}{2}\ :A\left(\frac{1}{4}\right)+0+0=\frac{1}{2}+4=\frac{9}{2}$$

$$A=\frac{9}{2}\times\frac{4}{1}=18$$

لنأخذ $x=0$

$$18(1)+B(-1)(-1)+5(-1)=0+4$$

$$18+B-5=4\longrightarrow\ B=9-18=-9$$

$$\longrightarrow\int\frac{18}{2x-1}+\frac{-9}{x-1}+\frac{5}{(x-1)^2}\,dx$$

$$=\int\frac{9}{2x-1}+\frac{-9}{x-1}+5(x-1)^{-2}\,dx$$

$$=\frac{18}{2}\ln|2x-1|-9\ln|x-1|+5\,\frac{(x-1)^{-1}}{-1}+C$$

$$=9\ln|2x-1|-9\ln|x-1|-\frac{5}{x-1}+C$$

---

b) $\displaystyle\int\frac{x^2-2x-4}{x^3-4x^2+4x}\,dx$

الحل:

$$\frac{x^2-2x-4}{x^3-4x^2+4x}=\frac{x^2-2x-4}{x(x^2-4x+4)}$$

$$=\frac{x^2-2x-4}{x(x-2)^2}$$

$$=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-2)}+\frac{C}{(x-2)^2}$$

$$A(x-2)^2+B(x)(x-2)+Cx=x^2-2x-4$$

$$x=2:0+0+2C=4-4-4$$

$$\longrightarrow 2C=-4\ \longrightarrow C=-2$$

$$x=0:4A+0+0=0-0-4$$

$$\longrightarrow 4A=-4\ \longrightarrow A=-1$$

نأخذ $x=1$

$$-1(1)+B(1)(-1)\ +-2=1-2-4$$

$$-1-B-2=-5\longrightarrow -B=-5+3=-2$$

$$\longrightarrow B=2$$

$$\longrightarrow\int\frac{-1}{x}+\frac{2}{x-2}+\frac{-2}{(x-2)^2}\,dx$$

$$=\int\frac{-1}{x}+\frac{2}{x-2}-2(x-2)^{-2}\,dx$$

$$=-\ln|x|+2\ln|x-2|-2\,\frac{(x-2)^{-1}}{-1}+C$$

$$=-\ln|x|+2\ln|x-2|+\frac{2}{x-2}+C$$

عندما تكون عوامل المقام كثيرات حدود أحدها تربيعي غير قابل للتحليل وغير مكرر عندئذ ينتج مقدار على الصورة: $\dfrac{Bx+C}{ax^2+d}$

مثال

جد: $\displaystyle\int\frac{5x^2-4x+2}{(x-1)(x^2+2)}\,dx$

الحل

$$\frac{5x^2-4x+2}{(x-1)(x^2+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+2}$$

$$A(x^2+2)+(Bx+C)(x-1)=5x^2-4x+2$$

بوضع $x=1$

$$A(3)+0=5-4+2=3\longrightarrow A=1$$

بوضع $x=0$ ، $A=1$

$$1(0+2)+(0+C)(0-1)=2$$

$$2-C=2\ \longrightarrow\ \ C=0$$

بوضع $C=0$ ، $A=1$ ، $x=2$

$$1(4+2)+(2B+0)(2-1)=20-8+2$$

$$6+2B=14\ \longrightarrow\ 2B=8\longrightarrow B\ =4$$

$$=\int\frac{1}{x-1}+\frac{4x}{x^2+2}\,dx$$

$$=\ln|x-1|+2\ln|x^2+2|+C$$

أتحقَّق من فهمي

صفحة (52) : أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

a) $\int \frac{3x+4}{(x-3)(x^2+4)}\,dx$

الحل:

$$\frac{3x+4}{(x-3)(x^2+4)} = \frac{A}{x-3} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

$A\,(x^2+4) + (Bx+C)(x-3) = 3x+4$

$x = 3 : A(9+4) + 0 = 3(3) + 4$

$13\,A = 13 \longrightarrow A = 1$

بوضع $x = 0$ ، $A = 1$

$1(0+4) + (0+C)\,(0-3) = 0+4$

$4 - 3C = 4 \longrightarrow \quad C = 0$

بوضع $x = 1$ ، $A = 1$ ، $C = 0$

$1(1+4) + (B+0)\,(1-3) = 3+4$

$5 + -2B = 7 \longrightarrow -2B = 2 \longrightarrow B = -1$

$$= \int \frac{1}{x-3} + \frac{-1x}{x^2+4}\,dx$$

$$= \ln|x-3| - \frac{1}{2}\ln|x^2+4| + C$$

b) $\int \frac{7x^2-x+1}{x^3+1}\,dx$

الحل:

$$\frac{7x^2-x+1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

$A\,(x^2-x+1) + (x+1)(Bx+C) = 7x^2 - x + 1$

بوضع $x = -1$

$A(3) + 0 = 7+1+1 = 9 \longrightarrow A = 3$

بوضع $x = 0$ ، $A = 3$

$3 + C = 1 \longrightarrow \quad C = -2$

بوضع $x = 1$ ، $A = 3$ ، $C = -2$

$3(1) + (2)(B + -2) = 7 - 1 + 1$

$3 + 2B - 4 = 7 \longrightarrow 2B = 8 \longrightarrow B = 4$

$$= \int \frac{3}{x+1} + \frac{4x-2}{x^2-x+1}\,dx$$

$$= \int \frac{3}{x+1} + \frac{2(2x-1)}{x^2-x+1}\,dx$$

$$= 3\ln|x+1| + 2\ln|x^2-x+1| + C$$

عندما تكون درجة البسط أكبر من أو تساوي درجة المقام فيجب القسمة.

مثـــال

جد: $\int \frac{x^3+10}{x^2-x-2}\,dx$

الحـــل

$$\begin{array}{r|l} & \quad x+1 \\ \hline x^2-x-2 & x^3 + 10 \\ & -\cancel{x^3} \overset{\oplus}{-} x^2 \overset{\oplus}{-} 2x \\ \hline & \qquad \cancel{x^2} + 2x + 10 \\ & \qquad -\cancel{x^2} \overset{\oplus}{-} x \overset{\oplus}{-} 2 \\ \hline & \qquad\qquad 3x + 12 \end{array}$$

$$= \int x + 1 + \frac{3x+12}{x^2-x+2}\,dx$$

$$\frac{3x+12}{x^2-x+2} = \frac{3x+12}{(x-2)(x+1)}$$

$$= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}$$

$A\,(x+1) + B(x-2) = 3x + 12$

$x = -1: -3B = -3 + 12 = 9 \longrightarrow B = -3$

$x = 2:\ 3A = 6 + 12 = 18 \longrightarrow A = 6$

$$= \int x + 1 + \frac{6}{x-2} + \frac{-3}{x+1}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + x + 6\ln|x-2| - 3\ln|x+1| + C$$

مثـــال

جد: $\int \frac{x^3+6}{x^2+x}\,dx$

الحـــل

$$\begin{array}{r} x-1 \\ x^2+x\,\overline{)\,\cancel{x^3}+6} \\ -\cancel{x^3}\overset{\ominus}{+}x^2 \\ \hline -\cancel{x^2}+6 \\ \underline{\oplus}\ \cancel{x^2}\ \underline{\oplus}\ x \\ \hline x+6 \end{array}$$

$$= \int x-1+\frac{x+6}{x^2+x}\,dx$$

$$\frac{x+6}{x(x+1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}$$

$$A\,(x+1)+B(x) = x+6$$

$$x=-1: -B=5 \longrightarrow B=-5$$

$$x=0:\ A=6$$

$$= \int x-1+\frac{6}{x}+\frac{-5}{x+1}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}-x+6\ln|x|-5\ln|x+1|+C$$

أتحقَّق من فهمي

صفحة (53) : أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

a) $\int \frac{4x^3-5}{2x^2-x-1}\,dx$

الحل:

$$\begin{array}{r} 2x+1 \\ 2x^2-x-1\,\overline{)\,4\cancel{x^3}-5} \\ -\ \cancel{4x^3}\ \underline{\oplus}\ 2x^2\ \underline{\oplus}\ 2x \\ \hline 2\cancel{x^2}+2x-5 \\ -\ \ 2\cancel{x^2}\ \underline{\oplus}\ x\ \underline{\oplus}\ 1 \\ \hline 3x-4 \end{array}$$

$$= \int 2x+1+\frac{3x-4}{2x^2-x-1}\,dx$$

$$= \frac{3x-4}{(2x+1)(x-1)} = \frac{A}{2x+1}+\frac{B}{x-1}$$

$$A\,(x-1)+B(2x+1) = 3x-4$$

$$x=1: 3B=-1 \longrightarrow B=\frac{-1}{3}$$

$$x=-\frac{1}{2}: A\,(-\frac{3}{2}) = 3(-\frac{1}{2})-4 = \frac{-11}{2}$$

$$A\,(\frac{-3}{2}) = \frac{-11}{2} \longrightarrow A=\frac{11}{3}$$

$$= \int 2x+1+\frac{\frac{11}{3}}{2x+1}+\frac{-\frac{1}{3}}{x-1}\,dx$$

$$= x^2+x+\frac{1}{2}\times\frac{11}{3}\ln|2x+1|-\frac{1}{3}\ln|x-1|+C$$

b) $\int \frac{x^2+x-1}{x^2-x}\,dx$

الحل:

$$\begin{array}{r} 1 \\ x^2-x\,\overline{)\,\cancel{x^2}+x-1} \\ -\cancel{x^2}\ \underline{\oplus}\ x \\ \hline 2x-1 \end{array}$$

$$= \int 1+\frac{2x-1}{x^2-x}\,dx$$

$$= x+\ln|x^2-x|+C$$

التكاملات المحدودة

مثـــال

جد: $\int_3^4 \frac{4}{x^2-2x}\,dx$

الحـــل

$$\frac{4}{x^2-2x} = \frac{4}{x(x-2)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}$$

$$A\,(x-2)+B\,(x) = 4$$

$$x=2:\quad 2B=4 \longrightarrow B=2$$

$$x=0:\quad -2A=4 \longrightarrow A=-2$$

$$= \int_3^4 \frac{-2}{x} + \frac{2}{x-2}\,dx$$

$$= -2\ln|x| + 2\ln|x-2| \Big|_3^4$$

$$= (-2\ln 4 + 2\ln 2) - (-2\ln 3 + 2\ln 1)$$

$$= -2\ln 4 + 2\ln 2 + 2\ln 3$$

$$= 2(-\ln 4 + \ln 2 + \ln 3)$$

$$= 2(\ln \frac{2\times 3}{4}) = 2\ln\frac{3}{2}$$

مثال

جد: $\int_2^4 \frac{x^3+3}{x^2-1}\,dx$

الحل

$$\begin{array}{r|l} & x \\ \hline x^2-1 & \cancel{x^3} + 3 \\ & -\,\cancel{x^3} \overset{\oplus}{-} x \\ \hline & x + 3 \end{array}$$

$$= \int x + \frac{x+3}{x^2-1}\,dx$$

$$\frac{x+3}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$A(x+1) + B(x-1) = x+3$

$x = -1: \quad -2B = 2 \longrightarrow B = -1$

$x = 1: \quad 2A = 4 \longrightarrow A = 2$

$$= \int_2^4 x + \frac{2}{x-1} + \frac{-1}{x+1}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + 2\ln|x-1| - \ln|x+1| \Big|_2^4$$

$$= (8 + 2\ln 3 - \ln 5) - (2 + 2\ln 1 - \ln 3)$$

$$= 6 + \ln 9 - \ln 5 + \ln 3)$$

$$= 6 + \ln\frac{9\times 3}{5} = 6 + \ln\frac{27}{5}$$

أتحقّق من فهمي

صفحة (54) : أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

a) $\int_3^4 \frac{2x^3 + x^2 - 2x - 4}{x^2-4}\,dx$

الحل:

$$\begin{array}{r|l} & 2x + 1 \\ \hline x^2-4 & \cancel{2x^3} + x^2 - 2x - 4 \\ & -\,\cancel{2x^3} \overset{\oplus}{-} 8x \\ \hline & \cancel{x^2} + 6x - 4 \\ & -\ \ \cancel{x^2} \overset{\oplus}{-} 4 \\ \hline & 6x \end{array}$$

$$= \int_3^4 2x + 1 + \frac{6x}{x^2-4}\,dx$$

$$= x^2 + x + 3\ln|x^2-4| \Big|_3^4$$

$$= (16 + 4 + 3\ln 12) - (9 + 3 + 3\ln 5)$$

$$= 20 - 12 + 3\ln 12 - 3\ln 5$$

$$= 8 + 3\ln\frac{12}{5}$$

b) $\int_5^6 \frac{3x-10}{x^2-7x+12}\,dx$

الحل:

$$\frac{3x-10}{(x-4)(x-3)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x-3}$$

$A(x-3) + B(x-4) = 3x - 10$

$x = 3: \quad -B = -1 \longrightarrow B = 1$

$x = 4: \quad A = 2$

$$= \int_5^6 \frac{2}{x-4} + \frac{1}{x-3}\,dx$$

$$= 2\ln|x-4| + \ln|x-3| \Big|_5^6$$

$$= (2\ln 2 + \ln 3) - (2\ln 1 + \ln 2)$$

$$= 2\ln 2 + \ln 3 - 0 - \ln 2 = \ln 2 + \ln 3$$

$$= \ln(2\times 3) = \ln 6$$

استخدام التعويض

مثـــال

جد: $\int \frac{e^{3x}}{e^{2x} - e^{x} - 6} dx$

الحـــل

نفرض $e^{x} = u \Rightarrow dx = \frac{du}{e^{x}} = \frac{du}{u}$

$$\Rightarrow \int \frac{u^{3}}{u^{2} - u - 6} \cdot \frac{du}{u} = \int \frac{u^{2}}{u^{2} - u - 6} du$$

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline u^{2} - u - 6 & \cancel{u^{2}} \\ & \underline{-\cancel{u^{2}} \overset{\oplus}{-} u \overset{\oplus}{-} 6} \\ & u + 6 \end{array}$$

$$= \int 1 + \frac{u + 6}{u^{2} - u - 6} du$$

$$\frac{u + 6}{(u - 3)(u + 2)} = \frac{A}{u - 3} + \frac{B}{u + 2}$$

$$A(u + 2) + B(u - 3) = u + 6$$

$$u = -2: \quad -5B = 4 \longrightarrow B = \frac{-4}{5}$$

$$u = 3: \quad 5A = 9 \longrightarrow A = \frac{9}{5}$$

$$= \int 1 + \frac{\frac{9}{5}}{u - 3} + \frac{\frac{-4}{5}}{u + 2} \quad du$$

$$= u + \frac{9}{5} \ln|u - 3| - \frac{4}{5} \ln|u + 2|$$

$$= e^{x} + \frac{9}{5} \ln|e^{x} - 3| - \frac{4}{5} \ln|e^{x} + 2| + C$$

مثـــال

جد: $\int \frac{1}{x(\ln x)^{2} - x \ln x^{4} + 3x} dx$

الحـــل

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x(\ln x)^{2} - 4x(\ln x) + 3x} dx$$

$$= \int \frac{1}{x((\ln x)^{2} - 4\ln x + 3)} dx$$

$$u = \ln x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \longrightarrow dx = x du$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x(u^{2} - 4u + 3} x du = \int \frac{1}{u^{2} - 4u + 3}$$

$$\frac{1}{u^{2} - 4u + 3} = \frac{1}{(u - 3)(u - 1)} du$$

$$= \frac{A}{u - 3} + \frac{B}{u - 1}$$

$$A(u - 1) + B(u - 3) = 1$$

$$u = 1: \quad -2B = 1 \longrightarrow B = \frac{-1}{2}$$

$$u = 3: \quad 2A = 1 \longrightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}}{u - 3} + \frac{\frac{-1}{2}}{u - 1} \quad du$$

$$= \frac{1}{2} \ln|u - 3| - \frac{1}{2} \ln|u - 1| + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln|\ln x - 3| - \frac{1}{2} \ln|\ln x - 1| + C$$

مثـــال

جد: $\int \frac{\sec^{4} x}{\tan^{2} x - 2\tan x - 3} dx$

الحـــل

$$u = \tan x \longrightarrow dx = \frac{du}{\sec^{2} x}$$

$$= \int \frac{\sec^{4} x}{u^{2} - 2u - 3} \cdot \frac{du}{\sec^{2} x}$$

$$= \int \frac{\sec^{2} x}{u^{2} - 2u - 3} du = \int \frac{\tan^{2} x + 1}{u^{2} - 2u - 3} dx$$

$$= \int \frac{u^{2} + 1}{u^{2} - 2u - 3} dx$$

$$\begin{array}{r l} & \qquad 1 \\ u^2-2u-3\,\big) & \cancel{u^2}+1 \\ & \underline{-u^2 \overset{\oplus}{-} 2u \overset{\oplus}{-} 3} \\ & \qquad 2u+4 \end{array}$$

$$= \int 1 + \frac{2u+4}{u^2-2u-3}\, du$$

$$\frac{2u+4}{(u-3)(u+1)} = \frac{A}{u-3} + \frac{B}{u+1}$$

$$A(u+1) + B(u-3) = 2u+4$$

$$u=-1: \quad -4B = 2 \longrightarrow B = \frac{-1}{2}$$

$$u=3: 4A = 6+4 = 10 \longrightarrow A = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$= \int 1 + \frac{\frac{5}{2}}{u-3} + \frac{\frac{-1}{2}}{u+2}\, du$$

$$= u + \frac{5}{2}\ln|u-3| - \frac{1}{2}\ln|u+1| + C$$

$$= \tan x + \frac{5}{2}\ln|\tan x - 3| - \frac{1}{2}\ln|\tan x + 1| + C$$

مثــال

جد: $\int \frac{\tan x}{9-(\ln\cos x)^2}\, dx$

الحــل

$$u = \ln\cos x \longrightarrow \frac{du}{dx} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

$$\longrightarrow dx = \frac{du}{-\tan x}$$

$$= \int \frac{\tan x}{9-u^2} \cdot \frac{du}{-\tan x} = \int \frac{1}{u^2-9}$$

$$\frac{1}{(u-3)(u+3)} = \frac{A}{u-3} + \frac{B}{u+3}$$

$$A(u+3) + B(u-3) = 1$$

$$u=-3: \quad -6B = 1 \longrightarrow B = \frac{-1}{6}$$

$$u=3: 6A = 1 \longrightarrow A = \frac{1}{6}$$

$$= \int \frac{\frac{1}{6}}{u-3} + \frac{\frac{-1}{6}}{u+3}\, du$$

$$= \frac{1}{6}\ln|u-3| - \frac{1}{6}\ln|u+3| + C$$

$$= \frac{1}{6}\ln|\ln\cos x - 3| - \frac{1}{6}\ln|\ln\cos x + 3| + C$$

مثــال

جد: $\int \frac{\cos x}{3+\cos^2 x}\, dx$

الحــل

$$= \int \frac{\cos x}{3+1-\sin^2 x}\, dx = \int \frac{\cos x}{4-\sin^2 x}\, dx$$

$$u = \sin x \longrightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$= \int \frac{\cos x}{4-u^2} \cdot \frac{du}{\cos x} = \int \frac{1}{4-u^2}\, du$$

$$\frac{1}{(2-u)(2+u)} = \frac{A}{2-u} + \frac{B}{2+u}$$

$$A(2+u) + B(2-u) = 1$$

$$u=-2: \quad 4B = 1 \longrightarrow B = \frac{1}{4}$$

$$u=2: 4A = 1 \longrightarrow A = \frac{1}{4}$$

$$= \int \frac{\frac{1}{4}}{2-u} + \frac{\frac{1}{4}}{2+u}\, du$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|2-u| + \frac{1}{4}\ln|2+u| + C$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|2-\sin x| + \frac{1}{4}\ln|2+\sin x| + C$$

مثــال

جد: $\int \frac{\sqrt{x}}{x-9}\, dx$

الحــل

$$\sqrt{x} = u$$

$$x = u^2 \longrightarrow dx = 2u \, . \, du$$

$$= \int \frac{u}{u^2-9} \, . \, 2u \, . \, du = \int \frac{2u^2}{u^2-9} \, du$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ u^2-9\,\overline{)\,\cancel{2u^2}} \\ \underline{-\,\cancel{2u^2} \overset{\oplus}{-} 18} \\ 18 \end{array}$$

$$= \int 2 + \frac{18}{u^2-9} \, du$$

$$\frac{18}{(u-3)(u+3)} = \frac{A}{u-3} + \frac{B}{u+3}$$

$$A\,(u+3) + B\,(u-3) = 18$$

$$u = -3: \quad -6\,B = 18 \longrightarrow B = -3$$

$$u = 3: \; 6\,A = 18 \longrightarrow A = 3$$

$$= \int 2 + \frac{3}{u-3} + \frac{-3}{u+3} \, du$$

$$= 2u + 3 \ln|u-3| - 3 \ln|u+3| + C$$

$$= 2\sqrt{x} + 3 \ln|\sqrt{x} - 3| - 3 \ln|\sqrt{x} + 3| + C$$

مثـــال

جد: $\int \frac{\sqrt{x+3}}{x-1} \, dx$

الحــل

$$u = \sqrt{x+3} \longrightarrow u^2 = x + 3 \longrightarrow x = u^2 - 3$$

$$2u \, du = dx$$

$$= \int \frac{u}{u^2-3-1} \, . \, 2u \, du = \int \frac{2u^2}{u^2-4} \, du$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ u^2-4\,\overline{)\,\cancel{2u^2}} \\ \underline{-\,\cancel{2u^2} \overset{\oplus}{-} 8} \\ 8 \end{array}$$

$$= \int 2 + \frac{8}{u^2-4} \, du$$

$$\frac{8}{(u-2)(u+2)} = \frac{A}{u-2} + \frac{B}{u+2}$$

$$A\,(u+2) + B\,(u-2) = 8$$

$$u = -2: \; -4\,B = 8 \longrightarrow B = -2$$

$$u = 2: \; 4\,A = 8 \longrightarrow A = 2$$

$$= \int 2 + \frac{2}{u-2} + \frac{-2}{u+2} \, du$$

$$= 2u + 2 \ln|u-2| - 2 \ln|u+2| + C$$

$$= 2\sqrt{x+3} + 2 \ln|\sqrt{x+3} - 2| - 2 \ln|\sqrt{x+3} + 2| + C$$

أتحقَّق من فهمي

صفحة (75) : أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

a) $\int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x - 1} \, dx$

الحل:

$$\tan x = u \longrightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x}$$

$$= \int \frac{\sec^2 x}{u^2-1} \, . \, \frac{du}{\sec^2 x} = \int \frac{du}{u^2-1}$$

$$= \frac{1}{(u-1)\,(u+1)} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+1}$$

$$A\,(u+1) + B\,(u-1) = 1$$

$$u = -1: -2\,B = 1 \longrightarrow B = -\frac{1}{2}$$

$$u = 1: \; 2A = 1 \longrightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}}{u-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{u+1} \, du$$

$$= \frac{1}{2} \ln|u-1| - \frac{1}{2} \ln|u+1| + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln|\tan x - 1| - \frac{1}{2} \ln|\tan x + 1| + C$$

b) $\int \frac{e^x}{(e^x-1)(e^x+4)}dx$

الحل:

$e^x = u \longrightarrow dx = \frac{du}{e^x}$

$=\int \frac{e^x}{(u-1)(u+4)}\frac{du}{e^x} = \int \frac{1}{(u-1)(u+4)}du$

$=\frac{A}{u-1}+\frac{B}{u+4}$

$A\,(u+4)+B\,(u-1)=1$

$u=-4: -5\,B=1 \longrightarrow B=-\frac{1}{5}$

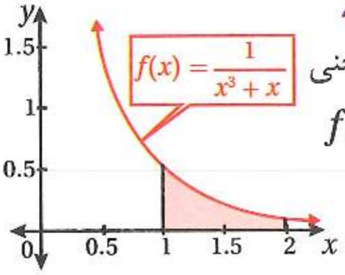
$u=1:\ 5A=1 \longrightarrow A=\frac{1}{5}$

$=\int \frac{\frac{1}{5}}{u-1}+\frac{-\frac{1}{5}}{u+4}\ du$

$=\frac{1}{5}\ln|u-1|-\frac{1}{5}\ln|u+4|+C$

$=\frac{1}{5}\ln|e^x-1|-\frac{1}{5}\ln|e^x+4|+C$

مسألة اليوم ص 47



يبين الشكل المجاور منحنى الاقتران: $f(x)=\frac{1}{x^3+x}$

أجد مساحة المنطقة المظللة منه.

الحل

$A=\int_1^2 \frac{1}{x^3+x}dx$

$=\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$

$A\,(x^2+1)+\,(Bx+C)(x)=1$

$x=0:\quad A=1$

$x=1:\quad 2+B+C=1 \longrightarrow B+C=-1$

$x=-1:\quad 2+B-C=1$

$B+C=1 \longrightarrow C=0$

$B-C=-1 \longrightarrow B=-1$

$=\int_1^2 \frac{1}{x}+\frac{-x}{x^2+1}dx=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x^2+1|\Big|_1^2$

$=(\ln 2-\frac{1}{2}\ln 5)-(\ln 1-\frac{1}{2}\ln 2)$

أتدرّب وأحلّ المسائل

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

① $\int \frac{x-10}{x(x+5)}dx$

الحل:

$\frac{x-10}{x(x+5)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+5}$

$A\,(x+5)+\ B\,(x)=x-10$

$x=-5:\quad -5B=-15 \longrightarrow B=3$

$x=0:\quad 5\,A=-10 \longrightarrow A=-2$

$=\int \frac{-2}{x}+\frac{3}{x+5}dx$

$=-2\ln|x|+3\ln|x+5|+C$

② $\int \frac{2}{1-x^2}dx$

الحل:

$\frac{2}{(1-x)(1+x)}=\frac{A}{1-x}+\frac{B}{1+x}$

$A\,(1+x)+\ B\,(1-x)=2$

$x=-1:\quad 2B=2 \longrightarrow B=1$

$x=1:\quad 2A=2 \longrightarrow A=1$

$=\int \frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\ dx$

$=-\ln|1-x|+\ln|1+x|+C$

③ $\int \frac{4}{(x-2)(x-4)}dx$

الحل:

$\frac{4}{(x-2)(x-4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-4}$

$A\,(x-4)+B\,(x-2)=4$

$x=4:\quad 2B=4\longrightarrow B=2$

$x=2:\quad -2A=4\longrightarrow A=-2$

$$=\int \frac{-2}{x-2}+\frac{2}{x-4}\;dx$$

$=-2\ln|x-2|+2\ln|x-4|+C$

---

④ $\displaystyle\int\frac{3x+4}{x^2+x}\,dx$

الحل:

$$\frac{3x+4}{x(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}$$

$A\,(x+1)+B\,(x)=3x+4$

$x=-1: -B=-3+4=1\longrightarrow B=-1$

$x=0: A=0+4=4$

$$=\int\frac{4}{x}+\frac{-1}{x+1}\,dx$$

$=4\ln|\,x\,|-\ln|x+1|+C$

---

⑤ $\displaystyle\int\frac{x^2}{x^2-4}\,dx$

الحل:

$$\begin{array}{r} 1\qquad \\ x^2-4\,\overline{)\;\cancel{x^2}\qquad\;} \\ \underline{-\cancel{x^2}\;\overset{\oplus}{-}4} \\ 4 \end{array}$$

$$=\int 1+\frac{4}{x^2-4}\,dx$$

$$\frac{4}{x^2-4}=\frac{4}{(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}$$

$A\,(x+2)+B\,(x-2)=4$

$x=-2: -4B=4\longrightarrow B=-1$

$x=2:\ 4A=4=1$

$$=\int 1+\frac{1}{x-2}+\frac{-1}{x+2}\,dx$$

$=x+\ln|x-2|-\ln|x+2|+C$

---

⑥ $\displaystyle\int\frac{3x-6}{x^2+x-2}\,dx$

الحل:

$$\frac{3x-6}{(x+2)\,(x-1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}$$

$A\,(x-1)+B\,(x+2)=3x-6$

$x=1:\ 3B=3-6=-3\longrightarrow B=-1$

$x=-2: -3A=-6-6=-12\longrightarrow A=4$

$$=\int\frac{4}{x+2}+\frac{-1}{x-1}\;dx$$

$=4\ln|x+2|-\ln|x-1|+C$

---

⑦ $\displaystyle\int\frac{4x+10}{4x^2-4x-3}\,dx$

الحل:

$$\frac{4x+10}{(2x+1)\,(2x-3)}=\frac{A}{2x+1}+\frac{B}{2x-3}$$

$A\,(2x-3)+B\,(2x+1)=4x+10$

$x=\frac{3}{2}:\ B\,(3+1)=6+10$

$\longrightarrow 4B=16\longrightarrow B=4$

$x=-\frac{1}{2}: A\,(-1-3)=-2+10$

$\longrightarrow -4\,A=8\ \longrightarrow A=-2$

$$=\int\frac{-2}{2x+1}+\frac{4}{2x-3}\,dx$$

$=-2(\frac{1}{2})\ln|2x+1|+4(\frac{1}{2})\ln|2x-3|+C$

$=-\ln|2x+1|+2\ln|2x-3|+C$

---

⑧ $\displaystyle\int\frac{2x^2+9x-11}{x^3+2x^2-5x-6}\,dx$

الحل:

$x^3+2x^2-5x-6=0$

بالتجريب $x=-3$

$-27+18+15-6=0$

$x=-3:$ جذر $\longrightarrow$ عامل $x+3$

$$\begin{array}{r|l} & x^2 - x - 2 \\ \hline x+3 & \cancel{x^3} + 2x^2 - 5x - 6 \\ & -\cancel{x^3} \overset{\ominus}{+} 3x^2 \\ \hline & -\cancel{x^2} - 5x - 6 \\ & -\cancel{x^2} \overset{\oplus}{-} 3x \\ \hline & -2x - 6 \\ & -2x - 6 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$= \int \frac{2x^2 + 9x - 11}{(x+3)(x^2 - x - 2)}\,dx$$

$$= \int \frac{2x^2 + 9x - 11}{(x+3)(x-2)\,(x+1)}\,dx$$

$$= \frac{2x^2 + 9x - 11}{(x+3)(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}$$

$$A(x-2)(x+1) + B(x+3)(x+1) + C(x+3)(x-2) = 2x^2 + 9x - 11$$

$$x = -1 : 0 + 0 + C(2)(-3) = 2 - 9 - 11 \longrightarrow -6C = -18 \longrightarrow C = 3$$

$$x = 2 : 0 + B(5)(3) + 0 = 8 + 18 - 11 = 15 \longrightarrow B = 1$$

$$x = -3 : A(-5)(-2) + 0 + 0 = 18 - 27 - 11 = -20 \longrightarrow A = -2$$

$$= \int \frac{-2}{x+3} + \frac{1}{x-2} + \frac{3}{x+1}\,dx$$

$$= -2\ln|x+3| + \ln|x-2| + 3\ln|x+1| + C$$

---

⑨ $\displaystyle\int \frac{4x}{x^2 - 2x - 3}\,dx$

الحل:

$$\frac{4x}{(x-3)\,(x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1}$$

$$A\,(x+1) + B\,(x-3) = 4x$$

$$x = -1 :\ -4\,B = -4 \longrightarrow B = 1$$

$$x = 3 : 4A = 12 \longrightarrow A = 3$$

$$= \int \frac{3}{x-3} + \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= 3\ln|x-3| + \ln|x+1| + C$$

---

⑩ $\displaystyle\int \frac{8x^2 - 19x + 1}{(2x+1)\,(x-2)^2}\,dx$

الحل:

$$\frac{8x^2 - 19x + 1}{(2x+1)\,(x-2)^2} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

$$A(x-2)^2 + B(2x+1)(x-2) + C(2x+1) = 8x^2 - 19x + 1$$

$$x = 2 : 0 + 0 + 5C = 32 - 38 + 1 = -5 \longrightarrow C = -1$$

$$x = -\frac{1}{2} : A\left(\frac{25}{4}\right) + 0 + 0 = 2 - 19\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{25}{2}$$

$$A = \frac{25}{2} \times \frac{4}{25} = 2$$

$$x = 0\,,\ A = 2\,,\ C = -1$$

$$8 + -2B + -1 = 1 \longrightarrow -2B = -6 \longrightarrow B = 3$$

$$= \int \frac{2}{2x+1} + \frac{3}{x-2} + \frac{-1}{(x-2)^2}\,dx$$

$$= \int \frac{2}{2x+1} + \frac{3}{x-2} - (x-2)^2\,dx$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\right)\ln|2x+1| + 3\ln|x-2| - \frac{(x-2)^{-1}}{-1}$$

$$= \ln|2x+1| + 3\ln|x-2| + \frac{1}{x-2} + C$$

---

⑪ $\displaystyle\int \frac{9x^2 - 3x + 2}{9x^2 - 4}\,dx$

الحل:

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline 9x^2 - 4 & \cancel{9x^2} - 3x + 2 \\ & -\cancel{9x^2} \overset{\oplus}{-} 4 \\ \hline & -3x + 6 \end{array}$$

$$= \int 1 + \frac{-3x + 6}{9x^2 - 4}\,dx$$

$$\frac{-3x+6}{9x^2-4}=\frac{-3x+6}{(3x-2)(3x+2)}=\frac{A}{3x-2}+\frac{B}{3x+2}$$

$$A(3x+2)+\ B(3x-2)=-3x+6$$

$$x=-\frac{2}{3}: 0+B(-4)=2+6=8\longrightarrow\ B=-2$$

$$x=\ \frac{2}{3}: A(4)=4\longrightarrow\ A=1$$

$$=\int 1+\ \frac{1}{3x-2}+\frac{-2}{3x+2}\ dx$$

$$=x+\frac{1}{3}\ln|3x-2|-\frac{2}{3}\ln|3x+2|+C$$

⑫ $\displaystyle\int\frac{x^3+2x^2+2}{x^2+x}\,dx$

الحل:

$$\begin{array}{r|l} & x+1 \\ \hline x^2+x & \cancel{x^3}+2x^2+2 \\ & -\cancel{x^3}\overset{\ominus}{+}x^2 \\ \hline & \cancel{x^2}+2 \\ & -\ \cancel{x^2}\overset{\ominus}{+}x \\ \hline & -x+2 \end{array}$$

$$=\int x+1+\ \frac{-x+2}{x^2-x}\,dx$$

$$\frac{-x+2}{x(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}$$

$$A\,(x+1)+\ B\,(x)=-x+2$$

$$x=-1:\ 0-B=3\longrightarrow\ B=-3$$

$$x=0:\quad A=2$$

$$\Rightarrow\int x+1+\frac{2}{x}+\frac{-3}{x+1}\,dx$$

$$=\frac{x^2}{2}+x+2\ln|\,x\,|-3\ln|x+1|+C$$

⑬ $\displaystyle\int\frac{x^2+x+2}{3-2x-x^2}\,dx$

الحل:

$$\begin{array}{r|l} & -1 \\ \hline -x^2-2x+3 & \cancel{x^2}+x+2 \\ & -\cancel{x^2}\overset{\ominus}{+}2x\overset{\oplus}{-}3 \\ \hline & -x+5 \end{array}$$

$$=\int -1\ +\frac{-x+5}{3-2x-x^2}\,dx$$

$$\frac{-x+5}{(3+x)\,(1-x)}=\frac{A}{3+x}+\frac{B}{1-x}$$

$$A(1-x)+\ B(3+x)=-x+5$$

$$x=1:4B\ =4\longrightarrow\ B=1$$

$$x=-3:\ 4A=8\longrightarrow\ A=2$$

$$=\int -1+\ \frac{2}{3+x}+\frac{1}{1-x}\ dx$$

$$=-x+2\ln|3+x|+-\ln|1-x|+C$$

⑭ $\displaystyle\int\frac{2x-4}{(x^2+4)\,(x+2)}\,dx$

الحل:

$$\frac{2x-4}{(x+2)\ \ (x^2+4)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$$

$$A(x^2+4)+\ (Bx+C)(x+2)=2x-4$$

$$x=-2:8A\ =-8\longrightarrow\ A=-1$$

$$x=0, A=-1: -1(4)+(C)(2)=-4\longrightarrow C=0$$

$$x=1:\ A\ =-1\,, C=0$$

$$-5+B(3)=-2\longrightarrow 3B=3\longrightarrow\ B=1$$

$$\Rightarrow\int\frac{-1}{x+2}+\frac{x}{x^2+4}\,dx$$

$$=-\ln|\,x+2\,|+\frac{1}{2}\ln|\,x^2+4\,|+C$$

⑮ $\displaystyle\int\frac{x^3-4x^2-2}{x^3+x^2}\,dx$

الحل:

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline x^3+x^2 & \cancel{x^3}-4x^2-2 \\ & -\cancel{x^3}\overset{\ominus}{+}x^2 \\ \hline & -5x^2-2 \end{array}$$

$$=\int 1\ +\frac{-5x^2-2}{x^3+x^2}\,dx$$

$$\frac{-5x^2-2}{x^3+x^2}=\frac{-5x^2-2}{x^2(x+1)}=\frac{A}{(x+1)}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x^2}$$

$A(x^2)+B(x)(x+1)+C(x+1)=-5x^2-2$

$x=0:\ C=-2$

$x=-1: A+0=-7 \longrightarrow A=-7$

$x=1: -7+2B-4=-7 \longrightarrow 2B=4$

$\longrightarrow B=2$

$$\Rightarrow\int 1+\frac{-7}{(x+1)}+\frac{2}{x}+\frac{-2}{x^2}\,dx$$

$$=x-7\ln|x+1|+2\ln|x|-2\,\frac{x^{-1}}{-1}+C$$

$$=x-7\ln|x+1|+2\ln|x|+\frac{2}{x}+C$$

---

⑯ $\displaystyle\int\frac{3-x}{2-5x-12x^2}\,dx$

الحل:

$$\frac{3-x}{(2+3x)\,(1-4x)}=\frac{A}{2+3x}+\frac{B}{1-4x}$$

$A\,(1-4x)+B\,(2+3x)=3-x$

$x=\frac{1}{4}: B\,(2+\frac{3}{4})=3-\frac{1}{4} \longrightarrow B\,(\frac{11}{4})$

$=\frac{11}{4} \longrightarrow B=1$

$x=-\frac{2}{3}: A\,(1+\frac{8}{3})=3-(-\frac{2}{3})$

$\longrightarrow A\,(\frac{11}{3})=\frac{11}{3} \longrightarrow A=1$

$$\Rightarrow\int\frac{1}{2+3x}+\frac{1}{1-4x}\,dx$$

$$=\frac{1}{3}\ln|2+3x|-\frac{1}{4}\ln|1-4x|+C$$

---

⑰ $\displaystyle\int\frac{3x^3-x^2+12x-6}{x^4+6x^2}\,dx$

الحل:

$$=\int\frac{3x^3-x^2+12x-6}{x^2(x^2+6)}\,dx$$

$$=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+d}{x^2+6}$$

$A(x^2+6)\,x+B\,(x^2+6)+((Cx+d)x^2)=3x^3-x^2+12x-6$

$x=0 \longrightarrow 6B=-6 \longrightarrow B=-1$

$x=1$ $7A-7+C+d=8$

$7A+C+d=15$

$x=-1: -7A-7-C+d=-15$

$2d=0 \longrightarrow d=0$

$7A+C=15$ نعوض (1)

$20\,A-10+8\,C=38$ نعوض $x=2$

$20\,A+8C=48 \quad \div 4$

$5A+2C=12$ 1 $5A+2C=12$

$7A+C=15$ −2 $-14\,A-2C=-30$

$-9A=-18 \longrightarrow A=2$

بالتعويض $5(2)+2C=12 \longrightarrow 2C=2 \longrightarrow C=1$

$$\Rightarrow\int\frac{2}{x}+\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{x^2+6}\,dx$$

$$=2\ln|x|+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln|\,x^2+6\,|+C$$

---

⑱ $\displaystyle\int\frac{5x-2}{(x-2)^2}\,dx$

الحل:

$$\frac{5x-2}{(x-2)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}$$

$A\,(x-2)+B\;=5x-2$

$x=2: B=10-2=8$

$x=0: -2A+8=-2 \longrightarrow -2A=-10 \longrightarrow A=5$

$$\Rightarrow\int\frac{5}{x-2}+\frac{8}{(x-2)^2}\,dx$$

$$=\int\frac{5}{x-2}+8\,(x-2)^{-2}\,dx$$

$$=5\ln|x-2|+8\,\frac{(x-2)^{-1}}{-1}+C$$

$$=5\ln|x-2|-\frac{8}{x-2}+C$$

أجد قيمة كل من التكاملات الآتية:

⑲ $\int_{2}^{4} \frac{6+3x-x^2}{x^3+2x^2}\,dx$

الحل:

$$\frac{6+3x-x^2}{x^2\,(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+2}$$

$$A\,(x)(x+2) + B\,(x+2) + C\,x^2 = 6+3x-x^2$$

$$x = 0:\ 2B = 6 \longrightarrow B = 3$$

$$x = -2:\ 4\,C = 6-6-4 = -4 \longrightarrow C = -1$$

$$x = 1,\ B = 3\ ,\ C = -1$$

$$3A + 9 - 1 = 6 + 3 - 1 \longrightarrow 3A = 0$$

$$\longrightarrow A = 0$$

$$= \int_{2}^{4} \frac{3}{x^2} + \frac{-1}{x+2}\quad dx$$

$$= 3\,\frac{x^{-1}}{-1} - \ln|x+2|\Big|_{2}^{4}$$

$$= -\frac{3}{x} - \ln|x+2|\Big|_{2}^{4}$$

$$=(-\frac{3}{4} - \ln 6) - (-\frac{3}{2} - \ln 4)$$

$$= \frac{3}{4} - \ln 6 + \ln 4$$

---

⑳ $\int_{\frac{-1}{3}}^{\frac{1}{3}} \frac{9x^2+4}{9x^2-4}\,dx$

الحل:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 9x^2-4\,\overline{\big)\,9\cancel{x}^2+4} \\ -\,\cancel{9}x^2 \overset{\oplus}{-} 4 \\ \hline 8 \end{array}$$

$$\int_{\frac{-1}{3}}^{\frac{1}{3}} 1 + \frac{8}{9x^2-4}$$

$$\frac{8}{9x^2-4} = \frac{8}{(3x-2)(3x+2)}$$

$$= \frac{A}{3x-2} + \frac{B}{3x+2}$$

$$A(3x+2) + B(3x-2) = 8$$

$$x = -\frac{2}{3}: B\,(-4) \longrightarrow B = -2$$

$$x = \frac{2}{3}: A(4) = 8 \longrightarrow A = 2$$

$$\Rightarrow \int_{\frac{-1}{3}}^{\frac{1}{3}} 1 + \frac{2}{3x-2} + \frac{-2}{3x+2}\quad dx$$

$$= x + \frac{2}{3}\ln|\,3x-2\,| + -\frac{2}{3}\ln|\,3x+2|\Big|_{\frac{-1}{3}}^{\frac{1}{3}}$$

$$= (\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\ln 1 - \frac{2}{3}\ln 3) - (-\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\ln 3 - \frac{2}{3}\ln 1)$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{4}{3}\ln 3$$

㉑ $\int_{0}^{1} \frac{17-5x}{(2x+3)(2-x)^2}\,dx$

الحل:

$$\frac{17-5x}{(2x+3)(2-x)^2} =$$

$$\frac{A}{2x+3} + \frac{B}{2-x} + \frac{C}{(2-x)^2}$$

$$A\,(2-x)^2 + B\,(2-x)(2x+3)$$

$$+\,C\,(2x+3) = 17-5x$$

$$x = 2:\ \ 7C = 17 - 10 = 7 \longrightarrow C = 1$$

$$x = -\frac{3}{2}: A\,(2+\frac{3}{2})^2 = 17 + 5\,(\frac{3}{2})$$

$$A\,(\frac{49}{4}) = \frac{49}{2} \longrightarrow A = \frac{49}{2} \times \frac{4}{49} = 2$$

$$x = 1, A = 2\ ,\ C = 1$$

$$2 + 5B + 5 = 12 \longrightarrow 5B = 5 \longrightarrow B = 1$$

$$= \int_{0}^{1} \frac{2}{2x+3} + \frac{1}{2-x} + \frac{1}{(2-x)^2}\,dx$$

$$= \frac{2}{2}\ln|2x+3| - \ln|2-x| + \frac{1}{2-x}\Big|_{0}^{1}$$

$$=(\ln 5-\ln 1+1)-(\ln 3-\ln 2+\frac{1}{2})$$

$$=\ln 5-\ln 3+\ln 2+\frac{1}{2}$$

$$=\ln\left(\frac{5\times 2}{3}\right)+\frac{1}{2}=\ln\frac{10}{3}+\frac{1}{2}$$

㉒ $$\int_1^4 \frac{4}{16x^2+8x-3}\,dx$$

الحل:

$$\frac{4}{(4x+3)(4x-1)}=\frac{A}{4x+3}+\frac{B}{4x-1}$$

$$A\,(4x-1)+B\,(4x+3)=4$$

$$x=\frac{1}{4}:\ \ B\,(4)=4\longrightarrow B=1$$

$$x=-\frac{3}{4}:A\,(-4)=4\longrightarrow A=-1$$

$$=\int_1^4 \frac{-1}{4x+3}+\frac{1}{4x-1}\,dx$$

$$=-\frac{1}{4}\ln|4x+3|+\frac{1}{4}\ln|4x-1|\Big|_1^4$$

$$=(-\frac{1}{4}(\ln 19)+\frac{1}{4}\ln 15)-(-\frac{1}{4}\ln 7+\frac{1}{4}\ \ln 3)$$

㉓ $$\int_3^4 \frac{5x+5}{x^2+x-6}\,dx$$

الحل:

$$\int_3^4 \frac{5x+5}{(x+3)(x-2)}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-2}$$

$$A\,(x-2)+B\,(x+3)=5x+5$$

$$x=2:\ \ 5B\ =15\longrightarrow B=3$$

$$x=-3:\ \ -5\,A=-10\longrightarrow A=2$$

$$=\int_3^4 \frac{2}{x+3}+\frac{3}{x-2}\,dx$$

$$=2\ln|x+3|+\ 3\ln|x-2|\Big|_3^4$$

$$=(2\ln 7+3\ln 2)-(2\ln 6+3\ln 1)$$

$$=\ \ln\left(\frac{49\times 8}{36}\right)$$

㉔ $$\int_3^4 \frac{4}{x^3-4x^2+4x}\,dx$$

الحل:

$$=\int_3^4 \frac{4}{x(x^2-4x+4)}\,dx=\int_3^4 \frac{4}{x(x-2)^2}\,dx$$

$$\frac{4}{x(x-2)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}$$

$$A\,(x-2)^2+B\,(x)(x-2)+C\,x=4$$

$$x=2:\ 0+0+C(2)=4\longrightarrow\ C=2$$

$$x=0\ :\ 4\,A=4\longrightarrow\ A=1$$

$$x=1, A=1\ , C=2$$

$$1+-B+2=4\longrightarrow B=-1$$

$$=\int_3^4 \frac{1}{x}+\frac{-1}{x-2}+\frac{2}{(x-2)^2}\,dx$$

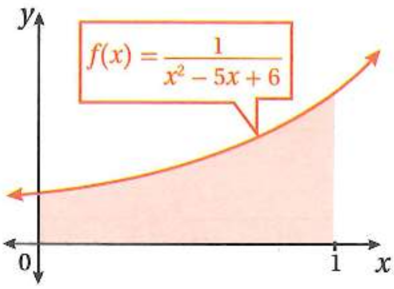
$$=\ln|\,x\,|-\ln|x-2|-\frac{2}{x-2}\Big|_3^4$$

$$=(\ln 4-\ln 2-\frac{2}{2})-(\ln 3-\ln 1-2)$$

$$=\ln\frac{4}{2\times 3}+1=\ln\frac{2}{3}+1$$

أجد مساحة المنطقة المظللة في كل من التمثيلين البيانيين الآتيين:

㉕



الحل:

$$A = \int_0^1 \frac{1}{x^2 - 5x + 6}\, dx$$

$$\frac{1}{(x-3)(x-2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2}$$

$$A\,(x-2) + B\,(x-3) = 1$$

$$x = 2:\ \ B = -1$$

$$x = 3:\ \ A = 1$$

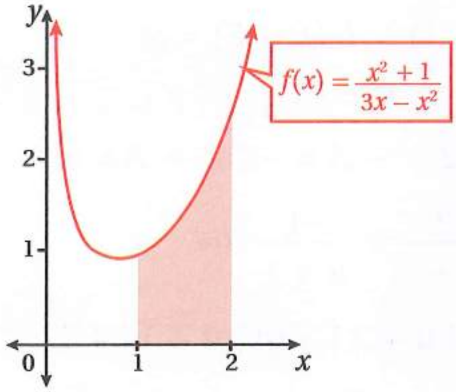
$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{x-3} + \frac{-1}{x-2}\, dx$$

$$= \ln|x-3| - \ln|x-2|\Big|_0^1$$

$$= (\ln 2) - \ln 1) - (\ln 3 - \ln 2)$$

$$= \ln\left(\frac{2 \times 2}{3}\right) = \ln \frac{4}{3}$$

26



الحل:

$$\begin{array}{rl} & \quad\ -1 \\ \cline{2-2} -x^2 + 3x \big) & \cancel{x^2} + 1 \\ & \underline{-\,\cancel{x^2} \overset{\oplus}{-} 3x} \\ & \qquad 3x + 1 \end{array}$$

$$A = \int_1^2 \frac{x^2+1}{3x-x^2}\, dx$$

$$= \int_1^2 -1 + \frac{3x+1}{3x-x^2}\, dx$$

$$\frac{3x+1}{x(3-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{3-x}$$

$$A\,(3-x) + B\,x = 3x + 1$$

$$x = 3:\ \ B\,(3) = 10 \longrightarrow B = \frac{10}{3}$$

$$x = 0:\ \ 3A = 1 \longrightarrow B = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \int_1^2 -1 + \frac{\frac{1}{3}}{x} + \frac{\frac{10}{3}}{3-x}\, dx$$

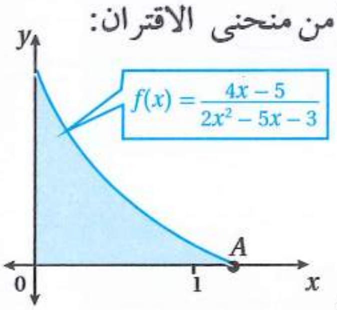
$$= -x + \frac{1}{3}\ln|x| - \frac{10}{3}\ln|3-x|\Big|_1^2$$

$$= (-2 + \frac{1}{3}\ln 2 - \frac{10}{3}\ln 1) - (-1 + \frac{1}{3}\ln 1 - \frac{10}{3}\ln 2)$$

$$= -1 + \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{10}{3}\ln 2 = -1 + \frac{11}{3}\ln 2$$

يمثل الشكل المجاور جزءاً من منحنى الاقتران:

$$f(x) = \frac{4x-5}{2x^2-5x-3}$$



27 أجد إحداثيي النقطة A

الحل:

$$4x - 5 = 0 \longrightarrow x = \frac{5}{4} \longrightarrow A = (\frac{5}{4}, 0)$$

28 أجد مساحة المنطقة المظللة

الحل:

$$A = \int_0^{\frac{5}{4}} \frac{4x-5}{2x^2-5x-3}\, dx$$

$$\frac{4x-5}{(2x+1)(x-3)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x-3}$$

$$A\,(x-3) + B\,(2x+1) = 4x - 5$$

$$x = 3:\ \ 7B = 7 \longrightarrow B = 1$$

$$x = -\frac{1}{2} : A\,(-\frac{7}{2}) = -7 \longrightarrow A = 2$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{5}{4}} \frac{2}{2x+1} + \frac{1}{x-3}\, dx$$

$$= \frac{2}{2}\ln|2x+1|\Big|_0^{\frac{5}{4}} + \ln|x-3|\Big|_0^{\frac{5}{4}}$$

$$= \left(\ln\frac{7}{2} + \ln\frac{7}{4}\right) - (\ln 1 + \ln 3)$$

$$= \ln\left(\frac{\frac{7}{2} \times \frac{7}{4}}{3}\right)$$

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

㉙ $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos x + \cos^2 x}\, dx$

الحل:

$$\cos x = u \longrightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$$

$$= \int \frac{\sin x}{u + u^2} \cdot \frac{du}{-\sin x} = -\int \frac{1}{u + u^2}\, du$$

$$= \frac{1}{u\,(1+u)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{1+u}$$

$$A\,(1+u) + B\,u = 1$$

$$u = -1: \quad B = -1$$

$$u = 0: \quad A = 1$$

$$\Rightarrow -\int \frac{1}{u} + \frac{-1}{1+u}\, du = -(\ln|u| - \ln|1+u|) + C$$

$$= -\ln|\cos x| + \ln|1 + \cos x| + C$$

㉚ $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 + x\sqrt{x}}\, dx$

الحل:

$$u = \sqrt{x}$$

$$u^2 = x \longrightarrow dx = 2u\,.\,du$$

$$= \int \frac{1}{u^4 + u^2 . u} \,.\, 2u\, du = \int \frac{2}{u^3 + u^2}\, du$$

$$= \int \frac{2}{u^3 + u^2} = \frac{2}{u^2\,(u+1)}$$

$$= \frac{A}{u} + \frac{B}{u^2} + \frac{C}{u+1}$$

$$A\,(u)(u+1) + B\,(u+1) + C\,u^2 = 2$$

$$u = 0: \longrightarrow B = 2$$

$$u = -1: \longrightarrow C = 2$$

$$u = 1: 2A + 4 + 2 = 2 \longrightarrow A = -2$$

$$\int \frac{-2}{u} + \frac{2}{u^2} + \frac{2}{u+1}$$

$$= -2\ln|u| - \frac{2}{u} + 2\ln|u+1| + C$$

$$= -2\ln|\sqrt{x}| - \frac{2}{\sqrt{x}} + 2\ln|\sqrt{x} + 1| + C$$

㉛ $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 3e^x + 2}\, dx$

الحل:

$$e^x = u \longrightarrow dx = \frac{du}{e^x} = \frac{du}{u}$$

$$= \int \frac{u^2}{u^2 + 3u + 2} \cdot \frac{du}{u} = \int \frac{u}{u^2 + 3u + 2}\, du$$

$$\frac{u}{(u+2)(u+1)} = \frac{A}{u+2} + \frac{B}{u+1}$$

$$A\,(u+1) + B\,(u+2) = u$$

$$u = -1: \quad B = -1$$

$$u = -2: \quad -A = -2 \longrightarrow A = 2$$

$$= \int \frac{2}{u+2} + \frac{-1}{u+1}\, du$$

$$= 2\ln|u+2| - \ln|u+1| + C$$

$$= 2\ln|e^x + 2| - \ln|e^x + 1| + C$$

㉜ $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin x\,(\sin^2 x - 4)}\, dx$

الحل:

$$\sin x = u \longrightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$= \int \frac{\cos x}{u(u^2 - 4)} \cdot \frac{du}{\cos x} = \int \frac{1}{u\,(u-2)(u+2)}\, du$$

$$= \frac{A}{u} + \frac{B}{u-2} + \frac{C}{u+2}$$

$$A(u-2)(u+2) + B(u)(u+2) + C(u)(u-2) = 1$$

$$u=2:\ 8B=1\longrightarrow B=\frac{1}{8}$$

$$u=-2:\ 8C=1\longrightarrow C=\frac{1}{8}$$

$$u=0,\ -4A=1\longrightarrow A=-\frac{1}{4}$$

$$=\int\frac{-\frac{1}{4}}{u}+\frac{\frac{1}{8}}{u-2}+\frac{\frac{1}{8}}{u+2}\,du$$

$$=-\frac{1}{4}\ln|u|+\frac{1}{8}\ln|u-2|+\frac{1}{8}\ln|u+2|+C$$

$$=-\frac{1}{4}\ln|\sin x|+\frac{1}{8}\ln|\sin x-2|$$

$$+\frac{1}{8}\ln|\sin x+2|+C$$

تبرير: أحل السؤالين الآتيين تباعاً:

33 أجد: $\int\frac{dx}{1+e^x}$ بطريقتين مختلفتين، إحداهما الكسور الجزئية، مبرراً إجابتي

الحل:

$$e^x=u\longrightarrow dx=\frac{du}{e^x}=\frac{du}{u}$$

$$=\int\frac{1}{1+u}\cdot\frac{du}{u}$$

$$=\frac{1}{(1+u)(u)}=\frac{A}{1+u}+\frac{B}{u}$$

$$A(u)+B(1+u)=1$$

$$u=0:\quad B=1$$

$$u=-1:\quad A=-1$$

$$=\int\frac{-1}{1+u}+\frac{1}{u}\,du$$

$$=-\ln|1+u|+\ln|u|+C$$

$$=-\ln|1+e^x|+x+C$$

وأيضاً $\int\frac{dx}{1+e^x}\times\frac{e^x}{e^x}=\int\frac{e^x\,dx}{(1+e^x)\,e^x}$

$$e^x=u\,......\longrightarrow=-\ln|1+e^x|+x+C$$

34 أجد: $\int_0^{\ln 2}\frac{1}{1+e^x}$

الحل:

$$\int_0^{\ln 2}\frac{1}{1+e^x}=-\ln|1+e^x|+x\Big|_0^{\ln 2}$$

$$=-(\ln(1+e^{\ln 2})+\ln 2)-(\ln(1+1)+0)$$

$$=-\ln 3+\ln 2+\ln 2=\ln\frac{4}{3}$$

---

35 تبرير: أثبت أن:

$$\int_4^9\frac{5x^2-8x+1}{2x(x-1)^2}dx=\ln\left(\frac{32}{3}\right)-\frac{5}{24}$$

الحل:

$$\int_4^9\frac{5x^2-8x+1}{2x(x-1)^2}=$$

$$\frac{5x^2-8x+1}{2x(x-1)^2}=\frac{A}{2x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

$$A(x-1)^2+B(2x)(x-1)+C(2x)=5x^2-8x+1$$

$$x=1:\ 2C=-2\longrightarrow C=-1$$

$$x=0:\ A=1$$

$$x=2,\quad 1+4B+-4=20-16+1$$

$$4B=5+3=8\longrightarrow B=2$$

$$\int_4^9\frac{1}{2x}+\frac{2}{x-1}+\frac{-1}{(x-1)^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x|+2\ln|x-1|+\frac{1}{x-1}\Big|_4^9$$

$$=(\frac{1}{2}\ln 9+2\ln 8+\frac{1}{8})-(\frac{1}{2}\ln 4+\ln 3+\frac{1}{3})$$

$$=\frac{1}{2}\ln 9+2\ln 8-\frac{1}{2}\ln 4-2\ln 3+\frac{1}{8}+-\frac{1}{3}$$

$$=\frac{1}{2}\ln 3^2+\ln 8^2-\frac{1}{2}\ln 2^2-\ln 3^2+\frac{3-8}{24}$$

$$=\ln 3+\ln 64-\ln 2-\ln 9+\frac{-5}{24}$$

$$=\ln\frac{3\times 64}{2\times 9}-\frac{5}{24}=\ln\frac{32}{3}-\frac{5}{24}$$

36 تبرير: أثبت أن:

$$\int_{9}^{16} \frac{2\sqrt{x}}{x-4}\,dx = 4\left(1+\ln\left(\frac{5}{3}\right)\right)$$

الحل:

$$\sqrt{x} = u \longrightarrow x = u^2 \longrightarrow dx = 2u\,.\,du$$

$$x = 9 \longrightarrow u = 3 \quad , \quad x = 16 \longrightarrow u = 4$$

$$= \int_{3}^{4} \frac{2u}{u^2-4}\,.\,2u\,.\,du = \int_{3}^{4} \frac{4u^2}{u^2-4}\,du$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ u^2-4\overline{)\,\cancel{4u^2}\qquad\qquad} \\ -\cancel{4u^2}\overset{\oplus}{-}16 \\ \hline 16 \end{array}$$

$$= \int_{3}^{4} 4 + \frac{16}{u^2-4}\,du$$

$$\frac{16}{(u-2)(u+2)} = \frac{A}{u-2} + \frac{B}{u+2}$$

$$A(u+2) + B(u-2) = 16$$

$$u = -2 : \quad -4B = 16 \longrightarrow B = -4$$

$$u = 2 : \ 4A = 16 \longrightarrow A = 4$$

$$= \int_{3}^{4} 4 + \frac{4}{u-2} + \frac{4}{u+2}\,du$$

$$= 4u + 4\ln|u-2| - 4\ln|u+2|\Big|_{3}^{4}\,)$$

$$= 4(u + \ln|u-2| - \ln|u+2|\Big|_{3}^{4})$$

$$= 4\,(4 + \ln 2 - \ln 6) - (3 + \ln 1 - \ln 5))$$

$$= 4(1 + \ln\frac{2\times 5}{6}) = 4\,(1 + \ln\,(\frac{5}{3})$$

---

37 تبرير: أثبت أن:

$$\int_{0}^{1} \frac{4x^2+9x+4}{2x^2+5x+3}\,dx = 2 + \frac{1}{2}\ln\,\frac{5}{12}$$

الحل:

$$\begin{array}{r} 2 \\ 2x^2+5x+3\overline{)\,\cancel{4x^2}+9x+4} \\ -\cancel{4x^2}\overset{\ominus}{+}10x\overset{\ominus}{+}6 \\ \hline -x-2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \int 2 + \frac{-x-2}{2x^2+5x+3}\,dx$$

$$\frac{-x-2}{2x^2+5x+3} = \frac{-x-2}{(2x+3)\,(x+1)}$$

$$= \frac{A}{2x+3} + \frac{B}{x+1}$$

$$A\,(x+1) + B\,(2x+3) = -x-2$$

$$x = -1 : \quad B = -1$$

$$x = \frac{-3}{2} : A\,(\frac{-1}{2}) = \frac{3}{2} - 2 = \frac{-1}{2} \longrightarrow A = 1$$

$$= \int_{0}^{1} 2 + \frac{1}{2x+3} + \frac{-1}{x+1}\,dx$$

$$= 2x + \frac{1}{2}\ln|2x+3| - \ln|x+1|\Big|_{0}^{1}$$

$$= (2 + \ln\frac{1}{2}\ln 5 - \ln 2) - (0 + \frac{1}{2}\ln 3 - \ln 1)$$

$$= 2 + \frac{1}{2}\ln 5 - \ln 2 - \frac{1}{2}\ln 3$$

$$= 2 + \frac{1}{2}(\ln 5 - \ln 2^2 - \ln 3)$$

$$= 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{5}{4\times 3} = 2 + \frac{1}{2}\ln\,\frac{5}{12}$$

تحدٍ: أجد كلاً من التكاملات الآتية:

38 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x}\,dx$

الحل:

$$u = \sqrt{x} \longrightarrow u^2 = x \quad \longrightarrow dx = 2u\,.\,du$$

$$= \int \frac{\sqrt{1+u}}{u^2}\,.\,2u\,.\,du = \int 2\,\frac{\sqrt{1+u}}{u}\,du$$

$$\sqrt{1+u} = L \longrightarrow 1 + u = L^2 \longrightarrow u = L^2 - 1$$

$$du = 2L\,.\,dL$$

$$= \int \frac{2L}{L^2-1}\,.\,2L\,dL = \int \frac{4\,L^2}{L^2-1}\,dL$$

$$\begin{array}{r|l} & 4 \\ \hline L^2-1 & \cancel{4L^2} \\ & -\cancel{4}L^2 \overset{\oplus}{-} 4 \\ \hline & \qquad 4 \end{array}$$

$$\int 4+\frac{4}{L^2-1}\,dL$$

$$\frac{4}{L^2-1}=\frac{A}{L-1}+\frac{B}{L+1}$$

$A(L+1)+B(L-1)=4$

$L=-1:-2B=4\longrightarrow B=-2$

$L=1:2A=4\longrightarrow A=2$

$$\int 4+\frac{2}{L-1}+\frac{-2}{L+1}\,dL$$

$=uL+2\ln|L-1|-2\ln|L+1|+C$

$=4\sqrt{1+u}+2\ln|\sqrt{1+u}-1|$

$-2\ln|\sqrt{1+u}+1|+C$

$=4\sqrt{1+u}+2\ln|\sqrt{1+u}-1|$

$-2\ln|\sqrt{1+u}+1|+C$

$=4\sqrt{1+\sqrt{x}}+2\ln|\sqrt{1+\sqrt{x}}-1|$

$-2\ln|\sqrt{1+\sqrt{x}}+1|+C$

---

39 $$\int\frac{x}{16x^4-1}\,dx$$

الحل:

$u=x^2\longrightarrow dx=\dfrac{du}{2x}$

$$=\int\frac{x}{16u^2-1}\cdot\frac{du}{2x}=\frac{1}{2}\int\frac{1}{16u^2-1}\,du$$

$$\frac{1}{(4u-1)(4u+1)}=\frac{A}{4u-1}+\frac{B}{4u+1}$$

$A(4u+1)+B(4u-1)=1$

$u=-\dfrac{1}{4}:\ B(-2)=1\longrightarrow B=-\dfrac{1}{2}$

$u=\dfrac{1}{4}:\ A(2)=1\longrightarrow A=\dfrac{1}{2}$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\frac{1}{2}}{4u-1}+\frac{-\frac{1}{2}}{4u+1}\ du$$

$=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}|\ln 4x-1|$

$-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}|\ln 4u+1|$

$=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{8}\ln|4x^2-1|)-\dfrac{1}{8}\ln|4x^2+1|+C$

---

40 $$\int\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\,dx$$

الحل:

6 هي المضاعف المشترك الأصغر للعددين 2,3

$u=\sqrt[6]{x}\longrightarrow u^6=x\longrightarrow dx=6u^5\,du$

$$=\int\frac{1}{\sqrt{u^6}-\sqrt[3]{u^6}}\,.\,6u^5\,du$$

$$=\int\frac{6u^5\,du}{u^3-u^2}=\int\frac{6u^5}{u^2(u-1)}\,du$$

$$=\int\frac{6u^3}{(u-1)}$$

$$\begin{array}{r|l} & 6u^2+6u+6 \\ \hline u-1 & 6\cancel{u}^3 \\ & -\cancel{6}u^3 \overset{\oplus}{-} 6u^2 \\ \hline & \quad 6\cancel{u}^2 \\ & -\ \cancel{6}u^2 \overset{\oplus}{-} 6u \\ \hline & \qquad\quad 6\cancel{u} \\ & \qquad \overset{\oplus}{-}\cancel{6}u \overset{\oplus}{-} 6 \\ \hline & \qquad\qquad 6 \end{array}$$

$$=\int 6u^2+6u+6+\frac{6}{u-1}\,du$$

$=2u^3+3u^2+6u+6\ln|u-1|+C$

$=2(\sqrt[6]{x})^3+(3\sqrt[6]{x})^2+6\sqrt[6]{x}$

$+6\ln|\sqrt[6]{x}-1|+C$

كتاب التمارين ص 14

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

① $\displaystyle\int \frac{4}{x^2+4x}\,dx$

الحل:

$$\frac{4}{x(x+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+4}$$

$A\,(x+4) + B\,(x) = 4$

$x = -4:\ B = -1$

$x = 0:\quad A = 1$

$$= \int \frac{1}{x} + \frac{-1}{x+4}\,dx = \ln|x| - \ln|x+4| + C$$

② $\displaystyle\int \frac{6}{x^2-9}\,dx$

الحل:

$$\frac{6}{(x-3)\,(x+3)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3}$$

$A\,(x+3) + B\,(x-3) = 6$

$x = -3 : -6\,B = 6 \longrightarrow B = -1$

$x = 3 : 6A = 6 \longrightarrow A = 1$

$$= \int \frac{1}{x-3} + \frac{-1}{x+3}\,dx$$

$= \ln|x-3| - \ln|x+3| + C$

③ $\displaystyle\int \frac{x^2-3x+8}{x^3-3x-2}\,dx$

الحل:

$x = 2 : 8 - 6 - 2 = 0$

$x = 2 : \longrightarrow x - 2$ عامل

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2+2x+1 \\ \hline
x-2 & \cancel{x^3}-3x+8 \\
 & \overset{\ominus}{+}\cancel{x^3}\overset{\oplus}{-}2x^2 \\ \cline{2-2}
 & \quad 2\cancel{x^2}-3x-2 \\
 & \quad \overset{\ominus}{+}2\cancel{x^2}\overset{\oplus}{-}4x \\ \cline{2-2}
 & \qquad\quad x-2 \\
 & \qquad \overset{\ominus}{+}x\overset{\oplus}{-}2 \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad 0
\end{array}$$

$x^3 - 3x - 2 = (x-2)\,(x^2+2x+1)$

$\qquad = (x-2)\,(x+1)^2$

$$\frac{x^2-3x+8}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

$A(x+1)^2 + B\,(x-2)(x+1) + C(x-2)$

$= x^2 - 3x + 8$

$x = -1: -3C = 12 \longrightarrow C = -4$

$x = 2 : 9A = 6 \longrightarrow A = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

$x = 0: \frac{2}{3} - 2B + 8 = 8 \longrightarrow B = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow \int \frac{\frac{2}{3}}{x-2} + \frac{\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{-4}{(x+1)^2}\,dx$$

$$\frac{2}{3}\ln|x-2| + \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{4}{x+1} + C$$

④ $\displaystyle\int \frac{x-10}{x^2-2x-8}\,dx$

الحل:

$$\frac{x-10}{(x-4)\,(x+2)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2}$$

$A\,(x+2) + B\,(x-4) = x - 10$

$x = -2 : -6\,B = -12 \longrightarrow B = 2$

$x = 4 : 6A = -6 \longrightarrow A = -1$

$$= \int \frac{-1}{x-4} + \frac{2}{x+2}\,dx$$

$= -\ln|x-4| + 2\ln|x+2| + C$

⑤ $\displaystyle\int \frac{2x^2+6x-2}{2x^2+x-1}\,dx$

الحل:

$$\begin{array}{r|l}
 & 1 \\ \hline
2x^2+x-1 & 2\cancel{x^2}+6x-2 \\
 & -2\cancel{x^2}\overset{\ominus}{+}x\overset{\oplus}{-}1 \\ \cline{2-2}
 & \qquad 5x-1
\end{array}$$

$$= \int 1 + \frac{5x-1}{2x^2+x-1}$$

$$\frac{5x-1}{2x^2+x-1} = \frac{A}{(2x-1)} + \frac{B}{(x+1)}$$

$A\,(x+1) + B\,(2x-1) = 5x - 1$

$x = -1 : -3\,B = -6 \longrightarrow B = 2$

$x = \frac{1}{2} : A(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2} \longrightarrow A = 1$

$$\Rightarrow \int 1 + \frac{1}{2x-1} + \frac{2}{x+1}\,dx$$

$$= x + \frac{1}{2}\ln|2x-1| + 2\ln|x+1| + C$$

⑥ $\displaystyle\int \frac{2x^2 - x + 6}{(x^2+2)\,(x+1)}\,dx$

الحل:

$$\frac{2x^2-x+6}{(x^2+2)\,(x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$$

$A(x^2+2) + (x+1)\,(Bx+C) = 2x^2 - x + 6$

$x = -1 : 3A = 2 + 1 + 6 = 9 \longrightarrow A = 3$

$x = 0:\ \ 6 + C = 6 = \longrightarrow C = 0$

$x = 1 : A = 3\,,\, C = 0$

$9 + 2B = 2 - 1 + 6 = 7 \longrightarrow B = -1$

$$\Rightarrow \int \frac{3}{x+1} + \frac{-x}{x^2+2}\,dx$$

$$= 3\ln|\,x+1\,| - \frac{1}{2}\ln|\,x^2+2\,| + C$$

⑦ $\displaystyle\int \frac{8x+24}{(x+1)(x-3)^2}\,dx$

الحل:

$$\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2}$$

$A\,(x-3)^2 + B\,(x+1)(x-3)$
$\qquad + C\,(x+1) = 8x + 24$

$x = 3 :\ \ 4C = 48 \longrightarrow C = 12$

$x = -1 : 16A = 16 \longrightarrow A = 1$

$x = 0 : 9 - 3B + 12 = 24 \longrightarrow B = -1$

$$= \int \frac{1}{x+1} + \frac{-1}{x-3} + \frac{12}{(x-3)^2}\,dx$$

$$= \ln|x+1| - \ln|x-3| + 12\,\frac{(x-3)^{-1}}{-1}$$

$$= \ln|x+1| - \ln|x-3| - \frac{12}{x-3} + C$$

⑧ $\displaystyle\int \frac{8x}{x^3+x^2-x-1}\,dx$

الحل:

$1 + 1 - 1 - 1 = 0 \longrightarrow x = 1$ بالتجريب

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2 + 2x + 1 \\
\hline
x - 1 & \cancel{x^3} + x^2 - x - 1 \\
 & -\,\cancel{x^3} \overset{\oplus}{-} x^2 \\
\hline
 & \quad 2\cancel{x^2} - x - 1 \\
 & -\ \ 2\cancel{x^2} \overset{\oplus}{-} 2x \\
\hline
 & \qquad x - 1 \\
 & \qquad -x \overset{\oplus}{-} 1 \\
\hline
 & \qquad\quad 0
\end{array}$$

$$= \int \frac{8x}{(x-1)\,(x^2+2x+1)}\,dx$$

$$= \int \frac{8x}{(x-1)(x+1)^2}$$

$$= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

$A\,(x+1)^2 + B\,(x-1)(x+1) + C\,(x-1) = 8x$

$x = -1 :\ \ -2C = -8 \longrightarrow C = 4$

$x = 1 : 4A = 8 \longrightarrow A = 2$

$x = 0 : 2 - B - 4 = 0 \longrightarrow B = -2$

$$= \int \frac{2}{x-1} + \frac{-2}{x+1} + \frac{4}{(x+1)^2}\,dx$$

$$= 2\ln|x-1| - 2\ln|x+1| + \frac{4(x+1)^{-1}}{-1} + C$$

$$= 2\ln|x-1| - 2\ln|x+1| - \frac{4}{x+1} + C$$

⑨ $\int \frac{4}{x^3-2x^2}\,dx$

الحل:

$$= \int \frac{4}{x^2(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2}$$

$A(x)(x-2) + B(x-2) + Cx^2 = 4$

$x=2:\ 4C=4 \longrightarrow C=1$

$x=0:\ -2B=4 \longrightarrow B=-2$

$x=1: -A+2+1=4 \longrightarrow A=-1$

$$=\int \frac{-1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x-2}\,dx$$

$$= -\ln|x| + \frac{2}{x} + \ln|x-2| + C$$

أجد قيمة كل من التكاملات الآتية:

⑩ $\int_1^5 \frac{x-1}{x^2(x+1)}\,dx$

الحل:

$$\frac{x-1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$$

$A(x)(x+1) + B(x+1) + Cx^2 = x-1$

$x=0:\ B=-1$

$x=-1:\ C=-2$

$x=1: 2A + -2 - 2 = 0 \longrightarrow A=2$

$$=\int_1^5 \frac{2}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{-2}{x+1}\,dx$$

$$= 2\ln|x| - \frac{x^{-1}}{-1} - 2\ln|x+1| \Big|_1^5$$

$$= (2\ln 5 + \frac{1}{5} - 2\ln 6) - (2\ln 1 + 1 - 2\ln 2)$$

⑪ $\int_7^{12} \frac{4-x}{(x-2)^2}\,dx$

الحل:

$$\frac{4-x}{(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2}$$

$A(x-2) + B = 4-x$

$x=2: B=2$

$x=0: -2A+2=4 \longrightarrow A=-1$

$$= \int_7^{12} \frac{-1}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2}\,dx$$

$$= -\ln|x-2| + \frac{-2}{x-2} \Big|_7^{12}$$

$$= (-\ln 10 - \frac{2}{10}) - (-\ln 5 - \frac{2}{5})$$

⑫ $\int_1^2 \frac{4}{x^2+8x+15}\,dx$

الحل:

$$\frac{4}{(x+5)(x+3)} = \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x+3}$$

$A(x+3) + B(x+5) = 4$

$x=-3: 2B=4 \longrightarrow B=2$

$x=-5: -2A=4 \longrightarrow A=-2$

$$= \int_1^2 \frac{-2}{x+5} + \frac{2}{x+3}\,dx$$

$$= -2\ln|x+5| + 2\ln|x+3| \Big|_1^2$$

$$= (-2\ln 7 + 2\ln 5) - (-2\ln 6 + 2\ln 4)$$

$$= 2\ln\frac{5\times 6}{7\times 4} = 2\ln\frac{30}{28}$$

⑬ $\int_1^2 \frac{10x^2-26x+10}{2x^2-5x}\,dx$

الحل:

$$\begin{array}{r|l} & \quad 5 \\ \hline 2x^2-5x & \cancel{10x^2} - 26x + 10 \\ & -\cancel{10x^2} \overset{\oplus}{-} 25x \\ \hline & \qquad -x + 10 \end{array}$$

$$= \int_1^2 5 + \frac{-x+10}{2x^2-5x}$$

$$= \frac{-x+10}{2x^2-5x} = \frac{-x+10}{x(2x-5)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x-5}$$

$A(2x-5) + Bx = -x + 10$

$x=0: -5A=10 \longrightarrow A=-2$

$x=\frac{5}{2}: B(\frac{5}{2}) = -\frac{5}{2} + 10 = \frac{15}{2} \longrightarrow B=3$

$$= \int_1^2 5 + \frac{-2}{x} + \frac{3}{2x-5}\, dx$$

$$= 5x - 2\ln x + \frac{3}{2}\ln|2x-5|\Big|_1^2$$

$$= \left(10 - 2\ln 2 + \frac{3}{2}\ln(1)\right)$$

$$- \left(5 - 2\ln 1 + \frac{3}{2}\ln(3)\right)$$

---

⑭ $\displaystyle\int_2^5 \frac{25}{(x+1)(2x-3)^2}\, dx$

الحل:

$$\frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x-3} + \frac{C}{(2x-3)^2}$$

$$A(2x-3)^2 + B(x+1)(2x-3) + C(x+1) = 25$$

$$x = -1 : 25A = 25 \longrightarrow A = 1$$

$$x = \frac{3}{2} : C\left(\frac{3}{2}+1\right) = C\left(\frac{5}{2}\right) = 25$$

$$\longrightarrow C = \frac{25\times 2}{5} = 10$$

$$x = 0, 9 + -3B + 10 = 25 \longrightarrow -3B = 6$$

$$\longrightarrow B = -2$$

$$= \int_2^5 \frac{1}{x+1} + \frac{-2}{2x-3} + \frac{10}{(2x-3)^2}\, dx$$

$$= \ln|x+1| - \frac{2}{2}\ln|2x-3| + \frac{10(2x-3)^{-1}}{-1\times 2}\Big|_2^5$$

$$= \ln|x+1| - \ln|2x-3| - \frac{5}{2x-3}\Big|_2^5$$

$$= \left(\ln 6 - \ln 7 - \frac{5}{7}\right) - (\ln 3 - \ln 1 - 5)$$

---

⑮ $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2-3x+10}{x^2-x-6}\, dx$

الحل:

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ x^2-x-6 & x^2 \cancel{-}\, 3x + 10 \\ & \cancel{-x^2} \overset{\oplus}{-} x \overset{\oplus}{-} 6 \\ \hline & \qquad -2x + 16 \end{array}$$

$$\frac{-2x+16}{x^2-x-6} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x+2)}$$

$$A(x+2) + B(x-3) = -2x + 16$$

$$x = -2 : -5B = 20 \longrightarrow B = -4$$

$$x = 3 : 5A = 10 \longrightarrow A = 2$$

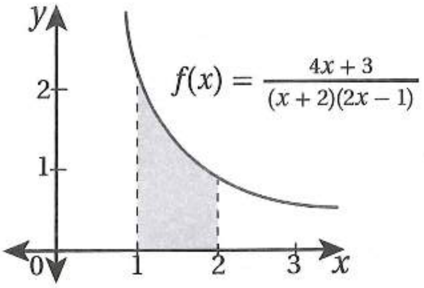
$$= \int_0^2 1 + \frac{2}{(x-3)} + \frac{-4}{(x+2)}\, dx$$

$$= x + 2\ln|x-3| - 4\ln|x+2|\Big|_0^2$$

$$= (5 + 2\ln 1 - 4\ln 4) - (0 + 2\ln 3 - 4\ln 2)$$

أجد مساحة المنطقة المظللة في كل من التمثيلين البيانيين الآتيين:

⑯



الحل:

$$A = \int_1^2 \frac{4x+3}{(x+2)(2x-1)}\, dx$$

$$\frac{4x+3}{(x+2)(2x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{2x-1}$$

$$A(2x-1) + B(x+2) = 4x + 3$$

$$x = \frac{1}{2} : \; B\left(\frac{5}{2}\right) = 5 \longrightarrow B = 2$$

$$x = -2 : \; -5A = -5 \longrightarrow A = 1$$

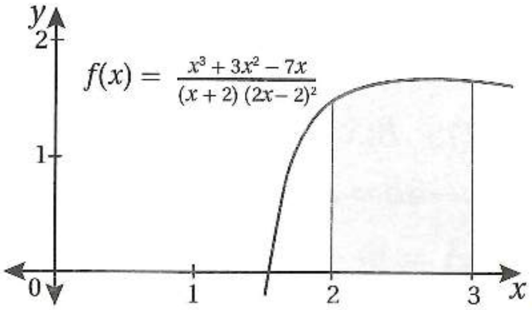
$$\Rightarrow \int_1^2 \frac{1}{x+2} + \frac{2}{2x-1}\, dx$$

$$= \ln|x+2| + \ln|2x-1|\Big|_1^2$$

$$= (\ln 4 + \ln 3) - (\ln 3 - \ln 1)$$

$$= \ln\left(\frac{4\times 3}{3}\right) = \ln 4$$

17



الحل:

$$A = \int_2^3 \frac{x^3+3x^2-7x}{(x+2)\,(2x-2)^2}\,dx$$

$$(x+2)(2x-2)^2 = (x+2)(4x^2-8x+4)$$

$$= 4x^3 - 12x + 8$$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{4} \\ 4x^3-12x+8\,\overline{\big)\;\cancel{x^3} + 3x^2 - 7x} \\ -\;\cancel{x^3} \overset{\oplus}{-} 3x \overset{\ominus}{+} 2 \\ \hline 3x^2-4x\;-2 \end{array}$$

$$= \frac{3x^2-4x\;-2}{(x+2)\,(2x-2)^2}\,dx$$

$$= \frac{A}{x+2} + \frac{B}{2x-2} + \frac{C}{(2x-2)^2}$$

$$A(2x-2)^2 + B(x+2)(2x-2) + C\,(x+2)$$

$$= 3x^2 - 4x\;-2$$

$x = 1 : \longrightarrow 3C = -3 \longrightarrow C = -1$

$x = -2 : \longrightarrow 36\,A = 18 \longrightarrow A = \frac{1}{2}$

$x = 0 : 2 - 4B - \;2 = -2 \longrightarrow B = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \int_2^3 \frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{2}}{x+2} + \frac{\frac{1}{2}}{2x-2} + \frac{-1}{(2x-2)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\ln|x+2| + \frac{1}{4}\ln|2x-2| + \frac{1}{2(2x-2)^2}\Big|_2^3$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln 5 + \frac{1}{4}\ln 4 + \frac{1}{8}$$

$$- (\frac{2}{4} + \frac{1}{2}\ln 4 + \frac{1}{4}\ln 2 + \frac{1}{4})$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{4}\ln\frac{25}{8}$$

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

18 $\displaystyle\int \frac{e^{2x}+e^x}{(e^{2x}+1)(e^x-1)}\,dx$

الحل:

$$e^x = u \longrightarrow dx = \frac{du}{e^x} = \frac{du}{u}$$

$$= \int \frac{u^2+u}{(u^2+1)(u-1)} \cdot \frac{du}{u}$$

$$= \int \frac{u+1}{(u^2+1)(u-1)}\,du$$

$$\frac{u+1}{(u^2+1)(u-1)} = \frac{A}{u-1} + \frac{Bu+C}{u^2+1}$$

$A(u^2+1) + \;(Bu+C)(u-1) = u+1$

$u = 1 :\; 2A = 2 \longrightarrow A = 1$

$u = 0 : 1 + (0+C)(-1) = 1 \longrightarrow C = 0$

$u = -1 : \;2 - B(-2) = 0 \longrightarrow B = -1$

$$= \int \frac{1}{u-1} + \frac{-1}{u^2+1}\;du$$

$$= \;\ln|u-1| - \frac{1}{2}\ln|\,u^2+1\,| \;+ C$$

$$= \ln|e^x-1| - \frac{1}{2}\ln|e^{2x}+1| + C$$

19 $\displaystyle\int \frac{5\cos x}{\sin^2 x + 3\sin x - 4}\,dx$

الحل:

$$\sin x = u \longrightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$= \int \frac{5\cos x}{u^2+3u-4} \cdot \frac{du}{\cos x} = \int \frac{5}{u^2+3u-4}\,du$$

$$\frac{5}{(u+4)(u-1)} = \frac{A}{u+4} + \frac{B}{u-1}$$

$A(u-1) + B\,(u+4) = 5$

$u = 1 :\; 5\,B = 5 \longrightarrow B = 1$

$u = -4 :\;\; -5A = 5 \longrightarrow A = -1$

$$=\int \frac{-1}{u+4}+\frac{1}{u-1}\,du$$

$$=-\ln|u+4|+\ln|u-1|+C$$

$$=-\ln|\sin x+4|+\ln|\sin x-1|+C$$

---

⑳ $$\int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x+5\tan x+6}\,dx$$

الحل:

$$\tan x=u \longrightarrow dx=\frac{du}{\sec^2 x}$$

$$=\int\frac{\sec^2 x}{u^2+5u+6}\cdot\frac{du}{\sec^2 x}=\int\frac{du}{u^2+5u+6}$$

$$\frac{1}{(u+3)(u+2)}=\frac{A}{u+3}+\frac{B}{u+2}$$

$$A(u+2)+B(u+3)=1$$

$$u=-2:\ B=1$$

$$u=-3:\ A=-1$$

$$=\int \frac{-1}{u+3}+\frac{1}{u+2}\,du$$

$$=-\ln|u+3|+\ln|u+2|+C$$

$$=-\ln|\tan x+3|+\ln|\tan x+2|+C$$

㉑ تبرير: أثبت أن:

$$\int_0^1 \frac{4x}{x^2-2x-3}\,dx=\ln\left(\frac{16}{27}\right)$$

الحل:

$$\frac{4x}{(x-3)(x+1)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+1}$$

$$A(x+1)+B(x-3)=4x$$

$$x=-1:\quad -4B=-4\longrightarrow B=1$$

$$x=3:\quad 4A=12\longrightarrow A=3$$

$$=\int_0^1 \frac{3}{x-3}+\frac{1}{x+1}\,dx$$

$$=3\ln|x-3|+\ln|x+1|\Big|_0^1$$

$$=(3\ln 2+\ln 2)-(3\ln 3+\ln 1)$$

$$=4\ln 2-3\ln 3=\ln 16-\ln 27=\ln\frac{16}{27}$$

㉒ تبرير: أثبت أن:

$$\int_1^p \frac{1}{2x^2+x-1}\,dx=\frac{1}{3}\ln\frac{4p-2}{p+1}$$ حيث $p>1$

الحل:

$$\int_1^p \frac{1}{2x^2+x-1}\,dx$$

$$\frac{1}{(2x-1)(x+1)}=\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{x+1}$$

$$A(x+1)+B(2x-1)=1$$

$$x=-1:\quad -3B=1\longrightarrow B=\frac{-1}{3}$$

$$x=\frac{1}{2}:A\left(\frac{3}{2}\right)=1\longrightarrow A=\frac{2}{3}$$

$$=\int_1^p \frac{\frac{2}{3}}{2x-1}+\frac{\frac{-1}{3}}{x+1}\,dx$$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\ln|2x-1|-\frac{1}{3}\ln|x+1|\Big|_1^p$$

$$=\left(\frac{1}{3}\ln(2p-1)-\frac{1}{3}\ln(p+1)\right)$$

$$-\left(\frac{1}{3}\ln 1-\frac{1}{3}\ln 2\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\ln\frac{(2p-1)(2)}{p+1}\right)=\frac{1}{3}\ln\frac{4p-2}{p+1}$$

الفاتن في
الرياضيات

الدرس الرابع

التكامل بالأجزاء

عند استخدام التكامل بالأجزاء نقوم بتجزئة المقدار المطلوب إلى جزأين أحدهما نفرضه u ونشتقه غالباً ما يكون كثير حدود أو $\ln$ والآخر نفرضه dv وتكامله غالباً ما يكون اقتران مثلثي أو جذر أو أسي على أن يكون ما داخلها جميعاً مقدار خطي $(ax+b)$ ثم نطبق القانون:

التكامل بالأجزاء

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

مثال

جد التكاملات الآتية:

1) $\int 5x \cos 3x$ 2) $\int \frac{4x}{\csc(2x+1)}$

3) $\int 3x\,e^{2x}\,dx$ 4) $\int x \ln x\,dx$

5) $\int \ln(x^2+2x)\,dx$ 6) $\int 2x\,5^x\,dx$

الحل

1) $\int 5x \cos 3x\,dx$

$u = 5x \qquad dv = \cos 3x$

$du = 5\,.\,dx \qquad v = \frac{1}{3}\sin 3x$

$= 5x\,(\frac{1}{3}\sin 3x) - \int \frac{1}{3}\sin 3x\,.\,5dx$

$= \frac{5}{3}\sin 3x - \frac{5}{3}\,(\frac{1}{3}\times -\cos 3x) + C$

$= \frac{5}{3}x\sin 3x + \frac{5}{9}\cos 3x + C$

2) $\int \frac{4x}{\csc(2x+1)}\quad dx$

$= \int 4x \sin(2x+1)\,dx$

$u = 4x \qquad dv = \sin(2x+1)\,dx$

$du = 4\,.\,dx \qquad v = -\frac{1}{2}\cos(2x+1)$

$= 4x\,(-\frac{1}{2}\cos(2x+1)) - \int -\frac{1}{2}\cos(2x+1).\,4\,.\,dx$

$= -2x\cos(2x+1) + 2(\frac{1}{2})\sin(2x+1) + C$

3) $\int 3x\,e^{2x}\,dx$

$u = 3x \qquad dv = e^{2x}\,dx$

$du = 3\,.\,dx \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x}$

$= 3x\,(\frac{1}{2}e^{2x}) - \int \frac{1}{2}e^{2x}\,.\,3dx$

$= \frac{3}{2}x\,e^{2x} - \frac{3}{2}\,(\frac{1}{2})\,e^{2x} + C$

4) $\int x \ln x\,dx$

$u = \ln x \qquad dv = x\,dx$

$du = \frac{1}{x}\,.\,dx \qquad v = \frac{x^2}{2}$

$= \ln x\,(\frac{x^2}{2}) - \int \frac{x^2}{2}\,.\,\frac{1}{x}\;dx$

$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\,(\frac{x^2}{2}) + C$

5) $\int \ln(x^2+2x)\,dx$

$u = \ln(x^2+2x) \qquad dv = dx$

$du = \frac{2x+2}{x^2+2x}\,.\,dx \qquad v = x$

$= \ln(x^2+2x)(x) - \int x\,(\frac{2x+2}{x^2+2x})\,dx$

$= x\ln(x^2+2x) - \int \cancel{x}(\frac{2x+2}{\cancel{x}(x+2)})\,dx$

$= x\ln(x^2+2x) - \int \frac{2x+2}{x+2}\,dx$

$$\begin{array}{rl} & 2 \\ x+2\big) & 2\cancel{x}+2 \\ & -\cancel{2x}\overset{\ominus}{+}4 \\ \hline & -2 \end{array}$$

$$= x\ln(x^2+2x) - \int 2 + \frac{2}{x+2}\,dx$$

$$= x\ln x^2 + 2x - (2x + 2\ln|x+2|) + C$$

---

6) $\int 2x\,5^x\,dx$

$u = 2x \qquad dv = 5^x\,dx$

$du = 2\,.\,dx \qquad v = \dfrac{5^x}{\ln 5}$

$$= 2\,x\,.\,\frac{5^x}{\ln 5} - \int \frac{5^x}{\ln 5}\,.\,2\,dx$$

$$= \frac{2x\,5^x}{\ln 5} - \frac{2}{\ln 5}\cdot\frac{5^x}{\ln 5} + C$$

مثـــال

جد التكاملات الآتية:

1) $\int x\sec^2 x\,dx$ **2)** $\int x\cos^2 x\,dx$

3) $\int \sec^2 x \ln\sin x\,dx$ **4)** $\int \dfrac{x\,e^x}{(x+1)^2}\,dx$

5) $\int 8x\cos 3x\cos x\,dx$

6) $\int \cos x\,(x+\sec^3 x)\,dx$

الحـــل

1) $\int x\sec^2 x\,dx$

$u = x \qquad dv = \sec^2 x\,dx$

$du = dx \qquad v = \tan x$

$$= x\tan x - \int \tan x\,dx$$

$$= x\tan x - \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$

$$= x\tan x + \ln|\cos x| + C$$

2) $\int x\cos^2 x\,dx = \int x\,(\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int x\,(1+\cos 2x)\,dx$$

$u = x \qquad dv = (1+\cos 2x)dx$

$du = dx \qquad v = (x + \frac{1}{2}\sin 2x)\,dx$

$$= \frac{1}{2}(x\,(x+\frac{1}{2}\sin 2x) - \int (x+\frac{1}{2}\sin 2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}[(x^2+\frac{x}{2}\sin 2x) - (\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})\cos 2x)] + C$$

---

3) $\int \sec^2 x \ln\sin x\,dx$

$u = \ln\sin x \qquad dv = \sec^2 x\,dx$

$du = \dfrac{\cos x}{\sin x}\,dx \qquad v = \tan x$

$$= \ln(\sin x)\,(\tan x) - \int \tan x\,.\,\frac{\cos x}{\sin x}\,dx$$

$$= \tan x\ln(\sin x) - \int \frac{\cancel{\sin x}}{\cancel{\cos x}}\,.\,\frac{\cancel{\cos x}}{\cancel{\sin x}}\,dx$$

$$= \tan x\ln(\sin x) - x + C$$

---

4) $\int \dfrac{x\,e^x}{(x+1)^2}\,dx$

$u = x\,e^x \qquad dv = \dfrac{dx}{(x+1)^2} = (x+1)^{-2}\,dx$

$du = (x\,e^x + e^x(1))dx \qquad v = \dfrac{(x+1)^{-1}}{-1}$

$= e^x(x+1)dx \qquad = \dfrac{-1}{x+1}$

$$= x\,e^x \times \frac{-1}{x+1} - \int \frac{-1}{\cancel{x+1}}\,e^x\cancel{(x+1)}\,dx$$

$$= \frac{-x\,e^x}{x+1} + \int e^x\,dx = \frac{-x\,e^x}{x+1} + e^x + C$$

---

5) $\int 8x\cos 3x\cos x\,dx$

$$\cos 3x\cos x = \frac{1}{2}(\cos(3x+x) + \cos x(3x-x))$$

$$= \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x)$$

$$\Rightarrow \int 8x\,(\frac{1}{2}(\cos 4x+\cos 2x)\ dx$$

$$= \int 4x\,(\cos 4x+\cos 2x)\ dx$$

$u = 4x \qquad dv = (\cos 4x + \cos 2x)dx$

$du = 4\ .\ dx \qquad v = (\frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{2}\sin 2x)$

$$= 4x(\frac{1}{4}\,(\sin 4x + \frac{1}{2}\sin 2x)$$

$$- \int(\frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{2}\sin 2x)4\ .\ dx$$

$$= x(\sin 4x + 2\sin 2x) - \int(\sin 4x + 2\sin 2x)dx$$

$$= x(\sin 4x + 2\sin 2x)$$

$$- (\frac{-1}{4}\cos 4x + 2(\frac{-1}{2})\cos 2x) + C$$

6) $\int \cos x\,(x + \sec^3 x)\ dx$

$$= \int x\ \cos\ x + \sec^2 x\ dx$$

$u = x \qquad dv = \cos x\ dx$

$du = dx \qquad v = \sin x$

$$= x\sin x - \int \sin x\ dx + \tan x$$

$$= x\sin x + \cos x + \tan x + C$$

أتحقّق من فهمي

صفحة (63) : أجد كلاً من التكاملات الآتية:

a) $\int x\sin x\ dx$

الحل:

$u = x \qquad dv = \sin x\ dx$

$du = dx \qquad v = -\cos x$

$$= x\,(-\cos x) - \int -\cos x\ dx$$

$$= -x\cos x + \sin x + C$$

b) $\int x^2 \ln x\ dx$

الحل:

$u = \ln x \qquad dv = x^2\ .\ dx$

$du = \frac{1}{x}\ .\ dx \qquad v = \frac{x^3}{3}$

$$= \ln x\,(\frac{x^3}{3}) - \int \frac{x^3}{3}\ .\ \frac{1}{x}\ dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2\ dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\ .\ \frac{x^3}{3} + C$$

c) $\int 2x\sqrt{7-3x}\ \ dx$

الحل:

$u = 2x \qquad dv = (7-3x)^{\frac{1}{2}}\ dx$

$du = 2dx \qquad v = \dfrac{(7-3x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}(-3)}$

$$= -\frac{2}{9}\,(7-3x)^{\frac{3}{2}}$$

$$= 2x(-\frac{2}{9}\,(7-3x)^{\frac{3}{2}}) - \int -\frac{2}{9}\,(7-3x)^{\frac{3}{2}}\ (2dx)$$

$$= -\frac{4x}{9}\,(7-3x)^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{9}\ \frac{(7-3x)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}(-3)} + C$$

$$= -\frac{4x}{9}\,(7-3x)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{135}\ (7-3x)^{\frac{5}{2}} + C$$

d) $\int 3x\ e^{4x}\ dx$

الحل:

$u = 3x \qquad dv = e^{4x}\ dx$

$du = 3dx \qquad v = \frac{1}{4}\ e^{4x}$

$$= 3x\,(\frac{1}{4}\ e^{4x}) - \int \frac{1}{4}\ e^{4x}\ .\ 3\ dx$$

$$= \frac{3}{4}x\ e^{4x} - \frac{3}{4}\,(\frac{1}{4})\ e^{4x} + C$$

تكرار التكامل بالأجزاء

في بعض الأحيان نقوم باستخدام التكامل بالأجزاء أكثر من مرة.

مثــال جد التكاملات الآتية:

1) $\int \frac{4\,x^2}{\sec 2\,x}\,dx$ **2)** $\int x\,(\ln x)^2\,dx$

الحــل

1) $\int \frac{4\,x^2}{\sec 2\,x}\,dx = \int 4\,x^2 \cos 2x\,dx$

$u = 4\,x^2 \qquad dv = \cos 2x\,dx$

$du = 8x\,dx \qquad v = \frac{1}{2}\sin 2x$

$$= 4\,x^2\,(\frac{1}{2}\sin 2x) - \int \frac{1}{2}\sin 2x\,(8\,x)dx$$

$$= 2x^2 \sin 2x - \int 4\,x\sin 2x\,dx$$

$u = 4x \qquad dv = \sin 2x\,dx$

$du = 4\,dx \qquad v = \frac{-1}{2}\cos 2x$

$$= 2x^2\sin 2x - (4x(\frac{-1}{2}\cos 2x) - \int \frac{-1}{2}\cos 2x\,(4dx)$$

$$= 2x^2\sin 2x + 2x\cos 2x - \frac{4}{2}\,(\frac{1}{2})\sin 2x + C$$

2) $\int x\,(\ln x)^2\,dx$

$u = (\ln x)^2 \qquad dv = x\,dx$

$du = 2(\ln x)\,(\frac{1}{x})dx \qquad v = \frac{x^2}{2}$

$$= (\ln x)^2(\frac{x^2}{2}) - \int \frac{x^2}{2}\,2(\ln x)\,(\frac{1}{x})\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}(\ln x)^2 - \int x\ln x\,dx$$

$u = \ln x \qquad dv = x\,dx$

$du = \frac{1}{x}\,.\,dx \qquad v = \frac{x^2}{2}$

$$= \frac{x^2}{2}(\ln x)^2 - (\ln x\,.\,\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\,.\,\frac{1}{x}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}(\ln x)^2 - (\frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}\,dx)$$

$$= \frac{x^2}{2}(\ln x)^2 - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} + C$$

أتحقّق من فهمي

صفحة (64) : أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

a) $\int x^2 \sin x\,dx$

الحل:

$u = x^2 \qquad dv = \sin x$

$du = 2x\,dx \qquad v = -\cos x$

$$= x^2(-\cos x) - \int -\cos x\,(2x\,dx)$$

$$= -x^2\cos x + \int 2x\cos x\,dx$$

$u = 2x \qquad dv = \cos x\,dx$

$du = 2\,dx \qquad v = \sin x$

$$= -x^2\cos x\ + (2x\sin x - \int \sin x\,.\,2dx$$

$$= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$$

b) $\int x^3\,e^{4x}\,dx$

الحل:

$u = x^3 \qquad dv = e^{4x}\,dx$

$du = 3\,x^2\,dx \qquad v = \frac{1}{4}\,e^{4x}$

$$= x^3\,(\frac{1}{4}\,e^{4x}) - \int \frac{1}{4}\,e^{4x}\,.\,3\,x^2\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\,x^3\,e^{4x} - \frac{3}{4}\int x^2\,e^{4x}\,dx$$

$u = x^2 \qquad dv = e^{4x}\,dx$

$du = 2x\,.\,dx \qquad v = \frac{1}{4}\,e^{4x}$

$$= \frac{1}{4}\,x^3\,e^{4x} - \frac{3}{4}\,(x^2\,\frac{1}{4}\,e^{4x} - \int \frac{1}{4}\,e^{4x}.\,2x\,dx\,)$$

$$= \frac{1}{4}\,x^3\,e^{4x} - \frac{3x^2}{16}\,e^{4x} + \frac{6}{16}\int x\,e^{4x}\,dx$$

$u = x \qquad dv = e^{4x}\,dx$

$du = dx \qquad v = \frac{1}{4}\,e^{4x}$

$$= \frac{1}{4}\,x^3\,e^{4x} - \frac{3x^2}{16}\,e^{4x} + (\frac{6}{16}\,x\,\frac{1}{4}\,e^{4x} - \int \frac{1}{4}\,e^{4x}\,dx)$$

$$= \frac{1}{4}\,x^3\,e^{4x} - \frac{3x^2}{16}\,e^{4x} + (\frac{6x}{16\times 4}e^{4x} - \frac{6}{16}\,(\frac{1}{4}.\frac{1}{4})\,e^{4x} + C$$

التكاملات الدورية

عندما ينتج من تكرار التكامل تكامل مطابق للتكامل الأصلي يمكن عندئذ ايجاده جبرياً بطرق مشابهة لحل المعادلات.

مثال

جد التكاملات الآتية:

1) $\int e^x \sin x\,dx$ 2) $\int \cos(\ln x)\,dx$

الحل

1) $\int e^x \sin x\,dx$

$u = e^x$ $dv = \sin x\,dx$

$du = e^x\,dx$ $v = -\cos x$

$= e^x(-\cos x) - \int -e^x \cos x\,dx$

$= -e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx$ ------ ①

$\int e^x \cos x\,dx$

$u = e^x$ $dv = \cos x\,dx$

$du = e^x\,dx$ $v = \sin x$

$\int e^x \cos x\,dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx$ ---- ②

$\int e^x \sin x\,dx$ التكامل من ① و ②

$= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx$

$= \int e^x \sin x\,dx + \int e^x \sin x\,dx$

$= -e^x \cos x + e^x \sin x$

$= 2\int e^x \sin x\,dx = -e^x \cos x + e^x \sin x$

$= \int e^x \sin x\,dx = \dfrac{-e^x \cos x + e^x \sin x}{2} + C$

2) $\int \cos(\ln x)\,dx$

$u = \cos(\ln x)$ $dv = dx$

$du - \sin(\ln x)\frac{1}{x}\,dx$ $v = x$

$= x\cos(\ln x) - \int x(-\sin(\ln x)\frac{1}{x})\,dx$

$= x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\,dx$ ------ ①

$\int \sin x(\ln x)\,dx$

$u = \sin(\ln x)$ $dv = dx$

$du = \cos(\ln x)\frac{1}{x}$ $v = x$

$= x\sin(\ln x) - \int x\cos(\ln x)\frac{1}{x}\,dx$

$= x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)$ ------ ②

$\int \cos(\ln x)\,dx$ التكامل من ① و ②

$= x\cos(\ln x) + x\sin\ln x - \int \cos\ln x\,dx$

$2\int \cos(\ln x)dx = x\cos\ln x + x\sin\ln x$

$\int \cos(\ln x)dx = \dfrac{x\cos\ln x + x\sin\ln x}{2} + C$

أتحقّق من فهمي

صفحة (66) : أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

a) $\int \dfrac{\sin x}{e^x}\,dx$

الحل:

$= \int e^{-x} \sin x\,dx$

$u = e^{-x}$ $dv = \sin x$

$du = -e^{-x}$ $v = -\cos x$

$= e^{-x}(-\cos x) - \int -e^{-x}(-\cos x)\,dx$

$= -e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\cos x\,dx$ ------ ①

$\int e^{-x}\cos x\,dx$

$u = e^{-x}$ $dv = \cos x$

$du - e^{-x}$ $v = \sin x$

$= e^{-x}\sin x - \int -e^{-x}\sin x\,dx$ ------ ②

التكامل من ① و ② $\int e^{-x}\sin x\,dx$

$$= -e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x - \int e^{-x}\sin x\,dx$$

$$2\int e^{-x}\sin x\,dx = -e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x$$

$$\int e^{-x}\sin x\,dx = \frac{-e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x}{2} + C$$

b) $\int \sec^3 x\,dx$

الحل:

$$= \int \sec^3 x\,dx = \int \sec x \,.\, \sec^2 x\,dx$$

$u = \sec x$ $\qquad dv = \sec^2 x\,dx$

$du = \sec x\tan x\,dx$ $\qquad v = \tan x$

$$= \sec x\tan x - \int \tan x \,.\, \sec x\tan x\,dx$$

$$= \sec x\tan x - \int \sec x\tan^2 x\,dx$$

$$= \sec x\tan x - \int \sec x\,(\sec^2 x - 1)\,dx$$

$$= \sec x\tan x - \int \sec^3 x\,dx + \int \sec x\,dx$$

$$= \sec x\tan x - \int \sec^3 x\,dx + \int \sec x\left(\frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}\right)dx$$

$$2\int \sec^3 x\,dx = \sec x\tan x + \ln|\sec x + \tan x|$$

$$\int \sec^3 x\,dx = \frac{\sec x\tan x + \ln|\sec x + \tan x|}{2} + C$$

استعمال طريقة الجدول

عندما يكون التكامل على الصورة

$\int$ كثير حدود $\times$ $(\cos(ax+b)$

$\int$ كثير حدود $\times$ $(\sin(ax+b)$

$\int$ كثير حدود $\times$ (e^{ax+b})

$\int$ كثير حدود $\times$ $(ax+b)^n$

حيث نفرض كثير الحدود $= u$ ونشتق حتى تصبح المشتقة $=$ صفر

والجزء الآخر dv وتكامل على عدد مرات الاشتقاق

مثال

جد:

1) $\int (x^3 + 5x^2)\cos(2x+1)\,dx$

الحل

u		dv
$x^3 + 5x^2$	(+)	$\cos(2x+1)$
$3x^2 + 10x$	(−)	$\frac{1}{2}\sin(2x+1)$
$6x + 10$	(+)	$\frac{-1}{4}(\cos(2x+1))$
6	(−)	$\frac{-1}{8}(\sin(2x+1))$
0		$\frac{1}{16}(\cos(2x+1))$

$$=(x^3+5x^2)\left(\frac{1}{2}\right)\sin(2x+1)$$
$$+ (3x^2+10x)\left(\frac{1}{4}\right)\cos(2x+1)$$
$$- (6x+10)\left(\frac{1}{8}\right)\sin(2x+1)$$
$$- 6\left(\frac{1}{16}\right)(\cos(2x+1)) + C$$

2) $\int (x+1)^3 e^{2x}\,dx$

الحل

u		dv
$(x+1)^3$	(+)	e^{2x}
$3(x+1)^2$	(−)	$\frac{1}{2}e^{2x}$
$6(x+1)$	(+)	$\frac{1}{4}e^{2x}$
6	(−)	$\frac{1}{8}e^{2x}$
0		$\frac{1}{16}e^{2x}$

$$= (x+1)^3\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) - 3(x+1)^2\left(\frac{1}{4}e^{2x}\right)$$
$$+ 6(x+1)\left(\frac{1}{8}e^{2x}\right) - 6\left(\frac{1}{16}e^{2x}\right) + C$$

أتحقَّق من فهمي

صفحة (67) : أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

a) $\int x^4 \cos 4x \, dx$

الحل:

u		dv
x^4	$(+)$	$\cos 4x$
$4x^3$	$(-)$	$\frac{1}{4}\sin 4x$
$12x^2$	$(+)$	$-\frac{1}{16}\cos 4x$
$24x$	$(-)$	$-\frac{1}{64}\sin 4x$
24	$(+)$	$\frac{1}{256}\cos 4x$
0		$\frac{1}{1024}\sin 4x$

$$= x^4\left(\frac{1}{4}\sin 4x\right) + 4x^3\left(\frac{1}{16}\cos x\right)$$
$$- 12x^2\left(\frac{1}{64}\sin 4x\right) - 24x\left(\frac{1}{256}\cos 4x\right)$$
$$+ 24\left(\frac{1}{1024}\right)\sin 4x + C$$

---

b) $\int x^5 e^x \, dx$

الحل:

u		dv
x^5	$(+)$	e^x
$5x^4$	$(-)$	e^x
$20x^3$	$(+)$	e^x
$60x^2$	$(-)$	e^x
$120x$	$(+)$	e^x
120	$(-)$	e^x
0		e^x

$$= x^5 e^x - 5x^4 e^x + 20x^3 e^x - 60x^2 e^x$$
$$+ 120x e^x - 120 e^x + C$$

أتحقَّق من فهمي

صفحة (69) : يمثل الاقتران: $C'(x) = (0.1x+1)^{0.03x}$ التكلفة الحدية لكل قطعة (بالدينار) تنتج في إحدى الشركات، حيث x عدد القطع المنتجة، و $C(x)$ تكلفة إنتاج x قطعة بالدينار. أجد اقتران التكلفة $C(x)$، علماً بأن $C(10) = 200$

الحل:

$$C'(x) = (0.1x+1)\, e^{0.03x}$$
$$C(x) = \int (0.1x+1)\, e^{0.03x}\, dx$$

$u = 0.1x + 1 \qquad dv = e^{0.03x}$

$du = 0.1\, dx \qquad v = \frac{1}{0.03} e^{0.03x}$

$$= (0.1x+1)\frac{1}{0.03}e^{0.03x} - \int \frac{1}{0.03}e^{0.03x} \,.\, 0.1\, dx$$
$$= (0.1x+1)\,.\,\frac{100}{3}e^{0.03x} - \frac{100}{3} \times \frac{1}{0.03}\, e^{0.03x}\,(0.1)$$
$$= (0.1x+1)\frac{100}{3}e^{0.03x} - \frac{100}{3} \times \frac{100}{3} \times \frac{1}{10}e^{0.03x}$$
$$C(10) = (1+1)\frac{100}{3}e^{0.3} - \frac{1000}{9}e^{0.3} + C$$
$$= 2\frac{(100)}{3}\, e^{0.3} - \frac{1000}{9}e^{0.3} + C = 200$$
$$C = 200 + \frac{400}{9}e^{0.3}$$
$$C(x) = (0.1x+1)\frac{100}{3}e^{0.03x} - \frac{1000}{9}e^{0.03x}$$
$$+ 200 + 400\, e^{0.3}$$

التكامل بالأجزاء لتكاملات محدودة

مثـــال

جد التكاملات:

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4x \sin x \, dx$ 2) $\int_1^e \ln x \, dx$

3) $\int_0^4 \frac{6\,x}{\sqrt{2x+1}}\,dx$ **4)** $\int_0^2 3x\sqrt{e^{x+2}}\,dx$

الحــل

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4x\sin x\,dx$

$u = 4x$ $dv = \sin x\,dx$

$du = 4\,.\,dx$ $v = -\cos x$

$= 4x(-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -4\cos x\,dx$

$= -4x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 4\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= (0-0) + 4(1) - 4(0) = 4$

2) $\int_1^e \ln x\,dx$

$u = \ln x$ $dv = dx$

$du = \frac{1}{x}\,dx$ $v = x$

$= x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x\frac{1}{x}\,dx$

$= x\ln x\Big|_1^e - x\Big|_1^e$

$= e\ln e - 1\ln e - (e-1)$

$= e - 0 - e + 1 = 1$

3) $\int_0^4 \frac{6\,x}{\sqrt{2x+1}}\,dx = \int_0^4 6x\,(2x+10)^{\frac{-1}{2}}\,dx$

$u = 6x$ $dv = (2x+1)^{\frac{-1}{2}}\,dx$

$du = 6\,dx$ $v = \frac{(2x+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(2)} = (2x+1)^{\frac{1}{2}}$

$= 6x\,(2x+1)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^4 - \int_0^4 (2x+1)^{\frac{1}{2}}\,.\,6x\,dx$

$= 6x\sqrt{2x+1}\Big|_0^4 - \frac{6(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}(2)}\Big|_0^2$

$= 6x\sqrt{2x+1}\Big|_0^4 - 2(2x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2$

$= (24\sqrt{9} - 0) - 2((9)^{\frac{3}{2}} - (1)^{\frac{3}{2}})$

$= 72 - 0 - 2\,(27-1) = 72 - 52 = 20$

4) $\int_0^2 3x\sqrt{e^{x+2}}\,dx = \int_0^2 3x\,(e^{x+2})^{\frac{1}{2}}\,dx$

$= \int_0^2 3x\;e^{\frac{1}{2}x+1}\;dx$

$u = 3x$ $dv = e^{\frac{1}{2}x+1}$

$du = 3.\,dx$ $v = 2e^{\frac{1}{2}x+1}$

$= 6x\,e^{\frac{1}{2}x+1}\Big|_0^2 - \int_0^2 e^{\frac{1}{2}x+1}.\,3\,dx$

$= 6x\,e^{\frac{1}{2}x+1}\Big|_0^2 - 6(2)e^{\frac{1}{2}x+1}\Big|_0^1$

$= (12e^2 - 0) - (12e^2 - 12e) = 12e$

أتحقَّق من فهمي

صفحة (70) : أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

a) $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

الحل:

$= \int_1^e x^{-2}\ln x\,dx$

$u = \ln x$ $dv = x^{-2}\,dx$

$du = \frac{1}{x}\,dx$ $v = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x}$

$= -\frac{1}{x}\ln x\Big|_1^e - \int_1^e -\frac{1}{x}\,.\,\frac{1}{x}\,dx$

$= \frac{-\ln x}{x}\Big|_1^e + \int_1^e x^{-2}\,dx$

$= \frac{-\ln x}{x}\Big|_1^e + \frac{x^{-1}}{-1}\Big|_1^e$

$= \frac{-\ln x}{x}\Big|_1^e - \frac{1}{x}\Big|_1^e$

$= -(\frac{\ln e}{e} - \frac{\ln 1}{1}) - (\frac{1}{e} - 1)$

$= -(\frac{1}{e} - 0) - \frac{1}{e} + 1 = 1 - \frac{2}{e}$

b) $\int_0^1 x\, e^{-2x}\, dx$

الحل:

$u = x \qquad\qquad dv = e^{-2x}\, dx$

$du = dx \qquad\qquad v = \frac{-1}{2} e^{-2x}$

$$= x(\frac{-1}{2} e^{-2x}) \Big|_0^1 + \frac{-1}{4} e^{-2x} \Big|_0^1$$

$$= (\frac{-1}{2} e^{-2} - 0) - \frac{1}{4} (e^{-2}) - (-\frac{1}{4})$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-2} - \frac{1}{4} e^{-2} + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4} e^{-2} + \frac{1}{4}$$

التكامل بالأجزاء والتعويض

يمكن استخدام طريقة التعويض وطريقة الأجزاء في إيجاد التكاملات.

مثـــال

جد التكاملات:

1) $\int e^{\sqrt{x+2}}\, dx$ **2)** $\int e^{\sqrt[3]{x}}\, dx$

3) $\int \frac{\ln(x+3)}{\sqrt{x+1}}\, dx$ **4)** $\int \sec^4 x \ln \tan x\, dx$

الحـــل

1) $\int e^{\sqrt{x+2}}\, dx$

$a = \sqrt{x+2} \longrightarrow a^2 = x + 2$

$2a\, da = dx$

$$\int e^a \,.\, 2a\, da = \int 2a\, e^a\, da$$

$u = 2a \qquad\qquad dv = e^a\, da$

$du = 2\, da \qquad\qquad v = e^a$

$$= 2a\, e^a - \int 2\, e^a\, dx = 2a\, e^a - 2e^a + C$$

$$= 2\sqrt{x+2}\; e^{\sqrt{x+2}} - 2e^{\sqrt{x+2}} + C$$

2) $\int e^{\sqrt[3]{x}}\, dx$

$a = \sqrt[3]{x} \longrightarrow a^3 = x$

$3a^2\, d = dx$

$$\int e^a \,.\, 3a^2\, d = \int 3a^2\, e^a\, du$$

u		dv
$3a^2$	(+)	e^a
$6a$	(−)	e^a
6	(+)	e^a
0		e^a

$$= 3a^2\, e^a - 6a\, e^n + 6e^a + C$$

$$= 3(\sqrt[3]{x})^2\, e^{\sqrt[3]{x}} - 6\sqrt[3]{x} e^{\sqrt[3]{x}} + 6e^{\sqrt[3]{x}} + + C$$

3) $\int \frac{\ln(x+3)}{\sqrt{x+1}}\, dx$

$a = \sqrt{x+3} \longrightarrow a^2 = x + 3$

$2a\, da = dx$

$$\int \frac{\ln a^2}{a} \,.\, 2a\, da = 4\int \ln a\; dx$$

$u = \ln a \qquad\qquad dv = da$

$du = \frac{1}{a}\, da \qquad\qquad v = a$

$$= a \ln a - \int a \,.\, \frac{1}{a}\; dx = a \ln a - a + C$$

$$= \sqrt{x+3}\; \ln \sqrt{x+3} - \ln \sqrt{x+3} + C$$

4) $\int \sec^4 x \ln \tan x\, dx$

$a = \tan x \longrightarrow dx = \frac{da}{\sec^2 x}$

$$= \int \sec^4 x \ln a \,.\, \frac{da}{\sec^2 x} = \int \sec^2 x \ln a \,.\, da$$

$$= \int (1 + \tan^2 x) \ln a \,.\, da = \int (1 + a^2) \ln a \,.\, da$$

$u = \ln a \qquad\qquad dv = (1 + a^2)\, dx$

$du = \frac{1}{a}\, da \qquad\qquad v = a + \frac{a^3}{3}$

$$= (a + \frac{a^3}{3}) \ln a - \int (a + \frac{a^3}{3}) \,.\, \frac{1}{a}\, da$$

$$= (a + \frac{a^3}{3}) \ln a - \int (1 + \frac{a^2}{3})\, da$$

$$= (a + \frac{a^3}{3})\ln a - (a + \frac{a^3}{9}) + C$$

$$= (\tan x + \frac{\tan^3 x}{3})\ln \tan x$$

$$- (\tan x + \frac{\tan^3 x}{9}) + C$$

مثال

جد التكاملات:

1) $\int \sec^2 x\, e^{\sqrt{\tan x}}\, dx$ **2)** $\int (x+1)^3 e^{x^2+2x}\, dx$

3) $\int x^5 \cos(x^3+2)\, dx$

الحل

1) $\int \sec^2 x\, e^{\sqrt{\tan x}}\, dx$

$u = \sqrt{\tan x} \longrightarrow a^2 = \tan x\, dx$

$2a\, da = \sec^2 x\, dx \longrightarrow dx = \frac{2a\, da}{\sec^2 x}$

$$= \int \sec^2 x\, e^a \cdot \frac{2a\, da}{\sec^2 x} = \int 2a\, e^a\, da$$

$u = 2a \qquad dv = e^a$

$du = 2\, da \qquad v = e^a$

$$= 2a\, e^a - \int 2e^a\, dx \;= 2a\, e^a - 2e^a + C$$

$$= 2\sqrt{\tan x}\; e^{\sqrt{\tan x}} - 2\, e^{\sqrt{\tan x}} + C$$

2) $\int (x+1)^3 e^{x^2+2x}\, dx$

$a = x^2 + 2x \longrightarrow dx = \frac{da}{2x+2} = \frac{da}{2(x+1)}$

$$= \int (x+1)^3 e^a \frac{da}{2(x+1)}$$

$$= \frac{1}{2}\int (x+1)^2 e^a\, da = \frac{1}{2}\int (x^2+2x+1)e^a\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (a+1)\, e^a\, da$$

$u = a + 1 \qquad dv = e^a \,.\, da$

$du = da \qquad v = e^a$

$$= (a+1)e^a - \int e^a \,.\, da$$

$$= (a+1)e^a - e^a + C$$

$$= (x^2+2x+1)e^{x^2+2x} - e^{x^2+2x} + C$$

3) $\int x^5 \cos(x^3+2)\, dx$

$a = x^3 + 2 \longrightarrow dx = \frac{da}{3x^2}$

$$= \int x^5 \cos a \,.\, \frac{da}{3x^2} = \frac{1}{3}\int x^3 \cos a\, da$$

$$= \frac{1}{3}\int (a-2)\cos a\, da$$

$u = a - 2 \qquad dv = \cos a\, da$

$du = da \qquad v = \sin a$

$$= (a-2)\sin a - \int \sin a\, da$$

$$= (a-2)\sin a + \cos a + C$$

$$= (x^3+2-2)\sin(x^3+2) + \cos(x^3+2) + C$$

مثال

إذا كان $f(1) = 6$ ، $\int_0^1 f(x)\, dx = 4$ جد:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, f'(\sin x)\, dx$$

الحل

$a = \sin x \longrightarrow dx = \frac{da}{\cos x}$

$x = 0 \longrightarrow a = 0$

$x = \frac{\pi}{2} \longrightarrow a = 1$

$$= \int_0^1 2\sin x \cancel{\cos x} f(a) \,.\, \frac{da}{\cancel{\cos x}}$$

$$= \int_0^1 2a\, f'(a)\, da$$

$u = 2a \qquad\qquad dv = f'(a)$

$du = 2\,da \qquad\qquad v = f(a)$

$$= 2a\,f(a)\Big|_0^1 - \int_0^1 2\,f(a)dx$$

$$= 2(6) - 0 - 2(4) = 4$$

مثال

إذا كان $f(0) = 2$ ، $f(1) = 7$ ، $\int_0^1 x\,f(x)\,dx = 5$

جد : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^4 x\,f'(\tan x)\,dx$

الحل

$\tan x = a \longrightarrow dx = \dfrac{da}{\sec^2 x}$

$x = 0 \longrightarrow a = 0$

$x = \tan\dfrac{\pi}{4} \longrightarrow a = 1$

$$= \int_0^1 \sec^4 x\,f'(a)\,.\,\frac{da}{\sec^2 x} = \int_0^1 \sec^2 x\,f'(a)\,da$$

$$= \int_0^1 (\tan^2 x + 1)\,f'(a) = \int_0^1 (a^2 + 1)\ f'(a)\,dx$$

$u = a^2 + 1 \qquad\qquad dv = f'(a)\,da$

$du = 2a\,da \qquad\qquad v = f(a)$

$$= (a^2 + 1)f(a)\Big|_0^1 - \int_0^1 2a\,f(a)dx$$

$$= (1 + 1)\,(7) - (0 + 1)\,(2) - 2(5)$$

$$= 14 - 2 - 10 = 2$$

أتحقق من فهمي

صفحة (71) : أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

a) $\int (x^3 + x^5)\sin x^2\,dx$

الحل:

$$= \int x\,(x^2 + x^4)\sin x^2\,dx$$

$x^2 = a \longrightarrow dx = \dfrac{da}{2\,x}$

$$= \int x\,(a + a^2)\sin a\,\frac{da}{2\,x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (a + a^2)\sin a\,da$$

u		dv
$a + a^2$	(+)	$\sin a$
$1 + 2a$	(−)	$-\cos a$
2	(+)	$-\sin a$
0		$\cos a$

$$= \frac{1}{2}\Big((a + a^2)(-\cos a) - (1 + 2a)(-\sin a) + 2\cos a\Big) + C$$

$$= \frac{1}{2}\big(-(x^2 + x^4)\cos x^2 + (1 + 2x^2)(\sin x^2) + 2\cos x^2\big) + C$$

b) $\int x^5\ e^{x^2}\,dx$

الحل:

$a = x^2 \longrightarrow dx = \dfrac{da}{2\,x}$

$$= \int x^5\,e^a\,\frac{da}{2\,x} = \frac{1}{2}\int x^4\,e^a\,da = \frac{1}{2}\int a^2\,e^a\,dx$$

u		dv
a^2	(+)	e^a
$2a$	(−)	e^a
2	(+)	e^a
0		e^a

$$= \frac{1}{2}(a^2 e^a - 2a\,e^a + 2e^a) + C$$

$$= \frac{1}{2}(x^4\,e^{x^2} - 2x^2\,e^{x^2} + 2e^{x^2}) + C$$

التكامل بطريقة الأجزاء واختيار u

ملخص المفهوم

أمثلة	اختيار u	الاقترانان المضروبان
$x\cos x$ $x^2\sin x$	x^n	x^n، حيث n عدد صحيح موجب مضروباً في اقتران مثلثي
xe^x $x^3 e^{-x}$	x^n	x^n، حيث n عدد صحيح موجب مضروباً في اقتران أسي طبيعي
$x\ln x$ $x^{\frac{2}{3}}\ln x$	الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي	x^n، حيث n عدد صحيح موجب مضروباً في اقتران لوغاريتمي طبيعي
$e^x\cos x$ $e^{-x}\sin x$	أي منهما	اقتران أسي طبيعي، مضروباً في اقتران مثلثي.

أتدرّب وأحلُّ المسائل

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

① $\int (x+1)\cos x\,dx$

الحل:

$u = x+1 \qquad dv = \cos x\,dx$

$du = dx \qquad v = \sin x$

$= (x+1)\sin x - \int \sin x\,dx$

$= (x+1)\sin x + \cos x + C$

② $\int xe^{\frac{x}{2}}\,dx$

الحل:

$u = x \qquad dv = e^{\frac{x}{2}}\,dx$

$du = dx \qquad v = 2e^{\frac{x}{2}}$

$= 2xe^{\frac{x}{2}} - \int 2e^{\frac{x}{2}}\,dx$

$= 2xe^{\frac{x}{2}} - 4e^{\frac{x}{2}} + C$

③ $\int (2x^2-1)\,e^{-x}\,dx$

u		dv
$2x^2-1$	$(+)$	e^{-x}
$4x$	$(-)$	$-e^{-x}$
4	$(+)$	e^{-x}
0		$-e^{-x}$

$(2x^2-1)\,(-e^{-x}) - 4xe^{-x} + 4(-e^{-x}) + C$

④ $\int \ln\sqrt{x}\,dx$

الحل:

$= \int \ln x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \ln x\,dx$

$u = \ln x \qquad dv = dx$

$du = \frac{1}{x}\,dx \qquad v = x$

$= \frac{1}{2}\left(x\ln x - \int x\,.\,\frac{1}{x}\,dx\right)$

$= \frac{1}{2}\left(x\ln x - x\right) + C$

⑤ $\int x\sin x\cos x\,dx$

الحل:

$= \int x\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)dx = \frac{1}{2}\int x\sin 2x\,dx$

$u = x \qquad dv = \sin 2x$

$du = dx \qquad v = -\frac{1}{2}\cos 2x$

$= \frac{1}{2}\left(x\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) - \int -\frac{1}{2}\cos 2x\,dx\right.$

$= \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\sin 2x\right) + C$

⑥ $\int x\sec x\tan x\,dx$

الحل:

$u = x \qquad dv = \sec x\tan x\,dx$

$du = dx \qquad v = \sec x$

$= x\sec x - \int \sec x\,dx$

$= x\sec x - \int \sec x\,\frac{(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x}$

$= x\sec x - \ln|\sec x + \tan x| + C$

⑦ $\int \frac{x}{\sin^2 x}dx$

الحل:

$= \int x\csc^2 x\,dx$

$u = x \qquad dv = \csc^2 x\,dx$

$du = dx \qquad v = -\cot x$

$= x(-\cot x) - \int -\cot x\,dx$

$= -x\cot x + \int \frac{\cos x}{\sin x}dx$

$= -x\cot x + \ln|\sin x| + C$

⑧ $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$

الحل:

$= \int x^{-3}\ln x\,dx$

$u = \ln x \qquad dv = x^{-3}\,dx$

$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = \frac{x^{-2}}{-2}$

$= \ln x\left(\frac{x^{-2}}{-2}\right) - \int \frac{x^{-2}}{-2}\cdot\frac{1}{x}dx$

$= \ln x\left(\frac{x^{-2}}{-2}\right) + \int\frac{x^{-3}}{2}dx$

$= \ln x\left(\frac{x^{-2}}{-2}\right) + \frac{x^{-2}}{2(-2)} + C$

$= \frac{-1}{2x^2}\ln x - \frac{1}{4x^2} + C$

⑨ $\int 2x^2\sec^2 x\tan x\,dx$

الحل:

$u = 2x^2 \qquad dv = \sec^2 x\tan x\,dx$

$du = 4x\,dx \qquad v = \int \sec^2 x\tan x$

$\tan x = a$

$da = \frac{dx}{\sec^2 x}$

$= \int \sec^2 x\, a\,.\frac{da}{\sec^2 x}$

$= \int a\,da = \frac{a^2}{2} = \frac{\tan^2 x}{2}$

$= 2x^2\frac{\tan^2 x}{2} - \int\frac{\tan^2 x}{2}\,.\,4\,x\,dx$

$= x^2\tan^2 x - \int 2x\tan^2 x\,dx$

$u = 2x \qquad dv = \tan^2 x\,dx$

$du = 2dx \qquad v = \int\tan^2 x\,dx$

$= \int(\sec^2 x - 1)\,dx$

$= \tan x - x$

$\int 2x\tan^2 x\,dx = 2x(\tan x - x) - \int(\tan x - x)\,2dx$

$= 2x(\tan x - x) - \int\left(\frac{\sin x}{\cos x} - x\right)2dx$

$= 2x(\tan x - x) + 2\ln|\cos x| + x^2$

التكامل

$= x^2\tan^2 x - (2x(\tan x - x) + 2(\ln|\cos x| + x^2)) + C$

⑩ $\int(x-2)\sqrt{8-x}\,dx$

الحل:

$= \int(x-2)(8-x)^{\frac{1}{2}}\,dx$

$u = x - 2 \qquad dv = (8-x)^{\frac{1}{2}}\,dx$

$du = dx \qquad v = \frac{(8-x)^{\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}} = \frac{-2}{3}(8-x)^{\frac{3}{2}}$

$= (x-2)\left(\frac{-2}{3}\right)(8-x)^{\frac{3}{2}} - \int\frac{-2}{3}(8-x)^{\frac{3}{2}}\,dx$

$= -2\frac{(x-2)}{3}(8-x)^{\frac{3}{2}} + \frac{-2}{3}\times\frac{2}{5}(8-x)^{\frac{5}{2}} + C$

⑪ $\int x^3\cos 2x\,dx$

u		dv
x^3	(−)	$\cos 2x$
$3x^2$	(−)	$\frac{1}{2}\sin 2x$
$6x$	(+)	$\frac{-1}{4}\cos 2x$
6	(−)	$\frac{-1}{8}\sin 2x$
0		$\frac{1}{16}\cos 2x$

$$= x^3\left(\frac{1}{2}\right)\sin 2x + 3x^2\left(\frac{1}{4}\cos 2x\right)$$

$$- \frac{6x}{8}\sin 2x - \frac{6}{16}\cos 2x + C$$

---

⑫ $\displaystyle\int \frac{x}{6^x}\,dx = \int x\,6^{-x}\,dx$

الحل:

$u = x \qquad dv = 6^{-x}$

$du = dx \qquad v = \dfrac{6^{-x}}{-\ln 6}$

$$= x\,\frac{6^{-x}}{-\ln 6} - \int \frac{6^{-x}}{-\ln 6}\,dx$$

$$= -\frac{x\,6^{-x}}{\ln 6} + \frac{6^{-x}}{\ln 6(-\ln 6)} + C$$

---

⑬ $\displaystyle\int e^{-x}\sin 2x\,dx$

الحل:

$u = e^{-x} \qquad dv = \sin 2x\,dx$

$du = -e^{-x} \qquad v = -\dfrac{1}{2}\cos 2x$

$$= e^{-x}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) - \int -\frac{1}{2}\cos 2x\,(-e^{-x})dx$$

$$= \frac{-e^{-x}}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\int e^{-x}\cos 2x\,dx$$

$u = e^{-x} \qquad dv = \cos 2x\,dx$

$du = -e^{-x} \qquad v = \dfrac{1}{2}\sin 2x$

$\displaystyle\int e^{-x}\cos 2x\,dx$

$$= e^{-x}\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right) - \int \frac{1}{2}\sin 2x\,(-e^{-x})\,dx$$

$\displaystyle\int e^{-x}\cos 2x\,dx$

$$=-\frac{e^{-x}}{2}\cos 2x - \frac{1}{4}e^{-x}\sin 2x - \int \frac{1}{4}e^{-x}\sin 2x$$

$$\frac{5}{4}\int e^{-x}\sin 2x\,dx = -\frac{e^{-x}}{2}\cos 2x - \frac{e^{-x}}{4}\sin 2x$$

$$\int e^{-x}\sin 2x\,dx = \frac{4}{5}\left(-\frac{e^{-x}}{2}\cos 2x - \frac{e^{-x}}{4}\sin 2x\right) + C$$

---

⑭ $\displaystyle\int \cos x \ln \sin x\,dx$

الحل:

$u = \ln \sin x \qquad dv = \cos x\,dx$

$du = \dfrac{\cos x}{\sin x}\,dx \qquad v = \sin x$

$$= \sin x \ln \sin x - \int \sin x\,\frac{\cos x}{\sin x}\,dx$$

$$= \sin x \ln \sin x - \sin x + C$$

---

⑮ $\displaystyle\int e^x \ln(1 + e^x)\,dx$

الحل:

$u = \ln(1 + e^x) \qquad dv = e^x\,dx$

$du = \dfrac{e^x}{1 + e^x}\,dx \qquad v = e^x$

$$= e^x \ln(1 + e^x) - \int \frac{e^x\,.\,e^x}{1 + e^x}\,dx$$

$$= e^x \ln(1 + e^x) - \int \frac{e^{2x}}{1 + e^x}\,dx$$

$$a = e^x \rightarrow dx = \frac{da}{e^x} = \frac{da}{a}$$

$$= e^x \ln(1 + e^x) - \int \frac{a^2}{1 + a}\cdot\frac{da}{a}$$

$$= e^x \ln(1 + e^x) - \int \frac{a}{1 + a}\,da$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 1 + a\overline{)\,a\qquad} \\ \cancel{-\,1 + a} \\ \hline -1 \end{array}$$

$$= e^x \ln(1 + e^x) - \int 1 - \frac{1}{1 + a}\,da$$

$$= e^x \ln(1 + e^x) - (a - \ln(1 + a) + C$$

$$= e^x \ln(1 + e^x) - (e^x - \ln(1 + e^x)) + C$$

أجد قيمة كل من التكاملات الآتية:

⑯ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,dx$

الحل:

$u = e^x \qquad dv = \cos x\,dx$

$du = e^x\,dx \qquad v = \sin x$

$$= e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx \quad \text{------}\ ①$$

$u = e^x \qquad dv = \sin x\,dx$

$du = e^x\,dx \qquad v = -\cos x\,dx$

$$=\int e^x \sin x\,dx = e^x\,(-\cos x)$$

$$-\int e^x\,(-\cos x)\,dx \quad ------ ②$$

التكامل من ① و ②

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,dx = e^x \sin x + e^x \cos x$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,dx = \frac{1}{2}(e^x \sin x + e^x \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}((e^{\frac{\pi}{2}} + 0) - (0 + 1)) = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2}$$

⑰ $\int_1^e \ln x^2\,dx = 2\int_1^e \ln x\,dx$

الحل:

$u = \ln x \qquad dv = dx$

$du = \frac{1}{x}\,dx \qquad v = x$

$$= 2(x \ln x - \int x \,.\, \frac{1}{x}\,dx)\Big|_1^e$$

$$= 2(x \ln x - x)\Big|_1^e$$

$$= 2((e \ln e - e) - (1 \ln 1 - 1))$$

$$= 2(e - e - 0 + 1) = 2$$

⑱ $\int_1^2 \ln(x\,e^x)\,dx$

الحل:

$$= \int_1^2 \ln(x\,e^x)\,dx = \int_1^2 \ln x + \ln e^x\,dx$$

$$= \int_1^2 \ln x + x\,dx$$

$u = \ln x \qquad dv = dx$

$du = \frac{1}{x}\,dx \qquad v = x$

$$= x \ln x - \int x \,.\, \frac{1}{x}\,dx + \frac{x^2}{2}\Big|_1^2$$

$$= x \ln x - x + \frac{x^2}{2}\Big|_1^2$$

$$= (2\ln 2 - 2 + 2) - (1 \ln 1 - 1 + \frac{1}{2})$$

$$= 2 \ln 2 + \frac{1}{2}$$

⑲ $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}} x \sec^2 3x\,dx$

الحل:

$u = x \qquad dv = \sec^2 3x\,dx$

$du = dx \qquad v = \frac{1}{3}\tan 3x$

$$= x\frac{1}{3}(\tan 3x) - \int \frac{1}{3}\tan 3x\,dx\,\Big|_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}}$$

$$= \frac{x}{3}\tan 3x - \frac{1}{3}\int \frac{\sin 3x}{\cos 3x}\,dx\,\Big|_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}}$$

$$= \frac{x}{3}\tan 3x - \frac{1}{3}(-\frac{1}{3}\ln|\cos 3x|)\Big|_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}}$$

$$= (\frac{\pi}{27}\tan\frac{\pi}{3} + \frac{1}{9}\ln\cos\frac{\pi}{3}) - (\frac{\pi}{36}\tan\frac{\pi}{4} + \frac{1}{9}\ln\cos\frac{\pi}{4})$$

$$= (\frac{\pi}{27}(\sqrt{3}) + \frac{1}{9}\ln\frac{1}{2}) - (\frac{\pi}{36}1 + \frac{1}{9}\ln\frac{1}{\sqrt{2}})$$

⑳ $\int_1^e x^4 \ln x\,dx$

الحل:

$u = \ln x \qquad dv = x^4\,dx$

$du = \frac{1}{x}\,dx \qquad v = \frac{x^5}{5}$

$$= \frac{x^5}{5}\ln x - \int \frac{x^5}{5} \,.\, \frac{1}{x}\,dx\,\Big|_1^e$$

$$= \frac{x^5}{5}\ln x - \int \frac{x^4}{5}\,dx\,\Big|_1^e$$

$$= \frac{x^5}{5}\ln x - \frac{x^5}{25}\Big|_1^e$$

$$= (\frac{e^5}{5}(1) - \frac{e^5}{25}) - (0 - \frac{1}{25})$$

$$= \frac{4\,e^5}{25} + \frac{1}{25}$$

㉑ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x\,dx$

الحل:

u		dv
x^2	$(+)$	$\sin x$
$2x$	$(-)$	$-\cos x$
2	$(+)$	$-\sin x$
0		$\cos x$

$$= -x^2\ \cos x + 2x \sin x + 2\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= (0 + \pi + 0) - (0 + 0 + 2) = \pi - 2$$

㉒ $\int_0^1 x(e^{-2x} + e^{-x})\, dx$

الحل:

$u = x \qquad dv = e^{-2x} + e^{-x}$

$du = dx \qquad v = -\frac{1}{2}\, e^{-2x} - e^{-x}$

$$= x\,(-\frac{1}{2}\,e^{-2x} - e^{-x}) - \int -\frac{1}{2}\,e^{-2x} - e^{-x} dx\,\Big|_0^1$$

$$= x\,(-\frac{1}{2}\,e^{-2x} - e^{-x}) + (-\frac{1}{4}\,e^{-2x} - e^{-x})\,\Big|_0^1$$

$$= (-\frac{1}{2}e^{-2} - e^{-1}) - \frac{1}{4}(e^{-2} + e^{-1}) - (0 - (-\frac{1}{4} - 1))$$

$$= \frac{-3}{4}\,e^{-2} - 2e^{-1} - \frac{5}{4}$$

㉓ $\int_0^1 \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx$

الحل:

$u = xe^x \qquad dv = (1+x)^{-2} dx$

$du = (xe^x + e^x)dx \qquad v = \frac{(1+x)^{-1}}{-1}$

$du = e^x(x+1)dx \qquad = \frac{-1}{x+1}$

$$= xe^x(\frac{-1}{x+1} - \int \frac{-1}{\cancel{x+1}}\, e^x(\cancel{x+1}))\,\Big|_0^1$$

$$= \frac{-\,xe^x}{x+1} + e^x\,\Big|_0^1$$

$$= (\frac{-e}{2} + e) - (0 + 1) = \frac{1}{2}e\ - 1$$

㉔ $\int_0^1 x3^x\, dx$

الحل:

$u = x \qquad dv = 3^x\, dx$

$du = dx \qquad v = \frac{3^x}{\ln 3}$

$$= \frac{x3^x}{\ln 3} - \int \frac{3^x}{\ln 3}\, dx\,\Big|_0^1$$

$$= \frac{x3^x}{\ln 3} - \frac{3^x}{\ln 3\,.\,\ln 3}\,\Big|_0^1$$

$$= (\frac{3}{\ln 3} + \frac{3}{(\ln 3)^2}) - (0 - \frac{1}{(\ln 3)^2})$$

$$= \frac{3}{\ln 3} - \frac{2}{(\ln 3)^2}$$

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

㉕ $\int x^3\, e^{x^2}\, dx$

الحل:

$a = x^2 \rightarrow dx = \frac{da}{2x}$

$$= \int x^3\, e^a . \frac{da}{2x} = \frac{1}{2} \int x^2\, e^a\, da$$

$$= \frac{1}{2} \int a e^a\, da$$

$u = a \qquad dv = e^a\, da$

$du = da \qquad v = e^a$

$$= \frac{1}{2}\,(ae^a - \int e^a\ dx\,)$$

$$= \frac{1}{2}\,(ae^a - e^a) = \frac{1}{2}\,(x^2\, e^{x^2} - e^{x^2}) + C$$

㉖ $\int \cos\,(\ln x)\, dx$

الحل:

$u = \cos\,(\ln x) \qquad dv = dx$

$du = -\sin\,(\ln x)\frac{1}{x} \qquad v = x$

$$= x \cos\,(\ln x) - \int -\sin\,(\ln x)\frac{1}{x}\, x\, dx$$

$$= x \cos \ln x + \int \sin \ln x\, dx \quad \text{------}\ ①$$

$u = \sin \ln x \qquad dv = dx$

$du = \cos \ln x \,(\frac{1}{x}) \qquad v = x$

$\int \sin \ln x \, dx = x \sin \ln x - \int \cos \ln x \,(\frac{1}{x})\, dx$

$= x \sin \ln x - \int \cos \ln x \, dx$ ------ ②

التكامل من ① و ②

$\int \cos \ln x \, dx = x \cos \ln x + x \sin \ln x - \int \cos \ln x \, dx$

$2\int \cos \ln x \, dx = x \cos \ln x + x \sin \ln x$

$= \int \cos x \ln x \, dx = \frac{x \cos \ln x + x \sin \ln x}{2} + C$

㉗ $\int x^3 \sin x^2 \, dx$

الحل:

$a = x^2 \rightarrow dx = \frac{da}{2x}$

$= \int x^3 \sin a \,.\, \frac{da}{2x} = \frac{1}{2}\int x^2 \sin a \, dx$

$= \frac{1}{2}\int a \sin a \, da$

$u = a \qquad dv = \sin a \, dx$

$du = da \qquad v = -\cos a$

$= \frac{1}{2}(-a \cos a - \int -\cos a)\, dx$

$= \frac{1}{2}(-a \cos a + \sin a) + C$

$= \frac{1}{2}(-x^2 \cos x^2 + \sin x^2) + C$

㉘ $\int e^{\cos x} \sin 2x \, dx$

الحل:

$= \int e^{\cos x} \,.\, 2\sin x \cos x \, dx$

$a = \cos x \rightarrow dx = \frac{da}{-\sin x}$

$= 2\int e^a \cancel{\sin x} \cos x \, \frac{da}{\cancel{-\sin x}} = -2\int e^a \,.\, a \, dx$

$u = a \qquad dv = e^a \, dx$

$du = da \qquad v = e^a$

$= -2(a\, e^a - e^a) + C$

$= -2(\cos x \; e^{\cos x} - e^{\cos x}) + C$

㉙ $\int \sin \sqrt{x} \, dx$

الحل:

$a = \sqrt{x} \rightarrow a^2 = x \rightarrow 2a\, da = dx$

$= \int \sin a \,.\, 2a \, da = 2\int a \sin a \, da$

$u = a \qquad dv = \sin a \, dx$

$du = da \qquad v = -\cos a$

$= 2(-a \cos a - \int -\cos a \, dx)$

$= 2(-a \cos a + \sin a) + C$

$= 2(-\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + \sin \sqrt{x}\,) + C$

㉚ $\int \frac{x^3 e^{x^2}}{(x^2+1)^2} dx$

الحل:

$a = x^2 \rightarrow dx = \frac{da}{2x}$

$= \int \frac{x^3 e^{x^2}}{(x^2+1)^2} \cdot \frac{da}{2x} = \frac{1}{2}\int \frac{x^2 e^a}{(a+1)^2} da$

$= \frac{1}{2}\int \frac{a e^a}{(a+1)^2} da$

$u = a e^a \qquad dv = (a+1)^2 \, da$

$du = (a e^a + e^a) da \qquad v = \frac{(a+1)^{-1}}{-1}$

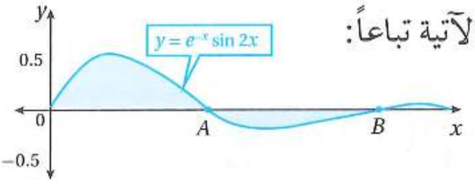
$= e^a (a+1) da \qquad = \frac{-1}{a+1}$

$= \frac{1}{2}(a e^a (\frac{-1}{a+1})) - \int \frac{-1}{\cancel{a+1}} e^a \cancel{(a+1)} \, da$

$= \frac{1}{2}(\frac{-a e^a}{a+1} + e^a) + C$

$= \frac{1}{2}(\frac{-x^2 e^{x^2}}{x^2+1} + e^{x^2}) + C$

إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران: $f(x) = e^{-x} \sin 2x$ ، حيث: $x \geq 0$ ، فأجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعاً:



31 أجد إحداثيي كل من النقطة A و النقطة B

الحل:

$f(x) = e^{-x} \sin 2x = 0$

$e^{-x} \neq 0 \qquad \sin 2x = 0$

$2x = 0 , \pi , 2\pi$

$x = 0 , \frac{\pi}{2} , \pi$

$A = (\frac{\pi}{2} , 0) \quad , \quad B = (\pi, 0)$

32 أجد مساحة المنطقة المظللة.

الحل:

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \sin 2x \; dx + -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-x} \sin 2x \; dx$$

$$\int e^{-x} \sin 2x \, dx = \frac{4}{5}(-\frac{e^{-x}}{2} \cos 2x - \frac{e^{-x}}{2} \sin 2x)$$

من سؤال 13

$$A = \frac{4}{5}(-\frac{e^{-x}}{2} \cos 2x - \frac{e^{-x}}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$-(\frac{4}{5} \cos 2x - \frac{e^{-x}}{2}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= \frac{4}{5}[(\frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{2}(-1) - \frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{2}) - (-\frac{1}{2} - \frac{1}{2})]$$

$$- \frac{4}{5}[(\frac{-e^{-\pi}}{2} - \frac{-e^{-\pi}}{2}) - (\frac{-e^{-\frac{\pi}{2}}}{2} - \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{2})]$$

33 يتحرك جسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = te^{-\frac{t}{2}}$ حيث t الزمن بالثواني v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا بدأ الجسيم الحركة من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد t ثانية.

الحل:

$v(t) = te^{-\frac{t}{2}}$

$s(t) = \int te^{-\frac{t}{2}} \, dt$

$u = t \qquad \searrow \qquad dv = e^{-\frac{t}{2}}$

$du = dt \qquad \leftarrow \qquad v = -2e^{-\frac{t}{2}}$

$= t(-2e^{-\frac{t}{2}}) - \int -2e^{-\frac{t}{2}} \, dt$

$= -2te^{-\frac{t}{2}} - 4e^{-\frac{t}{2}} + C$

$s(0) = 0 - 4 + C = 0 \ \rightarrow \ C = 4$

$s(t) = -2te^{-\frac{t}{2}} - 4e^{-\frac{t}{2}} + 4$

في كل مما يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$ ونقطة يمر بها منحنى $y = f(x)$ استعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$

34 $f'(x) = (x + 2) \sin x \, ; \qquad (0, 2)$

الحل:

$f(x) = \int (x + 2) \sin x \, dx$

$u = x + 2 \qquad \searrow \qquad dv = \sin x \, dx$

$du = dx \qquad \leftarrow \qquad v = -\cos x$

$(x + 2)(-\cos x) - \int -\cos x \, dx$

$= -(x + 2) \cos x + \sin x + C$

$f(0) = -2 + 0 + C = 2 \ \longrightarrow \ C = 4$

$f(x) = -(x + 2) \cos x + \sin x + 4$

35 $f'(x) = 2xe^{-x} ; \qquad (0, 3)$

الحل:

$f(x) = \int 2xe^{-x} \, dx$

$u = 2x \qquad \searrow \qquad dv = e^{-x} \, dx$

$du = 2 \, dx \qquad \leftarrow \qquad v = -e^{-x}$

$= 2x(-e^{-x}) - \int -e^{-x} . 2 \, dx$

$= -2xe^{-x} - e^{-x} + C$

$f(0) = 0 - 1 + C = 3 \longrightarrow C = 4$

$f(x) = -2xe^{-x} - e^{-x} + 4$

36 **دورة تدريبية:** تقدمت طالبة جامعية لدورة تدريبية متقدمة في الطباعة. إذا كان عدد الكلمات التي تطبعها الطالبة في الدقيقة يزداد بمعدل $N'(t) = (t+6)e^{-0.25t}$ حيث $N(t)$ عدد الكلمات التي تطبعها الطالبة في الدقيقة بعد t أسبوعاً من التحاقها بالدورة، فأجد $N(t)$، علماً بأن الطالبة كانت تطبع 40 كلمة في الدقيقة عند بدء الدورة.

الحل:

$$N'(t) = (t+6)\, e^{-0.25t}$$

$$N(t) = \int (t+6)\, e^{-0.25t}\, dx$$

$$u = t + 6 \qquad dv = e^{-0.25t}$$

$$du = dt \qquad v = \frac{1}{-0.25}\, e^{-0.25t} = -4\, e^{-0.25t}$$

$$= (t+6)(-4\, e^{-0.25t}) - \int -4\, e^{-0.25t}\, dx$$

$$= (t+6)\,(-4\, e^{-0.25t}) - 16\, e^{-0.25t} + C$$

$$N(0) = (0+6)\,(-4) - 16 + C = 40$$

$$C = 40 + 24 + 16 = 80$$

$$N(t) = (t+6)\,(-4\, e^{-0.25t}) - 16\, e^{-0.25t} + 80$$

37 تبرير: أثبت أن:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{3} x^2 \ln 2x\, dx = 9 \ln 6 - \frac{215}{72}$$

الحل:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{3} x^2 \ln 2x\, dx$$

$$u = \ln 2x \qquad \searrow \qquad dv = x^2\, dx$$

$$du = \frac{1}{x}\, dx \qquad \leftarrow \qquad v = \frac{x^3}{3}$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln 2x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x}\, dx \Big|_{\frac{1}{2}}^{3}$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln 2x - \int \frac{x^2}{3}\, dx \Big|_{\frac{1}{2}}^{3}$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln 2x - \frac{x^3}{9} \Big|_{\frac{1}{2}}^{3}$$

$$= (9 \ln 6 - 3) - (\frac{1}{24} \ln 1 - \frac{1}{72})$$

$$= 9 \ln 6 - 3 - (\frac{1}{24}\,(\ln 1) - \frac{1}{72})$$

$$= 9 \ln 6 + \frac{1}{24} \ln 1 - 3 + \frac{1}{72}$$

$$= 9 \ln 6 + \frac{1}{24} \ln 1 + \frac{-216 + 1}{72}$$

$$= 9 \ln 6 - \frac{215}{72}$$

38 تبرير: أثبت أن:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} x \sin 5x \sin 3x\, dx = \frac{\pi - 2}{16}$$

الحل:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} x \sin 5x \sin 3x\, dx$$

$$\sin 5x \sin 3x = \frac{1}{2}\,(\cos(5x{-}3x) - \cos(5x{+}3x))$$

$$= \frac{1}{2}\,(\cos 2x - \cos 8x)$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} x\, (\frac{1}{2})(\cos 2x - \cos 8x)\, dx$$

$$u = \frac{1}{2} x \qquad dv = \cos 2x - \cos 8x$$

$$du = \frac{1}{2}\, dx \qquad v = \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{8} \sin 8x$$

$$= \frac{1}{2} x (\frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{8} \sin 8x) \Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$- \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\,(\sin 2x - \frac{1}{8}\ \sin 8x)\, \frac{1}{2}\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\,(\sin 2x - \frac{1}{8}\ \sin 8x) \Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$- \frac{1}{4}\,((-\frac{1}{2})(\sin 2x + \frac{1}{64} \cos 2x) \Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= (\frac{1}{4})\,(\frac{\pi}{4})(1 - 0) - \frac{1}{4}\,(-\frac{1}{2} + \frac{1}{64}(1))$$

$$- (\frac{1}{2} + \frac{1}{64})$$

$$= \frac{\pi}{16} - \frac{2}{16} = \frac{\pi - 2}{16}$$

㊴ **تبرير:** إذا كان: $\int_0^a xe^{\frac{x}{2}}\,dx = 6$ فأثبت أن a يحقق المعادلة: $x = 2 + e^{\frac{-x}{2}}$

الحل:

$$\int_0^a xe^{\frac{x}{2}}\,dx$$

$$u = x \qquad dv = e^{\frac{x}{2}}\,dx$$

$$du = dx \qquad v = 2e^{\frac{x}{2}}$$

$$= x(2e^{\frac{x}{2}}) - \int 2e^{\frac{x}{2}}\,dx \Big|_0^a$$

$$= 2x(e^{\frac{x}{2}}) - 4e^{\frac{x}{2}} \Big|_0^a$$

$$= (2\,a\,e^{\frac{a}{2}} - 4e^{\frac{a}{2}}) - (0 - 4) = 6$$

$$= 2a\,e^{\frac{a}{2}} - 4\,e^{\frac{a}{2}} - 2 = 0$$

$$2a\,e^{\frac{1}{2}a} = 4\,e^{\frac{a}{2}} + 2$$

بالقسمة على : $2a^{\frac{1}{2}a}$

$$a = 2 + e^{-\frac{1}{2}a}$$

㊵ **تبرير:** أجد: $\int (\ln x)^2\,dx$ بطريقتين مختلفتين، مبرراً إجابتي.

الحل:

$$\int (\ln x)^2\,dx$$

$$u = (\ln x)^2 \qquad dv = dx$$

$$du = 2\ln x\,(\frac{1}{x}) \qquad v = x$$

$$= x(\ln x)^2 - \int x\ 2\ln x\,(\frac{1}{x})\,dx$$

$$= x(\ln x)^2 - 2\int \ln x\,dx$$

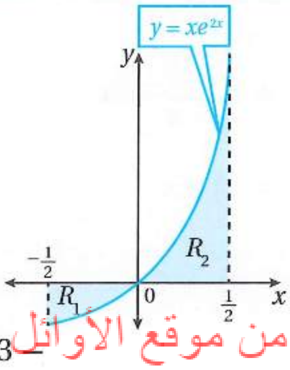
$$u = \ln x \qquad dv = dx$$

$$du = \frac{1}{x}\,dx \qquad v = x$$

$$= x(\ln x)^2 - 2(x\ln x - \int x\,.\,\frac{1}{x}\,dx)$$

$$= x(\ln x)^2 - 2(x\ln x - x) + C$$

تبرير: إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران $y = xe^{2x}$ حيث $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$ فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:



㊶ أجد مساحة كل من المنطقة R_1 ، والمنطقة R_2

الحل:

$$\int xe^{2x}\,dx$$

$$u = x \qquad dv = e^{2x}dx$$

$$du = dx \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$= x(\frac{1}{2})\,e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}\,dx$$

$$= \frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}$$

$$R_1 = -\int_{-\frac{1}{2}}^{0} xe^{2x}\,dx = -(\frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x})\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0}$$

$$= -((0 - \frac{1}{4}) - (\frac{1}{4}e^{-1} + \frac{1}{4}e^{-1}))$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{2}{4}e^{-1}$$

$$R_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} xe^{2x}\,dx = (\frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x})\Big|_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= (\frac{1}{4}e - \frac{1}{4}e^{1}) - (0 - \frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$$

㊷ أثبت أن مساحة المنطقة R_1 إلى مساحة المنطقة R_2 تساوي e: $(e-2)$

الحل:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{2}{4}e^{-1}}{\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}(1 - 2e^{-1})}{\frac{1}{4}} = 1 - 2e^{-1}$$

$$= 1 - \frac{2}{e} = \frac{e-2}{e}$$

تحدٍ: أستعمل التكامل بالأجزاء لإثبات كل مما يأتي، حيث n عدد صحيح موجب، و $a \neq 0$

43 $\int x^n \ln x \, dx = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)^2}(-1+(n+1)\ln x)+C$

الحل:

$$\int x^n \ln x \, dx$$

$u = \ln x \qquad dv = x^n \, . \, dx$

$du = \dfrac{1}{x} dx \qquad v = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} \, . \ln x - \int \frac{x^{n+1}}{n+1} \, . \, \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} \, . \ln x - \int \frac{x^n}{n+1} dx$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} \, . \ln x - \frac{1}{n+1} \times \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$= \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}(-1+(n+1)\ln x)+C$$

44 $\int x^n e^{ax} dx = \dfrac{x^n e^{ax}}{a} - \dfrac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx$

الحل:

$$\int x^n e^{ax} dx$$

$u = x^n \qquad dv = e^{ax} dx$

$du = nx^{n-1} \qquad v = \dfrac{1}{a} e^{ax}$

$$= x^n \frac{1}{a} e^{ax} - \int nx^{n-1} . \frac{1}{a} e^{ax}$$

$$= \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx$$

الفاتن في
الرياضيات

كتاب التمارين ص 15

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

1 $\int x \cos 4x \, dx$

الحل:

$u = x \qquad dv = \cos 4x$

$du = dx \qquad v = \dfrac{1}{4} \sin 4x$

$$= x(\frac{1}{4} \sin 4x) - \int \frac{1}{4} \sin 4x \, dx$$

$$= \frac{x}{4} \sin 4x + \frac{1}{16} \cos 4x + C$$

2 $\int x \sqrt{x+1} \, dx$

الحل:

$u = x \qquad dv = (x+1)^{\frac{1}{2}}$

$du = dx \qquad v = \dfrac{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3}$

$$= x(2) \frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} - \int \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} \, dx$$

$$= \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \times \frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} + C$$

3 $\int xe^{-x} dx$

الحل:

$u = x \qquad dv = e^{-x} dx$

$du = dx \qquad v = -e^{-x}$

$$= x(-e^{-x}) - \int -e^{-x} dx$$

$$= -x e^{-x} - e^{-x} + C$$

4 $\int (x^2+1) \ln x \, dx$

الحل:

$u = \ln x \qquad dv = (x^2+1)dx$

$du = \dfrac{1}{x} dx \qquad v = (\dfrac{x^3}{3} + x)$

$$=(\frac{x^3}{3}+x) \ln x - \int (\frac{x^3}{3}+x) \frac{1}{x} \, dx$$

$$=(\frac{x^3}{3}+x) \ln x - \int (\frac{x^2}{3}+1) \, dx$$

$$=(\frac{x^3}{3}+x) \ln x - (\frac{x^3}{9}+x)+C$$

⑤ $\int \ln x^3\, dx$

الحل:

$$= 3\int \ln x\, dx$$

$$u = \ln x \qquad dv = dx$$

$$du = \frac{1}{x}\, dx \qquad v = x$$

$$= 3(x\ln x - \int x \,.\, \frac{1}{x}\, dx)$$

$$= 3(x\ln x - x) + C$$

---

⑥ $\int e^{2x} \sin x\, dx$

الحل:

$$u = e^{2x} \qquad dv = \sin x\, dx$$

$$du = 2\, e^{2x} \qquad v = -\cos x$$

$$= e^{2x}(-\cos x) - \int -\cos x \;.\, 2\, e^{2x}\, dx$$

$$= -e^{2x} \cos x + \int 2\, e^{2x} \cos x\; dx \quad \text{-------} ①$$

$$u = 2e^{2x} \qquad dv = \cos x\, dx$$

$$du = 4e^{2x} \qquad v = \sin x$$

$$\int 2e^{2x} \cos x\, dx$$

$$= 2e^{2x} \sin x - 4\int e^{2x} \sin x\, dx \quad \text{------} ②$$

التكامل من ① و ②

$$\int e^{2x} \sin x\, dx = -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x$$

$$- 4\int e^{2x} \sin x\, dx$$

$$5\int e^{2x} \sin x\, dx = -2e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x$$

$$\int e^{2x} \sin x\, dx = \frac{-2e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x}{5} + C$$

أجد قيمة كل من التكاملات الآتية:

⑦ $\int_1^e \ln x\; dx$

الحل:

$$u = \ln x \qquad dv = dx$$

$$du = \frac{1}{x}\, dx \qquad v = x$$

$$= x\ln x - \int x \,.\, \frac{1}{x}\, dx \Big|_1^e$$

$$= x\ln x - x \Big|_1^e$$

$$= (e\ln e - e) - (0 - 1)$$

$$= (e - e) - (0 - 1) = 1$$

---

⑧ $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\, dx$

الحل:

$$= \int_1^2 x^{-2} \ln x\, dx$$

$$u = \ln x \qquad dv = x^{-2}\, dx$$

$$du = \frac{1}{x}\, dx \qquad v = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x}$$

$$= -\frac{1}{x} \ln x - \int -\frac{1}{x} \,.\, \frac{1}{x}\, dx \Big|_1^2$$

$$= -\frac{1}{x} \ln x + \int \frac{1}{x^2}\, dx \Big|_1^2$$

$$= -\frac{1}{x} \ln x + \frac{x^{-1}}{-1}\, dx \Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} \Big|_1^2$$

$$= (\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2}) - (1 \ln 1 - 1)$$

$$= \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2}$$

---

⑨ $\int_0^\pi x \cos \frac{1}{4} x\, dx$

الحل:

$$u = x \qquad dv = \cos \frac{1}{4} x\, dx$$

$$du = dx \qquad v = 4 \sin \frac{1}{4} x$$

$$= x\,(4\sin\frac{1}{4}x)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 4\sin\frac{1}{4}x\,dx$$

$$= (4x\sin\frac{1}{4}x)\Big|_0^{\pi} + 16\cos\frac{1}{4}x\,\Big|_0^{\pi}$$

$$= (4\,\pi\,(\frac{1}{\sqrt{2}}) - 0 + 16\,(\frac{1}{\sqrt{2}}) - 16$$

$$= \frac{4\,\pi}{\sqrt{2}} + \frac{16}{\sqrt{2}} - 16$$

---

⑩ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3x}\cos 2\,x\,dx$

الحل:

$u = e^{3x}$ $\qquad dv = \cos 2x\,dx$

$du = 3\,e^{3x}\,dx$ $\qquad v = \frac{1}{2}\sin 2x$

$$= e^{3x}\,(\frac{1}{2}\sin 2\,x) - \int 3e^{3x}\,.\,\frac{1}{2}\sin 2x \text{ - - - - } ①$$

$$\int 3e^{3x}\,.\,\frac{1}{2}\sin 2x\,dx$$

$u = 3e^{3x}$ $\qquad dv = \frac{1}{2}\sin 2x\ \ dx$

$du = 9e^{3x}\,dx$ $\qquad v = -\frac{1}{4}\cos 2x$

$$\int 3e^{3x}\,.\,\frac{1}{2}\sin 2x\,dx$$

$$= 3e^{3x}(-\frac{1}{4}\cos 2x - \int 9e^{3x}\,.-\frac{1}{4}\cos 2x) \text{-- } ②$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3x}\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x\,\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$+\ \frac{3}{4}e^{3x}\cos 2x\,\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{9}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3x}\cos 2x\,dx$$

$$\frac{13}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3x}\cos 2x\,dx = (\frac{1}{2}e^{\frac{3\pi}{4}} - 0) + \frac{3}{4}e^{\frac{3\pi}{4}}(0) - \frac{3}{4}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3x}\cos 2x\,dx = (\frac{1}{2}e^{\frac{3\pi}{4}} - \frac{3}{4}) \times \frac{4}{13}$$

---

⑪ $\int_1^{e} \ln(x+1)\,dx$

الحل:

$u = \ln x + 1$ $\qquad dv = dx$

$du = \frac{1}{x+1}\,dx$ $\qquad v = x$

$$= x\ln(x+1)\Big|_1^{e} - \int_1^{e} \frac{x}{x+1}\,dx$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ x+1\overline{)\cancel{x}\qquad} \\ \underline{-\cancel{x}\overset{\ominus}{+}1} \\ -1 \end{array}$$

$$= x\ln(x+1)\Big|_1^{e} - \int_1^{e} 1 - \frac{x}{x+1}\,dx$$

$$= x\ln(x+1)\Big|_1^{e} - (x - \ln|x+1|)\,\Big|_1^{e}$$

$$= (e\ln(e{+}1) - (\ln 2) - (e - \ln(e{+}1) + (1 - \ln 2)$$

---

⑫ $\int_0^{1} x^2\,e^x\,dx$

الحل:

u		dv
x^2	(+)	e^x
$2x$	(−)	e^x
2	(+)	e^x
0		e^x

$$= x^2e^x - 2x\,e^x + 2e^x\,\Big|_0^{1}$$

$$= (e - 2e + 2e) - (0 - 0 + 2)$$

$$= e - 2$$

---

⑬ أثبت أن $\int_2^{4} \ln x\,dx = 6\ln 2 - 2$

الحل:

$u = \ln x$ $\qquad dv = dx$

$du = \frac{1}{x}\,dx$ $\qquad v = x$

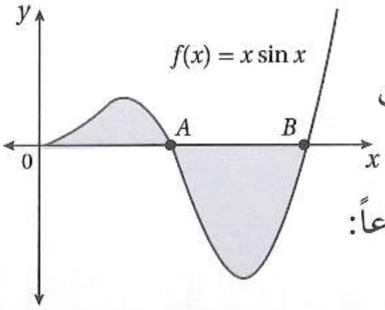
$$= x\ln\,x\,\Big|_2^{4} - \int_2^{4} x\,.\,\frac{1}{x}\,dx$$

$$= x\ln\,x\,\Big|_2^{4} - x\,\Big|_2^{4}$$

$$= 4\ln 4 - 2\ln 2 - (4 - 2)$$

$$= 4\ln 2^2 - 2\ln 2 - 2$$

$$= 8\ln 2 - 2\ln - 2 = 6\ln 2 - 2$$



إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران $f(x) = x\sin x$ حيث $x \ge 0$ فأجب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

14 أجد إحداثيي كل من النقطة A والنقطة B:

الحل:

$$f(x) = x\sin x = 0$$

$$x = 0 \longrightarrow \sin x = 0 \longrightarrow x = 0\ ,\ \pi,\ 2\pi$$

$$A = (\pi\ ,\ 0)\quad ,\quad B = (2\pi\ ,\ 0)$$

15 أجد مساحة المنطقة المظللة.

الحل:

$$u = x \qquad dv = \sin x\, dx$$

$$du = dx \qquad v = -\cos x$$

$$= -x\cos x - \int -\cos x\, dx$$

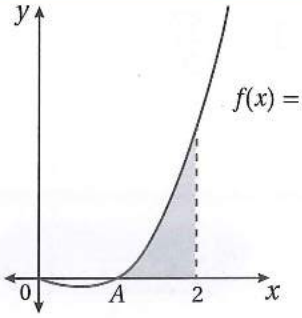
$$= -x\cos x + \sin x$$

$$A = \int_0^{\pi} x\sin x\, dx + -\int_{\pi}^{2\pi} x\sin x\, dx$$

$$= (-x\cos x + \sin x)\Big|_0^{\pi} - (-x\cos x + \sin x)\Big|_{\pi}^{2\pi}$$

$$= (-\pi(-1) + 0) - (0) - (-2\pi + 0) - (-\pi(-1) + 0)$$

$$= \pi - (-2\pi - \pi) = \pi + 3\pi = 4\pi$$



إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران $f(x) = x^2\ln x$ حيث $x \ge 0$ فأجب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

16 أجد إحداثيي النقطة A:

الحل:

$$f(x) = x^2\ln x = 0$$

$$x = 0 \longrightarrow \ln x = 0 \longrightarrow x = 1 \longrightarrow A = (1, 0)$$

17 أجد مساحة المنطقة المظللة.

الحل:

$$\int x^2\ln x\, dx$$

$$u = \ln x \qquad dv = x^2\, dx$$

$$du = \frac{1}{x}\, dx \qquad v = \frac{x^3}{3}$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}$$

$$A = \int_1^2 x^2\ln x\, dx$$

$$= (\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9})\Big|_1^2$$

$$= (\frac{8}{3}\ln 2 - \frac{8}{9}) - (0 - \frac{1}{9})$$

$$= \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{7}{9}$$

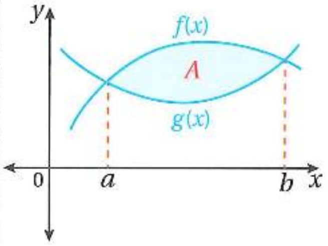
الفاتن في الرياضيات

الدرس الخامس

المساحات والحجوم

المساحة بين منحنيين

نبدأ أولاً إذا لم يعط المستقيمين $x = a$, $x = b$ أو الفترة $[a, b]$ عندئذ نجد نقط التقاطع بين المنحنيين $f(x), g(x)$ بوضح $f(x) = g(x)$ وليكن الناتج مثلاً $x = a, x = b$ فتكون المساحة:



$$A = \int_a^b (f((x) - g(x))\, dx$$

ولمعرفة أي المنحنيين أعلى من الثاني إذا كان الرسم موجود فمن الرسم وإذا لم يكن الرسم موجود نختار عدد في $[a, b]$ ونعوض في الاقترانين ومن يكون ناتجه أكبر يكون هو الأعلى.

مثال

جد المساحة المحصورة بين $f(x) = x^2 + 2x + 2$، $g(x) = 3x + 8$

الحل

نجد نقط التقاطع بوضح $f(x) = g(x)$

$$\longrightarrow x^2 + 2x + 2 = 3x + 8$$

$$\longrightarrow x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x - 3)\,(x + 2) = 0 \longrightarrow x = 3\,,\,-2$$

نختار عدد في $(-2, 3)$ ليكن (1) مثلاً:

$$f(1) = 5\,,\, g(1) = 11 \qquad g > f$$

فتكون

$$A = \int_{-2}^{3} (3x + 8) - (x^2 + 2x + 2)\, dx$$

$$A = \int_{-2}^{3} (x + 6 - x^2)\, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^3}{9}\Big|_{-2}^{3}$$

$$= (\frac{9}{2} + 18 - 9) - (2 - 12 + \frac{8}{3})$$

$$= 19 + \frac{9}{2} - \frac{8}{3} = \frac{114 + 27 - 16}{6} = \frac{125}{6}$$

مثال

جد المساحة المحصورة بين $f(x) = 8 - x^2$، $g(x) = x^2$

الحل

$$8 - x^2 = x^2 \longrightarrow 8 = 2x^2$$

$$x^2 = 4 \longrightarrow \quad x = \pm 2$$

نختار (1) مثلاً في $(-2, 2)$:

$$f(1) = 7\,,\, g(1) = 1 \qquad f > g$$

$$A = \int_{-2}^{2} (8 - x^2) - (x^2)\, dx = \int_{-2}^{2} 8 - 2x^2\, dx$$

$$= 8x - \frac{2x^3}{3}\Big|_{-2}^{2}$$

$$= (16 - \frac{16}{3}) - (-16 + \frac{16}{3})$$

$$= 16 - \frac{16}{3} + 16 - \frac{16}{3} = 32 - \frac{32}{3}$$

$$= \frac{96 - 32}{3} = \frac{64}{3}$$

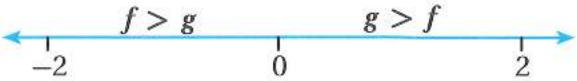
مثال

جد المساحة المحصورة بين $f(x) = x^3$، $g(x) = 4x$

الحل

$$x^3 = 4x \longrightarrow x^3 - 4x = 0$$

$$x\,(x^2 - 4) = 0 \longrightarrow x = 0\,,\,2,\,-2$$



نختار (1–) مثلاً في (0, 2–):

$f(-1) = -1\ ,\quad g(-1) = -4 \qquad f > g$

نختار (1) في (2, 0)

$f(1) = 1\ ,\quad g(1) = 4$ فيكون $g > f$

$$A = \int_{-2}^{0} x^3 - 4x\,dx + \int_{0}^{2} 4x - x^3\,dx$$

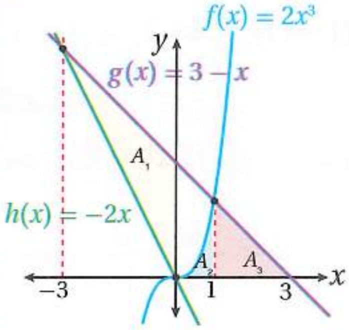
$$= \frac{x^4}{4} - 2x^2 \Big|_{-2}^{0} + 2x^2 - \frac{x^4}{4}\Big|_{0}^{2}$$

$$= (0) - (4 - 8) + (8 - 4) - (0)$$

$$= 4 + 4 = 8$$

مثـــال

في الشكل جد مجموع المساحات المظللة.



الحـــل

$g(x) = h(x)$

$-2x = 3 - x \longrightarrow x = -3$

$f(x) = g(x)$

$2x^3 = 3 - x \longrightarrow x = 1$

$g(x) = 0 \longrightarrow 3 - x = 0 \longrightarrow x = 3$

$A = A_1 + A_2 + A_3$

$$= \int_{-3}^{0} (3 - x) - (-2x)dx + \int_{0}^{1} 2x^3\,dx + \int_{1}^{3} (3 - x)dx$$

$$= 3x + \frac{x^2}{2}\Big|_{-3}^{0} + \frac{2x^4}{4}\Big|_{0}^{1} + 3x - \frac{x^2}{2}\Big|_{1}^{3}$$

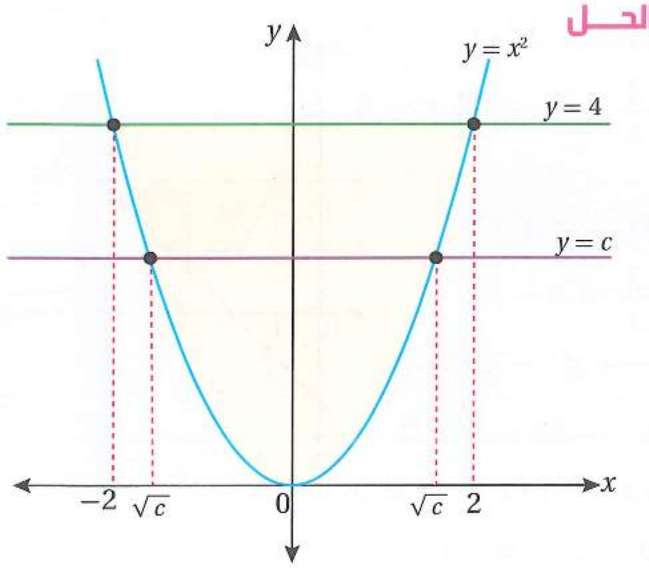
$$= (0) - (-9 + \frac{9}{2}) + (\frac{1}{2} - 0) + (9 - \frac{9}{2}) - (3 - \frac{1}{2})$$

$$= 9 - \frac{9}{2} + \frac{1}{2} + 9 - \frac{9}{2} - 3 + \frac{1}{2} = 7$$

مثـــال

إذا كان المستقيم $y = c$ يقسم المساحة المحصورة بين $y = x^2$ ، $y = 4$ إلى قسمين متساويين فجد c

الحـــل



$x^2 = 4 \longrightarrow x = \pm 2$

$$A = \int_{-2}^{2} 4 - x^2\,dx = 4x - \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{2}$$

$$= (8 - \frac{8}{3}) - (-8 + \frac{8}{3})$$

$$= 16 - \frac{16}{3} = \frac{48 - 16}{3} = \frac{32}{3}$$

$x^2 = c \longrightarrow x = \pm\sqrt{c}$

$$A = \int_{-\sqrt{c}}^{\sqrt{c}} c - x^2\,dx = cx - \frac{x^3}{3}\Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}$$

$$= (c\sqrt{c} - \frac{c\sqrt{c}}{3}) - (-c\sqrt{c} + \frac{c\sqrt{c}}{3})$$

$$= 2c\sqrt{c} - \frac{2}{3}c\sqrt{c} = \frac{4}{3}c\sqrt{c} = \frac{1}{2}(\frac{32}{3})$$

$$\frac{4}{3}c\sqrt{c} = \frac{16}{3} \longrightarrow c\sqrt{c} = 4$$

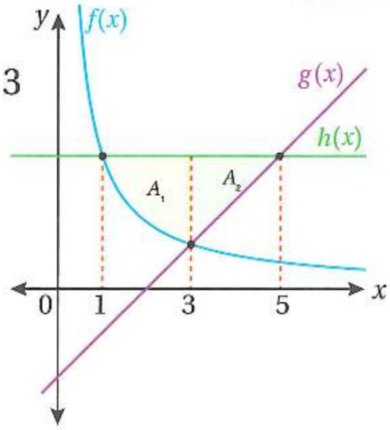
بالتربيع

$$c^2\,(c) = 16 \longrightarrow c^3 = 16 \longrightarrow c = \sqrt[3]{16}$$

مثال

جد المساحة المحصورة بين $f(x)=\frac{3}{x}$ ، $g(x)=x-2$ ، $h(x)=3$

الحل

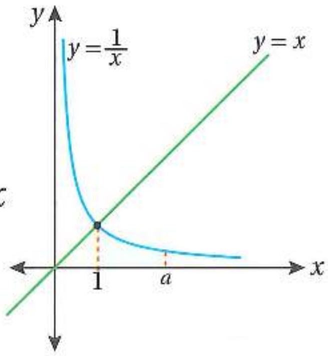


$$f(x)=h(x)$$
$$\frac{3}{x}=3 \longrightarrow 3x=3$$
$$\longrightarrow x=1$$
$$f(x)=g(x)$$
$$\frac{3}{x}=x-2$$
$$\longrightarrow x^2-2x=3$$
$$x^2-2x-3=0$$
$$(x-3)\,(x+1)=0$$
$$x=3, x=-1$$
$$g(x)=h(x)$$
$$x-2=3 \longrightarrow x=5$$
$$A=\int_1^3 3-\frac{3}{x}\,dx+\int_3^5 3-(x-2)dx$$
$$=3x-3\ln x\Big|_1^3+5x-\frac{x^2}{2}\Big|_3^5$$
$$=(9-3\ln 3)-(3-3\ln 1)+(25-\frac{25}{2})-(15-\frac{9}{2})$$
$$=9-3\ln 3-3+0+25-\frac{25}{2}-15+\frac{9}{2}$$
$$=8-3\ln 3$$

مثال

إذا كانت المساحة المحصورة بين $y=\frac{1}{x}$ ، $y=x$ ومحور x والمستقيم $x=a$ حيث $a>1$ تساوي 1.5 فجد a

الحل

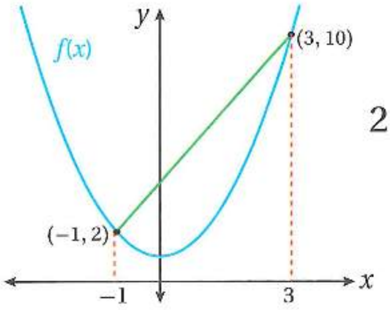


$$x=\frac{1}{x}$$
$$x^2=1 \longrightarrow x=1$$
$$A=\int_0^1 x\,dx+\int_1^a \frac{1}{x}\,dx$$
$$=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1+\ln x\Big|_1^a$$
$$=(\frac{1}{2}-0)+(\ln a-\ln 1)=\frac{1}{2}+\ln a=1.5$$
$$\ln a=1 \longrightarrow a=e$$

مثال

جد المساحة المحصورة بين $f(x)=x^2+1$ ، والمستقيم الواصل بين النقطتين $(-1\ ,\ f(-1))$ ، $(3\ ,\ f(3))$

الحل



نجد معادلة المستقيم

الميل $2=\frac{10-2}{3+1}$

المعادلة:

$$y-2=2\,(x+1)$$
$$y=2x+4$$
$$A=\int_{-1}^3 (2x+4)-(x^2+1)\,dx$$
$$=\int_{-1}^3 2x+3-x^2\,dx=x^2+3x-\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^3$$
$$=(9+9-9)-(1-3+\frac{1}{3})=\frac{34}{3}$$

مثال

جد المساحة المحصورة بين $f(x)=3x$ ، $g(x)=x^2$

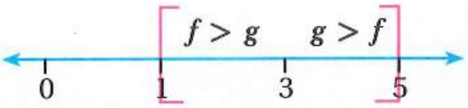
في $[1\ ,5]$ أو المستقيمين $x=1, x=5$

الحل

$x^2 = 3x$

$x^2 - 3x = 0$

$x(x-3) = 0 \longrightarrow x = 0\,,3$



$$A = \int_1^3 3x - x^2\,dx + \int_3^5 x^2 - 3x\,dx$$

$$= 3\,\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\,\Big|_1^3 + \frac{x^3}{3} - 3\,\frac{x^2}{2}\Big|_3^5$$

$$= (\frac{27}{2} - 9) - (\frac{3}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{125}{3} - \frac{75}{2})$$

$$- (9 - \frac{27}{2}) = 12$$

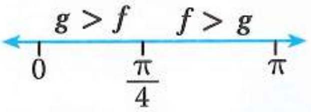
مثـال

جد المساحة المحصورة بين $f(x) = \sin x$، $g(x) = \cos x$ في $[0\,,\pi]$

الحل

$\sin x = \cos x$

$x = \frac{\pi}{4}$



$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x - \sin x\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin x - \cos x\,dx$$

$$= \sin x + \cos x\,\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + -\cos x - \sin x\,\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}$$

$$= (\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}) - (0 + 1) + (-(-1 - 0)$$

$$- (\frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} - 1 + 1 + \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

أتحقَّق من فهمي صفحة (77) :

a) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين $f(x) = \sqrt{x}$، و$g(x) = x^2 + 1$ و المستقيمين $x = 0$ و$x = 3$

الحل:

لا يوجد تقاطع بين $f(x) = g(x)$ في $(0\,,3)$

$g > f$ في $(0\,,3)$ لذلك:

$$A = \int_1^3 (x^2 + 1) - \sqrt{x}\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + x - \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\,\Big|_0^3$$

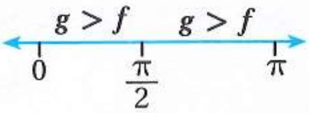
$$= (9 + 3 - \frac{2(3)^{\frac{3}{2}}}{3}) - (0) = 12 - 2\sqrt{3}$$

b) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين $f(x) = \sin x$، و$g(x) = 2 - \sin x$ والمستقيمين $x = 0$ و $x = \pi$

الحل:

$f(x) = g(x)$

$\sin x = 2 - \sin x$



$\longrightarrow 2\sin x = 2 \longrightarrow \sin x = 1 \longrightarrow x = \frac{\pi}{2}$

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 - \sin x - \sin x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2 - \sin x - \sin x\,dx$$

$$= 2x + 2\cos x\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2x + 2\cos x\,\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= (\pi + 0) - (2) + (2\pi - 2) - (\pi - 0)$$

$$= 2\pi - 4$$

أتحقَّق من فهمي

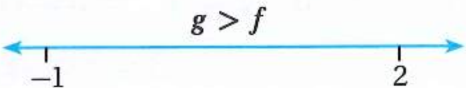
صفحة (79) : أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = x^2$، $g(x) = x + 2$

الحل:

$x^2 = x + 2$

$x^2 - x - 2 = 0 \longrightarrow (x-2)\,(x+1) = 0$

$x = 2, -1$



$$A=\int_{-1}^{2}(x+2)-(x^2)\,dx$$

$$=\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2}$$

$$=(2+4-\frac{8}{3})-(\frac{1}{2}-2+\frac{1}{3})=\frac{9}{2}$$

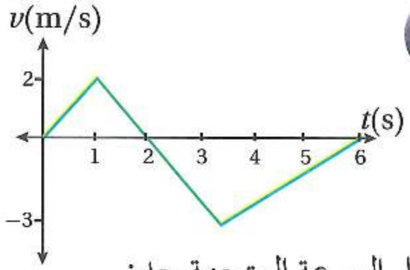
إذا علم منحنى السرعة المتجهة – الزمن في الفترة $[t_1,t_2]$ فإن الإزاحة $s(t_2)-s(t_1)=\int_{t_1}^{t_2}v(t)=dt$

= صافي المساحة

أما المسافة الكلية فتكون $\int_{t_1}^{t_2}|v(t)\,|=dt$

انتبه إذا كان المنحنى فوق محور x فإن التكامل يكون موجباً وإذا كان المنحنى تحت محور x فإن التكامل يكون سالباً والمساحة موجبة.

مثال



في الشكل الذي يمثل السرعة المتجهة جد:

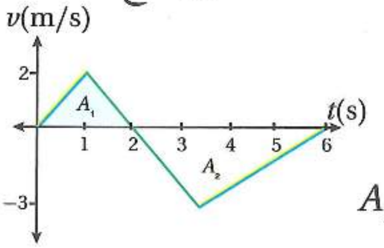
1) إزاحة الجسم في [0 ,6]

2) المسافة التي قطعها الجسم في [0 ,6]

3) الموقع النهائي للجسم

الحل

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ × القاعدة × الارتفاع



في A_1 : القاعدة = 2

الارتفاع = 2

$$A_1=\frac{1}{2}(2)\,(2)=2$$

في A_2 : القاعدة = $6-2=4$

الارتفاع = 3

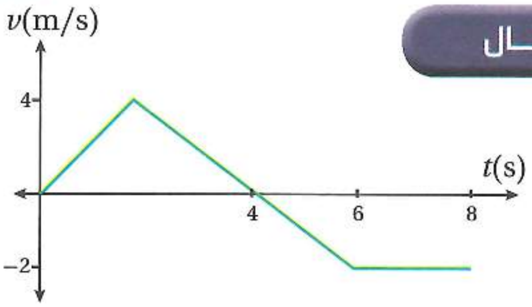
$$A_2=\frac{1}{2}(4)\,(3)=6$$

1) الإزاحة $=\int_0^6 v(t)\,dt=2-6=-4$

2) المسافة $=\int_0^6|v(t)|\,dx=2+6=8$

3) الموقع النهائي $s(6)-s(0)=\int_0^6 v(t)\,dt=-4$

مثال

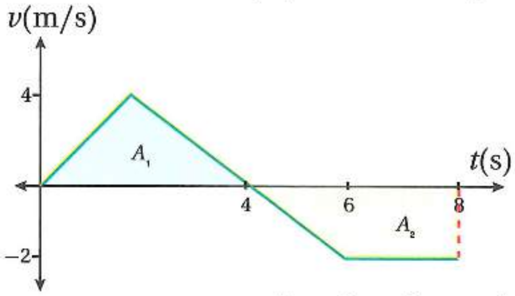


في الشكل الذي يمثل السرعة المتجهة – الزمن جد:

1) إزاحة الجسم في [0 ,8]

2) المسافة التي قطعها الجسم في [0 ,8]

الحل



A_1 : القاعدة = $4-0=4$

الارتفاع = 4

$$A_1=\frac{1}{2}(4)\,(4)=8$$

A_2 : مساحة شبه المنحرف = $\frac{1}{2}$ × مجموع القاعدتين × الارتفاع

القاعدة الأولى = $8-4=4$

القاعدة الثانية = $8-6=2$

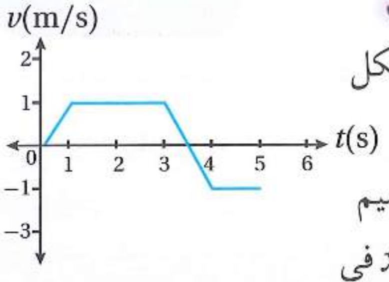
الارتفاع = 2

$$A_2=\frac{1}{2}(4+2)(2)=6$$

1) الإزاحة $=8-6=2$

2) المسافة $=8+6=14$

أتحقَّق من فهمي



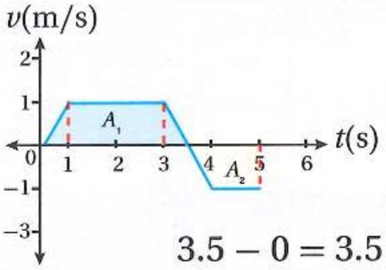
صفحة (81) : يبين الشكل المجاور منحنى السرعة – الزمن لجسيم يتحرك على المحور x في الفترة الزمنية $[0,5]$ إذا بدأ الجسيم الحركة من $x = 3$ عندما $t = 0$ فأجد كلاً مما يأتي:

a) إزاحة الجسيم في الفترة الزمنية المعطاة.

b) المسافة التي قطعها الجسيم في الفترة الزمنية المعطاة.

c) الموقع النهائي للجسيم

الحل:



لإيجاد A_1:

القاعدة السفلى $=$ $3.5 - 0 = 3.5$

القاعدة العليا $=$ $3 - 1 = 2$

الارتفاع $= 1$

$$A_1 = \frac{1}{2}(2 + 3.5)(1) = 2.75$$

لإيجاد A_2:

القاعدة السفلى $=$ $5 - 4 = 1$

القاعدة العليا $=$ $5 - 3.5 = 1.5$

الارتفاع $= 1$

$$A_2 = \frac{1}{2}(1 + 1.5)(1) = 1.25$$

a) الإزاحة $= 2.75 - 1.25 = 1.5$

b) المسافة $= 2.75 + 1.25 = 4$

c) الموقع النهائي للجسم

$$S(5) - S(0) = \int_0^5 v(t)\,dt$$

$$S(5) - 3 = 1.5 \rightarrow S(5) = 4.5$$

الحجوم الدورانية

حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين $y = f(x)$ والمحور x في الفترة $[a, b]$ حول محور x هو:

$$v = \int_a^b \pi\, y^2 dx \quad \text{or} \quad v = \int_a^b \pi\, (f((x)^2 dx$$

مثـــال

جد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين $f(x) = e^{2x+1}$ ومحور x والمستقيمين $x = 0, x = 2$ حول محور x

الحـــل

$$v = \int_0^2 \pi\, (f((x)^2 dx$$

$$= \int_0^2 \pi\, (e^{2x+1})^2 dx \;= \pi\int_0^2 e^{4x+2}\, dx$$

$$= \frac{\pi}{4}\, (e^{4x+2})\,\Big|_0^2 \;=\; \frac{\pi}{4}(e^{10} - e^2)$$

مثـــال

جد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين $f(x) = 2\sin x$ والمحـــور x والمستقيمين $x = 0, x = \pi$ حول محور x

الحـــل

$$v = \int_0^\pi \pi\, (2\sin x)^2 \;= \int_0^\pi 4\pi \sin^2 x\, dx$$

$$= \int_0^\pi 4\pi\, (\frac{1}{2}\, (1 - \cos 2x)dx$$

$$= 2\pi\, (x - \frac{1}{2}\sin 2x)\,\Big|_0^\pi\, dx$$

$$= 2\pi\, (\pi - 0) - (0) = 2\pi^2$$

أتحقَّق من فهمي

صفحة (82) : أجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = \frac{1}{x}$ والمحور x والمستقيمين $x = 4, x = 1$ حول المحور x

الحل:

$$v = \int_1^4 \pi \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \int_1^4 \pi \frac{1}{x^2}\, dx$$

$$= \pi \int_1^4 x^{-2}\, dx = \pi \frac{x^{-1}}{-1}\Big|_1^4$$

$$= \pi \left(\frac{-1}{x}\right)\Big|_1^4 = \pi \left(-\frac{1}{4} + 1\right) = 3\,\frac{\pi}{4}$$

مفهوم أساسي

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين متصلين على الفترة $[a, b]$ وكان منحنى $f(x)$ أبعد من منحنى $g(x)$ عن المحور x وكان كلا المنحنيين في الجهة نفسها من المحور x فإن حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة التي تنحصر بين منحنيي الاقترانين: $f(x)$ و $g(x)$، وتقع بين $x = a$ و $x = b$، حيث: $a < b$ حول المحور x هو:

$$V = \int_a^b \pi \left(f((x)^2 - (g(x))^2\right)\, dx$$

مثال

جد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = x$ حول محور x

الحل

$$f = g$$

$$\sqrt{x} = x \longrightarrow x = x^2$$

$$x - x^2 = 0$$

$$x(1 - x) = 0 \longrightarrow x = 0, 1$$

$$v = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 - (x)^2\, dx$$

$$= \pi \int_0^1 x - x^2\, dx = \pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1$$

$$= \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - (0) = \frac{\pi}{6}$$

مثال

جد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين $f(x) = x^2$ و $g(x) = x + 2$ حول محور x

الحل

$$x^2 = x + 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \longrightarrow (x - 2)(x + 1) = 0$$

$$x = 2\,,\ x = -1$$

$$v = \pi \int_{-1}^{2} (x + 2)^2 - (x^2)^2\, dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{2} (x + 2)^2 - x^4\, dx$$

$$= \pi\left(\frac{(x + 2)^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_{-1}^{2}$$

$$= \pi \left(\left(\frac{64}{3} - \frac{32}{5}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)\right)$$

$$= \pi \left(\frac{63}{3} - \frac{33}{5}\right) = \pi \left(21 - \frac{33}{5}\right)$$

$$= \pi \left(\frac{105 - 33}{5}\right) = \frac{72\,\pi}{5}$$

أتحقَّق من فهمي

صفحة (85) : أجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقتران $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = x^2$ حول محور x

الحل:

$$f(x) = g(x)$$

$$\sqrt{x} = x^2$$

$$\longrightarrow x = x^4 \longrightarrow x^4 - x = 0$$

$$x\,(x^3 - 1) = 0 \longrightarrow x = 0, 1$$

$$v = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 - (x^2)^2\, dx$$

$$= \pi \int_0^1 x - x^4\, dx = \pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1$$

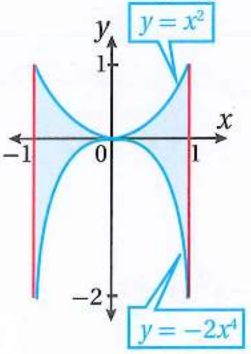
$$= \pi\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) - (0)\right)$$

$$= \pi\left(\frac{5-2}{10}\right) = \frac{3\pi}{10}$$

أتدرّب وأحلّ المسائل

أجد مساحة المنطقة المظللة في كل من التمثيلات البيانية الآتية:

1



الحل:

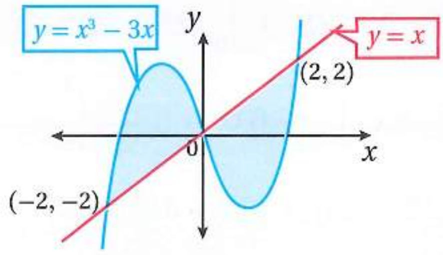
$$A = \int_{-1}^{0} x^2 - (-2x^4)dx + \int_{0}^{1} x^2 - (-2x^4)dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + 2\frac{x^5}{5}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^3}{3} + 2\frac{x^5}{5}\Big|_{0}^{1}$$

$$= (0) - (-\frac{1}{3} - \frac{2}{5}) + (\frac{1}{3} + \frac{2}{5})$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{10+12}{15} = \frac{22}{15}$$

2



الحل:

$$A = \int_{-2}^{0}(x^3 - 3x) - (x)dx + \int_{0}^{2} x - (x^3 - 3x)dx$$

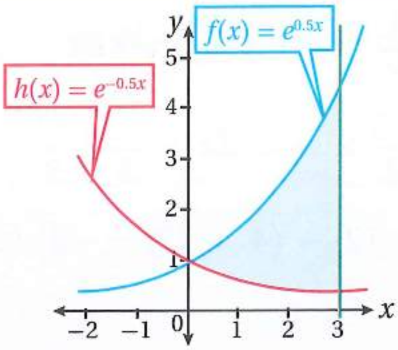
$$= \int_{-2}^{0} x^3 - 4x\,dx + \int_{0}^{2} 4x - x^3\,dx$$

$$= \frac{x^4}{4} - 2x^2\Big|_{-2}^{0} + 2x^2 - \frac{x^4}{4}\Big|_{0}^{2}$$

$$= (0) - (4 - 8) + (8 - 4) - (0)$$

$$= 4 + 4 = 8$$

3



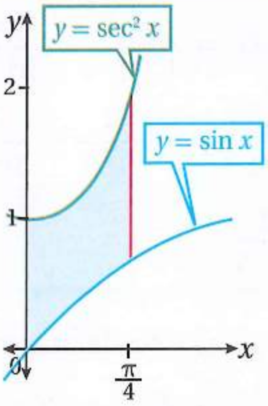
الحل:

$$A = \int_{0}^{3} e^{0.5x} - e^{-0.5x}\,dx$$

$$= \frac{1}{0.5}e^{0.5x} + \frac{1}{0.5}e^{-0.5x}\Big|_{0}^{3}$$

$$= (2e^{1.5} + 2e^{-1.5}) - (2 + 2)$$

4



الحل:

$$A = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x - \sin x\,dx$$

$$= \tan x + \cos x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= (1 + \frac{1}{\sqrt{2}}) - (0 + 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

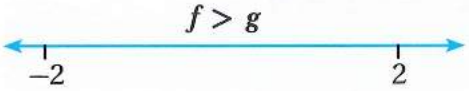
5 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 6$ ، $g(x) = 2x^2$

الحل:

$g(x) = f(x)$

$2x^2 = \frac{1}{2}x^2 + 6 \longrightarrow \frac{3}{2}x^2 = 6 \longrightarrow 3x^2 = 12$

$x^2 = 4 \longrightarrow x = \pm 2$



$$A = \int_{-2}^{2} (\frac{1}{2}x^2 + 6) - (2x^2)\ dx$$

$$A = \int_{-2}^{2} \frac{-3}{2}x^2 + 6\ \ dx = \frac{-3}{2}(\frac{x^3}{3}) + 6x \Big|_{-2}^{2}$$

$$= (-4 + 12) - (4 + 12) = -8 + 24$$

$$= 16$$

6 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = 4^x$ ، $g(x) = 3^x$ والمستقيم $x = 1$ في الربع الأول

الحل:

$$3^x = 4^x \longrightarrow x = 0$$

$$A = \int_{0}^{1} 4^x - 3^x\ dx = \frac{4^x}{\ln 4} - \frac{3^x}{\ln 3}\Big|_{0}^{1}$$

$$= (\frac{4}{\ln 4} - \frac{3}{\ln 3}) - (\frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 3})$$

$$= \frac{3}{\ln 4} - \frac{2}{\ln 3}$$

7 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = e^x$، $g(x) = \cos x$ والمستقيم $x = \frac{\pi}{2}$ في الربع الأول

الحل:

$$e^x = \cos x \longrightarrow x = 0$$

$$A = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^x - \cos x\ dx = e^x - \sin x \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= (e^{\frac{\pi}{2}} - 1) - (1 - 0) = e^{\frac{\pi}{2}} - 2$$

8 أجد المساحة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = |x|$ ، $g(x) = x^4$ والمستقيم

الحل:

$$x^4 = |x|$$

$$x^4 = x \longrightarrow x = 0, 1$$

$$x^4 = -x \longrightarrow x = 0, -1$$

$$A = \int_{-1}^{0} -x - x^4\ dx + \int_{0}^{1} x - x^4\ dx$$

$$= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\Big|_{0}^{1}$$

$$= (0) - (-\frac{1}{2} + \frac{1}{5}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{5})$$

$$= 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

9 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$، و $g(x) = -x^2 + 2x$

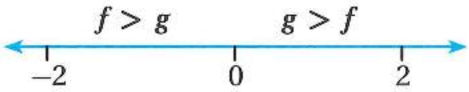
الحل:

$$f(x) = g(x)$$

$$3x^3 - x^2 - 10x = -x^2 + 2x$$

$$3x^3 - 12x = 0$$

$$3x(x^2 - 4) = 0 \longrightarrow x = 0, 2, -2$$



$$A = \int_{-2}^{0} (3x^3 - x^2 - 10x) - (-x^2 + 2x)\ dx$$

$$+ \int_{0}^{2} (-x^2 + 2x) - (3x^3 - x^2 - 10x)\ dx$$

$$= \int_{-2}^{0} 3x^3 - 12x\ dx + \int_{0}^{2} 12x - 3x^3\ dx$$

$$= 3\frac{x^4}{4} - 6x^2 \Big|_{-2}^{0} + 6x^2 - 3\frac{x^4}{4}\Big|_{0}^{2}$$

$$= (0) - (12 - 24) + (24 - 12) - (0)$$

$$= 12 + 12 = 24$$

10 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين $f(x) = e^x$، $g(x) = x^2$ والمستقيمين $x = 1, x = 0$

الحل:

$$A = \int_{0}^{1} e^x - x^2\ dx = e^x - \frac{x^3}{3}\Big|_{0}^{1}$$

$$= (e - \frac{1}{3}) - (1 - 0) = e - \frac{4}{3}$$

11 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين

$h(x) = 4\sqrt{x}$ ،$f(x)= \frac{1}{2}x^2$

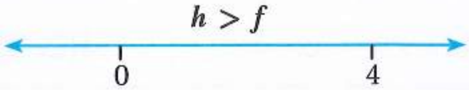
الحل:

$$\frac{1}{2}x^2 = 4\sqrt{x}$$

$$x^2 = 8\sqrt{x}$$

$$x^4 = 64x \longrightarrow x^4 - 64x = 0$$

$$x(x^3 - 64) = 0 \longrightarrow x = 0 , x = 4$$



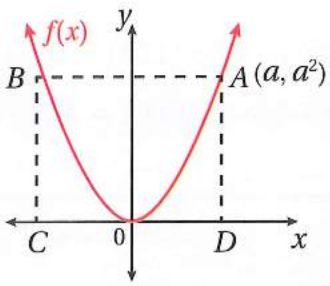
$$A = \int_0^4 4\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2 \ dx$$

$$= \frac{4(2)x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^4$$

$$= \frac{8}{3}(4)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}(\frac{64}{3}) - (0)$$

$$= \frac{8}{3}(2^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} \times \frac{64}{3} = \frac{64}{3} - \frac{32}{3} = \frac{32}{3}$$

12 يبين الشكل التالي منحنى الاقتران $f(x) = x^2$ إذا كان إحداثيا النقطة A هما $A(a, a^2)$ فأثبت أن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$ والمستقيم AB تساوي ثلثي مساحة المستطيل $ABCD$



الحل:

$$A = \int_{-a}^{a} a^2 - x^2\, dx = a^2 x - \frac{x^3}{3}\Big|_{-a}^{a}$$

$$= (a^3 - \frac{a^3}{3}) - (-a^3 - \frac{a^3}{3})$$

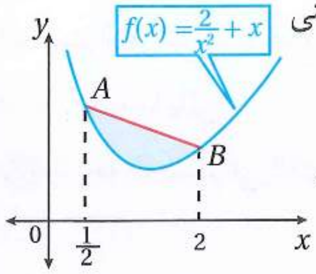
$$= \frac{2}{3}\ a^3 + \frac{2}{3}\ a^3 = \frac{4}{3}a^3$$

مساحة المستطيل = الطول × العرض

$$= 2a \times a^2 = 2a^3$$

$$\frac{4}{3}a^3 = \frac{2}{3}(2\,a^3)$$

13 يبين الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x)= \frac{2}{x^2} + x$ إذا كان الإحداثي x لكل من النقطة A والنقطة B هو $\frac{1}{2}$ و 2 على الترتيب، فأجد مساحة المنطقة المحصورة بين المستقيم AB ومنحنى الاقتران $f(x)$



الحل:

$$f(\frac{1}{2}) = \frac{2}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{2} = 8 + \frac{1}{2} = \frac{17}{2}$$

$$f(2) = \frac{2}{4} + 2 = \frac{5}{2}$$

$$A(\frac{1}{2}, \frac{17}{2}), B(2, \frac{5}{2})$$

الميل = $\dfrac{\frac{17}{2} - \frac{5}{2}}{\frac{1}{2} - 2} = \dfrac{\frac{12}{2}}{-\frac{3}{2}} = -4$

المعادلة = $y - \frac{17}{2} = -4(x - \frac{1}{2})$

$$y = -4x + \frac{21}{2}$$

$$A = \int_{\frac{1}{2}}^{2} (-4x + \frac{21}{2}) - (\frac{2}{x^2} + x)\ dx$$

$$A = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{21}{2} - 5x - \frac{2}{x^2}\, dx$$

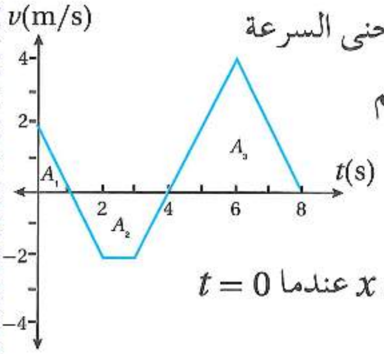
$$A = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{21}{2} - 5x - 2x^{-2}\, dx$$

$$= \frac{21}{2}x - \frac{5x^2}{2} + \frac{2}{x}\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}$$

$$= (21 - 10 + 1) - (\frac{21}{4} - \frac{5}{8} + 4)$$

$$= 8 - \frac{21}{4} + \frac{5}{8} = \frac{64 - 42 + 5}{8} = \frac{27}{8}$$

يبين الشكل المجاور منحنى السرعة المتجهة – الزمن لجسيم يتحرك على المحور x في الفترة $[0,8]$ إذا بدأ الجسيم الحركة من $x = 5$ عندما $t = 0$ فأجد كلاً مما يأتي:



14 إزاحة الجسيم في الفترة الزمنية المعطاة.

الحل:

$$A_1 = \frac{1}{2}(1)(2) = 1$$

$$A_2 = \frac{1}{2}(1+3)(2) = 4$$

$$A_3 = \frac{1}{2}(4)(4) = 8$$

$$= \int_0^6 v(t)\, dt = 1 + -4 + 8 = 5$$

الإزاحة $s(8) - s(0) = \int_0^8 v(t)\, dt = 5$

15 المسافة التي قطعها الجسيم في الفترة الزمنية المعطاة.

الحل:

المسافة $= \int_0^6 |v(t)|\, dt = 1 + 4 + 8 = 13$

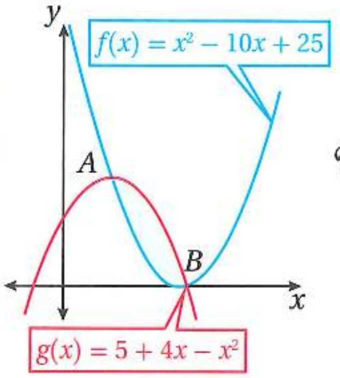
16 الموقع النهائي للجسيم

الحل:

$$s(8) - s(0) = \int_0^8 v(t)\, dt \qquad s(0) = 5$$

$$s(8) - s(0) = 5 \rightarrow \quad s(8) = 10$$

يبين الشكل المجاور منحنيي الاقترانين $f(x) = x^2 - 10x + 25$، $g(x) = 5 + 4x - x^2$ معتمداً هذا الشكل أجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:



17 أجد إحداثيي كل من النقطة A والنقطة B

الحل:

$$f(x) = g(x)$$

$$x^2 - 10x + 25 = 5 + 4x - x^2$$

$$2x^2 - 14x + 20 = 0 \qquad \div 2$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0 \longrightarrow (x-5)(x-2) = 0$$

$$x = 5, \quad x = 2$$

$$f(5) = 25 - 50 + 25 = 0 \qquad B(5, 0)$$

$$f(2) = 4 - 20 + 25 = 0 \qquad A(2, 9)$$

18 أجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المظللة حول المحور x

الحل:

$$f(x)^2 = (x^2 - 10x + 25)^2$$

$$= x^4 - 20x^3 + 150x^2 - 500x + 625$$

$$g(x)^2 = (5 + 4x - x^2)^2$$

$$= x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 40x + 25$$

$$f(x)^2 - g(x)^2$$

$$= -12x^3 + 144x^2 - 540x + 600$$

$$v = \int_2^5 \pi\left(g^2(x) - f^2(x)\right)$$

$$= \pi \int_2^5 (-12x^3 + 144x^2 - 540x + 600)dx$$

$$= \pi\,(-3x^4 + 48x^3 - 270x^2 + 600x \Big|_2^5$$

$$= \pi\,(-3(625) + 48(125) - 270(25) + 600(5))$$

$$- (-48 + 48(8) - 270(4) + 600(2))$$

$$= 81\,\pi$$

19 أجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = \sqrt{\sin x}$، في الفترة $[0, \pi]$ والمحور x حول المحور x

الحل:

$$v = \int_0^\pi \pi(\sqrt{\sin x})^2\, dx = \pi \int_0^\pi \sin x$$

$$= \pi\,(-\cos x)\Big|_0^\pi = -\pi(-1-1) = 2\pi$$

20 أجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x)=\sqrt{x}$، $g(x)=x^3$ حول المحور x

الحل:

$$f(x)=g(x)$$

$$\sqrt{x}=x^3 \longrightarrow x=0\,,1$$

$$v=\int_0^1 \pi\,((\sqrt{x})^2-(x^3)^2)\,dx$$

$$=\pi\int_0^1 x-x^6\,dx=\pi\,(\frac{x^2}{2}-\frac{x^7}{7})\Big|_0^1$$

$$=\pi\,((\frac{1}{2}-\frac{1}{7})-(0)=\pi\,\frac{7-2}{14}=\frac{5\pi}{14}$$

21 أجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x)=1+\sec x$، في الفترة $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ والمستقيم $y=3$ حول المحور x

الحل:

$$f(x)=y$$

$$1+\sec x=3$$

$$\sec x=2 \longrightarrow x=-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}$$

$$\int \sec x\,dx=\int \sec x\times\frac{\sec x+\tan x}{\sec x+\tan x}dx$$

$$=\ln|\sec x+\tan x|+C$$

$$V=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\pi\,(9-(1+\sec x)^2)dx$$

$$=\pi\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}(9-(1+2\sec x+\sec^2 x))\,dx$$

$$=\pi\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}(8-\ 2\sec x+\sec^2 x)\,dx$$

$$=\pi(8x-2\ln|\sec x+\tan x|-\tan x)\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\pi\Big((\frac{8\pi}{3}-2\ln(2+\sqrt{3})-\sqrt{3})$$

$$-(\frac{-8\pi}{3}-2\ln(2-\sqrt{3})+\sqrt{3})\Big)$$

$$=\pi\Big(\frac{16\pi}{3}+2\ln\big(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\big)-2\sqrt{3}\Big)$$

تبرير: أجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعاً:

22 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين $y=x^2$ و $y=x^{\frac{1}{2}}$

الحل:

$$x^{\frac{1}{2}}=x^2 \longrightarrow x=0\,,1$$

$$A=\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}-x^2\,dx=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{x^3}{3}\Big|_0^1$$

$$=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

23 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين $y=x^3$ و $y=x^{\frac{1}{3}}$

الحل:

$$x^{\frac{1}{3}}=x^3 \longrightarrow x=0\,,1\,,-1$$

$$A=\int_{-1}^0(x^3-x^{\frac{1}{3}})\,dx+\int_0^1(x^{\frac{1}{3}}-x^3)\,dx$$

$$=\Big(\frac{x^4}{4}-\frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4}\Big)\Big|_{-1}^0+\Big(\frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4}-\frac{x^4}{4}\Big)\Big|_0^1$$

$$=0-\Big(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\Big)+\frac{3}{4}-\frac{1}{4}-0=1$$

24 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين $y=x^n$ و $y=x^{\frac{1}{n}}$ حيث n عدد صحيح أكبر من أو يساوي 2 مبرراً إجابتي

الحل:

أولاً: إذا كان n زوجياً يتقاطع المنحنيان عند $x=0\,,x=1$ (كما في السؤال 22)

$$A=\int_0^1(x^{\frac{1}{n}}-x^n)dx=\left(\frac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\Bigg|_0^1$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{n}+1}-\frac{1}{n+1}-0=\frac{n}{1+n}-\frac{1}{n+1}$$

$$=\frac{n-1}{n+1}$$

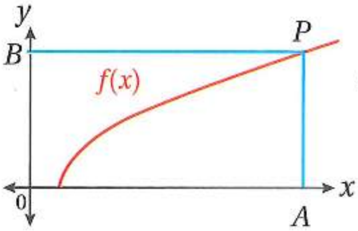
ثانياً: إذا كان n فردياً يتقاطع المنحنيان عند $x=0\,,x=1\,,x=-1$ (كما في السؤال 23)

$$A=\int_{-1}^{0}(x^n-x^{\frac{1}{n}})dx+\int_{0}^{1}(x^{\frac{1}{n}}-x^n)dx$$

$$=\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}-\frac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1}\right)\Bigg|_{-1}^{0}+\left(\frac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\Bigg|_{0}^{1}$$

$$=0-\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{\frac{1}{n}+1}\right)+\frac{1}{\frac{1}{n}+1}-\frac{1}{n+1}-0$$

$$=\frac{-1+n}{n+1}+\frac{n-1}{n+1}=\frac{2(n-1)}{n+1}$$



تبرير: يبين الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x)=\sqrt{2x-2}$ حيث $x\geq 1$ إذا كانت النقطة $P(9,4)$ تقع على منحنى الاقتران $f(x)$ حيث $\overline{PA}$, يوازي المحور y و$\overline{PB}$ يوازي المحور x فأجد كلاً مما يأتي:

㉕ مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$ والمستقيم $y=4$ والمحورين الإحداثيين.

الحل:

$$f(x)=\sqrt{2x-2}=0\longrightarrow x=1$$

$$A=\int_{0}^{9}4\,.\,dx-\int_{1}^{9}\sqrt{2x-2}\;dx$$

$$=4x\Big|_{0}^{9}-\frac{(2x-2)^{\frac{3}{2}}}{2(\frac{3}{2})}\Bigg|_{1}^{9}$$

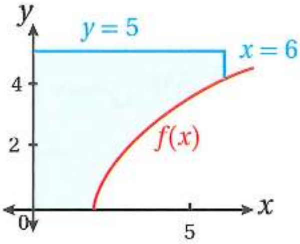
$$=(36-0)-(\frac{(16)^{\frac{3}{2}}}{3}-0)=36-\frac{64}{3}$$

$$=\frac{108-64}{3}=\frac{44}{3}$$

㉖ مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$ والمستقيم $x=9$ والمحور x

الحل:

$$A=\int_{1}^{9}\sqrt{2x-2}\;dx=\frac{64}{3}$$



㉗ **تبرير:** يبين الشكل المجاور المنطقة المحصورة بين المحورين الإحداثيين في الربع الأول، ومنحنى الاقتران $f(x)=2\sqrt{x-2}$ والمستقيمين $x=6$ و $y=5$ أجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة حور المحور x مبرراً إجابتي.

الحل:

$$f(x)=2\sqrt{x-2}=0\longrightarrow x=2$$

$$A=\int_{0}^{6}\pi(5)^2-\;dx-\int_{2}^{6}\pi(2\sqrt{x-2})^2\,dx$$

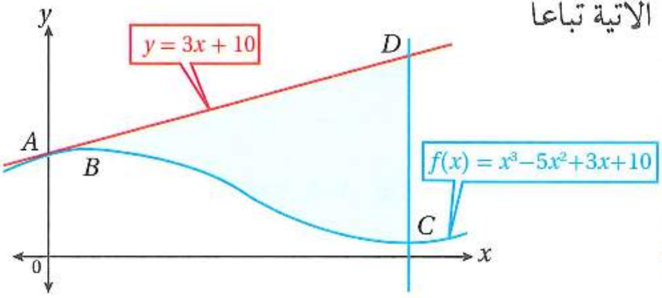
$$=\pi(25x)\Big|_{0}^{6}-\pi\,(4(x-2))\Big|_{2}^{6}$$

$$=\pi\,(150-0)-\;\pi(2x^2-8x)\Big|_{2}^{6}$$

$$=150\,\pi-\pi((72-48)-(8-16))$$

$$=150\,\pi-\pi(32)=118\,\pi$$

تبرير: يبين الشكل المجاور منحنى كل من الاقتران $f(x)=x^3-5x^2+3x+10$ والمستقيم $y=3x+10$ إذا مر المستقيم ومنحنى الاقتران بالنقطة A الواقعة على المحور y وكان للاقتران $f(x)$ قيمة عظمى محلية عند النقطة B وقيمة صغرى محلية عند النقطة C وقطع الخط الموازي للمحور y والمار بالنقطة C المستقيم $y=3x+10$ في النقطة D فأجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعاً



㉘ أجد إحداثيات كل من النقطة B والنقطة C

الحل:

نجد القيم القصوى لمنحنى $f(x)$

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 3 = 0$$

$$(3x-1)(x-3) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}, x = 3$$

$$B: (\frac{1}{3}, f(\frac{1}{3})), C(3, f(3))$$

㉙ أثبت أن $\overline{AD}$ مماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند النقطة A مبرراً إجابتي

الحل:

النقطة A هي $(0, 10)$ وتقع على كل من AD ، $f(x)$

$$\left.\begin{aligned} f'(0) &= 0 - 0 + 3 = 3 \\ y' = 3 &\Rightarrow y'(0) = 3 \end{aligned}\right] \text{لهما نفس الميل}$$

إذن AD مماس لمنحنى $f(x)$

㉚ أجد مساحة المنطقة المظللة، مبرراً إجابتي.

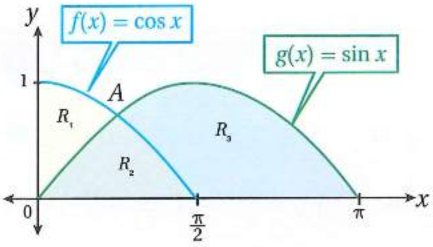
الحل:

$$A = \int_0^3 (3x+10) - (x^3 - 5x^2 + 3x + 10)dx$$

$$= \int_0^3 - x^3 + 5x^2\, dx = -\frac{x^4}{4} + \frac{5x^3}{3}\Big|_0^3$$

$$= -\frac{81}{4} + 45 - 0 = \frac{-81 + 180}{4} = \frac{99}{4}$$

تبرير: يبين الشكل المجاور منحنيي الاقترانين $f(x) = \cos x$ و $g(x) = \sin x$



معتمداً هذا الشكل أجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعاً:

㉛ أجد إحداثيي النقطة A

الحل:

$$\cos x = \sin x \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

$$A = \frac{\pi}{4} \Rightarrow A = (\frac{\pi}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

㉜ أجد مساحة كل من المناطق: R_1, R_2, R_3

الحل:

$$R_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x - \sin x\, dx = \sin x + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= (\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}) - (0 + 1) = \sqrt{2} - 1$$

$$R_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx$$

$$= -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \sin x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1) + (1 - \frac{1}{\sqrt{2}}) = 2 - \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$= 2 - \sqrt{2}$$

$$R_3 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin x\, dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx$$

$$= -\cos x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} - \sin x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -(-1 - \frac{1}{\sqrt{2}}) - (1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

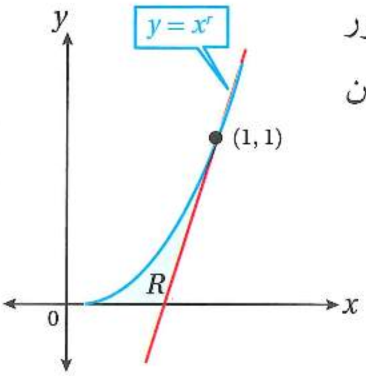
㉝ أثبت أن مساحة المنطقة R_1 إلى مساحة المنطقة R_2 تساوي $\sqrt{2} : 2$

الحل:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2 - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

تحدٍ: يبين الشكل المجاور المنطقة R المحصورة بين منحنى الاقتران $y = x^r$ حيث $r \geq 1$ والمحور x ومماس منحنى الاقتران عند النقطة $(1,1)$:



34 أثبت أن مماس منحنى الاقتران يقطع المحور x عند النقطة $(\frac{r-1}{r}, 0)$

الحل:

$y' = rx^{r-1}$

$y'(1) = r(1)^{r-1} = r$

$y - 1 = r(x - 1)$ المماس

$y = r(x-1) + 1$ يقطع محور x عندما $y = 0$

$0 - 1 = r(x - 1)$

$-1 = rx - r$

$r - 1 = rx \longrightarrow x = \frac{r-1}{r}$

$(\frac{r-1}{r}, 0)$ النقطة

---

35 أستعمل النتيجة من الفرع السابق لإثبات أن مساحة المنطقة R هي $\frac{r-1}{2r(r+1)}$ وحدة مربعة

الحل:

مساحة المنطقة R تساوي المساحة بين المنحنى والمحور x والمستقيمين $x = 0$, $x = 1$ مطروحاً منها مساحة المثلث الذي رؤوسه $(\frac{r-1}{r}, 0)$, $(1, 1)$, $(1, 0)$ أي أن $A(R)$ هي:

$$A(R) = \int_0^1 x^r \, dx - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{r-1}{r}\right)(1)$$

$$= \frac{x^r}{r+1}\Big|_0^1 - \frac{1}{2r} = \frac{1}{r+1} - \frac{1}{2r}$$

$$= \frac{2r - r - 1}{2r(r+1)} = \frac{r-1}{2r(r+1)}$$

36 أجد قيمة الثابت r التي تجعل مساحة المنطقة R أكبر ما يمكن

الحل:

$$A = \frac{r-1}{2r^2 + 2r}$$

$$A' = \frac{(2r^2 + 2r)(1) - (r - 1)(4r + 2)}{(2r^2 + 2r)^2}$$

$$= 2r^2 + 2r - (r-1)(4r+2) = 0$$

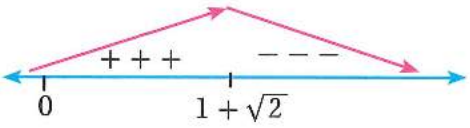
$$= 2r^2 + 2r - (4r^2 + 2r - 4r - 2) = 0$$

$$= -2r^2 + 4r + 2 \qquad \div\ 2$$

$$= -r^2 + 2r + 1 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4(1)(-1) = 8$$

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{-2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{-2} = -1 \pm \sqrt{2}$$



إذن قيمة R التي تجعل المساحة أكبر ما يمكن هي:

$$r = 1 + \sqrt{2}$$

تحدٍ: إذا كان العمودي على المماس لمنحنى الاقتران $f(x) = x^2 - 4x + 6$ عند النقطة $(1, 3)$ يقطع منحنى الاقتران مرة أخرى عند النقطة P فأجد كلاً مما يأتي:

37 إحداثيات النقطة P

الحل:

$f(x) = x^2 - 4x + 6$

$f'(x) = 2x - 4 \rightarrow f'(1) = 2 - 4 = -2$

ميل المماس = 2− فيكون ميل العمودي = $\frac{1}{2}$

نفرض النقطة الثانية (x, y)

$= \frac{y-3}{x-1}$ ميل العمودي

$$\frac{x^2 - 4x + 6 - 3}{x - 1} = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$$

$$= \frac{(x-1)(x-3)}{x-1} = x - 3$$

$$x-3=\frac{1}{2} \rightarrow x=3\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$$

$$f(\frac{7}{2})=\frac{49}{4}-14+6=\frac{49}{4}-8$$

$$=\frac{49-32}{4}=\frac{17}{4}$$

$$P:(\frac{7}{2},\frac{17}{4})$$

---

38 مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$ والعمودي على المماس، مقرباً إجابتي إلى أقرب 3 منازل عشرية

الحل:

نجد معادلة العمودي

$$y-3=\frac{1}{2}(x-1)$$

$$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+3 \Rightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$$

$$A=\int_{1}^{\frac{7}{2}}(\frac{1}{2}x+\frac{5}{2})-(x^2-4x+6)\ dx$$

$$A=\int_{1}^{\frac{7}{2}}(\frac{9}{2}x-x^2-\frac{7}{2})\ dx$$

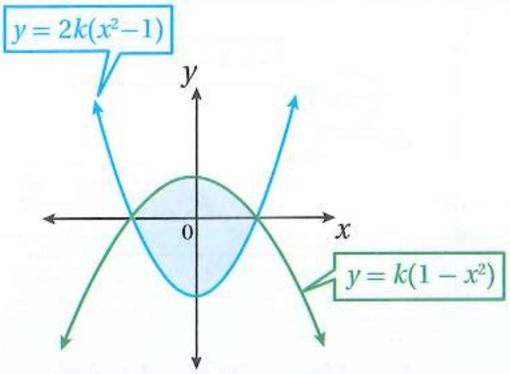
$$\frac{9}{2}\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{7}{2}x\ \Big|_1^{\frac{7}{2}}$$

$$=(\frac{9(49)}{4\times 4}-\frac{343}{3(8)}-(\frac{49}{4}))-(\frac{9}{4}-\frac{1}{3}-\frac{7}{2})$$

$$=\frac{125}{48}$$

---

39 تبرير: المنطقة المظللة في الشكل المجاور محصورة بين قطعين مكافئين، يقطع كل منهما المحور x عندما $x=-1$ و $x=1$ إذا كانت معادلتا القطعين هما: $y=2k(x^2-1)$ و $y=k(1-x^2)$ وكانت مساحة المنطقة المظللة هي 8 وحدات مربعة، فأجد قيمة الثابت k



الحل:

$$A=\int_{-1}^{1}k(1-x^2)-2k(x^2-1)\ dx$$

$$=k\int_{-1}^{1}1-x^2-2(x^2-1)\ dx$$

$$=k\int_{-1}^{1}3-3x^2\ dx=k(3x-x^3)\ \Big|_{-1}^{1}$$

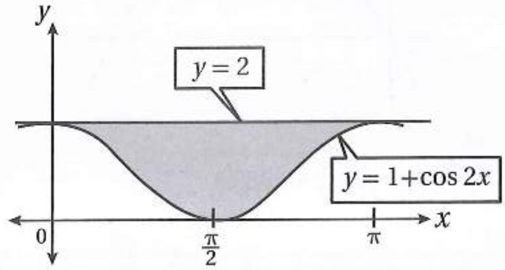
$$=k((3-1)-(-3+1)=4k=8$$

$$k=\frac{8}{4}=2$$

كتاب التمارين ص 16

أجد مساحة المنطقة المظللة في كل من التمثيلين البيانيين الآتيين:

1



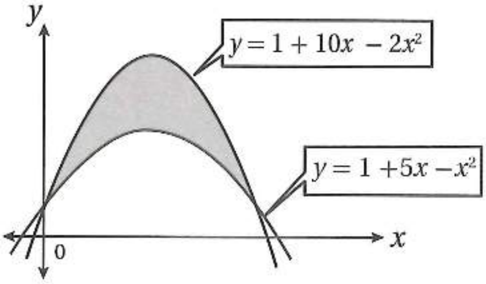
الحل:

$$A=\int_{0}^{\pi}(2-(1+\cos 2x)dx$$

$$=(x-\frac{1}{2}\sin 2x)\ \Big|_0^{\pi}$$

$$=(\pi-0)-(0-0)=\pi$$

②



الحل:

$y = y \longrightarrow 1 + 10x - 2x^2 = 1 + 5x - x^2$

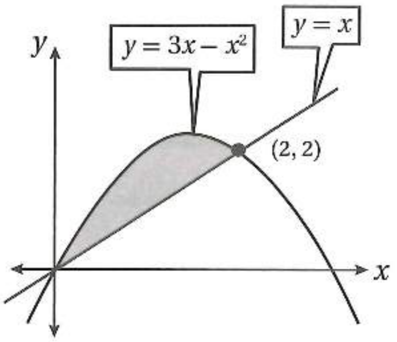
$x^2 - 5x = 0 \longrightarrow x(x - 5) = 0 \longrightarrow x = 0 , 5$

$A = \int_0^5 (1 + 10x - 2x^2) - (1 + 5x - x^2)\, dx$

$A = \int_0^5 5x - x^2\, dx = \frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big|_0^5$

$= \frac{125}{2} - \frac{125}{3} - 0 = \frac{375 - 250}{6} = \frac{125}{6}$

③



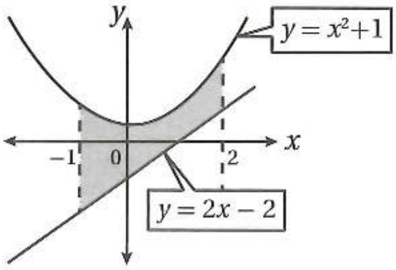
الحل:

$A = \int_0^2 (3x - x^2) - x dx$

$= \int_0^2 2x - x^2\, dx = x^2 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^2$

$= (4 - \frac{8}{3}) - (0) = \frac{12 - 8}{3} = \frac{4}{3}$

④



الحل:

$A = \int_{-1}^2 (x^2 + 1) - (2x - 2)\, dx$

$= \int_{-1}^2 x^2 - 2x + 3\, dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \Big|_{-1}^2$

$= \frac{8}{3} - 4 + 6 - (\frac{-1}{3} - 1 - 3) = 9$

⑤ أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين:

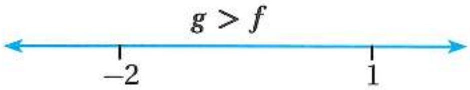
$f(x)= x^2$، و $g(x)= 2 - x$

الحل:

$x^2 = 2 - x$

$x^2 + x - 2 = 0$

$(x + 2)\,(x - 1) = 0 \longrightarrow x = -2, 1$



$A = \int_{-2}^1 (2 - x) - (x^2)\, dx$

$= 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^1$

$= (2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}) - (-4 - 2 + \frac{8}{3}) = \frac{9}{2}$

⑥ أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين:

$f(x) = \frac{1}{x}$، و $g(x) = \frac{1}{x^2}$ والمستقيم $x = 2$

الحل:

$\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} \longrightarrow x^2 = x$

$\longrightarrow x = 0$ مرفوض , $x = 1$

$A = \int_1^2 \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\, dx = \ln x - \frac{x^{-1}}{-1} \Big|_1^2$

$= \ln x + \frac{1}{x} \Big|_1^2$

$= (\ln 2 + \frac{1}{2}) - (\ln 1 + 1) = \ln 2 - \frac{1}{2}$

⑦ أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين:

$f(x) = \cos x$، و $g(x) = 1 - \cos x$ والمستقيمين

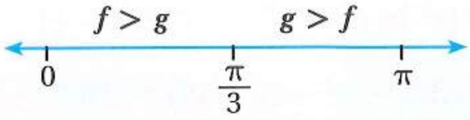
$x = \pi, x = 0$

الحل:

$$\cos x = 1 - \cos x$$

$$2\cos x = 1 \longrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{3}$$



$$A = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x - (1 - \cos x)\, dx$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (1 - \cos x) - \cos x\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\cos x - 1\, dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} 1 - 2\cos x\, dx$$

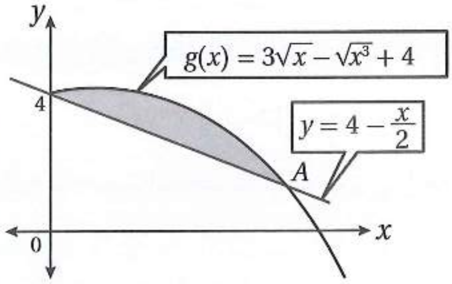
$$= 2\sin x - x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + x - 2\sin x \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$$

$$= (2\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}) - (0) + (\pi - 0) - (\frac{\pi}{3} - 2\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$= 2\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3} + \pi - \frac{\pi}{3} + 2\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 4\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}$$

يبين الشكل المجاور منحنى الاقتران $g(x) = 3\sqrt{x} - \sqrt{x^3} + 4$ والمستقيم $y = 4 - \frac{x}{2}$ معتمداً على هذا الشكل أجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:



⑧ أجد إحداثيي النقطة A

الحل:

$$3\sqrt{x} - \sqrt{x^3} + 4 = 4 - \frac{x}{2}$$

$$x = 0 , x = 4$$

$$y(4) = 4 - \frac{4}{2} = 2 \quad : A\ (4,\ 2)$$

⑨ أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $g(x)$ والمستقيم $y = 4 - \frac{x}{2}$

الحل:

$$A = \int_0^4 (3\sqrt{x} - \sqrt{x^3} + 4) - (4 - \frac{x}{2})\, dx$$

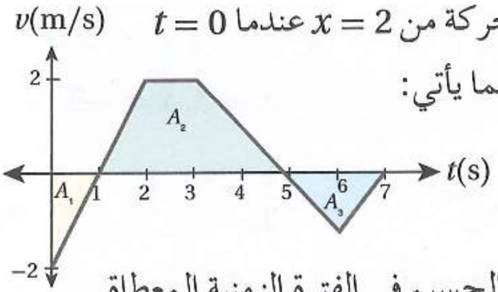
$$= \frac{(3)x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{x^2}{4} \Big|_0^4$$

$$= (2(4)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}(4)^{\frac{5}{2}} + \frac{16}{4}) - (0)$$

$$= 16 - \frac{64}{5} + 4 = 20 - \frac{64}{5}$$

$$= \frac{100 - 64}{5} = \frac{36}{5}$$

يبين الشكل المجاور منحنى السرعة المتجهة – الزمن لجسيم يتحرك على المحور x في الفترة $[0,7]$ إذا بدأ الجسيم الحركة من $x = 2$ عندما $t = 0$ فأجد كلاً مما يأتي:



⑩ إزاحة الجسيم في الفترة الزمنية المعطاة

الحل:

$$A_1 = \frac{1}{2}(1)(2) = 1$$

$$A_2 = \frac{1}{2}(4 + 1)(2) = 5$$

$$A_3 = \frac{1}{2}(2)(1) = 1$$

$$\int_0^7 v(t)\, dt = -1 + 5 - 1 = 3$$

---

⑪ المسافة التي قطعها الجسيم في الفترة الزمنية المعطاة

الحل:

$$\int_0^7 v(t)\, dt = 1 + 5 + 1 = 7$$

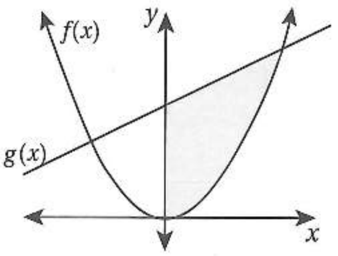
---

⑫ الموقع النهائي للجسيم

الحل:

$$s(7) - s(0) = \int_0^7 v(t)\, dt$$

$$s(7) - 2 = 3 \ \rightarrow \ s(7) = 5$$



13 يبين الشكل المجاور منحنيي الاقترانين: $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ ، و $g(x) = \frac{1}{2}x + 3$

أجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المظللة حول المحور x

الحل:

$$\frac{1}{2}x + 3 = \frac{1}{2}x^2$$

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0 \longrightarrow (x-3)\,(x+2) = 0$$

$$x = 3, x = -2$$

$$V = \pi \int_0^3 (\frac{1}{2}x + 3)^2 - (\frac{1}{2}\ x^2)^2\, dx$$

$$= \pi \int_0^3 (\frac{1}{2}x + 3)^2 - \frac{1}{4}x^4\, dx$$

$$= \pi \ \frac{(\frac{1}{2}x + 3)^3}{3(\frac{1}{2})} - \frac{1}{4}\ \frac{x^5}{5}\ \Big|_0^3$$

$$= \pi\,(\frac{2}{3} \times \frac{81}{4} - \frac{1}{20}(243)) - \frac{2}{3} \times 27$$

14 أجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = \sqrt{\ln x}$ والمحور x والمستقيمين $x = e$ و $y = e^3$ حول المحور x

الحل:

$$V = \pi \int_e^{e^3} (\sqrt{\ln x}\,)^2 = \pi \int_e^{e^3} \ln x\, dx$$

$$u = \ln x \qquad dv = \mathrm{dx}$$

$$du = \frac{1}{x}\ dx \qquad v = x$$

$$= \pi \int_e^{e^3} \ln x\, dx = \ln x - \int x \,.\, \frac{1}{x}\ dx\ \Big|_e^{e^3}$$

$$= \pi\, x \ln x - x\ \Big|_e^{e^3}$$

$$= \pi\,(e^3 \ln e^3 - e^3) - (e \ln e - e)$$

$$= \pi\,(3e^3 - e^3 - (e - e)) = 2\pi e^3$$

15 أجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = \sqrt{2\,x}$ و $g(x) = x^2$ حول المحور x

الحل:

$$\sqrt{2\,x} \ = \ x^2$$

$$2x = x^4 \ \longrightarrow \ x^4 - 2x = 0$$

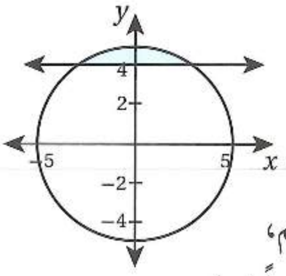
$$x(x^3 - 2) = 0 \ \longrightarrow \ x = 0\,,\, x = \sqrt[3]{2}$$

$$V = \pi \int_0^{\sqrt[3]{2}} (\sqrt{2x}\,)^2 - (x^2)^2$$

$$V = \pi \int_0^{\sqrt[3]{2}} 2x - x^4 .\, dx = x^2 - \frac{x^5}{5}\ \Big|_0^{\sqrt[3]{2}}$$

$$= \pi \left((\sqrt[3]{2}\,)^2 - \frac{(\sqrt[3]{2}\,)^5}{5} \right)$$

16 تبرير: يبين الشكل المجاور دائرة معادلتها $x^2 + y^2 = 25$ إذا دار الجزء المظلل المحصور بين الدائرة والمستقيم $y = 4$ حول المحور x لتشكيل مجسم، فأجد حجم المجسم الناتج مبرراً إجابتي.



الحل:

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$y^2 = 25 - x^2 \qquad y = 4$$

$$x^2 + 16 = 25 \ \longrightarrow \ x^2 = 9 \ \longrightarrow \ x = \pm\, 3$$

$$V = \pi \int_{-3}^{3} (25 - x^2) - (16)\, dx$$

$$= \pi \int_{-3}^{3} 9 - x^2\, dx \ = \pi\,(9x - \frac{x^3}{3})\ \Big|_{-3}^{3}$$

$$= \pi\,((27 - 9) - (-27 + 9))$$

$$= \pi(18 + 18) = 36\pi$$

الدرس السادس

المعادلات التفاضلية

المعادلة التفاضلية هي معادلة جبرية تحوي مشتقة أو أكثر لاقتران ما وقد تحوي الاقتران نفسه.

ويعد الاقتران $y = f(x)$ حلاً للمعادلة التفاضلية إذا تحققت المعادلة عند تعويض $f(x)$ ومشتقاته فيها.

مثال

هل $y = \cos x + \sin x$ حلاً للمعادلة $y'' + y = 0$

الحل

$y = \cos x + \sin x$

$y' = \sin x + \cos x$

$y'' = -\cos x - \sin x$

بالتعويض في $y'' + y$

$(-\cos x - \sin x) + \cos x + \sin x = 0$

إذن هي حل للمعادلة

مثال

هل $y = \dfrac{\sin x}{x}$ حلاً للمعادلة $xy'' + 2y' + xy = 0$

الحل

$y = \dfrac{\sin x}{x} \longrightarrow \sin x = xy$

نشتق $\cos x = xy' + y$

نشتق مرة ثانية $\longrightarrow -\sin x = xy'' + y' + y'$

$\longrightarrow xy'' + 2y' + \sin x = 0$

$xy'' + 2y' + xy = 0$

إذن هي حل للمعادلة

مثال

هل $y = e^x - e^{-x}$ حلاً للمعادلة $y + y' = e^x$

الحل

$y' = e^x + e^{-x}$

$y + y' = (e^x - e^{-x}) + (e^x + e^{-x}) = 2e^x \neq e^x$

إذن ليست حلاً للمعادلة

أتحقق من فهمي

صفحة (92) : أحدد إذا كان الاقتران المعطى حلاً للمعادلة التفاضلية: $y'' - 4y' + 3y = 0$ في كل مما يأتي:

a) $y = 4e^x + 5e^{3x}$

الحل:

$y' = 4e^x + 15e^{3x}$

$y'' = 4e^x + 45e^{3x}$

$$y'' - y' + 3y = (4e^x + 45e^{3x}) - 4(4e^x + 15e^x) + 3(4e^x + 5e^{3x})$$

$= 4e^x + 45e^{3x} - 16e^x - 60e^{3x} + 12e^x + 15e^{3x}$

$= 16e^x - 16e^x + 60e^{3x} - 60e^{3x}$

$= 0 - 0 = 0$ إذن تحقق

b) $y = \sin x$

الحل:

$y' = \cos x$

$y'' = \sin x$

$y'' + y' + 3y = -\sin x - 4\cos x + 3\sin x$

$= 2\sin x - 4\cos x \neq 0$ إذن لا تحقق

الحل العام والحل الخاص للمعادلة التفاضلية

إذا كان $\dfrac{dy}{dx} = 2x$ فإن $dy = 2x\,dx$ وعند إجراء التكامل $\int dy = \int 2x\,dx$

$y = x^2 + C$

ويسمى هذا بالحل العام للمعادلة التفاضلية وإذا أعطيت

معلومة لإيجاد C مثلاً المنحنى يمر بالنقطة $(2,1)$

نعوض $x = 2 , y = 1$

$$1 = 4 + C \longrightarrow C = -3$$

فتكون $y = x^2 - 3$ فيكون هذا هو الحل الخاص للمعادلة.

مثـــال

حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = 2\cos x + 3\sin x$

ثم جد الحل الخاص الذي يحقق النقطة $(\frac{\pi}{2}, 4)$

الحـــل

$$\frac{dy}{dx} = 2\cos x + 3\sin x$$

$$dy = (2\cos x + 3\sin x)\, dx$$

$$\int dy = \int (2\cos x + 3\sin x)\, dx$$

$$= 2\sin x - 3\cos x + C$$

بالتعويض $4 = 2(1) - 3(0) + C \longrightarrow C = 2$

$$y = 2\sin x - 3\cos x + 2$$

مثـــال

أجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = 2x\, e^x$

ثم جد الحل الخاص الذي يحقق النقطة $(0 ,2)$

الحـــل

$$\frac{dy}{dx} = 2x\, e^x$$

$$dy = 2x\, e^x\, dx$$

$$\int dy = \int 2x\, e^x\, dx$$

باستخدام التكامل في الأجزاء

$u = 2x \qquad dv = e^x\, dx$

$du = 2dx \qquad v = e^x$

$$\Rightarrow y = 2x\, e^x - \int e^x\, (2)\, dx$$

$$y = 2x\, e^x - 2e^x + C$$

بتعويض النقطة $(0 ,2)$

$$2 = 0 - 2 + C \longrightarrow C = 4$$

$$\Rightarrow y = 2xe^x - 2e^x + 4$$

أتحقّق من فهمي

صفحة **(94)** : أجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = 5\sec^2 x - \frac{3}{2}\sqrt{x}$ ثم أجد الحل الخاص لها الذي يحقق النقطة $(0 ,7)$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 5\sec^2 x - \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

$$dy = (5\sec^2 x - \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}})\, dx$$

$$\int dy = \int (5\sec^2 x - \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}})\, dx$$

$$y = 5\tan x - \frac{3}{2}\,\frac{(2)\, x^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

$$y = 5\tan x - x^{\frac{3}{2}} + C$$

$$(0, 7) \Rightarrow 7 = 0 - 0 + C \longrightarrow C = 7$$

$$y = 5\tan x - x^{\frac{3}{2}} + 7$$

حل المعادلة التفاضلية بفصل المتغيرات

إذا كانت المعادلة التفاضلية على الصورة $\frac{dy}{dx} = g(x)$ فتحل بحيث $dy = g(x)\, dx$ ثم إجراء التكامل وأما إذا كانت المعادلة التفاضلية على الصورة $\frac{dy}{dx} = f(x)\ g(y)$ فيجب فصل المتغيرات أولاً بحيث تكون المقادير التي تحوي y مع dy على طرف والمقادير التي تحوي x مع dx على الطرف الثاني ثم نقوم بعملية التكامل.

مثال

أجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2 2y\sqrt{3x+5}$$

الحل

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2 2y\sqrt{3x+5}\ dx$$

بالقسمة على $\sec^2 2y$

$$\frac{dy}{\sec^2 2y} = \sqrt{3x+5}\ dx$$

$$\cos^2 2y\, dy = \sqrt{(3x+5)}\ dx$$

$$\int \cos^2 2y\, dy = \int (3x+5)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$\int \frac{1}{2}(1+\cos 4y)\, dy = \int (3x+5)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$\frac{1}{2}(y+\frac{1}{4}\sin 4y) = \frac{(3x+5)^{\frac{3}{2}}}{3(\frac{3}{2})} + C$$

مثال

حل المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx} = 3e^{3x} + 2y\, e^{3x}$$

الحل

$$dy = (3e^{3x} + 2y\, e^{3x})\, dx$$

$$dy = e^{3x}(3+2y)\, dx$$

$$\frac{dy}{3+2y} = e^{3x}\, dx$$

$$\int \frac{1}{3+2y}\, dy = \int e^{3x}\, dx$$

$$\frac{1}{2}\ln|3+2y| = \frac{1}{3}e^{3x} + C$$

مثال

حل المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx} = \cos^2 3y \,.\, \sin^2 2x$$

الحل

$$\frac{dy}{\cos^2 3y} = \sin^2 2x\, dx$$

$$\sec^2 3y\, dy = \sin^2 2x\, dx$$

$$\int \sec^2 3y\, dy = \int \sin^2 2x\, dx$$

$$\frac{1}{3}\tan 3y = \int \frac{1}{2}(1-\cos 4x)\, dx$$

$$\frac{1}{3}\tan 3y = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{4}\sin 4x) + C$$

مثال

حل المعادلة التفاضلية

$$(x^3+5)\frac{dy}{dx} = y^2x^2 - 4x^2$$

الحل

$$(x^3+5)dy = (y^2x^2 - 4x^2)\, dx$$

$$(x^3+5)dy = x^2(y^2-4)\, dx$$

$$\frac{dy}{y^2-4} = \frac{x^2}{x^3+5}\, dx$$

$$\int \frac{1}{y^2-4}\, dy = \int \frac{x^2\, dx}{x^3+5}$$

الطرف الأيمن

$$\int \frac{x^2\, dx}{x^3+5} = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{x^3+5} = \frac{1}{3}\ln|x^3+5|$$

الطرف الأيسر

$$\int \frac{1}{y^2-4}$$

الكسور الجزئية

$$\frac{1}{y^2-4} = \frac{A}{(y-2)} + \frac{B}{(y+2)}$$

$$A(y+2) + B(y-2) = 1$$

$$y = -2: \quad -4B = 1 \longrightarrow B = -\frac{1}{4}$$

$$y = 2: \quad 4A = 1 \longrightarrow A = \frac{1}{4}$$

$$\int \frac{1}{y^2-4}\, dy = \int \frac{\frac{1}{4}}{y-2} + \frac{-\frac{1}{4}}{y+2}\, dy$$

المعادلة تصبح

$$\frac{1}{4}\ln|y-2| - \frac{1}{4}\ln|y+2| = \frac{1}{3}\ln|x^3+5| + C$$

أتحقّق من فهمي

صفحة (96) : أحل كل من المعادلات التفاضلية الآتية:

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y^4}$

الحل:

$y^4\,dy = 2x\,dx$

$\int y^4\,dy = \int 2x\,dx$

$\frac{y^5}{5} = x^2 + C$

b) $\frac{dy}{dx} = 2x - xe^y$

الحل:

$dy = (2x - xe^y)dx$

$dy = x(2 - e^y)dx$

$\frac{dy}{2 - e^y} = x\,dx$

$\int \frac{1}{2 - e^y}\,dx = \int x\,dx$

$\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$ الطرف الأيمن

$\int \frac{1}{2 - e^y}\,dy$ الطرف الأيسر

$u = e^y$ نفرض

$dy = \frac{du}{e^y} \Rightarrow \int \frac{1}{2 - e^y} \cdot \frac{du}{e^y}$

$\Rightarrow \int \frac{1}{(2 - u)\,u}\,du$ الكسور الجزئية

$\frac{1}{(2 - u)\,u} = \frac{A}{2 - u} + \frac{B}{u}$

$A(u) + B(2 - u) = 1$

$u = 0: \quad 2B = 1 \longrightarrow B = \frac{1}{2}$

$u = 2: \quad 2A = 1 \longrightarrow A = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \int \frac{\frac{1}{2}}{2 - u} + \frac{\frac{1}{2}}{u}\,dy$

$= -\frac{1}{2}\ln|\,2 - u\,| + \frac{1}{2}\ln|u|$

$= -\frac{1}{2}\ln|2 - e^x| + \frac{1}{2}\ln e^x$

المعادلة هي

$-\frac{1}{2}\ln|2 - e^x| + \frac{1}{2}\ln e^x = \frac{x^2}{2} + C$

c) $\frac{dy}{dx} = \frac{x \sin x}{y}$

الحل:

$y\,dy = (x \sin x)dx$

$\int y\,dy = \int x \sin x\,dx$

$\int y\,dy = \frac{y^2}{2}$ الطرف الأيسر

$\int x \sin x\,dx$ الطرف الأيمن

باستخدام التكامل في الأجزاء

$u = x \qquad dv = \sin x$

$du = dx \qquad v = -\cos x$

$= x(-\cos x) - \int -\cos x\,dx$

$= -x \cos x + \sin x$

$\frac{y^2}{2} = -x \cos x + \sin x + C$ المعادلة

d) $\sin^2 x \frac{dy}{dx} = y^2 \cos^2 x$

الحل:

$\frac{dy}{y^2} = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\,dx$

$\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\,dx$

$\int \frac{dy}{y^2} = \int y^{-2}\,dy$ الطرف الأيسر

$= \frac{y^{-1}}{-1} = \frac{-1}{y}$

$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\,dx = \int \cot^2 x\,dx$ الطرف الأيمن

$= \int (\csc^2 x - 1)\,dx = -\cot x - x$

$\frac{-1}{y} = -\cot x - x + C$ المعادلة

أتحقّق من فهمي

صفحة (98) : أجد الحل الخاص الذي يحقق الشرط الأولي المعطى لكل معادلة تفاضلية مما يأتي:

a) $\frac{dy}{dx} = xy^2 e^{2x} \quad , y(0) = 1$

الحل:

$$\frac{dy}{y^2} = x\, e^{2x}\, dx$$

الطرف الأيسر $\int \frac{dy}{y^2} = \int y^{-2}\, dy = \frac{-1}{y}$

الطرف الأيمن $\int x\, e^{2x}\, dx$

$u = x \qquad dv = e^{2x}$

$du = dx \qquad v = \frac{1}{2} e^{2x}$

$$= x(\frac{1}{2} e^{2x}) - \int \frac{1}{2} e^{2x}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} x\, e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x}$$

$$\frac{-1}{y} = \frac{1}{2} x\, e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C$$

$$y(0) = 1 \rightarrow \frac{-1}{1} = 0 - \frac{1}{4} + C$$

$$-1 + \frac{1}{4} = C \rightarrow C = -\frac{3}{4}$$

$$\frac{-1}{y} = \frac{1}{2} x\, e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + -\frac{3}{4}$$

b) $\frac{dy}{dx} = y \cos x \, , y(\frac{\pi}{2}) = 1$

الحل:

$$\frac{dy}{y} = \cos x\, dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \cos x\, dx$$

$$\ln |y| = \sin x + C$$

$$\ln 1 = \sin \frac{\pi}{2} + C$$

$$0 = 1 + C \rightarrow C = -1$$

$$\ln |y| = \sin x \ - 1$$

تطبيقات على حل المعادلة التفاضلية

مثـــال

يتحرك جسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالمعادلة التفاضلية: $\frac{ds}{dt} = -s^2 \ln (t + 1)$ حيث t الزمن بالثواني، و s موقع الجسيم بالأمتار. أجد موقع الجسيم بعد 3 ثوانٍ من بدء الحركة، علماً بأن $s(0) = 0.5$

الحـــل

الخطوة 1: أجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

المعادلة التفاضلية المعطاة $\frac{ds}{dt} = -s^2 \ln (t+1)$

بفصل المتغيرات $\frac{-1}{s^2} ds = \ln (t+1)\, dt$

بمكاملة طرفي المعادلة $\int \frac{-1}{s^2} ds = \int \ln (t+1)\, dt$

تعريف الأس السالب $\int -s^{-2}\, ds = \int \ln(t+1)\, dt$

بإيجاد التكامل $\frac{1}{s} = (t+1) \ln (t+1) - t + C$

إذن الحل العام للمعادلة التفاضلية هو:

$$\frac{1}{s} = (t+1) \ln (t+1) - t + C$$

الخطوة 2 : أجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الذي يحقق الشرط الأولي $s(0) = 0.5$

لإيجاد الحل الخاص لهذه المعادلة، أعوض $t = 0$ و $s = 0.5$ في الحل العام

$$\frac{1}{s} = (t+1) \ln (t+1) - t + C$$

$$\frac{1}{0.5} = (0 + 1) \ln (0 + 1) - 0 + C$$

بحل المعادلة لـ C $\quad C = 2$

إذن الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الذي يحقق الشرط الأولي $s(0) = 0.5$ هو $\frac{1}{s} = (t+1) \ln (t+1) - t + 2$

وهو يمثل اقتران الموقع للجسم المتحرك.

الخطوة 3 : أجد موقع الجسيم المطلوب.

بتعويض $t = 3$ في الحل الخاص للمعادلة

$$\frac{1}{s} = (3+1)\ln(3+1) - 3 + 2$$

$s \approx 0.22$ باستعمال الآلة الحاسبة

إذن موقع الجسيم بعد 3 ثوانٍ من بدء الحركة هو: 0.22m

أتحقق من فهمي

صفحة (100) : يتحرك جسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالمعادلة التفاضلية: $\frac{ds}{dt} = st\sqrt{t+1}$ حيث t الزمن بالثواني، و s موقع الجسيم بالأمتار. أجد موقع الجسيم بعد 3 ثوانٍ من بدء الحركة، علماً بأن $s(0) = 1$

الحل:

$$\frac{ds}{dt} = st\sqrt{t+1}$$

$$\frac{ds}{s} = t\sqrt{t+1}\ dt$$

$$\int \frac{ds}{s} = \int t\,(t+1)^{\frac{1}{2}}\ dt$$

$$\int \frac{ds}{s} = \ln|s|$$ الطرف الأيسر

$$\int t\,(t+1)^{\frac{1}{2}}\ dt$$ الطرف الأيمن

$$u = t+1 \longrightarrow du = dt \longrightarrow t = u-1$$

$$\int (u-1)\,(u^{\frac{1}{2}})\ du = \int u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}}\ \ du$$

$$= 2\,\frac{u^{\frac{5}{2}}}{5} - 2\,\frac{u^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{2}{5}(t+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(t+1)^{\frac{3}{2}}$$

$$\ln|s| = \frac{2}{5}(t+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(t+1)^{\frac{3}{2}} + C$$ المعادلة

$$s(0) = 1$$

$$\ln 1 = \frac{2}{5} - \frac{2}{3} + C$$

$$0 = \frac{6-10}{15} + C = 0 \quad \rightarrow C = \frac{4}{15}$$

$$\ln|s| = \frac{2}{5}(t+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(t+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}$$ المعادلة

عند $t = 3$

$$\ln|s| = \frac{2}{5}(4)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{15}$$

$$\ln|s| = \frac{2}{5}(32) - \frac{2}{3}(8) + \frac{4}{15}$$

$$= \frac{64}{5} - \frac{16}{3} + \frac{4}{15} = \frac{192-80+4}{15} = \frac{116}{15}$$

$$s = e^{\frac{116}{15}}$$

مثال

انتشر مرض الحصبة في إحدى المدارس بمعدل يمكن نمذجته بالمعادلة التفاضلية: $\frac{ds}{dt} = \frac{s(1050-s)}{5000}$ حيث s عدد الطلبة المصابين بعد t يوماً من اكتشاف المرض:

1) أحل المعادلة التفاضلية لإيجاد عدد الطلبة المصابين بعد t يوماً، علماً بأن عدد الطلبة المصابين عند اكتشاف المرض هو 50 طالباً

الحل

الخطوة 1 : أجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{s(1050-s)}{5000}$$ المعادلة التفاضلية المعطاة

$$\frac{1}{s(1050-s)}\,ds = \frac{1}{5000}\,dt$$ بفصل المتغيرات

$$\int \frac{1}{s(1050-s)}\,ds = \int \frac{1}{5000}\,dt$$ بمكاملة طرفي المعادلة

التكامل بالكسور الجزئية

$$\int \left(\frac{1}{1050\,s} + \frac{1}{1050(1050-s)}\right) ds = \int \frac{1}{5000}\,dt$$

بإخراج $\frac{1}{1050}$ عاملاً مشتركاً

$$\frac{1}{1050}\int\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{1050-s}\right)ds=\int\frac{1}{5000}\,dt$$

بضرب طرفي المعادلة في 1050

$$\int\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{1050-s}\right)ds=\int\frac{1050}{5000}\,dt$$

بإيجاد التكامل $\ln|s|-\ln|1050-s|=0.21t+C$

قانون القسمة في اللوغاريتمات

$$\ln\left|\frac{s}{1050-s}\right|=0.21t+C$$

إذن الحل العام للمعادلة التفاضلية هو:

$$\ln\left|\frac{s}{1050-s}\right|=0.21t+C$$

الخطوة 2 : أجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الذي يحقق الشرط الأولي

لإيجاد الحل الخاص لهذه المعادلة، أعوض $t=0$ و $s=50$ في الحل العام

$$\ln\left|\frac{s}{1050-s}\right|=0.21t+C$$

$$\ln\left|\frac{50}{1050-50}\right|=0.21(0)+C$$

$C\approx-3$ بحل المعادلة لـ C

إذن يمكن نمذجة عدد الطلبة المصابين بالمرض بعد t يوماً بالعلاقة الآتية:

$$\ln\left|\frac{s}{1050-s}\right|=0.21t-3$$

2) بعد كم يوماً يصبح عدد الطلبة المصابين 350 طالباً

الحـــل

$$\ln\left|\frac{s}{1050-s}\right|=0.21t-3$$

$$\ln\left|\frac{s}{1050-350}\right|=0.21t-3$$

$t\approx11$ بحل المعادلة لـ t

إذن يصبح عدد الطلبة المصابين 350 طالباً بعد 11 يوماً تقريباً من اكتشاف المرض

أتحقق من فهمي

صفحة (102) : يمكن نمذجة معدل تغير عدد الغزلان في إحدى الغابات بالمعادلة التفاضلية:

$\frac{dP}{dt}=\frac{1}{20000}P(1000-P)$ حيث P عدد الغزلان

في الغابة بعد t سنة من بدء دراسة عليها:

a) أحل المعادلة التفاضلية لإيجاد عدد الغزلان في الغابة بعد t سنة من بدء الدراسة، علماً بأن عددها عند بدء الدراسة هو 2500 غزال.

الحل:

$$\frac{dP}{dt}=\frac{1}{20000}P(1000-P)$$

$$\frac{dP}{P(1000-P)}=\frac{1}{20000}dt$$

$$\int\frac{1}{20000}dt=\frac{1}{20000}t$$ الطرف الأيمن

$$\int\frac{1}{P(1000-P)}dP$$ الطرف الأيسر

كسور جزئية

$$\int\frac{1}{P(1000-P)}dP=\frac{A}{P}+\frac{B}{1000-P}$$

$$A(1000-P)+B(P)=1$$

$$P=1000:\quad 1000B=1\longrightarrow B=\frac{1}{1000}$$

$$P=0:\quad A\,(1000)=1\longrightarrow A=\frac{1}{1000}$$

$$\Rightarrow\int\frac{\frac{1}{1000}}{P}+\frac{\frac{1}{1000}}{1000-P}dP$$

$$=\frac{1}{1000}\ln|P|-\frac{1}{1000}\ln|1000-P|$$

$$\frac{1}{20000}t=\frac{1}{1000}\ln|P|-\frac{1}{1000}\ln|1000-P|+C$$

$$t=0\,,\quad P=2500$$

$$0=\frac{1}{1000}\ln|2500|-\frac{1}{1000}\ln 1500+C$$

$$0=\frac{1}{1000}\ln\frac{2500}{1500}+C\longrightarrow\frac{1}{1000}\ln\frac{5}{3}+C=0$$

$$\longrightarrow C=\frac{1}{1000}\ln\frac{5}{3}$$

$$\frac{1}{20000}t=\frac{1}{1000}\ln|P|-\frac{1}{1000}\ln|1000-P|$$
$$+\frac{1}{1000}\ln\frac{5}{3}$$

b) بعد كم سنة يصبح عدد الغزلان في الغابة 1800 غزال.

الحل:

$P=1800$

$$\frac{1}{20000}t=\frac{1}{1000}\ln|1800|-\frac{1}{1000}\ln 800$$
$$-\frac{1}{1000}\ln\frac{5}{3}$$

$$\frac{1}{20000}t=\frac{1}{1000}\ln\frac{1800}{800\times\frac{5}{3}}=$$

$$\frac{1}{20000}t=\frac{1}{1000}\ln\frac{54}{40}\rightarrow\frac{1}{20}t=\ln\frac{54}{40}$$

$$t=20\ln\frac{54}{40}$$

مثال

إذا كان ميل المماس لمنحنى هو $\dfrac{e^{-y}(x^2+3x-4)}{x^2-x}$ فجد قاعدة هذه المعادلة إذا كان المنحنى يمر بالنقطة (1 ,0)

الحل

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^{-y}(x^2+3x-4)}{x^2-x}$$

$$\frac{dy}{e^{-y}}=\frac{(x+4)(x-1)}{x(x-1)}dx$$

$$e^y\,dy=\frac{x+4}{x}dx$$

$$\int e^y\,dy=\int\frac{x}{x}+\frac{4}{x}\,dx$$

$$e^y=\int 1+\frac{4}{x}\,dx$$

$$e^y=x+4\ln x+C$$

$$(1,0)\longrightarrow e^0=1+4\ln 1+C$$

$$1=1+0+C\longrightarrow C=0$$

$$e^y=x+4\ln x$$

$$y=\ln(x+4\ln x)$$

مثال

إذا كان ميل المماس لمنحنى هو $\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$ جد قاعدة هذه العلاقة

الحل

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2-2x-3}{x^2-9}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cancel{(x-3)}(x+1)}{\cancel{(x-3)}(x+3)}=\frac{x+1}{x+3}$$

$$dy=\frac{x+1}{x+3}dx$$

$$\int dy=\int\frac{x+1}{x+3}dx\qquad\begin{array}{r|l} & 1\\ \hline x+3 & \cancel{x}+1\\ & \ominus\\ & -\cancel{x}+3\\ \hline & -2\end{array}$$

$$y=\int 1-\frac{2}{x+3}\,dx$$

$$y=x-2\ln|x+3|+C$$

مثال

يتحرك جسم بحيث أن $a=2v$ حيث التسارع a ، السرعة المتجهة v وكان $s(0)=5$ ، $v(0)=4$ جد $s(3)$

الحل

$$a=\frac{dv}{dt}=2v$$

$$\frac{dv}{v}=2dt\longrightarrow\int\frac{dv}{v}=\int 2dt$$

$$\ln v=2t+C$$

$$v=4,\ t=0\longrightarrow\ln 4=0+C$$

$$\ln v=2t+\ln 4$$

$v = e^{2t + \ln 4} = e^{2t} . e^{\ln 4} = 4e^{2t}$

$\frac{ds}{dt} = 4e^{2t} \longrightarrow ds = 4e^{2t}\, dt$

$s = 2e^{2t} + C \longrightarrow s = 5 , t = 0$

$5 = 2 + C \longrightarrow C = 3$

$s = 2e^{2t} + 3 \longrightarrow s(3) = 2e^{6} + 3$

أتدرّب وأحلّ المسائل

أحدد إذا كان الاقتران المعطى حلاً للمعادلة التفاضلية في كل مما يأتي:

① $y = \sqrt{x} \; ; xy' - y = 0$

الحل:

$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$xy' - y = x\,(\frac{1}{2\sqrt{x}}) - \sqrt{x} = \frac{\sqrt{x}}{2} - \sqrt{x}$

$-\frac{\sqrt{x}}{2} \neq 0$ ليست حلاً للمعادلة

② $y = x\ln x - 5x + 7 \; ; y'' - \frac{1}{x} = 0$

الحل:

$y' = x\,(\frac{1}{x}) + \ln x\,(1) - 5$

$= 1 + \ln x - 5 = \ln x - 4$

$y'' = \frac{1}{x}$

$y'' - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0$ إذن حلاً للمعادلة

③ $y = \tan x \; ; y' + y^{2} = 1$

الحل:

$y' = \sec^2 x$

$y' + y^{2} = \sec^2 + \tan^2 x \neq 1$ ليست حلاً للمعادلة

④ $y = e^{x} + 3xe^{x} \; ; y'' - 2y' + y = 0$

الحل:

$y' = e^{x} + 3xe^{x} + e^{x}(3) = 4e^{x} + 3xe^{x}$

$y'' = 4e^{x} + 3xe^{x} + e^{x}(3) = 7e^{x} + 3xe^{x}$

$y'' - 2y' + y = 7e^{x} + 3xe^{x}$

$-2(4e^{x} + 3xe^{x}) + e^{x} + 3xe^{x}$

$= 8e^{x} - 8e^{x} + 6xe^{x} - 6xe^{x} = 0$

إذن حلاً للمعادلة

أحل كلاً من المعادلات التفاضلية الآتية:

⑤ $\frac{dy}{dx} = 3x\sqrt{y}$

الحل:

$\frac{dy}{\sqrt{y}} = 3x\,dx \longrightarrow y^{\frac{-1}{2}}\,dy = 3x\,dx$

$\int y^{\frac{-1}{2}}\,dy = \int 3x\,dx$

$2y^{\frac{1}{2}} = \frac{3x^2}{2} + C$

⑥ $\frac{dy}{dx} + \frac{3x}{y^2} = 0$

الحل:

$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x}{y^2} \longrightarrow y^2\,dy = -3x\,dx$

$\int y^2\,dy = \int -3x\,dx \longrightarrow \frac{y^3}{3} = \frac{-3x^2}{2} + C$

⑦ $\frac{dy}{dx} = \cos x \sin y$

الحل:

$\frac{dy}{\sin y} = \cos x\,dx \longrightarrow \int \frac{dy}{\sin y} = \int \cos x\,dx$

$\int \csc y\,dy = \int \cos x\,dx$

$\int \frac{\csc y\,(\csc y + \cot y)}{\csc y + \cot y}\,dy = \sin x$

$-\ln|\csc y + \cot y| = \sin x + C$

⑧ $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{(x^2+1)^2}$

الحل:

$dy = \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx \longrightarrow \int dy = \int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$

$u = x^2 + 1 \longrightarrow dx = \frac{du}{2x}$

$$y=\int\frac{x}{u^2}\cdot\frac{du}{2x}=\frac{1}{2}\int u^{-2}\,du$$

$$y=\frac{1}{2}\cdot\frac{u^{-1}}{-1}+C\longrightarrow y=-\frac{1}{2u}+C$$

$$y=-\frac{1}{2(x^2+1)}+C$$

⑨ $\dfrac{dy}{dx}=xe^{x+y}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx}=xe^{x+y}=x(e^x\,.\,e^y)$$

$$\frac{dy}{e^y}=xe^x\,dx$$

$$\int e^{-y}\,dy=\int xe^x\,dx$$

$\int e^{-y}\,dy=-e^{-y}$ الطرف الأيسر

$\int xe^x\,dx$ الطرف الأيمن

$u=x$ $dv=e^x$

$du=dx$ $v=e^x$

$$=xe^x-\int e^x\,dx=xe^x-e^x$$

$-e^{-y}=xe^x-e^x+C$ المعادلة

⑩ $e^{\frac{-1}{x}}\dfrac{dy}{dx}=x^{-2}y^2$

الحل:

$$e^{\frac{-1}{x}}\,dy=x^{-2}y^2\,dx$$

$$\frac{dy}{y^2}=\frac{x^{-2}\,dx}{e^{\frac{-1}{x}}}$$

$$\int\frac{dy}{y^2}=\int e^{\frac{1}{x}}\,.\,x^{-2}.\,dx$$

$\int\dfrac{dy}{y^2}=\int y^{-2}\,dy=\dfrac{y^{-1}}{-1}=\dfrac{-1}{y}$ الطرف الأيسر

$\int e^{\frac{1}{x}}\,.\,x^{-2}.\,dx$ الطرف الأيمن

$$u=\frac{1}{x}\longrightarrow\frac{du}{dx}=-\frac{1}{x^2}=-x^{-2}$$

$$dx=\frac{du}{-x^{-2}}$$

$$\int e^{\frac{1}{x}}.\,x^{-2}.\,dx=\int e^u\,.\,x^{-2}.\,\frac{du}{-x^{-2}}=-e^u$$

$$=-e^{\frac{-1}{x}}$$

$\dfrac{-1}{y}=-e^{\frac{-1}{x}}+C$ المعادلة

⑪ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{xy}{x-3}$

الحل:

$$\frac{dy}{y}=\frac{x\,dx}{x-3}$$

$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{x\,dx}{x-3}$$

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline x-3 & \cancel{x} \\ & -\cancel{x}\oplus 3 \\ \hline & 3 \end{array}$$

$$\ln|y|=\int 1+\frac{3}{x-3}\,dx$$

$$\ln|y|=x+3\ln|x-3|+C$$

⑫ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3x^2\sin^2 y}{x^3+2}$

الحل:

$$\frac{dy}{\sin^2 y}=\frac{3x^2}{x^3+2}\,dx$$

$$\int\csc^2 y=\int\frac{3x^2}{x^3+2}\,dx$$

$$-\cot y=\ln|x^3+2|+C$$

⑬ $\dfrac{dy}{dx}=y^3\ln x$

الحل:

$$\frac{dy}{y^3}=\ln x\,dx\longrightarrow\int\frac{dy}{y^3}=\int\ln x\,dx$$

$\int\dfrac{dy}{y^3}=\int y^{-3}\,dy=\dfrac{y^{-2}}{-2}$ الطرف الأيسر

$\int\ln x\,dx$ الطرف الأيمن

$u=\ln x$ $dv=dx$

$du=\dfrac{1}{x}\,dx$ $v=x$

$$\Rightarrow x\ln x - \int x\,.\,\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - x$$

$$\frac{y^{-2}}{-2} = x\ln x - x + C$$ المعادلة

---

⑭ $\dfrac{dy}{dx} = 2x^3\,(y^2 - 1)$

الحل:

$$\frac{dy}{y^2-1} = 2x^3\,dx$$

$$\int \frac{1}{y^2-1}\,dy = \int 2x^3\,dx$$

$$\int 2x^3\,dx = \frac{2x^4}{4} = \frac{x^4}{2}$$ الطرف الأيمن

$$\int \frac{1}{y^2-1}\,dy$$ الطرف الأيسر

$$\frac{1}{y^2-1} = \frac{A}{(y-1)} + \frac{B}{(y+1)}$$

$$A(y+1) + B(y-1) = 1$$

$$y = -1: \quad -2B = 1 \longrightarrow B = -\frac{1}{2}$$

$$y = 1: \quad 2A = 1 \longrightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{\frac{1}{2}}{y-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{y+1}\,dy$$

$$\frac{1}{2}\ln|y-1| - \frac{1}{2}\ln|y+1|$$

$$\frac{1}{2}\ln|y-1| - \frac{1}{2}\ln|y+1| = \frac{x^4}{2} + C$$

---

⑮ $y\dfrac{dy}{dx} = \sin^3 x\cos^2 x$

الحل:

$$y\,dy = \sin^3 x\cos^2 x$$

$$\int y\,dy = \int \sin^3 x\cos^2 x\,dx$$

$$u = \cos x \qquad dx = \frac{du}{-\sin x}$$

$$\frac{y^2}{2} = \int \sin^3 x\,.\,u^2\,.\,\frac{du}{-\sin x}$$

$$\frac{y^2}{2} = \int -\sin^2 x \;\; u^2\,du$$

$$= \int -(1-\cos^2 x)u^2\,du = \int -(1-u^2)u^2\,du$$

$$\frac{y^2}{2} = \int -u^2 + u^4\,du = -\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5}$$

$$= -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C$$

---

⑯ $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{xy}$

الحل:

$$dy = x^{\frac{1}{2}}\,y^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$\frac{dy}{y^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{1}{2}}\,dx \longrightarrow \int y^{\frac{-1}{2}}\,dy = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$2\,y^{\frac{1}{2}} = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

---

⑰ $\dfrac{dy}{dx} = y\ln\sqrt{x}$

الحل:

$$\frac{dy}{y} = \ln x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{2}\ln x\,dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{1}{2}\ln x\,dx$$

$$u = \ln x \qquad dv = dx$$

$$du = \frac{1}{x}\,dx \qquad v = x$$

$$\ln|y| = \frac{1}{2}\left(x\ln x - \int x\,.\,\frac{1}{x}\,dx\right)$$

$$\ln|y| = \frac{1}{2}(x\ln x - x) + C$$

---

⑱ $(2x+1)(x+2)\,\dfrac{dy}{dx} = -3(y-2)$

الحل:

$$\frac{dy}{y-2} = \frac{-3\,dx}{(2x+1)(x+2)}$$

$$\int \frac{dy}{y-2} = \int \frac{-3\,dx}{(2x+1)(x+2)}$$

$$\int \frac{dy}{y-2} = \ln|y-2|$$ الطرف الأيسر

الطرف الأيمن $\int \frac{-3\,dx}{(2x+1)(x+2)}$

$$\frac{-3}{(2x+1)(x+2)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x+2}$$

$$A(x+2) + B(2x+1) = -3$$

$$x = -2: \qquad B(-3) = -3 \longrightarrow B = 1$$

$$x = -\frac{1}{2}: \qquad A(-\frac{1}{2} + 2) = -3$$

$$A\,\frac{3}{2} = -3 \longrightarrow A = -2$$

$$\Rightarrow \int \frac{-2}{2x+1} + \frac{1}{x+2}\,dx$$

$$= \frac{-2}{2}\ln|2x+1| + \ln|x+2|$$

$$\ln|y-2| = -\ln|2x+1| + \ln|x+2| + C$$

أجد الحل الخاص الذي يحقق الشرط الأولي المعطى لكل من المعادلات التفاضلية الآتية:

⑲ $\frac{dy}{dx} = y^2\sqrt{4-x} \quad ; y(1) = 2$

الحل:

$$\frac{dy}{y^2} = \sqrt{4-x}\;dx$$

$$\int y^{-2}\,dy = \int (4-x)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$\frac{y^{-1}}{-1} = \frac{2(4-x)^{\frac{3}{2}}}{-3} + C$$

$$\frac{-1}{y} = \frac{-2(4-x)^{\frac{3}{2}}}{3} + C \qquad y(1) = 2$$

$$\frac{-1}{2} = \frac{-2}{3}(3)^{\frac{3}{2}} + C \longrightarrow C = \frac{-1}{2} + \frac{2}{3}(3)^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{-1}{y} = \frac{-2(4-x)^{\frac{3}{2}}}{3} + (\frac{-1}{2} + \frac{2}{3}(3)^{\frac{3}{2}})$$

⑳ $\frac{dy}{dx} = \frac{2\sin^2 x}{y} \quad ; y(0) = 1$

الحل:

$$y\,dy = 2\sin^2 x\,dx$$

$$\int y\,dy = \int 2(\frac{1}{2})(1 - \cos 2x)\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = x - \frac{1}{2}\sin 2x + C \qquad y(0) = 1$$

$$\frac{1}{2} = 0 - 0 + C \longrightarrow C = \frac{1}{2}$$

$$\longrightarrow \frac{y^2}{2} = x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}$$

㉑ $\frac{dy}{dx} = 2\cos^2 x\cos^2 y \quad ; y(0) = \frac{\pi}{4}$

الحل:

$$\frac{dy}{\cos^2 y} = 2\cos^2 x\,dx$$

$$\int \sec^2 y\,dy = \int 2\,(\frac{1}{2}\,(1 + \cos 2x)\,dx$$

$$\tan y = x + \frac{1}{2}\sin 2x + C$$

$$\tan\frac{\pi}{4} = 0 + 0 + C \longrightarrow 1 = C$$

$$\tan y = x + \frac{1}{2}\sin 2x + 1$$

㉒ $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x\, e^{\sin x}}{e^y} \quad ; y(\pi) = 0$

الحل:

$$e^y\,dy = \cos x\, e^{\sin x}\,dx$$

$$\int e^y\,dy = \int \cos x\, e^{\sin x}\,dx$$

$$u = \sin x \longrightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$e^y = \int \cos x\, e^u\,\frac{du}{\cos x} = \int e^u\,dy$$

$$e^y = e^u + C \longrightarrow e^y = e^{\sin x} + C$$

$$y(\pi) = 0 \longrightarrow 0 = e^{\sin\pi} + C$$

$$e^0 = e^0 + C \longrightarrow 1 = 1 + C \longrightarrow C = 0$$

$$e^y = e^{\sin x}$$

23 $$\frac{dy}{dx}=\frac{8x-18}{(3x-8)(x-2)} \quad ; y(3)=8$$

الحل:

$$\int dy=\int\frac{8x-18}{(3x-8)(x-2)}\,dx$$

$$\frac{8x-18}{(3x-8)(x-2)}=\frac{A}{3x-8}+\frac{B}{x-2}$$

$$A(x-2)+B(3x-8)=8x-18$$

$$x=2:\ -2B=-2\longrightarrow B=1$$

$$x=\frac{8}{3}:\ A(\frac{8}{3}-2)=8\,(\frac{8}{3})-18=\frac{64}{3}-18$$

$$A(\frac{2}{3})=\frac{64-54}{3}=\frac{10}{3}$$

$$\longrightarrow A=\frac{10}{3}\times\frac{3}{2}=5$$

$$y=\int\frac{5}{3x-8}+\frac{1}{x-2}\,dx$$

$$y=\frac{5}{3}\ln|3x-8|+\ln|x-2|+C$$

$$y(3)=8$$

$$8=\frac{5}{3}\ln 1+\ln 1+C\longrightarrow 8=0+0+C$$

$$\longrightarrow C=8$$

$$y=\frac{5}{3}\ln|3x-8|+\ln|x-2|+8$$

---

24 $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{xy} \quad ; y(e)=1$$

الحل:

$$ydy=\frac{1}{x}\,dx\longrightarrow \int ydy=\frac{1}{x}\,dx$$

$$\frac{y^2}{2}=\ln|x|+C \qquad y(e)=1$$

$$\frac{1}{2}=\ln e+C\longrightarrow\frac{1}{2}=1+C\longrightarrow C=-\frac{1}{2}$$

$$\frac{y^2}{2}=\ln|x|-\frac{1}{2}$$

---

25 تتحرك سيارة في مسار مستقيم ويعطى تسارعها بالمعادلة التفاضلية $\frac{dv}{dt}=10-0.5v$ حيث t الزمن بالثواني و v سرعتها المتجهة بالمتر لكل ثانية. أجد السرعة المتجهة للسيارة بعد t ثانية من بدء حركتها، علماً بأن السيارة تحركت من وضع السكون.

الحل:

$$\frac{dv}{10-0.5v}=dt\longrightarrow\int\frac{dv}{10-0.5v}=\int dt$$

$$\frac{1}{-0.5}\ln|10-0.5v|=t+C$$

$v=0\,,\,t=0$ تحركت من وضع السكون

$$-2\ln|10|=0+C\longrightarrow C=-2\ln|10|$$

$$-2\ln|10-0.5v|=t-2\ln|10|$$

---

26 **ذئاب**: يمكن نمذجة معدل تغير عدد الذئاب في إحدى الغابات بالمعادلة التفاضلية $\frac{dN}{dt}=260-0.4N$ حيث N عدد الذئاب في الغابة بعد t سنة من بدء دراسة عليها. أجد عدد الذئاب في الغابة بعد 3 سنوات من بدء الدراسة علماً بأن عددها عن بدء الدراسة هو 300 ذئب.

$$\frac{dN}{260-0.4N}=dt\longrightarrow\int\frac{dN}{260-0.4N}=\int dt$$

$$\frac{1}{-0.4}\ln|260-0.4N|=t+C$$

$$N=300\,,\,t=0$$

$$\frac{-10}{4}\ln|260-0.4\,(300)|=0+C$$

$$\frac{-5}{2}\ln|140|=C$$

$$\frac{-5}{2}\ln|260-0.4N|=t-\frac{5}{2}\ln|140|$$

وعند $t=3$

$$\frac{-5}{2}\ln|260-0.4N|=3-\frac{5}{2}\ln|140|$$

كرة: تنكمش كرة، ويتغير نصف قطرها بمعدل يمكن نمذجته بالمعادلة التفاضلية $\frac{dr}{dt} = -0.0057r^2$

حيث r طول نصف قطر الكرة بالسنتيمتر و t الزمن بالثواني بعد بدء انكماش الكرة

㉗ أحل المعادلة التفاضلية لإيجاد طول نصف قطر الكرة بعد t ثانية، علماً بأن طول نصف الكرة الابتدائي هو 20cm

الحل:

$$\frac{dr}{dt} = -0.0075r^2$$

$$\frac{dr}{r^2} = -0.0075\ dt \longrightarrow \int \frac{dr}{r^2} = \int -0.0075\ dt$$

$$\frac{-1}{r} = -0.0075\ t + C$$

$$r = 20\ ,\ t = 0$$

$$\frac{-1}{20} = 0 + C \longrightarrow C = \frac{-1}{20} = -0.05$$

$$\frac{-1}{r} = -0.0075\ t - 0.05$$

㉘ بعد كم ثانية يصبح طول نصف قطر الكرة 10cm

الحل:

$$r = 10$$

$$\frac{-1}{10} = -0.0075\ t - 0.05$$

$$-0.1 + 0.05 = -0.0075t$$

$$-0.05 = -0.0075t$$

$$\longrightarrow t = \frac{-0.05}{-0.0075} = \frac{5}{0.75} \approx 6.7$$

حشرات: يتغير عدد الحشرات في مجتمع للحشرات بمعدل يمكن نمذجته بالمعادلة التفاضلية

$\frac{dn}{dt} = 0.2n(0.2 - \cos t)$ حيث n عدد الحشرات و t الزمن بالأسابيع بعد بدء ملاحظة الحشرات:

㉙ أحل المعادلة التفاضلية لإيجاد عدد الحشرات في هذا المجتمع بعد t أسبوعاً علماً بأن عددها الابتدائي هو 400 حشرة

الحل:

$$\frac{dn}{dt} = 0.2n\ (0.2 - \cos t)$$

$$\frac{dn}{n} = 0.04 - 0.2 \cos t$$

$$\int \frac{dn}{n} = \int 0.04 - 0.2 \cos t\ dt$$

$$\ln n = 0.04\ t - 0.2 \sin t + C$$

$$n = 400\ ,\ t = 0$$

$$\ln 400 = 0 - 0 + C \longrightarrow C = \ln 400$$

$$\ln n = 0.04\ t - 0.2 \sin t + \ln 400$$

㉚ أجد عدد الحشرات في هذا المجتمع بعد 3 أسابيع

الحل:

$$\ln n = 0.12 - 0.2 \sin 3 + \ln 400$$

㉛ تمثل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = y \cos x$ ميل المماس لمنحنى علاقة ما. أجد قاعدة هذه العلاقة إذا علمت أن منحناها يمر بالنقطة (0 ,1)

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = y \cos x$$

$$\frac{dy}{y} = \cos x\ dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \cos x\ dx \longrightarrow \ln |y| = \sin x + C$$

$$(0, 1)$$

$$\longrightarrow \ln 1 = 0 + C \longrightarrow C = 0$$

$$\ln |y| = \sin x$$

㉜ تمثل المعادلة التفاضلية $x\ (x + 1) = \frac{dy}{dx}\ y$ ميل المماس لمنحنى علاقة ما. أجد قاعدة هذه العلاقة إذا علمت أن منحناها يمر بالنقطة (1 ,3)

الحل:

$$x(x+1)\frac{dy}{dx} = y$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x(x+1)} \longrightarrow \int\frac{dy}{y} = \int\frac{dx}{x(x+1)}$$

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$$

$$A(x+1) + B(x) = 1$$

$$x = -1: \qquad -B = 1 \longrightarrow B = -1$$

$$x = 0: \qquad A = 1$$

$$\int\frac{dy}{y} = \int\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\, dx$$

$$\ln|y| = \ln|x| - \ln|x+1| + C$$

$$(1, 3) \longrightarrow \ln 3 = \ln 1 - \ln 2 + C$$

$$\ln 3 + \ln 2 = C \longrightarrow C = \ln 6$$

$$\ln|y| = \ln|x| - \ln|x+1| + \ln 6$$

$$y = \frac{6x}{x+1}$$

تحدٍ: أحل كلاً من المعادلات التفاضلية الآتية:

㉝ $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y^2} - xy - \frac{1}{y^2} + y$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = x(\frac{1}{y^2} - y) - (\frac{1}{y^2} - y)$$

$$= (\frac{1}{y^2} - y)(x-1)$$

$$\frac{dy}{\frac{1}{y^2} - y} = (x-1)\, dx$$

$$\frac{dy}{\frac{1-y^3}{y^2}} = (x-1)\, dx$$

$$\int\frac{y^2}{1-y^3}\, dy = \int(x-1)\, dx$$

$$\frac{1}{-3}\,\frac{-3y^2}{1-y^3} = \frac{x^2}{2} - x$$

$$\frac{-1}{3}\ln|1-y^3| = \frac{x^2}{2} - x + C$$

㉝ $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2y-1} - \frac{2x}{3y-2}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = x(\frac{1}{2y-1} - \frac{2}{3y-2})$$

$$= \frac{x(1(3y-2) - 2(2y-1))}{(2y-1)(3y-2)}$$

$$\frac{dy}{dx} = x\left(\frac{-y}{(2y-1)(3y-2)}\right)$$

$$\frac{dy(2y-1)(3y-2)}{-y} = x\, dx$$

$$\frac{6y^2 - 4y - 3y + 2}{-y}\, dy = x\, dx$$

$$\frac{6y^2}{-y} - \frac{7y}{-y} + \frac{2}{-y}\, dy = x\, dx$$

$$\int -6y + 7 - \frac{2}{y}\, dy = \int x\, dx$$

$$-3y^2 + 7y - 2\ln|y| = \frac{x^2}{2} + C$$

㉟ $\frac{dy}{dx} = 1 + \tan^2 x + \tan^2 y + \tan^2 x\tan^2 y$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \tan^2 x + \tan^2 y(1 + \tan^2 x)$$

$$\frac{dy}{dx} = (1 + \tan^2 x)(1 + \tan^2 y)$$

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2 x \,.\, \sec^2 y$$

$$\frac{dy}{\sec^2 y} = \sec^2 x\, dx$$

$$\int \cos^2 y\, dy = \int \sec^2 x\, dx$$

$$\int\frac{1}{2}(1 + \cos 2y)\, dy = \tan x$$

$$\frac{1}{2}(y + \frac{1}{2}\sin 2y) = \tan x + C$$

تبرير: يمكن نمذجة معدل تحلل مادة مشعة بالمعادلة التفاضلية $\frac{dx}{dt} = -\lambda x$ حيث x الكتلة المتبقية من المادة المشعة بالمليغرام بعد t يوماً و $\lambda > 0$

36 أثبت أنه يمكن كتابة الحل العام للمعادلة التفاضلية في صورة $x = ae^{-\lambda t}$ حيث a ثابت مبرراً إجابتي.

الحل:

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda x$$

$$\frac{dx}{x} = -\lambda dt \longrightarrow \int \frac{dx}{x} = \int -\lambda dt$$

$$\ln x = -\lambda t + C$$

$$x = e^{-\lambda t + C} = e^{-\lambda t} . \enclose{circle}{e^C} \longrightarrow a$$

$$y = ae^{-\lambda t}$$

37 إذا كان عمر النصف للمادة المشعة هو الوقت اللازم لتحلل نصف هذه المادة و a كتلة المادة الابتدائية فأثبت أن عمر النصف للمادة المشعة هو $\frac{\ln 2}{\lambda}$ مبرراً إجابتي

الحل:

$$x = \frac{1}{2} a$$

$$\frac{1}{2} a = ae^{-\lambda t} \longrightarrow \frac{1}{2} = e^{-\lambda t}$$

$$\ln \frac{1}{2} = \ln e^{-\lambda t} \longrightarrow -\ln 2 = -\lambda t$$

$$t = \frac{-\ln 2}{-\lambda} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

تبرير: تمثل المعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y}$ ميل المماس لمنحنى علاقة ما:

38 أجد قيمة n التي تجعل العلاقة $x^2 + ny^2 = a$ حلاً للمعادلة التفاضلية المعطاة، حيث a ثابت اختياري، مبرراً إجابتي.

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{3y}$$

$$\longrightarrow 3\,y\,dy = -2x\,dx$$

$$\int 3\,y\,dy = \int -2x\,dx \longrightarrow \frac{3y^2}{2} = -x^2 + C$$

$$\frac{3y^2}{2} + x^2 = C$$

$$n = \frac{3}{2}$$

39 أجد إحداثيي نقاط تقاطع منحنى العلاقة مع المحور x إذا علمت أن منحناها يمر بالنقطة $(5\,,4)$ مبرراً إجابتي

الحل:

$$x^2 + \frac{3}{2} y^2 = a$$

$$(5, 4) \longrightarrow 25 + \frac{3}{2} 16 = a$$

$$25 + 24 = a \longrightarrow a = 49$$

$$x^2 + \frac{3}{2} y^2 = 49$$

يقطع محور x عندما $y = 0$

$$x^2 + 0 = 49$$

$$x = \pm 7$$

النقط $(7, 0)$, $(-7, 0)$

كتاب التمارين ص 16

أحل كلاً من المعادلات التفاضلية الآتية:

① $\frac{dy}{dx} = 3x^2 y$

الحل:

$$\frac{dy}{y} = 3x^2\,dx \longrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int 3x^2\,dx$$

$$\ln |y| = x^3 + C$$

② $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 4}{x}$

الحل:

$$\int \frac{dy}{y^2 - 4} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{y^2 - 4} = \frac{1}{(y-2)(y+2)} = \frac{A}{y-2} + \frac{B}{y+2}$$

$$A(y+2) + B(y-2) = 1$$

$$y = -2: \quad -4B = 1 \longrightarrow B = -\frac{1}{4}$$

$$y = 2: \quad 4A = 1 \longrightarrow A = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \int \frac{\frac{1}{4}}{y-2} + \frac{-\frac{1}{4}}{y+2}\,dy = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{4} \ln |y-2| - \frac{1}{4} \ln |y+2| = \ln |x| + C$$

③ $$\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = e^{x+y} = e^{x} . e^{y}$$

$$\frac{dy}{e^{y}} = e^{x}\, dx$$

$$\int \frac{dy}{e^{y}} = \int e^{x}\, dx \longrightarrow \int e^{-y}\, dy = \int e^{x}\, dx$$

$$-e^{-y} = e^{x} + C$$ المعادلة

④ $$\frac{dy}{dx} = \frac{x \sec y}{y\, e^{x^2}}$$

الحل:

$$\frac{y}{\sec y}\, dy = \frac{x}{e^{x^2}}\, dx$$

$$\int y \cos y\, dy = \int x e^{-x^2}\, dx$$

$u = y \qquad dv = \cos y$

$du = dy \qquad v = \sin y$

$$\int y \cos y\, dy = y \sin y - \int \sin y\, dy$$

$$= y \sin y + \cos y$$

$$\int x e^{-x^2}\, dx$$

$$u = -x^2 \longrightarrow dx = \frac{du}{-2x}$$

$$= \int x e^{u} \frac{du}{-2x} = \frac{-1}{2} e^{u} = \frac{-1}{2} e^{-x^2}$$

$$y \sin y + \cos y = \frac{-1}{2} e^{-x^2} + C$$ التكامل

⑤ $$\frac{dy}{dx} = \frac{y-3}{y}$$

الحل:

$$\int \frac{y\, dy}{y-3} = \int dx$$

$$\int 1 + \frac{3}{y-3}\, dy = x$$

$$\begin{array}{r l} & \ \ 1 \\ \cline{2-2} y-3 \big) & \cancel{y} \\ & -\cancel{y} \overset{\oplus}{-} 3 \\ \cline{2-2} & \quad 3 \end{array}$$

$$y + 3 \ln |y-3| = x + C$$

⑥ $$\frac{dy}{dx} = \frac{x \ln x}{y^2}$$

الحل:

$$\int y^2\, dy = \int x \ln x\, dx$$

$u = \ln x \qquad dv = x\, dx$

$du = \frac{1}{x}\, dx \qquad v = \frac{x^2}{2}$

$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} . \frac{1}{x}\, dx$$

$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2}\, dx$$

$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

أجد الحل الخاص الذي يحقق الشرط الأولي المعطى لكل من المعادلات التفاضلية الآتية:

⑦ $$\frac{dy}{dx} = -30 \cos 4x \sin 4x \quad ; y(\tfrac{\pi}{8}) = 0$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = -30\, (\frac{1}{2} \sin 8x)\, dx$$

$$\int dy = \int -15 \sin 8x\, dx$$

$$y = \frac{15}{8} \cos 8x + C$$

$$0 = \frac{15}{8} (\cos 8\, (\frac{\pi}{8}) + C$$

$$0 = \frac{15}{8} (-1) + C \longrightarrow C = \frac{15}{8}$$

$$y = \frac{15}{8} \cos 8x + \frac{15}{8}$$

⑧ $$\frac{dy}{dx} = x^2 \sqrt{y} \quad ; y(0) = 2$$

الحل:

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = x^2\, dx$$

$$\int y^{\frac{-1}{2}}\, dy = \int x^2\, dx$$

$$2y^{\frac{1}{2}} = \frac{x^3}{3} + C$$

$$2 = 0 + C \longrightarrow C = 2$$

$$2\sqrt{y} = \frac{x^3}{3} + 2$$

⑨ $\frac{dy}{dx} = \frac{4\sqrt{x}}{\cos y}$; $y(0) = 0$

الحل:

$$\cos y \, dy = 4\sqrt{x} \, dx$$

$$\int \cos y \, dy = \int 4x^{\frac{1}{2}} \, dx$$

$$\sin y = \frac{4(2)\, x^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

$$y(0) = 0$$

$$0 = 0 + C \longrightarrow C = 0$$

$$\sin y = \frac{8}{3} x^{\frac{3}{2}}$$

⑩ $\frac{dy}{dx} = x\, e^{y - x^2}$; $y(1) = 0$

الحل:

$$= x\left(\frac{e^y}{e^{x^2}}\right)$$

$$\frac{dy}{e^y} = \frac{x}{e^{x^2}} dx$$

$$\int e^{-y} dy = \int x e^{-x^2} dx$$

$$-x^2 = u \longrightarrow dx = \frac{du}{-2x}$$

$$\int e^{-y} dy = \int x e^u \frac{du}{2x}$$

$$\int e^{-y} dy = -\frac{1}{2}\int e^u \, du$$

$$-e^{-y} = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$$

$$y(1) = 0$$

$$-e^0 = -\frac{1}{2} e^{-1} + C \longrightarrow C = -1 + \frac{1}{2} e^{-1}$$

$$-e^{-y} = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + \frac{1}{2} e^{-1} - 1$$

⑪ $\frac{dy}{dx} = x\, e^{-y}$; $y(4) = \ln 2$

الحل:

$$\frac{dy}{e^{-y}} = x\,dx \longrightarrow \int e^y dy = \int x\,dx$$

$$e^y = \frac{x^2}{2} + C$$

$$y(4) = \ln 2 \longrightarrow e^{\ln 2} = \frac{16}{2} + C$$

$$2 = 8 + C \longrightarrow C = -6$$

$$e^y = \frac{x^2}{2} - 6$$

⑫ $\frac{dy}{dx} = (3x^2 + 4)y^2$; $y(2) = -0.1$

الحل:

$$\frac{dy}{y^2} = (3x^2 + 4)dx$$

$$\int y^{-2} dy = \int 3x^2 + 4 \, dx$$

$$\frac{-1}{y} = x^3 + 4x + C$$

$$y(2) = -0.1$$

$$\frac{-1}{-0.1} = 8 + 8 + C$$

$$10 = 16 + C \longrightarrow C = -6$$

$$\frac{-1}{y} = x^3 + 4x - 6$$

يتغير عدد الخلايا البكتيرية في مجتمع بكتيري بمعدل يمكن نمذجته بالمعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}y^{0.8}$ حيث y عدد الخلايا وt الزمن بالأيام:

⑬ أحل المعادلة التفاضلية لإيجاد عدد الخلايا البكتيرية في هذا المجتمع بعد t يوماً علماً بأن عددها الابتدائي هو 100000 خلية.

الحل:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}y^{0.8} \longrightarrow \frac{dy}{y^{0.8}} = \frac{1}{2}dt$$

$$\int y^{-0.8} \, dy = \int \frac{1}{2} dt$$

$$\frac{y^{-0.8+1}}{0.2} = \frac{1}{2}t + C \longrightarrow \frac{y^{0.2}}{0.2} = \frac{1}{2}t + C$$

$$5\sqrt[5]{100000} = 0 + C \longrightarrow C = 50$$

$$5\,y^{0.2} = \frac{1}{2}t + 50 \longrightarrow 5\sqrt[5]{y} = \frac{1}{2}t + 50$$

---

14 أجد عدد الخلايا البكتيرية في هذا المجتمع بعد أسبوع.

الحل:

عندما $t = 7$

$$5\sqrt[5]{y} = \frac{1}{2}t + 50 = \frac{1}{2}(7) + 50$$

$$y = (10.7)^5$$

---

15 تتحرك سيارة في مسار مستقيم، ويعطى تسارعها بالمعادلة التفاضلية: $\frac{dv}{dt} = -\frac{v^2}{100},\ t \geq 0$ ، حيث t الزمن بالثواني و v سرعتها المتجهة بالمتر لكل ثانية. أجد السرعة المتجهة للسيارة بعد t ثانية من بدء حركتها علماً بأن سرعتها الابتدائية هي 20m/s

الحل:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{v^2}{100} \longrightarrow \frac{dv}{v^2} = -\frac{1}{100}\,dt$$

$$\int v^{-2}\,dv = \int -\frac{1}{100}\,dt$$

$$\frac{-1}{v} = -\frac{1}{100}t + C$$

$$v(0) = 20$$

$$\frac{-1}{20} = 0 + C \longrightarrow C = \frac{-1}{20}$$

$$\frac{-1}{v} = -\frac{1}{100}t - \frac{1}{20}$$

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{100}t + \frac{1}{20} \longrightarrow v = \frac{100}{t+5}$$

---

16 تمثل المعادلة التفاضلية: $e^y\frac{dy}{dx} = 10 + 2\sec^2 x$ ميل المماس لمنحنى علاقة ما أجد قاعدة هذه العلاقة إذا علمت أن منحناها يمر بالنقطة $(\frac{\pi}{4}, 0)$

الحل:

$$e^y\frac{dy}{dx} = 10 + 2\sec^2 x$$

$$e^y\,dy = (10 + 2\sec^2 x)\,dx$$

$$\int e^y\,dy = \int (10 + 2\sec^2 x)\,dx$$

$$e^y = 10x + 2\tan x + C$$

$$(\frac{\pi}{4}, 0) \longrightarrow e^0 = 10(\frac{\pi}{4}) + 2\tan\frac{\pi}{4} + C$$

$$1 = \frac{10\pi}{4} + 2 + C$$

$$\longrightarrow C = -1 - \frac{10\pi}{4}$$

$$e^y = 10x + 2\tan x + (-1 - \frac{10\pi}{4})$$

---

17 تمثل المعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0$ ميل المماس لمنحنى علاقة ما أجد قاعدة هذه العلاقة إذا علمت أن منحناها يمر بالنقطة (6 ,4)

الحل:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0 \longrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{-y} = \frac{dx}{x} \longrightarrow \int -\frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$-\ln|y| = \ln|x| + C \qquad (6, 4)$$

$$-\ln 4 = \ln 6 + C$$

$$-\ln 4 - \ln 6 = C$$

$$-(\ln 4 + \ln 6) = C \longrightarrow -\ln 24$$

$$-\ln|y| = \ln|x| - \ln 24$$

$$y = \frac{24}{5}$$

الفاتن في
الرياضيات

اختبار نهاية الوحدة ص 105

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

1 قيمة: $\int_0^2 e^{2x}\,dx$ هي:

a) $e^4 - 1$ b) $e^4 - 2$

c) $2e^4 - 2$ d) $\frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}$

الحل:

$$\int_0^2 e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^2$$

$$= \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2} \quad \text{(d)}$$

2 قيمة: $\int_{-4}^{4}(4 - |x|)\;dx$ هي:

a) 0 b) 4 c) 16 d) 8

الحل:

$x = 0$

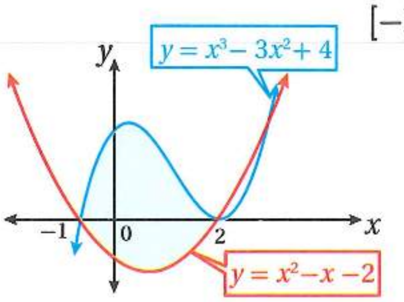
$$\int_{-4}^{0}(4 - (-x))\,dx + \int_0^4 4 - x\,dx$$

$$= 4x + \frac{x^2}{2}\Big|_{-4}^{0} + 4x - \frac{x^2}{2}\Big|_0^4$$

$$= (0) - (-16 + 8) + (16 - 8) - (0)$$

$$= 8 + 8 = 16 \quad \text{(c)}$$

3 يبين الشكل الآتي المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين: $y= x^3 - 3x^2 + 4$ و $y= x^2 - x - 2$ ، في الفترة $[-1 ,2]$



التكامل المحدود الذي يمكن عن طريقه إيجاد مساحة المنطقة المظللة هو:

a) $\int_{-1}^{2}(x^3 - 4x^2 + x + 6)\,dx$

b) $\int_{-1}^{2}(-x^3 + 4x^2 - x - 6)\,dx$

c) $\int_{-1}^{2}(x^3 - 4x^2 - x + 2)\,dx$

d) $\int_{-1}^{2}(x^3 - 2x^2 - x + 2)\,dx$

الحل:

$$A = \int_{-1}^{2}(x^3 - 3x^2 + 4) - (x^2 - x - 2)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{2}(x^3 - 4x^2 + x + 6)\,dx \quad \text{(a)}$$

4 حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = 2xy$ الذي تحققه النقطة $(0 ,1)$ هو:

a) $y = e^{x^2}$ b) $y = x^2 y$

c) $y = x^2 y + 1$ d) $y = \frac{x^2 y^2}{2 + 1}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 2xy \longrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int 2x\,dx$$

$$\ln y = x^2 + C$$

$$(0, 1) \longrightarrow \ln 1 = 0 + C \longrightarrow C = 0$$

$$\ln y = x^2 \longrightarrow y = e^{x^2} \quad \text{(a)}$$

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

5 $\int \frac{1}{\sqrt{e^x}}$

الحل:

$$= \int \frac{1}{(e^x)^{\frac{1}{2}}}\,dx = \int \frac{1}{(e)^{\frac{1}{2}x}}\,dx = \int e^{-\frac{1}{2}x}\,dx$$

$$= -2e^{-\frac{1}{2}x} + C$$

6 $\int (\tan 2x + e^{3x} - \frac{1}{x})\,dx$

الحل:

$$= \int \frac{\sin 2x}{\cos 2x} + e^{3x} - \frac{1}{x}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + \frac{1}{3}e^{3x} - \ln|x| + C$$

7 $\int \csc^2 x\,(1 + \tan^2 x)\,dx$

الحل:

$$= \int \csc^2 x + \csc^2 x \,.\, \tan^2 x\,dx$$

$$= \int \csc^2 x + \frac{1}{\cancel{\sin^2 x}} \cdot \frac{\cancel{\sin^2 x}}{\cos^2 x}\,dx$$

$$= \int \csc^2 x + \sec^2 x\,dx = -\cot x + \tan x + C$$

8 $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+5}\,dx$

الحل:

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+5}\,dx = \frac{1}{2}\ln|e^{2x}+5| + C$$

---

9 $\int \frac{2x^2+7x-3}{x-2}\,dx$

الحل:

$$\begin{array}{r|l} & 2x+11 \\ \hline x-2 & 2\cancel{x^2}+7x-3 \\ & -\cancel{2}x^2 \overset{\oplus}{-} 4x \\ \hline & 11\cancel{x}-3 \\ & -11\cancel{x} \overset{\oplus}{-} 22 \\ \hline & 19 \end{array}$$

$$= \int 2x + 11 + \frac{19}{x-2}\,dx$$

$$= x^2 + 11x + 19\ln|x-2| + C$$

---

10 $\int \sec^2(2x-1)\ dx$

الحل:

$$= \frac{1}{2}\tan(2x-1) + C$$

---

11 $\int \cot(5x+1)\ dx$

الحل:

$$= \int \frac{\cos(5x+1)}{\sin(5x+1)}\ dx = \frac{1}{5}\ln\sin|5x+1| + C$$

---

12 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos x\,dx$

الحل:

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{1}{4}\ (\cos\pi - \cos 0)$$

$$= \frac{1}{4}(-1-1) = \frac{1}{2}$$

---

13 $\int_0^{\pi} \cos^2 0.5x\,dx$

الحل:

$$= \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(1+\cos x)\,dx = \frac{1}{2}(x+\sin x)\Big|_0^{\pi}$$

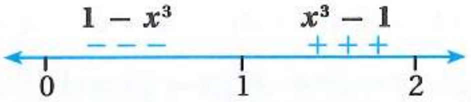
$$= \frac{1}{2}(\pi+0) - (0+0) = \frac{\pi}{2}$$

---

14 $\int_0^2 |x^3-1|\,dx$

الحل:

$$x^3 - 1 = 0 \longrightarrow x^3 = 1 \longrightarrow x = 1$$



$$\int_0^1 1 - x^3\,dx + \int_1^2 x^3 - 1\,dx$$

$$= x - \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 + \frac{x^4}{4} - x\ \Big|_1^2$$

$$= (1 - \frac{1}{4}) - 0) + (4-2) - (\frac{1}{4} - 1) = \frac{7}{2}$$

---

15 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 x + \cos 4x)\,dx$

الحل:

$$= \tan x + \frac{1}{4}\sin 4x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= (1+0) - (0+0) = 1$$

---

16 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin(2x+\frac{\pi}{3}) - 1 + \cos 2x)\,dx$

الحل:

$$= -\frac{1}{2}\cos(2x+\frac{\pi}{3}) - x + \frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= (-\frac{1}{2}\cos\pi - \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3}) -$$

$$(-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3} - 0 + \frac{1}{2}\sin 0)$$

$$= (-\frac{1}{2}(-1) - \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}) - (-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}) - 0 + 0)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

---

17 $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin 2x\cos 2x\,dx$

الحل:

$$= \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{1}{2}\sin 4x\,dx = \frac{1}{2}(-\frac{1}{4})\cos 4x\Big|_0^{\frac{\pi}{8}}$$

$$= -\frac{1}{8}(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0) = -\frac{1}{8}(0-1) = \frac{1}{8}$$

18 $\int \frac{4}{x^2-4}\,dx$

الحل:

$$\frac{4}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

$A(x+2) + B(x-2) = 4$

$x = -2: \quad -4B = 4 \longrightarrow B = -1$

$x = 2: \quad 4A = 4 \longrightarrow A = 1$

$$= \int \frac{1}{x-2} + \frac{-1}{x+2}\,dx$$

$= \ln|x-2| - \ln|x+2| + C$

---

19 $\int \frac{x+7}{x^2-x-6}\,dx$

الحل:

$$\frac{x+7}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}$$

$A(x+2) + B(x-3) = x+7$

$x = -2: \quad -5B = 5 \longrightarrow B = -1$

$x = 3: \quad 5A = 10 \longrightarrow A = 2$

$$= \int \frac{2}{x-3} + \frac{-1}{x+2}\,dx$$

$= 2\ln|x-3| - \ln|x+2| + C$

---

20 $\int \frac{x-1}{x^2-2x-8}\,dx$

الحل:

$$\frac{x-1}{(x-4)(x+2)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2}$$

$A(x+2) + B(x-4) = x-1$

$x = -2: \quad -6B = -3 \longrightarrow B = \frac{1}{2}$

$x = 4: \quad 6A = 3 \longrightarrow A = \frac{1}{2}$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}}{x-4} + \frac{\frac{1}{2}}{x+2}\,dx$$

$= \frac{1}{2}\ln|x-4| + \frac{1}{2}\ln|x+2| + C$

---

21 $\int \frac{x^2+3}{x^3+x}\,dx$

الحل:

$$\int \frac{x^2+3}{x(x^2+1)} = \int \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$A(x^2+1) + x(Bx+C) = x^2+3$

$x = 0: \quad A = 3$

$x = 1, A = 3 \longrightarrow 6 + 1(B+C) = 4$

$\longrightarrow B + C = -2$

$x = -1, A = 3 \longrightarrow 6 + B - C = 4$

$\longrightarrow B - C = -2$

$2B = -4 \longrightarrow B = -2$ بالجمع

$-2 + C = -2 \longrightarrow C = 0$ بالتعويض

$= \int \frac{3}{x} + \frac{-2x}{x^2+1}\,dx$ التكامل

$= 3\ln|x| - \ln|x^2+1| + C$

---

22 $\int \frac{1}{x^2(1-x)}\,dx$

الحل:

$$\frac{1}{x^2(1-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{1-x}$$

$A(x)(1-x) + B(1-x) + Cx^2 = 1$

$x = 0: \quad B = 1$

$x = 1: \quad C = 1$

$x = 2: \quad B = 1, C = 1$

$\longrightarrow -2A - 1 + 4 = 1 \longrightarrow A = 1$

$$\int \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1-x}\,dx$$

$\ln|x| + \frac{x^{-1}}{-1} - \ln|1-x| + C$

---

23 $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x - 3\cos x}\,dx$

الحل:

$u = \cos x \longrightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$

$$= \int \frac{\sin x}{u^2 - 3u} \cdot \frac{du}{-\sin x} = \int \frac{1\,du}{3u - u^2}$$

$$\frac{1}{3u - u^2} = \frac{1}{u\,(3-u)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{3-u}$$

$A\,(3-u) + B\,u = 1$

$u = 3: \quad 3B = 1 \longrightarrow B = \frac{1}{3}$

$u = 0: \quad 3A = 1 \longrightarrow A = \frac{1}{3}$

$$= \int \frac{\frac{1}{3}}{u} + \frac{\frac{1}{3}}{3-u}\,du = \frac{1}{3}\ln|u| - \frac{1}{3}\ln|3-u| + C$$

$$= \frac{1}{3}\ln|\cos x| - \frac{1}{3}\ln|3 - \cos x| + C$$

---

24 $\int \frac{\sqrt{x}}{x-4}\,dx$

الحل:

$u = \sqrt{x} \longrightarrow u^2 = x \longrightarrow 2u\,du = dx$

$$= \int \frac{u\,.\,2u\,.\,du}{u^2 - 4} = \int \frac{2u^2}{u^2 - 4}\,dx$$

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline u^2 - 4 & \cancel{2u^2} \\ & -\cancel{2u^2} \overset{\oplus}{-} 8 \\ \hline & \quad\quad 8 \end{array}$$

$$= \int 2 + \frac{8}{u^2 - 4}\,du$$

$$\frac{8}{u^2 - 4} = \frac{A}{u-2} + \frac{B}{u+2}$$

$A\,(u+2) + B\,(u-2) = 8$

$u = -2: \ -4B = 8 \longrightarrow B = -2$

$u = 2: \ 4A = 8 \longrightarrow A = 2$

$$= \int 2 + \frac{2}{u-2} + \frac{-2}{u+2}\,du$$

$$= 2u + 2\ln|u-2| - 2\ln|u+2| + C$$

$$= 2\sqrt{x} + 2\ln|\sqrt{x} - 2| - 2\ln|\sqrt{x} + 2| + C$$

---

25 $\int \sec^2 x \tan x \sqrt{1 + \tan x}\,dx$

الحل:

$\tan x = u \longrightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x}$

$$= \int \sec^2 x\,u.\,(1+u)^{\frac{1}{2}}\,\frac{du}{\sec^2 x} = \int u(1+u)^{\frac{1}{2}}du$$

$1 + u = L \longrightarrow du = dL \longrightarrow u = L - 1$

$$\int (L-1)\,(L)^{\frac{1}{2}}\,dL = \int L^{\frac{3}{2}} - L^{\frac{1}{2}}\,dL$$

$$= \frac{2L^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{2L^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

$$= \frac{2}{5}(1+u)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(1+u)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{5}(1+\tan x)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(1+\tan x)^{\frac{3}{2}} + C$$

---

26 $\int \frac{x}{\sqrt[3]{4-3x}}\,dx$

الحل:

$$= \int x\,(4-3x)^{-\frac{1}{3}}\,dx$$

$u = 4 - 3x \longrightarrow dx = \frac{du}{-3} \longrightarrow x = \frac{u-4}{-3}$

$$= \int \frac{u-4}{-3}\,.\,u^{-\frac{1}{3}}\,\frac{du}{3} = \frac{1}{9}\int u^{\frac{2}{3}} - 4u^{-\frac{1}{3}}\,du$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{3u^{\frac{5}{3}}}{5} - \frac{4(3)u^{\frac{2}{3}}}{2}\right) + C$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{3}{5}\,(4-3x)^{\frac{5}{3}} - 6\,(4-3x)^{\frac{2}{3}}\right) + C$$

---

27 $\int \frac{(\ln x)^6}{x}\,dx$

الحل:

$\ln x = u \longrightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$

$dx = x\,du$

$$= \int \frac{u^6.\,\cancel{x}\,du}{\cancel{x}} = \int u^6\,.\,du$$

$$= \frac{u^7}{7} + C = \frac{(\ln x)^7}{7} + C$$

28 $\int (x+1)^2\sqrt{x-2}\;dx$

الحل:

$$u=\sqrt{x-2} \longrightarrow u^2=x-2 \longrightarrow 2u\,du=dx$$

$$(x+1)^2=(x^2+2x+1)$$

$$=(u^2+2)^2+2(u^2+2)+1$$

$$=u^4+4u^2+4+2u^2+4+1$$

$$=u^4+6u^2+9$$

$$\Rightarrow \int (u^4+6u^2+9)\,(u)\,(2u)\;du$$

$$=\int 2u^6+12u^4+18u^2\,du$$

$$=\frac{2u^7}{7}+\frac{12u^5}{5}+\frac{18u^3}{3}+C$$

$$=\frac{2}{7}(\sqrt{x-2})^7+\frac{12}{5}(\sqrt{x-2})^5$$

$$+\frac{18}{3}(\sqrt{x-2})^3+C$$

29 $\int x\csc^2 x\,dx$

الحل:

$u=x \qquad dv=\csc^2 x\,dx$

$du=dx \qquad v=-\cot x$

$$=-x\cot x-\int -\cot x\,.dx$$

$$=-x\cot x+\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$$

$$=-x\cot x+\ln|\sin x|+C$$

30 $\int (x^2-5x)\,e^x\,dx$

الحل:

u		dv
x^2-5x	(+)	e^x
$2x-5$	(−)	e^x
2	(+)	e^x
0	(−)	e^x

$$=(x^2-5x)\,e^x-(2x-5)\,e^x+2e^x\;+C$$

31 $\int x\sin 2x\,dx$

الحل:

$u=x \qquad dv=\sin 2x$

$du=dx \qquad v=-\frac{1}{2}\cos 2x$

$$=x\,(-\frac{1}{2}\cos 2x)-\int -\frac{1}{2}\cos 2x\,dx$$

$$=\frac{-x}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x\;+C$$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

32 $\int_0^1 t\,3^{t^2}\,dt$

الحل:

$$t^2=u \longrightarrow dt=\frac{du}{2t}$$

$t=0 \quad | \quad t=1$

$u=0 \quad | \quad u=1$

$$\int_0^1 t\,3^u\,.\,\frac{du}{2t}=\frac{1}{2}\int_0^1 3^u\,du$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{1}{\ln 3}\,3^u\Big|_0^1=\frac{1}{2\ln 3}\,(3-1)=\frac{1}{\ln 3}$$

33 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cot^3 x\,dx$

الحل:

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cot^2 x\,.\,\cot x\,dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (\csc^2 x-1)\,\cot x\,dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \underbrace{\csc^2 x\,.\,\cot x}_{(1)}-\underbrace{\cot x\,dx}_{(2)}$$

$$(1)\;u=\cot x \longrightarrow dx=\frac{du}{-\csc^2 x}$$

$x=\frac{\pi}{4} \quad u=1 \quad | \quad x=\frac{\pi}{3} \quad u=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\int_1^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \csc^2 x\,.\,u\,\frac{du}{-\csc^2 x}=\int_1^{\frac{1}{\sqrt{3}}} -u\,du$$

$$=-\frac{u^2}{2}\Big|_1^{\frac{1}{\sqrt{3}}}=-(\frac{1}{6}-\frac{1}{2})=\frac{2}{6}$$

$$(2)\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cot x\, dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin x}\, dx = \ln|\sin x|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \ln\frac{\sqrt{3}}{2} - \ln\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2}{6} - (\ln\frac{\sqrt{3}}{2} - \ln\frac{1}{\sqrt{2}})$$ التكامل

---

34 $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{4+3\sin x}}\, dx$

الحل:

$\sqrt{4+3\sin x} = u \longrightarrow u^2 = 4 + 3\sin x$

$2\,u\,du = 3\cos x\, dx \longrightarrow dx = \frac{2\,u\,du}{3\cos x}$

$x = -\pi$
$u = \sqrt{4+0} = 2$

$x = \pi$
$u = \sqrt{4+0} = 2$

$$\Rightarrow \int_2^2 \frac{\cancel{\cos x}}{\cancel{u}} \cdot \frac{2\,\cancel{u}\,du}{3\,\cancel{\cos x}} = \int_2^2 \frac{2}{3}\,du = 0$$

---

35 $\int_{-1}^{0} \frac{x^2 - x}{x^2 + x - 2}\, dx$

الحل:

$$= \int_{-1}^{0} \frac{x\,\cancel{(x-1)}}{(x+2)\,\cancel{(x-1)}}\, dx = \int_{-1}^{0} \frac{x}{x+2}\, dx$$

$$= \int_{-1}^{0} 1 + \frac{-2}{x+2}\, dx$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ x+2\,\overline{)\,\cancel{x}\qquad} \\ \overset{\ominus}{-\cancel{x}+2} \\ \hline -2 \end{array}$$

$$= x - 2\ln|x+2|\Big|_{-1}^{0}$$

$$= (0 - 2\ln 2) - (-1 - 2\ln 1)$$

$$= -2\ln 2 + 1$$

---

36 $\int_{1}^{2} \frac{32x^2 + 4}{16x^2 - 1}\, dx$

الحل:

$$\begin{array}{r} 2 \\ 16x^2-1\,\overline{)\,3\cancel{2x^2}+4} \\ \overset{\oplus}{-\cancel{32x^2}-2} \\ \hline 6 \end{array}$$

$$= \int_1^2 2 + \frac{6}{16x^2-1}\, dx$$

$$\frac{6}{16x^2 - 1} = \frac{6}{(4x-1)(4x+1)}$$

$$= \frac{A}{4x-1} + \frac{B}{4x+1}$$

$A\,(4x+1) + B\,(4x-1) = 6$

$x = -\frac{1}{4}\ : -2\,B = 6 \longrightarrow B = -3$

$x = \frac{1}{4}\ : 2A = 6 \longrightarrow A = 3$

$$= \int_1^2 2 + \frac{3}{4x-1} + \frac{-3}{4x+1}\, dx$$

$$= 2x + \frac{3}{4}\ln|4x-1| - \frac{3}{4}\ln|4x+1|\Big|_1^2$$

$$= (4 + \frac{3}{4}\ln 7 - \frac{3}{4}\ln 9) - (2 + \frac{3}{4}\ln 3 - \frac{3}{4}\ln 5)$$

---

37 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} x\ln 2x\, dx$

الحل:

$u = \ln 2x$ $\qquad dv = x\,dx$

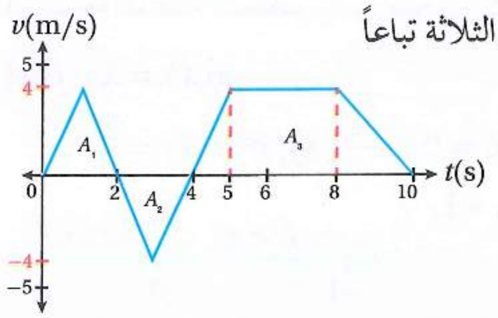
$\frac{du}{dx} = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$ $\qquad v = x$

$$= \frac{x^2}{2}\ln 2x - \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} = x\ln 2x - \frac{x^2}{4}\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}}$$

$$= (\frac{e^2}{8}\ln e - \frac{e^2}{16}) - (\frac{1}{2}\ln 1 - \frac{1}{16})$$

$$= \frac{e^2}{16} + \frac{1}{16}$$

يبين الشكل الآتي منحنى السرعة المتجهة – الزمن لجسيم يتحرك على المحور x في الفترة $[0, 10]$ إذا بدأ الجسيم الحركة من $x = 0$ عندما $t = 0$ فأجيب عن الأسئلة الثلاثة تباعاً



38 أجد إزاحة الجسيم في الفترة الزمنية المعطاة.

الحل:

ملاحظة: $(4 , -4)$ على محور y وضعت بشكل تقريبي

$$A_1 = \frac{1}{2}(2)(4) = 4$$

$$A_2 = \frac{1}{2}(2)(4) = 4$$

$$A_3 = \frac{1}{2}(6+3)(4) = 18$$

الإزاحة $= \int_0^{10} v(t)\,dt = 4 + -4 + 18 = 18$

39 أجد المسافة التي قطعها الجسيم في الفترة الزمنية المعطاة.

الحل:

المسافة $= \int_0^{10} |v(t)|\,dt = 4 + 4 + 18 = 26$

40 أجد الموقع النهائي للجسيم : الموقع النهائي

الحل: $= s(10) - s(0) = \int_0^{10} v(t)\,dt = 18$

41 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين

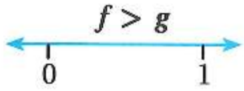
$g(x) = x^2$ و $f(x) = \sqrt{x}$

الحل:

$$g(x) = f(x)$$

$$x^2 = \sqrt{x} \longrightarrow x^4 = x \longrightarrow x^4 - x = 0$$

$$x(x^3 - 1) = 0 \longrightarrow x = 0, 1$$



$$A = \int_0^1 \sqrt{x} - x^2\,dx$$

$$= \frac{2\,x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) - (0) = \frac{1}{3}$$

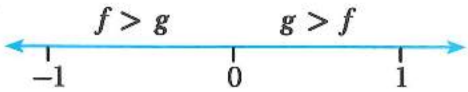
42 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين

$g(x) = x$ و $f(x) = x^3$

الحل:

$$x^3 - x = 0 \longrightarrow (x)(x^2 - 1) = 0$$

$$x = 0, -1, 1$$



$$A = \int_{-1}^{0} x^3 - x\,dx + \int_0^1 x - x^3\,dx$$

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\Big|_0^1$$

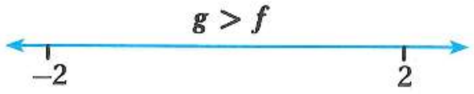
$$= (0) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) - (0)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

43 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين $f(x) = -x$ و $g(x) = x^2 + 2$ والمستقيمين $x = -2$ و $x = 2$

الحل:

لا يوجد تقاطع



$$A = \int_{-2}^{2} (x^2 + 2) - (-x)\,dx$$

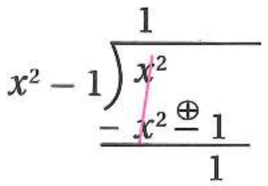
$$= \frac{x^3}{3} + 2x + \frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{2}$$

$$= \left(\frac{8}{3} + 4 + 2\right) - \left(-\frac{8}{3} - 4 + 2\right)$$

$$= \frac{16}{3} + 8 = \frac{16 + 24}{3} = \frac{40}{3}$$

44 أثبت أن: $\int_2^5 \frac{x^2}{x^2 - 1}\,dx = 3 + \frac{1}{2}\ln 2$

الحل:



$$= \int_2^5 1 + \frac{1}{x^2 - 1}\,dx$$

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$A(x+1) + B(x-1) = 1$$

$$x = -1 \ : -2B = 1 \longrightarrow B = -\frac{1}{2}$$

$$x = 1 \ : 2A = 1 \longrightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$= \int_2^5 1 + \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{x+1}\, dx$$

$$= x + \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| \Big|_2^5$$

$$= (5 + \frac{1}{2}\ln 4 - \frac{1}{2}\ln 6) - (2 + \frac{1}{2}\ln 1 - \frac{1}{2}\ln 3)$$

$$= 3 + \frac{1}{2}\ln\frac{4\times 3}{6} \quad = 3 + \frac{1}{2}\ln 2$$

يتحرك جسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = \frac{t}{9} - \frac{1}{\sqrt{t+6}}$ حيث t الزمن بالثواني

v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية:

45 أجد إزاحة الجسيم في الفترة $[1\ ,10]$

الحل:

$$= \int_1^{10} \frac{t}{9} - \frac{1}{\sqrt{t+6}}\, dt$$

$$= \int_1^{10} \frac{t}{9} - (t+6)^{-\frac{1}{2}}\, dt = \frac{t^2}{18} - \frac{2(t+6)^{\frac{1}{2}}}{1} \Big|_1^{10}$$

$$= \frac{t^2}{18} - 2\sqrt{t+6} \Big|_1^{10}$$

$$= (\frac{100}{18} - 2(4)) - (\frac{1}{18} - 2\sqrt{7})$$

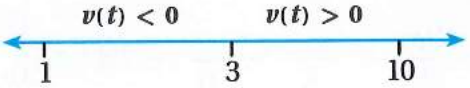
$$= \frac{99}{18} - 8 + 2\sqrt{7})$$

46 أجد المسافة الكلية التي قطعها الجسيم في الفترة $[1\ ,10]$

الحل:

$$v(t) = \frac{t}{9} - \frac{1}{\sqrt{t+6}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{t}{9} = \frac{1}{\sqrt{t+6}} \longrightarrow t = 3$$

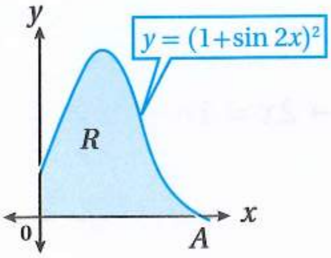


$$= \int_1^3 -(\frac{t}{9} - \frac{1}{\sqrt{t+6}})dt + \int_3^{10} \frac{t}{9} - \frac{1}{\sqrt{t+6}}\, dt$$

$$= -(\frac{t^2}{18} - 2\sqrt{t+6})\Big|_1^3 + \frac{t^2}{18} - 2\sqrt{t+6}\,\Big|_3^{10}$$

$$= -(\frac{9}{18} - 6) - (\frac{1}{18} - 2\sqrt{7}) + (\frac{100}{18} - 8) - (\frac{9}{18} - 6)$$

يمثل الشكل المجاور منحنى الاقتران $y = (1 + \sin 2x)^2$ حيث $0 \le x \le \frac{3\pi}{4}$



47 أجد إحداثيي النقطة A

الحل:

$$y = (1 + \sin 2x)^2 = 0$$

$$1 + \sin 2x = 0 \longrightarrow \sin 2x = -1$$

$$\longrightarrow 2x = \frac{3\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \quad : A = (\frac{3\pi}{4}, 0)$$

48 أجد مساحة المنطقة R

الحل:

$$R = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} (1 + \sin 2x)^2\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{3\pi}{4}} 1 + 2\sin 2x + \sin^2 2x\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{3\pi}{4}} 1 + 2\sin 2x + \frac{1}{2}(1 - \cos 4x)\, dx$$

$$= x - \cos 2x + \frac{1}{2}(x - \frac{1}{4}\sin 4x)\,\Big|_0^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$= \frac{3\pi}{4} - \cos 2(\frac{3\pi}{4}) + \frac{1}{2}(\frac{3\pi}{4} - \frac{1}{4}\sin 4(\frac{3\pi}{4}))$$

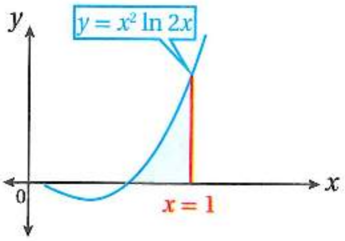
$$- (0 - \cos 0 + \frac{1}{2}(0 - \frac{1}{4}\sin 0)$$

$$= \frac{3\pi}{4} - 0 + \frac{3\pi}{8} + 0 - (-1 - 0)$$

$$= \frac{9\pi}{8} + 1$$

أجد مساحة المنطقة المظللة في كل من التمثيلين البيانيين الآتيين:

49



الحل:

$y = x^2 \ln 2x = 0$

$x = 0 \;,\quad \ln 2x = 0 \longrightarrow 2x = 1 \longrightarrow x = \frac{1}{2}$

$A = \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2 \ln 2x \, dx$

$u = \ln 2x \qquad\qquad dv = x^2$

$du = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x} \qquad\qquad v = \frac{x^3}{3}$

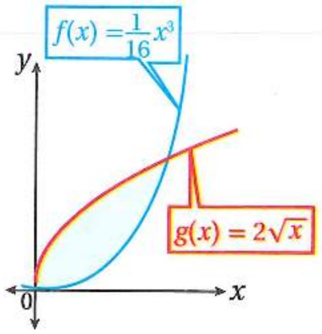
$= \frac{x^3}{3} \ln 2x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} \; dx \Big|_{\frac{1}{2}}^{1}$

$= \frac{x^3}{3} \ln 2x - \frac{x^3}{9} \Big|_{\frac{1}{2}}^{1}$

$= (\frac{1}{3} \ln 2 - \frac{1}{9}) - (\frac{1}{24} \ln 1 - \frac{1}{72})$

$= \frac{1}{3} \ln 2 - \frac{1}{9} + \frac{1}{72} = \frac{1}{3} \ln 2 - \frac{7}{72}$

50



الحل:

$\frac{1}{16} x^3 = 2\sqrt{x} \longrightarrow x = 0 \,, 4$

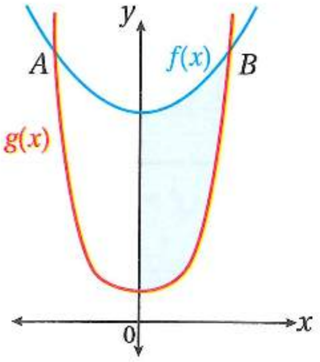
$A = \int_0^4 2\sqrt{x} - \frac{1}{16} x^3 \, dx$

$= 2 \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{1}{16} \frac{x^4}{4} \Big|_0^4$

$= \frac{4}{3}(4)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{64}(4)^4 - 0 = \frac{32}{3} - 4$

$= \frac{32 - 12}{3} = \frac{20}{3}$

يبين الشكل الآتي منحنيي الاقترانين $f(x) = x^2 + 14$، و $g(x) = x^4 + 2$



51 إذا كان منحنيا الاقترانين يتقاطعان في النقطة A والنقطة B فأجد إحداثيي نقطتي التقاطع.

الحل:

$f(x) = g(x)$

$x^2 + 14 = x^4 + 2$

$\longrightarrow x^4 - x^2 - 12 = 0$

$\longrightarrow (x^2 - 4)\,(x^2 + 3) = 0$

$x^2 + 3 \neq 0 \;,\; x^2 - 4 = 0 \longrightarrow x = 2 \,, -2$

$A = (2, 18) \quad B = (-2, 18)$

52 أجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المظللة حول المحور x

الحل:

$v = \pi \int_0^2 (x^2 + 14)^2 - (x^4 + 2)^2 \, dx$

$= \pi \int_0^2 x^4 + 28\,x^2 + 196 - x^8 - 4x^4 - 4 \, dx$

$= \pi \int_0^2 28\,x^2 - 3x^4 - x^8 + 192 \, dx$

$= \pi \,(\frac{28x^3}{3} - \frac{3x^5}{5} - \frac{x^9}{9} + 192\,x)\Big|_0^2$

$= \pi \,(\frac{224}{3} - \frac{96}{5} - \frac{512}{9} + 384)$

53 أجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = \sqrt{x\, e^{-x}}$ والمحور x والمستقيمين $x = 1$ و $x = 2$ حول المحور x

الحل:

$$v = \pi\int_1^2 (\sqrt{x\, e^{-x}})^2 = \pi\int_1^2 x\, e^{-x}\, dx$$

$u = x \qquad dv = e^{-x}\, dx$

$du = dx \qquad v = -e^{-x}$

$$= \pi\left(-x\, e^{-x} - \int -e^{-x}\, dx\right|_1^2$$

$$= \pi\left(-x\, e^{-x} - e^{-x}\right)\Big|_1^2$$

$$= \pi\,(-2\, e^{-2} - e^{-2}) - (-1\, e^{-1} - e^{-1})$$

$$= \pi\,(-3\, e^{-2} + 2\, e^{-1})$$

أحل كلاً من المعادلات التفاضلية الآتية:

54 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{y}}{x}$

الحل:

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{dx}{x} \longrightarrow y^{\frac{-1}{2}}\, dy = \frac{dx}{x}$$

$$\int y^{\frac{-1}{2}}\, dy = \int \frac{dx}{x} \longrightarrow 2y^{\frac{1}{2}} = \ln|x| + C$$

55 $\dfrac{dy}{dx} = x\, e^x \sec y$

الحل:

$$\frac{dy}{\sec y} = x\, e^x\, dx$$

$$\int \cos y\, dy = \int x\, e^x\, dx$$

$u = x \qquad dv = e^x$

$du = dx \qquad v = e^x$

$$\sin y = x\, e^x - \int e^x\, dx$$

$$\sin y = x\, e^x - e^x + C$$

56 $3y^2 \dfrac{dy}{dx} = 8x$

الحل:

$$3y^2\, dy = 8x\, dx$$

$$\int 3y^2\, dy = \int 8x\, dx \longrightarrow y^3 = 4x^2 + C$$

57 $x\dfrac{dy}{dx} = 3x\sqrt{y} + 4\sqrt{y}$

الحل:

$$x\frac{dy}{dx} = \sqrt{y}\,(3x + 4)$$

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{3x + 4}{x}\, dx$$

$$y^{\frac{-1}{2}}\, dy = (3 + \frac{4}{x})\, dx$$

$$\int y^{\frac{-1}{2}}\, dy = \int 3 + \frac{4}{x}\, dx$$

$$2y^{\frac{1}{2}} = 3x + 4\ln|x| + C$$

أجد الحل الخاص الذي يحقق الشرط الأولي المعطى لكل معادلة تفاضلية مما يأتي:

58 $\dfrac{dy}{dx} + 4\, y = 8 \quad ; y(0) = 3$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 8 - 4y \longrightarrow dy = (8 - 4y)\, dx$$

$$\int \frac{dy}{8 - 4y} = \int dx$$

$$\frac{-1}{4}\ln|8 - 4y| = x + C$$

$$y(0) = 3$$

$$\frac{-1}{4}\ln|4| = 0 + C \longrightarrow C = \frac{-1}{4}\ln 4$$

$$\frac{-1}{4}\ln|8 - 4y| = x - \frac{1}{4}\ln 4$$

59 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{5\, e^y}{(2x + 1)(x - 2)} \quad ; y(-3) = 0$

الحل:

$$\int \frac{dy}{e^y} = \int \frac{5}{(2x+1)(x-2)}\,dx$$

$$\frac{5}{(2x+1)(x-2)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x-2}$$

$$A(x-2) + B(2x+1) = 5$$

$$x = 2 :\ 5B = 5 \longrightarrow B = 1$$

$$x = -\frac{1}{2} :\ A(-\frac{5}{2}) = 5 \longrightarrow A = -2$$

$$= \int e^{-y}\,dy = \int \frac{-2}{2x+1} + \frac{1}{x-2}\,dx$$

$$-e^{-y} = \frac{-2}{2}\ln|2x+1| + \ln|x-2| + C$$

$$y(-3) = 0 \longrightarrow -e^{0} = -\ln 5 + \ln 5 + C$$

$$\longrightarrow -1 = C$$

$$-e^{-y} = -\ln|2x+1| + \ln|x-2| - 1$$

أسماك: يتغير عدد الأسماك في إحدى البحيرات بمعدل يمكن نمذجته بالمعادلة التفاضلية $\frac{dx}{dt} = 0.2x$ حيث x عدد الأسماك و t الزمن بالسنوات منذ هذه السنة

60 أحل المعادلة التفاضلية لإيجاد عدد الأسماك في البحيرة بعد t سنة علماً بأن عددها هذه السنة هو 300 سمكة

الحل:

$$\frac{dy}{dt} = 0.2\,x$$

$$\frac{dy}{x} = 0.2\,dt \quad \longrightarrow \int \frac{dy}{x} = \int 0.2\,dt$$

$$\ln x = 0.2t + C$$

$$x = 300\ ,\ t = 0$$

$$\ln 300 = 0 + C \ \longrightarrow\ C = \ln 300$$

$$\ln x = 0.2t + \ln 300$$

61 أجد عدد الأسماك في البحيرة بعد 5 سنوات

الحل:

$$t = 5$$

$$\ln x = 0.2\,(5) + \ln 300 = 1 + \ln 300$$

$$x = e^{1+\ln 300} = 300\,e$$

62 **تجارة:** يمثل الاقتران $p(x)$ سعر القطعة الواحدة بالدينار من منتج معين، حيث x عدد القطع المبيعة من المنتج بالمئات إذا كان $p'(x) = \frac{-300x}{\sqrt{(9+x^2)^3}}$ هو معدل التغير في سعر القطعة الواحدة من المنتج، فأجد $p(x)$ علماً بأن سعر القطعة الواحدة هو JD 75 عندما يكون عدد القطع المعيبة 400

الحل:

$$p'(x) = \frac{-300x}{\sqrt{(9+x^2)^3}}$$

$$p(x) = \int -300x\,(9+x^2)^{\frac{-3}{2}}\,dx$$

$$u = 9 + x^2 \quad \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$= \int -300x\,u^{\frac{-3}{2}} . \frac{du}{2x}$$

$$= -150 \times \frac{u^{\frac{-1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C = \frac{300}{u^{\frac{1}{2}}} + C$$

$$= \frac{300}{\sqrt{u}} + C = \frac{300}{\sqrt{9+x^2}} + C$$

لأن العدد بالمئات $x = 400 = 4$, $p = 75$

$$75 = \frac{300}{\sqrt{9+16}} + C$$

$$75 = \frac{300}{5} + C$$

$$75 = 60 + C \longrightarrow C = 15$$

$$p(x) = \frac{300}{\sqrt{9+x^2}} + 15$$

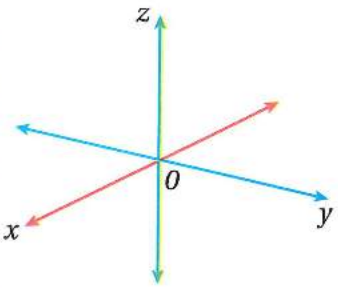
الوحـــدة الخامســـة

المتجهـــات

الدرس الأول

المتجهات في الفضاء

درسنا في العام الماضي تعيين نقطة في المستوى الإحداثي باستعمال المحور x والمحور y المتعامدين وفي هذه الوحدة سندرس تحديد النقطة بإضافة محور ثالث عمودي على كل من المحور x والمحور y يسمى المحور z عندئذ يحدد الثلاثي المرتب (x, y, z) موضع النقطة في الفضاء حيث ينتج ثلاثة مستويات هي المستوى xy والمستوى xz والمستوى yz وتقسم هذه المستويات إلى 8 أقسام يسمى كل منها بالثمن.



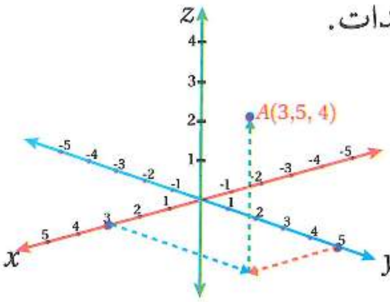
ولتحديد موقع النقطة $P(a, b, c)$ في نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد، أعين النقطة (a,b) في المستوى x, y ثم نتحرك إلى الأعلى أو الأسفل بموازاة المحور z تبعاً لقيمة الإحداثي z وإشارته.

مثال

عين النقطة $A(3 ,5 ,4)$ في المستوى.

الحل

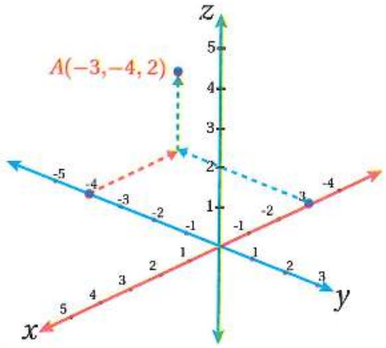
نعين الزوج $(3 ,5)$ في المستوى xy ثم نتحرك إلى الأعلى بمقدار 4 وحدات.



مثال

عين النقطة $A(-3 ,-4 ,2)$ في المستوى.

الحل

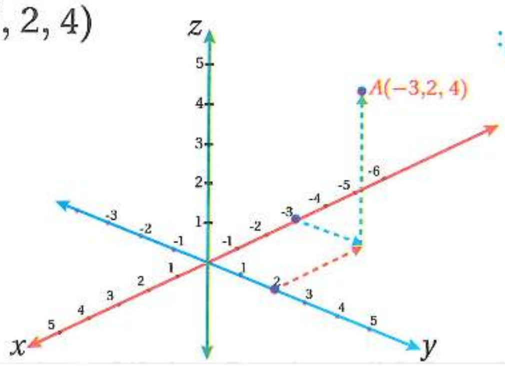


أتحقق من فهمي

صفحة (111) : أعين كلاً من النقاط الآتية في نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد:

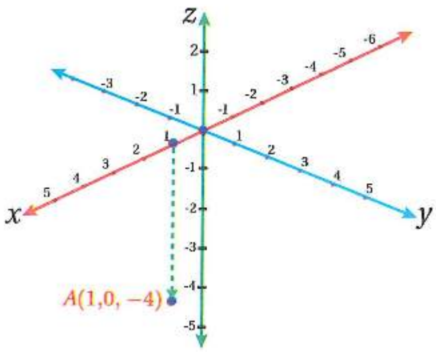
a) $(-3, 2, 4)$

الحل:



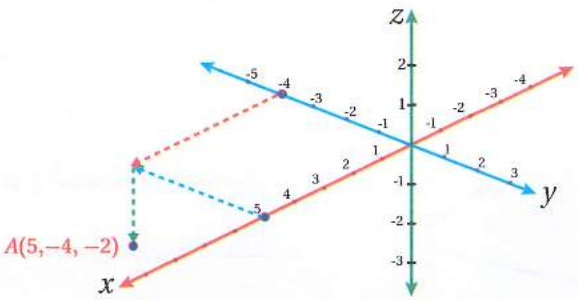
b) $(1, 0, -4)$

الحل:



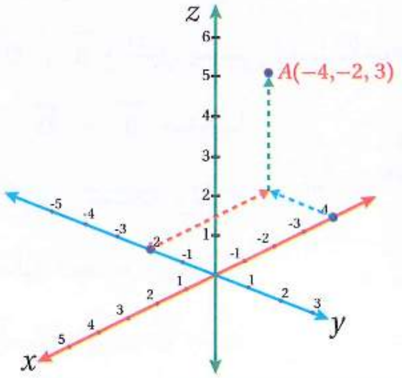
c) $(5, -4, -2)$

الحل:



d) $(-4, -2, 3)$

الحل:



المسافة بين نقطتين وإحداثيات نقطة المنتصف في الفضاء

مفهوم أساسي

إذا كانت $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ فإن المسافة بين النقطتين A و B هي:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

وإحداثيات نقطة منتصف $\overline{AB}$ هي:

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

مثال

إذا كانت $A(-1, -3, 6)$ ، $B(1, 5, -2)$ فجد

1) المسافة بين B, A

2) إحداثيات نقطة منتصف $\overline{AB}$

الحل

$$1)\ AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$= \sqrt{(1-(-1)^2 + (5-(-3)^2 + (-2-6)^2}$$

$$= \sqrt{4 + 64 + 64} = \sqrt{132}$$

$$2)\ M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{1 + -1}{2}, \frac{5 + -3}{2}, \frac{-2 + 6}{2}\right)$$

$$= (0, 1, 2)$$

أتحقَّق من فهمي

صفحة (113): إذا كانت $M(5, -3, 6)$ ، $N(2, 1, -6)$

فأجد كلاً مما يأتي:

a) المسافة بين N و M

b) إحداثيات نقطة منتصف $\overline{MN}$

الحل:

$$a)\ MN = \sqrt{(2-5)^2 + (1-(-3)^2 + (-6-6)^2}$$

$$= \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

$$b)\ M = \left(\frac{2 + 5}{2}, \frac{1 + -3}{2}, \frac{-6 + 6}{2}\right)$$

$$= (3.5, -1, 0)$$

المتجهات في الفضاء

إذا كانت $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ وكانت A نقطة بداية المتجهة B نقطة نهايته فإن المتجهة $\overline{AB}$ أو $\vec{v}$ يمكن كتابته بالصورة الإحداثية

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1 ,\ y_2 - y_1 ,\ z_2 - z_1 \rangle$$

$$= \langle v_1 , v_2 , v_3 \rangle$$

حيث v_1 , v_2 , v_3 عبارة عن مقدار الإزاحة بالنسبة للمحور x أو المحور y أو المحور z

ويكون مقدار المتجه

مقدار المتجه في الفضاء

$$|\vec{v}|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

وإذا كان: $\vec{v}=\overrightarrow{AB}=\langle v_1 , v_2 , v_3\rangle$ فإن:

$$|\vec{v}|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}$$

مثـــال

إذا كانت $B(4 ,3 ,8)$ ، $A(-2 ,1 ,5)$ أكتب المتجه $\overrightarrow{AB}$ بالصورة الإحداثية ثم جد مقداره

الحـــل

$$\overrightarrow{AB}=\langle x_2-x_1 , y_2-y_1 , z_2-z_1\rangle$$

$$=\langle 4-(-2)), 3-1 , 8-5\rangle=\langle 6 , 2, 3\rangle$$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}$$

$$=\sqrt{(6)^2+(2)^2+(3)^2}$$

$$=\sqrt{36+4+9}=\sqrt{49}=7$$

أتحقّق من فهمي

صفحة (114): إذا كان $B(-5 ,3 ,-2)$ ، $A(-1 ,5 ,3)$ فأكتب المتجه $\overrightarrow{AB}$ بالصورة الإحداثية ثم أجد مقداره

الحل:

$$\overrightarrow{AB}=\langle x_2-x_1 , y_2-y_1 , z_2-z_1\rangle$$

$$=\langle -5-(-1), 3-5 , -2-3\rangle$$

$$=\langle -4 , -2, -5\rangle$$

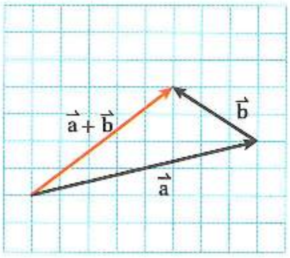
$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}$$

$$=\sqrt{(-4)^2+(-2)^2+(-5)^2}$$

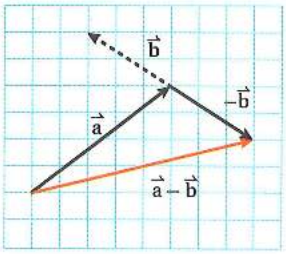
$$=\sqrt{16+4+25}=\sqrt{45}$$

جمع المتجهات وطرحها وضربها في عدد حقيقي هندسياً

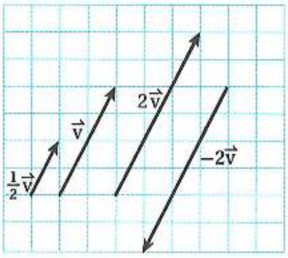
إن ناتج جمع المتجه $\vec{a}$ والمتجه $\vec{b}$ هندسياً باستعمال قاعدة المثلث، نرسم متجهاً من نقطة بداية $\vec{a}$ إلى نقطة نهاية $\vec{b}$ فينتج المتجه $\vec{a}+\vec{b}$ والذي يسمى أيضاً بالمحصلة.



ولإيجاد $\vec{a}-\vec{b}$ هندسياً نجد معكوس المتجه ونقوم بنفس عملية الجمع حيث: $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$

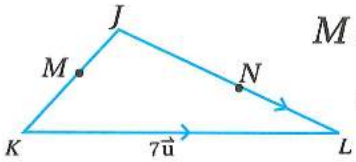


ويمكن تمثيل ضرب المتجه $\vec{v}$ بالعدد الحقيقي k برسم متجه موازٍ لـ $\vec{v}$ وطوله $|k|$ مرة طول $\vec{v}$ وله الاتجاه نفسه إذا كان $k>0$ وعكس اتجاه إذا كان $k<0$



مثـــال

في المثلث JKL إذا كانت M نقطة منتصف $\overline{JK}$ وكانت $JN : NL = 3 : 2$، وكانت $\overrightarrow{KL}=7\vec{u}$ ، وكانت $\overrightarrow{NL}=4\vec{b}$ ، فأكتب $\overrightarrow{JM}$ بدلالة $\vec{u}$ و $\vec{b}$



الحـــل

$$\overrightarrow{JN}=\frac{3}{2}\times\overrightarrow{NL}$$ تعريف التناسب

$$\overrightarrow{JN}=\frac{3}{2}\times 4\vec{b}=6\vec{b}$$ بتعويض $\overrightarrow{NL}=4\vec{b}$

قاعدة المثلث لجمع المتجهات $\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{JL} + \overrightarrow{LK}$

بالتعويض $= 6\vec{b} + 4\vec{b} - 7\vec{u}$

بالتبسيط $= 10\vec{b} - 7\vec{u}$

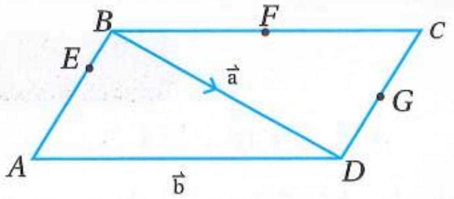
M منتصف $\overrightarrow{JK}$ $\overrightarrow{JM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JK}$

بالتعويض $= \frac{1}{2}(10\vec{b} - 7\vec{u})$

إذن: $\overrightarrow{JM} = 5\vec{b} - 3.5\vec{u}$

أتحقَّق من فهمي

صفحة (116): في المتوازي الأضلاع $ABCD$ إذا كانت F نقطة منتصف $\overline{BC}$ و G نقطة منتصف $\overline{DC}$ وكانت $\overrightarrow{BD} = \vec{a}$، وكانت $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$، وكانت $AE = 3EB$، فأكتب كلاً مما يأتي بدلالة $\vec{a}$ و $\vec{b}$



الحل:

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD} = \vec{b} - \vec{a}$

b) $\overrightarrow{EB}$

$$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AB}$$

$$3\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EB} = 4\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{EB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}(\vec{b} - \vec{a})$$

c) $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF}$

$$= \frac{1}{4}(\vec{b} - \vec{a}) + \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$= \frac{3}{4}\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{a}$$

جمع المتجهات وطرحها وضربها في عدد حقيقي

مفهوم أساسي

إذا كان $\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$، $\vec{w} = \langle w_1, w_2, w_3\rangle$

فإن:

$$\vec{v} + \vec{w} = \langle (v_1 + w_1), (v_2 + w_2), (v_3 + w_3)\rangle$$

$$\vec{v} - \vec{w} = \langle (v_1 - w_1), (v_2 - w_2), (v_3 - w_3)\rangle$$

$$c\vec{v} = \langle cv_1, cv_2, cv_3\rangle$$

مثال

إذا كانت $\vec{a} = \langle 5, 3, -4\rangle$, $\vec{b} = \langle -3, 2, 5\rangle$ فجد

1) $4\vec{a} + 3\vec{b}$

2) $3\vec{a} - 2\vec{b}$

الحل

1) $4\vec{a} + 3\vec{b} = 4\langle 5, 3, -4\rangle + 3\langle -3, 2, 5\rangle$

$$= \langle 20, 12, -16\rangle + \langle -9, 6, 15\rangle$$

$$= \langle 11, 18, -1\rangle$$

2) $3\vec{a} - 2\vec{b} = 3\langle 5, 3, -4\rangle - 2\langle -3, 2, 5\rangle$

$$= \langle 15, 9, -12\rangle + \langle 6, -4, -10\rangle$$

$$= \langle 21, 5, -22\rangle$$

أتحقَّق من فهمي

صفحة (117): إذا كان $\vec{w} = \langle 9, -2, -5\rangle$, $\vec{v} = \langle 3, 0, -5\rangle$, $\vec{u} = \langle 4, 5, -3\rangle$ فأجد كلاً مما يأتي:

a) $3\vec{v} - 4\vec{u}$

الحل:

$$3\vec{v} - 4\vec{u} = 3\langle 3, 0, -5\rangle - 4\langle 4, 5, -3\rangle$$

$$= \langle 9, 0, -15\rangle + \langle -16, -20, 12\rangle$$

$$= \langle -7, -20, -3\rangle$$

b) $3\vec{u} + 5\vec{v} - 2\vec{w}$

الحل:

$$= 3\langle 4, 5, -3\rangle + 5\langle 3, 0, -5\rangle - 2\langle 9, -2, -5\rangle$$
$$=\langle 12, 15, -9\rangle + \langle 15, 0, -25\rangle + \langle -18, 4, 10\rangle$$
$$=\langle 9, 19, -24\rangle$$

تساوي المتجهات

مفهوم أساسي

إذا كان $\vec{v} = \langle v_1 , v_2 , v_3\rangle$، $\vec{w} = \langle w_1, w_2 , w_3\rangle$

يكون: $\vec{w} = \vec{v}$ إذا وفقط إذا كان:

$$v_1 = w_1 ,\ v_2 = w_2 ,\ v_3 = w_3$$

مثال

إذا كان $\vec{v} =\langle a^2+1 ,7 ,2c-5\rangle$, $\vec{w}=\langle 10, b^3-1 ,3\rangle$

فجد a, b, c إذا كان $\vec{w} = \vec{v}$

الحل

$2c - 5 = 3$	$b^3 - 1 = 7$	$a^2 + 1 = 10$
$2c = 8$	$b^3 = 8$	$a^2 = 9$
$c = 4$	$b = 2$	$a = \pm 3$

أتحقّق من فهمي

صفحة (117) : إذا كان $\vec{v} =\langle 3q+ 8, 0 , 3r\rangle$,

$\vec{u} =\langle 20 ,2p - 5 ,-12\rangle$ وكان $\vec{u} = \vec{v}$ فأجد قيمة كل من r, q, p

الحل:

$3r = -12$	$2p-5 = 0$	$20= 3q + 8$
$r = -\frac{12}{3}$	$2p = 5$	$3q= 20-8=12$
$= -4$	$p = \frac{5}{2} = 2.5$	$q = \frac{12}{3} = 4$

متجها الموقع والإزاحة

يطلق على المتجه الذي يبدأ بنقطة الأصل وينتهي بالنقطة $A(x_1, y_1, z_1)$ اسم متجه الموقع للنقطة A ويستعمل الرمز $\overrightarrow{OA}$ للدلالة على متجه موقع النقطة A والصورة الإحداثية لهذا المتجه هي:

$$\overrightarrow{OA} = \langle x_1 , y_1 , z_1\rangle - \langle 0, 0. 0\rangle$$
$$= \langle x_1 , y_1 , z_1\rangle$$

والمتجه $\overrightarrow{AB}$ هو ناتج طرح متجه الموقع للنقطة A من متجه الموقع للنقطة B حيث

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

ومقدار متجه الإزاحة $\overrightarrow{AB}$ هو المسافة بين النقطة A والنقطة B وهي قيمة عددية غير متجهة.

مثال

إذا كان $A(3, -3,6)$ ، $B(4, 5, -3)$

1) جد متجه موقع كل من النقطة A والنقطة B

2) متجه الإزاحة من النقطة A إلى النقطة B

3) المسافة بين النقطة A والنقطة B

الحل

1) متجه موقع النقطة A هو $\overrightarrow{OA} = \langle 3, -3, 6\rangle$

متجه موقع النقطة B هو $\overrightarrow{OB} = \langle 4, 5, -3\rangle$

2) متجه الإزاحة $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$
$$= \langle 4, 5, -3\rangle - \langle 3, -3, 6\rangle = \langle 1, 8, -9\rangle$$

3) المسافة بين B , A

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(1)^2 + (8)^2 + (-9)^2}$$
$$= \sqrt{1 + 64 + 81} = \sqrt{146}$$

أتحقّق من فهمي

صفحة (119): إذا كانت

$A(-2, 8, 13), B(5, -7, -9), C(0, 1, -14)$

نقطاً في الفضاء فأجد كلاً مما يأتي:

a) متجه موقع كل من النقطة A و B و C

b) متجه الإزاحة من النقطة B إلى النقطة C

c) المسافة بين النقطة A و النقطة C

الحل:

a) $\overrightarrow{OA} = \langle -2, 8, 13\rangle$

$\overrightarrow{OB} = \langle 5, -7, -9\rangle$

$\overrightarrow{OC} = \langle 0, 1, -14\rangle$

b) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$

$= \langle 0, 1, -14\rangle - \langle 5, -7, -9\rangle = \langle -5, 8, -5\rangle$

c) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$

$= \langle 0, 1, -14\rangle - \langle -2, 8, 13\rangle = \langle 2, -7, -27\rangle$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(2)^2 + (-7)^2 + (-27)^2}$

$= \sqrt{4 + 49 + 729} = \sqrt{782}$

متجهات الوحدة الأساسية: $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$

حيث

$\hat{k} = \langle 0, 0, 1\rangle, \hat{j} = \langle 0, 1, 0\rangle, \hat{i} = \langle 1, 0, 0\rangle$

ويمكن كتابة أي متجه بدلالة متجهات الوحدة

مفهوم أساسي

يمكن كتابة المتجه $\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ بدلالة متجهات الوحدة الأساسية كما يأتي:

$\vec{v} = v_1\hat{i} + v_2\hat{j} + v_3\hat{k}$

مثال

أكتب المتجه: $\vec{v} = \langle -2, 5, 4\rangle$ بدلالة متجهات الوحدة الأساسية.

الحل

$\vec{v} = -2\hat{i} + 5\hat{j} + 4\hat{k}$

مثال

إذا كان $\vec{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}$ ، $\vec{B} = 2\hat{i} - 4\hat{j} + 7\hat{k}$ فجد $4\vec{A} - 3\vec{B}$

الحل

$4\vec{A} - 3\vec{B} = 4(3\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}) - 3(2\hat{i} - 4\hat{j} + 7\hat{k})$

$= (12\hat{i} + 8\hat{j} - 20\hat{k}) - (6\hat{i} - 12\hat{j} + 21\hat{k})$

$= 6\hat{i} - 20\hat{j} - 41\hat{k}$

أتحقّق من فهمي

صفحة (121) :أكتب كلاً من المتجهات الآتية بدلالة متجهات الوحدة الأساسية

a) $\vec{g} = \langle 9, 0, -4\rangle = 9\hat{i} + 0\hat{j} - 4\hat{k}$

b) $\overrightarrow{AB}$: $A(2, -1, 4), B(7, 6, -2)$

$= (5, 7, -6) = 5\hat{i} + 7\hat{j} - 6\hat{k}$

c) $4\vec{m} - 5\vec{f} : \vec{m} = -2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k},$

$\vec{f} = 3\hat{i} - 5\hat{j} + 6\hat{k}$

الحل:

$4\vec{m} - 5\vec{f} = 4(-2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k})$

$- 5(3\hat{i} - 5\hat{j} + 6\hat{k})$

$=(-8\hat{i} + 12\hat{j} - 16\hat{k}) - (15\hat{i} - 25\hat{j} + 30\hat{k})$

$= -23\hat{i} + 37\hat{j} - 46\hat{k}$

إيجاد متجه وحدة في اتجاه أي متجه

إذا كان c عدداً حقيقياً فإن:

$$|\overrightarrow{cv}| = |c||\vec{v}|$$

لذلك $$\left|\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\right| = \frac{1}{|\vec{v}|} \times |\vec{v}| = 1$$

يمكن إيجاد متجه وحدة في اتجاه أي متجه وذلك بقسمة ذلك المتجه على مقداره فيصبح مقدار المتجه الناتج وحدة واحدة.

مثال

إذا كان $B(3, -1, 7)$ ، $A(1, -2, 5)$ فأوجد متجه وحدة في اتجاه $\overrightarrow{AB}$

الحل

$$\overrightarrow{AB} = \langle 3-1, -1-(-2), 7-5\rangle$$

$$= \langle 2, 1, 2\rangle$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (2)^2}$$

$$= \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$$

متجه الوحدة $\vec{u}$

$$\vec{u} = \frac{1}{3}\langle 2, 1, 2\rangle = \langle \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\rangle$$

أتحقق من فهمي

صفحة (122): أجد متجه وحدة في اتجاه كل متجه مما يأتي:

a) $\vec{u} = \langle 4, -3, 5\rangle$

الحل:

$$|\vec{u}| = \sqrt{(4)^2 + (-3)^2 + (5)^2}$$

$$= \sqrt{16+9+25} = \sqrt{50}$$

متجه الوحدة

$$\frac{1}{\sqrt{50}}\langle 4, -3, 5\rangle = \langle \frac{4}{\sqrt{50}}, \frac{3}{\sqrt{50}}, \frac{5}{\sqrt{50}}\rangle$$

b) $\vec{v} = 8\hat{i} + 15\hat{j} - 17\hat{k}$

الحل:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(8)^2 + (15)^2 + (-17)^2}$$

$$= \sqrt{64+225+289} = \sqrt{578}$$

متجه الوحدة

$$\frac{1}{\sqrt{578}}\langle 8\hat{i} + 15\hat{j} - 17\hat{k}\rangle$$

$$= \frac{8}{\sqrt{578}}\hat{i} + \frac{15}{\sqrt{578}}\hat{j} - \frac{17}{\sqrt{578}}\hat{k}$$

c) $\overrightarrow{AB}$: $A(-1, 4, 6)$, $B(3, 3, 8)$

الحل:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A}$$

$$= \langle 3, 3, 8,\rangle - \langle -1, 4, 6\rangle = \langle 4, -1, 2\rangle$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{16+1+4} = \sqrt{21}$$

متجه الوحدة

$$\frac{1}{\sqrt{21}}\langle 4, -1, 2\rangle = \langle \frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{-1}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}}\rangle$$

مفهوم أساسي

يمكن كتابة المتجه $\vec{a}$ بصور مختلفة مثل:

$$\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$$

$$\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$$

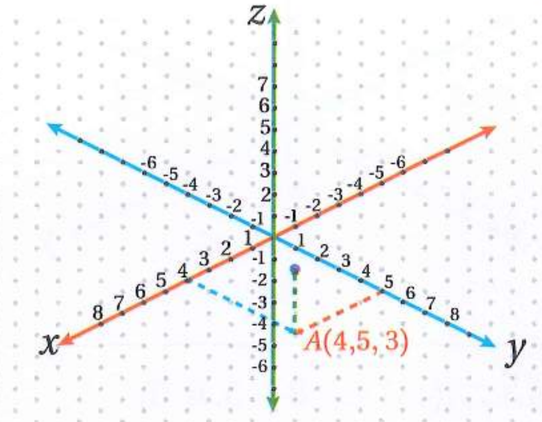
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

أتدرّب وأحلّ المسائل

أعين كلاً من النقاط الآتية في نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد:

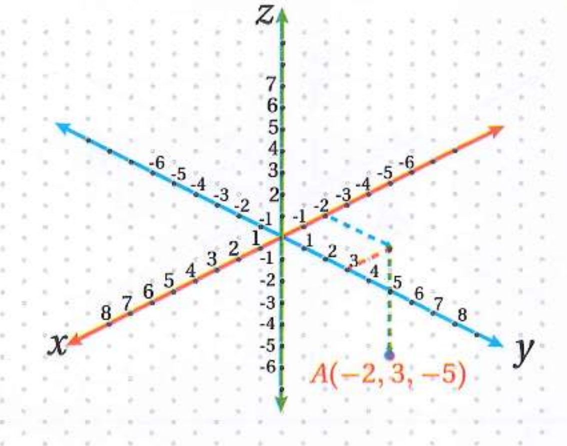
① $(4, 5, 3)$

الحل:



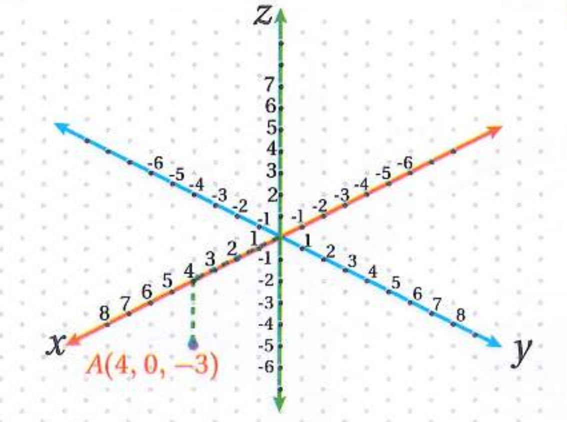
② $(-2, 3, -5)$

الحل:



③ $(4, 0, -3)$

الحل:



أجد الطول وإحداثيات نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة التي أعطي طرفاها في كل مما يأتي:

④ $(3, -2, 8), (5, 4, 2)$

الحل:

الطول $= \sqrt{(5-3)^2 + (4-(-2))^2 + (2-8)^2}$

$= \sqrt{4 + 36 + 36} = \sqrt{76}$

المنتصف $= (\frac{3+5}{2}, \frac{-2+4}{2}, \frac{8+2}{2})$

$= (4, 1, 5)$

⑤ $(-2, 7, 0), (2, -5, 3)$

الحل:

الطول $= \sqrt{(2-(-2))^2 + (-5-7)^2 + (3-0)^2}$

$= \sqrt{16 + 144 + 9} = \sqrt{169} = 13$

المنتصف $= (\frac{-2+2}{2}, \frac{7+-5}{2}, \frac{0+3}{2})$

$= (0, 1, \frac{3}{2})$

⑥ $(12, 8, -5), (-3, 6, 7)$

الحل:

الطول $= \sqrt{(-3-12)^2 + (6-8)^2 + (7-(-5))^2}$

$= \sqrt{225 + 4 + 144} = \sqrt{373}$

المنتصف $= (\frac{12+-3}{2}, \frac{8+6}{2}, \frac{-5+7}{2})$

$= (\frac{9}{2}, 7, 1)$

⑦ $(-5, -8, 4), (3, 2, -6)$

الحل:

الطول $= \sqrt{(3-(-5))^2 + (2-(-8))^2 + (-6-4)^2}$

$= \sqrt{64 + 100 + 100} = \sqrt{264}$

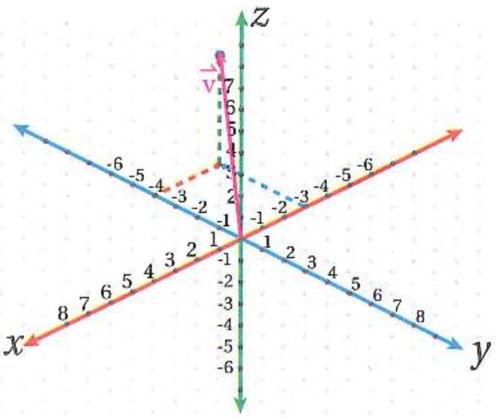
المنتصف $= (\frac{-5+3}{2}, \frac{-8+2}{2}, \frac{4+-6}{2})$

$= (-1, -3, -1)$

أمثل كل من المتجهات الآتية بيانياً في الفضاء:

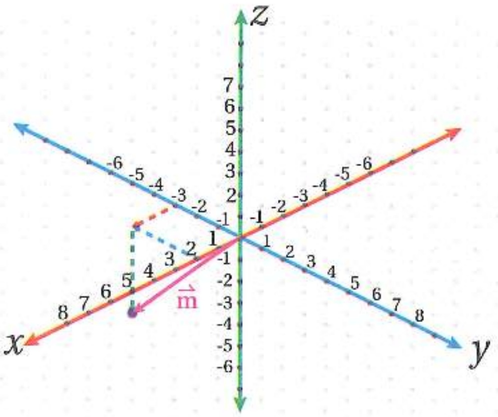
8 $\vec{v} = \langle -3, -4, 5\rangle$

الحل:



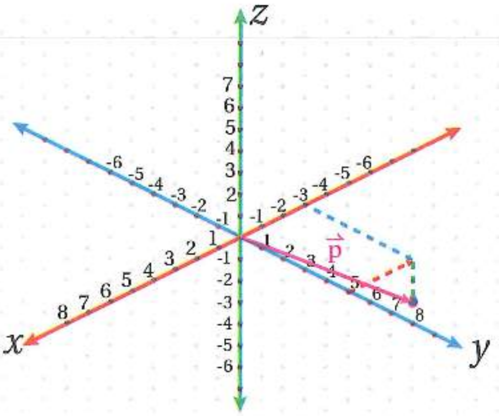
9 $\vec{m} = \langle 2, -3, -4\rangle$

الحل:



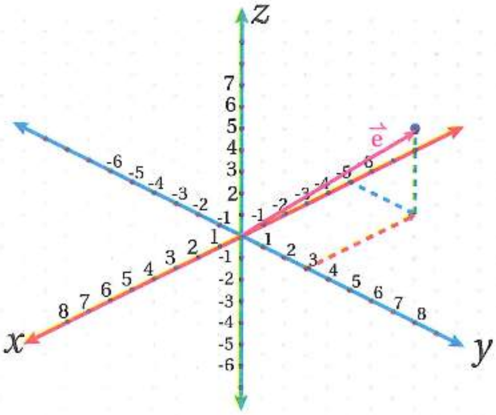
10 $\vec{p} = \langle -3, 5, -2\rangle$

الحل:



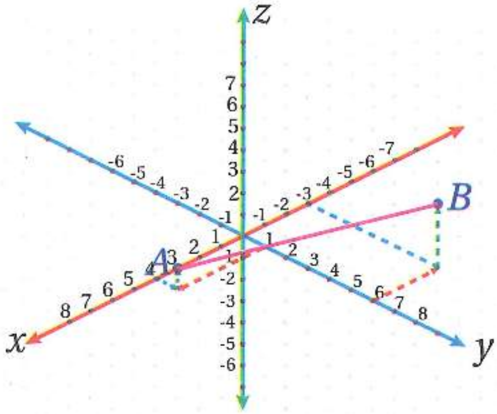
11 $\vec{e} = \langle -5\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}\rangle$

الحل:



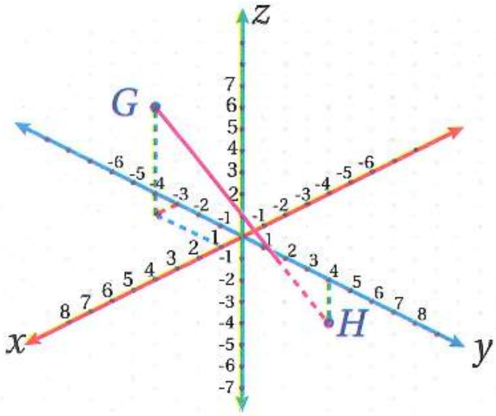
12 $\overrightarrow{AB} : A(4, 1, 1), B(-3, 6, 3)$

الحل:



13 $\overrightarrow{GH} : G(1, -3, 5), H(0, 4, -2)$

الحل:



أجد الصورة الإحداثية والمقدار للمتجه $\overrightarrow{AB}$ الذي أعطيت نقطة بدايته ونقطة نهايته في كل مما يأتي:

⑭ $A(4, 6, 9), B\,(-3, 2, 5)$

الحل:

$$\overrightarrow{AB} = (-3-4, 2-6, 5-9)$$
$$= (-7, -4, -4)$$
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{49+16+16} = \sqrt{81} = 9$$

⑮ $A(-8, 5, 7), B\,(6, 3, 2)$

الحل:

$$\overrightarrow{AB} = (6-(-8), 3-5, 2-7)$$
$$= (14, -2, -5)$$
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{196+4+25} = \sqrt{225} = 15$$

⑯ $A(12, -5, 4), B\,(4, 1, -1)$

الحل:

$$\overrightarrow{AB} = (4-12, 1-(-5), -1-4)$$
$$= (-8, 6, -5)$$
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{64+36+25} = \sqrt{125}$$

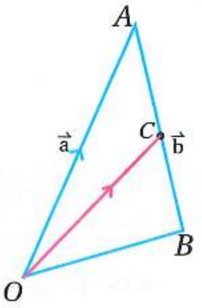
⑰ $A(24, -8, 10), B\,(10, 6, 3)$

الحل:

$$\overrightarrow{AB} = (10-24, 6-(-8), 3-10)$$
$$= (-14, 14, -7)$$
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{196+196+49} = \sqrt{441} = 21$$

⑱ إذا كان المثلث OAB مثلثاً فيه $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ و $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ والنقطة C هي منتصف $\overline{AB}$ فأكتب المتجه $\overrightarrow{OC}$ بدلالة $\vec{a}$ و $\vec{b}$

الحل:



$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$$
$$= \vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$
$$= \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$$
$$= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$$

إذا كان $\vec{f} = 5\hat{i} - 3\hat{j} + 7\hat{k}$, $\vec{g} = \langle -1, 8, -5\rangle$, $\vec{e} = \langle -3, 9, -4\rangle$ فأجد كلاً مما يأتي:

⑲ $3\vec{e} + 4\vec{f}$

الحل:

$$3\vec{e} + 4\vec{f} = 3\langle -3, 9, -4\rangle + 4\langle 5, -3, 7\rangle$$
$$= \langle -9, 27, -12\rangle + \langle 20, -12, 28\rangle$$
$$= \langle 11, 15, 16\rangle$$

⑳ $\vec{e} + \vec{f} - 3\vec{g}$

الحل:

$$= \langle -3, 9, -4\rangle + \langle 5, -3, 7\rangle - 3\langle -1, 8, -5\rangle$$
$$= \langle 2, 6, 3\rangle - \langle -3, 24, -15\rangle = \langle 5, -18, 18\rangle$$

㉑ $4\vec{e} - 2\vec{f} + 3\vec{g}$

الحل:

$$= 4\langle -3, 9, -4\rangle - 2\langle 5, -3, 7\rangle + 3\langle -1, 8, -5\rangle$$
$$= \langle -12, 36, -16\rangle - \langle 10, -6, 14\rangle + \langle -3, 24, -15\rangle$$
$$= \langle -25, 66, -45\rangle$$

㉒ $2\vec{e} + 7\vec{f} - 2\vec{g}$

الحل:

$$= 2\langle -3, 9, -4\rangle + 7\langle 5, -3, 7\rangle - 2\langle -1, 8, -5\rangle$$
$$= \langle -6, 18, -8\rangle + \langle 35, -21, 49\rangle - \langle -2, 16, -10\rangle$$
$$= \langle 31, -19, 51\rangle$$

إذا كان $A(-1, 6, 5)$ ، $B(0, 1, -4)$ ، $C(2, 1, 1)$ فأجد كلاً مما يأتي:

㉓ متجه موقع كل من النقاط: A و B و C

الحل:

متجه موقع النقطة A هو $\overrightarrow{OA} = \langle -1, 6, 5\rangle$

متجه موقع النقطة B هو $\overrightarrow{OB} = \langle 0, 1, -4\rangle$

متجه موقع النقطة C هو $\overrightarrow{OC} = \langle 2, 1, 1\rangle$

㉔ متجه الإزاحة من النقطة B إلى النقطة A

الحل:

$$\overrightarrow{BA} = \langle -1-0, 6-1, 5-(-4)\rangle = \langle -1, 5, 9\rangle$$

㉕ متجه الإزاحة من النقطة C إلى النقطة B

الحل:

$$\overrightarrow{CB} = \langle 0-2,\ 1-1,\ -4-1\rangle = \langle -2, 0, -5\rangle$$

㉖ المسافة بين النقطة C والنقطة B

الحل:

$$|\overrightarrow{CB}| = \sqrt{(-2)^2+(0)^2+(-5)^2}$$

$$= \sqrt{4+0+25} = \sqrt{29}$$

أكتب كلاً من المتجهات الآتية بدلالة متجهات الوحدة الأساسية:

㉗ $\vec{g} = \langle 5, 7, -1\rangle = 5\hat{i} + 7\hat{j} - \hat{k}$

㉘ $\overrightarrow{ST} : S(1, 0, -5),\ T(2, -2, 0)$

الحل:

$$\overrightarrow{ST} = (2, -2, 0) - (1, 0, -5) = (1, -2, 5)$$

$$= 1\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}$$

㉙ $-\vec{a} + 3\vec{b} : \vec{a} = 1\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k},$

$\vec{b} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$

الحل:

$$-\vec{a} + 3\vec{b} =$$

$$-(1\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}) + 3(4\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k})$$

$$= (-1\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}) + (12\hat{i} - 9\hat{j} + 15\hat{k})$$

$$= 11\hat{i} - 11\hat{j} + 19\hat{k}$$

أجد متجه وحدة في اتجاه كل متجه مما يأتي:

㉚ $-4\hat{i} + 3\hat{j}$

الحل:

$$\sqrt{(-4)^2+(3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

متجه الوحدة

$$= \frac{1}{5}(-4\hat{i} + 3\hat{j}) = -\frac{4}{5}\hat{i} + \frac{3}{5}\hat{j}$$

㉛ $143\hat{i} - 24\hat{j}$

الحل:

$$\sqrt{(143)^2+(-24)^2} = \sqrt{20449 + 576}$$

$$= \sqrt{21025} = 145$$

متجه الوحدة

$$= \frac{1}{145}(143\hat{i} - 24\hat{j}) = \frac{143}{145}\hat{i} - \frac{24}{145}\hat{j}$$

㉜ $-72\hat{i} + 33\hat{j} + 56\hat{k}$

الحل:

$$= \sqrt{(-72)^2+(33)^2+(56)^2}$$

$$= \sqrt{5184 + 1089 + 3136} = \sqrt{9409} = 97$$

متجه الوحدة

$$= \frac{1}{97}(-72\hat{i} + 33\hat{j} + 56\hat{k})$$

$$= \frac{-72}{97}\hat{i} + \frac{33}{97}\hat{j} + \frac{56}{97}\hat{k}$$

㉝ $\begin{pmatrix} 11 \\ 13 \\ 8 \end{pmatrix} = \langle 11, 13, 8\rangle$

$$= \sqrt{(11)^2+(13)^2+(8)^2}$$

$$= \sqrt{121 + 169 + 64} = \sqrt{354}$$

متجه الوحدة

$$\frac{1}{\sqrt{354}}\langle 11\hat{i} + 13\hat{j} - 8\hat{k}\rangle$$

$$= \frac{11}{\sqrt{354}}\hat{i} + \frac{13}{\sqrt{354}}\hat{j} + \frac{8}{\sqrt{354}}\hat{k}$$

㉞ $\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \langle 5, -4, -2\rangle$

$$= \sqrt{(5)^2+(-4)^2+(-2)^2}$$

$$= \sqrt{25 + 16 + 4} = \sqrt{45}$$

متجه الوحدة

$$\frac{1}{\sqrt{45}}\langle 5, -4, -2\rangle = \frac{5}{\sqrt{45}}\hat{i} - \frac{4}{\sqrt{45}}\hat{j} - \frac{2}{\sqrt{45}}\hat{k}$$

35 $\vec{n} = \langle -2, 0, 3 \rangle$

الحل:

$$|\vec{n}| = \sqrt{(-2)^2 + (0)^2 + (3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

متجه الوحدة

$$\frac{1}{\sqrt{13}}\langle -2, 0, 3 \rangle = \left\langle \frac{-2}{\sqrt{13}}, 0, \frac{3}{\sqrt{13}} \right\rangle$$

---

36 إذا كان $\vec{b} = 7\hat{i} + 39\hat{j} - 2\hat{k}$ ،

وكان $\vec{a} = -3\hat{i} + 4\hat{j} + 12\hat{k}$

فأوجد قيمة c إذا كان $3\vec{a} + c\vec{b} = -23\hat{i} - 66\hat{j} + 40\hat{k}$

الحل:

$$3\vec{a} + c\vec{b} = 3(-3\hat{i} + 4\hat{j} + 12\hat{k}) + c(7\hat{i} + 39\hat{j} - 2\hat{k})$$

$$= (-9\hat{i} + 12\hat{j} + 36\hat{k}) + (7c\hat{i} + 39c\hat{j} - 2c\hat{k})$$

$$= (-23\hat{i} - 66\hat{j} + 40\hat{k})$$

$$-9 + 7c = -23 \longrightarrow 7c = -23 + 9 = -14$$

$$\longrightarrow c = -2$$

$$\text{or: } 12 + 39c = -66 \longrightarrow 39c = -66 - 12$$

$$\longrightarrow -78 = 39c \longrightarrow c = -2$$

---

37 إذا كان $\vec{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ w + 47 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{t} = \begin{pmatrix} 3 \\ v \\ 2 \end{pmatrix}$

وكان $k\vec{s} - 4\vec{t} = \begin{pmatrix} 6 \\ 31 \\ w \end{pmatrix}$ فأوجد قيمة كل من k, w, v

الحل:

$$k\vec{s} - 4\vec{t} = k\begin{pmatrix} 2 \\ w + 47 \\ -4 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 3 \\ v \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2k \\ wk + 47k \\ -4k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ 4v \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 31 \\ w \end{pmatrix}$$

$$2k - 12 = 6 \longrightarrow 2k = 18 \longrightarrow k = 9$$

$$-4k - 8 = w \longrightarrow -36 - 8 = w$$

$$\longrightarrow w = -44$$

$$wk + 47k - 4v = 31$$

$$(-44)(9) + 47(9) - 31 = 4v$$

$$-396 + 423 - 31 = 4v$$

$$-4 = 4v \longrightarrow v = \frac{-4}{4} = -1$$

---

38 إذا كان $5\vec{m} + 2\vec{p} = 4\vec{n}$ ،

$\vec{m} = \langle 4, 1, -2 \rangle, \vec{n} = \langle 6, 2, -3 \rangle, \vec{p} = \langle 2, a, -1 \rangle$

فما قيمة الثابت a

الحل:

$$5\vec{m} + 2\vec{p} = 4\vec{n}$$

$$5\langle 4, 1, -2 \rangle + 2\langle 2, a, -1 \rangle = 4\langle 6, 2, -3 \rangle$$

$$\langle 20, 5, -10 \rangle + \langle 4, 2a, -2 \rangle = \langle 24, 8, -12 \rangle$$

$$\langle 24, 5 + 2a, -12 \rangle = \langle 24, 8, -12 \rangle$$

$$5 + 2a = 8 \longrightarrow 2a = 3 \longrightarrow a = \frac{3}{2}$$

---

39 إذا كان $\vec{v} = \langle u - 3, u + 1, u - 2 \rangle$ ،

وكان $|\vec{v}| = 17$ فما قيمة u

الحل:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(u-3)^2 + (u+1)^2 + (u-2)^2}$$

$$= \sqrt{u^2 - 6u + 9 + u^2 + 2u + 1 + u^2 - 4u + 4}$$

$$= \sqrt{3u^2 + -8u + 14} = 17$$

$$\longrightarrow 3u^2 + -8u + 14 = 289$$

$$3u^2 + -8u - 275 = 0$$

$$(3u + 25)(u - 11) = 0$$

$$\longrightarrow u = \frac{-25}{3}, u = 11$$

40 إذا كان متجها الموقع للنقطة G والنقطة H هما $\vec{h}=\langle c-1, -4, c+2\rangle$ و $\vec{g}=\langle -2, c+1, -8\rangle$ على الترتيب فأجد قيمة c علماً بأن $|\overrightarrow{GH}|=19$ وأن: $c>0$

الحل:

$\overrightarrow{GH}=\langle -2-(c-1), c+1-(-4), -8-(c+2)\rangle$

$=\langle -1-c, c+5, -10-c\rangle$

$|\overrightarrow{GH}|=\sqrt{(-1-c)^2+(c+5)^2+(-10-c)^2}$

$=\sqrt{1+2c+c^2+c^2+10c+25+100+20c+c^2}$

$=\sqrt{3c^2+32c+126}=19$

$3c^2+32c+126=361$

$3c^2+32c-235=0$

$(3c+47)(c-5)=0 \longrightarrow c=\frac{-47}{3}, c=5$

لتكن $c=5$

---

41 **أكتشف الخطأ:** قالت حنان: إذا كانت النقطة $A(7, -3, 3)$ تقع على كرة مركزها نقطة الأصل، فإن النقطة $B(2, -8, -1)$ تقع خارج هذه الكرة. في حين قالت هديل: النقطة B تقع داخل هذه الكرة أي القولين صحيح مبرراً إجابتي

الحل:

$r=OA=\sqrt{(7)^2+(-3)^2+(3)^2}$

$=\sqrt{49+9+9}=\sqrt{67}$

$OB=\sqrt{(2)^2+(-8)^2+(-1)^2}$

$=\sqrt{4+64+1}=\sqrt{69}$

$OB>OA$

النقطة B تقع خارج الكرة

---

42 تبرير: إذا وقعت النقطة $J(-4, 6, -1)$ والنقطة $K(-2, 2, 17)$ على طرفي أحد أقطار كرة، فأبين أن النقطة $L(2, 10, 3)$ والنقطة $J(4, -2, 7)$ تقعان على سطح تلك الكرة مبرراً إجابتي

الحل:

$O=\left(\frac{-2+-4}{2}, \frac{2+6}{2}, \frac{17+-1}{2}\right)$ مركز الكرة

$=(-3, 4, 8)$

نصف القطر $OK=\sqrt{(-2-(-3))^2+(2-4)^2+(17-8)^2}$

$=\sqrt{1+4+81}=\sqrt{86}$

$|\overrightarrow{OL}|=\sqrt{(2-(-3))^2+(10-4)^2+(3-8)^2}$

$=\sqrt{25+36+25}=\sqrt{86}=OK=r$

$|\overrightarrow{OJ}|=\sqrt{(4-(-3))^2+(-2-4)^2+(7-8)^2}$

$=\sqrt{49+36+1}=\sqrt{86}=r$

فتكون J, L تقعان على سطح الكرة

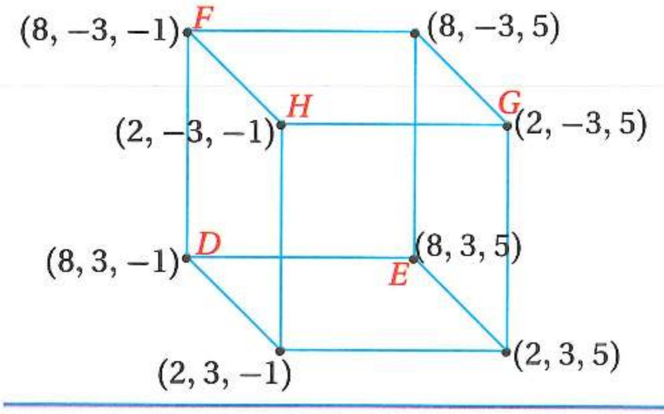
---

43 تبرير: تمثل النقاط $B(2, 3, 5)$ و $C(8, -3, 5)$ و $A(2, 3, -1)$ ثلاثة من رؤوس مكعب خشبي، كل وجهين من أوجهه يوازيان أحد المستويات xy, xz, yz أكتب إحداثيات الرؤوس الخمسة الأخرى مبرراً إجابتي

الحل:

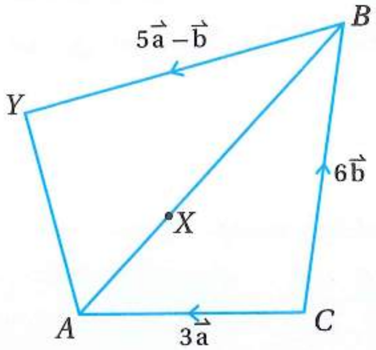
بعمل إزاحة 6 وحدات لأن طول ضلع المكعب 6 فنقوم بعمل إزاحة مقدارها 6 في الاتجاه المطلوب.

ومن الرسم :



---

42 **تحدٍ:** في الشكل إذا كان $\overrightarrow{CA}=3\vec{a}$، $\overrightarrow{BY}=5\vec{a}-\vec{b}$ و $\overrightarrow{CB}=6\vec{b}$ وكانت X تقع على $\overrightarrow{AB}$، حيث $\overrightarrow{CX}=\frac{2}{5}\overrightarrow{CY}$ فأثبت أن $AX : XB = 1 : 2$



الحل:

$$\frac{AX}{XB} = \frac{1}{2}$$

$$XB = 2AX$$

$$AB = 3AX$$

$$\longrightarrow \mathrm{AX} = \frac{1}{3}\mathrm{AB}$$

$$\overrightarrow{AX} = \frac{1}{3}(6\vec{b} - 3\vec{a}) = (2\vec{b} - \vec{a})$$

$$\overrightarrow{CY} = 6\vec{b} + 5\vec{a} - \vec{b}$$

$$= 5\vec{a} + 5\vec{b} = 5(\vec{a} + \vec{b}) \longrightarrow \vec{a} + \vec{b} = \frac{1}{5}\overrightarrow{CY}$$

$$\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AX}$$

$$= 3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{a} = 2\vec{a} + 2\vec{b}$$

$$= 2(\vec{a} + \vec{b})$$

فيكون $\overrightarrow{CX} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CY}$

تحدٍ: إذا كانت متجهات الموقع للنقاط M,L,N هي:

$\vec{m} = -3\hat{i} - 6\hat{j} + \hat{k}, \vec{l} = 4\hat{i} - 10\hat{j} + 3\hat{k}, \vec{n} = 5\hat{i} + 3\hat{j} - 9\hat{k}$

فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً

㊺ أثبت أن المثلث LMN قائم الزاوية

الحل:

$$\vec{m} = -3\hat{i} - 6\hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{l} = 4\hat{i} - 10\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\vec{n} = 5\hat{i} + 3\hat{j} - 9\hat{k}$$

$$|\overrightarrow{ML}| = \sqrt{(4-(-3)^2 + (-10-(-6))^2 + (3-1)^2}$$

$$= \sqrt{49 + 16 + 4} = \sqrt{69}$$

$$|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{(5-(-3)^2 + (3-(-6))^2 + (-9-1)^2}$$

$$= \sqrt{64 + 81 + 100} = \sqrt{245}$$

$$|\overrightarrow{LN}| = \sqrt{(5-4)^2 + (3-(-10))^2 + (-9-3)^2}$$

$$= \sqrt{1 + 169 + 144} = \sqrt{314}$$

$$|\overrightarrow{ML}|^2 + |\overrightarrow{MN}|^2 = 69 + 245 = 314$$

$$|\overrightarrow{LN}|^2 = 314$$

لأن $|\overrightarrow{LN}|^2 = |\overrightarrow{ML}|^2 + |\overrightarrow{MN}|^2$

المثلث LMN قائم الزاوية في M

㊻ أجد مساحة المثلث LMN

الحل:

مساحة المثلث $= \frac{1}{2} \times |\overrightarrow{ML}| \times |\overrightarrow{MN}|$

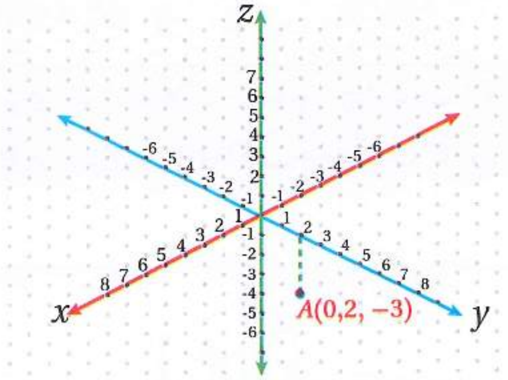
$$= \frac{1}{2}(\sqrt{69})(\sqrt{245}) = \frac{\sqrt{16905}}{2}$$

كتاب التمارين ص 9

أعين كلاً من النقاط الآتية في نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد:

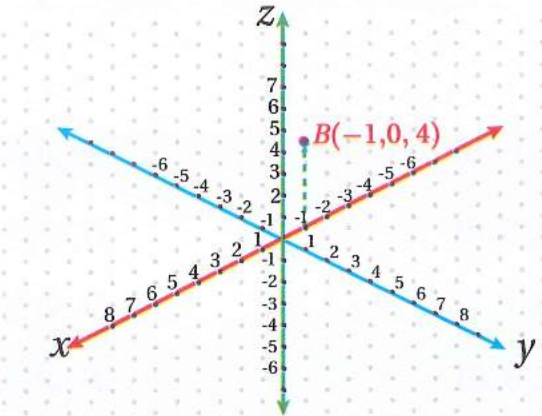
① $A(0, 2, -3)$

الحل:



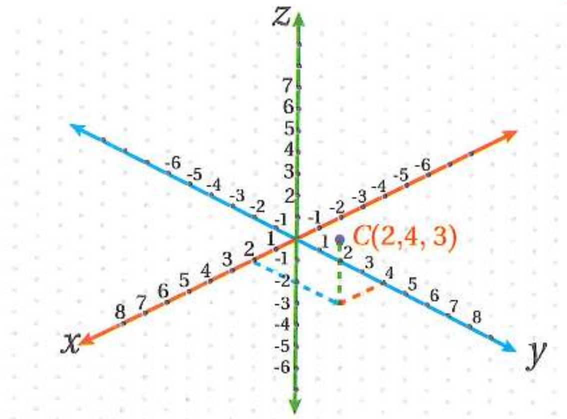
② $B(-1, 0, 4)$

الحل:



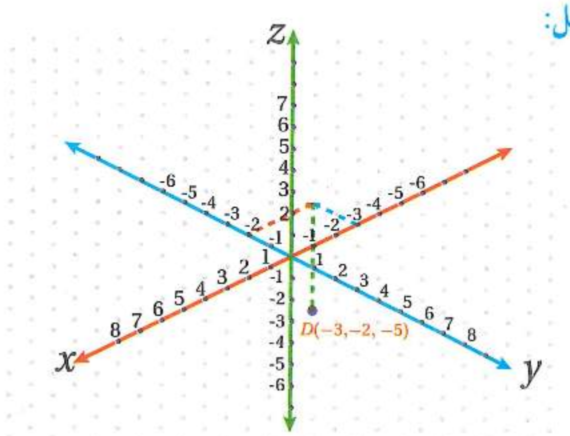
③ $C(2, 4, 3)$

الحل:

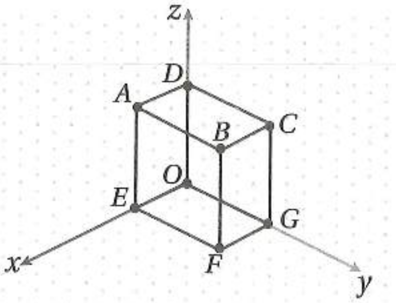


④ $D(-3, -2, -5)$

الحل:



في متوازي المستطيلات المجاور إذا كانت إحداثيات الرأس B هي: (6 ,5 ,3) فاكتب إحداثيات كل مما يأتي:



⑤ الرأس A — $A: (3, 0, 6)$

⑥ الرأس C — $C: (0, 5, 6)$

⑦ الرأس D — $D: (0, 0, 6)$

⑧ الرأس F — $F: (3, 5, 0)$

⑨ مركز متوازي المستطيلات $ABCDEFGO$

الحل:

المركز نأخذ منتصف $\overrightarrow{BO}$ مثلاً

$$B(3, 5, 6)\ ,\ O(0, 0, 0)$$

$$=\left(\frac{3+0}{2}, \frac{5+0}{2}, \frac{0+6}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 3\right) \quad \text{المركز}$$

أكتب الصورة الإحداثية لكل من المتجهات الآتية، ثم أجد مقدار كل منها:

⑩ $\overrightarrow{AB}$ حيث: $A(-2, 5, 0)\ ,\ B(4, 9, -3)$

الحل:

$$\overrightarrow{AB} = (4-(-2), 9-5, -3-0) = (6, 4, -3)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{36+16+9} = \sqrt{61}$$

⑪ $\overrightarrow{EF}$ حيث: $E(3, 4, 6)\ ,\ F(6, 8, -6)$

الحل:

$$\overrightarrow{EF} = (6-3\ , 8-4, -6-6) = (3, 4, -12)$$

$$|\overrightarrow{EF}| = \sqrt{9+16+144} = \sqrt{169} = 13$$

⑫ $\overrightarrow{GH}$ حيث: $H(10, 7, 8)\ ,\ G(-2, 3, 2)$

الحل:

$$\overrightarrow{GH} = (10-(-2), 7-3, 8-2) = (12, 4, 6)$$

$$|\overrightarrow{EF}| = \sqrt{144+16+36} = \sqrt{196} = 14$$

أجد متجه وحدة في اتجاه كل متجه مما يأتي:

⑬ $\overrightarrow{AC} = 8\hat{i} + 5\hat{j} - 3\sqrt{5}\,\hat{k}$

الحل:

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(8)^2 + (5)^2 + (3\sqrt{5})^2}$$

$$= \sqrt{64+25+45} = \sqrt{134}$$

متجه الوحدة

$$= \frac{8}{\sqrt{134}}\hat{i} + \frac{5}{\sqrt{134}}\hat{j} - \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{134}}\hat{k}$$

⑭ $\vec{v} = \langle -5, 4, 20 \rangle$

الحل:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(5)^2 + (4)^2 + (20)^2}$$

$$= \sqrt{25 + 16 + 400} = \sqrt{441} = 21$$

$$= \left(\frac{-5}{21}, \frac{4}{21}, \frac{20}{21}\right)$$ متجه الوحدة

---

⑮ أجد متجهاً له نفس اتجاه المتجه :

$\vec{v} = 4\hat{i} - 12\hat{j} + 3\hat{k}$ ومقداره 52

الحل:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(4)^2 + (12)^2 + (3)^2} = \sqrt{169} = 13$$

$$|\overrightarrow{CV}| = C(13) = 52 \longrightarrow C = 4$$

$$\overrightarrow{CV} = 4(4\hat{i} - 12\hat{j} + 3\hat{k})$$

$$= 16\hat{i} - 48\hat{j} + 12\hat{k}$$

إذا كان: $\vec{v} = \langle -4, 3, -6 \rangle$ ، $\vec{u} = 3\hat{i} + 5\hat{j} - 7\hat{k}$

فأجد قيمة كلاً مما يأتي:

⑯ $2\vec{u} + 4\vec{v}$

الحل:

$$2\vec{u} + 4\vec{v} = 2\langle 3, 5, -7 \rangle + 4\langle -4, 3, -6 \rangle$$

$$= \langle 6, 10, -14 \rangle + \langle -16, 12, -24 \rangle$$

$$= \langle -10, 22, -38 \rangle$$

---

⑰ $3\vec{u} - 2\vec{v}$

الحل:

$$3\vec{u} - 2\vec{v} = 3\langle 3, 5, -7 \rangle - 2\langle -4, 3, -6 \rangle$$

$$= \langle 9, 15, -21 \rangle - \langle -8, 6, -12 \rangle$$

$$= \langle 17, 9, -9 \rangle$$

---

⑱ أجد قيمة كل من الأعداد الحقيقية: a، و b، و c

التي تحقق المعادلة الآتية: $a\vec{u} + 5\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ b \\ c \end{pmatrix}$

الحل:

$$a\langle 3, 5, -7 \rangle + 5\langle -4, 3, -6 \rangle = \langle -2, b, c \rangle$$

$$= \langle 3a - 20, 5a + 15, -7a - 30 \rangle = \langle -2, b, c \rangle$$

$$3a - 20 = -2 \longrightarrow 3a = 18 \longrightarrow a = 6$$

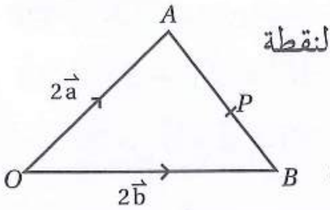
$$5a + 15 = b \longrightarrow 30 + 15 = b \longrightarrow b = 45$$

$$-7a - 30 = c$$

$$-42 - 30 = c \longrightarrow c = -72$$

---

⑲ في المثلث OAB تقع النقطة P على الضلع AB حيث $AP : PB = 5 : 3$، إذا كان $\overrightarrow{OP} = k(3\vec{a} + 5\vec{b})$ ، فما قيمة العدد الحقيقي k



الحل:

$$\overrightarrow{AB} = 2\vec{b} - 2\vec{a}$$

$$\frac{AB}{PB} = \frac{5}{3}$$

$$5 + 3 = 8$$

$$\overrightarrow{PB} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{8}(2\vec{b} - 2\vec{a})$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{Bb}$$

$$= 2\vec{b} - \frac{3}{8}(2\vec{b} - 2\vec{a})$$

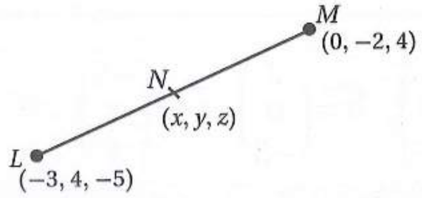
$$= 2\vec{b} - \frac{3}{4}\vec{b} + \frac{3}{4}\vec{a} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{5}{4}\vec{b}$$

$$= \frac{1}{4}(3\vec{a} + 5\vec{b}) \longrightarrow k = \frac{1}{4}$$

---

⑳ متجها الموقع للنقطة L والنقطة M هما: $\langle -3, 4, -5 \rangle$ و $\langle 0, -2, 4 \rangle$ على الترتيب. أجد متجه الموقع للنقطة N التي تقع على $\overline{LM}$ ، علماً بأن: $\overrightarrow{LN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NM}$

الحل:



$$\overrightarrow{LN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{NM}$$

$$= \frac{1}{3}(3, -6, 9)$$

$$= (1, -2, 3)$$

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{LN}$$

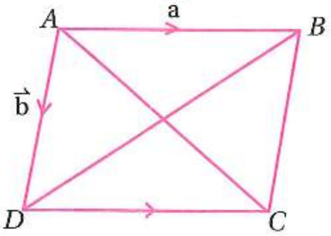
$$= (-3, 4, -5) + (1, -2, 3)$$

$$= (-2, 2, -2)$$

㉑ $ABCD$ متوازي أضلاع فيه: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$، و $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$

$\overrightarrow{AC} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ و $\overrightarrow{BD} = -6\hat{i} + 7\hat{j} + 2\hat{k}$

أجد كلاً من $\vec{b}$ و $\vec{a}$ بدلالة متجهات الوحدة الأساسية.



الحل:

$$\overrightarrow{AC} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k} = \langle 2, 3, 4\rangle$$

$$\overrightarrow{BD} = -6\hat{i} + 7\hat{j} + 2\hat{k} = \langle -6, 7, 2\rangle$$

$$\overrightarrow{BD} = \vec{b} - \vec{a}$$

$$\overrightarrow{AC} = \vec{b} + \vec{a}$$

$2\vec{b} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}$ بالجمع $\longrightarrow \vec{b} = \dfrac{\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}}{2}$

$$= \left(\frac{2 + -6}{2}, \frac{3 + 7}{2}, \frac{4 + 2}{2}\right) = (-2, 5, 3)$$

$$= -2\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$2\vec{a} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} \longrightarrow \vec{a} = \frac{\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}}{2}$$

$$= \left(\frac{2 - (-6)}{2}, \frac{3 - 7}{2}, \frac{4 - 2}{2}\right) = (4, -2, 1)$$

$$= 4\hat{i} + -2\hat{j} + 1\hat{k}$$

㉒ إذا كان $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \ \vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

فأجد الأعداد الحقيقية p,q,r التي تحقق المعادلة الآتية:

$$p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c} = \begin{pmatrix} 28 \\ -12 \\ -5 \end{pmatrix}$$

الحل:

$$p(0) + q(0) + r(3) = -12$$

$$3r = -12 \longrightarrow r = -4$$

$$p(1) + q(2) + 20 = 28 \longrightarrow \boxed{p + 2q = 8}$$

$$p(4) + q(-3) + -4 = -5$$

$$4p - 3q = -1 \qquad 2$$

$$p + 2q = 8 \qquad 3$$

$$8p - 6q = -2$$

$$3p + 6q = 24$$

$11p = 22$ بالجمع

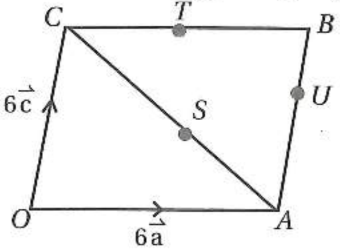
$p = 2 \longrightarrow 2 + 2q = 8 \longrightarrow q = 3$ بالتعويض

في الشكل المجاور $OABC$ متوازي أضلاع فيه $\overrightarrow{OA} = 6\vec{a}$ ، $\overrightarrow{OC} = 6\vec{c}$ والنقطة T هي منتصف الضلع BC والنقطة U تقع على الضلع AB حيث

$$AU : UB = 2 : 1$$

والنقطة S تقع على القطر CA حيث

$$CS : SA = 3 : 2$$



أكتب كلاً من المتجهات الآتية بدلالة $\vec{a}$ و $\vec{b}$

㉓ $\overrightarrow{OB} = 6\vec{a} + 6\vec{c}$

㉔ $\overrightarrow{AC} = 6\vec{c} - 6\vec{a}$

㉕ $2 + 1 = 3$

$$\overrightarrow{AU} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}, \ \overrightarrow{UB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{OU} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AU}$$

$$= 6\vec{a} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = 6\vec{a} + \frac{2}{3}(6\vec{c})$$

$$= 6\vec{a} + 4\vec{c}$$

㉖ $\overrightarrow{UT} = \overrightarrow{UB} + \overrightarrow{BT}$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

$$= \frac{1}{3}(6\vec{c}) + \frac{1}{2}(-6\vec{a}) = 2\vec{c} - 3\vec{a}$$

㉗ $\overrightarrow{TA} = \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{BA}$

$$= \frac{1}{2}(6\vec{a}) - 6\vec{c} = 3\vec{a} - 6\vec{c}$$

㉘ $3 + 2 = 5$

$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AS}$

$$= 6\vec{a} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$$

$$= 6\vec{a} + \frac{2}{5}(6\vec{c} - 6\vec{a})$$

$$= \frac{18}{5}\vec{a} + \frac{12}{5}\vec{c}$$

㉙ $\overrightarrow{US} = \overrightarrow{UA} + \overrightarrow{AS}$

$$= \frac{2}{3}(-6\vec{c}) + \frac{2}{5}(-6\vec{a} + 6\vec{c})$$

$$= -\frac{12}{5}\vec{a} - \frac{8}{5}\vec{c}$$

㉚ $\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AB}$

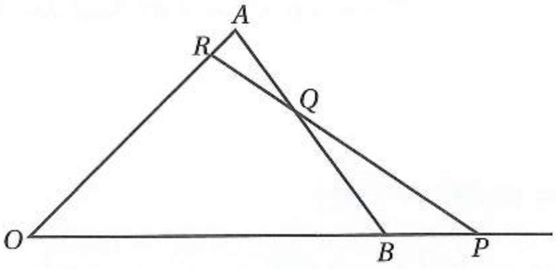
$$= -\frac{2}{5}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$$

$$= -\frac{2}{5}(6\vec{c} - 6\vec{a}) + 6\vec{c}$$

$$= -\frac{12}{5}\vec{c} + (\frac{2}{5})\,6\vec{a} + 6\vec{c}$$

$$= \frac{18}{5}\vec{c} + \frac{12}{5}\vec{a}$$

متجها الموقع للنقطة A والنقطة B بالنسبة إلى نقطة الأصل O هما: $\vec{a}$ و $\vec{b}$ على الترتيب. إذا كانت النقطة P تقع على امتداد $\overrightarrow{OB}$، حيث $\overrightarrow{OP} = \frac{5}{4}\overrightarrow{OB}$، والنقطة Q تقع على $\overrightarrow{AB}$، حيث $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ والنقطة R تقع على $\overrightarrow{OA}$ حيث $\overrightarrow{OR} = \lambda\,\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OR} = \mu\,\overrightarrow{OA}$ فأجيب على الأسئلة الأربعة الآتية تباعاً:



㉛ أكتب كلاً من $\overrightarrow{OQ}$ و $\overrightarrow{PQ}$ بدلالة $\vec{a}$ و $\vec{b}$

الحل:

$AB = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{AO}$

$$= \vec{b} - \vec{a}$$

$\overrightarrow{BQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} = -\frac{2}{3}(\vec{b} - \vec{a})$

$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{OB}$

$$= -\frac{2}{3}(\vec{b} - \vec{a}) + \vec{b}$$

$$= \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{a}$$

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ}$

$$= -\frac{5}{4}\overrightarrow{OB} + (\frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{a})$$

$$= -\frac{5}{4}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{a}$$

$$= -\frac{11}{12}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{a}$$

㉜ أكتب $\overrightarrow{QR}$ بدلالة λ و $\vec{a}$ و $\vec{b}$

الحل:

$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{QO}$

$$= \lambda\,\overrightarrow{OA} + -\frac{1}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}$$

$$= \lambda\,\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}$$

$$= (\lambda - \frac{2}{3})\,\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$$

㉝ أجد قيمة $\overrightarrow{QR}$ بدلالة μ و $\vec{a}$ و $\vec{b}$

الحل:

$$\overrightarrow{QR} = \mu\,\overrightarrow{PR}$$

$$= \mu(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OR})$$

$$= \mu(\frac{-5}{4}\vec{b} + \lambda\,\vec{a})$$

$$= \mu\,\lambda\,\vec{a} - \frac{5}{4}\,\mu\,\vec{b}$$

㉞ أجد قيمة كل من λ و μ

الحل:

$$\frac{-5}{4}\,\mu = -\frac{1}{3}$$

$$\mu = \frac{4}{15}$$

$$\mu\,\lambda = \lambda - \frac{2}{3}$$

$$\frac{4}{15}\lambda = \lambda - \frac{2}{3}$$

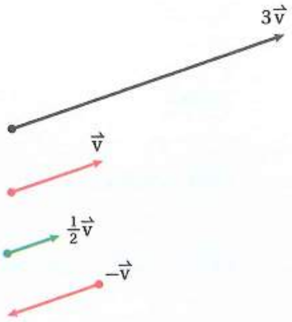
$$\frac{11}{15}\lambda = \frac{2}{3}$$

$$\lambda = \frac{10}{11}$$

الدرس الثاني

المستقيمات في الفضاء

توازي المتجهات



المتجهان المتوازيان هما متجهان لهما الاتجاه نفسه، أو عكسه، وليس شرطاً أن يكون لهما المقدار نفسه، وهذا يعني أنه يمكن كتابة كل منهما في صورة المتجه الآخر مضروباً في عدد حقيقي.

أتذكر

إذا ضرب المتجه $\vec{v}$ في العدد الحقيقي k، فإن المتجه $k\vec{v}$ يأخذ اتجاه $\vec{v}$ نفسه إذا كان $k > 0$ ويكون عكس اتجاه $\vec{v}$ إذا كان $k < 0$

مفهوم أساسي

إذا كان $\vec{u} = \langle u_1 , u_2 , u_3 \rangle$ ، $\vec{v} = \langle v_1 , v_2 , v_3 \rangle$ فإن: $\vec{v} \parallel \vec{u}$ إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي k حيث $k \neq 0$ بحيث يكون:

$$\langle v_1 , v_2 , v_3 \rangle = k \langle u_1 , u_2 , u_3 \rangle$$

مثال

إذا كانت $A(-1, 3, 5)$ ، $B(4, -2, 3)$

$C(-2, 1, 4)$ ، $D(18, -19, -4)$ هل $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$

الحل

$$\overrightarrow{AB} = \langle 4-(-1), -2-3, 3-5 \rangle$$
$$= \langle 5, -5, -2 \rangle$$

$$\overrightarrow{CD} = \langle 18-(-2), -1-19, -4-4 \rangle$$
$$= \langle 20, -20, -8 \rangle = 4\langle 5, -5, 2 \rangle$$
$$\overrightarrow{CD} = 4\,(\overrightarrow{AB})$$

فيكون $\overrightarrow{CD} \parallel \overrightarrow{AB}$

مثال

إذا كانت $A(2, 6, -4)$ ، $B(5, 5, 1)$

$C(1, 7, 2)$ ، $D(-2, 8, 2)$ هل $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$

الحل

$$\overrightarrow{AB} = \langle 5-2, 5-6, 1-(-4) \rangle$$
$$= \langle 3, -1, 5 \rangle$$
$$\overrightarrow{CD} = \langle -2-1, 8-7, 2-2 \rangle = \langle -3, 1, 0 \rangle$$

لاحظ لا يوجد عدد حقيقي k حيث $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{CD}$

إذن المتجهان غير متوازيين.

أتحقّق من فهمي

صفحة (127): إذا كان $K(4, 5, 3)$ ، $L(7, 7, 3)$ ، $G(7, 5, -11)$ ، $H(4, 4, -4)$ فأحدد إن كان كل متجهين مما يأتي متوازيين أم لا:

a) $\overrightarrow{GH} , \overrightarrow{KL}$

الحل:

$$\overrightarrow{GH} = \langle 4-7, 4-5, -4-(-11) \rangle$$
$$= \langle -3, -1, 7 \rangle$$
$$\overrightarrow{KL} = \langle 7-4, 7-5, 3-3 \rangle$$
$$= \langle 3, 2, 0 \rangle$$

لا يوجد عدد حقيقي n حيث $\overrightarrow{GH} = n\,\overrightarrow{KL}$

إذن $\overrightarrow{GH}$ لا يوازي $\overrightarrow{KL}$

الحل:

b) $\overrightarrow{GL}$, $\overrightarrow{HK}$

$$\overrightarrow{GL} = \langle 7-7, 7-5, 3-(-11)\rangle$$

$$= \langle 0, 2, 14\rangle$$

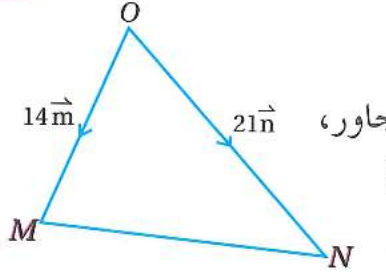
$$\overrightarrow{HK} = \langle 4-4, 5-4, 3-(-4)\rangle$$

$$= \langle 0 , 1, 7\rangle$$

$$\overrightarrow{HK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GL}$$

فيكون $\overrightarrow{GL} \parallel \overrightarrow{HK}$

مثال



في المثلث OMN المجاور، إذا كان $\overrightarrow{OM} = 14\vec{m}$ وكانت $\overrightarrow{ON} = 21\vec{n}$ النقطة P تقع على $\overline{OM}$، حيث $OP : PM = 2 : 5$ والنقطة Q تقع على $\overline{ON}$ حيث: $ON = \frac{7}{2}OQ$ فأثبت أن $\overline{PQ}$ يوازي $\overline{MN}$

الحل

لإثبات توازي القطعتين المستقيمتين $\overline{PQ}$ و $\overline{MN}$ يكفي إثبات أن أحد المتجهين $\overrightarrow{PQ}$ ، $\overrightarrow{MN}$ يمكن كتابته في صورة المتجه الآخر مضروباً في عدد حقيقي.

الخطوة 1: أكتب $\overrightarrow{MN}$ بدلالة $\vec{m}$ و $\vec{n}$ مستعملاً قاعدة المثلث لجمع المتجهات.

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON}$ قاعدة المثلث لجمع المتجهات

$= -14\vec{m} + 21\vec{n}$ بتعويض $\overrightarrow{OM}=14\vec{m}, \overrightarrow{ON}=21\vec{n}$

$= 7(-2\vec{m} + 3\vec{n})$ بإخراج عامل مشترك

الخطوة 2: أكتب $\overrightarrow{PQ}$ بدلالة $\vec{m}$ و $\vec{n}$

أكتب $\overrightarrow{OP}$ أولاً بدلالة $\vec{m}$ وأكتب $\overrightarrow{OQ}$ بدلالة $\vec{n}$ ثم أستعملها لكتابة $\overrightarrow{PQ}$ بدلالة $\vec{m}$ و $\vec{n}$

$\overrightarrow{OP} = \frac{2}{7}\overrightarrow{OM}$ معطى

$= \frac{2}{7} \times 14\,\vec{m}$ بتعويض $\overrightarrow{OM} = 14\vec{m}$

$= 4\,\vec{m}$ بالتبسيط

$\overrightarrow{ON} = \frac{7}{2}\overrightarrow{OQ}$ معطى

$\overrightarrow{OQ} = \frac{2}{7} \times \overrightarrow{ON}$ بحل المعادلة لـ $\overrightarrow{OQ}$

$= \frac{2}{7} \times 21\vec{n}$ بتعويض $\overrightarrow{ON} = 21\vec{n}$

$= 6\,\vec{n}$ بالتبسيط

إذن $\overrightarrow{OP} = 4\,\vec{m}$, $\overrightarrow{OQ} = 6\,\vec{n}$

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ}$ قاعدة المثلث لجمع المتجهات

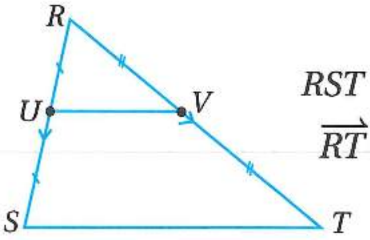
$= -4\vec{m} + 6\vec{n}$ بتعويض $\overrightarrow{OP} = 4\vec{m}, \overrightarrow{OQ} = 6\vec{n}$

$= 2(-2\vec{m} + 3\vec{n})$ بإخراج عامل مشترك

$= \frac{2}{7}\overrightarrow{MN}$ $\quad -2\vec{m} + 3\vec{n} = \frac{1}{7}\overrightarrow{MN}$

بما أن $\overrightarrow{PQ}$ يساوي $\overrightarrow{MN}$ مضروباً في عدد حقيقي فإن $\overline{PQ}$ و $\overline{MN}$ متوازيان

أتحقق من فهمي



صفحة (129): في المثلث RST المجاور إذا كان $\overrightarrow{RT} = 6\vec{b}$ و $\overrightarrow{RS} = 4\vec{a}$ والنقطة U منتصف $\overline{RS}$، والنقطة V منتصف $\overline{RT}$ فأثبت أن $\overline{ST}$ يوازي $\overline{UV}$

الحل:

$$\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{SR} + \overrightarrow{RT}$$

$$= -4\vec{a} + 6\vec{b}$$

$$\overrightarrow{UV} = \overrightarrow{UR} + \overrightarrow{RV}$$

$$= -2\vec{a} + 3\vec{b}$$

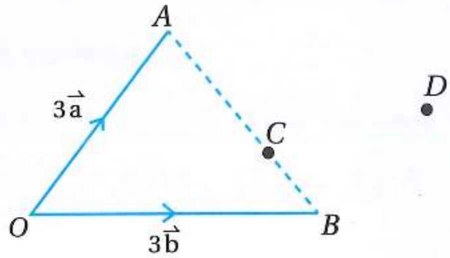
فيكون $\overrightarrow{UV} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ST}$

إذن $\overline{UV} \parallel \overline{ST}$

لإثبات أن ثلاث نقط في الفضاء تقع على استقامة واحدة يكفي إثبات وجود متجهين متوازيين بينهما نقطة مشتركة

مثال

يظهر في الشكل الآتي المثلث OAB والنقطتان: C و D
إذا كان $\overrightarrow{OB} = 3\vec{b}$ ، $\overrightarrow{OA} = 3\vec{a}$ وكانت النقطة C تقع على $\overline{AB}$، حيث $AC = 2CB$ وكان $\overrightarrow{BD} = 2\vec{a} + \vec{b}$
فأثبت أن O و C و D تقع على استقامة واحدة



الحل

أن O و C و D تقع على استقامة واحدة يكفي إثبات أن $\overrightarrow{OD} \| \overrightarrow{OC}$ لأن لهما نقطة البداية نفسها.

الخطوة 1: أكتب كلاً من $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ بدلالة $\vec{a}$ و $\vec{b}$.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$ قاعدة المثلث لجمع المتجهات

$= -3\vec{a} + 3\vec{b}$ بتعويض $\overrightarrow{AO} = -3\vec{a}, \overrightarrow{OB} = 3\vec{b}$

$\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ معطى

$= \frac{2}{3} \times (-3\vec{a} + 3\vec{b})$ بتعويض $\overrightarrow{AB} = -3\vec{a} + 3\vec{b}$

$= -2\vec{a} + 2\vec{b}$ بالتبسيط

إذن $\overrightarrow{AB} = -3\vec{a} + 3\vec{b} , \overrightarrow{AC} = -2\vec{a} + 2\vec{b}$

الخطوة 2: أكتب $\overrightarrow{OC}$ و $\overrightarrow{OD}$ بدلالة $\vec{a}$ و $\vec{b}$

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$ قاعدة المثلث لجمع المتجهات

بالتعويض $\overrightarrow{OA} = 3\vec{a}, \overrightarrow{AC} = -2\vec{a} + 2\vec{b}$

$= 3\vec{a} + 2\vec{b} - 2\vec{a}$

$= \vec{a} + 2\vec{b}$ بالتبسيط

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD}$ قاعدة المثلث لجمع المتجهات

$= 3\vec{b} + 2\vec{a} + \vec{b}$ بتعويض $\overrightarrow{OB} = 3\vec{b}, \overrightarrow{BD} = 2\vec{a} + \vec{b}$

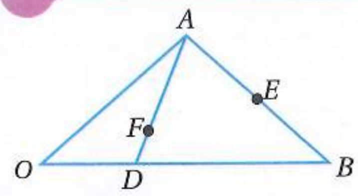
$= 2\vec{a} + 4\vec{b}$ بالتبسيط

$= 2(\vec{a} + 2\vec{b})$ بإخراج عامل مشترك

$= 2\overrightarrow{OC}$ $\vec{a} + 2\vec{b} = \overrightarrow{OC}$

بما أن $\overrightarrow{OD}$ يساوي $\overrightarrow{OC}$ مضروباً في عدد حقيقي، فإن $\overrightarrow{OC}$ و $\overrightarrow{OD}$ متوازيان ومن ثم فإن O و C و D على استقامة واحدة.

أتحقق من فهمي



صفحة (130): يظهر في الشكل المجاور المثلث OAB إذا كان $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ، $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ وكانت النقطة D تقع على $\overline{OB}$، والنقطة E منتصف $\overline{AB}$، والنقطة F تقع على $\overline{AD}$ حيث $\overrightarrow{OF} = \frac{2}{5}(\vec{a} + \vec{b})$
فأثبت أن O و F و E تقع على استقامة واحدة

الحل:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$

$= -\vec{a} + \vec{b}$

$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE}$

$= \vec{a} + \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b})$

$= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

$= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$

$\overrightarrow{OF} = \frac{2}{5}(\vec{a} + \vec{b})$

$\overrightarrow{OE} = \frac{5}{4}\overrightarrow{OF}$

$\overrightarrow{OE} \| \overrightarrow{OF}$

ولهما نفس البداية O فتكون O و F و E على استقامة واحدة

المعادلة المتجهة للمستقيم

مفهوم أساسي

المعادلة المتجهة للمستقيم l الذي يوازي المتجه $\vec{v}$ ويمر بنقطة متجه الموقع لها $\vec{r}_0$ هي:

$$r = \vec{r}_0 + t\vec{v}$$

مثال

اكتب المعادلة المتجهة للمستقيم الذي يوازي المتجه $\vec{v}\langle 2, -3, 5\rangle$ ويمر بالنقطة $(1, 4, -2)$

الحل

$$\vec{r}_0 = (1, 4, -2)$$
$$r = \vec{r}_0 + t\vec{v}$$
$$r = (1, 4, -2) + t(2, -3, 5)$$

أتحقّق من فهمي

صفحة (132): أجد معادلة متجهة للمستقيم l الذي يوازي المتجه: $\vec{v}\langle 1, -4, -5\rangle$ ويمر بالنقطة $U(0, -6, 9)$

الحل:

$$\vec{r}_0 = (0, -6, 9)$$
$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$$
$$\vec{r} = (0, -6, 9) + t(1, -4, -5)$$

إذا علمت نقطتان يمر بهما المستقيم فيمكن كتابة معادلة المتجهة باتباع الخطوتين:

1) إيجاد الصورة الإحداثية للمتجه الموازي الذي طرفان النقطتان المعلومتان.

2) تعويض متجه الموقع لإحدى النقطتين والمتجه الموازي للمستقيم في صيغة المعادلة المتجهة للمستقيم.

مثال

أجد معادلة متجهة للمستقيم المار بالنقطتين $B(3, -2, 4)$ و $A(2, 1, -5)$

الحل

$$\overrightarrow{AB} = \langle 3-2, -2-1, 4-(-5)\rangle$$
$$= \langle 1, -3, 9\rangle = \vec{v}$$
$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$$
$$= \langle 2, 1, -5\rangle + t\langle 1, -3, 9\rangle$$

أتحقّق من فهمي

صفحة (133): أجد معادلة متجهة المستقيم l المار بالنقطتين $M(3, 7, -9)$ و $N(2, -4, 3)$

الحل:

$$\overrightarrow{NM} = \langle 3-2, 7-(-4), -9-3\rangle$$
$$= \langle 1, 11, -12\rangle = \vec{v}$$
$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$$
$$= \langle 3, 7, -9\rangle + t\langle 1, 11, -12\rangle$$

ويمكن استعمال المعادلة المتجهة للمستقيم في التحقق من وقوع نقطة معلومة عليه أم لا.

وأيضاً إيجاد نقطة وقعت عليه علم أحد إحداثياتها.

مثال

إذا كانت المعادلة المتجهة للمستقيم l هي:

$$\vec{r} = \langle -3, 2, 5\rangle + t\langle 1, 4, 3\rangle$$

1) هل النقطة $(2, 14, 28)$ تقع على المستقيم l

2) جد نقطة على المستقيم احداثي y لها هو 18

الحل

$$r = (-3+t, 4+2t, 3+5t)$$

1) $(2, 14, 28) = \langle -3+t, 4+2t, 3+5t\rangle$

$28 = 3 + 5t$	$14 = 4 + 2t$	$2 = -3 + t$
$t = 5$	$t = 5$	$t = 5$

بما أن $t = 5$ لجميع المعادلات فتكون $t = 5$

النقطة تقع على المستقيم

2) $\vec{r} = \langle -3 + t\rangle \hat{i} + \langle 4 + 2t\rangle \hat{j} + \langle 3 + 5t\rangle \hat{k}$

فتكون $4 + 2t = 18 \rightarrow t = 7$

بتعويض $t = 7$ في المعادلة

$$\vec{r} = \langle -3 + 7, 4 + 2(7), 3 + 5(7)\rangle$$
$$= (4, 18, 38)$$

أتحقّق من فهمي صفحة (134):

تمثل: $\vec{r} = 11\hat{i} + 5\hat{j} - 6\hat{k} + t(7\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k})$ معادلة متجهة للمستقيم l:

a) أبين أن النقطة التي متجه الموقع لها هو $(39\hat{i} - 3\hat{j} + 14\hat{k})$ تقع على المستقيم l

الحل:

$$\vec{r} = \langle 11, 5, -6\rangle + t\langle 7, -2, 5\rangle$$
$$= \langle 11 + 7t, 5 - 2t, -6 + 5t\rangle$$
$$(39, -3, 14) = \langle 11 + 7t, 5 - 2t, -6 + 5t\rangle$$

$-6 + 5t = 14$	$5 - 2t = -3$	$39 = 11 + 7t$
$5t = 20$	$5 + 3 = 2t$	$28 = 7t$
$t = 4$	$t = 4$	$t = 4$

النقطة تقع على المستقيم

b) أجد متجه الموقع للنقطة التي تقع على هذا المستقيم، وتقابل القيمة $t = -3$

الحل:

$$\vec{v} = \langle 11 + 7(-3) , 5 - 2(-3), -6 + 5(-3)\rangle$$
$$= (-10, 11, -21)$$

c) إذا كانت النقطة $(v, -3v, 5v - 1)$ تقع على المستقيم l فما قيمة v

الحل:

$$(v, -3v, 5v - 1) = \langle 11 + 7t, 5 - 2t, -6 + 5t\rangle$$

$$v = 11 + 7t \quad \times 3$$
$$-3v = 5 - 2t \quad \times 1$$

$$3v = 33 + 21t$$
$$-3v = 5 - 2t$$

بالجمع

$$0 = 38 + 19t \longrightarrow t = -2$$
$$v = 11 + 7(-2) = -3$$

المستقيمات المتوازية والمتقاطعة والمتخالفة

مفهوم أساسي

إذا كانت معادلة المستقيم l_1 هي: $\vec{r} = \vec{a} + t\vec{b}$

ومعادلة المستقيم l_2 هي: $\vec{r} = \vec{c} + u\vec{d}$ فإن:

$l_2 \parallel l_1$ إذا وفقط إذا كان $\vec{b} \parallel \vec{d}$

ويمكن الحكم على تقاطع المستقيمين l_1، l_2 بمساواة متجهي الموقع $\vec{r}$ وحل المعادلات فإذا تحققت المعادلات الثلاث كان المستقيمان متقاطعين وإذا كان المستقيمان غير متوازيين وغير متقاطعين فإنهما يكونان متخالفين.

أتحقّق من فهمي

صفحة (136):

إذا كانت $\vec{r} = \langle 3, 7, -9\rangle + t\langle 1, 11, -12\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_1 وكانت $\vec{r} = \langle -30, -6, 30\rangle + u\langle 4, -6, 3\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_2 فأحدد إذا كان المستقيمان: l_1، l_2 متوازيين أو متقاطعين أو متخالفين ثم أجد إحداثيات نقطة تقاطعهما إذا كانا متقاطعين.

الحل:

بما أن $\langle 1, 11, -12\rangle \neq k\times\langle 4, -6, 3\rangle$ فهما غير متوازيين

لمعرفة هل هما متقاطعان نضع

$$\langle 3, 7, -9\rangle + t\langle 1, 11, -12\rangle$$
$$= \langle -30, -6, 30\rangle + u\langle 4, -6, 3\rangle$$
$$\langle 3 + t, 7 + 11t, -9 - 12t\rangle$$
$$= \langle -30 + 4u, -6 - 6u, 30 + 3u\rangle$$

نأخذ

$$3 + t = -30 + 4u \quad \times 3$$
$$7 + 11t = -6 - 6u \quad \times 2$$
$$9 + 3t = -90 + 12u$$
$$14 + 22t = -12 - 12u$$

بالجمع $23 + 25t = -102$

$$25t = -125 \longrightarrow t = -5$$

بالتعويض $3 + -5 = -30 + 4u$

$$28 = 4u \longrightarrow u = 7$$

ثم نأخذ $-9 - 12t = 30 + 3u$

نضع $u = 7 , t = -5$

$$-9 - 12(-5) = 30 + 3(7)$$
$$-9 + 60 = 30 + 21$$
$$51 = 51$$

إذن قيمة t وقيمة u تحقق المعادلات الثلاث ولإيجاد نقطة تقاطع المستقيمين نعوض في معادلة أي من المستقيمين.

$$\vec{r} = \langle 3, 7, -9\rangle + -5\langle 1, 11, -12\rangle$$
$$= \langle 3, 7, -9\rangle + \langle -5, -55, 60\rangle$$
$$= \langle -2, -48, 51\rangle$$

فتكون نقطة التقاطع $(-2, -48, 51)$

أتحقّق من فهمي

صفحة (138): أقلعت طائرة من موقع إحداثياته: $(0, 7, 0)$ وفي الوقت نفسه، أقلعت طائرة ثانية من موقع إحداثياته: $(-2, 0, 0)$ وبعد التحليق مدة قصيرة في مسارين مستقيمين أصبحت الطائرة الأولى عند الموقع الذي إحداثياته $(8, 15, 16)$: وأصبحت الطائرة الثانية عند الموقع الذي إحداثياته $(22, 24, 48)$: هل خطا سير الطائرتين متوازيان أم متقاطعان أم متخالفان؟

الحل:

اتجاه خط سير الطائرة الأولى

$$\langle 8, 15, 16\rangle - \langle 0, 7, 0\rangle = \langle 8, 8, 16\rangle$$

المعادلة المتجهة لخط سير الطائرة الأولى

$$\vec{r} = \langle 0, 7, 0\rangle + t\langle 8, 8, 16\rangle$$

اتجاه خط سير الطائرة الثانية

$$\langle 22 - (-2) , 24 - 0, 48 - 0\rangle = \langle 24, 24, 48\rangle$$

بما أن $\langle 24, 24, 48\rangle = 3\ \langle 8, 8, 16\rangle$

فيكون خطا سير الطائرتين متوازيان

الفاتن في
الرياضيات

أتدرّب وأحلّ المسائل

أحدد إذا كان المتجهان متوازيين أم لا في كل مما يأتي:

① $\langle 8, 12, 24\rangle$, $\langle 15, 10, -20\rangle$

الحل:

$$\langle 8, 12, 24\rangle \neq k\,\langle 15, 10, -20\rangle$$

إذن المتجهان غير متوازيين.

② $\langle 27, -48, -36\rangle$, $\langle 9, -16, -12\rangle$

الحل:

$$\langle 27, -48, -36\rangle = 3\langle 9, -16, -12\rangle$$

إذن المتجهان متوازيان.

③ $\langle -6, -4, 10\rangle$, $\langle -3, -1, 13\rangle$

الحل:

$$\langle -6, -4, 10\rangle \neq k\,\langle -3, -1, 13\rangle$$

إذن المتجهان غير متوازيين.

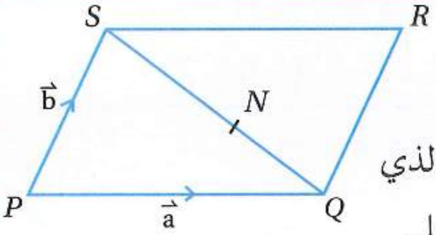
④ $\langle 12, -8, 32\rangle$, $\langle 21, -14, 56\rangle$

الحل:

$$\langle 12, -8, 32\rangle = \frac{4}{7}\langle 21, -14, 56\rangle$$

إذن المتجهان متوازيان.

يمثل الشكل المجاور متوازي الأضلاع $PQRS$ الذي تقع فيه النقطة N على $\overline{SQ}$ حيث $SN:NQ = 3:2$ و $\overrightarrow{PS} = \vec{b}$ ، $\overrightarrow{PQ} = \vec{a}$



⑤ أكتب $\overrightarrow{SQ}$ بدلالة $\vec{a}$ و $\vec{b}$

الحل:

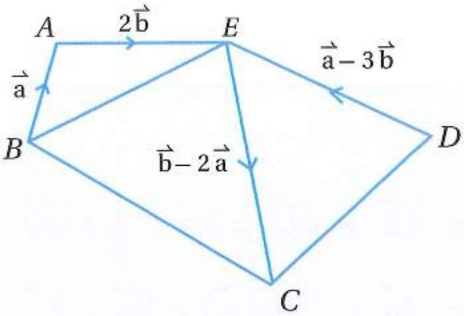
$$\overrightarrow{SQ} = \overrightarrow{SP} + \overrightarrow{PQ}$$
$$= -\vec{b} + \vec{a}$$

⑥ أكتب $\overrightarrow{NR}$ بدلالة $\vec{a}$ و $\vec{b}$

الحل:

$$\overrightarrow{NR} = \overrightarrow{NS} + \overrightarrow{SR}$$
$$= -\frac{3}{5}(-\vec{b} + \vec{a}) + \vec{a}$$
$$= \frac{3}{5}\vec{b} + \frac{2}{5}\vec{a}$$

⑦ معتمداً المعلومات المعطاة في الشكل المجاور أثبت أن $BEDC$ متوازي أضلاع



الحل:

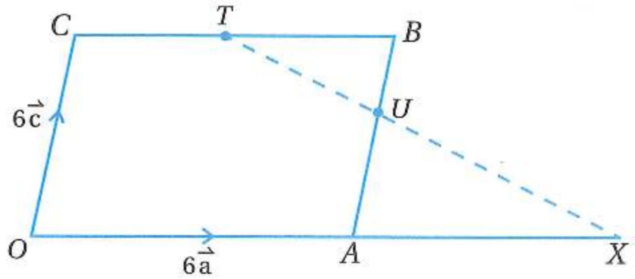
$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}$$
$$= \vec{a} + 2\vec{b}$$
$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EC}$$
$$= \vec{a} - 3\vec{b} + \vec{b} - 2\vec{a}$$
$$= -\vec{a} - 2\vec{b}$$
$$\overrightarrow{BE} = -1(-\vec{a} - 2\vec{b}) = -\overrightarrow{DC}$$

فيكون $\overrightarrow{BE} \parallel \overrightarrow{DC}$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EC}$$
$$= \vec{a} + 2\vec{b} + \vec{b} - 2\vec{a}$$
$$= -\vec{a} + 3\vec{b} = -(\vec{a} - 3\vec{b}) = -\overrightarrow{ED}$$
$$\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{ED}$$

كل ضلعين متقابلين متوازيين فيكون الشكل $BEDC$ متوازي أضلاع

⑧ في متوازي الأضلاع $OABC$ المجاور $\overrightarrow{OC} = 6\vec{c}$ ، $\overrightarrow{OA} = 6\vec{a}$ والنقطة T هي منتصف الضلع $\overline{CB}$ والنقطة U تقسم $\overline{AB}$ بنسبة $1:2$ إذا مد الضلع $\overline{OA}$ على استقامته إلى النقطة X حيث $OA = AX$ فأثبت أن T و U و X تقع على استقامة واحدة.



الحل:

$$\overrightarrow{TU} = \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{BU} = 3\vec{a} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{CO})$$
$$= 3\vec{a} + \frac{1}{3}(-6\vec{c}) = 3\vec{a} - 2\vec{c}$$
$$\overrightarrow{UX} = \overrightarrow{UA} + \overrightarrow{AX}$$
$$= \frac{2}{3}(\overrightarrow{CO}) + 6\vec{a} = \frac{2}{3}(-6\vec{c}) + 6\vec{a}$$
$$= -4\vec{c} + 6\vec{a}$$
$$\overrightarrow{UX} = 2\overrightarrow{TU}$$
$$\overrightarrow{UX} \parallel \overrightarrow{TU}$$

فتكون T و U و X تقع على استقامة واحدة.

أجد معادلة متجهة للمستقيم الذي يوازي المتجه $\vec{a}$ ويمر بنقطة متجه الموقع لها $\vec{b}$ في كل مما يأتي:

9 $\vec{a} = -7\hat{i} + \hat{j}$, $\vec{b} = 5\hat{i} + 3\hat{j}$

الحل:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$$
$$= (5, 3) + t(-7, 1)$$

10 $\vec{a} = -3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$, $\vec{b} = -2\hat{i} + 8\hat{k}$

الحل:

$$\vec{r} = (-2, 0, 8) + t(-3, 2, -1)$$

11 $\vec{a} = \langle 4, 3\rangle$, $\vec{b} = \langle 9, -2\rangle$

الحل:

$$\vec{r} = (9, -2) + t(4, 3)$$

12 $\vec{a} = \langle 0, -1, 3\rangle$, $\vec{b} = \langle 10, 3, -6\rangle$

الحل:

$$\vec{r} = (10, 3, -6) + t(0, -1, 3)$$

أجد معادلة متجهة للمستقيم المار بالنقطتين في كل مما يأتي:

13 $(10, 3, -6)$, $(0, -1, 3)$

الحل:

$$\langle 10 - 0, 3 - (-1), -6 - 3\rangle$$
$$= \langle 10, 4, -9\rangle = \vec{v}$$
$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$$
$$= \langle 0, -1, 3\rangle + t\langle 10, 4, -9\rangle$$

14 $(11, -6, 9)$, $(1, 4, 29)$

الحل:

$$\langle 11 - 1, -6 - 4, 9 - 29\rangle$$
$$= \langle 10, -10, -20\rangle \div 10$$
$$= \langle 1, -1, -2\rangle = \vec{v}$$
$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$$
$$= \langle 1, 4, 29\rangle + t\langle 1, -1, -2\rangle$$

15 $(-30, -6, 30)$, $(-26, -12, 23)$

الحل:

$$\langle -30 - (-26), -6 - (-12), 30 - 23\rangle$$
$$= \langle -4, 6, 7\rangle = \vec{v}$$
$$\vec{r} = \langle -26, -12, 23\rangle + t\langle -4, 6, 7\rangle$$

16 $(-2, 9, 1)$, $(10, 5, -7)$

الحل:

$$\langle -2 - 10, 9 - 5, 1 - (-7)\rangle$$
$$= \langle -12, 4, 8\rangle \div 4$$
$$= \langle -3, 1, 2\rangle = \vec{v}$$
$$\vec{r} = \langle 10, 5, -7\rangle + t\langle -3, 1, 2\rangle$$

17 أجد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيمين:

$$\vec{r} = \langle -2, 2, -1\rangle + t\langle 1, 2, -1\rangle$$
و $$\vec{r} = \langle 4, 4, -7\rangle + u\langle -1, 3, 1\rangle$$

الحل:

$$\langle 4, 4, -7\rangle + u\langle -1, 3, 1\rangle$$
$$= \langle -2, 2, -1\rangle + t\langle 1, 2, -1\rangle$$

$$\langle 4 + -u, 4 + 3u, -7 + u\rangle$$
$$+ \langle -2 + t, 2 + 2t, -1 - t\rangle$$

$4 + -u = -2 + t \quad 3$

$4 + 3u = 2 + 2t \quad 1$

$12 - 3u = -6 + 3t$

$4 + 3u = 2 + 2t$

$16 = -4 + 5t$ بالجمع

$20 = 5t \longrightarrow t = 4$

$4 + -u = -2 + 4$ بالتعويض

$4 - 2 = u \longrightarrow u = 2$

$-7 + u = -1 - t$ للتأكيد

$-7 + 2 = -1 - 4$

$-5 = -5$ ✓

نعوض في أي من المتجهين نقط التقاطع

$(2, 10, -5)$

يمر المستقيم l_1 بالنقطتين: E و F ويمر المستقيم l_2 بالنقطتين: G و H أحدد إذا كان هذان المستقيمان متوازيين أو متخالفين أو متقاطعين ثم أجد إحداثيات نقطة التقاطع إذا كانا متقاطعين في كل مما يأتي:

⑱ $E(3, -5, -7), F(-11, 9, 14)$,
$G(8, -1, -8)$, $H(2, 5, 1)$

الحل:

$$\overrightarrow{EF} = (-11 - 3, 9 - (-5), 14 - (-7))$$
$$= (-14, 14, 21) \quad \div 7$$
$$= (-2, 2, 3)$$
$$\overrightarrow{GH} = (2 - 8, 5 - (-1), 1 - (-8))$$
$$= (-6, 6, 9) \quad \div 3$$
$$= (-2, 2, 3)$$
$$7(-2, 2, 3) = 3(-2, 2, 3)$$

$\overrightarrow{EF} = \frac{3}{7}\overrightarrow{GH}$ إذن هما متوازيان

⑲ $E(3, 7, -9), F(2, -4, 3)$,
$G(-30, -6, 30)$, $H(-26, -12, 33)$

الحل:

$$\overrightarrow{EF} = (2 - 3, -4 - 7, 3 - (-9))$$
$$= (-1, -11, 12)$$
$$\overrightarrow{GH} = (-26 - (-30), -12 - (-6), 33 - 30)$$
$$= (4, -6, 3)$$

$\overrightarrow{EF} \neq k\,\overrightarrow{GH}$ إذن هما غير متوازيان

المعادلة المتجهة لـ $\overrightarrow{EF}$

$$\vec{r} = \langle 3, 7, -9\rangle + t\langle -1, -11, 12\rangle$$

المعادلة المتجهة لـ $\overrightarrow{GH}$

$$\vec{r} = \langle -30, -6, 30\rangle + u\langle 4, -6, 3\rangle$$
$$\langle 3, 7, -9\rangle + t\langle -1, -11, 12\rangle =$$
$$\langle -30, -6, 30\rangle + u\langle 4, -6, 3\rangle$$

$3 - t = -30 + 4u \quad 3$

$7 - 11t = -6 - 6u \quad 2$

$9 - 3t = -90 + 12u$

$14 - 22t = -12 - 12u$

$23 - 25t = -102$ بالجمع

$23 + 102 = 25t \longrightarrow 125 = 25t \longrightarrow t = 5$

$3 - 5 = -30 + 4u$

$-2 + 30 = 4u \longrightarrow u = 7$

نتحقق في المعادلة الثالثة

$-9 + 12t = 30 + 3u$

$-9 + 12(5) = 30 + 3(7)$

$51 = 51$ تحقق

إذن المستقيمات متقاطعان

يمر المستقيم l بالنقطتين $A(-2, 9, 1)$ و $B(10, 5, -7)$

⑳ أكتب معادلة متجهة للمستقيم l

الحل:

$$\overrightarrow{BA} = (-2-10, 9-5, 1-(-7))$$
$$= (-12, 4, 8) \qquad \div 4$$
$$= (-3, 1, 2)$$
$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$$
$$= \langle 10, 5, -7\rangle + t\langle -3, 1, 2\rangle$$

---

21 أبين أن النقطة $(19, 2, -13)$ تقع على المستقيم l

الحل:

$$(19, 2, -13) = (10-3t, 5+t, -7+2t)$$

$-13 = -7 + 2t$	$2 = 5 + t$	$19 = 10 - 3t$
$t = -3$	$t = -3$	$3t = -9$
		$t = -3$

إذن النقطة تقع على المستقيم l

---

22 أجد قيمة a إذا كانت النقطة $(1, a, -1)$ تقع على المستقيم l

الحل:

$$(1, a, -1) = (10-3t, 5+t, -7+2t)$$
$$1 = 10 - 3t \longrightarrow t = 3$$
$$a = 5 + t = 5 + 3 = 8$$

---

23 أجد قيمة كل من b و c إذا كانت النقطة $(-8, b, c)$ تقع على المستقيم l

الحل:

$$(-8, b, c) = (10-3t, 5+t, -7+2t)$$
$$-8 = 10 - 3t \longrightarrow 3t = 18 \longrightarrow t = 6$$
$$b = 5 + 6 = 11$$
$$c = -7 + 2(6) = 5$$

---

24 أجد نقطة تقع على المستقيم l وتقع أيضاً في المستوى xz

الحل:

النقطة تقع في المستوى xz فتكون $y = 0$

$$(a, 0, b) = (10-3t, 5+t, -7+2t)$$
$$5 + t = 0 \longrightarrow t = -5$$
$$a = 10 - 3t = 10 + 15 = 25$$
$$b = -7 + 2t = -7 - 10 = -17$$

النقطة هي : $(25, 0, -17)$

---

25 إذا كان $\vec{n}=\langle -5, 4, a\rangle$ و $\vec{m}=\langle 1, -2, 3\rangle$ وكان المتجه $3\vec{n} + b\vec{m}$ يوازي المتجه $\langle 3, -3, 5\rangle$ فأجد قيمة كل من a، و b

الحل:

$$3\vec{n} + b\vec{m} = 3(-5, 4, a) + b(1, -2, 3)$$
$$= (-15 + b, 12 - 2b, 3a + 3b) = k(3, -3, 5)$$
$$-15 + b = 3k$$
$$\underline{12 - 2b = -3k}$$

بالجمع $-3 - b = 0 \longrightarrow b = -3$

بالتعويض $-15 + -3 = 3k$

$$k = -6$$
$$3a + 3b = k(5)$$
$$3a + -9 = -6(5) \longrightarrow 3a = -30 + 9 = -21$$
$$\longrightarrow a = -7$$

---

26 إذا كان $\vec{v} = a\begin{pmatrix}3\\-5\\6\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\4\\c\end{pmatrix}$ فأجد قيمة كل من a و b و c علماً بأن اتجاه $\vec{v}$ في اتجاه محور y الموجب، و $|\vec{v}| = 34$

الحل:

اتجاه المحور y الموجب هو $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ وبما أن اتجاه $\vec{v}$ هو اتجاه المحور y الموجب فإن:

$$\vec{v} = k\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\k\\0\end{pmatrix} \quad , k > 0$$

$$\begin{pmatrix}3a+b\\-5a+4b\\6a+bc\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\k\\0\end{pmatrix}$$

$|\vec{v}|=|\vec{k}| = 34 \Rightarrow k = 34$

$3a + b = 0$ .... (1)

$-5a + 4b = 34$ .... (2)

$6a + bc = 0$ .... (3)

$-4 \times (1) + (2) \Rightarrow -17a = 34$

$\Rightarrow a = -2 , \quad b = 6$

بتعويض قيمة a وقيمة b في المعادلة (3) نجد أن:

$6(-2) + 6c = 0 \Rightarrow c = 2$

㉗ أجد قيمة p

الحل:

$\overrightarrow{BC} = (14 - (-4), 1 - 13, 5 - (-1))$

$= (18, -12, 6)$

$\overrightarrow{AB} = (-4 - 2, 13 - p, -1 - q)$

$= (-6, 13 - p, -1 - q)$

$\overrightarrow{BC} = d(\overrightarrow{AB})$

$(18, -12, 6) = d(-6, 13 - p, -1 - q)$

$18 = -6d \rightarrow d = -3$

$-12 = -3(13 - p) \rightarrow 4 = 13 - p$

$p = 9$

㉘ أجد قيمة q

الحل:

$6 = -3(-1 - q)$

$-2 = -1 - q$

$q = 1$

㉙ أجد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم المار بالنقطتين: A و B مع المستوى yz

الحل:

$\overrightarrow{AB} = (-4, 13, -1) + t(-6, 4, -2)$

يقطع مستوى yz عند $x = 0$

$-4 - 6t = 0 \rightarrow t = \dfrac{-2}{3}$

$(-4, 13, -1) + \dfrac{-2}{3}(-6, 4, -2)$

$= (0, \dfrac{31}{8}, \dfrac{1}{3}) = (0, y, z)$

㉚ أجد طول $\overline{AC}$ في صورة: $a\sqrt{14}$ حيث a عدد صحيح

الحل:

$\overline{AC} = \sqrt{(14-2)^2 + (1-9)^2 + (5-1)^2}$

$= \sqrt{144 + 64 + 16} = \sqrt{224}$

$= \sqrt{16 \times 14} = a\sqrt{14}$

㉛ $A(1,2)$ و $B(2,3)$ نقطتان في المستوى الإحداثي أجد معادلة المستقيم المار بهاتين النقطتين، ثم أجد معادلة متجهة لهذا المستقيم، مقارناً بين المعادلتين.

الحل:

الميل $= \dfrac{2-3}{1-2} = \dfrac{-1}{-1} = 1$

$y - y_1 = m(x - x_1)$ المعادلة

$y - 3 = 1(x - 2)$

$y = x + 1$

$\vec{v} = (2 - 3, 1 - 2) = (-1, -1)$

$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$

$\vec{r} = (1, 2) + t(-1, -1)$

إذا كان المستقيم l_1 يمر بالنقطة $A(-3, -1, 12)$ والنقطة $B(-2, 0, 11)$ وكان المستقيم l_2 يوازي المستقيم l_1 ويمر بالنقطة $C(11, 9, 12)$ فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

㉜ أجد معادلة l_1 ㉝ أجد معادلة l_2

الحل:

$$\overrightarrow{BA} = (-3-(-2), -1-0, 12-11)$$
$$= (-1, -1, 1)$$
$$l_1 = (-3, -1, 12) + t(-1, -1, 1)$$
$$l_2 = (11, 9, 12) + u(-1, -1, 1)$$

إذا كانت $A(-1, -2, 1)$ و $B(-3, 4, -5)$ و $C(0, -2, 4)$ فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

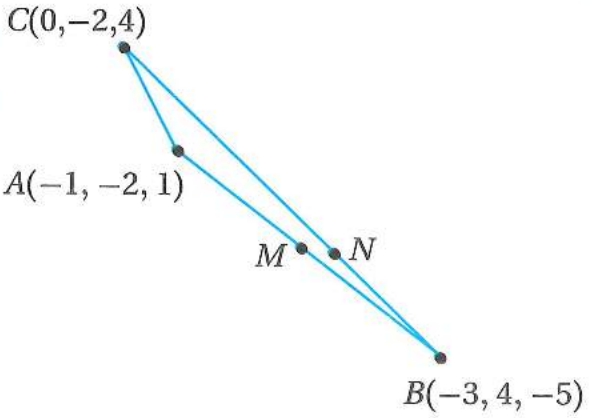
㉞ أجد إحداثيات النقطة M التي هي نقطة منتصف $\overline{AB}$

الحل:

$$M = \left(\frac{-3+-1}{2}, \frac{4+-2}{2}, \frac{1+-5}{2}\right)$$
$$= (-2, 1, -2)$$

㉟ إذا وقعت النقطة N على المستقيم $\overline{BC}$ وكان: $2|\overrightarrow{BN}| = |\overrightarrow{NC}|$ فأجد معادلة متجهة للمستقيم المار بالنقطتين M و N

الحل:



$$|\overrightarrow{NC}| = 2|\overrightarrow{BN}| \Rightarrow NC = 2\,BN$$
$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{BN} + 2\overrightarrow{BN}$$
$$= 3\overrightarrow{BN} \Rightarrow \overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{MB} + \frac{1}{3}\,\overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{MB} = \langle -3-(-2), 4-1, -5-(-2)\rangle$$
$$= \langle -1, 2, -3\rangle$$
$$\overrightarrow{BC} = \langle 0-(-3), -2-4, 4-(-5)\rangle$$
$$= \langle 3, -6, 9\rangle$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \langle -1, 3, -3\rangle + \frac{1}{3}\langle 3, -6, 9\rangle$$
$$= \langle 0, 1, 0\rangle = \vec{v}$$
$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\,\vec{v}$$

معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{MN}$ المتجهة هي:

$$\vec{r} = \langle -2, 1, -2\rangle + t\,\langle 0, 1, 0\rangle$$

㊱ يمر المستقيم l_1 بالنقطتين $Q(-2, -3, 3)$ و $P(-5, 2, 4)$ ويمر المستقيم l_2 بالنقطتين $R(0, -8, -1)$ و $S(12, -23, a)$ إذا كان المستقيم l_1 والمستقيم l_2 متقاطعين، فما قيمة a وما إحداثيات نقطة تقاطعهما؟

الحل:

اتجاه $\overrightarrow{PQ}$: $\overrightarrow{PQ} = \langle 3, -5, -1\rangle = \vec{v}_1$

معادلة $\overleftrightarrow{PQ}$: $\vec{r} = \langle -2, -3, 3\rangle + t\,\langle 3, -5, -1\rangle$

اتجاه $\overrightarrow{RS}$: $\overrightarrow{RS} = \langle 12, -15, a+1\rangle = \vec{v}_2$

معادلة $\overleftrightarrow{RS}$:

$$\vec{r} = \langle 0, -8, -1\rangle + u\langle 12, -15, a+1\rangle$$

نساوي $\vec{r}$ في المعادلتين ونساوي إحداثياتهما المتناظرة

$$\langle -2, -3, 3\rangle + t\,\langle 3, -5, -1\rangle =$$
$$\langle 0, -8, -1\rangle + u\langle 12, -15, a+1\rangle$$

$\Rightarrow -2 + 3t = 12u$ .... (1)

$-3 -5t = -8 - 15u \Rightarrow 1 - t = -3u$ .... (2)

$3 - t = -1 + u(a + 1)$

$\Rightarrow 4 - t = u(a + 1)$ .... (3)

بحل المعادلتين (1) و (2) نجد أن:

$u = \frac{1}{3}$, $t = 2$

وبتعويض القيمتين $t = 2$, $u = \frac{1}{3}$ في المعادلة (3) كونهما يحققانها لأن المستقيمين متقاطعين نجد أن:

$4 - 2 = \frac{1}{3}(a + 1) \Rightarrow 6 = a + 1$

$a = 5$

نجد نقطة التقاطع بتعويض $t = 2$ في معادلة $\overleftrightarrow{PQ}$

$\vec{r} = \langle -2, -3, 3\rangle + 2\langle 3, -5, -1\rangle$

$= \langle 4, -13, 1\rangle$

إذن نقطة التقاطع هي: $(4, -13, 1)$

---

37 **أقمار صناعية:** مرَّ القمر الصناعي S_1 بموقعين هما $A(30, -75, 90)$ و $B(100, 65, 220)$ ومرَّ القمر الصناعي S_2 بموقعين هما $C(-20, 45, 200)$ و $D(120, 85, 160)$ أحدد العلاقة بين المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ والمستقيم $\overleftrightarrow{CD}$ من معادلتيهما.

الحل:

$\overrightarrow{AB} = (100 - 30, 65 - (-75), 220 - 90)$

$= (70, 140, 130) \quad \div 10$

$= (7, 14, 13)$

$S_1 = (30, -75, 90) + t(7, 14, 13)$

$\overrightarrow{CD} = (120 - (-20), 85 - 45, 160 - 200)$

$= (140, 40, -40) \quad \div 20$

$= (7, 2, -2)$

$S_2 = (-20, 45, 200) + u(7, 2, -2)$

$(7, 14, 13) \neq k(7, 2, -2)$

غير متوازيين نبحث عن التقاطع

$30 + 7t = -20 + 7u \Rightarrow u = \frac{50}{7} + t$ .... (1)

$-75 + 14t = 45 + 2u \Rightarrow u = -60 + 7t$ ... (2)

$90 + 13t = 200 - 2u \Rightarrow 13t + 2u = 110$...(3)

بحل المعادلتين (1) و (2) نجد أن $t = \frac{235}{21}, u = \frac{285}{21}$

لكن هاتين القيمتين لا تحققان المعادلة (3)

إذن المستقيمان غير متقاطعين لعدم تحقق المعادلات الثلاثة معاً، وهما غير متوازيين فهما إذن متخالفان

---

38 أحل المسألة الواردة في بداية الدرس.

أرسلت إشارة لاسلكية من موقع إحداثياته: $(-1, 4, 5)$ إلى موقع إحداثياته: $(-11, 9, 15)$ وفي الوقت نفسه، أرسلت إشارة من موقع إحداثياته: $(-5, 9, 3)$ إلى موقع إحداثياته $(2, -5, 17)$ إذا علمت أن الإشارة تسير في خط مستقيم فهل يتقاطع مسارا الإشارتين؟

الحل:

الموقع الأول:

$\langle -11 - (-1), 9 - 4, 15 - 5\rangle = \langle -10, 5, 10\rangle$

الموقع الثاني:

$\langle -5 - 2, 9 - (-5), 3 - 17\rangle = \langle -7, 14, -14\rangle$

$\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + t\vec{v}$

$= \langle -1, 4, 5\rangle + t\langle -10, 5, 10\rangle$

$\vec{r}_2 = \langle -5, 9, 3\rangle + u\langle -7, 14, -14\rangle$

$\vec{r}_1 = \vec{r}_2$

$\langle -1, 4, 5\rangle + t\langle -10, 5, 10\rangle$

$= \langle -5, 9, 3\rangle + u\langle -7, 14, -14\rangle$

$$-1-10t=-5-7u \qquad 1$$
$$4+5t=9+14u \qquad 2$$

$$-1-10t=-5-7u$$
$$8+10t=18+28u$$

بالجمع $7=13+21u$

$-6=21u\longrightarrow u=-\frac{6}{21}=-\frac{2}{7}$

بالتعويض $4+5t=9+14(-\frac{2}{7})$

$4+5t=9-4\longrightarrow t=\frac{1}{5}$

بالتعويض في $5+10t=3-14u$

$5+10(\frac{1}{5})=3-14(-\frac{2}{7})$

$7=7$

تحقق المعادلة الثالثة فهما متقاطعان

(39) **تحد:** يمر المستقيم l_1 بالنقطة Q التي متجه الموقع لها هو $\vec{q}=\langle -6, 14, -19\rangle$ ويمر أيضاً بالنقطة S التي متجه الموقع لها هو $\vec{s}=\langle -4, 6, -3\rangle$ ويمر المستقيم l_2 بالنقطة $T(1, 9, 9)$ ويوازي المستقيم $\vec{r}=\langle 0, -6, 1\rangle+t\langle 4, 7, 4\rangle$ إذا تقاطع المستقيم l_1 والمستقيم l_2 في النقطة U فأثبت أن المثلث STU متطابق الضلعين.

الحل:

$l_1=\overrightarrow{qs}=\langle -4-(-6), 6-14, -3-(-19)\rangle$

$=\langle 2, -8, 16\rangle$

$\vec{r}_1=\vec{r}_0+t\vec{v}=\langle -6, 14, -19\rangle+u\langle 2, -8, 16\rangle$

$l_2=\langle 1, 9, 9\rangle+t\langle 4, 7, 4\rangle$

$l_1=l_2$

$\langle -6, 14, -19\rangle+u\langle 2, -8, 16\rangle$

$=\langle 1, 9, 9\rangle+t\langle 4, 7, 4\rangle$

$$-6+2u=1+4t \qquad 4$$
$$14-8u=9+7t \qquad 1$$

$$-24+8u=4+16t$$
$$14-8u=9+7t$$

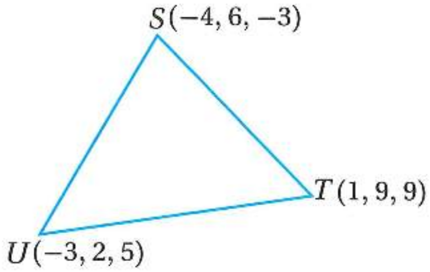
$-10=13+23t\longrightarrow t=-1$

بالتعويض $-6+2u=1+-4$

$\longrightarrow u=\frac{3}{2}$

نقطة التقاطع U

$U=(1, 9, 9)+-1(4, 7, 4)=(-3, 2, 5)$



$ST=\sqrt{(1-(-4)^2+(9-6)^2+9-(-3)^2}$

$=\sqrt{25+9+144}=\sqrt{178}$

$SU=\sqrt{(4-(-3)^2+(6-2)^2+(-3-5)^2}$

$=\sqrt{1+16+64}=\sqrt{81}=9$

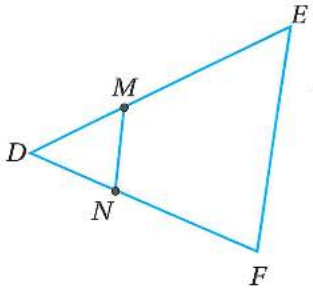
$UT=\sqrt{(1-(-3)^2+(9-2)^2+(9-5)^2}$

$=\sqrt{16+49+16}=\sqrt{81}=9$

$SU=ST$

المثلث متطابق الضلعين.

تبرير: في الشكل المجاور $DF=8\vec{b}$ و $DE=12\vec{a}$ والنقطة M تقسم DE بنسبة 1 : 2 والنقطة N تقسم DF بنسبة 1 : 2



40 أثبت أن $FEMN$ شبه منحرف

الحل:

$$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DE} = -8\vec{b} + 12\vec{a}$$

$$\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{ND} + \overrightarrow{DM} = \frac{1}{3}(-8\vec{b} + \frac{1}{3}(12\vec{a})$$

$$\overrightarrow{NM} = \frac{1}{3}\ \overrightarrow{FE}$$

$$\overrightarrow{NM} \parallel \overrightarrow{FE}$$

فيكون $FEMN$ شبه منحرف

41 إذا كانت مساحة المثلث DEF تساوي 72 وحدة مربعة فأجد مساحة $FEMN$

الحل:

مساحة المثلث DEF تساوي

$$\frac{1}{2}(DE)(DF)\sin D = 72$$

مساحة المثلث DNM تساوي

$$\frac{1}{2}(DN)(DM)\sin D$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{1}{3}DE)(\frac{1}{3}DF)\sin D = \frac{1}{9}(72) = 8$$

مساحة الشكل $FEMD = 72 - 8 = 64$

42 تبرير: تقع النقطة C على المستقيم الذي يحوي النقطتين: $A(13, -10, 15)$ و $B(22, -22, 9)$ إذا كان بعد C عن B مثلي بعد C عن A فأجد جميع إحداثيات النقطة C الممكنة مبرراً إجابتي

الحل:

$$\overrightarrow{AB} = \langle 9, -12, -6\rangle$$

يمكن تبسيط اتجاه $\overleftrightarrow{AB}$: $\vec{v} = \langle 3, -4, -2\rangle$

إذن معادلة $\overleftrightarrow{AB}$ هي :

$$\vec{r} = \langle 13, -10, 15\rangle + t\langle 3, -4, -2\rangle$$

النقطة الواقعة على $\overleftrightarrow{AB}$ تكون إحداثياتها على الصورة:

$$C = (13 + 3t, -10 - 4t, 15 - 2t)$$

$$BC = 2AC \Rightarrow (BC)^2 = 4(AC)^2$$

$$\Rightarrow (13 + 3t - 22)^2 + (-10 - 4t + 22)^2 + (15 - 2t - 9)^2$$

$$= 4((3t)^2 + (-4t)^2 + (-2t)^2)$$

$$\Rightarrow 87t^2 + 174t - 261 = 0$$

$$\Rightarrow t^2 + 2t - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (t + 3)(t - 1) = 0$$

$$\Rightarrow t = -3, \quad t = 1$$

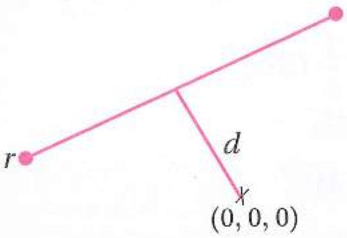
$$t = -3 \Rightarrow C(4, 2, 21)$$

$$t = 1 \Rightarrow C(16, -14, 13)$$

43 تحد: أجد جميع النقاط على المستقيم $\vec{r} = \langle 3, -2, -6\rangle + t\langle 1, 2, 3\rangle$ التي تبعد 29 وحدة عن نقطة الأصل.

الحل:

$$\vec{r} = \langle (3 + t), (-2 + 2t), (-6 + 3t)\rangle$$



$$d = \sqrt{(3+t)^2 + (-2+2t)^2 + (-6+3t)^2} = 29$$

$$= (3+t)^2 + (-2+2t)^2 + (-6+3t)^2 = 29^2$$

$$= 9+6t+t^2 + 4-8t+4t^2 + 36-36t+9t^2 = 841$$

$$(14t^2 - 38t - 792 = 0) \quad \div 2$$

$$7t^2 - 19t - 396 = 0$$

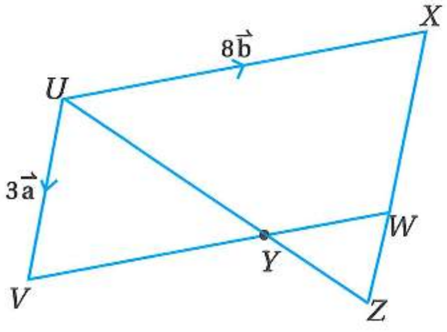
$$(t - 9)(7t + 44) = 0$$

$$t = 9, \quad t = \frac{-44}{7}$$

$t = 9$: النقطة $(12, 16, 21)$

$t = \frac{-44}{7}$: النقطة $(\frac{-23}{7}, \frac{-102}{7}, \frac{-174}{7})$

44 **تحد:** يمثل الشكل المجاور متوازي الأضلاع $UVWX$ إذا كان: $\overrightarrow{UX} = 8\vec{b}$ و $\overrightarrow{UV} = 3\vec{a}$ وكانت النقطة Y تقع بين V و W حيث $VY = 3YW$ و Z هي نقطة حيث $\overrightarrow{XZ} = \frac{4}{3}\overrightarrow{XW}$ فأثبت أن U و Y و Z تقع على استقامة واحدة.



الحل:

$$\overrightarrow{UY} = \overrightarrow{UV} + \overrightarrow{VY}$$

$$\overrightarrow{UY} = 3\vec{a} + \frac{3}{4}\overrightarrow{VW}$$

$$= 3\vec{a} + \frac{3}{4}(8\vec{b})$$

$$= 3\vec{a} + 6\vec{b}$$

$$\overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{YW} + \overrightarrow{WZ}$$

$$= \frac{1}{4}(8\vec{b}) + \frac{1}{3}(3\vec{a})$$

$$= 2\vec{b} + \vec{a}$$

$$\overrightarrow{UY} = 3\,\overrightarrow{YZ}$$

فيكون $\overrightarrow{UY} \parallel \overrightarrow{YZ}$

إذن هي على استقامة واحدة.

كتاب التمارين ص 24

أبين إذا كان الشكل الرباعي $ABCD$ في الحالتين الآتيتين متوازي أضلاع أم لا، مبرراً إجابتي:

1 $A(3, -2, 1), B(-4, 0, 8), C(-6, 5, 5), D(8, 1, -9)$

الحل:

$$AB = (-4 - 3, 0 -(-2), 8 - 1)$$

$$= (-7, 2, 7)$$

$$CD = (8 - (-6), 1 - 5, -9 - 5)$$

$$= (14, -4, -14)$$

$$\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB} \longrightarrow \overrightarrow{CD} \parallel \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{BC} = (-6 -(-4), 5 - 0, 5 - 8)$$

$$= (-2, 5, -3)$$

$$\overrightarrow{DA} = (3 - 8, -2 - 1, -9 - 1)$$

$$= (-5, -3, -10)$$

$$\overrightarrow{BC} \neq k\overrightarrow{DA}$$

إذن $\overrightarrow{DA}$ لا يوزاي $\overrightarrow{BC}$ الشكل ليس متوازي أضلاع

2 $A(12, 5, -8), B(6, 2, -10), C(-8, 1, 13), D(-2, 4, 15)$

الحل:

$$\overrightarrow{AB} = (6 - 12, 2 - 5, -10 - (-8))$$

$$= (-6, -3, -2)$$

$$\overrightarrow{CD} = (-2 -(-8), 4 - 1, 15 - 13)$$

$$= (6, 3, 2)$$

$$\overrightarrow{CD} = -1\overrightarrow{AB} \longrightarrow \overrightarrow{CD} \parallel \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{BC} = (-8 - 6, 1 - 2, 13 - (-10))$$

$$= (-14, -1, 23)$$

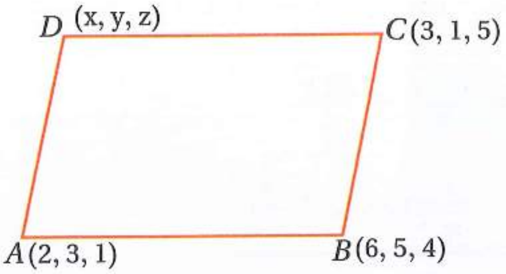
$$\overrightarrow{AD} = (-2 - 12, 4 - 5, 15 - (-8))$$

$$= (-14, -1, 23)$$

$$\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{AD}$$

فيكون الشكل متوازي أضلاع

③ إذا كانت: $C(3, 1, 5)$ و $B(6, 5, 4)$، $A(2, 3, 1)$ وكان $ABCD$ متوازي أضلاع فما إحداثيات D



الحل:

$$\overrightarrow{AB} = (6-3, 5-3, 4-1)$$
$$= (4, 2, 3)$$
$$\overrightarrow{CD} = (3-x, 1-y, 5-z)$$
$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD} \longrightarrow (4, 2, 3) = (3-x, 1-y, 5-z)$$

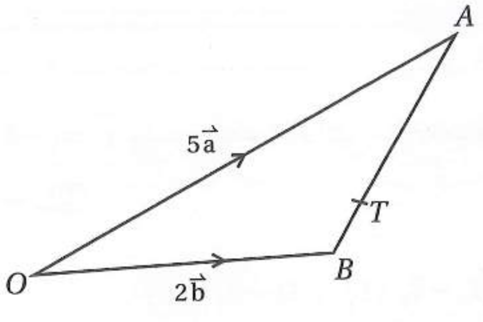
$3 = 5 - z$	$2 = 1 - y$	$4 = 3 - x$
$z = 2$	$y = -1$	$x = -1$

$D(-1, -1, 2)$ or $(7, 3, 8)$

④ OAB مثلث فيه $\overrightarrow{OA} = 5\vec{a}$ و $\overrightarrow{OB} = 2\vec{b}$

والنقطة T تقع على الضلع AB حيث $AT : TB = 5 : 1$

أبين أن $\overrightarrow{OT}$ يوازي $2\vec{b} + \vec{a}$



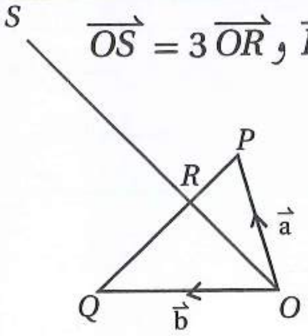
الحل:

$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BT}$$
$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{BA}$$
$$= 2\vec{b} + \frac{1}{6}(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB})$$
$$= 2\vec{b} + \frac{1}{6}(5\vec{a} - 2\vec{b})$$
$$= 2\vec{b} + \frac{5}{6}\vec{a} - \frac{2}{6}\vec{b}$$
$$= \frac{10}{6}\vec{b} + \frac{5}{6}\vec{a}$$
$$= \frac{5}{6}(2\vec{b} + \vec{a})$$

فيكون $\overrightarrow{OT} \parallel 2\vec{b} + \vec{a}$

OPQ مثلث فيه $\overrightarrow{RQ} = 2\,\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{OS} = 3\,\overrightarrow{OR}$

و $\overrightarrow{OP} = \vec{a}$ و $\overrightarrow{OQ} = \vec{b}$



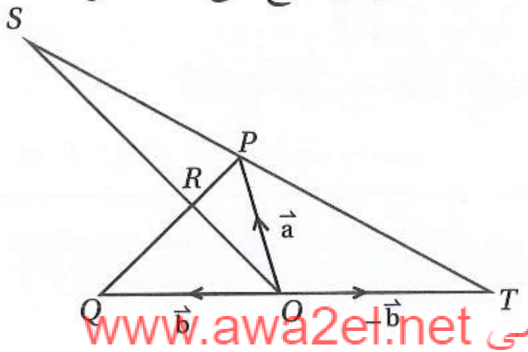
⑤ أبين أن: $\overrightarrow{OS} = 2\vec{a} + \vec{b}$

الحل:

$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$$
$$= \vec{a} - \vec{b}$$
$$\overrightarrow{QR} = \frac{2}{3}\overrightarrow{QP} = \frac{2}{3}(\vec{a} - \vec{b})$$
$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{OQ}$$
$$= \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$$
$$\overrightarrow{OS} = 3\,\overrightarrow{QR} = 3(\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b})$$
$$= 2\vec{a} + \vec{b}$$

⑥ أضيف النقطة T إلى الشكل حيث $\overrightarrow{OT} = -\vec{b}$

أثبت أن النقاط S, P, T تقع على استقامة واحدة.



الحل:

$$\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{OT}$$

$$\overrightarrow{TS} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{TO}$$

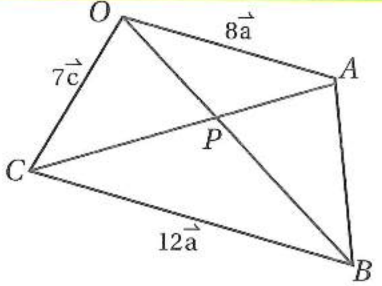
$$= 2\vec{a} + \vec{b} + \vec{b} = 2\vec{a} + 2\vec{b}$$

$$\overrightarrow{TP} = \vec{b} + \vec{a}$$

$$\overrightarrow{TS} = 2\,\overrightarrow{TP}$$

$$\overrightarrow{TS} \parallel \overrightarrow{TP}$$

النقاط S, P, T تقع على استقامة واحدة.



في الشكل الرباعي $OABC$ المجاور

و $\overrightarrow{OA} = 8\vec{a}$

و $\overrightarrow{OC} = 7\vec{c}$

و $\overrightarrow{CB} = 12\vec{a}$

والنقطة P تقسم $\overrightarrow{CA}$ بنسبة $3 : 2$

⑦ أجد المتجه $\overrightarrow{OP}$ بدلالة $\vec{a}$، و $\vec{c}$.

الحل:

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OP}$$

$$= -7\vec{c} + 8\vec{a}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \frac{3}{5}\overrightarrow{CA}$$

$$= 7\vec{c} + \frac{3}{5}(-7\vec{c} + 8\vec{a})$$

$$= \frac{24\vec{a}}{5} + \frac{14}{5}\vec{c} = \frac{2}{5}(12\vec{a} + 7\vec{c})$$

---

⑧ أثبت أن النقاط O, P, B تقع على استقامة واحدة

الحل:

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB}$$

$$= 7\vec{c} + 12\vec{a}$$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{OB} \longrightarrow \overrightarrow{OP} \parallel \overrightarrow{OB}$$

النقاط O, P, B تقع على استقامة واحدة

---

⑨ أجد النسبة: $OP : PB$

الحل:

$$\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CB}$$

$$= (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OC}) + \overrightarrow{CB}$$

$$= -(\frac{24\vec{a}}{5} + \frac{14}{5}\vec{c}) + 7\vec{c} + 12\vec{a}$$

$$= \frac{36\vec{a}}{5} + \frac{21\vec{c}}{5}$$

$$\frac{\overrightarrow{OP}}{\overrightarrow{PB}} = \frac{\frac{2}{5}(12\vec{a} + 7\vec{c})}{\frac{36\vec{a}}{5} + \frac{21\vec{c}}{5}}$$

$$= \frac{\frac{2}{5}(12\vec{a} + 7\vec{c})}{\frac{3}{5}(12\vec{a} + 7\vec{c})} = \frac{2}{3}$$

---

⑩ أجد معادلة متجهة للمستقيم الذي يوازي المتجه: $\vec{v} = 4\hat{j} - 2\hat{k}$ ويمر بالنقطة A التي متجه موقعها هو $2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$

الحل:

$$\vec{v} = (0, 4, -2)$$

النقطة $(2, 3, -5)$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$$

$$\vec{r} = \langle 2, 3, -5\rangle + t\langle 0, 4, -2\rangle$$

---

⑪ أجد معادلة متجهة للمستقيم الذي يوازي المتجه: $\vec{v} = \langle -4, 5, 8\rangle$ ويمر بالنقطة A التي متجه موقعها هو $\langle 2, -7, 11\rangle$:

الحل:

$$\vec{r} = \langle 2, -7, 11\rangle + t\langle -4, 5, 8\rangle$$

أجد معادلة متجهة للمستقيم المار بالنقطتين في كل مما يأتي:

⑫ $(1, -7)$, $(6, 19)$

الحل:

$$\vec{v} = \langle 6 - 1, 19 - (-7)\rangle = \langle 5, 26\rangle$$

$$\vec{r} = \langle 1, -7\rangle + t\langle 5, 26\rangle$$

⑬ $(-5, 4, 15)$, $(7, 13, -8)$

الحل:

$$\vec{v} = \langle 7-(-5), 13-4, -8-15\rangle$$
$$= \langle 12, 9, -23\rangle$$
$$\vec{r} = \langle -5, 4, 15\rangle + t\langle 12, 9, -23\rangle$$

---

⑭ $(5, 22, -8)$, $(13, 10, 3)$

الحل:

$$\vec{v} = \langle 13-5, 10-22, 3-(-8)\rangle$$
$$= \langle 8, -12, 11\rangle$$
$$\vec{r} = \langle 5, 22, -8\rangle + t\langle 8, -12, 11\rangle$$

---

⑮ $(0, 2, -5)$, $(9, 4, 6)$

الحل:

$$\vec{v} = \langle 9-0, 4-2, 6-(-5)\rangle$$
$$= \langle 9, 2, 11\rangle$$
$$\vec{r} = \langle 0, 2, -5\rangle + t\langle 9, 2, 11\rangle$$

إذا كانت معادلة المستقيم l هي: $\vec{r} = \langle -5, 8, 4\rangle + t\langle 3, -2, 9\rangle$ فأجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعاً:

⑯ هل تقع النقطة $(3, 7, 11)$ على المستقيم l ؟ أبرر إجابتي

الحل:

$$(3, 7, 11) = \langle -5, 8, 4\rangle + t\langle 3, -2, 9\rangle$$

$3 = -5 + 3t$

$8 = 3t$

$t = \frac{8}{3}$

$7 = 8 - 2t$

$2t = 1$

$t = \frac{1}{2}$

مختلفة النقط لا تقع على المستقيم

---

⑰ إذا وقعت النقطة $(1, b, c)$ على المستقيم l فأجد قيمة كل من b و c

الحل:

$$(1, b, c) = \langle -5, 8, 4\rangle + t\langle 3, -2, 9\rangle$$

$1 = -5 + 3t$

$t = 2$

$b = 8 - 2t$

$b = 8 - 4$

$= 4$

$c = 4 + 9t$

$c = 4 + 9(2)$

$= 22$

---

⑱ ما إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم l مع المستوى xz؟

الحل:

النقطة تقطع المستوى xz فتكون $y = 0$

$$(x, 0, z) = \langle -5, 8, 4\rangle + t\langle 3, -2, 9\rangle$$
$$0 = 8 - 2t \longrightarrow t = 4$$
$$x = -5 + 3t = -5 + 12 = 7$$
$$z = 4 + 9t = 4 + 9(4) = 40$$

النقطة هي : $(7, 0, 40)$

---

⑲ إذا كانت $\vec{r} = \langle 3, 2, 1\rangle + t\langle 4, a, -12\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_1 وكانت: $\vec{r} = \langle -2, 4, 3\rangle + u\langle 3, -2, -9\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_2 فأجد قيمة a التي تجعل $l_1 \| l_2$

الحل:

$$(4, a, -12) = d\langle 3, -2, -9\rangle$$
$$a = 3d \longrightarrow d = \frac{4}{3}$$
$$a = \frac{4}{3} \times -2 = -\frac{8}{3}$$

يمر المستقيم l بالنقطتين $U(p, -3, -1)$ و $V(2, 5, -3)$ وتقع النقطة $(7, 1, q)$ على l:

⑳ أجد قيمة p

الحل:

$$\overrightarrow{VU} = (p-2, -3-5, -1-(-3))$$
$$= (p-2, -8, 2)$$
$$(7, 1, q) = (2, 5, -3) + t\langle p-2, -8, 2\rangle$$

$1 = 5 - 8t \longrightarrow t = \frac{1}{2}$

$7 = 2 + t\,(p - 2)$

$5 = \frac{1}{2}\,(p - 2)$

$10 = p - 2 \longrightarrow p = 12$

21 أكتب معادلة متجهة للمستقيم l

الحل:

$\overrightarrow{VU} = l = (2, 5, -3) + t\langle 10, -8, 2\rangle$

22 أجد قيمة q

الحل:

$q = -3 + t(2)$

$q = -3 + \frac{1}{2}\,(2) = -3 + 1 = -2$

23 إذا كانت: $A(3,\ -2,\ 4)$ وكانت $B(6,\ 0,\ 3)$ وكانت معادلة المستقيم l_1 هي: $\vec{r} = \langle 3, -2, 4\rangle + \lambda\langle 1, 2, -1\rangle$ وكانت النقطة D تقع على المستقيم l_1 حيث: $\lambda = 2$ فأجد معادلة المستقيم l_2 الذي يمر بالنقطة D ويوازي المستقيم AB

الحل:

$\vec{D} = \langle 3, -2, 4\rangle + 2\langle 1, 2, -1\rangle = \langle 5, 2, 2\rangle$

$\overrightarrow{AB} = \langle 3, 2, -1\rangle$

$l_2 = \langle 5, 2, 2\rangle + t\,\langle 3, 2, -1\rangle$

أحدد إذا كان المستقيمان: l_1 و l_2 متوازيين، أو متخالفين، أو متقاطعين، ثم أجد إحداثيات نقطة التقاطع إن كانا متقاطعين في كل مما يأتي:

24 مرور المستقيم l_1 بالنقطتين: $(5, 2, 1)$ و $(4, 3, 3)$
ومرور المستقيم l_2 بالنقطتين: $(4, 1, 1)$ و $(5, 1, 0)$

الحل:

$l_1 = (5 - 4, 2 - 3, 1 - 3) = (1, -1, -2)$

$l_2 = (4 - 5, 1 - 1, 1 - 0) = (-1, 0, 1)$

l_1 لا يوازي l_2

$l_1 = \langle 4, 3, 3\rangle + t\langle 1, -1, -2\rangle$

$l_2 = \langle 5, 1, 0\rangle + u\langle -1, 0, 1\rangle$

$l_1 = l_2$

$4 + t = 5 - u$	$4 + t = 5 + 1$	$3 - 2t = 0 + u$
$3 - t = 1 + 0$	$t = 2$	$3 - 4 = 0 - 1$
$u = -1$		$-1 = -1$

تحقق فهما متقاطعان

25 مرور المستقيم l_1 بالنقطتين: $(5, 3, 1)$ و $(3, 1, -2)$
ومرور المستقيم l_2 بالنقطتين: $(11, 7, -3)$ و $(9, 6, -2)$

الحل:

$l_1 = (5 - 3, 3 - 1, 1 - (-2)) = (2, 2, 3)$

$l_2 = (11 - 9, 7 - 6, -3 - (-2)) = (2, 1, -1)$

l_1 لا يوازي l_2

$l_1 = \langle 3, 1, -2\rangle + t\langle 2, 2, 3\rangle$

$l_2 = \langle 9, 6, -2\rangle + u\langle 2, 1, -1\rangle$

$l_1 = l_2$

$3 + 2t = 9 + 2u$

$1 + 2t = 6 + u$

$2 = 3 + u$ بالطرح

$u = -1$

$3 + 2t = 9 - 2$ بالتعويض

$2t = 7 - 3 = 4$

$t = 2$

$-2 + 3t = -2 - u$ نختبر

$-2 + 6 = -2 + 1$

$4 \neq -1$ غير متقاطعين

إذن هما متخالفان

26 يمر المستقيم l بالنقطتين: $A(2, 1, 3)$ و $B(5, -2, 1)$ إذا وقعت النقطة C على المستقيم l وكان $AC = 3CB$ فأجد جميع إحداثيات النقطة C الممكنة

الحل:

$$\overrightarrow{AB} = (3, -3, -2)$$

$$\vec{r} = (2, 1, 3) + t\,(3, -3, -2)$$

$$\overrightarrow{OC} = (2 + 3t, 1 - 3t, 3 - 2t)$$

$$AC = 3CB \longrightarrow |\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}| = 3|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}|$$

$$\Rightarrow \sqrt{(2+3t-2)^2 + (1-3t-1)^2 + (3-2t-3)^2}$$

$$\rightarrow 8t^2 - 18t + 9 = 0$$

$$(2t - 3)\,(4t - 3) = 0$$

$$t = \frac{3}{2} \rightarrow C = (\frac{13}{2}, \frac{-7}{2}, 0)$$

$$t = \frac{3}{4} \rightarrow C = (\frac{17}{4}, \frac{-5}{4}, \frac{3}{2})$$

---

27 المستقيمات الآتية معادلاتها هي: $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ و $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ و $\vec{r}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ أبين أن هذه المستقيمات تكون مثلثاً، ثم أجد أطوال أضلاعه

الحل:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_2 \;\rightarrow\; (0, 4, -2)$$

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_3 \;\rightarrow\; (2, -1, 0)$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_3 \;\rightarrow\; (-3, 1, 4)$$

بما أن المستقيمات الثلاثة متقاطعة إذن هي تكون مثلث

إحداثيات رؤوس المثلث (نقاط تقاطع المستقيمات) هي:

$$p_1\,(0, 4, -2)\;,\; p_2\,(2, -1, 0)\;,\; p_3\,(-3, 1, 4)$$

$$p_1p_2 = \sqrt{(2-0)^2 + (-1-4)^2 + (0--2)^2}$$

$$= \sqrt{33}$$

$$p_1p_3 = \sqrt{(-3-0)^2 + (1-4)^2 + (4--2)^2}$$

$$= \sqrt{54}$$

$$p_2p_3 = \sqrt{(-3-2)^2 + (1--1)^2 + (4-0)^2}$$

$$= \sqrt{45}$$

الدرس الثالث

الضرب القياسي

مفهوم أساسي

إذا كان $\vec{v} = \langle v_1 , v_2 , v_3 \rangle$، $\vec{w} = \langle w_1 , w_2 , w_3 \rangle$

فإن:

$$\vec{v} . \vec{w} = v_1 . w_1 + v_2 . w_2 + v_3 . w_3$$

مثال

جد ناتج الضرب القياسي للمتجهين فيما يلي:

1) $\vec{a} = \langle 2, -5, 7 \rangle$, $\vec{b} = \langle -3, 2, 4 \rangle$

الحل

$$\vec{a} . \vec{b} = 2(-3) + (-5)(2) + 7(4)$$

$$= -6 - 10 + 28 = 12$$

2) $\vec{d} = \langle 5\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k} \rangle$, $\vec{b} = \langle \hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k} \rangle$

الحل

$$\vec{d} . \vec{b} = 5(1) + 2(-3) + 4(2)$$

$$= 5 - 6 + 8 = 7$$

الزاوية بين متجهين في الفضاء

تعلم أن:

$$\vec{v} . \vec{w} = |\vec{v}| . |\vec{w}| \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{v} . \vec{w}}{|\vec{v}| . |\vec{w}|}$$

لذلك: $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{v} . \vec{w}}{|\vec{v}| . |\vec{w}|}\right)$

مثال

جد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\vec{v}$ ، $\vec{w}$ حيث:

1) $\vec{v} = \langle 1, 2, -2 \rangle$, $\vec{w} = \langle 3, 1, 1 \rangle$

الحل

$$\vec{v} . \vec{w} = (1 \times 3) + (2 \times 1) + (-2 \times 1)$$

$$= 3 + 2 - 2 = 3$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$|\vec{w}| = \sqrt{(3)^2 + (1)^2 + (1)^2} = \sqrt{10}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{v} . \vec{w}}{|\vec{v}| . |\vec{w}|}\right) = \frac{3}{3\sqrt{10}}$$

$$\theta = 71.56^\circ$$

2) $\vec{a} = \langle 5\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k} \rangle$, $\vec{b} = \langle 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k} \rangle$

الحل

$$\vec{a} . \vec{b} = (5(2)) + (-3(3)) + (4(-1))$$

$$= 10 - 9 - 4 = -3$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(5)^2 + (-3)^2 + (4)^2} = \sqrt{50}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(2)^2 + (3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{-3}{\sqrt{50(14)}} = (96.51^\circ)$$

أتحقق من فهمي

صفحة (144): أجد ناتج الضرب القياسي للمتجهين في كل مما يأتي:

a) $\vec{v} = \langle 4, 8, -3 \rangle$, $\vec{w} = \langle -3, 7, 2 \rangle$

الحل:

$$\vec{v} . \vec{w} = (4(-3)) + (8(7)) + (2(-3))$$

$$= -12 + 56 - 6 = 38$$

b) $\vec{m} = -3\hat{i} + 5\hat{j} - \hat{k}$, $\vec{n} = -12\hat{i} + 6\hat{j} - 8\hat{k}$

الحل:

$$\vec{m} . \vec{n} = (-3(-12) + 5(6) + (-1(-8))$$

$$= 36 + 30 + 8 = 74$$

أتحقَّق من فهمي

صفحة (146): أجد قياس الزاوية θ بين المتجه $\vec{u}$ والمتجه $\vec{w}$ في كل مما يأتي مقرباً الناتج إلى أقرب عشر درجة:

a) $\vec{u} = -3\hat{i}+5\hat{j}-4\hat{k}$, $\vec{w} = 4\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$

الحل:

$$\vec{u}.\vec{w} = (-3(4)) + (5(2)) + (-4(-3))$$

$$= -12 + 10 + 12 = 10$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{9+25+16} = \sqrt{50}$$

$$|\vec{w}| = \sqrt{16+4+9} = \sqrt{29}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{10}{\sqrt{50}\,.\,\sqrt{29}} = 74.77^\circ \approx 74.8^\circ$$

b) $\vec{u} = \langle 2, -10, 6\rangle$, $\vec{w}\langle -3, 15, -9\rangle$

الحل:

$$\vec{u}.\vec{w} = (2(-3) + (-10(15) + (6(-9))$$

$$= -6 - 150 - 54 = -210$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{4+100+36} = \sqrt{140}$$

$$|\vec{w}| = \sqrt{9+225+81} = \sqrt{315}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{-210}{\sqrt{140}\,.\,\sqrt{315}}$$

$$= \cos^{-1}(-1) = 180^\circ$$

الـزاويـة بين مستقيمين في الفضاء

يمكن إيجاد الزاوية بين مستقيمين وذلك بإيجاد الزاوية بين اتجاهيهما.

مثـــال

إذا كانت معادلة l_1 هي $\vec{r} = \begin{pmatrix}2\\-5\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}$ ومعادلة l_2 هي $\vec{r} = \begin{pmatrix}1\\0\\7\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}-3\\2\\-3\end{pmatrix}$ جد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين l_1, l_2

الحـــل

نحدد اتجاه كل من l_1, l_2

$$\vec{v} = \begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}\ \vec{w} = \begin{pmatrix}-3\\2\\-3\end{pmatrix}$$

$$\vec{v}.\vec{w} = (4(-3)) + (3(2)) + (2(-3))$$

$$= -12 + 6 - 6 = -12$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{16+9+4} = \sqrt{29}$$

$$|\vec{w}| = \sqrt{9+4+9} = \sqrt{22}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{-12}{\sqrt{29}\,.\,\sqrt{22}} = 118.36^\circ$$

الحادة هي : $180^\circ - 118.36^\circ = 61.64^\circ$

أتحقَّق من فهمي

صفحة (147):

إذا كانت معادلة l_1 هي $\vec{r} = \begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\-5\\-1\end{pmatrix}$ ومعادلة l_2 هي $\vec{r} = \begin{pmatrix}5\\3\\0\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$ فأجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيم l_1 والمستقيم l_2 إلى أقرب درجة.

الحل:

نحدد اتجاه كل مستقيم

$$\vec{v} = \begin{pmatrix}2\\-5\\-1\end{pmatrix}\ ,\ \vec{w} = \begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$$

$$\vec{v}.\vec{w} = (2(1)) + (-5(0)) + (-1(-3))$$

$$= 2 + 0 + 3 = 5$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{4+25+1} = \sqrt{30}$$

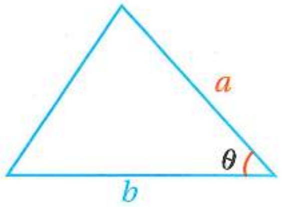
$$|\vec{w}| = \sqrt{1+0+9} = \sqrt{10}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{5}{\sqrt{30}\,.\,\sqrt{10}} = 73.22^\circ$$

إيجاد مساحة المثلث باستعمال المتجهات

تعلم أن مساحة المثلث هي:

$$A = \frac{1}{2}\ a \,.\, b \sin\theta$$



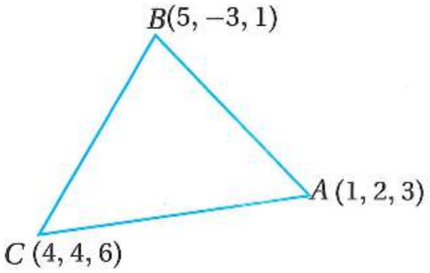
لذلك لإيجاد المساحة يجب تحديد متجهين لهما نفس نقطة البداية ثم نجد الزاوية بينهما.

مثال

جد مساحة المثلث الذي رؤوسه

$A(1, 2, 3)$, $B(5, -3, 1)$, $C(4, 4, 6)$

الحل



$$\overrightarrow{AC} = (4-1, 4-2, 6-3) = (3, 2, 3)$$

$$\overrightarrow{AB} = (5-1, -3-2, 1-3) = (4, -5, -2)$$

$$\overrightarrow{AC} \,.\, \overrightarrow{AB} = (3(4) + 2(-5) + 3(-2))$$

$$= 12 - 10 - 6 = -4$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{9+4+9} = \sqrt{22}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{16+25+4} = \sqrt{45}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{-4}{\sqrt{22}\,.\,\sqrt{45}} = 97.30^\circ$$

$$\text{Area} = \frac{1}{2}\ |\overrightarrow{AC}| \,.\, |\overrightarrow{AB}| \sin\theta$$

$$= \frac{1}{2}\ \sqrt{22}\ .\ \sqrt{45}\ \ \sin 97.30^\circ = 15.6$$

أتحقّق من فهمي

صفحة (149): أجد مساحة المثلث EFG الذي إحداثيات رؤوسه هي :

$E(2, 1, -1)$, $F(5,1, 7)$, $G(6, -3, 1)$

الحل:

$$\overrightarrow{EF} = (5-2, 1-1, 7-(-1)) = (3, 0, 8)$$

$$\overrightarrow{EG} = (6-2, -3-1, 1-(-1)) = (4, -4, 2)$$

$$\overrightarrow{EF} \,.\, \overrightarrow{EG} = (3(4) + 0(-4) + 8(2))$$

$$= 12 + 0 + 16 = 28$$

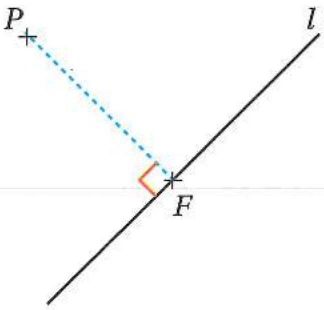
$$|\overrightarrow{EF}| = \sqrt{9+0+64} = \sqrt{73}$$

$$|\overrightarrow{EG}| = \sqrt{16+16+4} = \sqrt{36}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{28}{\sqrt{73}\,.\,\sqrt{36}} = 56.89^\circ$$

$$\text{Area} = \frac{1}{2}\ \sqrt{73}\ .\ \sqrt{36}\ \ \sin 56.89^\circ = 21.47$$

مسقط العمود على مستقيم من نقطة خارجه



إذا كانت النقطة $P(3, -4, 2)$ لا تقع على المستقيم l ورسم مستقيم من P عمودي على l فإن النقطة F هي مسقط العمود من النقطة P على المستقيم l وطول $\overrightarrow{PF}$ يمثل البعد بين النقطة P والمستقيم l

ولأن ناتج الضرب القياسي للمتجهين المتعامدين يساوي صفراً. فنحدد احداثيات F

مثال

إذا كانت معادلة المستقيم l هي:

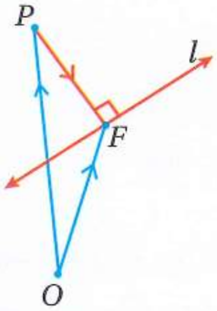
$$\vec{r} = \langle 28, -10, -4\rangle + t\langle 8, 3, -6\rangle$$

والنقطة $P(3, -4, 2)$ غير واقعة على المستقيم l

1) أحدد مسقط العمود من النقطة P على المستقيم l

الحل

نفرض أن النقطة F هي مسقط العمود ويحدد متجه موقع النقطة F احدى قيم المتغير t في معادلة المستقيم l



$\overrightarrow{OF} = (28 + 8t, -10 + 3t, -4 - 6t)$

ويكون $\overrightarrow{PF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OP}$

$= (28 + 8t, -10 + 3t, -4 - 6t) - (3, -4, 2)$

$= (25 + 8t, -6 + 3t, -6 - 6t)$

ولأن $\overrightarrow{PF} \perp l$

لذلك $\overrightarrow{PF} \,.\, l = 0$

$(25 + 8t, -6 + 3t, -6 - 6t).\,(8, 3, -6) = 0$

$(25 + 8t)(8) + (-6 + 3t)(3) + (-6 - 6t)(-6) = 0$

$= 200 + 64t - 18 + 9t + 36 + 36t$

$218 + 109t = 0 \longrightarrow t = -2$

بتعويض قيمة t في معادلة $\overrightarrow{OF}$

$\overrightarrow{OF} = ((28 + 8(-2)) + (-10 + 3(-2)) + (-4 - 6(-2))$

$= (12, -16, 8)$

إذن مسقط العمودي من النقطة P على المستقيم l هو $(12, -16, 8)$

2) أجد البعد بين النقطة P والمستقيم l

الحل

البعد هو طول القطعة المستقيمة من P إلى F وهذا يساوي مقدار المتجهة $\overrightarrow{PF}$

$\overrightarrow{PF} = (25 + 8t) + (-6 + 3t) + (-6 - 6t)$

وبوضع $t = -2$

$\overrightarrow{PF} = (9, -12, 6)$

$|\overrightarrow{PF}| = \sqrt{(9)^2 + (-12)^2 + (6)^2} = \sqrt{261}$

أتحقق من فهمي

صفحة (151): إذا كانت معادلة المستقيم l هي:

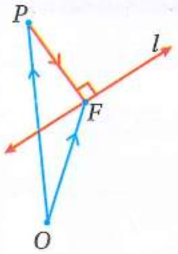
$$\vec{r} = 16\hat{i} + 11\hat{j} - 3\hat{k} + t(5\hat{i} + 7\hat{j} - 3\hat{k})$$

والنقطة $P(2, 0, \frac{10}{3})$ غير واقعة على المستقيم l

فأجيب عن السؤالين الآتيين:

a) أحدد مسقط العمود من النقطة P على المستقيم l

الحل:



$\vec{r} = (16, 11, -3) + t(5, 7, -3)$

نفرض أن النقطة F هي مسقط العمود

$\overrightarrow{OF} = (16 + 5t, 11 + 7t, -3 + -3t)$

$\overrightarrow{PF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OP}$

$= (16 + 5t, 11 + 7t, -3 - 3t) - (2, 0, \frac{10}{3})$

$= (14 + 5t, 11 + 7t, -\frac{19}{3} - 3t)$

ولأن $\overrightarrow{PF} \perp l$

$(14 + 5t, 11 + 7t, -\frac{19}{3} - 3t).\,(5, 7, -3) = 0$

$= 70 + 25t + 77 + 49t + 19 + 9t = 0$

$83t + 166 = 0 \longrightarrow t = -2$

بتعويض قيمة t في معادلة $\overrightarrow{OF}$

$\overrightarrow{OF} = (16 + 5(-2), 11 + 7(-2), -3 - 3(-2))$

$= (6, -3, 3)$

إذن مسقط العمودي هو $(6, -3, 3)$

b) أجد البعد بين النقطة P والمستقيم l

الحل:

$$\overrightarrow{PF} = (14 + 5(-2), 11 + 7(-2), -\frac{19}{3} - 3(-2))$$

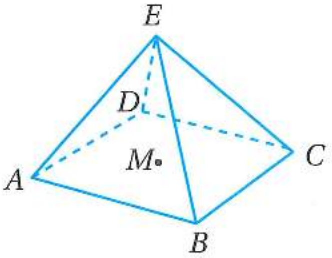
$$= (4, -3, \frac{-1}{3})$$

$$|\overrightarrow{PF}| = \sqrt{(4)^2 + (-3)^2 + (\frac{1}{3})^2}$$

$$= \sqrt{16 + 9 + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{226}{9}} = \text{البعد}$$

استعمال المتجهات لتحديد قياسات في أشكال ثلاثية الأبعاد

مثال



يظهر في الشكل المجاور الهرم $ABCDE$ الذي قاعدته المربع $ABCD$ وإحداثيات رؤوسه هي:

$A(1, 1, -1), B(9, -1, -3), C(9, -7, 3)$

$D(1, -5, 5), E(8, 3, 7)$ ومركزه النقطة M

1) أجد $m\angle AEC$ إلى أقرب عُشر درجة

الحل

الخطوة 1: أحدد متجهين لهما نقطة البداية نفسها والزاوية AEC محصورة بينهما.

للمتجه $\overrightarrow{EA}$ والمتجه $\overrightarrow{EC}$ نقطة البداية نفسها، والزاوية AEC محصورة بينهما أكتب هذين المتجهين بالصورة الإحداثية كما يأتي:

$\overrightarrow{EA} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$ الصورة الإحداثية للمتجه

بالتعويض $E(8, 3, 7), A(1, 1, -1)$

$= \langle 1-8, 1-3, -1-7 \rangle$

$= \langle -7, -2, -8 \rangle$ بالتبسيط

بالتعويض $E(8, 3, 7), C(9, -7, 3)$

$$\overrightarrow{EC} = \langle 9-8, -7-3, 3-7 \rangle$$
$$= \langle 1, -10, -4 \rangle$$

الخطوة 2: أستعمل الضرب القياسي لإيجاد قياس $\angle AEC$

- أجد $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EC}$:

$$\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EC} = \langle -7, -2, -8 \rangle . \langle 1, -10, -4 \rangle$$
$$= (-7)(1) - 2(-10) - 8(-4)$$
$$= -7 + 20 + 32 = 45$$

- أجد مقدار كل من المتجه $\overrightarrow{EA}$ والمتجه $\overrightarrow{EC}$:

$$|\overrightarrow{EA}| = \sqrt{(-7)^2 + (-2)^2 + (-8)^2} = \sqrt{117}$$
$$|\overrightarrow{EC}| = \sqrt{(1)^2 + (-10)^2 + (-4)^2} = \sqrt{117}$$

- أجد قياس الزاوية بين المتجه $\overrightarrow{EA}$ والمتجه $\overrightarrow{EC}$:

$$m\angle AEC = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EC}}{|\overrightarrow{EA}| . |\overrightarrow{EC}|}\right)$$
$$= \cos^{-1}\left(\frac{45}{\sqrt{117} \times \sqrt{117}}\right)$$

$\approx 67.4^\circ$ باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، $m\angle AEC \approx 67.\ 4^\circ$

2) أبين أن: $m\angle AME = 90^\circ$

الحل

الخطوة 1: أجد إحداثيات M .

النقطة M هي مركز المربع لذا فهي نقطة منتصف القطر $\overline{AC}$:

إحداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيمة

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

بتعويض إحداثيات A, C

$$=\left(\frac{1+9}{2},\frac{1+(-7)}{2},\frac{-1+3}{2}\right)$$

بالتبسيط

$$=(5,-3,1)$$

الخطوة 2: أحدد متجهين لهما نقطة البداية نفسها والزاوية AME محصورة بينهما.

للمتجه $\overrightarrow{MA}$ والمتجه $\overrightarrow{ME}$ نقطة البداية نفسها، والزاوية AME محصورة بينهما أكتب هذين المتجهين بالصورة الإحداثية كما يأتي:

$$\overrightarrow{MA}=\langle 1-5,1-(-3),-1-1\rangle=\langle -4,4,-2\rangle$$

$$\overrightarrow{ME}=\langle 8-5,3-(-3),7-1\rangle=\langle 3,6,6\rangle$$

الخطوة 3: أجد $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{ME}$

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{ME}=\langle -4,4,-2\rangle\cdot\langle 3,6,6\rangle$$

$$=(-4)(3)+4(6)-2(6)$$

$$=-12+24-12=0$$

بما أن : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{ME}=0$ فإن $\overrightarrow{MA}$ و $\overrightarrow{ME}$ متعامدان لذا

فإن: $m\angle AMC=90°$

أتحقّق من فهمي

صفحة (154):

a) أجد قياس $\angle EDB$ في الهرم المبين في المثال السابق

الحل:

$$\overrightarrow{DE}=\langle 7,8,2\rangle$$

$$\overrightarrow{DB}=\langle 8,4,-8\rangle$$

$$|\overrightarrow{DB}|=\sqrt{64+16+64}=12$$

$$|\overrightarrow{DE}|=\sqrt{49+64+4}=\sqrt{117}$$

$$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DB}=\langle 7,8,2\rangle\cdot\langle 8,4,-8\rangle$$

$$=(7)(8)+(8)(4)+(2)(-8)$$

$$=56+32-16=72$$

$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{72}{\sqrt{117}\times 12}\right)=56.3°$$

b) أجد حجم الهرم

الحل:

M منتصف القطر $\overline{AC}$:

$$M=\left(\frac{1+9}{2},\frac{1+(-7)}{2},\frac{-1+3}{2}\right)$$

$$=(5,-3,1)$$

$$\overrightarrow{ME}=\langle 8-5,3-(-3),7-1\rangle=\langle 3,6,6\rangle$$

$$|\overrightarrow{ME}|=\sqrt{9+36+36}=\sqrt{81}=9$$

طول أحد أضلاع المربع ليكن مثلاً AB

$$\overrightarrow{AB}=\langle 9-1,-1-1,-3-(-1)\rangle=\langle 8,-2,-2\rangle$$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{64+4+4}=\sqrt{72}$$

حجم الهرم $=\frac{1}{3}\times$ مساحة القاعدة $\times$ الارتفاع

$$=\frac{1}{3}\times(\sqrt{72})^2(9)=216$$

أتدرّب وأحلُّ المسائل

أجد ناتج الضرب القياسي للمتجهين في كل مما يأتي:

① $\vec{u} = 5\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}\ ,\ \vec{v} = 7\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$

الحل:

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = (5(7)) + (-4(6)) + (3(-2))$$
$$= 35 - 24 - 6 = 5$$

② $\vec{u} = 4\hat{i} - 8\hat{j} - 3\hat{k}\ ,\ \vec{v} = 12\hat{i} + 9\hat{j} - 8\hat{k}$

الحل:

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = (4(12)) + (-8(9)) + (-3(-8))$$
$$= 48 - 72 + 24 = 0$$

③ $\vec{u} = \langle -5, 9, 17 \rangle\ ,\ \vec{v} = \langle 4, 6, -2 \rangle$

الحل:

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = (-5(4)) + (9(6)) + (17(-2))$$
$$= -20 + 54 - 34 = 0$$

④ $\vec{u} = \langle 1, -4, 12 \rangle\ ,\ \vec{v} = \langle 3, 10, -5 \rangle$

الحل:

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = (1(3)) + (-4(10)) + (12(-5))$$
$$= 3 - 40 - 60 = -97$$

أجد قياس الزاوية θ بين المتجهين إلى أقرب عُشر درجة في كل مما يأتي:

⑤ $\vec{m} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}\ ,\ \vec{n} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$

الحل:

$$\vec{m}.\,\vec{n} = (4(3)) + (-2(4)) + (5(-2))$$
$$= 12 - 8 - 10 = -6$$
$$|\vec{m}| = \sqrt{16 + 4 + 25} = \sqrt{45}$$
$$|\vec{n}| = \sqrt{9 + 16 + 4} = \sqrt{29}$$
$$\theta = \cos^{-1} \frac{-6}{\sqrt{45}\,.\,\sqrt{29}} = 99.56^\circ \approx 99.6^\circ$$

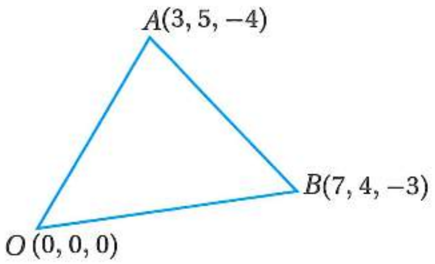
⑥ $\vec{v} = \langle 3, -2, 9 \rangle\ ,\ \vec{w} = \langle 5, 3, -4 \rangle$

الحل:

$$\vec{v}.\,\vec{w} = (3(5)) + (-2(3)) + (9(-4))$$
$$= 15 - 6 - 36 = -27$$
$$|\vec{v}| = \sqrt{9 + 4 + 81} = \sqrt{94}$$
$$|\vec{w}| = \sqrt{25 + 9 + 16} = \sqrt{50}$$
$$\theta = \cos^{-1} \frac{-27}{\sqrt{94}\,.\,\sqrt{50}} = 113.19^\circ \approx 113.2^\circ$$

⑦ إذا كانت $A(3, 5, -4)$ و $B(7, 4, -3)$ و O نقطة الأصل فأجد $m\angle OAB$ إلى أقرب درجة

الحل:



$$\overrightarrow{AO} = (0-3,\ 0-5,\ 0-(-4)) = (-3, -5, 4)$$
$$\overrightarrow{AB} = (7-3,\ 4-5,\ -3-(-4)) = (4, -1, 1)$$
$$\overrightarrow{AO}\,.\,\overrightarrow{AB} = (-3(4) + -5(-1) + 4(1))$$
$$= -12 + 5 + 4 = -3$$
$$|\overrightarrow{AO}| = \sqrt{9 + 25 + 16} = \sqrt{50}$$
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{16 + 1 + 1} = \sqrt{18}$$
$$\theta = \cos^{-1} \frac{-3}{\sqrt{50}\,.\,\sqrt{18}} = 95.7^\circ \approx 96^\circ$$

⑧ يمر المستقيم l_1 بالنقطتين: $(-3, 5, 7)$ و $(2, -1, 4)$ ويمر المستقيم l_2 بالنقطتين: $(1, 2, -1)$ و $(6, -5, 3)$ أجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيم l_2 والمستقيم l_1 إلى أقرب عُشر درجة.

الحل:

$l_1 : (2, -1, 4)\ ,\ (-3, 5, 7)$

$\vec{v} = (2-(-3),\ -1-5, 4-7) = (5, -6, -3)$

$l_2 : (6, -5, 3)\ ,\ (1, 2, -1)$

$\vec{w} = (6-1, -5-2, 3-(-1)) = (5, -7, 4)$

$$\vec{v}\,.\,\vec{w} = (5(5)) + (-6(-7)) + (-3(4))$$
$$= 25 + 42 - 12 = 55$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{25 + 36 + 9} = \sqrt{70}$$

$$|\vec{w}| = \sqrt{25 + 49 + 16} = \sqrt{90}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{55}{\sqrt{70}\,.\,\sqrt{90}} = 46.13^\circ \approx 46.1^\circ$$

---

⑨ إذا كان المستقيم الذي معادلته:

$$\vec{r} = \langle 1, 4, -5\rangle + \lambda\langle -6, q+5, 3\rangle$$

والمستقيم الذي معادلته:

$$\vec{r} = \langle 1, 4, -5\rangle + \mu\langle 5, q-6, -4\rangle$$

متعامدين، فما القيم الممكنة للثابت q؟

الحل:

$\vec{v} = (-6, q+5, 3)$

$\vec{w} = (5, q-6, -4)$

$$\vec{v}\,.\,\vec{w} = (-6(5)) + (q+5)(q-6) + (3(-4))$$
$$= -30 + q^2 - q - 30 - 12 = 0$$

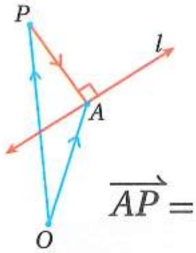
$$q^2 - q - 72 = 0$$

$$(q-9)(q+8) = 0 \longrightarrow q = 9, -8$$

إذا كانت $\vec{r} = 2\hat{j} - 3\hat{k} + t\langle -\hat{i} + 2\hat{j} + 5\hat{k}\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l والنقطة $P(-2, 22, 5)$ غير واقعة على المستقيم l فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

⑩ أحدد مسقط العمود من النقطة P على المستقيم l

الحل:



$$\overrightarrow{OA} = (0, 2, -3) + t(-1, 2, 5)$$
$$= \langle -t, 2+2t, -3+5t\rangle$$

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AP} = \langle -2+t, 22-(2+2t), 5-(3+5t)\rangle$$
$$= \langle -2+t, 20-2t, 8-5t\rangle$$

$$\overrightarrow{AP} \perp l \longrightarrow \overrightarrow{AP}\,.\,\vec{l} = 0$$

$$\langle -2+t, 20-2t, 8-5t\rangle\,.\,(-1, 2, 5)$$
$$= -1(-2+t) + 2(20-2t) + 5(8-5t) = 0$$
$$\longrightarrow t = \frac{41}{15}$$

$$\overrightarrow{OA} = \left(-\frac{41}{15}, 2 + 2(\frac{41}{15}), -3 + 5t(\frac{41}{15})\right)$$
$$= \left(\frac{-41}{15}, \frac{112}{15}, \frac{32}{3}\right)$$

إذن مسقط العمود من النقطة P على المستقيم l هو:

$$A\left(\frac{-41}{15}, \frac{112}{15}, \frac{32}{3}\right)$$

---

⑪ أحدد البعد بين النقطة P والمستقيم l

الحل:

$$|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{\left(-2+\frac{41}{15}\right)^2 + \left(22+\frac{112}{15}\right)^2 + \left(5-\frac{32}{15}\right)^2}$$
$$= \frac{\sqrt{54870}}{15} \approx 15.6$$

---

⑫ أجد مساحة المثلث ABC حيث:

$\overrightarrow{AB} = \langle 4, 9, 1\rangle$ و $\overrightarrow{AC} = \langle 9, 1, 4\rangle$

الحل:

$$\overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{AB} = (9(4) + 1(9) + 4(1))$$
$$= 36 + 9 + 4 = 49$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{81 + 1 + 16} = \sqrt{98}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{16 + 81 + 1} = \sqrt{98}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{49}{\sqrt{98}\,.\,\sqrt{98}} = 60^\circ$$

$$\text{Area} = \frac{1}{2}(\sqrt{98}\ .\ \sqrt{98}\ )\sin 60^\circ$$

$$= 49(\frac{\sqrt{3}}{2})$$

---

⑬ أجد مساحة المثلث ABC الذي إحداثيات رؤوسه:

$A(1, 3, 1)$, $B(2, 7, -3)$, $C(4, -5, 2)$

الحل:

$$\overrightarrow{AB} = (2 - 1, 7 - 3, -3 - 1) = (1, 4, -4)$$

$$\overrightarrow{AC} = (4 - 1, -5 - 3, 2 - 1) = (3, -8, 1)$$

$$\overrightarrow{AB}\ .\ \overrightarrow{AC} = (1(3) + 4(-8) + -4(1))$$

$$= 3 - 32 - 4 = -33$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1 + 16 + 16} = \sqrt{33}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{9 + 64 + 1} = \sqrt{74}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{-33}{\sqrt{33}\ .\ \sqrt{74}} = 131.2^\circ$$

$$\text{Area} = \frac{1}{2}\ \sqrt{33}\ .\ \sqrt{74}\ \ \sin 131.2^\circ = 18.6$$

---

⑭ حزام ناقل: يمثل المتجه: $\vec{F} = 5\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ القوة التي يولدها حزام ناقل لتحريك حقيبة في مسار مستقيم، من النقطة $(1, 1, 1)$ إلى النقطة $(9, 4, 7)$ أجد مقدار الشغل الذي تبذله القوة F علماً بأن القوة بالنيوتن N والمسافة بالمتر m ومقدار الشغل (W) المبذول بوحدة جول (J) يساوي ناتج الضرب القياسي لمتجه القوة في متجه الإزاحة أي: $W = \vec{F}\ .\ \vec{d}$

الحل:

$$\vec{d} = (9 - 1, 4 - 1, 7 - 1) = (8, 3, 6)$$

$$W = \vec{F}\ .\ \vec{d}$$

$$= (5, -3, 1)\ .\ (8, 3, 6)$$

$$= (5(8)) + (-3(3)) + (1(6))$$

$$= 40 - 9 + 6 = 37$$

---

⑮ إذا كانت النقطة $R(27, -17, -1)$ والنقطة $S(11, -9, 11)$ تقعان على المستقيم l وكانت النقطة Q تقع على المستقيم l حيث $\overline{OQ}$ عمودي على l فأجد متجه الموقع للنقطة Q

الحل:

$$\overrightarrow{SR} = R - S$$

$$= (16, -8, -12) \quad \div 4$$

$$= (4, -2, -3)$$

المعادلة المتجهة:

$$(11, -9, 11) + t(4, -2, -3)$$

$$= (11 + 4t, -9 -2t, 11 - 3t)$$

$$(11 + 4t, -9 -2t, 11 - 3t)\ .\ (4, -2, -3)$$

$$= 44 + 16t + 18 + 4t - 33 + 9t$$

$$= 29 + 29t = 0$$

$$t = -1$$

$$\vec{Q} = ((11 - 4, -9 + 2, 11 + 3)$$

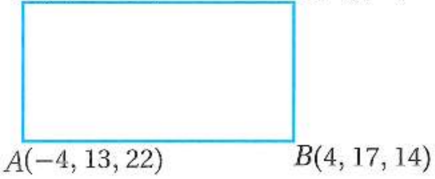
$$= (7, -7, 14)$$

إذا كانت متجهات مواقع النقاط A، B، وD هي:

$\begin{pmatrix} -4 \\ 13 \\ 22 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 4 \\ 17 \\ 14 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 2 \\ -29 \\ 7 \end{pmatrix}$ على الترتيب، فأجيب عن الأسئلة الأربعة الآتية تباعاً:

⑯ أثبت أن: $\overline{AB} \perp \overline{AD}$

الحل:



$$\overrightarrow{AB} = (4-(-4), 17 - 13, 14 - 22)$$

$$= (8, 4, -8)$$

$$\overrightarrow{AD} = (2-(-4), -27-13, 7-22)$$
$$= (6, -42, -15)$$
$$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AD} = (8(6) + 4(-42) + -8(-15))$$
$$= 48 - 168 + 120 = 168 - 168 = 0$$

فيكون $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$

⑰ أجد متجه موقع النقطة C إذا كان $ABCD$ مستطيلاً

الحل:

الشكل مستطيل فيكون $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$

$$(8, 4, -8) = (x-2, y+29, z-7)$$

$x - 2 = 8$ | $y + 29 = 4$ | $z - 7 = -8$

$x = 10$ | $y = -25$ | $z = -1$

$C(10, -25, -1)$

⑱ أجد مساحة المستطيل $ABCD$

الحل:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(8)^2 + (4)^2 + (-8)^2}$$
$$= \sqrt{64 + 16 + 64} = \sqrt{144} = 12$$
$$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{(6)^2 + (-42)^2 + (-15)^2}$$
$$= \sqrt{36 + 1764 + 215} = \sqrt{2025} = 45$$
$$\text{Area} = |\overrightarrow{AB}|\,.\,|\overrightarrow{AD}| = 12(45) = 540$$

⑲ أجد متجه موقع مركز المستطيل $ABCD$

الحل:

منتصف BD = مركز المستطيل

$$= \left(\frac{4+2}{2}, \frac{17+-29}{2}, \frac{14+7}{2}\right)$$
$$= (3, -6, \frac{21}{2})$$

تمثل: $\vec{r} = \langle -5, 7, 1\rangle + t\langle 3, 1, 4\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_1 وتمثل: $\vec{r} = \langle 2, 8, -1\rangle + u\langle 2, 0, -3\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_2 وتمثل: $\vec{r} = \langle 3, 19, 10\rangle + v\langle -1, 3, 1\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_3 إذا تقاطع المستقيم l_2 والمستقيم l_1 في النقطة T وكانت النقطة F تقع على المستقيم l_3 حيث $\overline{TF} \perp l_3$ فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً

⑳ أجد إحداثيات النقطة F

الحل:

$$l_1 = l_2$$
$$(-5, 7, 1) + t(3, 1, 4) = (2, 8, -1) + u(2, 0, -3)$$
$$-5 + 3t = 2 + 2u$$
$$7 + t = 8 + 0 \longrightarrow t = 1$$

$-5 + 3 = 2 + 2u$ بالتعويض

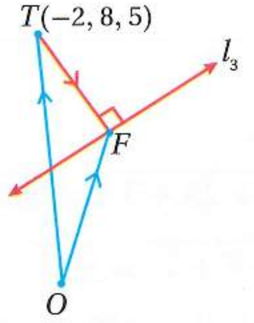
$$-4 = 2u \longrightarrow u = -2$$

$1 + 4t = -1 - 3u$ بالتحقق

$$1 + 4 = -1 - (3)(-2)$$
$$5 = 5 \ \checkmark$$

نعوض في l_1

$$(-5 + 3t, 7 + t, 1 + 4t) = (-2, 8, 5) = T$$



$$\overrightarrow{OF} = (3, 19, 10) + v(-1, 3, 1)$$
$$= (3 - v, 19 + 3v, 10 + v)$$
$$\overrightarrow{TF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OP}$$
$$= (3 - v, 19 + 3v, 10 + v) - (-2, 8, 5)$$
$$= (5 - v, 11 + 3v, 5 + v)$$

$\overrightarrow{TF} \perp l_3 \quad \longrightarrow \quad \overrightarrow{TF} \cdot l_3 = 0$

$(5-v, 11+3v, 5+v) \cdot (-1, 3, 1) = 0$

$=(5-v)(-1)+(11+3v)(3)+(5+v)(1)=0$

$=-5+v+33+9v+5+v=0$

$33+11v=0 \longrightarrow v=-3$

$\overrightarrow{OF}=(3+3, 19-9, 10+-3)=(6, 10, 7)$

$F=(6, 10, 7)$

21 أجد البعد بين النقطة T و المستقيم l_3

الحل:

البعد $|\overrightarrow{TF}|$

$\overrightarrow{TF}=(5-(-3)), (11+3(-3)), (5+(-3))$

$=(8, 2, 2)$

$|\overrightarrow{TF}|=\sqrt{64+4+4}=\sqrt{72}$

إذا كانت: $\vec{r}=\langle 5, 3, 0\rangle+\lambda\langle -1, 3, 1\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l وكانت $A(3, -2, 1)$ و $B(5, 3, 0)$ فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

22 أجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ و المستقيم l

الحل:

$\overrightarrow{AB}=\langle 2, 5, -1\rangle$

$\vec{v}=(-1, 3, 1)$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{4+25+1}=\sqrt{30}$

$|\vec{v}|=\sqrt{1+9+1}=\sqrt{11}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{v}=2(-1)+5(3)+-1(1)$

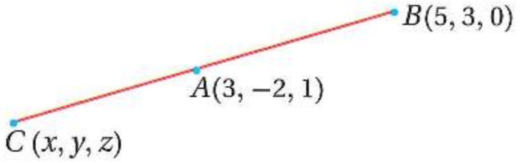
$=-2+15-1=12$

$\theta=\cos^{-1}\dfrac{12}{\sqrt{30}\cdot\sqrt{11}} \approx 48.7°$

23 تقع النقطة C على المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ حيث: $AB=AC$

أجد إحداثيات النقطة C

الحل:



$(3, -2, 1)=\left(\dfrac{x+5}{2}, \dfrac{3+y}{2}, \dfrac{z+0}{2}\right)$

$x=1, \quad y=-7, \quad z=2$

$C=(1, -7, 2)$

تقع النقطة $A(-7, -4, 9)$ و النقطة $B(8, 5, 3)$ على المستقيم l_1 وتقع النقطة $C(6, 11, 7)$ على المستقيم l_2 الذي معادلته: $\vec{r}=\langle 6, 11, 7\rangle+t\langle -1, 3, 2\rangle$

24 أبين أن النقطة B تقع على المستقيم l_2

الحل:

$(8, 5, 3)=(6, 11, 7)+t(-1, 3, 2)$

$8=6-t$, $t=-2$

$5=11+3t$, $t=-2$

$3=7+2t$, $t=-2$

النقطة $(8, 5, 3)$ تقع على المستقيم l_2

25 أبين أن المستقيم l_1 و المستقيم l_2 متعامدان

الحل:

$l_1=(-7-8, -4-5, 9-3)$

$=(-15, -9, 6)$

$l_2=(-1, 3, 2)$

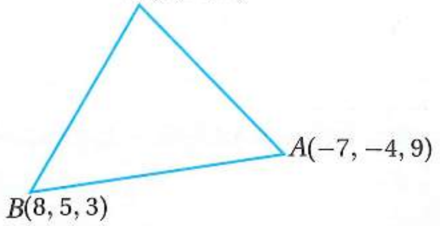
$l_1 \cdot l_2=(-15\times -1)+(-9\times 3)+(6\times 2)$

$=15-27+12=0$

∴ متعامدان

26 أجد $m\angle ABC$

الحل:



$$\overrightarrow{BA} = (-7-8, -4-5, 9-3) = (-15, -9, 6)$$

$$\overrightarrow{BC} = (6-8, 11-5, 7-3) = (-2, 6, 4)$$

$$\overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{BC} = (-15(-2) + (-9(6)) + 6(4))$$

$$= 30 - 54 + 24 = 0$$

$$|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{(-15)^2 + (-9)^2 + (6)^2}$$

$$= \sqrt{225 + 81 + 36} = \sqrt{342}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(2)^2 + (6)^2 + (4)^2}$$

$$= \sqrt{4 + 36 + 16} = \sqrt{56}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{0}{\sqrt{342}\,.\,\sqrt{56}} = 90^\circ$$

---

27 أجد مساحة المثلث ABC

الحل:

$$\text{Area} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BA}|\,.\,|\overrightarrow{BC}|\sin\theta$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{342}\,.\,\sqrt{56})\sin 90^\circ$$

$$= 69.19$$

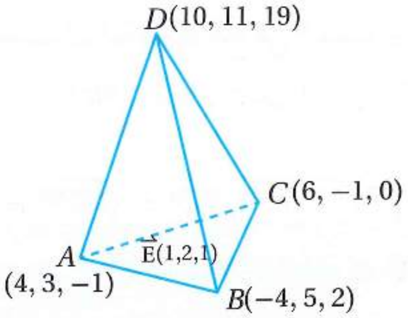
$ABCD$ هرم ثلاثي. إذا كانت إحداثيات رؤوسه هي:

$A(4, 3, -1), B(-4, 5, 2), C(6, -1, 0)$

$D(10, 11, 19)$ فأجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعاً

28 أجد مساحة المثلث ABC على الصورة $a\sqrt{6}$

الحل:



$$\overrightarrow{AB} = (-4-4, 5-3, 2-(-1)) = (-8, 2, 3)$$

$$\overrightarrow{AC} = (6-4, -1-3, 0-(-1)) = (2, -4, 1)$$

$$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = (-8(2)) + (2(-4)) + (3(1))$$

$$= -16 - 8 + 3 = -21$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-8)^2 + (2)^2 + (3)^2}$$

$$= \sqrt{64 + 4 + 9} = \sqrt{77}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4 + 16 + 1} = \sqrt{21}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{-21}{\sqrt{21}\,.\,\sqrt{77}} = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$$

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \frac{3}{11}} = \sqrt{\frac{8}{11}} = 2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$$

$$\text{Area} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|\,.\,|\overrightarrow{AC}|\sin\theta$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{77}\,.\,\sqrt{21})\,(2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}) = 7\sqrt{6}$$

---

29 أثبت أن: $m\angle AED = 90^\circ$ حيث $E(1, 2, 1)$

الحل:

$$\overrightarrow{AE} = (1-4, 2-3, 1-(-1)) = (-3, -1, 2)$$

$$\overrightarrow{ED} = (1-10, 2-11, 1-19) = (-9, -9, -18)$$

$$\overrightarrow{AE}\,.\,\overrightarrow{ED} = (-3(-9)) + (-1(-9)) + (2(-18))$$

$$= 27 + 9 - 36 = 0$$

$$m\angle AED = 90^\circ$$

30 إذا علمت أن النقطة E تقع في المستوى نفسه الذي يقع فيه المثلث ABC فأجد حجم الهرم $ABCD$

الحل:

$$|\overrightarrow{ED}| = \sqrt{81+81+324} = \sqrt{486} = 9\sqrt{6}$$

حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع

$$\text{Area} = \frac{1}{3} \times 7\sqrt{6} \times 9\sqrt{6} = 126$$

إذا كانت $A(3, 1, -6)$ و $B(5, -2, 0)$ و $C(8, -4, -6)$ فأجيب عن الأسئلة الخمسة الآتية تباعاً:

31 أبين أن: $\overrightarrow{AC} = n\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ حيث n عدد صحيح

الحل:

$$\overrightarrow{AC} = (8-3, -4-1, -6-(-6))$$
$$=(5, -5, 0) = 5(1, -1, 0)$$
$$= 5\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$
$$n = 5$$

32 أبين أن قياس الزاوية ACB هو $\cos^{-1}\frac{5\sqrt{2}}{14}$

الحل:

$$\overrightarrow{CA} = (3-8, 1-(-4), -6-(-6)) = (-5, 5, 0)$$
$$\overrightarrow{CB} = (5-8, -2-(-4), 0-(-6)) = (-3, 2, 6)$$
$$\overrightarrow{CA}\,.\,\overrightarrow{CB} = (-5(-3)) + (5(2)) + (0(6))$$
$$= 15 + 10 = 25$$
$$|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{25+25+0} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$
$$|\overrightarrow{CB}| = \sqrt{9+4+36} = \sqrt{49} = 7$$
$$\theta\cos^{-1}\frac{25}{5\sqrt{2}(7)} = \frac{5}{\sqrt{2}(7)} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$
$$= \cos^{-1}\frac{5\sqrt{2}}{14}$$

33 أكتب معادلة متجهة للمستقيم $\overleftrightarrow{AC}$

الحل:

$$\vec{r} = \langle 8, -4, -6\rangle + t\langle 1, -1, 0\rangle$$

34 إذا كانت $D(6, -1, p)$ وعلم $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{BD}$ متقاطعان فما قيمة p

الحل:

$$\overrightarrow{BD} = (6-5, -1-(-2), p) = (1, 1, p)$$
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$$
$$(8, -4, -6) + t(-5, 5, 0) = (5, -2, 0) + u(1, 1, p)$$
$$8 - \cancel{5t} = 5 + u$$
$$-4 + \cancel{5t} = -2 + u$$
$$4 = 3 + 2u \longrightarrow u = \frac{1}{2}$$
$$-6 = 0 + up$$
$$-6 = \frac{1}{2}p = \longrightarrow p = -12$$

35 أبين أن الشكل $ABCD$ معين، ثم أجد طول كل ضلع من أضلاعه.

الحل:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(3-5)^2+(1-(-2)^2+(-6-0)^2}$$
$$= \sqrt{4+9+36} = \sqrt{49} = 7$$
$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(2-5)^2+(-4-(-2)^2+(-6-0)^2}$$
$$= \sqrt{9+4+36} = \sqrt{49} = 7$$
$$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{(6-3)^2+(-1-1)^2+(0-(-6)^2}$$
$$= \sqrt{9+4+36} = \sqrt{49} = 7$$
$$|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{(6-8)^2+(-1-(-4))^2+(0-(-6)^2}$$
$$= \sqrt{4+9+36} = \sqrt{49} = 7$$
$$AB = BC = CD = AD$$

∴ الشكل معين

36 أحل المسألة الواردة في بداية الدرس.

أطلق صاروخ من النقطة $(1, 2, 1)$ ثم وصل بعد ثانيتين إلى النقطة $(9, 13, 21)$ وفي الوقت نفسه أطلق صاروخ آخر من النقطة $(4, -3, 2)$ ووصل بعد ثانيتين إلى النقطة $(14, 1, 18)$ ما قياس الزاوية بين مساري الصاروخين؟

الحل:

الأول $\vec{a} = (9-1, 13-2, 21-1) = (8, 11, 20)$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(8)^2 + (11)^2 + (20)^2}$$
$$= \sqrt{64 + 121 + 400} = \sqrt{585}$$

الثاني $\vec{b} = (14-4, 1-(-3), 18-2) = (10, 4, 16)$

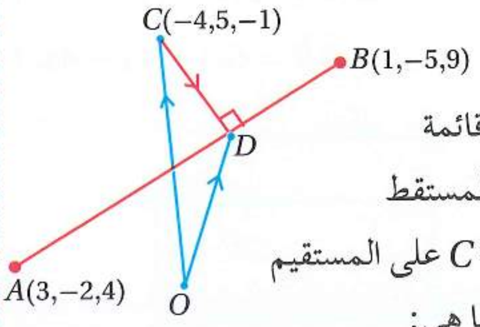
$$|\vec{b}| = \sqrt{100 + 16 + 256} = \sqrt{372}$$

$$\vec{a} . \vec{b} = (8(10) + 11(4) + 20(16))$$
$$= 80 + 44 + 320 = 444$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{444}{\sqrt{585} . \sqrt{372}} = 17.86°$$

37 **تبرير:** إذا كانت $A(3, -2, 4)$ و $B(1, -5, 9)$ و $C(-4, 5, -1)$ وكانت النقطة D تقع على المستقيم المار بالنقطة A والنقطة B وكانت الزاوية CDA قائمة، فما إحداثيات النقطة D أبرر إجابتي.

الحل:



بما أن $\angle CDA$ قائمة فالنقطة D هي المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ وإحداثياتها هي:

$$\overrightarrow{AB} = \langle -2, -3, 5 \rangle$$

معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ هي:

$$\vec{r} = \langle 3, -2, 4 \rangle + t\langle -2, -3, 5 \rangle$$

بما أن النقطة D تقع على $\overleftrightarrow{AB}$ فإن:

$$\overrightarrow{OD} = \langle 3 - 2t, -2 - 3t, 4 + 5t \rangle$$
$$\overrightarrow{CD} = \langle 3 - 2t + 4, -2 - 3t - 5, 4 + 5t + 1 \rangle$$
$$= \langle 7 - 2t , -7 - 3t , 5 + 5t \rangle$$

$$\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{CD} . \overrightarrow{AB} = 0$$
$$-2(7 - 2t) - 3(-7 - 3t) + 5(5 + 5t)$$
$$\longrightarrow t = \frac{-16}{19}$$

$$\overrightarrow{OD} = \langle 3-2(\frac{-16}{19}) , -2-3(\frac{-16}{19}), 4+5(\frac{-16}{19}) \rangle$$
$$= \langle \frac{89}{19} , \frac{10}{19} , \frac{-4}{19} \rangle$$

إذن إحداثيات D هي: $(\frac{89}{19} , \frac{10}{19} , \frac{-4}{19})$

تحد: إذا كانت: $\vec{r} = \begin{pmatrix} -8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_1 وكانت: $\vec{r} = \begin{pmatrix} -10 \\ 31 \\ -26 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_2 وتقاطع هذان المستقيمان في النقطة P وكانت النقطة Q تقع على المستقيم l_1 حيث: $t = 3$ والنقطة R تقع على المستقيم l_2 حيث: $u > 3$ و $PQ = PR$ فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

38 إذا كانت $m\angle RPQ = \theta$ فأبين أن $\cos \theta = -\frac{3}{94}$

الحل:

الزاوية RPQ هي الزاوية المحصورة بين المستقيمين l_1 و l_2 وتساوي الزاوية بين اتجاهيهما

اتجاه l_1 هو: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$ واتجاه l_2 هو: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}$:

$$\vec{u} . \vec{v} = 21 + 18 - 42 = -3$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{49 + 9 + 36} = \sqrt{94}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{9+36+49} = \sqrt{94}$$

$$m\angle RPQ = \theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$$

$$= \frac{-3}{\sqrt{94}\times\sqrt{94}} = \frac{-3}{94}$$

③⑨ أبين أن مساحة المثلث PQR هي $2\sqrt{8827}$ وحدة مربعة

الحل:

$$\vec{r} = \vec{r}$$

$$\langle -8, 16, 1\rangle + t\langle 7, -3, -6\rangle$$

$$= \langle -10, 31, -26\rangle + u\langle 3, -6, 7\rangle$$

$$-8+7t = -10+3u \quad \times 2$$

$$16-3t = 31-6u \quad \times 1$$

$$-16+14t = -20+6u$$

بالجمع $16-3t = 31-6u$

$$11t = 11 \longrightarrow t = 1$$

بالتعويض $-8+7 = -10+3u$

$$-1+10 = 3u \longrightarrow u = 3$$

بتعويض $t = 1$ لإيجاد إحداثيات P

$$P = (-8+7t, 16-3t, 1-6t)$$

$$= (-1, 13, -5)$$

بتعويض $t = 3$ لإيجاد إحداثيات Q

$$Q = (-8, 16, 1) + 3(7, -3, -6)$$

$$= (13, 7, -17)$$

النقطة R تقع على المستقيم l_2 فمتجه موقعها

$$\langle -10+3u, 31-6u, -26+7u\rangle$$

$$\overrightarrow{PQ} = \langle 13, 7, -17\rangle - \langle -1, 13, -5\rangle$$

$$= \langle 14, -6, -12\rangle$$

$$\overrightarrow{PR} = \langle -10+3u, 31-6u, -26+7u\rangle - \langle -1, 13, -5\rangle$$

$$= \langle -9+3u, 18-6u, -21+7u\rangle$$

$$PR = PQ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-9+3u)^2 + (18-6u)^2 + (-21+7u)^2$$

$$= 14^2 + (-6)^2 + (-12)^2$$

$$49u^2 - 564u + 470 = 0 \Rightarrow u^2 - 6u + 5 = 0$$

$$\Rightarrow u = 1 , u = 5$$

$u = 1$ تهمل لأن $u > 3$

$$R = (-10+15, 31-30, -26+35)$$

$$R = (5, 1 ,9)$$

$$|\overrightarrow{PR}| = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{14^2 + (-6)^2 + (-12)^2}$$

$$= \sqrt{376}$$

$$\text{Area} = \frac{1}{2}\, |\overrightarrow{PQ}| \times |\overrightarrow{PR}| \sin\theta$$

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \frac{9}{94^2}} = \sqrt{\frac{8827}{8836}}$$

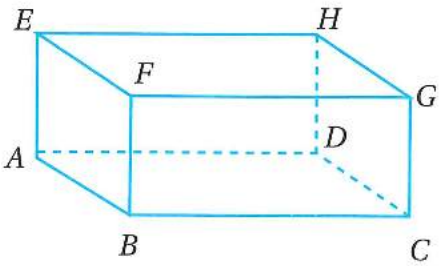
$$\text{Area } PQR = \frac{1}{2}\sqrt{376} \times \sqrt{376} \times \sqrt{\frac{8827}{8836}}$$

$$= 2\sqrt{8827}$$

تحد: رسم متوازي المستطيلات الآتي باستعمال برمجية حاسوبية تعتمد في قياساتها على المتجهات فكانت كالآتي: $\overrightarrow{AE} = (-6\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k})$،

$$\overrightarrow{AD} = (-10\hat{i} + 10\hat{j} - 5\hat{k})$$

$$\overrightarrow{AB} = (2\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k})$$



④⓪ إذا كانت $B(8, 3, -2)$ فأجد إحداثيات النقطة H

الحل:

$$\overrightarrow{AB} = B - A$$

$$(2, 4, 4) = (8, 3, -2) - A$$

$$A = (6, -1, -6)$$

$$\overrightarrow{AE} = E - A$$

$$(-6, -3, 6) = E - (6, -1, -6)$$

$$E = (0, -4, 0)$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EH}$$

$$(-10, 10, -5) = H - E$$

$$(-10, 10, -5) = H - (0, -4, 0)$$

$$H = (-10, 6, -5)$$

---

41 أجد قياس الزاوية GAC مقرباً إلى أقرب عشر درجة

الحل:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = C - B$$

$$(-10, 10, -5) = C - (8, 3, -2)$$

$$C = (-2, 13, -7)$$

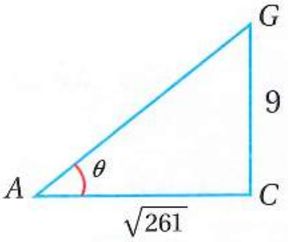
$$\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{AE} = \sqrt{(-6)^2 + (-3)^2 + (6)^2}$$

$$= \sqrt{81} = 9$$

$$\overrightarrow{AC} = \sqrt{(-2-6)^2 + (13-(-1))^2 + (-7-(-6))^2}$$

$$= \sqrt{64 + 196 + 1} = \sqrt{261}$$

$$m\angle GAC =$$



$$\tan\theta = \frac{9}{\sqrt{261}}$$

$$\rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{9}{\sqrt{261}}\right)$$

$$= 29.1^\circ$$

42 إذا كان X نقطة منتصف الضلع $\overline{EF}$ فأجد جيب تمام الزاوية DXC

الحل:

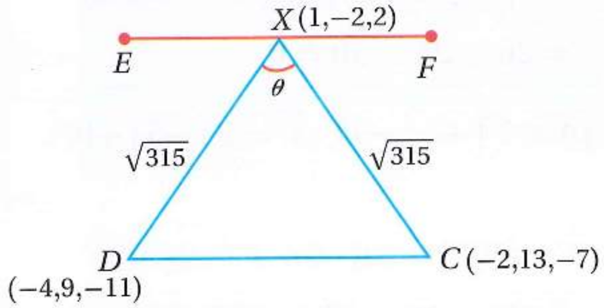
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF} = F - E$$

$$(2, 4, 4) = F - \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F = (2, 0, 4)$$

$$X = \left(\frac{0+2}{2}, \frac{-4+0}{2}, \frac{4+0}{2}\right)$$

$$= (1, -2, 2)$$



$$\overrightarrow{AD} = D - A$$

$$(-10, 10, -5) = D - (6, -1, -6)$$

$$D = (-4, 9, -11)$$

$$\overrightarrow{XD} = (-4 - 1, 9 - (-2), -11 - 2)$$

$$= (-5, 11, -13)$$

$$|\overrightarrow{XD}| = \sqrt{25 + 121 + 169} = \sqrt{315}$$

$$\overrightarrow{XC} = (-2 - 1 , 13 - (-2), -7 - 2)$$

$$= (-3, 15, -9)$$

$$|\overrightarrow{XC}| = \sqrt{9 + 225 + 81} = \sqrt{315}$$

$$\overrightarrow{XD} . \overrightarrow{XC} = (-5, 11, -13) . (-3, 15, -9)$$

$$= -5(-3) + 11(15) - 13(-9)) = 297$$

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{XD} . \overrightarrow{XC}}{|\overrightarrow{XD}| . |\overrightarrow{XC}|} = \frac{297}{315} = \frac{33}{35}$$

كتاب التمارين ص 27

أجد ناتج الضرب القياسي للمتجهين في كل مما يأتي:

① $\vec{u} = \langle 4, 5, -3\rangle \ , \ \vec{v} = \langle -2, 3, -7\rangle$

الحل:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (4(-2)) + (5(3)) + (-3(-7))$$
$$= -8 + 15 + 21 = 28$$

② $\vec{e} = \begin{pmatrix} -13 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}, \ \vec{f} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$

الحل:

$$\vec{e} \cdot \vec{f} = (-13(-2)) + (8(3)) + (-5(10))$$
$$= 26 + 24 - 50 = 0$$

③ $\vec{m} = 7\hat{i} + 4\hat{j} - 9\hat{k} \ , \ \vec{n} = 2\hat{i} - 5\hat{j} + 10\hat{k}$

الحل:

$$\vec{m} \cdot \vec{n} = (7(2)) + (4(-5)) + (-9(10))$$
$$= 14 - 20 - 90 = -96$$

④ إذا كان المتجه: $\vec{v} = \langle 6, 5, a\rangle$ يعامد المتجه: $\vec{w} = \langle 15, 24, -7\rangle$ فما قيمة a

الحل:

$$(15, 24, -7) \cdot (6, 5, \ a)$$
$$= (15(6) + 24(5) - 7(a))$$
$$= 90 + 120 - 7a = 0$$
$$210 - 7a = 0 \longrightarrow 210 = 7a$$
$$a = \frac{210}{7} = 30$$

أجد قياس الزاوية بين المتجهين في كل مما يأتي مقربة إلى أقرب عُشر درجة

⑤ $\vec{a} = 5\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} \ , \ \vec{b} = 2\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$

الحل:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (5(2)) + (2(-1)) + (3(-2))$$
$$= 10 - 2 - 6 = 2$$
$$|\vec{a}| = \sqrt{25 + 4 + 9} = \sqrt{38}$$
$$|\vec{b}| = \sqrt{4 + 1 + 4} = \sqrt{9}$$
$$\theta = \cos^{-1} \frac{2}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{9}} = 83.8^\circ$$

⑥ $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k} \ , \ \vec{b} = -\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$

الحل:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1(-1)) + (1(-1)) + (-1(4))$$
$$= -1 + -1 - 4 = -6$$
$$|\vec{a}| = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$$
$$|\vec{b}| = \sqrt{1 + 1 + 16} = \sqrt{18}$$
$$\theta = \cos^{-1} \frac{-6}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{18}} = 144.7^\circ$$

⑦ إذا كان المتجه: $\vec{a} = \lambda\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ والمتجه $\vec{a} = \lambda\hat{i} + 4\hat{j} + \lambda\hat{k}$ متعامدين، فما قيمة (قيم) λ :

الحل:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\lambda(\lambda)) + (-3(4)) + (4(\lambda)) = 0$$
$$\lambda^2 - 12 + 4\lambda = 0$$
$$\lambda^2 + 4\lambda - 12 = 0$$
$$(\lambda + 6)(\lambda - 2) = 0$$
$$\lambda = 6, -2$$

⑧ إذا كانت معادلة المستقيم l_1 هي: $\vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ ومعادلة المستقيم l_2 هي: $\vec{r} = \begin{pmatrix} -5 \\ 14 \\ 1 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}$ فأجد قياس الزاوية الحادة بين هذين المستقيمين مقربة إلى أقرب عُشر درجة.

الحل:

$$\vec{v} = (2, -6, 3) \ , \ \vec{w} = (3, -4, 12)$$
$$\vec{v} \cdot \vec{w} = (2(3)) + (-6(-4)) + (3(12))$$
$$= 6 + 24 + 36 = 66$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{4+36+9} = \sqrt{49} = 7$$

$$|\vec{w}| = \sqrt{9+16+144} = \sqrt{169} = 13$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{66}{7\,(13)} = 43.5^\circ$$

⑨ يمر المستقيم l_1 بالنقطتين: $(3, -5, 9)$ و $(-2, 11, 6)$ ويمر المستقيم l_2 بالنقطتين: $(4, 3, 8)$ و $(-5, 9, 12)$ أجد قياس الزاوية الحادة بين هذين المستقيمين مقربة إلى أقرب عُشر درجة.

الحل:

$$l_1 = (3-(-2)), -5-11, 9-6) = (5, -16, 3)$$

$$l_2 = (4-(-5), 3-9, 8-12) = (9, -6, -4)$$

$$l_1 \,.\, l_2 = (5(9) - 16(-6) + 3(-4))$$

$$= 45 + +96 - 12 = 129$$

$$|l_1| = \sqrt{(5)^2 + (16)^2 + (3)^2}$$

$$= \sqrt{25+256+9} = \sqrt{290}$$

$$|l_2| = \sqrt{(9)^2 + (-6)^2 + (-4)^2}$$

$$= \sqrt{81+36+16} = \sqrt{133}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{129}{\sqrt{290}\,.\,\sqrt{133}} = 48.94^\circ \approx 48.9^\circ$$

⑩ إذا كان قياس الزاوية بين المتجه $\langle v,\ 0\ ,-1\rangle$ والمتجه $\langle 2, -1, 0\rangle$ هو 60° فما قيمة v

الحل:

$$\vec{a} = \langle 2, -1, 0\rangle\ ,\ \vec{b} = \langle v, 0, -1\rangle$$

$$\vec{a}\,.\,\vec{b} = 2v + 0 + 0 = 2v$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{4+1+0} = \sqrt{5}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{v^2+1}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{2v}{\sqrt{5}\,.\,\sqrt{v^2+1}}$$

$$\vec{a}\,.\,\vec{b} = |\vec{a}|\,.\,|\vec{b}|\cos\theta$$

$$2v = \sqrt{5}\,.\,\sqrt{v^2+1}\ (\tfrac{1}{2})$$

$$4v = \sqrt{5}\,.\,\sqrt{v^2+1}$$

$$16v^2 = 5v^2 + 5$$

$$11v^2 = 5 \longrightarrow\ v^2 = \frac{5}{11}\ \longrightarrow v = \pm\sqrt{\frac{5}{11}}$$

⑪ إذا كان $A(3,\ -2,\ 6)$ و $B(-5,\ 4,\ 1)$ فأجد مساحة المثلث AOB حيث O نقطة الأصل.

الحل:

$$\vec{A}\,.\,\vec{B} = 3(-5) + 2(4) + 1(6)$$

$$= -15 - 8 + 6 = -17$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{9+4+36} = \sqrt{49} = 7$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{25+16+1} = \sqrt{42}$$

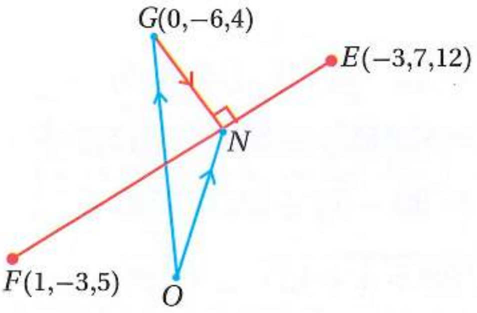
$$\theta = \cos^{-1}\frac{-17}{7\,.\,\sqrt{42}} = 112^\circ$$

$$\text{Area} = \frac{1}{2}\ \sqrt{49}\,.\,\sqrt{42}\ \sin 112^\circ = 21.03$$

إذا مر المستقيم l بالنقطتين: $E(-3, 7, 12)$ و $F(1, -3, 5)$ وكانت النقطة $G(0, -6, 4)$ لا تقع على المستقيم l فأجد كلاً مما يأتي:

⑫ مسقط العمود من النقطة G على المستقيم l

الحل:



$$l:\ \overrightarrow{EF} = (1, -3, 5) + t(-4, 10, 7)$$

$$\overrightarrow{ON} = (1 - 4t, -3 + 10t, 5 + 7t)$$

$$\overrightarrow{GN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OG}$$

$$= (1 - 4t, -3 + 10t, 5 + 7t) - (0, -6, 4)$$

$$= (1 - 4t, 3 + 10t, 1 + 7t)$$

$$\overrightarrow{GN} \perp \overrightarrow{l}$$

$$(1 - 4t, 3 + 10t, 1 + 7t) . (-4, 10, 7) = 0$$

$$\Rightarrow -4 + 16t + 30 + 100t + 7 + 49t = 0$$

$$165t = -33 \ \Rightarrow t = \frac{-33}{165} = -0.2$$

$$N = (1- 4(-0.2), -3+10(-0.2), 5+7(-0.2))$$

$$= (1 + 0.8, -3 - 2, 5 - 1.4)$$

$$N = (1.8, -5, 3.6)$$

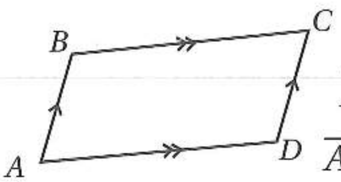
⑬ البعد بين النقطة G والمستقيم l

الحل:

$$|\overrightarrow{GN}| = \sqrt{(1.8-0)^2 + (-5--6)^2 + (3.6-4)^2}$$

$$= \sqrt{(1.8)^2 + (1)^2 + (-0.4)^2} = \sqrt{4.4}$$

⑭ يبين الشكل المجاور متوازي الأضلاع $ABCD$ حيث:



$$\overrightarrow{AB} = 6\hat{i} - 2\hat{j} + 11\hat{k}$$

و $\overrightarrow{AC} = 15\hat{i} + 8\hat{j} + 5\hat{k}$

أجد مساحة متوازي الأضلاع $ABCD$

الحل:

$$\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC} = (6, -2, 11) . (15, 8, 5)$$

$$= 6(15) + -2(8) + 11(5)$$

$$= 90 - 16 + 55 = 129$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{36 + 4 + 121} = \sqrt{161}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{225 + 64 + 25} = \sqrt{314}$$

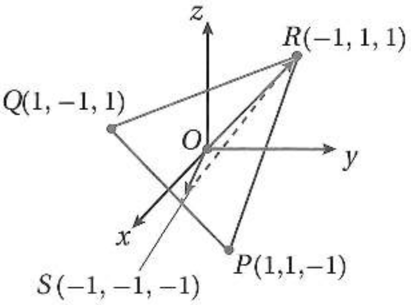
$$\theta = \cos^{-1} = \frac{129}{\sqrt{161} . \sqrt{314}} = 54.98^\circ = 55^\circ$$

$$\text{Area} = \frac{1}{2}\sqrt{161} . \sqrt{314} \sin 55^\circ = 92.09$$

مساحة متوازي الأضلاع $= 2 \times$ مساحة المثلث ACB

$$= 2 \times 92.09 \approx 184.18$$

⑮ كيمياء: تقع ذرة الكربون في جزيء الميثان في نقطة الأصل، وتقع ذرات الهيدروجين عند النقاط: P, Q, R, S في الشكل المجاور أجد قياس الزاوية بين $\overrightarrow{OR}$ و $\overrightarrow{OS}$ اللذين يربطان ذرة الكربون بذرتي الهيدروجين عند النقطة S والنقطة R



الحل:

$$\overrightarrow{OR} . \overrightarrow{OS} = (-1, 1, 1) . (-1, -1, -1)$$

$$= (-1(-1)) + (1(-1)) + (1(-1))$$

$$= 1 - 1 - 1 = -1$$

$$|\overrightarrow{OR}| = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$$

$$|\overrightarrow{OS}| = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{-1}{\sqrt{3} . \sqrt{3}} = 109.47^\circ$$

معادلة المستقيم l_1 هي: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -12 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

ومعادلة المستقيم l_2 هي: $\vec{r} = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ p \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} q \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

والنقطة $A(9, -1, -14)$ تقع على المستقيم l_1 والنقطة C تقع على المستقيم l_2

⑯ إذا كان المستقيم l_2 والمستقيم l_1 متعامدين فأجد قيمة q.

الحل:

$$l_1 \perp l_2 \longrightarrow (q, 2, -1) \,.\, (-1, 3, 2)$$

$$= -q + 6 - 2 = 0 \longrightarrow q = 4$$

⑰ إذا كان المستقيم l_2 والمستقيم l_1 متقاطعين فأجد قيمة p وإحداثيات نقطة تقاطعهما.

الحل:

$$-4 + 4u = 8 - t \qquad 1$$

$$10 + 2u = 2 + 3t \qquad -2$$

$$-4 + 4u = 8 - t$$

$$-20 - 4u = -4 - 6t$$

بالجمع

$$-24 = 4 - 7t$$

$$-28 = -7t \longrightarrow t = 4$$

$$-4 + 4u = 8 - u$$

$$4u = 8 \longrightarrow u = 2$$

$$P + (-1)\,2 = -12 + 2(4)$$

$$P - 2 = -4 \longrightarrow P = -2$$

نقطة التقاطع $(8 + t(-1), 2 + 3t, -12 + 2t)$

$$= (4, 14, -4)$$

⑱ رسمت دائرة مركزها النقطة C فقطعت المستقيم l_1 في النقطتين: A و B أجد متجه الموقع للنقطة B

الحل:

إذا كان $C(4, 14, -4)$ مركز الدائرة (نقطة تقاطع المستقيمين) فيكون:

$$AC = BC$$

$$B = (8 - t, 2 + 3t, -12 + 2t)$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(4-9)^2 + (14- -1)^2 + (-4- -14)^2}$$

$$= \sqrt{350}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(8-t-4)^2 + (23+t-14)^2 + (-122+t--4)^2}$$

$$\sqrt{350} = \sqrt{(4-t)^2 + (-12+3t)^2 + (-8+2t)^2}$$

$$350 = 16 - 8t + t^2 + 144 - 72t + 9t^2 + 64 - 32t + 4t^2$$

$$14t^2 - 112t - 126 = 0 \qquad \div 14$$

$$t^2 - 8t - 9 = 0$$

$$(t - 9)\,(t + 1) = 0$$

$$t = 9\,, \qquad t = -1$$

$$t = -1 \rightarrow A\,(9, -1, -14)$$

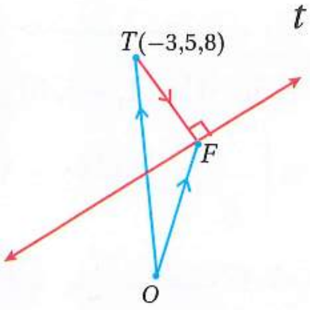
$$t = 9 \rightarrow B(-1, 29, 6)$$

معادلة المستقيم l هي: $\vec{r} = \begin{pmatrix} -19 \\ 14 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ a \end{pmatrix}$

والنقطة $T(-2, 5, 8)$ تقع على المستقيم l والنقطة F تقع على المستقيم l حيث $\overrightarrow{TF}$ يعامد المستقيم l

⑲ أبين أن: $t = \dfrac{13a + 44}{a^2 + 10}$

الحل:



$$\overrightarrow{OF} = (-19, 14, -5) + t(1, -3, a)$$

$$= (-19 + t, 14 - 3t, -5 + at)$$

$$\overrightarrow{TF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{TO}$$

$$= (-19 + t, 14 - 3t, -5 + at) - (-2, 5, 8)$$

$$= (-17 + t, 9 - 3t, -13 + at)$$

$$\overrightarrow{TF} \perp (1, -3, a)$$

$$\longrightarrow (-17 + t, 9 - 3t, -13 + at) \,.\, (1, -3, a) = 0$$

$$\longrightarrow -17 + t, -27 + 9t, -13a + a^2t)$$

$$= -44 + 10t - 13a + a^2t = 0$$

$$10t + a^2t = 44 + 13a$$

$$t(10 + a^2) = 44 + 13a$$

$$t = \frac{44 + 13a}{10 + a^2}$$

⑳ إذا كانت $t = 5$ فأجد متجهي الموقع الممكنين للنقطة F

الحل:

$$t = 5: \qquad 5 = \frac{44 + 13a}{10 + a^2}$$

$$5a^2 + 50 = 44 + 13a$$

$$5a^2 - 13a + 6 = 0$$

$$(5a - 3)(a - 2) = 0 \longrightarrow a = \frac{3}{5}, a = 2$$

$$\overrightarrow{OF} = (-19 + t, 14 - 3t, -5 + at)$$

$$t = 5, a = \frac{3}{5}$$

$$\overrightarrow{OF} = (-14, -1, -2)$$

$$t = 5, a = 2$$

$$\overrightarrow{OF} = (-14, -1, 5)$$

إحداثيات النقاط: C، وB، وA هي: $(3, -2, 4)$ و$(1, -5, 6)$ و$(-4, 5, -1)$ على المستقيم l يمر بالنقطة A ومعادلته هي: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$

㉑ أبين أن النقطة C تقع على المستقيم l

الحل:

$$(-4, 5, -1) = (3 + 7u, -2 - 7u, 4 + 5u)$$

$$-4 = 3 + 7u$$

$$-7 = 7u \longrightarrow u = -1$$

وإذا كانت $u = -1$ فإن C تقع على المستقيم

㉒ أجد معادلة متجهة للمستقيم المار بالنقطة A والنقطة B

الحل:

$$A(3, -2, 4), B(1, -5, 6)$$

$$\overrightarrow{AB} = \langle 1 - 3, -5 - (-2), 6 - 4 \rangle = \langle -2, -3, 2 \rangle$$

$$\vec{r} = \langle 3, -2, 4 \rangle + t \langle -2, -3, 2 \rangle$$

㉓ إذا وقعت النقطة D على المستقيم المار بالنقطة A والنقطة B بحيث كانت الزاوية CDA قائمة فأجد إحداثيات النقطة D

الحل:

معادلة $\overrightarrow{AB}$ هي:

$$l_2: \vec{r} = \langle 3, -2, 4 \rangle + t \langle -2, -3, 2 \rangle$$

D هي المسقط من C على l_2

$$\overrightarrow{CD} = (3 - 2t, -2 - 3t, 4 + 2t)$$

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$$

$$= (3 - 2t, -2 - 3t, 4 + 2t) - (-4, 5, -1)$$

$$\overrightarrow{CD} = (7 - 2t, -7 - 3t, 5 + 2t)$$

$$\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{AB}$$

$$(7 - 2t, -7 - 3t, 5 + 2t) \cdot (-2, -3, 2) = 0$$

$$= -14 + 4t + 21 + 9t + 10 + 4t = 0$$

$$17t + 17 = 0 \Rightarrow t = -1$$

$$\overrightarrow{OD} = (3 - 2(-1), -2 - 3(-1), 4 + 2(-1))$$

إحداثيات النقطة D هي $D = (5, 1, 2)$

إذا كانت معادلة المستقيم l_1 هي: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ومعادلة المستقيم l_2 هي: $\vec{r} = \begin{pmatrix} -9 \\ 21 \\ -4 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ فأجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعاً:

㉔ أبين أن المستقيم l_1 والمستقيم l_2 متعامدان

الحل:

$$(2, -1, -2) \cdot (1, -2, 2) = 2 + 2 - 4 = 0$$

$l_1 \cdot l_2 = 0$ متعامدان $\therefore$

25 أبين أن المستقيم l_1 والمستقيم l_2 يتقاطعان في النقطة $(-2, 7, 10)$

الحل:

$$-9 + u = 8 + 2t \qquad 1$$

$$21 - 2u = 2 - t \qquad 2$$

$$-9 + u = 8 + 2t$$

$$42 - 4u = 4 - 2t$$

$$33 - 3u = 12$$

$$33 - 12 = 3u \longrightarrow 21 = 3u \longrightarrow u = 7$$

بالتعويض $-9 + 7 = 8 + 2t$

$$-2 = 8 + 2t \longrightarrow t = -5$$

بوضع $t = -5$

النقطة $(-2, 7, 10)$

بوضع $u = 7$

النقطة $(-2, 7, 10)$

26 يقع كل رأس من رؤوس المربع $ABCD$ إما على المستقيم l_1 وإما على المستقيم l_2 إذا كانت إحداثيات الرأس A هي: $(-5, 13, 4)$ فأجد إحداثيات رؤوسه الثلاثة الأخرى.

الحل:

النقطة $(-2, 7, 10)$ نقطة تقاطع قطريع المربع

$$A = (-5, 13, 4)\ ,\ (x, y, z)$$

$$\left(\frac{-5+x}{2}, \frac{13+y}{2}, \frac{4+z}{2}\right) = (-2, 7, 10)$$

$$x = 1, y = 1, z = 16$$

$$\Rightarrow C = (1, 1, 16)$$

النقطتان A وC تقعان على المستقيم l_2 إذا النقطتان B و D تقعان على المستقيم l_1

$$l_1\ (8 + 2t, 2 - t, -2t)$$

لتكن النقطة $P\ (-2, 7, 10)$

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{DP}$$

$$A\ (-5, 13, 4), P(-2, 7, 10)$$

$$\overrightarrow{AP} = \sqrt{(-5--2)^2 + (13-7)^2 + (4-10)^2}$$

$$= \sqrt{9 + 36 + 36} = \sqrt{81} = 9$$

$$D\ (8 + 2t, 2 - t, -2t)$$

$$\overrightarrow{DP} = \sqrt{(8 + 2t+2)^2 + (2 - t-7)^2 + (-2t-10)^2}$$

$$9 = \sqrt{(10 + 2t)^2 + (-5 - t)^2 + (-2t-10)^2}$$

$$81 = 100+40t + 4t^2 + 25+10t + t^2 + 4t^2$$

$$81 = 9t^2 + 90t + 225$$

$$9t^2 + 90t + 144 = 0$$

$$t^2 + 10t + 16 = 0$$

$$(t + 2)\ (t + 8) = 0$$

$$t = -2, t = -8$$

$$t = -2 \longrightarrow (8 - 4, 2 + 2, -2(-2))$$

$$\longrightarrow (4, 4, 4)$$

$$t = -8 \longrightarrow (8 - 16, 2 + 8, -2(-8))$$

$$\longrightarrow (-8, 10, 16)$$

رؤوس المربع الثلاثة الأخرى هي:

$$(1, 1, 16), (4, 4, 4), (-8, 10, 16)$$

اختبار نهاية الوحدة ص 158

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

1 إذا كانت $A(5, -2, 3)$, $B(-3, 4, 9)$ فإن الصورة الإحداثية للمتجه $\overrightarrow{AB}$ هي:

a) $\langle -2, 2, 12\rangle$ **b)** $\langle 8, -6, -6\rangle$

c) $\langle -1, 1, 6\rangle$ **d)** $\langle -8, 6, -6\rangle$

الحل:

$$\overrightarrow{AB} = (5-(-3), -2-4, 3-9)$$
$$= \langle 8, -6, -6\rangle \ \textbf{(b)}$$

2 إذا كان $\vec{v} = \langle 2, c, -5\rangle$ وكان: $|\vec{v}| = 3\sqrt{5}$ فإن c تساوي:

a) 4 **b)** −3, 5

c) 15 **d)** −4, 4

الحل:

$$|\vec{v}| = \sqrt{4 + c^2 + 25} = \sqrt{29 + c^2} = 3\sqrt{5}$$
$$= 29 + c^2 = 45 \longrightarrow c^2 = 16 \longrightarrow c = \pm 4 \ \textbf{(d)}$$

3 إذا كان PQR مستقيماً، حيث $PQ : QR = 3 : 1$ و $\overrightarrow{PQ} = \vec{a}$ فإن التعبير عن المتجه $\overrightarrow{RQ}$ بدلالة $\vec{a}$ هو:

a) $\frac{1}{3}\vec{a}$ **b)** $\frac{1}{4}\vec{a}$

c) $-\frac{1}{3}\vec{a}$ **d)** $-\frac{1}{4}\vec{a}$

الحل:

$$3 + 1 = 4$$
$$\overrightarrow{QR} = \frac{1}{3}\vec{a} \longrightarrow \overrightarrow{RQ} = -\frac{1}{3}\vec{a} \quad \textbf{(c)}$$

4 النقطة الواقعة على المستقيم الذي معادلته: $\vec{r} = \langle 4, -2, 5\rangle + t\langle -2, 1, 3\rangle$ والإحداثي y لها 10 هي:

a) $\langle(18, 10, 28)$ **b)** $(28, 10, 35)$

c) $(-8, 10, 20)$ **d)** $(-20, 10, 41)$

الحل:

$$\vec{r} = \langle 4, -2, 5\rangle + t\langle -2, 1, 3\rangle$$
$$= (4 - 2t, -2 + t, 5 + 3t)$$
$$-2 + t = 10 \longrightarrow t = 12$$
$$(4-2(12), 10, 5 + 3(12)) = (-20, 10, 41) \ \textbf{(d)}$$

5 إذا كان $\vec{v} = \langle 2, -2, 5\rangle$ وكان: $\vec{w} = \langle -3, 4, 6\rangle$ فإن $3\vec{v} - 2\vec{w}$ يساوي:

a) $\langle 0, 2, 3\rangle$ **b)** $\langle 12, -14, 3\rangle$

c) $\langle 13, -16, -8\rangle$ **d)** $\langle -13, 16, 8\rangle$

الحل:

$$3\vec{v} - 2\vec{w} = 3(2, -2, 5) - 2(-3, 4, 6)$$
$$= (12, -14, 3) \quad \textbf{(b)}$$

6 إذا كان قياس الزاوية بين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هو $60°$ وكان: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 30$ ، وكان $|\vec{a}| = 10$ ، فإن مقدار $\vec{b}$ هو:

a) 3 **b)** 5 **c)** 6 **d)** 24

الحل:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\theta$$
$$30 = 10 \cdot |\vec{b}| \ \frac{1}{2}$$
$$|\vec{b}| = 6 \ \textbf{(c)}$$

7 إذا كان $\vec{u} = \langle -4, 2, a\rangle$ وكان: $\vec{v} = \langle 2, b, 5\rangle$ وكان $\vec{v} \parallel \vec{u}$ فإن قيمة a هي:

a) −10 **b)** −5 **c)** −1 **d)** 5

الحل:

$$\vec{u} = k\vec{v}$$
$$(-4, 2, a) = k(2, b, 5)$$
$$-4 = 2k \ \longrightarrow k = -2$$
$$a = 5k = 5(-2) = -10 \ \textbf{(a)}$$

8 إذا كان المتجه: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ والمتجه: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ q \end{pmatrix}$ متعامدين فإن قيمة q هي:

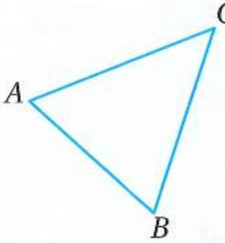
a) 0 b) 8 c) 10 d) 18

الحل:

$$\vec{v} . \vec{u} = (6(5) + 14(-6) + 3q = 0$$
$$= 30 - 84 + 3q = 0$$
$$-54 + 3q = 0 \longrightarrow q = 18 \qquad \text{(d)}$$

---

9 في المثلث المجاور، إذا كان:



$\overrightarrow{AB} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

وكان $\overrightarrow{BC} = -2\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$

فأجد قياس الزاوية ABC إلى أقرب عُشر درجة.

الحل:

$$\overrightarrow{BC} = (-2, 4, 3)$$
$$\overrightarrow{AB} = (3, -1, 2) \longrightarrow \overrightarrow{BA} = (-3, 1, -2)$$
$$\overrightarrow{BC} . \overrightarrow{BA} = (-2(-3) + 4(1) + 3(-2))$$
$$= 6 + 4 - 6 = 4$$
$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{4 + 16 + 9} = \sqrt{29}$$
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14}$$
$$\theta = \cos^{-1}\frac{4}{\sqrt{29} . \sqrt{14}} = 78.54^\circ \approx 78.5^\circ$$

---

10 إذا وقعت النقاط: $F(h, 5, 1)$, $G(3, 10, k)$, $E(2, 0, 4)$ على مستقيم واحد فما قيمة كل من h و k

الحل:

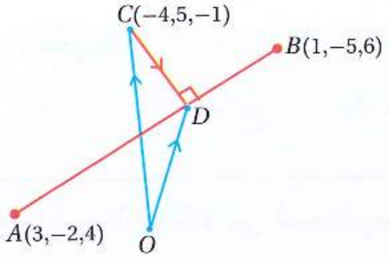
على استقامة واحدة

$$EF = t . \overrightarrow{EG}$$
$$(h - 2, 5 - 0, 1 - 4) = t(1, 10, k - 4)$$
$$5 = 10t \longrightarrow t = \frac{1}{2}$$
$$h - 2 = t(1) \longrightarrow h - 2 = \frac{1}{2} \longrightarrow h = \frac{5}{2}$$
$$-3 = t(k - 4)$$
$$-3 = \frac{1}{2}k - 2 \longrightarrow -\frac{1}{2}k = 1 \longrightarrow k = -2$$

---

11 إذا كانت: $B(1, -5, 6)$, $C(-4, 5, -1)$ و $A(3, -2, 4)$ وكانت النقطة D على المستقيم المار بالنقطة A والنقطة B وكانت الزاوية CDA قائمة، فأجد إحداثيات النقطة D

الحل:



$$AB = (-2, -3, 2)$$

معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ هي:

$$\vec{r} = \langle 3, -2, 4\rangle + t\langle -2, -3, 2\rangle$$
$$\longrightarrow \overrightarrow{OD} = \langle 3 - 2t, -2 - 3t, 4 + 2t\rangle$$
$$\overrightarrow{CD} = \langle 3 - 2t, -2 - 3t, 4 + 2t\rangle - \langle -4, 5, -1\rangle$$
$$= \langle 7 - 2t, -7 - 3t, 5 + 2t\rangle$$
$$\overrightarrow{CD} . \overrightarrow{AB} = (7-2t, -7-3t, 5+2t) . (-2,-3,2)$$
$$= -14 + 4t + 21 + 9t + 10 + 4t = 0$$
$$\longrightarrow = t = -1$$
$$\overrightarrow{OD} = \langle 3 + 2, -2 + 3, 4 - 2\rangle = \langle 5, 1, 2\rangle$$
$$\longrightarrow = D(5, 1, 2)$$

إذا كانت معادلة المستقيم l_1 هي:

$\vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ ومعادلة المستقيم l_2 هي:

$\vec{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ -17 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

12 أجد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيمين: l_1, l_2

الحل:

$$\vec{v} = (-2, -5, 9) + \lambda(-5, 0, 7)$$
$$\vec{w} = (-3, -17, 5) + \mu(2, 4, -1)$$

$$-2 - 5\lambda = -3 + 2\mu$$
$$-5 = -17 + 4\mu$$
$$12 = 4\mu \longrightarrow \mu = 3$$
$$-2 - 5\lambda = -3 + 6 \longrightarrow \lambda = -1$$

بالتعويض $(-2 -5 -1, -5, 9 + 7\lambda)$

نقطة تقاطع $= (3, -5, 2)$

---

13 أجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين: l_1, l_2

الحل:

$$l_1 \cdot l_2 = (-5, 0, 7) \cdot (2, 4, -1)$$
$$= -5(2) + 0(4) + 7(-1)$$
$$= -10 + 0 - 7 = -17$$
$$|l_1| = \sqrt{25 + 0 + 49} = \sqrt{74}$$
$$|l_2| = \sqrt{4 + 16 + 1} = \sqrt{21}$$
$$\theta = \cos^{-1}\frac{-17}{\sqrt{74}\,.\,\sqrt{21}} = 115.5^\circ$$

الحادة $= 180 - 115.5 = 64.5^\circ$

إذا كانت: $A(1, 4, -5)$, $B(3, 0, 2)$, $C(-4, 1, 3)$

فأجيب عن الأسئلة الأربعة تباعاً:

14 أكتب معادلة متجهة للمستقيم $\overleftrightarrow{AB}$

الحل:

$$\overrightarrow{AB} = (3 - 1, 0 - 4, 2 - (-5)) = (2, -4, 7)$$
$$\vec{r} = \langle 1, 4, -5\rangle + t\langle 2, -4, 7\rangle$$

---

15 أكتب معادلة متجهة للمستقيم $\overleftrightarrow{AC}$

الحل:

$$\overrightarrow{AC} = (-4 -1, 1 - 4, 3 -(-5)) = (-5, -3, 8)$$
$$\vec{r} = \langle 1, 4, -5\rangle + u\langle -5, -3, 8\rangle$$

---

16 إذا كان قياس $\angle BAC = \theta$ فأثبت أن:

$$\cos\theta = \frac{58}{7\sqrt{138}}$$

الحل:

$$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = (2(-5) + (-4)(-3) + 7(8))$$
$$= -10 + 12 + 56 = 58$$
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4 + 16 + 49} = \sqrt{69}$$
$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{25 + 9 + 64} = \sqrt{98}$$
$$= \sqrt{49(2)} = 7\sqrt{2}$$
$$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}|\,.\,|\overrightarrow{AC}|\cos\theta$$
$$58 = \sqrt{69}\,.\,7\sqrt{2}\cos\theta$$
$$\cos\theta = \frac{58}{\sqrt{69} \times 7\sqrt{2}} = \frac{58}{7\sqrt{138}}$$

---

17 أجد مساحة المثلث ABC

الحل:

$$\theta = \cos^{-1}\frac{58}{7\sqrt{138}} = 45.14^\circ$$
$$\text{Area} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|\,.\,|\overrightarrow{AC}|\sin 45.14^\circ$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{69}\,.\,\sqrt{98}\sin 45.14^\circ = 29.14$$

---

18 إذا كانت معادلة المستقيم l هي: $\vec{r} = \langle 3, -25, 13\rangle + t\langle 4, 5, -1\rangle$ وكانت النقطة V تقع على المستقيم l حيث: $l \perp \overrightarrow{OV}$ فما إحداثيات النقطة V؟

الحل:

$$\vec{r} = \langle 3, -25, 13\rangle + t\langle 4, 5, -1\rangle$$
$$= (3 + 4t, -25 + 5t, 13 - t)$$
$$\overrightarrow{OV} = (4, 5, -1)$$
$$\vec{r}\,.\,\overrightarrow{OV} = (3+4t, -25+5t, 13-t)\,.\,(4, 5, -1)$$
$$= 12 + 16t - 125 + 25t - 13 + t = 0$$
$$t = 3$$
$$\mathrm{v}\,(3 + 12, -25 + 15, 13 - 3)$$
$$= (15, -10, 10)$$

يمر المستقيم l_1 بالنقطتين: E و F ويمر المستقيم l_2 بالنقطتين: G و H أحدد إذا كان هذان المستقيمان متوازيين أو متخالفين، أو متقاطعين، ثم أجد إحداثيات نقطة التقاطع إن كانا متقاطعين في كل مما يأتي:

19 $E(7, 6, 34), F(5, 9, 16)$,
$G(1, 21, -2)$, $H(-13, -14, 19)$

الحل:

$$\overrightarrow{EF} = (5-7, 9-6, 16-34)$$
$$= (-2, 3, -18)$$
$$\overrightarrow{GH} = (-13-1, -14-21, 19-(-2))$$
$$= (-14, -35, 21)$$
$$(-2, 3, -18) \neq k(-14, -35, 21)$$

إذن هما غير متوازيان

لمعرفة التقاطع

$$\langle 7-2t, 6+3t, 34-18t\rangle$$
$$= \langle 1-144, 21-354+214\rangle$$

وبحل المعادلات $u = \frac{-6}{49}$, $t = \frac{15}{7}$

ولكن لا تحقق المعادلات الثلاث فهما غير متقاطعين إذن هما متخالفان.

---

20 $E(-3, -5, 16), F(12, 0, 1)$,
$G(7, 2, 11)$, $H(1, -22, 23)$

الحل:

$$\overrightarrow{EF} = (12-(-3), 0-(-5), 1-16)$$
$$= (15, 5, -15) \div 5 = \langle 3, 1, -3\rangle$$
$$\overrightarrow{GH} = (1-7, -22-2, 23-11)$$
$$= (-6, -24, 12) \div 6 = \langle -1, -4, 2\rangle$$
$$(3, 1, -3) \neq k(-1, -4, 2)$$

إذن هما غير متوازيان

لمعرفة التقاطع

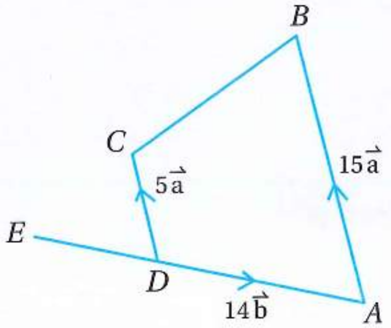
$$\langle -3+3t, -5+t, 16-3t\rangle$$
$$= \langle 7-4, 2-44, 11+24\rangle$$

وبحل المعادلات $u = -5$, $t = 5$

ولكن لا تحقق المعادلات الثلاث فهما غير متقاطعين إذن هما متخالفان.

---

21 في الشكل الرباعي $ABCD$ الآتي، مُدَّ AD على استقامته ليصل إلى النقطة E حيث $AD = 2DE$ إذا كان:
$\overrightarrow{DA} = 14\vec{b}$ وكان $\overrightarrow{DC} = 5\vec{a}$ وكان $\overrightarrow{AB} = 15\vec{a}$
فأثبت أن: B, وC, و E تقع على استقامة واحدة.



الحل:

$$\overrightarrow{ED} = 14\vec{b} + 7\vec{b} = 21\vec{b}$$
$$\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB}$$
$$= 21\vec{b} + 15\vec{a}$$
$$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC}$$
$$= 7\vec{b} + 5\vec{a}$$
$$\overrightarrow{EB} = 3 \,.\, \overrightarrow{EC}$$

$\therefore$ النقط: B, وC, و E تقع على استقامة واحدة.

الوحـــدة السادســـة

الإحصاء والاحتمالات

الدرس الأول

التوزيع الهندسي وتوزيع ذي الحدين

تجربة بيرنولي

هي تجربة عشوائية لها ناتجين هما نجاح الحادث أو عدم نجاح الحادث.

التجربة الاحتمالية الهندسية

هي تكرار تجربة عدداً من المرات المستقلة والتوقف عند أول نجاح وثبات احتمال النجاح في كل محاولة مثل إلقاء قطعة نقد عدة مرات والتوقف عند أول ظهور صورة مثلاً أو التسديد على هدف والتوقف عند أول إصابة.

أتحقَّق من فهمي

صفحة (164) : أبين إذا كانت التجربة العشوائية تمثل تجربة احتمالية هندسية في كل مما يأتي:

a) إلقاء عبد العزيز قطعة نقد منتظمة 6 مرات، ثم كتابة عدد مرات ظهور الصورة.

الحل:

ليست تجربة احتمالية هندسية لا يوجد توقف عند ظهور أول صورة والتجربة محددة بعدد 6 مرات

b) إطلاق سامية أسهماً بشكل متكرر نحو هدف، ثم التوقف عند إصابته أول مرة، علماً بأن احتمال اصابتها الهدف في كل مرة هو 0.6

الحل:

تجربة هندسية احتمالية: حوادث مستقلة والتوقف عند أول إصابة.

المتغير العشوائي الهندسي، وتوزيعة الاحتمالي

في التجربة الاحتمالية الهندسية إذا دل المتغير العشوائي X على عدد المحاولات وصولاً إلى أول نجاح فإن X يسمى المتغير العشوائي الهندسي ويعبر عنه بالصورة:

$$X \sim Geo(p)$$

حيث p احتمال النجاح الثابت في كل محاولة والمتغير X يأخذ القيم $1, 2, 3, \ldots$

مفهوم أساسي

إذا كان $X \sim Geo(p)$ فإن $x \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ ويعطى التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X بالقاعدة الآتية:

$$P(X = x) = p(1 - p)^{x-1}$$

حيث: x: عدد المحاولات وصولاً إلى أول نجاح

p: احتمال النجاح في كل محاولة

مثـــال

إذا كان $X \sim Geo(0.4)$ فجد:

1) $P(X = 3)$ **2)** $P(4 < X \leq 6)$

3) $P(X \leq 3)$ **4)** $P(X \geq 3)$

الحـــل

$p = 0.4 \qquad 1 - 0.4 = 0.6$

$P(X = x) = P\,(1 - p)^{x-1}$

1) $P(X = 3) = (0.4)\,(0.6)^2 = 0.144$

2) $P(4 < X \leq 6) = P(X = 5) + P(X = 6)$

$= (0.4)\,(0.6)^4 + (0.4)\,(0.6)^5$

$= 0.0829$

3) $P(X \leq 3) = P(X=3) + P(X=2) + P(X=1)$

$$= (0.4)(0.6)^2 + (0.4)(0.6)^1 + (0.4)$$

$$= 0.7840$$

4) $P(X \geq 3) = P(X=3) + P(X=4) + ...$

$$= 1 - (P(X=2) + P(X=1))$$

$$= 1 - (0.4(0.6) + 0.4) = 0.36$$

ملاحظة

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

عندما تكون الاحتمالات كثيرة نحسب (الباقي) – 1

مثال

ألقيت قطعة نقد منتظمة بشكل متكرر حتى ظهور الصورة جد احتمال ظهور الصورة في الرمية الرابعة.

الحل

$p = \frac{1}{2}$

$P(X=4) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{16}$

مثال

يطلق صياد النار على هدف واحتمال الاصابة في كل مرة هو 0.7 ويتوقف عند أول إصابة، فجد:

1) احتمال الاصابة في الرمية الثالثة

2) احتمال أن يطلق 3 مرات على الأقل.

3) احتمال أن يطلق 3 مرات على الأكثر.

الحل

$p = 0.7 \qquad 1 - 0.7 = 0.3$

1) $P(X=3) = (0.7)\ (0.3)^2 = 0.063$

2) $P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) + ...$

$$= 1 - (P(X=2)) + P(X=1)$$

$$= 1 - ((0.7)\ (0.3) + (0.7)) = 0.09$$

3) $P($ على الأكثر 3 $)$

$$= P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$$

$$= (0.7) + (0.7)\ (0.3) + (0.7)\ (0.3)^2$$

$$= 0.973$$

مثال

إذا كان $X \sim Geo(p)$ وكان $P(X=2) = 0.24$،

جد p

الحل

$P(X=2) = P(1-p) = 0.24$

$$= p - p^2 = 0.24$$

$$p^2 - P + 0.24 = 0$$

$$(P - 0.6)\ (P - 0.4) = 0$$

$$\longrightarrow P = 0.6\ ,\ P = 0.4$$

أتحقق من فهمي

صفحة (166) : يمثل الشكل المجاور قرصاً مقسماً إلى 4 قطاعات متطابقة. إذا دل المتغير العشوائي X على عدد مرات تدوير مؤشر القرص حتى يقف عند اللون الأخضر أول مرة، فأجد كلاً مما يأتي:

a) $P(X=3)$

الحل:

$p = \frac{1}{4} \qquad 1 - p = \frac{3}{4}$

$P(X=3) = \frac{1}{4}(\frac{3}{4})^2 = \frac{1}{4}(\frac{9}{16}) = \frac{9}{64}$

b) $P(X \le 4)$

الحل:

$$=P(X=4)+P(X=3)+P(X=2)+P(X=1)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{4}$$

$$=\frac{27}{256}+\frac{9}{64}+\frac{3}{16}+\frac{1}{4}$$

$$=\frac{27}{256}+\frac{36}{256}+\frac{48}{256}+\frac{64}{256}=\frac{175}{256}$$

c) احتمال تدوير مؤشر القرص ثلاث مرات على الأقل حتى يقف عند اللون الأخضر أول مرة.

الحل:

$$P(X \ge 3)=1-P(X<3)$$

$$=1-(P(X=2)+P(X=1))$$

$$=1-\left(\left(\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{4}\right)=1-\left(\frac{3}{16}+\frac{1}{4}\right)\right.$$

$$=1-\frac{7}{16}=\frac{9}{16}$$

التوقع للمتغير العشوائي الهندسي

مفهوم أساسي

إذا كان $X \sim Geo(p)$ فإن $x \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ ويعطى التوقع للمتغير العشوائي X بالقاعدة الآتية:

$$E(X)=\frac{1}{p}$$

حيث: p احتمال النجاح في كل محاولة

مثال

عند رمي قطعة النقد عدة مرات والتوقف عند ظهور أول صورة ما العدد المتوقع.

الحل

$$p=\frac{1}{2}$$

$$E(X)=\frac{1}{p}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

مثال

عند رمي حجر النرد عدة مرات والتوقف عند أول ظهور للعدد 3 ما العدد المتوقع

الحل

$$p=\frac{1}{6}$$

$$E(X)=\frac{1}{p}=\frac{1}{\frac{1}{6}}=6$$

مثال

احتمال فوز شخص بمسابقة في كل مرة هو 0.6 والتوقف عند أول فوز ما توقع عدد المحاولات.

الحل

$$p=0.6$$

$$E(X)=\frac{1}{0.6}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$$

مثال

في مدينة ما نسبة الموظفين الحكوميين 4% وعند إجراء مقابلة نتوقف عند أول شخص نقابله يكون موظف حكومي.

1) ما توقع عدد الأشخاص الذين نقابلهم.

2) كم شخص نقابل قبل الالتقاء بأول موظف حكومي

الحل

1) $E(X)=\frac{1}{0.04}=\frac{100}{4}=25$

2) نكون قد قابلنها 24 شخص قبل مقابلة أول موظف

أتحقق من فهمي

صفحة (168) : أعلنت إحدى شركات تصنيع حبوب الفطور للأطفال عن وجود لعبة مجانية في بعض علب الحبوب الجديدة التي تنتجها الشركة إذا احتوت علبة من كل 4 علب على لعبة ودل المتغير العشوائي X على عدد العلب التي سيفتحها الطفل حتى يجد لعبة، فكم علبة يتوقع أن يفتحها الطفل حتى يجد أول لعبة؟

الحل:

$$p = \frac{1}{4}$$

$$E(X) = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

التجربة الاحتمالية ذات الحدين

مفهوم أساسي

إذا توافرت الشروط الأربعة الآتية في تجربة عشوائية ما فإنها تعد تجربة احتمالية ذات حدين:

1) اشتمال التجربة على محاولات مستقلة متكررة

2) فرز النتائج الممكنة في كل محاولة إلى نجاح أو فشل.

3) ثبات احتمال النجاح في كل محاولة

4) وجود عدد محدد من المحاولات في التجربة

فمثلاً إلقاء قطعة النقد 9 مرات وملاحظة عدد مرات ظهور الصورة تمثل تجربة احتمالية ذات حدين.

لأن الحوادث مستقلة واحتمال النجاح في كل مرة هو نفسه ويوجد عدد محدود من المحاولات.

بينما إلقاء حجر نرد حتى ظهور العدد 5 ليست ذات حدين لأنها لا تحوي عدد محدداً من المحاولات.

أتحقَّق من فهمي

صفحة (169) : أبين إذا كانت التجربة العشوائية تمثل تجربة احتمالية ذات حدين في كل مما يأتي:

a) إلقاء حجر نرد منتظم 20 مرة ثم كتابة عدد المرات التي ظهر فيها العدد 1 على الوجه العلوي لحجر النرد.

الحل:

تجربة احتمالية ذات حدين (حوادث مستقلة وعدد محدد من المحاولات).

b) اختيار 7 طلبة عشوائياً من صف روضة فيه 15 ولداً و 10 بنات وذلك لتشكيل فريق لإحدى الألعاب ثم كتابة عدد البنات اللاتي وقع عليهن الاختيار.

الحل:

ليست تجربة احتمالية ذات حدين لأن الحوادث ليست مستقلة كل حادث يتأثر بما سبق.

المتغير العشوائي ذو الحدين وتوزيعه الاحتمالي

في التجربة الاحتمالية ذات الحدين، إذا دل المتغير العشوائي X على عدد مرات النجاح في جميع محاولات التجربة التي عددها n وكان احتمال النجاح في كل محاولة هو p فإن X يسمى المتغير العشوائي ذا الحدين، ويمكن التعبير عنه بالرمز على النحو الآتي:

$$X \sim B(n, p)$$

حيث n و p معاملا المتغير العشوائي.

ومن ثم فإن المتغير X يأخذ القيم الآتية: n ,… ,2 ,1 ,0 أي إن:

$$x \in \{0 , 1 , 2, \dots, n\}$$

إذا كان X متغيراً عشوائياً ذا حدين فإنه يمكن إيجاد احتمال أن يأخذ X قيمة بعينها ضمن مجموعة قِيَمه الممكنة باستعمال الصيغة الآتية:

مفهوم أساسي

إذا كان $X \sim B(n, p)$ فإن $\in \{0 ,1 ,2 ,\dots , n\}$ ويعطى التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X بالقاعدة الآتية:

$$P(X = r) = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}$$

حيث:

n عدد المحاولات في التجربة.

p احتمال النجاح في كل محاولة.

r عدد المحاولات الناجحة من بين n من المحاولات.

مثـــال

احتمال فوز فريق في المباراة الواحدة هو 0.6 ولعب الفريق 7 مباريات

1) ما احتمال فوزه في 4 مباريات.

2) ما احتمال فوزه في 6 مباريات على الأقل

3) ما احتمال فوزه في مباراتين على الأقل

4) ما احتمال فوزه في مباراتين على الأكثر.

الحـــل

حوادث مستقلة واحتمال الفوز في كل مرة هو 0.6

لذلك هي: $X\sim B(n, p)$

حيث $n=7\ ,\ \ p=0.6$

1) $P(X=4)=\binom{7}{4}(0.6)^4(0.3)^3=0.1225$

تذكر أن:

$$\binom{7}{4}=\frac{7!}{4!\,(3)!}=\frac{7(6)\,(5)\,(4!)}{4!(3)(2)(1)}=35$$

أو بالآلة الحاسبة: $nCr\rightarrow 7C4=35$

2) $P(X\geq 6)=P(X=6)+P(X=7)$

$$=\binom{7}{6}(0.6)^6(0.4)^1+\binom{7}{7}(0.6)^7(0.4)^0$$
$$=0.1586$$

3) $P(X\geq 2)=1-(P(X=1)+P(X=0))$

$$=1-\Big(\Big(\binom{7}{1}(0.6)^1(0.4)^6+\binom{7}{0}(0.6)^0(0.4)^7\Big)$$
$$=0.9812$$

4) $P(X=2)+(P(X=1)+P(X=0)$

$$=\binom{7}{2}(0.6)^2(0.4)^5+\binom{7}{1}(0.6)^1(0.4)^6$$
$$+\binom{7}{0}(0.6)^0(0.4)^7=0.0962$$

مثـــال

إذا كان $X\sim B(5, 0.8)$ فجد:

1) $P(X=3)$

2) $P(X>3)$

3) $P(3\leq X<5)$

4) $P(X\leq 1)$

الحـــل

1) $P(X=3)=\binom{5}{3}(0.8)^3(0.2)^2$
$$=0.2048$$

2) $P(X>3)=P(X=4)+P(X=5)$

$$=\binom{5}{4}(0.8)^4(0.2)^1+\binom{5}{5}(0.8)^5(0.2)^0$$
$$=0.7373$$

3) $P(3\leq X<5)=P(X=3)+P(X=4)$

$$=\binom{5}{3}(0.8)^3(0.2)^2+\binom{5}{4}(0.8)^4(0.2)^1$$
$$=0.6144$$

4) $P(X\leq 1)=P(X=1)+P(X=0)$

$$=\binom{5}{1}(0.8)^1(0.2)^4+\binom{5}{0}(0.8)^0(0.2)^5$$
$$=0.0067$$

مثـــال

إذا كان $X\sim B(3, p)$ وكان $P(X\geq 1)=\frac{19}{27}$ جد $P(X=2)$

الحـــل

$$P(X\geq 1)=1-P(X=0)$$
$$\frac{19}{27}=1-\binom{3}{0}(p)^0(1-p)^3$$
$$\frac{19}{27}=1-(1-p)^3\rightarrow(1-p)^3=1-\frac{19}{27}$$
$$(1-p)^3=\frac{8}{27}\rightarrow 1-p=\frac{2}{3}\rightarrow p=\frac{1}{3}$$
$$P(X=2)=\binom{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1=3\left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{9}$$

مثــال

إذا كان $X\sim B(3,p)$ وكان $P(X\le 2)=\frac{98}{125}$ جد $p(X=2)$

الحــل

$$P(X\le 2)=1-P(X=3)$$

$$\frac{98}{125}=1-\binom{3}{3}(p)^3(1-p)^0$$

$$\frac{98}{125}=1-p^3\longrightarrow p^3=1-\frac{98}{125}=\frac{27}{125}$$

$$p=\frac{3}{5}$$

$$P(X=2)=\binom{3}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^1$$

$$=3\left(\frac{9}{25}\right)\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{54}{125}$$

أتحقّق من فهمي

صفحة (172) :

a) ألقت عائشة حجر نرد منتظم 10 مرات ما احتمال ظهور الرقم 1 على الوجه العلوي 3 مرات فقط.

الحل:

حوادث مستقلة وعدد محدد

$$p=\frac{1}{6}\quad,\quad X\sim B\left(10,\frac{1}{6}\right)$$

$$P(X=3)=\binom{10}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^7$$

b) تحتوي آلة حاسبة على 16 زراً للأعداد من 0 إلى 9 إضافة إلى العمليات الأساسية والمساواة، والفاصلة العشرية إذا أغمض أحمد عينيه ثم ضغط على أزرار هذه الآلة 20 مرة بصورة عشوائية فما احتمال أن يضغط على أزرار العمليات الحسابية الأساسية 3 مرات فقط؟

الحل:

حوادث مستقلة وعدد محدد

$$p=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$$

$$P(X=3)=\binom{20}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^{17}$$

c) إذا كان احتمال نجاح عملية جراحية هو 0.8 وأجرى طبيب هذه العملية 10 مرات خلال عام واحد فما احتمال نجاح 7 عمليات منها على الأقل؟

الحل:

حوادث مستقلة وعدد محدد

$$p=0.8\quad,\quad n=10$$

$$P(X\ge 7)=p(X=7)+P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)$$

$$=\binom{10}{7}(0.8)^7(0.2)^3+\binom{10}{8}(0.8)^8(0.2)^2+\binom{10}{9}(0.8)^9(0.2)^1+\binom{10}{10}(0.8)^{10}(0.2)^0$$

التوقع والتباين للمتغير العشوائي ذي الحدين

إذا كان $X\sim B(n,p)$ فإن التوقع $E(X)=n\,p$

والتباين هو:

$$\mathrm{Var}(X)=\sigma^2=np(1-p)$$

حيث: n: عدد المحاولات في التجربة

p: احتمال النجاح في كل محاولة.

مثــال

إذا كان $X\sim B(20,0.2)$ فجد التوقع والتباين للمتغير العشوائي X:

الحــل

$$n=20\quad,p=0.2\qquad 1-p=0.8$$

$$E(X)=np=20\,(0.2)=4$$

$$\mathrm{Var}(X)=np\,(1-p)$$

$$=20\,(0.2)\,(0.8)=3.2$$

مثال

إذا كان $X \sim B(64, \frac{1}{4})$

1) جد التوقع والتباين للمتغير العشوائي X

2) جد الوسط الحسابي والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X

الحل

$$n = 64 \quad , p = \frac{1}{4} \qquad 1 - p = \frac{3}{4}$$

1) $E(X) = np = 64\left(\frac{1}{4}\right) = 16$

$$\text{Var}(X) = np\,(1 - p)$$
$$= 64\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = 12$$

2) الوسط الحسابي = التوقع = 16

الانحراف المعياري = $\sqrt{\text{التباين}}$ = $\sqrt{12}$

مثال

إذا كانت نسبة المعيب في إنتاج آلة هي 0.05 وفحصنا 1000 قطعة ودل المتغير العشوائي X على عدد القطع المعيبة فجد التوقع والتباين للمتغير X

الحل

$$X \sim B(n, p)$$
$$n = 1000 \ , \ p = 0.05 \ , \quad 1 - p = 0.95$$
$$E(X) = np = 1000(0.05) = 50$$
$$\text{Var}(X) = np\,(1 - p)$$
$$= 1000(0.05)\,(0.95) = 45.5$$

أتحقَّق من فهمي

صفحة (173) : سيارات: بعد إجراء مسح للسيارات التي صنعتها شركة ما، تبين أن في 5% منها عطلاً ميكانيكاً إذا استورد وكيل للشركة في إحدى الدول 1000 سيارة فأجد عدد السيارات التي يتوقع أن يظهر فيها هذا العطل

الحل:

$$X \sim B(n, p)$$
$$n = 1000 \ , \ p = 0.05 \ ,$$
$$E(X) = np = 1000(0.05) = 50$$

أتحقَّق من فهمي

صفحة (175) : فحص مراقب الجودة في أحد المصانع 500 عينة عشوائياً من الخلطات الخرسانية فوجد أن 10 منها لا تطابق المواصفات. إذا فحص مراقب الجودة 200 عينة أخرى فأجد كلاً مما يأتي:

a) العدد المتوقع من العينات التي لا تطابق المواصفات من العينات العشرين التي فحصها مراقب الجودة.

b) تباين عدد العينات التي لا تطابق المواصفات من العينات العشرين التي فحصها مراقب الجودة.

الحل:

$$X \sim B(n, p)$$
$$n = 200 \ , \ p = \frac{10}{500} = 0.02 \ , 1 - p = 0.98$$
$$E(X) = np = 200(0.02) = 4$$
$$\text{Var}(X) = np\,(1 - p)$$
$$= 200(0.02)\,(0.98) = 3.92$$

الفاتن في الرياضيات

أتدرّب وأحُلّ المسائل

إذا كان $X\sim Geo(0.2)$ فأجد كلاً مما يأتي مقرباً إجابتي إلى أقرب 3 منازل عشرية

$$p = 0.2 \;, \quad 1 - p = 0.8$$

$$P(X = x) = P\,(1 - p)^{x-1}$$

① $P(X = 2) = 0.2\,(0.8)^1 = 0.16$

② $P(X = 10) = 0.2\,(0.8)^9 = 0.0268 \approx 0.027$

③ $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3)$

$$= 1 - (P(X = 2) + P(X = 1))$$

$$= 1 - ((0.2)\,(0.8)^1\,) + (0.2))$$

$$= 0.64$$

④ $P(2 < X \leq 5) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$

$$= 0.2\,(0.8)^2 + 0.2\,(0.8)^3 + 0.2\,(0.8)^4$$

$$= 0.3123 \approx 0.312$$

⑤ $P(X < 2) = P(X = 1) = 0.2$

⑥ $P(X \leq 4) = P(X = 4) + P(X = 3) + P(X = 2) + P(X = 1)$

$$=(0.2)(0.8)^3 + (0.2)(0.8)^2 + (0.2)(0.8)^1 + 0.2$$

$$= 0.590$$

⑦ $P(1 \leq X < 2) = P(X = 1) = 0.2$

⑧ $P(3 \leq X \leq 6) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6)$

$$= 0.2(0.8)^2 + 0.2(0.8)^3 + 0.2(0.8)^4 + 0.2(0.8)^5$$

$$\approx 0.378$$

⑨ ألقي حجر نرد منتظم ذو ثمانية أوجه مرقمة بالأرقام من 1 إلى 8 بشكل متكرر حتى ظهور العدد 7 أجد احتمال إلقاء حجر النرد 6 مرات.

الحل:

$$X\sim Geo\left(\frac{1}{8}\right) \qquad 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$P(X = 6) = \frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^5 = \frac{16807}{262144}$$

⑩ أطلق عماد رصاصة نحو هدف بصورة متكررة، ثم توقف بعد إصابته الهدف. إذا كان احتمال إصابته الهدف في كل مرة هو 0.7 فما احتمال أن يصيبه أول مرة في المحاولة العاشرة؟

الحل:

$$X\sim Geo\,(0.8) \qquad 1 - 0.7 = 0.3$$

$$P(X = 10) = 0.7\,(0.3)^9$$

⑪ **أحياء:** في دراسة لعالمة أحياء على خنافس في إحدى الحدائق توصلت العالمة إلى أن واحدة من كل 12 خنفساء لديها جسم برتقالي. إذا بدأت العالمة جمع الخنافس عشوائياً على أن تتوقف عند إيجاد أول خنفساء جسمها برتقالي فأجد احتمال أن تتوقف عن جمع الخنافس عند جمعها 20 خنفساء

الحل:

$$p = \frac{1}{12}$$

$$X\sim Geo\left(\frac{1}{12}\right) \qquad 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$

$$P(X = 20) = \frac{1}{12}\left(\frac{11}{12}\right)^{19}$$

⑫ **إصلاح سيارات:** أصلح عبد الله محرك إحدى السيارات لكنه لم يستطع تجربة تشغيله إلا مرة واحدة كل 20 دقيقة نتيجة خلل كهربائي إذا كان احتمال أن يعمل المحرك عند محاولة تشغيله هو 0.4 فما احتمال عمل المحرك أول مرة بعد مضي أكثر من ساعة على محاولة إصلاحه؟

الحل:

الساعة 60 دقيقة ، عدد المحاولات في الساعة =

$$\frac{60}{20} = 3 \;, \quad p = 0.4$$

$$P(X>3) = 1 - P(X=2)+P(X=1)$$
$$= 1 - (0.4(0.6) + 0.4)$$
$$= 1 - 0.64 = 0.36$$

إذا كان احتمال اصابة شخص ما بأعراض جانبية بعد تناوله دواءً معيناً هو 0.25 وقرر طبيب إعطاء مرضاه هذا الدواء إلى حين ظهور أول إصابة بأعراضه الجانبية فأجد كلاً مما يأتي:

⑬ احتمال أن يتوقف الطبيب عن إعطاء المرضى الدواء عند تناول 10 مرضى هذا الدواء

الحل:

$$X \sim Geo\,(0.25)$$
$$p = 0.25 \;,\quad 1-p = 1-0.25 = 0.75$$
$$P(X=10) = (0.25)\,(0.75)^9 = 0.0188 \approx 0.19$$

⑭ احتمال أن يزيد عدد المرضى الذين سيتناولون الدواء على 3 مرضى

الحل:

$$P(X>3) = 1 - (P(X=2)+P(X=1))$$
$$= 1 - (0.25(0.75) + 0.25)$$
$$=0.5625$$

⑮ العدد المتوقع للمرضى الذين سيتناولون الدواء إلى حين ظهور أول إصابة بأعراض الدواء الجانبية.

الحل:

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.25} = 4$$

إذا كان $X \sim B(10,\,0.3)$ فأجد كلاً مما يأتي مقرباً إجابتي إلى أقرب 3 منازل عشرية

⑯ $P(X=2)$

الحل:

$$n = 10 \;, p = 0.3 \qquad 1-p = 0.7$$
$$P(X=2) = \binom{10}{2}(0.3)^2\,(0.7)^8$$
$$= 0.2335 \approx 0.234$$

⑰ $P(X \geq 9)$

الحل:

$$= P(X=9) + P(X=10)$$
$$= \binom{10}{9}(0.3)^9\,(0.7)^1 + \binom{10}{10}(0.3)^{10}\,(0.7)^0$$

⑱ $P(X \leq 8)$

الحل:

$$=1 - (P(X=9) + P(X=10))$$
$$= 1 - \left(\binom{10}{9}(0.3)^9\,(0.7)^1 + \binom{10}{10}(0.3)^{10}\,(0.7)^0\right)$$

⑲ $P(1 < X \leq 4)$

الحل:

$$= P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$$
$$= \binom{10}{2}(0.3)^2\,(0.7)^8 + \binom{10}{3}(0.3)^3\,(0.7)^7$$
$$+ \binom{10}{4}(0.3)^4\,(0.7)^6$$

⑳ $P(\,X > 1)$

الحل:

$$= 1 - (P(X=0) + P(X=1))$$
$$= 1 - \left(\binom{10}{0}(0.3)^0\,(0.7)^{10} + \binom{10}{1}(0.3)^1\,(0.7)^9\right)$$
$$= 0.8507 \approx 0.851$$

㉑ $P(\,X < 4)$

الحل:

$$= P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$$
$$= \binom{10}{0}(0.3)^0\,(0.7)^{10} + \binom{10}{1}(0.3)^1\,(0.7)^9$$
$$+ \binom{10}{2}(0.3)^2\,(0.7)^8 + \binom{10}{3}(0.3)^3\,(0.7)^7$$

㉒ $P(0 \leq X < 3)$

الحل:

$$= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$
$$= \binom{10}{0}(0.3)^0\,(0.7)^{10} + \binom{10}{1}(0.3)^1\,(0.7)^9$$
$$+ \binom{10}{2}(0.3)^2\,(0.7)^8$$

㉓ $P(3 \le X \le 6)$

الحل:

$$= P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)$$

$$= \binom{10}{3}(0.3)^3(0.7)^7 + \binom{10}{4}(0.3)^4(0.7)^6$$

$$+ \binom{10}{5}(0.3)^5(0.7)^5 + \binom{10}{6}(0.3)^6(0.7)^4$$

أجد التوقع لكل من المتغيرين العشوائيين الآتيين:

㉔ $X \sim Geo(0.3)$

الحل:

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.3} = \frac{10}{3}$$

㉕ $X \sim Geo\left(\frac{3}{7}\right)$

الحل:

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{3}{7}} = \frac{7}{3}$$

أجد التوقع والتباين لكل من المتغيرين العشوائيين الآتيين:

㉖ $X \sim B(5, 0.1)$

الحل:

$$E(X) = np = 5\,(0.1) = 0.5$$

$$\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$$

$$= 5(0.1)(0.9) = 0.45$$

㉗ $X \sim B(20, \frac{3}{8})$

الحل:

$$E(X) = np = 20\left(\frac{3}{8}\right) = \frac{15}{2}$$

$$\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$$

$$= 20\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{5}{8}\right) = \frac{75}{16}$$

㉘ في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم 9 مرات، أجد احتمال ظهور عدد زوجي 5 مرات

الحل:

$$n = 9 \qquad , p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(X=5) = \binom{9}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{126}{512}$$

طيران: يواجه الطيارون صعوبة في الرؤيا باحتمال 0.25 عند الهبوط بالطائرات في أحد المطارات خلال فصل الشتاء بسبب سوء الأحوال الجوية. إذا هبط طيار 20 مرة في هذا المطار شتاءً فأجد كلاً مما يأتي:

㉙ احتمال أن يواجه الطيار صعوبة في الرؤيا خلال الهبوط في ثلاث مرات فقط.

الحل:

$$X \sim B(n, p) \quad , X \sim B(20, 0.25)$$

$$P(X=3) = \binom{20}{3}(0.25)^3(0.75)^{17}$$

$$= 0.1339 \approx 0.134$$

㉚ احتمال أن يواجه الطيار صعوبة في الرؤيا خلال الهبوط في ثلاث مرات على الأقل.

الحل:

$$P(X \ge 3) = 1 - (P(X=2)+P(X=1)+P(X=0))$$

$$= 1 - \left(\binom{20}{2}(0.25)^2(0.75)^{18} + \binom{20}{1}(0.25)^1(0.75)^{19}\right.$$

$$\left. + \binom{20}{0}(0.25)^0(0.75)^{20}\right)$$

㉛ احتمال أن يواجه الطيار صعوبة في الرؤيا خلال الهبوط في المرات جميعها

الحل:

$$P(X=20) = \binom{20}{20}(0.25)^{20}(0.75)^0$$

$$= (0.25)^{20}$$

㉜ العدد المتوقع من المرات التي سيواجه فيها الطيار صعوبة في الرؤيا خلال عملية الهبوط

الحل:

$$E(X) = np = 20\,(0.25) = 5$$

33 إذا كان X متغيراً عشوائياً ذا حدين، وكان:

$\text{Var}(X) = 1.12$, $E(X) = 1.4$ فأجد $P(X \geq 6)$

الحل:

$$E(X) = np = 1.4$$

$$\text{Var}(X) = np(1-p) = 1.12$$

$$= 1.4\,(1-p) = 1.12$$

$$1 - p = \frac{1.12}{1.4} = 0.8$$

$$1 - 0.8 = p \longrightarrow p = 0.2$$

$$np = n(0.2) = 1.4$$

$$n = 7$$

$$P(X \geq 6) = P(X=6) + P(X=7)$$

$$= \binom{7}{6}(0.2)^6(0.8)^1 + \binom{7}{7}(0.2)^7(0.8)^0$$

---

34 إذا كان $X \sim Geo(p)$ وكان $E(X) = \frac{4}{3}$ فأجد قيمة p

الحل:

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{4}{3} \longrightarrow p = \frac{3}{4}$$

---

35 إذا كان $X \sim B(21, p)$ وكان $p(X=10) = p(X=9)$ فأجد قيمة p

الحل:

$$P(X=10) = P(X=9)$$

$$\binom{21}{10}(p)^{10}(1-p)^{11} = \binom{21}{9}(p)^9(1-p)^{12}$$

$$352716\,p = 293930\,(1-p)$$

$$1.2p = 1 - p$$

$$p + 1.2p = 1 \longrightarrow 2.2p = 1$$

$$\longrightarrow p = \frac{1}{2.2} = 0.45$$

في دراسة لمندوب مبيعات تبين أن احتمال شراء شخص منتجاً ما بعد التواصل معه هو 0.1 إذا تواصل مندوب المبيعات مع 10 أشخاص وكان ثمن المنتج JD 10 فأجد كلاً مما يأتي:

36 احتمال أن يشتري جميع الأشخاص المنتج

الحل:

$$X \sim B(10, 0.1)$$

$$P(X=10) = \binom{10}{10}(0.1)^{10}(0.9)^0 = (0.1)^{10}$$

---

37 احتمال أن يكون عائد المبيعات أكثر من JD 80

الحل:

العائد > 80

البيع > 8

$$P(X > 8) = P(X=9) + P(X=10)$$

$$= \binom{10}{9}(0.1)^9(0.9)^1 + \binom{10}{10}(0.1)^{10}(0.9)^0$$

---

38 **أكتشف الخطأ:** أرادت لانا حل السؤال الآتي:

عند إلقاء قطعة نقد غير منتظمة، كان احتمال ظهور الصورة هو $\frac{5}{11}$ إذا ألقيت قطعة النقد بصورة متكررة حتى تظهر الصورة أول مرة فما احتمال ظهور الصورة أول مرة عند إلقاء قطعة النقد في المرة الثالثة؟ وكان حلها على النحو الآتي:

$$P(X=3) = \frac{5}{11}\left(1 - \frac{5}{11}\right)^3$$

$$= \frac{1080}{14641}$$

أكتشف الخطأ في حل لانا، ثم أصححه، مبرراً إجابتي

الحل:

$P(X=3) = \frac{5}{11}\left(1 - \frac{5}{11}\right)^3$ الخطأ

$P(X=3) = \frac{5}{11}\left(1 - \frac{5}{11}\right)^2$ الصواب

$$= \frac{5}{11}\left(\frac{6}{11}\right)^2 = \frac{180}{1331}$$

39 **تحدٍ:** ترسل إحدى الشركات استبانة إلكترونية إلى زبائنها بعد بيعهم منتجاً ما، لتعرف التغذية الراجعة حيال المنتج ولضمان ذلك فإن الشركة تكرر إرسال كل استبانة إلى حين رد الزبون إذا كان احتمال رد الزبون على الاستبانة في المرة الأولى أكبر من 0.5 واحتمال رده على الاستبانة في المرة الثانية هو 0.21 وبافتراض أن هذه المحاولات مستقلة، فأجد توقع عدد الاستبانات التي سترسلها الشركة إلى حين رد الزبون علماً بأن احتمال رد الزبون على أي استبانة لا يتأثر بعدد مرات إرسالها.

الحل:

إذا كان x يدل على عدد مرات إرسال الرسالة إلى حين الرد عليها لأول مرة فإن

$X\sim Geo\ (p)$

$P(X=2)=P\ (1-p)^1=0.21$

$p^2-p+0.21=0$

$(p-0.3)\ (p-0.7)=0$

$p=0.3\ ,\ \text{or}\quad p=0.7$

لكن احتمال الرد في المرة الأولى أكبر من 0.5 فتكون

$p=0.7$

$$E(X)=\frac{1}{p}=\frac{1}{0.7}\longrightarrow p=\frac{10}{7}$$

تبرير: إذا كان عدد الطلبة في أحد الصفوف 25 طالباً فأجد كلاً مما يأتي:

40 احتمال أن يكون طالب واحد فقط من مواليد شهر آذار

الحل:

$$p=\frac{31}{365}\approx 0.085$$

$$p(X=1)=\binom{25}{1}(0.085)^1\,(0.915)^{24}$$

41 احتمال أن يكون 3 طلبة من مواليد شهر آذار

الحل:

$$P(X=\ 3)=\binom{25}{3}(0.085)^3\,(0.915)^{22}$$

42 احتمال أن يكون اثنان من الطلبة فقط من مواليد فصل الشتاء

الحل:

$$p=\frac{3}{12}$$

$$P(X=2)=\binom{25}{2}\left(\frac{3}{12}\right)^2\left(\frac{9}{12}\right)^{23}$$

39 **تحدٍ:** إذا كان: $X\sim B(30,\ 0.1)$ فأجد:

$P(\mu\leq X<\mu+\sigma)$

الحل:

$n=30\quad ,\quad p=0.1\qquad 1-p=0.9$

$E(X)=np=30\ (0.1)=3=\mu$

$$\begin{aligned}\text{Var}(X)&=np(1-p)=30(0.1)(0.9)\\&=2.7=\sigma^2\end{aligned}$$

$\sigma=\sqrt{2.7}\ =1.64$

$P(\mu\leq X<\mu+\sigma)$

$P(3\leq X<3+1.64)$

$P(3\leq X<4.64)$

$=P(X=3)+P(X=4)$

$$=\binom{30}{3}(0.1)^3\,(0.9)^{27}+\binom{30}{4}(0.1)^4\,(0.9)^{26}$$

كتاب التمارين ص 34

إذا كان $X\sim Geo(\frac{1}{8})$ فأجد كلاً مما يأتي، مقرباً إجابتي إلى أقرب 3 منازل عشرية:

① $P(X=4)=\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^3$

② $P(X\leq 4)=P(X=4)+P(X=3)$

$+P(X=2)+P(X=1)$

$=\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^3+\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^1+\frac{1}{8}$

③ $P(X\geq 2)=1-P(X=1)$

$=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

④ $P(3\leq X\leq 7)=P(X=3)+P(X=4)$

$+P(X=5)+P(X=6)+P(X=7)$

$=\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^3+\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^4$

$+\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^5+\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^6$

⑤ $P(X<2)=P(X=1)=\frac{1}{8}$

⑥ $P(X>5)=1-(P(X=5)+P(X=4)$

$+P(X=3)+P(X=2)+P(X=1)$

$=1-\left(\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^4+\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^3+\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)\right)$

⑦ $P(1<X<3)=P(X=2)$

$=\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^1=\frac{7}{64}$

⑧ $P(4<X\leq 6)=P(X=5)+P(X=6)$

$=\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^4+\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^5$

إذا كان $X\sim B(5, 0.4)$ فأجد كلاً مما يأتي مقرباً إجابتي إلى أقرب 3 منازل عشرية.

⑨ $P(X=4)=\binom{5}{4}(0.4)^4(0.6)^1$

$=0.0768\approx 0.077$

⑩ $P(X\geq 5)=P(X=5)=\binom{5}{5}(0.4)^5(0.6)^0$

$=0.01$

⑪ $P(X\leq 3)=1-(P(X=4)+P(X=5))$

$=1-\left(\binom{5}{4}(0.4)^4(0.6)^1+\binom{5}{5}(0.4)^5(0.6)^0\right.$

$=0.913$

⑫ $P(3<X\leq 5)=P(X=4)+P(X=5)$

$=0.087$

⑬ $P(X>2)=1-(P(X=1)+P(X=0))$

$=1-\left(\binom{5}{1}(0.4)^1(0.6)^4+\binom{5}{0}(0.4)^0(0.6)^5\right.$

⑭ $P(X<3)=P(X=2)+P(X=1)$

$+P(X=0)$

⑮ $P(2\leq X<5)=P(X=2)+P(X=3)$

$+P(X=4)$

⑯ $P(5<X<8)=0$

أجد التوقع لكل من المتغيرين العشوائيين الآتيين:

⑰ $X\sim Geo(0.45)$

الحل:

$E(X)=\frac{1}{p}=\frac{1}{0.45}=2.22$

⑱ $X\sim Geo\left(\frac{2}{5}\right)$

الحل:

$E(X)=\frac{1}{p}=\frac{1}{\frac{2}{5}}=\frac{5}{2}$

أجد التوقع والتباين لكل من المتغيرين العشوائيين الآتيين:

⑲ $X \sim B(10, 0.2)$

الحل:

$$E(X) = np = 10\ (0.2) = 2$$

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= np(1-p)\\ &= 10(0.2)(0.8) = 1.6\end{aligned}$$

⑳ $X \sim B(150, 0.3)$

الحل:

$$E(X) = np = 150\ (0.3) = 45$$

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= np(1-p)\\ &= 150(0.3)(0.7) = 31.5\end{aligned}$$

أخذت نور تراقب السيارات المارة أمام منزلها. إذا كان احتمال أن تمر سيارة صفراء اللون من أمام منزلها هو 0.1 فأجد كلاً مما يأتي:

㉑ احتمال عدم مرور أي سيارة صفراء من بين أول 5 سيارات مرت أمام المنزل.

الحل:

$$X \sim B(5, 0.1)$$

$$P(X=0) = \binom{5}{0}(0.1)^0\,(0.9)^5 = 0.5905$$

㉒ احتمال مرور أكثر من 3 سيارات حتى شاهدت نور أول سيارة صفراء.

الحل:

$$X \sim Geo(0.1)$$

$$\begin{aligned}P(X>3)\ &= 1 - (P(X=3) + P(X=2)\\ &\qquad + P(X=1))\\ &= 1 - ((0.1(0.9)^2 + 0.1(0.9)^1 + 0.1)\\ &= 0.729\end{aligned}$$

㉓ إذا كان احتمال تسجيل لاعب كرة سلة هدفاً في الرمية الواحدة هو 10% وحاول هذا اللاعب التسجيل 15 مرة فأجد احتمال تسجيله هدفاً من 3 رميات فقط.

الحل:

$$X \sim B(15, 0.1)$$

$$P(X=3) = \binom{15}{3}(0.1)^3\,(0.9)^{12}$$

امتحانات: وجد معلم الرياضيات أن 3 طلبة تقريباً من بين كل 5 طلبة يحتاجون إلى استعمال أوراق إضافية في أثناء الامتحان. إذا تقدم للامتحان 30 طالباً فأجد كلاً مما يأتي:

㉔ احتمال أن يحتاج 10 طلبة إلى استعمال أواق إضافية.

الحل:

$$X \sim B(30, \frac{3}{5})$$

$$P(X=10) = \binom{30}{10}\left(\frac{3}{5}\right)^{10}\ \left(\frac{2}{5}\right)^{20}$$

㉕ احتمال ألا يحتاج أي من الطلبة إلى استعمال أوراق إضافية

الحل:

$$\begin{aligned}P(X=0) &= \binom{30}{0}\left(\frac{3}{5}\right)^{0}\ \left(\frac{2}{5}\right)^{30}\\ &= \left(\frac{2}{5}\right)^{30}\end{aligned}$$

الدرس الثاني

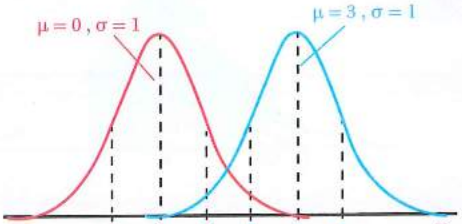
التوزيع الطبيعي

خصائص المنحنى الطبيعي

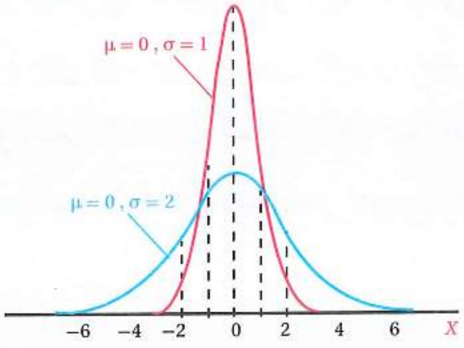
يمتاز المنحنى الطبيعي بالخصائص الآتية:

- منحنى متصل له شكل الجرس.
- تطابق الوسط الحسابي والوسيط والمنوال وتوسط كل منها البيانات.
- تماثل البيانات حول الوسط الحسابي.
- اقتراب المنحنى عند طرفيه من المحور x من دون أن يمسه.
- المساحة الكلية أسفل المنحنى هي 1

يعتمد شكل المنحنى الطبيعي وموقعه على الوسط الحسابي μ والانحراف المعياري σ فمثلاً في الشكل (a) التالي، يمكن ملاحظة أن التغير في الوسط الحسابي يؤدي إلى انسحاب أفقي للمنحنى الطبيعي. أما في الشكل (b) فيلاحظ أن زيادة الانحراف المعياري تجعل المنحنى الطبيعي أكثر انتشاراً وتوسعاً.



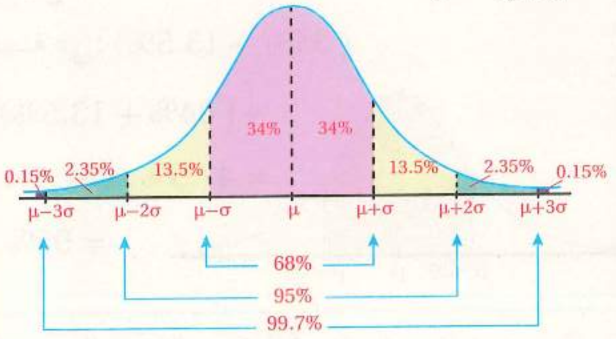
(a)



(b)

القاعدة التجريبية

إذا اتخذت مجموعة من البيانات شكل المنحنى الطبيعي، وكان وسطها الحسابي μ وانحرافها المعياري σ فإن:



- 68% من المشاهدات تقريباً تقع بين $\mu-\sigma$ و $\mu+\sigma$ أي أن 68% من البيانات لا يزيد البعد بينها وبين الوسط الحسابي على قيمة الانحراف المعياري.
- 95% من المشاهدات تقريباً تقع بين $\mu-2\sigma$ و $\mu+2\sigma$ أي أن 95% من البيانات لا يزيد البعد بينها وبين الوسط الحسابي على مثلي قيمة الانحراف المعياري.
- 99.7% من المشاهدات تقريباً تقع بين $\mu-3\sigma$ و $\mu+3\sigma$ أي أن 99.7% من البيانات لا يزيد البعد بينها وبين الوسط الحسابي على ثلاثة أمثال قيمة الانحراف المعياري.

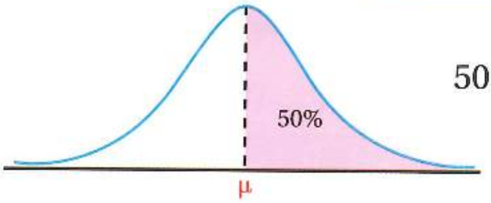
مثال

إذا اتخذت أوزان مجموعة من الأشخاص شكل المنحنى الطبيعي:

1) جد النسبة المئوية للأوزان الذين تقع فوق الوسط الحسابي.

الحل

النسبة هي: 50%



2) جد النسبة المئوية للأوزان التي لا يزيد البعد بينها وبين الوسط الحسابي عن انحرافين معيارين.

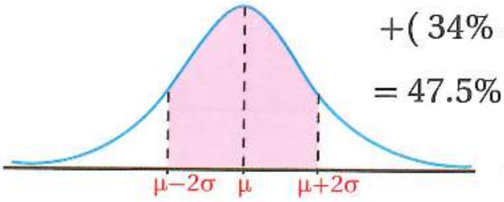
الحل

النسبة هي: $(34\% + 13.5\%)$

$+(34\% + 13.5\%)$

$= 47.5\% + 47.5\%$

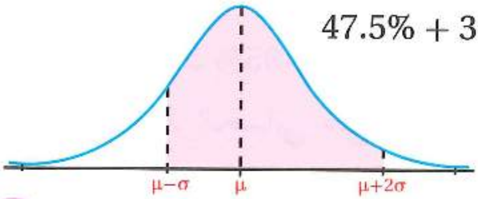
$= 95\%$



3) جد النسبة المئوية للأوزان التي تزيد عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد عن انحرافين معيارين أو تقل عنه بمقدار لا يزيد عن انحراف معياري واحد البعد بينها وبين الوسط الحسابي عن انحرافين معيارين.

الحل

$47.5\% + 34\% = 81.5\%$



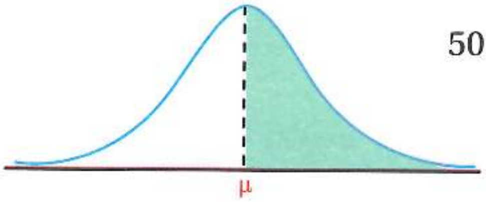
أتحقّق من فهمي

صفحة (182) : إذا اتخذ التمثيل البياني لأطوال مجموعة من طلبة الصف السابع شكل المنحنى الطبيعي، فأجد كلاً مما يأتي:

a) النسبة المئوية للطلبة الذين تقع أطوالهم فوق الوسط الحسابي.

الحل:

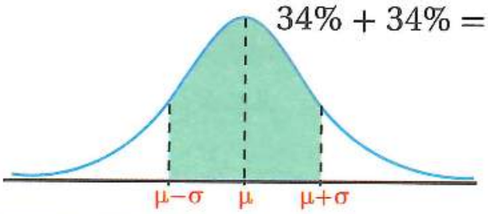
النسبة هي: 50%



b) النسبة المئوية للطلبة الذين لا تزيد البعد بين أطوالهم والوسط الحسابي على انحراف معياري واحد.

الحل:

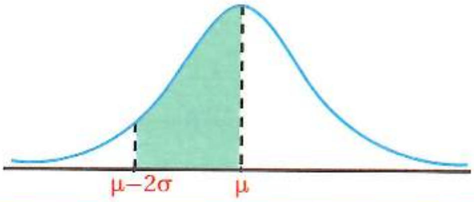
النسبة $34\% + 34\% = 68\%$



c) النسبة المئوية للطلبة الذين تقل أطوالهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين.

الحل:

النسبة $34\% + 13.5\% = 47.5\%$

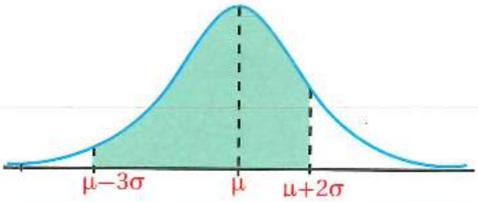


d) النسبة المئوية للطلبة الذين تقل أطوالهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على ثلاثة انحرافات معيارية، أو تزيد عليه بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين.

الحل:

$(2.35\% + 13.5\% + 34\%) + (34\% + 13.5\%)$

$= 97.35\%$



المتغير العشوائي المنفصل هو متغير عشوائي يأخذ قيماً معدودة مثل عدد مرات ظهور الصورة عند رمي قطعة النقد والمتغير العشوائي المتصل يأخذ قيماً متصلة ضمن فترة معينة من الأعداد الحقيقية مثل التوزيع الطبيعي.

إذا اتخذ تمثيل البيانات للمتغير العشوائي شكل المنحنى الطبيعي فإنه يسمى متغيراً عشوائياً طبيعياً ويسمى توزيعه الاحتمالي (التوزيع الطبيعي) ويعبر عنه بالرمز :

$$X\sim N(\mu, \sigma^2)$$

حيث: μ الوسط الحسابي ، σ الانحراف المعياري

مثـــال

إذا كان X متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي حيث:

$X \sim N(60, 5^2)$ فجد :

1) $P(X > 60)$ **2)** $P(50 < X < 65)$

الحـــل

$\sigma = \sqrt{25} = 5 \quad , \quad \mu = 60$

1) $P(X > 60) \quad = P(X > \mu) = 0.5$

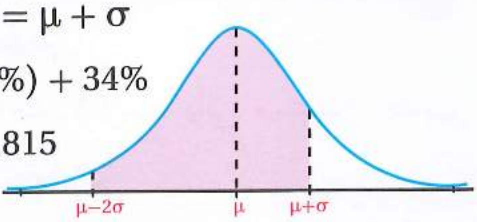
2) $P(50 < X < 65)$

$50 = 60 - 10 = \mu - 2\sigma$

$65 = 60 + 5 = \mu + \sigma$

$(13.5\,\% + 34\%) + 34\%$

$= 81.5\% = 0.815$



أتحقّق من فهمي

صفحة (184): إذا دل المتغير العشوائي X على طول قطر رأس مثقب (بالمليمتر) تنتجه آلة في مصنع حيث: $X \sim N(30, 0.4^2)$ فأجد كلاً مما يأتي :

الحل:

$\mu = 30 \qquad \sigma^2 = 0.4^2 \to \sigma = 0.4$

a) $P(X > 30) = P(X > \mu) = 0.5$

b) $P(29.6 < X < 30.4)$

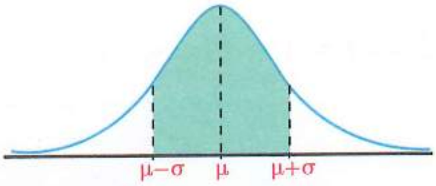
الحل:

$30 - 29.6 = 0.4 = \sigma$

$30.4 - 30 = 0.4 = \sigma$

$\Rightarrow P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$

$= 34\% + 34\% = 68\% = 0.68$



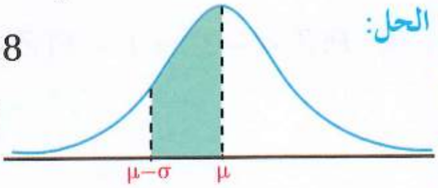
c) $P(29.2 < X < 30)$

الحل:

$30 - 29.2 = 0.8$

$29.2 = \mu - 2\sigma$

$30 = \mu$



$\Rightarrow P(\mu - 2\sigma < X < \mu)$

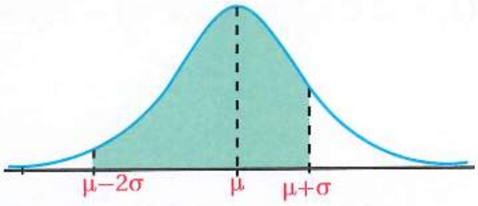
$= 34\% + 13.5\% = 47.5\% = 0.475$

d) $P(29.2 < X < 30.4)$

الحل:

$\Rightarrow P(\mu - 2\sigma < X < \mu + \sigma)$

$= 13.5\% + 34\% + 34\% = 81.5\% = 0.815$



التوزيـــع الطبيعي المعيـــاري

يطلق على التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي 0 وانحرافه المعياري 1 اسم التوزيع الطبيعي المعياري ويعبر عنه: $Z\sim N(0, 1)$

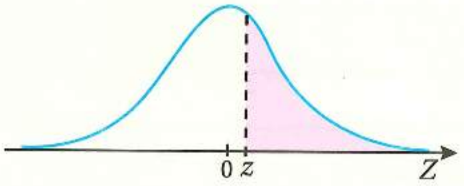
والجدول مصمم على قيم الموجبة $P(Z < z)$

أما بقية الحالات فهي كما يلي:

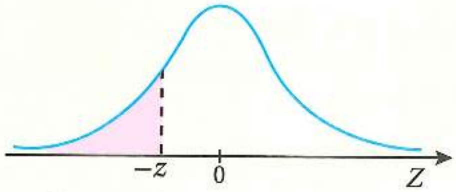
إيجاد احتمال المتغير العشوائي الطبيعي المعياري

إذا كان $Z \sim N(0, 1)$ فإن:

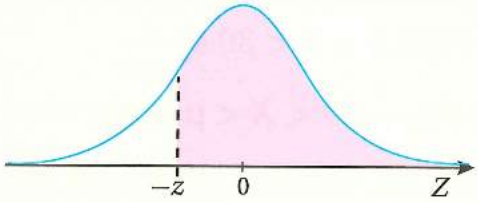
(1) $P(Z > z) = 1 - P(Z < z)$



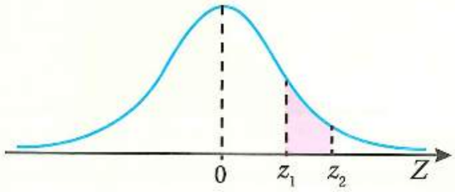
(2) $P(Z < -z) = 1 - P(Z < z)$



(3) $P(Z > -z) = P(Z < z)$



(4) $P(z_1 < Z < z_2) = P(Z < z_2) - P(Z < z_1)$



(تحت موجب = فوق سالب) تخرج مباشرة من الجدول

(فوق موجب = تحت سالب) = 1 − (القيمة)

بين اثنين (تحت الأكبر − تحت الأصغر)

مثـــال

إذا كان $Z \sim N(0, 1)$ فجد ما يلي:

1) $P(Z < 1.94) = 0.9738$ من الجدول مباشرة

2) $P(Z > -1.65) = 0.9505$ من الجدول مباشرة

3) $P(Z > 0.7) = 1 - P(Z < 0.7)$
$= 1 - 0.7580 = 0.2420$

4) $P(Z < -0.7) = P(Z > 0.7)$
$= 1 - P(Z < 0.7)$
$= 1 - 0.7580 = 0.2420$

5) $P(0.2 < Z < 2.4)$
$= P(Z < 2.4) - P(Z < 0.2)$
$= 0.9918 - 0.5793 = 0.4125$

6) $P(-2.3 < Z < 1.9)$
$= P(Z < 1.9) - P(Z < -2.3)$
$= P(Z < 1.9) - (1 - P(Z < 2.3))$
$= 0.9713 - (1 - 0.9893)$
$= 0.9713 - 0.0107 = 0.9606$

أتحقَّق من فهمي

صفحة (187) : أجد كلاً مما يأتي مستعملاً جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

a) $P(Z < 1.5) = 0.9332$

b) $P(Z > 0.61) = 1 - P(Z < 0.61)$
$= 1 - 0.7291 = 0.2709$

c) $P(Z < -0.43) = 1 - P(Z < 0.43)$
$= 1 - 0.6664 = 0.3336$

d) $P(Z > -3.23) = P(Z < 3.23) = 0.9994$

e) $P(-1.4 < Z < 2.07)$
$= P(Z < 2.07) - P(Z < -1.4)$
$= P(Z < 2.07) - (1 - P(Z < 1.4))$
$= 0.9808 - (1 - 0.9192)$
$= 0.9808 - 0.0808 = 0.9000$

يمكن تحويل المتغير العشوائي $X\sim N(\mu, \sigma^2)$ إلى $Z\sim N(0, 1)$ وعندئذ نستخدم الجدول لإيجاد القيمة

تـــذكر أن: $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$

مثـــال

$X \sim N(40, 6^2)$ فجد ما يلي:

1) $P(X< 49)$

2) $P(28 < X < 46)$

3) $P(X > 34)$

الحـــل

$\mu = 40 \quad , \quad \sigma = 6$

1) $P(X < 49) = P\left(Z < \dfrac{49-40}{6}\right)$

$= P(Z < \frac{9}{6}) = P(Z < 1.5) = 0.9332$

---

2) $P(28 < X < 46)$

$= P\left(\dfrac{28-40}{6} < Z < \dfrac{46-40}{6}\right)$

$= P(-2 < Z < 1) = P(Z < 1) - P(Z < -2)$

$= P(Z < 1) - (1 - P(Z < 2))$

$= 0.8413 - (1 - 0.9772)$

$= 0.8413 - 0.0228 = 0.8185$

---

3) $P(X > 34) = P\left(Z > \dfrac{34-40}{6}\right)$

$= P(Z > -1) = 0.8413$

أتحقّق من فهمي

صفحة (189) : إذا كان $X \sim N(7, 3^2)$ فأجد احتمال ما يأتي، مستعملاً جدول التوزيع الطبيعي المعياري

الحل:

$\mu = 7 \quad , \quad \sigma = 3$

a) $P(X < -2) = P\left(Z < \dfrac{-2-7}{3}\right)$

$= P(Z < -3) = 1 - P(Z < 3)$

$= 1 - 0.9987 = 0.0013$

---

b) $P(X > 10) = P\left(Z > \dfrac{10-7}{3}\right)$

$= P(Z > 1) = 1 - P(Z < 1)$

$= 1 - 0.8413 = 0.1587$

---

c) $P(4 < X \leq 13)$

$= P\left(\dfrac{4-7}{3} < Z < \dfrac{13-7}{3}\right)$

$= P(-1 < Z < 2) = P(Z < 2) - P(Z < -1)$

$= P(Z < 2) - (1 - P(Z < 1))$

$= 0.9772 - (1 - 0.8413)$

$= 0.9772 - 0.1587 = 0.8185$

مثـــال

إذا كانت علامات طلاب تتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي قدره 70 وانحراف معياري قدره 8 اختير طالب عشوائياً

1) ما احتمال أن تكون علامته أقل من 82

2) ما احتمال أن تكون علامته تزيد عن 74

3) ما احتمال أن تقع علامته بين 66 و 78

الحـــل

$\mu = 70 \quad , \sigma = 8$

1) $P(X < 82) = P\left(Z < \dfrac{82-70}{8}\right)$

$= P(Z < 1.5) = 0.9332$

2) $P(X > 74) = P\left(Z > \dfrac{74-70}{8}\right)$

$= P(Z > 0.5) = 1 - P(Z < 0.5)$

$= 1 - 0.6915 = 0.3085$

3) $P(66 < X < 78)$

$= P\left(\dfrac{66-70}{8} < Z < \dfrac{78-70}{8}\right)$

$= P(-0.5 < Z < 1) = P(Z < 1) - P(Z < -0.5)$

$= P(Z < 1) - (1 - P(Z < 0.5))$

$= 0.8413 - (1 - 0.6915)$

$= 0.8413 - 0.3085 = 0.5328$

أتحقَّق من فهمي

صفحة (190) : توصلت دراسة إلى أن أطوال النساء في إحدى المدن تتبع توزيعاً طبيعياً وسطه الحسابي 165cm وانحرافه المعياري 3cm إذا اختيرت امرأة عشوائياً، فأجد كلاً مما يأتي:

a) احتمال أن يكون طول المرأة أقل من 162cm

الحل:

$\mu = 165 \qquad , \sigma = 3$

$P(X < 162) = P\left(Z < \dfrac{162-165}{3}\right)$

$= P(Z < -1) = (1 - P(Z < 1)$

$= 1 - 0.8413 = 0.1587$

b) احتمال أن يكون طول المرأة أكثر من 171cm

الحل:

$P(X > 171) = P\left(Z > \dfrac{171-165}{3}\right)$

$= P(Z > 2) = (1 - P(Z < 2)$

$= 1 - 0.9772 = 0.0228$

c) احتمال أن يكون طول المرأة بين 162cm و171cm

الحل:

$P(162 < X < 171)$

$= P\left(\dfrac{162-165}{3} < Z < \dfrac{171-165}{3}\right)$

$= P(-1 < Z < 2) = P(Z < 2) - P(Z < -1)$

$= P(Z < 2) - (1 - P(Z < 1))$

$= 0.9772 - (1 - 0.8413)$

$= 0.9772 - 0.1587 = 0.8185$

إيجاد قيمة المتغير العشوائي إذا علم الاحتمال

يجب تحديد موقع في الجزء الموجب أو السالب فإذا كان الاحتمال (المساحة) على يسار أو تحت أو تقل عن هي أكبر من 0.5 فهي في الجزء الموجب.

وإذا كان الاحتمال (المساحة) على يمين أو تزيد عن هي أصغر من 0.5 فهي في الجزء الموجب.

وإذا كان الاحتمال (المساحة) على يسار أو تحت أصغر من 0.5 فهي في الجزء السالب.

وإذا كان الاحتمال (المساحة) على يمين أو فوق أكبر من 0.5 فهي في الجزء السالب.

إذا لم تكن Z موجودة في الجدول مباشرة نأخذ القيمة التي أقل مباشرة.

مثـــال

$X \sim N(30, 4^2)$ فجد قيمة x التي تحقق الاحتمال المعطى:

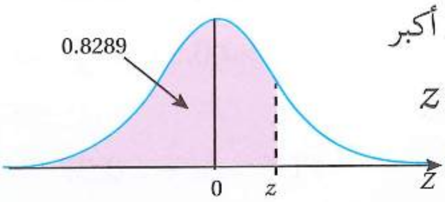
1) $P(X < x) = 0.8289$

2) $P(X > x) = 0.9938$

3) $P(X > x) = 0.1234$

الحل

1) $P(X < x) = 0.8289$



النسبة على يسار x أكبر من 0.5 لذلك فإن z تقع في الجزء الموجب ومن الجدول تكون قيمة $0.95 = z$

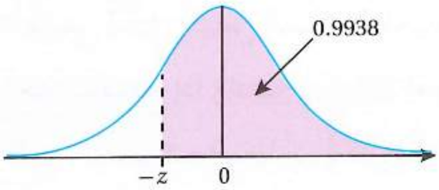
ثم نحولها إلى قيمة x حسب القاعدة

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$0.95 = \frac{x - 30}{4} \rightarrow 3.8 = x - 30$$

$$\rightarrow x = 30 + 3.8 = 33.8$$

2) $P(X > x) = 0.9938$



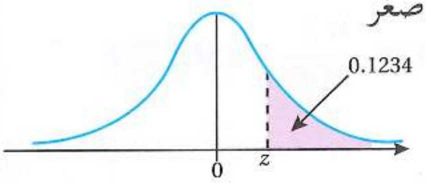
بما أن النسبة على يمين x أكبر من 0.5 فهي في الجزء السالب ومن الجدول

$z = -2.5$

$$-2.5 = \frac{x - 30}{4} \rightarrow -10 = x - 30$$

$$\rightarrow x = 30 - 10 = 20$$

3) $P(X > x) = 0.1234$



النسبة على يمين x أصغر من 0.5 فهي في الجزء الموجب.

النسبة على يسار z هي $1 - 0.1234 = 0.8766$

فتكون $z = 1.15$

(أقرب قيمة أصغر منها)

$$1.15 = \frac{x - 30}{4} \rightarrow 4.6 = x - 30$$

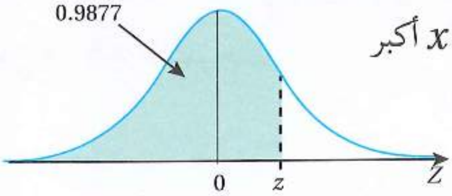
$$\rightarrow x = 30 + 4.6 = 34.6$$

أتحقق من فهمي

صفحة (194) : إذا كان X متغيراً عشوائياً وسطه الحسابي 3– وانحرافه المعياري 4 فأجد قيمة x التي تحقق الاحتمال المعطى في كل مما يأتي:

a) $= P(X < x) = 0.9877$

الحل:



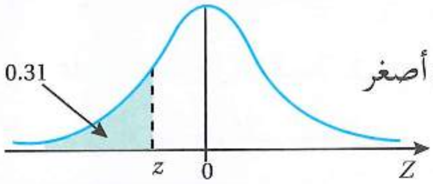
النسبة على يسار x أكبر من 0.5 لذلك هي في الجزء الموجب ومن الجدول $2.24 = z$

$$2.24 = \frac{x - (-3)}{4} \rightarrow 8.96 = x + 3$$

$$\rightarrow x = 8.96 - 3 = 5.96$$

b) $= P(X < x) = 0.31$

الحل:



النسبة على يسار x أصغر من 0.5 لذلك هي في الجزء السالب

$1 - 0.31 = 0.69$

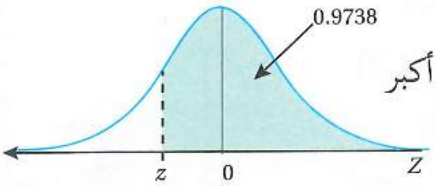
$z = 0.49$

$$-0.49 = \frac{x - (-3)}{4} \rightarrow -1.96 = x + 3$$

$$\rightarrow x = -1.96 - 3 = -4.96$$

c) $= P(X > x) = 0.9738$

الحل:



النسبة على يمين x أكبر من 0.5 لذلك هي في الجزء السالب

$z = -1.94$

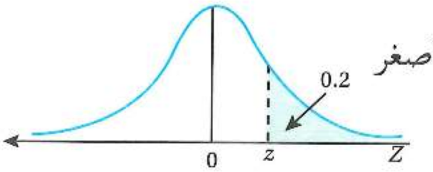
$$-1.94 = \frac{x-(-3)}{4} \rightarrow -7.76 = x+3$$

$$\rightarrow x = -7.76 - 3 = -10.76$$

d) $= P(X > x) = 0.2$

الحل:

النسبة على يمين x أصغر من 0.5 لذلك هي في الجزء الموجب



$1 - 0.2 = 0.8$

$z = 0.83$

$$0.83 = \frac{x-(-3)}{4} \rightarrow 3.32 = x+3$$

$$\rightarrow x = 3.32 - 3 = 0.32$$

ايجـــاد الوسـط الحسابي أو الانحـــراف المعيـــاري إذا علم الاحتمال.

إذا علم الاحتمال وقيمة x فيمكن معرفة الوسط الحسابي أو الانحراف المعياري.

مثـــال

$X \sim N(\mu, 64)$ متغير عشوائي طبيعي لمجموعة من الأشخاص إذا زادت كتل 4% منهم على 75kg فجد الوسط الحسابي

الحـــل

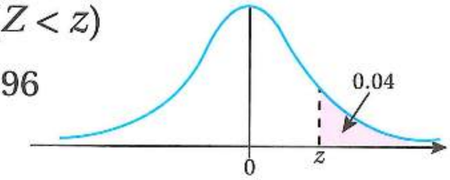
$\sigma = 8$

$P(X > 75) = 0.04$

$0.04 = 1 - P(Z < z)$

$P(Z < z) = 0.96$

$z = 1.75$



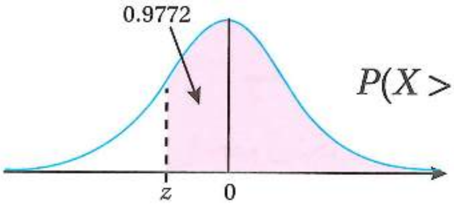
$$1.75 = \frac{75-\mu}{8} \rightarrow 14 = 75 - \mu$$

$$\rightarrow \mu = 75 - 14 = 61$$

مثـــال

إذا كانت $X \sim N(60, \sigma^2)$ وكانت نسبة من يزيد عن 50 هي 0.9772 فجد σ

الحـــل



$P(X > 50) = 0.9772$

$z = -2$

$$-2 = \frac{50-60}{\sigma} \rightarrow -2\sigma = 50 - 60$$

$$\rightarrow -2\sigma = -10 \rightarrow \sigma = 5$$

أتحقَّق من فهمي

صفحة (196) : يمثل $X \sim N(4.5, \sigma^2)$ المتغير العشوائي الطبيعي لكتل أكياس السكر (بالكيلوغرام) التي ينتجها أحد المصانع إذا زادت كتلة 3% فقط منها على 4.8kg فأجد الانحراف المعياري لكتل أكياس السكر.

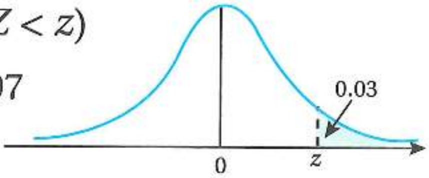
الحل:

$P(X > 4.8) = 0.03$

$0.03 = 1 - P(Z < z)$

$P(Z < z) = 0.97$

$z = 1.88$



$$1.88 = \frac{4.8-4.5}{\sigma}$$

$$1.88 = \frac{0.3}{\sigma} \rightarrow \sigma = \frac{0.3}{1.88} = 0.1596$$

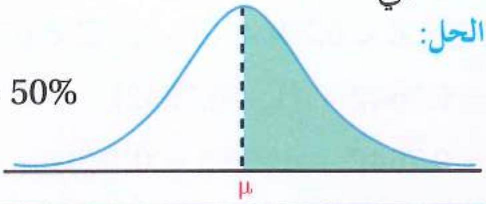
أتدرّب وأحلّ المسائل

إذا اتخذ التمثيل البياني لكتل الطلبة في إحدى المحافظات منحنىً طبيعياً، فأجد كلاً مما يأتي:

① النسبة المئوية للطلبة الذين تزيد كتلهم على الوسط الحسابي.

الحل:

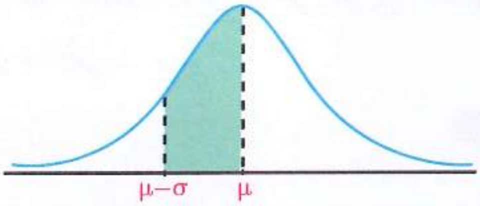
$P(X > \mu) = 50\%$



② النسبة المئوية للطلبة الذين تقل كتلهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحراف معياري واحد.

الحل:

$P(\mu - \sigma < X < \mu) = 34\%$

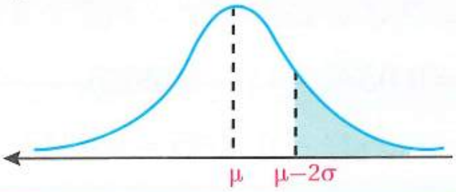


③ النسبة المئوية للطلبة الذين تزيد كتلهم على الوسط الحسابي بمقدار لا يقل عن انحرافين معياريين.

الحل:

$P(X > \mu - 2\sigma) = 2.35\% + 0.15\%$

$= 2.5\%$



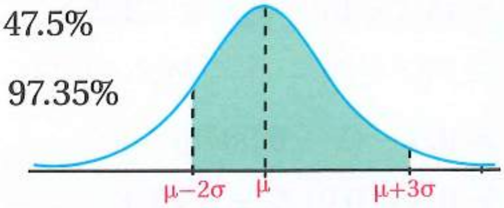
④ النسبة المئوية للطلبة الذين تقل كتلهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين، أو تزيد عليه بمقدار لا يزيد على ثلاثة انحرافات معيارية.

الحل:

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 3\sigma)$

$= 47.5\% + 47.5\%$

$+ 2.35\% = 97.35\%$



إذا كان $X \sim N(50, 4^2)$ فأجد كلاً من الاحتمالات الآتية باستعمال القاعدة التجريبية:

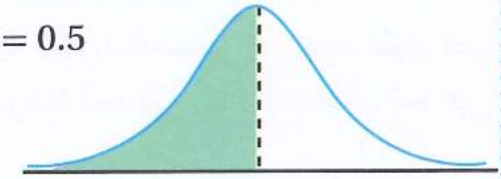
⑤ $P(X < 50)$

الحل:

$\mu = 50 \qquad , \sigma = 4$

$P(X < 50) = P\left(Z < \frac{50 - 50}{4}\right)$

$= P(Z < 0) = 0.5$



⑥ $P(46 < X < 54)$

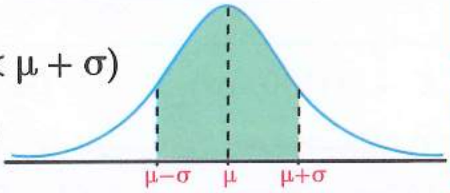
الحل:

$46 = 50 - \mu$

$54 = 50 + \mu$

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$

$= 68\% = 0.68$



⑦ $P(42 < X < 62)$

الحل:

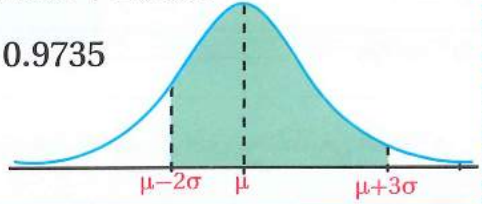
$42 = \mu - 2\sigma$

$62 = \mu + 3\sigma$

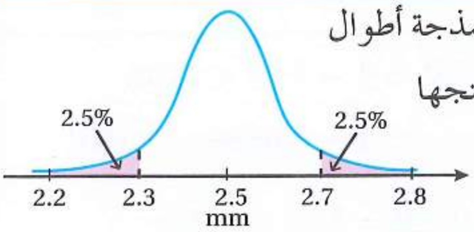
$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 3\sigma)$

$= 47.5\% + 47.5\% + 2.35\%$

$= 97.35\% = 0.9735$



صناعة: يمكن نمذجة أطوال أقطار مسامير ينتجها مصنع بمنحنى التوزيع الطبيعي المبين في الشكل المجاور:



⑧ أجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لأطوال أقطار المسامير.

الحل:

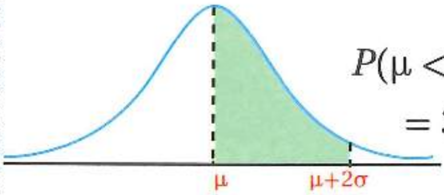
$\mu = 2.5$

$\mu + 2\sigma = 2.7$

$2.5 + 2\sigma = 2.7 \rightarrow 2\sigma \rightarrow = 0.2 \rightarrow \sigma = 0.1$

⑨ أجد النسبة المئوية للمسامير التي يزيد طول قطر كل منها على الوسط الحسابي بما لا يزيد على انحرافين معياريين.

الحل:



$P(\mu < X < \mu + 2\sigma)$

$= 34.5\% + 13.5\%$

$= 47.5\%$

⑩ أفاع: يدل المتغير العشوائي $X \sim N(100, \sigma^2)$ على أطوال الأفاعي (بالسنتيمتر) في أحد مجتمعاتها إذا كانت أطوال 68% منها تتراوح بين 93cm و 107cm فأجد σ^2

الحل:

$93 = \mu - \sigma$

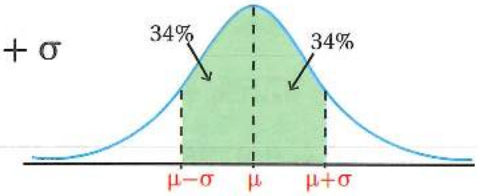
$107 = \mu + \sigma$

$\sigma = 7$

or : $107 = \mu + \sigma$

$\sigma = 7$

$\sigma^2 = 49$



أجد كلاً مما يأتي، مستعملاً جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

⑪ $P(Z < 0.43) = 0.6664$

⑫ $P(Z > 1.08) = 1 - P(Z < 1.08)$

$= 1 - 0.8599 = 0.1401$

⑬ $P(Z < -2.03) = P(Z > 2.03)$

$= 1 - P(Z < 2.03)$

$= 1 - 0.9788 = 0.0212$

⑭ $P(Z > 2.2) = 1 - P(Z < 2.2)$

$= 1 - 0.9861 = 0.0139$

⑮ $P(-0.72 < Z < 0.72)$

$= P(Z < 0.72) - P(Z < -0.72)$

$= P(Z < 0.72) - (1 - P(Z < 0.72))$

$= 0.7642 - (1 - 0.7642)$

$= 0.7642 - 0.2358 = 0.5284$

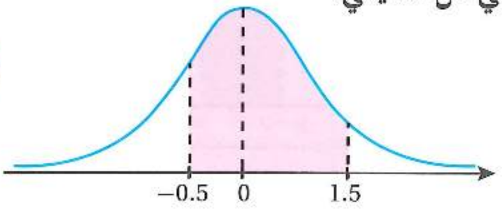
⑯ $P(1.5 < Z < 2.5)$

$= P(Z < 2.5) - P(Z < 1.5)$

$= 0.9938 - 0.9332 = 0.0606$

أجد مساحة المنطقة المظللة أسفل منحنى التوزيع الطبيعي المعياري في كل مما يأتي:

⑰



الحل:

$P(-0.5 < Z < 1.5)$

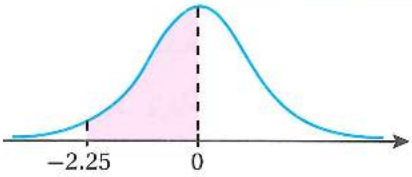
$= P(Z < 1.5) - P(Z < -0.5)$

$= P(Z < 1.5) - (1 - P(Z < 0.5))$

$= 0.9332 - (1 - 0.6915)$

$= 0.9332 - 0.3085 = 0.6247$

⑱



الحل:

$P(-2.25 < Z < 0)$

$= P(Z < 0) - P(Z < -2.25)$

$= P(Z < 0) - (1 - P(Z < 2.25))$

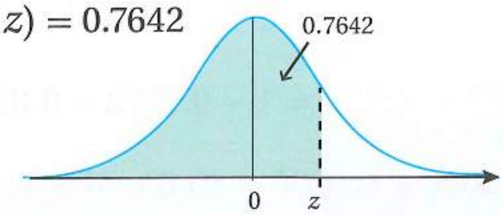
$= 0.5 - (1 - 0.9878)$

$= 0.5 - 0.0122 = 0.4878$

أجد القيمة المعيارية z التي تحقق الاحتمال المعطى في كل مما يأتي:

⑲ $P(Z < z) = 0.7642$

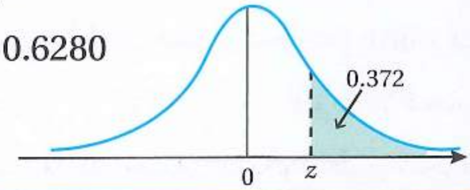
$z = 0.72$



⑳ $P(Z > z) = 0.372$

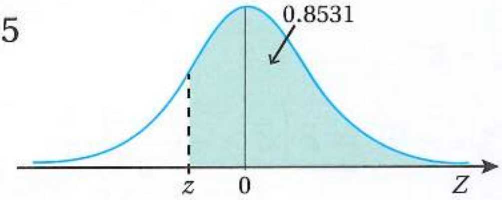
$1 - 0.372 = 0.6280$

$z = 0.32$



㉑ $P(Z > z) = 0.8531$

$z = -1.05$



إذا كان $X \sim N(-3, 25)$ فأجد كل احتمال مما يأتي مستعملاً جدول التوزيع الطبيعي:

㉒ $P(X < 2)$

الحل:

$\mu = -3 \quad , \quad \sigma^2 = 25 \quad , \quad \sigma = 5$

$$P(X < 2) = P\left(Z < \frac{2-(-3)}{5}\right)$$

$$= P(Z < 1) = 0.8413$$

㉓ $P(X > 4.5)$

الحل:

$$P(X > 4.5) = P\left(Z > \frac{4.5-(-3)}{5}\right)$$

$$= P(Z > 1.5) = 1 - P(Z < 1.5)$$

$$= 1 - 0.9332 = 0.0668$$

㉔ $P(-5 < X < -3)$

الحل:

$$= P\left(\frac{-5-(-3)}{5} < Z < \frac{-3-(-3)}{5}\right)$$

$$= P(-0.4 < Z < 0)$$

$$= P(Z < 0) - P(Z < -0.4)$$

$$= P(Z < 0) - (1 - P(Z < 0.4)$$

$$= 0.5000 - (1 - 0.6554)$$

$$= 0.5000 - 0.3446 = 0.1554$$

إذا كان X متغيراً عشوائياً وسطه الحسابي 30 وانحرافه المعياري 10 فأجد قيمة x التي تحقق الاحتمال المعطى في كل مما يأتي:

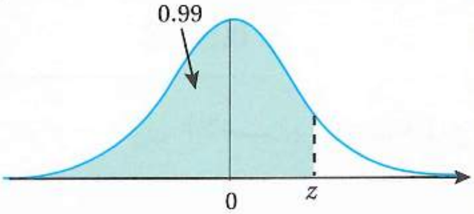
㉕ $P(X < x) = 0.99$

الحل:

$z = 2.32$

$$2.32 = \frac{x-30}{10} \longrightarrow 23.2 = x - 30$$

$$\longrightarrow x = 53.2$$



㉖ $P(X > x) = 0.1949$

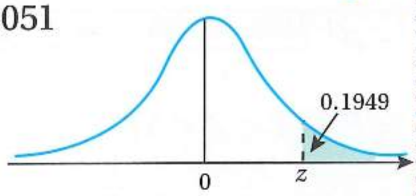
الحل:

$1 - 0.1949 = 0.8051$

$z = 0.86$

$$0.86 = \frac{x-30}{10}$$

$$\longrightarrow 8.6 = x - 30 \longrightarrow x = 38.6$$



㉗ $P(X < x) = 0.35$

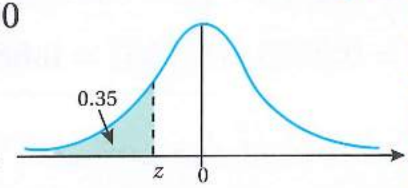
الحل:

$1 - 0.35 = 0.6500$

$z = -0.38$

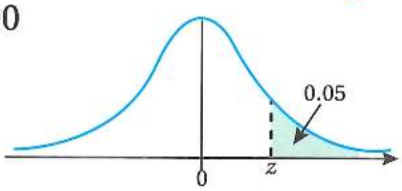
$$-0.38 = \frac{x-30}{10}$$

$$\longrightarrow -3.8 = x - 30 \longrightarrow x = 26.2$$



㉘ $P(X > x) = 0.05$

الحل:



$1 - 0.05 = 0.9500$

$z = 1.64$

$1.64 = \dfrac{x - 30}{10}$

$\rightarrow 16.4 = x - 30 \rightarrow x = 46.4$

رياضة: تتبع أطوال لاعبي كرة السلة توزيعاً طبيعياً وسطه الحسابي 185cm وانحرافه المعياري 5m إذا اختير لاعب عشوائياً، فأجد كلاً مما يأتي:

㉙ احتمال أن يزيد طول اللاعب على 175cm

الحل:

$\mu = 185 \quad , \quad \sigma = 5$

$$P(X > 175) = P\left(Z > \frac{175 - 185}{5}\right)$$

$$= P(Z > -2) = P(Z < 2)$$

$$= 0.9772$$

㉚ احتمال أن يتراوح طول اللاعب بين 180cm و 190cm

الحل:

$$P(180 < X < 190)$$

$$= P\left(\frac{180 - 185}{5} < Z < \frac{190 - 185}{5}\right)$$

$$= P(-1 < Z < 1)$$

$$= P(Z < 1) - P(Z < -1)$$

$$= P(Z < 1) - (1 - P(Z < 1))$$

$$= 0.8413 - (1 - 0.8413)$$

$$= 0.8413 - 0.1587 = 0.6826$$

㉛ العدد التقريبي للاعبين الذين تزيد أطوالهم على 195cm من بين 2000 لاعب

الحل:

$$P(X > 195) = P\left(Z < \frac{195 - 185}{5}\right)$$

$$= P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2)$$

$$= 1 - 0.9772 = 0.0228$$

العدد $2000 \times 0.0228 = 45.6 \approx 46$

㉜ في دراسة عن أشجار الكينا في إحدى الغابات، تبين أن الوسط الحسابي لأطوال هذه الأشجار هو 6m وأن الانحراف المعياري هو 2m إذا كانت أطوال الأشجار تتبع توزيعاً طبيعياً، فأجد احتمال أن يكون طول شجرة اختيرت عشوائياً أكثر من 9 أمتار

الحل:

$\mu = 6 \quad , \quad \sigma = 2$

$$P(X > 9) = P\left(Z > \frac{9 - 6}{2}\right)$$

$$= P(Z > 1.5) = 1 - P(Z < 1.5)$$

$$= 1 - 0.9332 = 0.0668$$

تعبئة: يعبئ مصنع حبوب القهوة في أوعية من الكرتون إذا كانت كتل الأوعية تتبع توزيعاً طبيعياً وسطه الحسابي 232g وانحرافه المعياري 5g وكان المتغير العشوائي X يدل على كتلة الوعاء المختار عشوائياً فأجد كلاً مما يأتي:

㉝ $P(X < 224)$

الحل:

$\mu = 232 \quad , \quad \sigma = 5$

$$P(X < 224) = P\left(Z < \frac{224 - 232}{5}\right)$$

$$= P(Z < -1.6) = 1 - P(Z < 1.6)$$

$$= 1 - 0.9452 = 0.0548$$

34 قيمة x حيث $P(232 < X < x) = 0.2$

الحل:

$$= P\left(\frac{232-232}{5} < Z < \frac{x-232}{5}\right)$$

$$= P\left(0 < Z < \frac{x-232}{5}\right) = 0.2$$

$$= P(Z < z) = 0.2 + 0.5 = 0.7$$

$$\rightarrow z = 0.52$$

$$0.52 = \frac{x-232}{5} \rightarrow 2.60 = x - 232$$

$$\rightarrow x = 232 + 2.6 = 234.6$$

35 **صناعة:** يمثل $X \sim N(\mu, 169)$ المتغير العشوائي الطبيعي لطول قطر كل من إطارات دراجات هوائية (بالمليمتر) ينتجها أحد المصانع. إذا زاد طول قطر 11% منها على 47cm فأجد الوسط الحسابي لأطوال أقطار الإطارات التي ينتجها المصنع.

الحل:

$$\sigma^2 = 169 \rightarrow \sigma = 13$$

$$P(X > 47) = 0.11$$

$$= P(Z > z) = 0.11$$

$$= P(Z < z) = 1 - 0.11 = 0.89$$

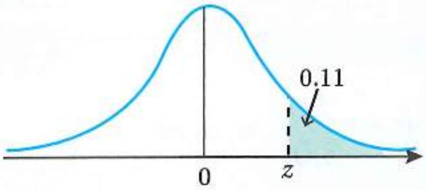
$$\rightarrow z = 1.22$$

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$1.22 = \frac{47-\mu}{13}$$

$$\rightarrow 15.86 = 47 - \mu$$

$$\rightarrow \mu = 31.14$$



36 **اختبارات:** تتبع العلامات في أحد الاختبارات توزيعاً طبيعياً، وسطه الحسابي 43 إذا كان X هو المتغير العشوائي للعلامات فأجد قيمة الانحراف المعياري علماً بأن احتمال ظهور علامة أعلى من 48 هو 0.2

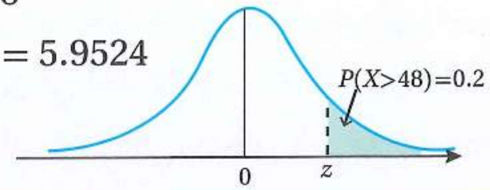
الحل:

$$= P(Z > z) = 0.2 \rightarrow P(Z < z) = 1 - 0.2 = 0.8$$

$$z = 0.84$$

$$0.84 = \frac{48-43}{\sigma} \rightarrow 0.84\,\sigma = 5$$

$$\sigma = \frac{5}{0.84} = 5.9524$$



37 إذا كان $X \sim N(\mu, \mu^2)$ وكانت قيمة z المعيارية المقابلة لقيمة $x = 1$ هي $z = 2$ فأجد قيمة μ

الحل:

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$2 = \frac{1-\mu}{\mu} \rightarrow 2\mu = 1 - \mu$$

$$\rightarrow 3\mu = 1 \rightarrow \mu = \frac{1}{3}$$

38 إذا كان $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ وكانت قيمة z المعيارية المقابلة لقيمة $x = 10$ هي $z = 1$ وكانت قيمة z المقابلة لقيمة $x = 4$ هي -2 فأجد قيمة كل من μ و σ

الحل:

z	x
1	10
-2	4

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$1 = \frac{10-\mu}{\sigma} \rightarrow \sigma = 10 - \mu$$

$$-2 = \frac{4-\mu}{\sigma} \rightarrow -2\,\sigma = 4 - \mu$$

بالطرح $3\sigma = 6$

$$\sigma = 2$$

بالتعويض $2 = 10 - \mu$

$$\mu = 8$$

39 في دراسة لإدارة السير، تبين أن سرعة السيارات على أحد الطرق تتبع توزيعاً طبيعياً وسطه الحسابي 90km/h وانحرافه المعياري 5km/h إذا كانت السرعة القصوى المحدد على هذا الطريق هي 100km/h وكان العدد الكلي للسيارات التي تسير على هذا الطريق في أحد الأيام هو 1000 سيارة فأجد العدد التقريبي للسيارات التي ستتجاوز السرعة المحددة على الطريق في هذا اليوم.

الحل:

$\mu = 90 \quad , \quad \sigma = 5$

$P(X > 100) = P\left(Z > \frac{100 - 90}{5}\right)$

$= P\,(Z > 2) = 1 - P(Z < 2)$

$= 1 - 0.9772 = 0.0228$

العدد $1000 \times 0.0228 = 22.8 \approx 23$

40 يمكن نمذجة كتل البيض في إحدى المزارع بتوزيع طبيعي، وسطه الحسابي 60g وانحرافه المعياري 4g أجد عدد البيض صغير الحجم من بين 5000 بيضة في المزرعة علماً بأن كتلة البيضة الصغيرة لا تزيد على 55 غراماً

الحل:

$\mu = 60 \quad , \quad \sigma = 4$

$P(X < 55) = P\left(Z < \frac{55 - 60}{4}\right)$

$= P\,(Z < -1.25) = 1 - P(Z < 1.25)$

$= 1 - 0.8944 = 0.1056$

العدد $5000 \times 0.1056 = 528$

41 **أكتشف الخطأ:** قالت عبير إذا كان $X \sim N(6.4, 0.09)$ فإن 95% من البيانات تقع بين 6.22 و 6.58 اكتشف الخطأ في قول عبير ثم أصححه.

الحل:

$\mu = 6.4 \quad , \quad \sigma = \sqrt{0.09} = 0.3$

$P(6.22 < X < 6.58)$

$= (\mu - 0.6\sigma < X < \mu + 0.6\sigma) \neq 95\%$

42 **تبرير:** إذا كان $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$P(X > 35) = 0.025 \, , \, P(X < 15) = 0.1469$

فأجد قيمة كل من μ و σ

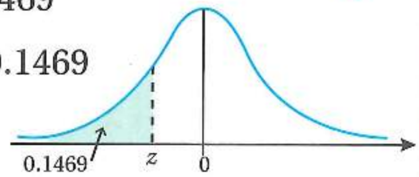
الحل:

$= P(Z < z) = 0.1469$

$P(Z > z) = 1 - 0.1469$

$= 0.8531$

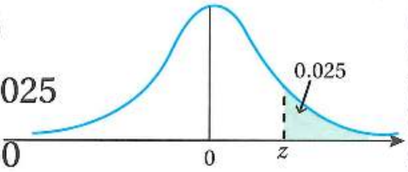
$z = -1.05$



$P(Z > z) = 0.025$

$P(Z < z) = 1 - 0.025$

$= 0.9750$



$z = 1.96$

x	z
15	−1.05
35	1.96

$-1.05 = \frac{15 - \mu}{\sigma} \rightarrow -1.05\sigma = 15 - \mu$

$1.96 = \frac{35 - \mu}{\sigma} \rightarrow 1.96\sigma = 35 - \mu$

بالطرح $3.01\sigma = 20$

$\sigma = \frac{20}{3.01} = 6.64$

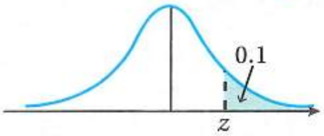
بالتعويض $6.64 \times 1.96 = 35 - \mu$

$\mu \approx 22$

43 **تبرير:** تقدم 100000 طالب لاختبار دولي وبلغ عدد الطلبة الذين زادت علاماتهم في الاختبار 90% نحو 10000 طالب منهم 5000 طالب أحرزوا علامات أكثر من 95% إذا كانت علامات الطلبة المتقدمين تتبع توزيعاً طبيعياً، فأجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري للعلامات.

الحل:

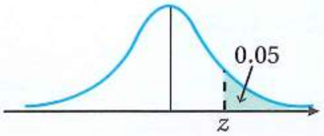
$$\frac{10000}{100000}=0.1$$



$$=P(Z>z)=0.1$$

$$=P(Z<z)=1-0.1=0.9\rightarrow z=1.28$$

$$\frac{5000}{100000}=0.05$$



$$=P(Z>z)=0.05$$

$$=P(Z<z)=1-0.05=0.95$$

$$\rightarrow z=1.64$$

$$1.28=\frac{90-\mu}{\sigma}\rightarrow 1.28\sigma=90-\mu$$

$$1.64=\frac{95-\mu}{\sigma}\rightarrow 1.64\sigma=95-\mu$$

بالطرح $0.36\sigma=5$

$$\sigma=\frac{5}{0.36}=13.89$$

بالتعويض $1.28\times13.89=90-\mu$

$$\mu=90-17.78=72.22$$

44 **تحدٍ:** أجرت باحثة تفاعلاً كيميائياً بصورة متكررة فوجدت أن الزمن اللازم لحدوث التفاعل يتبع توزيعاً طبيعياً وأن 5% من التجارب يلزمها أكثر من 13 دقيقة لحدوث التفاعل وأن 12% منها تتطلب أقل من 10 دقائق لحدوث التفاعل. أقدر الوسط الحسابي والانحراف المعياري لزمن التفاعل

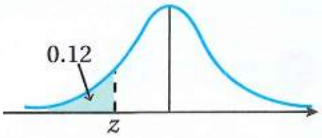
الحل:

$$=P(Z>z)=0.05$$

$$=P(Z<z)=1-0.05$$

$$=0.95$$

$$\rightarrow z=1.64$$



$$=P(Z<z)=0.12$$

$$=P(Z>z)=1-0.12=0.88$$

$$\rightarrow z=-1.17$$

x	z
13	1.64
10	−1.17

$$1.64=\frac{13-\mu}{\sigma}\rightarrow 1.64\sigma=13-\mu$$

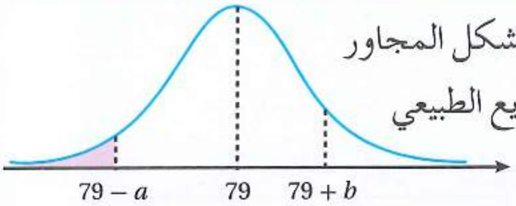
$$-1.17=\frac{10-\mu}{\sigma}\rightarrow -1.17\sigma=10-\mu$$

بالطرح $2.81\sigma=3$

$$\sigma=\frac{3}{2.81}=1.067$$

بالتعويض $1.64\,(1.067)=13-\mu$

$$\mu=13-1.7499=11.25$$



تبرير: يبين الشكل المجاور منحنى التوزيع الطبيعي للمتغير العشوائي X الذي وسطه الحسابي 79 وتباينه 144 إذا كان: $P(79-a\le X\le 79+b)=0.6463$

وكان: $P(X\ge 79+b)=2P(X\le 79-a)$

فأجد كلاً مما يأتي، مبرراً إجابتي:

45 مساحة المنطقة المظللة

الحل:

$$1-P(X\ge 79+b)+P(X\le 79-a)$$

$$=1-3P(X\le 79-a)=0.6463$$

$$3P(X\le 79-a)=1-0.6463=0.3537$$

$$P(X\le 79-a)=\frac{0.3537}{3}=0.1179$$

المساحة المظللة

46 قيمة الثابت b

الحل: $P(X \geq 79 + b) = 2 \times 0.1179 = 0.2358$

$1 - 0.2358 = 0.7642$

$z = 0.72$

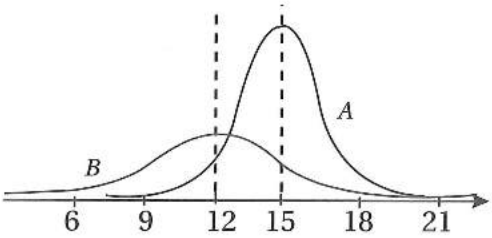
$0.72 = \dfrac{x - 79}{12} \longrightarrow 8.64 = x - 79$

$\longrightarrow x = 79 + 8.64 = 79 + b$

$b = 8.64$

كتاب التمارين ص 35

① يمثل كل من المنحنيين المجاورين توزيعاً طبيعياً. أقارن بين هذين التوزيعين من حيث: قِيَم الوسط الحسابي، والانحراف المعياري.



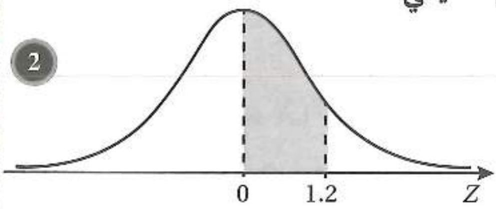
الحل:

$A : \mu = 15 \quad , \quad \sigma = 3$

$B = \mu = 12 \quad , \quad \sigma = 6$

أجد مساحة المنطقة المظللة أسفل منحنى التوزيع الطبيعي المعياري في كل مما يأتي:

②



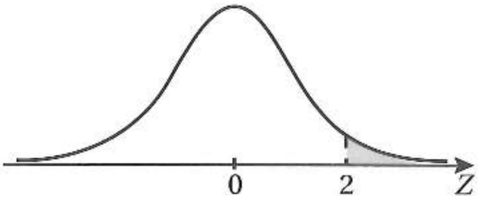
الحل:

$P(0 < X < 1.2)$

$= P(X < 1.2) - P(X < 0)$

$= 0.8849 - 0.5000 = 0.3849$

③



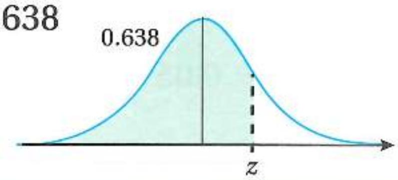
الحل: $P(X > 2) = 1 - P(X < 2)$

$= 1 - 0.9772 = 0.0228$

أجد القيمة المعيارية z التي تحقق كل احتمال مما يأتي:

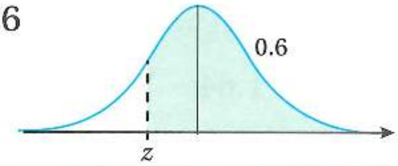
④ $P(Z < z) = 0.638$

$z = 0.35$



⑤ $P(Z > z) = 0.6$

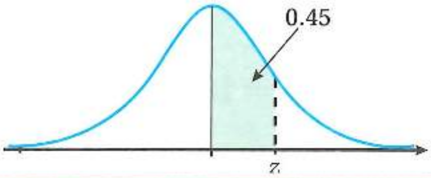
$z = -0.25$



⑥ $P(0 < Z < z) = 0.45$

$P(Z < z) = 0.45 + 0.5 = 0.95$

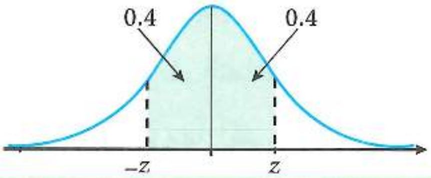
$z = 1.64$



⑦ $P(-z < Z < z) = 0.8$

$P(Z < z) = 0.40 + 0.5 = 0.9$

$z = 1.28$



إذا كان $X \sim N(30, 100)$ فأجد كل احتمال مما يأتي مستعملاً جدول التوزيع الطبيعي:

⑧ $P(X < 35)$

الحل:

$\mu = 30 \quad , \quad \sigma = 10$

$P(X < 35) = P\left(Z < \dfrac{35 - 30}{10}\right)$

$= P\,(Z < 0.5) = 0.6915$

⑨ $P(X > 38.6)$

الحل:

$$= P\left(Z > \frac{38.6 - 30}{10}\right)$$

$$= P(Z > 0.86) = 1 - P(Z < 0.86)$$

$$= 1 - 0.8051 = 0.1949$$

⑩ $P(X > 20)$

الحل:

$$= P\left(Z > \frac{20 - 30}{10}\right) = P(Z > -1)$$

$$= P(Z < 1) = 0.8413$$

⑪ $P(35 < X < 40)$

الحل:

$$= P\left(\frac{35 - 30}{10} < Z < \frac{40 - 30}{10}\right)$$

$$= P(0.5 < Z < 1) = P(Z < 1) - P(Z < 0.5)$$

$$= 0.8413 - 0.6915 = 0.1498$$

⑫ $P(15 < X < 32)$

الحل:

$$= P\left(\frac{15 - 30}{10} < Z < \frac{32 - 30}{10}\right)$$

$$= P(-1.5 < Z < 0.2) = P(Z < 0.2) - P(Z < -1.5)$$

$$= P(Z < 0.2) - (1 - P(Z < 1.5))$$

$$= 0.5793 - (1 - 0.9332)$$

$$= 0.5793 - 0.0668 = 0.5125$$

⑬ $P(17 < X < 19)$

الحل:

$$= P\left(\frac{17 - 30}{10} < Z < \frac{19 - 30}{10}\right)$$

$$= P(-1.3 < Z < -1.1)$$

$$= P(Z < 1.3) - P(Z < 1.1)$$

$$= 0.9032 - 0.8643 = 0.0389$$

إذا كان X متغيراً عشوائياً وسطه الحسابي 30 وانحرافه المعياري 10 فأجد قيمة x التي تحقق الاحتمال المعطى في كل مما يأتي:

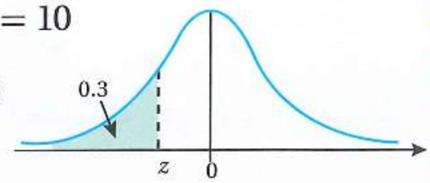
⑭ $P(X < x) = 0.3$

الحل:

$\mu = 30 \quad , \quad \sigma = 10$

$P(X < x) = 0.3$

$1 - 0.3 = 0.7$



$P(Z > z) = 0.7 \quad \rightarrow z = -0.52$

$-0.52 = \dfrac{x - 30}{10} \rightarrow -5.2 = x - 30$

$\rightarrow x = 30 - 5.2 = 24.8$

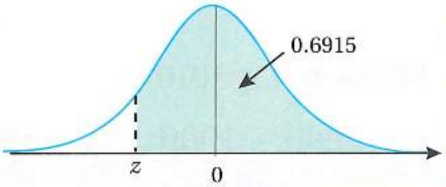
⑮ $P(X > x) = 0.6915$

الحل:

$z = 0.5$

$-0.5 = \dfrac{x - 30}{10} \rightarrow -5 = x - 30$

$\rightarrow x = 25$



⑯ $P(X < x) = 0.7516$

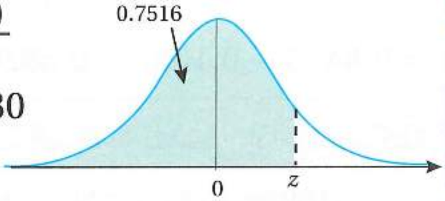
الحل:

$z = 0.67$

$0.67 = \dfrac{x - 30}{10}$

$\rightarrow 6.7 = x - 30$

$\rightarrow x = 36.7$



⑰ $P(X > x) = 0.05$

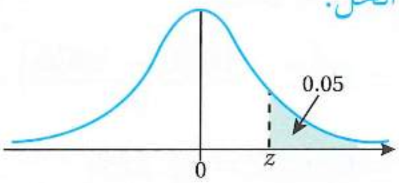
الحل:

$P(Z < x) = 0.95$

$\rightarrow z = 1.64$

$1.64 = \dfrac{x - 30}{10}$

$\rightarrow 16.4 = x - 30 \rightarrow x = 46.4$



تعبئة: يعبئ مصنع إنتاجه في حاويات متماثلة تجهيزاً لشحنها ويقيس كتل هذه الحاويات جميعاً للتحقق من صلاحيتها للشحن. إذا كانت كتل الحاويات تتبع توزيعاً طبيعياً وسطه الحسابي 1000kg وانحرافه المعياري 10kg فأجد كلاً مما يأتي:

⑱ النسبة المئوية للحاويات التي تزيد كتلها على 1020kg

الحل:

$\mu = 1000 \quad , \quad \sigma = 10$

$P(X > 1020) = P\left(Z > \dfrac{1020 - 1000}{10}\right)$

$= P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2)$

$= 1 - 0.9772 = 0.0228 = 2.28\%$

⑲ النسبة المئوية للحاويات التي تتراوح بين 990kg و 1010kg

الحل:

$P(990 < X < 1010)$

$= P\left(\dfrac{990 - 1000}{10} < Z < \dfrac{1010 - 1000}{10}\right)$

$= P(-1 < Z < 1) = P(Z < 1) - P(Z < -1)$

$= P(Z < 1) = 1 - P(Z < 1)$

$= 0.8413 - (1 - 0.8413)$

$= 0.8413 - 0.1587 = 0.6826 = 68.26\%$

⑳ نسبة الحاويات الصالحة للشحن إذا كانت كتلة الحاوية الصالحة للشحن لا تزيد على 1020kg

الحل:

$P(X < 1020)$

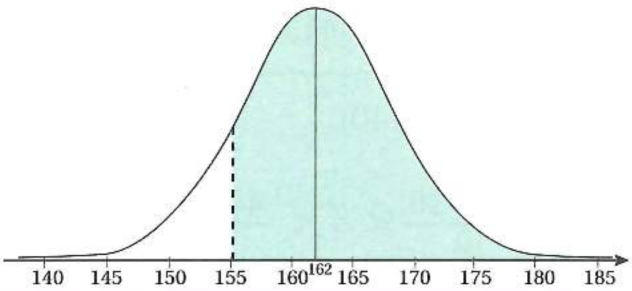
$= P\left(Z < \dfrac{1020 - 1000}{10}\right) = P(Z < 2)$

$= 0.9772 = 97.72\%$

يدل المتغير العشوائي X على أطوال طالبات الصف الثاني عشر (بالسنتيمتر) في إحدى المدارس حيث: $X \sim N(162, 6.3^2)$ معتمداً الشكل الآتي الذي يبين منحنى التوزيع الطبيعي للأطوال أجيب عن الأسئلة الخمسة التالية تباعاً

㉑ أظل المنطقة التي تمثل: $P(X > 155)$

$\mu = 162 \quad , \quad \sigma = 6.3$



㉒ إذا اختيرت إحدى هؤلاء الطالبات عشوائياً فأجد احتمال أن يكون طولها أكثر من 155cm

الحل:

$P(X > 155) = P\left(Z > \dfrac{155 - 162}{6.3}\right)$

$= P(Z > -1.11) = P(Z < 1.11) = 0.8665$

㉓ أستعمل إجابة السؤال السابق لإيجاد احتمال اختيار طالبة عشوائياً طولها أكثر من 169cm

الحل:

$P(X > 169) = P\left(Z > \dfrac{169 - 162}{6.3}\right)$

$= P(Z > 1.11) = 1 - P(Z < 1.11)$

$= 1 - 0.8665 = 0.1335$

أحدد فترتين تقع في كل منهما تقريباً النسبة المعطاة للطالبات مما يأتي:

㉔ 50%

$P(X > 162) = P(X < 1.62)$

㉕ 81.5%

الحل:

$P(Z < 0.89) = P(Z > -0.89)$

اختبار نهاية الوحدة ص 200

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كل ممّا يأتي:

1 إذا كان $X \sim Geo(0.1)$ فإن $P(X=1)$ يساوي

a) 0.1
b) 0.9
c) 0.5
d) 0

الحل:

$P(X=1)=0.1$ (a)

---

2 إذا كان $X\sim B(5, 0.1)$ فإن: $P(X=6)$ يساوي

a) $(0.1)^6$
b) 0
c) $\binom{6}{5}(0.1)^6(0.9)^{-1}$
d) $\binom{6}{5}(0.1)^6(0.9)^1$

الحل:

$P(X=6)=0$ (b)

لأنه لا يجب أن تكون $X\leq 5$

---

3 المساحة التي تقع يسار القيمة $z=-1.73$ أسفل منحنى التوزيع الطبيعي المعياري تساوي (بالوحدات المربعة):

a) 0.4582
b) 0.5280
c) 0.0418
d) 0.9582

الحل:

$$P(Z<-1.73)=1-(Z<1.73)$$
$$=1-0.9582=0.0418 \quad (c)$$

---

4 إذا كان Z متغيراً عشوائياً طبيعياً معيارياً، فإن $P(-2.3<Z<0.14)$ يساوي

a) 0.4449
b) 0.545
c) 0.6449
d) 0.8449

الحل:

$$P(Z<0.14)-P(Z<-2.3)$$
$$=P(Z<0.14)-(1-P(Z<2.3))$$
$$=0.5557-(1-0.9893)$$
$$=0.5557-0.0107=0.5450 \quad (b)$$

---

5 النسبة المئوية لمساحة المنطقة المحصورة بين $\mu-3\sigma$ و $\mu+3\sigma$ أسفل منحنى التوزيع الطبيعي

a) 68%
b) 95%
c) 99.7%
d) 89.7%

الحل:

$$P(\mu-3\sigma<Z<\mu+3\sigma)$$
$$=99.7\% \quad (c)$$

---

6 إذا كان هطل الأمطار السنوي في إحدى المدن يتبع توزيعاً طبيعياً، وسطه الحسابي 1000mm وانحرافه المعياري 200mm فإن احتمال أن يكون هطل الأمطار السنوي أكثر 1200mm هو تقريباً

a) 0.34
b) 0.16
c) 0.75
d) 0.85

الحل:

$$P(X>1200)=P\left(Z>\frac{1200-1000}{200}\right)$$
$$=P(Z>1)=1-P(Z<1)$$
$$=1-0.8413=0.1587\approx 0.16 \quad (b)$$

إذا كان $X\sim Geo(0.3)$ فأجد كلاً مما يأتي:

7 $P(X=4)=0.3\,(0.7)^3=0.1029\approx 0.103$

---

8 $P(3<X\leq 5)=P(X=4)+P(X=5)$

$$=0.3\,(0.7)^3+0.3\,(0.7)^4=0.1749$$

---

9 $P(X>4)=1-P(X\leq 4)$

$$=1-(P(X=4)+P(X=3)+P(X=2)+P(X=1))$$
$$=1-(0.3\,(0.7)^3+0.3\,(0.7)^2+0.3(0.7)+0.3)$$

---

10 $P(5\leq X\leq 7)$

$$=P(X=5)+P(X=6)+P(X=7)$$
$$=0.3\,(0.7)^4+0.3\,(0.7)^5+0.3\,(0.7)^6$$

إذا كان $X \sim B(10, 0.4)$ فأجد كلاً مما يأتي:

11 $P(X=3) = \binom{10}{3}(0.4)^3(0.6)^7 = 0.2150$

12 $P(X>2) = 1 - P(X \le 2)$

$= 1 - (P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$

$= 1 - [\binom{10}{0}(0.4)^0(0.6)^{10} + \binom{10}{1}(0.4)^1(0.6)^9$

$+ \binom{10}{2}(0.4)^2(0.6)^8]$

13 $P(7 \le X < 9) = P(X=7) + P(X=8)$

$= \binom{10}{7}(0.4)^7(0.6)^3 + \binom{10}{8}(0.4)^8(0.6)^2$

14 $P(X \le 9) = 1 - P(X=10)$

$= 1 - \binom{10}{10}(0.4)^{10}(0.6)^0 = 1 - 0.4^{10}$

إذا كان $X \sim N(4, 9)$ فأجد كلاً مما يأتي:

15 $P(X > 8.5)$

الحل:

$\mu = 4 \quad , \quad \sigma^2 = 9 \quad , \quad \sigma = 3$

$P(X > 8.5) = P\left(Z > \frac{8.5-4}{3}\right) = P(Z > 1.5)$

$= 1 - P(Z < 1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668$

16 $P(-2 < X < 7)$

الحل:

$= P\left(\frac{-2-4}{3} < Z < \frac{7-4}{3}\right)$

$= P(-2 < Z < 1) = P(Z < 1) - P(Z < -2)$

$= P(Z < 1) - (1 - P(Z < 2))$

$= 0.8413 - (1 - 0.9772)$

$= 0.8413 - 0.0228 = 0.8185$

17 $P(X < 10)$

الحل:

$= P\left(Z < \frac{10-4}{3}\right) = P(Z < 2)$

$= 0.9772$

18 $P(5.5 < X < 8.5)$

الحل:

$= P\left(\frac{5.5-4}{3} < Z < \frac{8.5-4}{3}\right)$

$= P(0.5 < Z < 1.5) = P(Z < 1.5) - P(Z < 0.5)$

$= 0.9332 - 0.6915 = 0.2417$

19 $P(X < 1)$

الحل:

$= P\left(Z < \frac{1-4}{3}\right) = P(Z < -1)$

$= 1 - P(Z < 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$

20 $P(X > -3)$

$= P\left(Z > \frac{-3-4}{3}\right) = P(Z > -2.33)$

$= 0.9901$

21 تبين في مصنع للمصابيح الكهربائية أن احتمال أن يكون أي مصباح من إنتاج المصنع تالفاً هو 0.17 إذا اختير 100 مصباح عشوائياً من إنتاج المصنع فأجد العدد المتوقع من المصابيح التالفة.

الحل:

$E(X) = np = 100\,(0.17) = 17$

22 تفيد إحصائيات أصدرتها إحدى الجامعات بأن 20% فقط من طلبة الجامعة يمارسون التمرينات الرياضية الصباحية بشكل منتظم أرادت إدارة الجامعة تحفيز الطلبة على ممارسة هذه التمرينات فبدأت إجراء مقابلات عشوائية مع الطلبة لتعرف إذا كانوا يمارسون هذه التمرينات بانتظام أم لا أجد عدد الطلبة المتوقع مقابلتهم قبل مصادفة أول طالب يمارس التمرينات الرياضية الصباحية بشكل منتظم.

الحل:

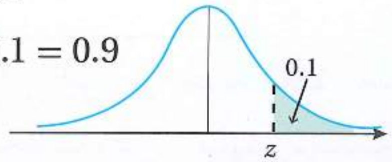
$$E(X)=\frac{1}{p}=\frac{1}{0.2}=5$$

أجد القيمة المعيارية z التي تحقق كل احتمال مما يأتي:

23 $P(Z>z)=0.1$

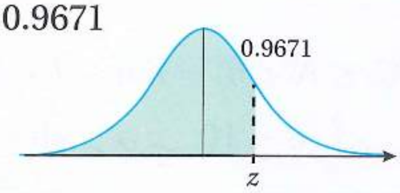
$P(Z<z)=1-0.1=0.9$

$z=1.28$



24 $P(Z<z)=0.9671$

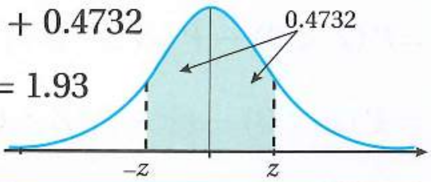
$z=1.84$



25 $P(-z<Z<z)=0.9464$

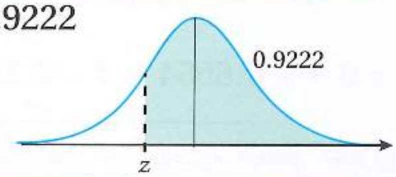
$P(Z<z)=0.5+0.4732$

$=0.9732\rightarrow z=1.93$



26 $P(Z>z)=0.9222$

$z=-1.42$



توصلت دراسة إلى أن أطوال الرجال حول العالم تتبع توزيعاً طبيعياً وسطه الحسابي 171cm وانحرافه المعياري 10cm إذا اختير رجل عشوائياً فأجد كلاً مما يأتي:

ملاحظة (قمنا بحل الأسئلة من 27 – 30 باستعمال القاعدة التجريبية).

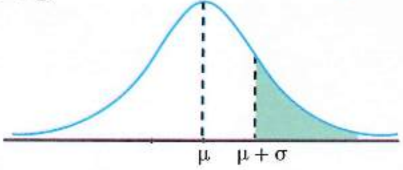
27 احتمال أن يزيد طول الرجل على 181cm

الحل:

$181-171=10=\sigma$

$181=171+\sigma$

$\Rightarrow P(X>\mu+\sigma)$

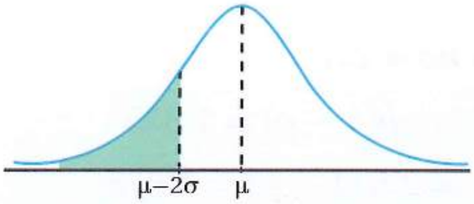


$=13.5\%+2.35\%+0.15\%$

$=16\%=0.16$

28 احتمال أن يكون طول الرجل أقل من الوسط الحسابي للأطوال بأكثر من انحرافين معياريين.

الحل:



$P(X<\mu-2\sigma)$

$=2.35\%+0.15\% \ =2.5\%=0.025$

29 احتمال أن يزيد طول الرجل على الوسط الحسابي للأطوال بأكثر من انحراف معياري.

الحل:

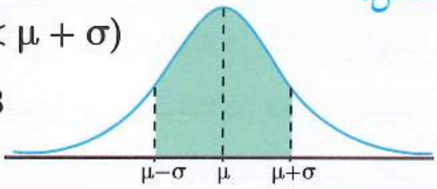
$P(X>\mu+\sigma)=0.16$ (مشابه لحل 27)

30 احتمال ألا يزيد الفرق بين طول الرجل والوسط الحسابي للأطوال على انحراف معياري واحد.

الحل:

$P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)$

$=68\ \%=0.68$



31 يعبأ إنتاج مزرعة من التفاح في صناديق ثم تقاس كتلتها بحسب المواصفات المطلوبة وتبين أن 1578 صندوقاً من أصل 10000 صندوق تزيد كتلة كل منها على 6kg

إذا كانت كتل الصناديق تتبع توزيعاً طبيعياً وسطه الحسابي 5kg فأجد الانحراف المعياري لهذه الكتل.

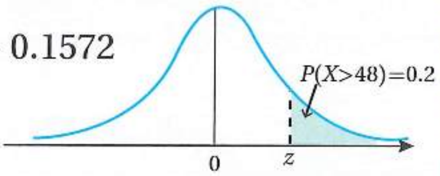
الحل:

$\frac{1578}{10000}=0.1572$

$P(Z<z)=1-0.1572$

$=0.8422$

$z=1$



$z=\frac{x-\mu}{\sigma}\rightarrow 1=\frac{6-5}{\sigma}\rightarrow \sigma=1$

32 إذا كان X متغيراً عشوائياً ذا حدين، وكان:

$E(X) = 2.5$, $\text{Var}(X) = 1.875$ فأجد $P(X \geq 8)$

الحل:

$$E(X) = np = 2.5$$

$$\text{Var}(X) = np(1-p) = 1.875$$

$$= 2.5\,(1-p) = 1.875$$

$$1 - p = \frac{1.875}{2.5} = 0.75$$

$$p = 1 - 0.75 = 0.25$$

$$np = 2.5 \rightarrow \; n(0.25) = 2.5$$

$$n = \frac{2.5}{0.25} = 10$$

$$P(X \geq 8) = P(X=8) + P(X=9) + P(X=10)$$

$$= \binom{10}{8}(0.25)^8\,(0.75)^2 + \binom{10}{9}(0.25)^9\,(0.75)^1$$

$$+ \binom{10}{10}(0.25)^{10}\,(0.75)^0$$

أعد أحد مصانع السيارات الحديثة دراسة عن الزمن الذي يستغرقه الفنيون في اكتشاف عطل السيارة الواحدة وقد انتهت الدراسة إلى أنه يتعين على الفني تشغيل السيارة في كل مرة يحاول فيها إيجاد العطل وأنه يستطيع تشغيل السيارة بعد دقيقتين من تشغيله إياها في المرة السابقة إذا أمكن نمذجة الزمن الذي يلزم الفنيين إلى حين إيجاد العطل بمتغير طبيعي، وسطه الحسابي 10 دقائق وانحرافه المعياري 5 دقائق فأجد كلاً مما يأتي:

33 احتمال أن يضطر الفني إلى تشغيل السيارة أكثر من 6 مرات حتى يتمكن من تحديد العطل

الحل:

ليكن T الزمن اللازم لاكتشاف العطل

$$\Rightarrow T \sim N(10.25)$$

$$T = 2(N-1)$$

ليكن N عدد مرات تشغيل السيارة التي يحتاجها الفنيون قبل اكتشاف العطل، فالزمن:

$$P(N > 6) = P(T > 10) = 0.5$$

34 احتمال أن يتمكن الفني من تحديد العطل بعد تشغيل السيارة للمرة الخامسة وقبل تشغيلها مرة سادسة

الحل:

$$P(5 \leq N < 6) = P(8 \leq T < 10)$$

$$= P\left(\frac{8-10}{5} \leq Z < \frac{10-10}{5}\right)$$

$$= P\,(-0.4 \leq Z < 0)$$

$$= P\,(Z < 0) - P\,(Z \leq -0.4)$$

$$= P\,(Z < 0) - (1 - P\,(Z < 0.4))$$

$$= P\,(Z < 0) + P\,(Z < 0.4) - 1$$

$$= 0.5 + 0.6554 - 1 = 0.1554$$

35 احتمال ألا يتمكن الفني من تحديد العطل خلال ثلث ساعة من الفحص.

الحل:

ثلث ساعة = 20 دقيقة

$$P(X > 20) = P\left(Z > \frac{20-10}{5}\right)$$

$$= P\,(Z > 2) = 1 - P\,(Z < 2)$$

$$= 1 - 0.9772 = 0.0228$$

ملحقات

الجبر

العمليات الحسابية

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

$$a(b+c)=ab+ac$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

$$\frac{a+c}{b}=\frac{a}{b}+\frac{c}{b}$$

الأسس والجذور

$$\frac{x^m}{x^n}=x^{m-n}$$

$$x^m x^n=x^{m+n}$$

$$x^{-n}=\frac{1}{x^n}$$

$$(x^m)^n=x^{mn}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n=\frac{x^n}{y^n}$$

$$(xy)^n=x^n y^n$$

$$x^{m/n}=\sqrt[n]{x^m}=(\sqrt[n]{x})^m$$

$$x^{1/n}=\sqrt[n]{x}$$

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$

$$\sqrt[n]{xy}=\sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}$$

حالات خاصة من تحليل كثيرات الحدود

$$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$$

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$$

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

القانون العام

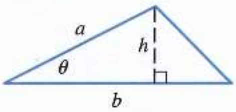
إذا كان: $ax^2+bx+c=0$، حيث: $a\neq 0$، فإنّ:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

الهندسة

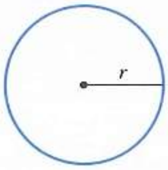
صيغ هندسية (المساحة A، والمحيط C، والحجم V)

- المثلث:



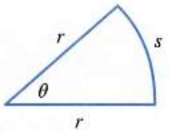
$$A=\frac{1}{2}bh$$
$$=\frac{1}{2}ab\sin\theta$$

- الدائرة:



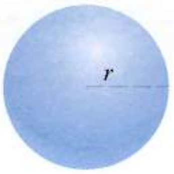
$$A=\pi r^2$$
$$C=2\pi r$$

- القطاع الدائري:



$$A=\frac{1}{2}r^2\theta$$
$$s=r\theta\ \ (\theta\,\text{radian})$$

- الكرة:

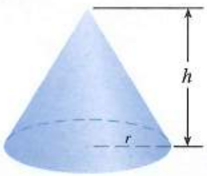


$$V=\frac{4}{3}\pi r^3$$
$$A=4\pi r^2$$

- الأسطوانة:

$$V=\pi r^2 h$$
$$A=2\pi rh+2\pi r^2$$

- المخروط:



$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$$
$$A=\pi r\sqrt{r^2+h^2}+2\pi r^2$$

ملحقات

الهندسة الإحداثية

المسافة بين نقطتين ونقطة المنتصف

- المسافة بين النقطتين $P_1\,(x_1, y_1)$ و $P_2\,(x_2, y_2)$ هي:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

- إحداثيا نقطة منتصف القطعة المستقيمة $\overline{P_1\,P_2}$ هما:

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

المستقيم

- ميل المستقيم المارِّ بالنقطتين $P_1\,(x_1, y_1)$ و $P_2\,(x_2, y_2)$ هو:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

- معادلة المستقيم المارِّ بالنقطة $P_1\,(x_1, y_1)$، وميله m هي:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

- إذا كان l مستقيمًا في المستوى الإحداثي، وكانت θ الزاوية التي يصنعها المستقيم مع المحور x الموجب، فإنَّ ميل المستقيم m يعطى بالمعادلة: $m = \tan\theta$، حيث: $0<\theta<\pi$.

البُعْد بين نقطة ومستقيم

البُعْد بين المستقيم l الذي معادلته: $Ax+By+C=0$ والنقطة $P(x_1, y_1)$ يعطى بالصيغة الآتية:

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

شرط ألّا تكون قيمتا A و B معًا صفرًا.

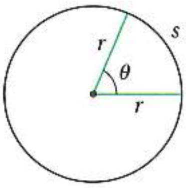
الدائرة

معادلة الدائرة التي مركزها (h, k)، ونصف قُطْرها r هي:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

المثلثات

قياسات الزوايا



$$\pi \text{ rad} = 180^\circ \qquad 1^\circ = \frac{\pi}{180}\text{ rad}$$

$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

الاقترانات المثلثية في المثلث قائم الزاوية

$$\sin\theta=\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \qquad \csc\theta=\frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$$

$$\cos\theta=\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} \qquad \sec\theta=\frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$$

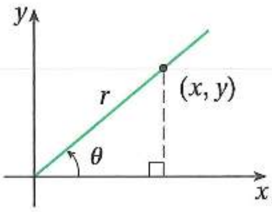
$$\tan\theta=\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} \qquad \cot\theta=\frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$$

الاقترانات المثلثية لأيِّ زاوية

$$\sin\theta=\frac{y}{r} \qquad \csc\theta=\frac{r}{y}$$

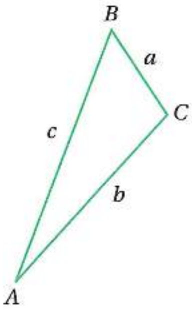
$$\cos\theta=\frac{x}{r} \qquad \sec\theta=\frac{r}{x}$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x} \qquad \cot\theta=\frac{x}{y}$$



قانون الجيوب

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$$



قانون جيوب التمام

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

ملحقات

المتطابقات المثلثية الأساسية

- متطابقات المقلوب:

$$\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}\qquad \sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}\qquad \cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$$

- المتطابقات النسبية:

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\qquad \cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

- متطابقات فيثاغورس:

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1\qquad 1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$$

$$1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$$

- متطابقات الزاويتين المتتامتين:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta\qquad \tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta$$

$$\sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\csc\theta\qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\tan\theta\qquad \csc\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sec\theta$$

- متطابقات الزاوية السالبة:

$$\sin(-\theta)=-\sin\theta\qquad \cos(-\theta)=\cos\theta$$

$$\tan(-\theta)=-\tan\theta$$

المتطابقات المثلثية للمجموع والفرق

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$$

$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$$

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$$

$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$$

$$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$$

$$\tan(x-y)=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}$$

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta\qquad \cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$$

$$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta\qquad \cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$$

$$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

المتطابقات المثلثية لتقليص القوّة

$$\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}\qquad \cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

$$\tan^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}$$

قِيَم بعض الاقترانات المثلثية للزوايا الخاصة

$\theta°$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
θ rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0

ملحقات

المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

$$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \qquad \cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

متطابقات تحويل الضرب إلى مجموع أو فرق

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\,[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\,[\sin(x-y) + \sin(x+y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\,[\cos(x-y) + \cos(x+y)]$$

$$\cos x \sin y = -\frac{1}{2}\,[\sin(x-y) - \sin(x+y)]$$

الاقترانات الأُسّية واللوغاريتمية

العلاقة بين الصورة الأسّية والصورة اللوغاريتمية

إذا كان $x > 0$، و$b > 0$، و$b \neq 1$، فإنَّ:

الصورة اللوغاريتمية $\log_b x = y$ إذا وفقط إذا $b^y = x$ الصورة الأُسّية

الأُسُّ

الأساس

الخصائص الأساسية للوغاريتمات

إذا كان $x > 0$، و $b > 0$، و$b \neq 1$، فإنَّ:

- $\log_b 1 = 0$ $\quad b^0 = 1$
- $\log_b b = 1$ $\quad b^1 = b$
- $\log_b b^x = x$ $\quad b^x = b^x$
- $b^{\log_b x} = x,\ x > 0$ $\quad \log_b x = \log_b x$

قوانين اللوغاريتمات

إذا كانـت b, x, y أعـداداً حقيقيـةً موجبـةً، وكان p عدداً حقيقيًّا، حيث: $b \neq 1$، فإنَّ:

- قانون الضرب: $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$
- قانون القسمة: $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$
- قانون القوَّة: $\log_b x^p = p \log_b x$

التفاضل

قواعد أساسية للاشتقاق

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

$$\frac{d}{dx}(cf(x)) = cf'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(f(x) - g(x)) = f'(x) - g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)\,g(x)) = f(x)\,g'(x) + g(x)\,f'(x)$$

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))\,g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)\,f'(x) - f(x)\,g'(x)}{(g(x))^2}$$

مشتقات الاقترانات الأُسّية والاقترانات اللوغاريتمية

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x},\ x > 0 \qquad \frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

$$\frac{d}{dx}(\log_b x) = \frac{1}{x\ln b} \qquad \frac{d}{dx}(b^x) = b^x \ln b$$

ملحقات

مشتقات الاقترانات المثلثية

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x \qquad \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x \qquad \frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

التكامل

قواعد أساسية للتكامل

$$\int k\, dx = kx + C$$

$$\int x^n\ dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C, n \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$$

$$\int e^x\, dx = e^x + C$$

$$\int b^x\, dx = \frac{b^x}{\ln b} + C\,, b > 0$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C$$

$$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C$$

$$\int \csc x \cot x\, dx = -\csc x + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C\,, f(x) \neq 0$$

خصائص التكامل غير المحدود

$$\int k f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$$

$$\int (f(x) \pm g(x))\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$$

خصائص التكامل المحدود

$$\int_a^b k f(x)\, dx = k \int_a^b f(x)\, dx$$

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx$$

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

المتجهات

إذا كان $\vec{\mathbf{v}} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle, \vec{\mathbf{w}} = \langle w_1, w_2, w_3\rangle$ متجهين في الفضاء، وكان c عددًا حقيقيًّا، فإنَّ:

العمليات على المتجهات

$$\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}} = \langle (v_1 + w_1), (v_2 + w_2), (v_3 + w_3)\rangle$$

$$\vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{w}} = \langle (v_1 - w_1), (v_2 - w_2), (v_3 - w_3)\rangle$$

$$c\vec{\mathbf{v}} = \langle cv_1, cv_2, cv_3\rangle$$

الضرب القياسي في الفضاء

$$\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$$

قياس الزاوية بين متجهين في الفضاء

إذا كان $\vec{\mathbf{v}}$ و $\vec{\mathbf{w}}$ متجهين غير صفريين، فإنَّه يُمكِن إيجاد الزاوية بينهما باستعمال الصيغة الآتية:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}}}{|\vec{\mathbf{v}}|\,|\vec{\mathbf{w}}|}\right)$$

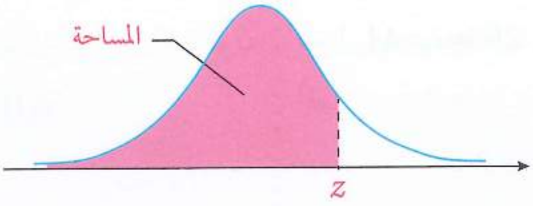
ملحقات

رموز رياضية

المستقيم المارُّ بالنقطتين A و B	$\overleftrightarrow{AB}$
القطعة المستقيمة التي نقطتا نهايتيها A و B	$\overline{AB}$
الشعاع الذي نقطة بدايته A، ويمرُّ بالنقطة B	$\overrightarrow{AB}$
طول القطعة المستقيمة $\overline{AB}$	AB
متجه نقطة بدايته A، ونقطة نهايته B	$\overrightarrow{AB}$
المتجه v	$\vec{\mathbf{v}}$
مقدار المتجه v	$\lvert\vec{\mathbf{v}}\rvert$
الزاوية A	$\angle A$
زاوية ضلعاها $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$	$\angle ABC$
قياس الزاوية A	$m\angle A$
المثلث ABC	ΔABC
موازٍ لـ	$\parallel$
عمودي على	$\perp$
نسبة a إلى b	$a:b$
تكامل غير محدود	$\int$
تكامل محدود	$\int_a^b$
مشتقة الاقتران $f(x)$	$f'(x)$

سعة العدد المُركَّب	arg
السعة الرئيسة للعدد المُركَّب	Arg
دينار أردني	JD
متر	m
كيلومتر	km
سنتيمتر	cm
كيلوغرام	kg
غرام	g
ثانية	s
دقيقة	min
ساعة	h
إنش	in
قدم	ft
توافيق n من العناصر أُخِذ منها r كل مَرَّة	$\binom{n}{r}$ ${}_nC_r$
احتمال الحادث A	$P(A)$
احتمال مُتمِّمة الحادث A	$P(\bar{A})$
الوسط الحسابي	μ
الانحراف المعياري	σ
التباين	σ^2

ملحقات



جدول التوزيع الطبيعي المعياري

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

تصويبات الفصل الأول

أعتذر بشدة لبعض الهفوات التي حدثت في الفصل الأول وأشكر الأخوة المعلمين وأبنائي الطلبة الذين أبدوا ملاحظاتكم وهنا أضع لكم بعض التصويبات المهمة.

ورد خطأ أن الجسم يعود لموقعه الابتدائي عندما تكون $s(t) = 0$ والصحيح أن $s(t) = s(0)$

لذلك فرع d صفحة 19

$$s(t) = s(0)$$
$$t^2 - 7t + 8 = 8 \longrightarrow t^2 - 7t = 0$$
$$t(t-7) = 0 \longrightarrow t = 0\,,\ t = 7$$

وكذلك السؤال رقم **54** صفحة **61**

$$s(t) = s(0)$$
$$\ln(t^2 - 2t + 1.9) = \ln 1.9$$
$$t^2 - 2t + 1.9 = 1.9$$
$$t^2 - 2t = 0$$
$$t(t-2) = 0 \longrightarrow t = 0\,,\ t = 2$$

الملاحظة الموجودة في صفحة **191** أن أكبر سعة للعدد المركب تساوي السعة مضروبه في 2 ليست صحيحة دائماً.

والصحيح: توجد القيمة العظمى لسعة العدد المركب باستعمال خصائص الدائرة ومماساتها

فرع b صفحة 192

القيمة العظمى هي : $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

سؤال 23 صفحة 200

أكبر سعة : $\theta = 2\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) = 1.46$

سؤال 14 صفحة 206

القيمة العظمى هي : $= \frac{\pi}{2} + 0.64 = 2.21$

سؤال 44 صفحة 26

أقصى سرعة عند

$$\sin t = 1 \longrightarrow s(t) = 4 - 1 = 3$$
$$\sin t = -1 \longrightarrow s(t) = 4 - (-1) = 5$$
$$\sin t = 0 \longrightarrow s(t) = 4 - 0 = 4$$

سؤال 16 صفحة 75

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2}$$

سؤال 18 صفحة 75

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2}$$

سؤال 15 صفحة 83

$y' = \frac{-1}{2} \longrightarrow y = 2(x-1)$ العمودي

سؤال 45 صفحة 90

$$a(t) = \frac{-100\pi^2}{4}\sin(10\,\pi t)$$

سؤال 7 صفحة 100

$$\frac{dv}{dt} = 500\ \text{L/min} = 0.5\text{m}^3/\text{min}$$
$$\frac{dh}{dt} = \frac{500}{\pi} = \frac{1}{2\pi}$$

سؤال 8 صفحة 100

$$\frac{dA}{dt} = 1000 = 1$$

سؤال 11 صفحة 101

$$2(3)\frac{dx}{dt} + 2(4) \times 0.15 = 0$$
$$\frac{dx}{dt} = \frac{-1.2}{6} = -0.2$$

سؤال 27 صفحة 105

إضافة حالة ثانية وهي عندما تكون العربة في حالة هبوط

فتكون $\frac{dy}{dt} = -8\pi$

سؤال 29 صفحة 105

ينتج أن $\cos\theta = \frac{1}{4}$ ومنه $\sin\theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$

حيث هناك حالتان عندما تكون A على يمين B فتكون L متناقصة وعندما تكون A على يسار B فتكون L متزايدة لذلك $\frac{dx}{dt} = \pm\frac{7\sqrt{15}}{4}$

سؤال 7 صفحة 121

عظمى مطلقة $f(\frac{\pi}{6}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

سؤال 10 صفحة 122

عظمى مطلقة $f(\sqrt{e}\,) = \frac{1}{2\,e}$

صغرى مطلقة $f(\frac{1}{2}) = -4\ln 2$

سؤال 17 صفحة 123

تصويب $\frac{3}{5}$ في كل السؤال إلى $\frac{6}{5}$

سؤال 40 صفحة 127

$(6, 7)$ بدلاً من $(6, \infty)$

سؤال 41 صفحة 127

$(4, 7)$ بدلاً من $(4, \infty)$

سؤال 53 صفحة 129

القيمة العظمى المطلقة هي $f(\frac{a}{a+b})$

لأن $f(0) = f(1) = 0$

سؤال 32 صفحة 148

إضافة : بعد اختبار طرفي الفترة $\frac{\pi}{2}$, 0 القيمة الصغرى هي $T(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$

سؤال 27 صفحة 155

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1870}{2\times 85} = 11$$

سؤال 9 صفحة 164

الإجابة $-4\sqrt{2}$

سؤال 56 صفحة 167

$$\text{Arg} = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\pi}{2}$$

سؤال 60 صفحة 168

$BC = \sqrt{160}\;, AD = \sqrt{90}$

المساحة $= \frac{1}{2} \times \sqrt{160} \times \sqrt{90} = 60$

سؤال 10 صفحة 178

$$= 22\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

سؤال 32 صفحة 182

$z = -10 \pm 2\,i$

سؤال 49 صفحة 184

تكون قيم m المختلفة هي 1012, 108, 28

سؤال 6 صفحة 186

$$z = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}i$$

سؤال 24 صفحة 200

العدد المركب الذي يحقق المعادلة هو :

$$z = \frac{31}{26} - \frac{7}{13}i$$

سؤال 34 صفحة 202

تبديل مواقع $\frac{-\pi}{4}$, 0

سؤال 35 صفحة 203

$|z + 6| \leq |z + 4\,i|$

سؤال 36 صفحة 203

عند حل المعادلة: $10x^2 + 10x + a^2 = 0$

$x = -10\,a \pm 2a\sqrt{15}$

ثم نكتب الأعداد المركبة

سؤال 37 صفحة 203

أكبر قيمة لـ $|z|$ هي $5 + 2 = 7$

وأصغر قيمة هي $5 - 2 = 3$

سؤال 41 صفحة 204

الشكل (c)

سؤال 6 صفحة 205

المعادلة $3x + y - 6 = 0$

سؤال 20 صفحة 207

$$z_1 = \frac{6 + 5\sqrt{2}}{2} + \frac{4 + 5\sqrt{2}\,i}{2}$$

$$z_2 = \frac{6 - 5\sqrt{2}}{2} + \frac{4 - 5\sqrt{2}\,i}{2}$$

سؤال 1 صفحة 209

$i^{343} = i^3 = -i$ (c)

سؤال 12 صفحة 210

تظليل داخل الدائرة

سؤال 13 صفحة 210

تظليل ما بين الشعاعين

سؤال 17 صفحة 211

المساحة= $\frac{1}{2}\sqrt{65} \times \sqrt{60} \times \frac{3}{5} = \frac{39}{2}$

سؤال 20 صفحة 212

$z_1 = 4 + 2i$

$z_2 = -(2 + 2\sqrt{3}) + (2\sqrt{3} + 1)\,i$

$z_3 = -2 + \sqrt{3} - (2\sqrt{3} + 1)\,i$

سؤال 26 صفحة 213

$-4 \leq 2 + p \leq 4$

$\longrightarrow -6 = p \leq 2$

سؤال 28 صفحة 213