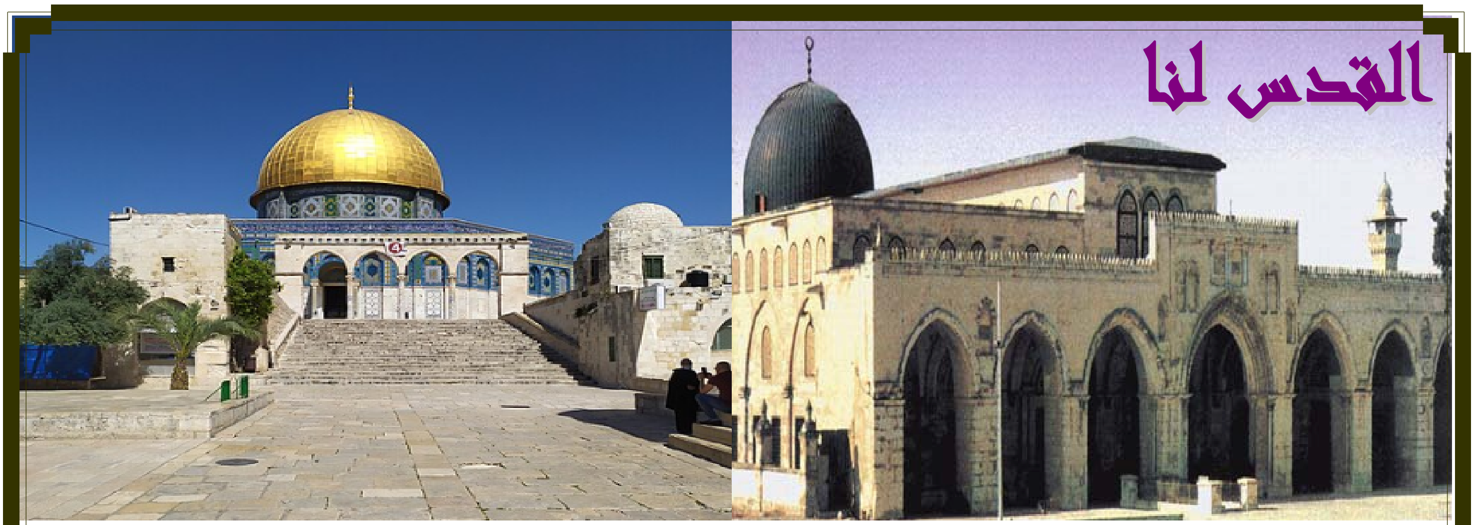


الرياضيات 2024 - 2025

الصف الثاني الثانوي

العلمي 2007

مُكثف الفصل الأول

الأستاذ : **عبدالقادر الحسنات** 078 531 88 77

عبدالقادر الحسنات

I ❤ Maths $\sqrt[3]{64}$ Ever

2 ∞ & >

I LOVE MATH
SAID NO ONE EVER!

الرياضيات 2024 - 2025

الصف الثاني الثانوي/العلمي

2007

مُكثف وحدة التفاضل

الأستاذ : **عبدالقادر الحسنات** 078 531 88 77

I ❤ Maths $\sqrt[3]{64}$ Ever

2∞&>

I LOVE MATH
SAID NO ONE EVER!

ملخص الجزء الأول من الدرس الأول ثم اختبار ورقة عمل (1) قواعد الاشتقاق

$$\frac{a}{b}-1=\frac{a-b}{b}$$

$$\frac{\text{البسط – المقام}}{\text{المقام}}$$

$$\frac{3}{x^4}=3x^{-4}$$

$$\sqrt[3]{x^5}=x^{\frac{5}{3}}$$

تحـذير

$$\frac{a}{b\pm c}\neq\frac{a}{b}\pm\frac{a}{c}$$

توزيـع البسـط علـى المقـام

$$\frac{x\pm y}{z}=\frac{x}{z}\pm\frac{y}{z}$$

$$\frac{3}{\frac{4}{5}}=3\div\tfrac{4}{5}=3\times\tfrac{5}{4}=\frac{3\times5}{4}$$

$$\frac{\frac{9}{2}}{7}=\tfrac{9}{2}\div7=\tfrac{9}{2}\times\tfrac{1}{7}=\frac{9}{2\times7}$$

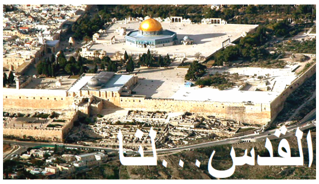
$$e^{x+3}=e^x\times e^3$$

	$f(x)$	$f'(x)$
1)	$a\,x^n$	$a\,n\,x^{n-1}$
2)	$g(x)\pm h(x)$	$g'(x)\pm h'(x)$
3)	$e^{x\pm a}$	$e^{x\pm a}$
4)	Lnx	$\frac{1}{x}$
5)	$\sin x$	$\cos x$
6)	$\cos x$	$-\sin x$

$$Ln(x\,y)=Lnx+Lny$$

$$Ln\frac{x}{y}=Lnx-Lny$$

$$Ln(x)^a=a\;Ln(x)$$



$f(x)=5x^3\Rightarrow f'(x)=(5)(3x^2)=15x^2$...صح

$f(x)=5+x^3\Rightarrow f'(x)=0+3x^2=3x^2$... صح

$f(x)=5x^3\Rightarrow f'(x)=(0)(3x^2)=0$...(خطأ)

$f(x)=4\cos x\Rightarrow f'(x)=4-\sin x$.....(خطأ)

$f(x)=4\cos x\Rightarrow f'(x)=4(-\sin x)=-\;4\sin x$(صح)

$$e^0=1$$

$f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}\Rightarrow f'(x)=\frac{2x}{1}$...(خطأ)

$f(x)=\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}=x+3\Rightarrow f'(x)=1$...(صح)

$$\ln e=1$$

Ln0: غير معرف

$f(x)=\pi^3\Rightarrow f'(x)=3\pi^2$...(خطأ)

$f'(x)=0$...(صح)

$$\ln1=0$$

$f(x)=x^2(x^3-5x)$

$\Rightarrow f'(x)=2x(3x^2-5)$...(خطأ)

$f(x)=x^2(x^3-5x)=x^5-5x^3$

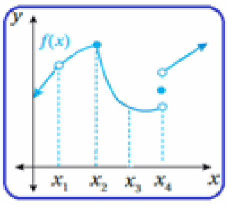
$\Rightarrow f'(x)=5x^4-15x^2$...(صح)

قابلية الاشتقاق :

1) إذا كان f(x) متصلاً عند x = a ، فإنه قد يكون قابلاً للاشتقاق وقد لا يكون

2) إذا كان f(x) قابلاً للاشتقاق عند x = a ، فإنه قطعاً متصل عند(a)

3) إذا كان f(x) غير متصل عند x = a ، فإنه غير قابل للاشتقاق عندها



اختبر نفسك

1) $f(x)=6\sqrt[3]{x^2} \Rightarrow f'(-8)=$ $a)\ 0$ $b)\ -4$ $c)\ 2$ $d)\ -2$

---

2) $f(x)=\dfrac{16}{x} \Rightarrow f'(4)=$ $a)\ 256$ $b)\ -16$ $c)\ 8$ $d)\ -1$

---

3) $y=\dfrac{x^4-2x^2}{x^2} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=$ $a)\ \dfrac{4x^3-4x}{2x}$ $b)\ x^2-2$ $c)\ 2x$ $d)\ 6x^5-8x$

---

4) $f(x)=x^4+e^{x+1}-2x \Rightarrow f'(-1)=$ $a)\ 0$ $b)\ 4$ $c)\ -5$ $d)\ 3$

---

5) $f(x)=ax^3-Ln5x+ax \ ,\ f'(-1)=3 \Rightarrow a=$ $a)\ \dfrac{1}{2}$ $b)\ 2$ $c)\ -2$ $d)\ -1$

---

6) $f(x)=x-\cos x \Rightarrow f'(x)=$ $a)\ 1-\sin x$ $b)\ 1+\sin x$ $c)\ \sin x$ $d)\ -\sin x$

---

7) $f(x)=\sqrt{2x+9}+e^3 \Rightarrow f'(0)=$ $a)\ 3+3e^2$ $b)\ 3$ $c)\ \dfrac{1}{3}$ $d)\ \dfrac{-1}{3}$

---

8) $f(x)=\ln 3x^4 \Rightarrow f'(x)=$ $a)\ Ln(12x^3)$ $b)\ Ln3+4Lnx$ $c)\ \dfrac{12}{x^4}$ $d)\ \dfrac{4}{x}$

---

9) $f(x)=\ln(x\ e^x) \Rightarrow f'(1)=$ $a)\ 2$ $b)\ -2$ $c)\ e$ $d)\ 1+e$

---

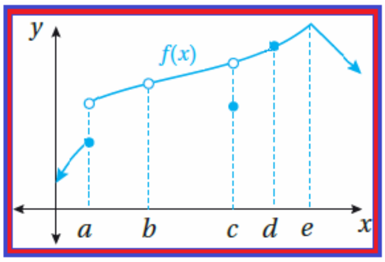
10) $f(x)=\ln(\dfrac{x}{e^x})^2 \Rightarrow f'(1)=$ $a)\ \dfrac{1}{e}$ $b)\ 0$ $c)\ 2e$ $d)\ 4$

---

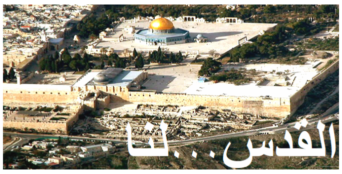
11) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\ ,\ f'(a)=\dfrac{-1}{16} \Rightarrow a=$ $a)\ 2$ $b)\ 4$ $c)\ 8$ $d)\ 1$

---

12) معتمدا الشكل المجاور والذي يمثل منحنى f(x) ، فإن قيم (x) التي عندها f غير قابل للاشتقاق هي :



$a)\ a,c,e$ $b)\ a,b,c$ $c)\ a,b,c,e$ $d)\ a,b,c,d,e$



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
d	d	c	c	a	b	c	d	a	b	b	c

تمارين إضافية

1) $f(x) = 24\sqrt[3]{x} \Rightarrow f'(-8) = a)\ 1 \quad b)-2 \quad c)\ 2 \quad d)-48$

2) $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(3) = a)\ 9 \quad b)-9 \quad c)\ \frac{1}{9} \quad d)\ \frac{-1}{9}$

3) $f(x) = 9x \Rightarrow f'(2) = a)\ 9 \quad b)\ 18 \quad c)\ 0 \quad d)\ 81$

4) $f(x) = 2\ e^{x+1} \Rightarrow f'(0) = a)\ 2\ e \quad b)\ e \quad c)\ 2\ e^3 \quad d)\ 1$

5) $f(x) = \ln x^6 \Rightarrow f'(2) = a)\ 3 \quad b)\ 2 \quad c)\ 6 \quad d)\ 0$

6) $f(x) = \ln(x^2 e^{3x}) \Rightarrow f'(x) =$

$a)\ \frac{2}{x} + 3e^{3x} \quad b)\frac{2}{x} + e^{2x} \quad c)\ 2x + 3 \quad d)\frac{2}{x} + 3$

7) $f(x) = \sin x + \sin \pi \Rightarrow f'(x) = a)\ \cos x \quad b)-\cos x$

$c)\ \cos x + \cos \pi \quad d)\ \cos x - 1$

8) $f(x) = \ln \frac{e^{2x}}{x^4} + 3x \Rightarrow f'(-1) =$

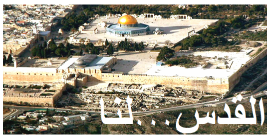
$a)\ e^2 \quad b)\ e^2 + 3 \quad c)\ 1 \quad d)\ 9$

9) $f(x) = 4\ln 2 + \sin \pi - \cos x + (3x+2)^2 \Rightarrow f'(0) =$

$a)\ 13 \quad b)\ 11 \quad c)\ 12 \quad d)\ 4$

10) $f(x) = \sin x + \cos x \Rightarrow f'(x) = a)\ \cos x + \sin x \quad b)\cos x - \sin x$

$c)-\cos x - \sin x \quad d)-\cos x + \sin x$



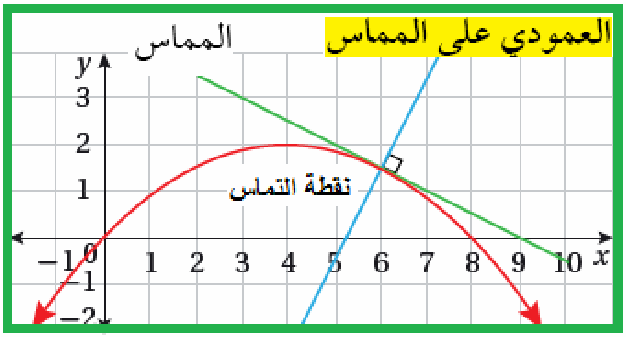
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c	d	a	a	a	d	a	c	c	b

ملخص الجزء الثاني من الدرس الأول ثم اختبار ورقة عمل (2) تطبيقات هندسية

معادلة المستقيم المار بالنقطة (x_1,y_1) $\boxed{y-y_1=m(x-x_1)\quad , m=f'(x_1)}$

ملاحظة : معادلة أي مستقيم تكون على الصورة $(y-y_1)=m(x-x_1)$ ،

الجديد في معادلة المماس أن الميل(m) يساوي **المشتقة الأولى عند نقطة التماس**



إذا توازى مستقيمان : فإن ميل الأول = ميل الثاني

$y=2x-5\Rightarrow y'=2$

$4x+8-2y=0\Rightarrow y=2x+8\Rightarrow y'=2$

$\Rightarrow$ متوازيـان

إذا تعامد مستقيمان : فإن حاصل ضرب ميليهما يساوي (1–)

أو ميل الأول = سالب مقلوب ميل الثاني

$y=3x-1\Rightarrow y'=3\Rightarrow \boxed{m=3}$

$3y+x+2=0$

$\Rightarrow y=-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}\Rightarrow y'=-\frac{1}{3}\Rightarrow \boxed{m=-\frac{1}{3}}$

$\Rightarrow$ متعامـدان

هناك عدة محاور للأسئلة ، منها :

1) طلب إيجاد قيم (x) التي عندها مماس أفقي ، في هذه الحالة نشتق ونساوي بالصفر لإيجاد هذه القيم كما في السؤال (11) من كتاب الطالب والسؤال (6) من كتاب التمارين

$\boxed{f'(x)=0}$ $\Leftarrow$ المماس يوازي المحور x

2) طلب إيجاد قيم (x) التي عندها ميل المماس يساوي (أو لا يساوي) قيمة معينة ، في هذه الحالة: نساوي المشتقة بتلك القيمة ونحل المعادلة الناتجة لإيجاد هذه القيم ، كما في السؤال (26) من كتاب الطالب أو طلب إيجاد الميل عند إحدى قيم (x) : سؤال (11) من كتاب التمارين

ميل المماس يساوي المشتقة الأولى

3) نقطة التماس معلومة أو الإحداثي (x) لها على الأقل ، عندها نستخدم القاعدة $\boxed{y-y_1=f'(x_1)(x-x_1)}$

كما في الأسئلة (9 ، 10 ، 12) من كتاب الطالب ، والأسئلة (5 ، 9 ، 11 ، 12) من كتاب التمارين

4) طلب إيجاد المقطع السيني (x) أو الصادي (y) للمماس أو العمودي كما في الأسئلة (14 ، 15 ، 27) من كتاب الطالب

ملاحظة	لإيجاد المقطع(x) نضع بدلاً من (y) صفر	ولإيجاد المقطع(y) نضع بدلاً من (x) صفر

5) عدم إعطاء نقطة التماس وتقديم معلومة عن المماس :

أ) المماس يوازي المستقيم .... كما في السؤال (10) من كتاب التمارين

ب) المماس يعامد المستقيم .....

ج) المماس يقطع المستقيم أو المنحنى ..... كما في الأسئلة (25 ، 28) من كتاب الطالب

6) طلب إيجاد مساحة مضلع (أو مثلث) أحد أضلاعه مماس أو عمودي على المماس

اختبر نفسك

1) إذا كان $f(x)=e^{x}+x$ فإن معادلة المماس لمنحنى الاقتران f (x) عند x = 0 هي:

$a)\ y=2x-1$ $b)\ y=2x+1$ $c)\ y=1-2x$ $d)\ y=2-x$

---

2) إذا كان $f(x)=\sin x+2x$ فإن معادلة المماس لمنحنى الاقتران f (x) عند x = π هي:

$a)\ y=x-\pi$ $b)\ y=x+\pi$ $c)\ y=x-3\pi$ $d)\ y=2x-2\pi$

---

3) إذا كان f(x) = Lnx ، فإن معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران f (x) عند النقطة (e , 1) هي :

$a)\ y=-ex-2$ $b)\ y=-ex+e^{2}+1$ $c)\ y=-e^{x}$ $d)\ y=\frac{x}{e}$

---

4) إذا كانت النقطة (2 , 4) تقع على منحنى الاقتران f(x) وكانت f '(2) = 8 ، فإن معادلة المماس لمنحنى الاقتران f عند هذه النقطة هي :

$a)\ y=8x-30$ $b)\ y=8x-12$ $c)\ y=12-8x$ $d)\ y=8x$

---

5) إذا كانت معادلة العمودي على المماس لمنحنى f(x) عند النقطة (3 ، 2) هي $y-2=\frac{4}{5}(x-3)$ فإن f '(3) تساوي

a) $\frac{4}{5}$ b) $\frac{5}{4}$ c) $\frac{-4}{5}$ d) $\frac{-5}{4}$

---

6) إذا كان $f(x)=e^{x-1}+Lnx$ ، فإن معادلة المماس لمنحنى f عند النقطة (1 , 1) هي :

$a)\ y=2x$ $b)\ y=2x-1$ $c)\ y=2x-2$ $d)\ y=2x+1$

---

7) إذا كان f(x) = sinx فإن معادلة المماس لمنحنى f(x) عند النقطة (π , 0) تساوي :

a) y = π – x b) y = x – π c) y = π d) y = x + π

---

8) إذا كان $f(x)=e^{x}+\cos x$ ، فإن معادلة المماس لمنحنى f عند نقطة تقاطعه مع المحور(y) هي:

$a)\ y=2x$ $b)\ y=-2x$ $c)\ y=x+2$ $d)\ y=x-1$

---

9) إذا كان $f(x)=\ln\frac{e^{2x}}{x^{4}}+3x$ فإن ميل المماس لمنحنى f عند x = 2 هو :

$a)\ e^{2}$ $b)\ e^{2}+3$ $c)\ 3$ $d)\ 7$

---

10) إذا كان $f(x)=e^{x-6}-x$ ، فإن قيم (x) التي يكون عندها مماس أفقي لمنحنى الاقتران f هي:

a) 5 b) ln6 c) 6 d) 0 , 6

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b	b	b	b	d	b	a	c	c	c

الأستاذ
عبدالقادر الحسنات
078 531 88 77

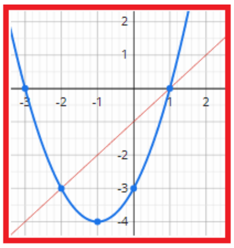
11) جد مساحة المثلث المكون من المماس لمنحنى الاقتران $f(x)=3-x^2$ عند النقطة (1 , 2) والمحورين

الجواب : 4

12) جد معادلتي المماس والعمودي عليه لمنحنى الاقتران $f(x)=x^2+2x-3$

عند نقاط تقاطعه مع المستقيم y = x – 1

الجواب: $\boxed{y=4x-4\ ,\ y=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\ ,\ y=-2x-9\ ,\ y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}$



13) إذا كان $f(x)=Ln(\frac{1}{x})$ ، فجد معادلة المماس والعمودي على المماس عند النقطة $(e,-1)$

$\boxed{y+1=-\frac{1}{e}(x-e)},\boxed{y+1=e(x-e)}$

---

14) إذا كان $y=\frac{1}{x-1},x\neq 1$ ، فجد معادلة المماس والعمودي على المماس عند (x= 2)

$\boxed{y-1=-1(x-2)}\Rightarrow\boxed{y-1=(x-2)}$

---

15) إذا كان $f(x)=2e^x+\sin x$ ، فجد معادلة المماس عند (x = 0)

$\boxed{y-2=3(x-0)}\Rightarrow\boxed{y=3x+2}$

---

16) جد النقاط الواقعة على منحنى $y=x^3+x-2$

والتي يكون المماس عندها موازيا للمستقيم $y=13x+7$

$\boxed{3x^2+1=13\Rightarrow x=\pm 2\Rightarrow(2,8),(-2,-12)}$

---

17) إذا كان $f(x)=e^{x-3}-x$ ، فجد قيم (x) التي يكون للاقتران عندها مماس أفقي

الجواب : x = 3

---

18) أوجد النقاط الواقعة على منحنى $f(x)=x^3-9x-2$ والتي يكون المماس عندها عمودياً على

المستقيم الذي معادلته 3y + x= 6

الجواب : $\boxed{(2,-12),(-2,8)}$

---

19) جد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران $f(x)=x^2+2x-3$

عند نقطة تقاطعه مع المستقيم y = x – 1

$\boxed{y--3=\frac{1}{2}(x--2)}\boxed{y-0=\frac{-1}{4}(x-1)}$

---

20) أوجد معادلة المماس لمنحنى $f(x)=x^3-5x$ عند نقطة (نقاط) تقاطعه مع المستقيم y = 4x

$\boxed{(0,0):y=-5x}\boxed{(3,12):y-12=22(x-3)}\boxed{(-3,-12):y+12=22(x+3)}$

أتدرّبُ وأحلُّ المسائل

إذا كان: $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}e^x$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

9 أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران f عند النقطة $(\pi, \frac{1}{2}e^{\pi})$.

10 أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران f عند النقطة $(\pi, \frac{1}{2}e^{\pi})$.

11 أجد قيمة x التي يكون عندها المماس أفقيًّا لمنحنى الاقتران: $f(x) = e^x - 2x$.

12 اختيار من مُتعدِّد: أيُّ الآتية تُمثِّل معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = \sin x + \cos x$ عندما $x = \pi$؟

a) $y = -x + \pi - 1$ b) $y = x - \pi - 1$ c) $y = x - \pi + 1$ d) $y = x + \pi + 1$

إذا كان الاقتران: $f(x) = \ln x$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

14 أُثبِت أنَّ مماس منحنى الاقتران عند النقطة $(e, 1)$ يمرُّ بنقطة الأصل.

15 أُثبِت أنَّ المقطع x للعمودي على المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة $(e, 1)$ هو $e + \frac{1}{e}$.

مهارات التفكير العليا

25 تبرير: إذا كان الاقتران: $y = e^x - ax$، حيث a عدد حقيقي، فأجد معادلة المماس عند نقطة تقاطع الاقتران مع المحور y، مُبرِّرًا إجابتي.

26 تحدٍّ: أُثبِت عدم وجود مماس ميله 2 للاقتران: $y = 2e^x + 3x + 5x^3$.

تبرير: إذا كان الاقتران: $y = ke^x$، حيث: $k > 0$، وكان منحناه يقطع المحور y عند النقطة P، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

27 أجد نقطة تقاطع مماس منحنى الاقتران عند النقطة P مع المحور x.

28 إذا كان العمودي على المماس عند النقطة P يقطع المحور x عند النقطة $(100, 0)$، فأجد قيمة k.

إذا كان: $f(x) = \ln x^2$، حيث: $x > 0$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

9 أجد معادلة مماس منحنى الاقتران عندما $x = e^2$.

10 أجد الإحداثي x للنقطة التي يكون المماس عندها موازيًا للمستقيم $6x - 2y + 5 = 0$

إذا كان: $f(x) = 2 \sin x - 4 \cos x$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

11 أجد ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عندما $x = 0$.

12 أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عندما $x = \frac{\pi}{2}$.

ملخص الجزء الثالث من الدرس الأول ثم اختبار   ورقة عمل (3)   تطبيقات فيزيائية

هناك ثلاثة مصطلحات : المسافة أو موقع الجسم $s(t)$ ، السرعة velocity والتسارع acceleration

$$\boxed{s(t):s'(t)=v(t)\ \ ,\ \ v'(t)=a(t)}$$

مشتقة المسافة أو الموقع تساوي السرعة ..... ومشتقة السرعة تساوي التسارع

قواعد مهمة : 1) إذا عاد الجسم إلى موقعه الأصلي ، فإن المسافة المقطوعة تكون صفراً ($s(t) = s(0)$)

$\boxed{\text{يعـود الجسـم إلـى موقعـه الأصلـي : } s(t)=s(0)}$ $\boxed{\text{وليـس } s(t)=0}$

2) إذا كانت قيمة $v(t) > 0$ ، فإنَّ الجسم يتحرَّك في الاتجاه الموجب (يمين)

وإذا كانت قيمة $v(t) < 0$ ، فإنَّ الجسم يتحرَّك في الاتجاه السالب (يسار)

وعندما تكون $v(t) = 0$ فإنَّ الجسم يكون في حالة سكون. $\boxed{\text{سـكون لحظـي } \Leftarrow v(t)=0}$

3) الموقع الابتدائي للجسم يعني أن الزمن صفر ($t = 0$)....أي نجد $s(0)$

4) المسافة كمية قياسية (ليست متجهة) ... الموقع كمية متجهة

مثال 1) يُمثِّل الاقتران : $s(t)=t^3-3t^2+5\ ,\ t\geq 0$ موقع جُسَيْم يتحرَّك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني :

1) جد سرعة الجُسَيْم وتسارعه بعد t ثانية

2) جد تسارع الجُسَيْم عندما تنعدم سرعته

3) جد الموقع الابتدائي للجُسَيْم

4) متى يعود الجُسَيْم إلى موقعه الابتدائي؟

5) جد قِيَم t التي يكون عندها الجُسَيْم في حالة سكون لحظي

6) في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجُسَيْم عند t = 4

$$s(t)=t^3-3t^2+5\ \ ,\ \ t\geq 0$$

$$1)\ \ v(t)=3t^2-6t\ \ \ ,\ \ \ a(t)=6t-6$$

$$2)\ v(t)=3t^2-6t=0\Rightarrow \boxed{t=2}\Rightarrow a(2)=6(2)-6=6$$

$$3)\ s(0)=5$$

$$4)\ s(0)=5\Rightarrow s(t)=t^3-3t^2+5=5\Rightarrow t^2(t-3)=0\Rightarrow \boxed{t=3}$$

$$5)\ v(t)=0\Rightarrow 3t^2-6t=0\Rightarrow 3t(t-2)=0\Rightarrow \boxed{t=2}$$

$$6)\ v(4)=3(4)^2-6(4)=24>0\Rightarrow +$$

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

مثال 2) يُمثِّل الاقتران : $s(t)=6t^2-t^3\ ,\ t\geq 0$ موقع جُسَيْم يتحرَّك في مسار مستقيم :

1) متى يعود الجُسَيْم إلى موقعه الابتدائي؟

2) جد سرعة الجسم عندما ينعدم تسارعه

$$s(t)=6t^2-t^3\Rightarrow v(t)=12t-3t^2\Rightarrow a(t)=12-6t$$

$$1)\ s(t)=s(0)=0\Rightarrow 6t^2-t^3=0\Rightarrow t^2(6-t)=0\Rightarrow \boxed{t=6}$$

$$2)\ a(t)=0\Rightarrow 12-6t=0\Rightarrow \boxed{t=2}\Rightarrow v(2)=12(2)-3(2)^2=\boxed{12}$$

اختبر نفسك

1) إذا كان الاقتران : $s(t) = t^2 - 5t + 6$, $t \geq 0$, يُمِّثل موقع جسم يتحَّرك في مسار مستقيم ،

فإن اتجاه حركة الجسم عندما $t = 1$ هو : a) موجب b) سالب c) سكون d) لا شيء مما ذكر

---

2) يتحرك جسم في مسار مستقيم حيث يُعطى موقعه بالاقتران : $s(t) = e^t - 5t$, $t \geq 0$

فإن الموقع الابتدائي للجسم هو : d) 0 c) 1 b) – 4 a) 5

---

3) إذا كان الاقتران : $s(t) = e^t - 3t + 2$, $t \geq 0$, يُمِّثل موقع جسم يتحَّرك في مسار مستقيم ،

فإن تسارع الجسم عندما تنعدم سرعته يساوي : d) 4 c) ln3 b) e^3 a) 3

---

4) إذا كان الاقتران : $s(t) = t^3 - t^2 + t$, $t \geq 0$, يُمِّثل موقع جسم يتحَّرك في مسار مستقيم ،

فإن سرعة الجسم عندما يكون تسارعه (4) يساوي : d) 4 c) 6 b) 0 a) 2

---

5) يتحرك جسم في مسار مستقيم حيث يُعطى موقعه بالاقتران : $s(t) = 6 - \sin t$ ،

فإن موقع الجسم عندما ينعدم تسارعه يساوي : d) π c) 0 b) 4 a) 6

---

6) يتحرك جسم في مسار مستقيم حيث يُعطى موقعه بالاقتران : $s(t) = t^3 - 4t^2 + 4$ ،

فإن الجسم يعود إلى موقعه الابتدائي بعد : d) 8 s c) 4 s b) 1 s a) 2 s

---

7) إذا كان الاقتران $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, $t \geq 0$, ، يُمِّثل موقع جسم يتحَّرك في مسار مستقيم ،

فإن الجسم يعود إلى موقعه الابتدائي بعد : d) 3 s c) 1 s b) 9 s a) 2 s

---

8) إذا كان الاقتران $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - t^2 - 3t$, $t \geq 0$, يُمِّثل موقع جسم يتحَّرك في مسار مستقيم ،

فإن قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي هي :

a) 3 , 1 b) 1 c) 3 d) $2 , \frac{2}{3}$

---

9) إذا كان الاقتران $s(t) = t^3 - 3t^2 + 5$, $t \geq 0$, ، يُمِّثل موقع جسم يتحَّرك في مسار مستقيم ،

فإن الفترة الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه السالب هي :

a) (0 , 2) b) (2 , ∞) c) (0 , 1) d) (1 ,∞)

---

10) يتحرك جسم معلق في زنبرك إلى الأعلى والأسفل ،ويعطى موقعه بالاقتران $S(t) = 4\sin t$ ،

فإن الاقتران الذي يمثل تسارع الجسم عند أي لحظة هو : b) 4cost a) 4sint

d) – 4sint c) – 4cost

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b	c	a	a	a	c	d	c	a	d

11) يُمثِّل الاقتران: $s(t) = 4e^{t} - 8t + 2$, $t \geq 0$, موقع جُسَيْم يتحرَّك في مسار مستقيم،

1) ُحدِّد الموقع الابتدائي للجُسَيْم (6)

2) جد تسارع الجُسَيْم عندما تكون سرعته صفرًا. (8)

---

12) إذا مثل الاقتران $s(t) = 3t^{2} - t^{3}$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم ، فجد

أ) سرعة الجسم المتجهة عندما $t = 1$ (3)

ب) تسارع الجسم عندما $t = 2$ (– 6)

ج) قيم (t) التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي (2)

د) متى يعود الجسم إلى موقعه الأصلي ؟ (3)

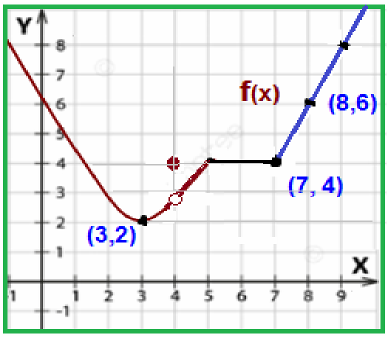
ملخص الدرس الثاني ثم اختبار ��� ورقة عمل (4) ��� مشتقتا الضرب والقسمة

إذا كان الاقتران $f(x)$ والاقتران $g(x)$ قابلين للاشتقاق، فإنَّ: $(fg)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$

إذا كان الاقتران $f(x)$ والاقتران $g(x)$ قابلين للاشتقاق، وكان $g(x) \neq 0$، فإنَّ: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x) \times f'(x) - f(x) \times g'(x)}{(g(x))^2}$

$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f^{(n)}(x)$
$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d^2y}{dx^2}$	$\frac{d^3y}{dx^3}$	$\frac{d^ny}{dx^n}$
y'	y''	y'''	$y^{(n)}$

$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$	$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$
$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$	$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$



*** بالنسبة للمشتقة الأولى لنقطة من خلال الرسم ، هناك عدة احتمالات ، منها :

1) أن تقع النقطة على خط مستقيم : عندها المشتقة = ميل ذلك المستقيم

$$f'(9) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6-4}{8-7} = 2$$

2) أن تقع النقطة على رأس مدبب أو نقطة انفصال : عندها المشتقة = غير موجودة مثل : f '(4) , f '(7) , f '(5)

3) أن تقع النقطة على مستقيم أفقي أو تكون قيمة قصوى (صغرى أو عظمى) :

عندها المشتقة = صفر : f '(3) = 0 , f '(6) = 0

اختبر نفسك

1) إذا كان $f(x) = x e^x$, فإن $f'(0) =$

$a)\ 1 \quad b)\ 0 \quad c)\ e^2 \quad d)\ e$

Hasanat

2) إذا كان $f(x) = \frac{x}{x+1}$, فإن $f'(2) =$

$a)\ \frac{1}{2} \quad b)\ \frac{1}{9} \quad c)\ \frac{5}{9} \quad d)\ \frac{-1}{9}$

3) إذا كان $f(x) = \ln x^2$, فإن $f''(x)$ يساوي :

$a)\ 2\ln x \quad b)\ \frac{-2}{x^2} \quad c)\ \frac{2}{x} \quad d)\ \frac{2}{x^2}$

4) إذا كان $f(x) = \frac{2x-8}{e^x}$, فإن قيم (x) التي عندها مماس أفقي هي:

$a)\ 4 \quad b)\ -2 \quad c)\ 5 \quad d)\ 5,0$

5) إذا كان $f(x)=(x^2-1)(x^2+1)$ فإن $f'(x)$ تساوي :

$a)\ 4x^2 \quad b)\ -4x \quad c)\ 4x \quad d)\ 4x^3$

6) يتحرك جسم في مسار مستقيم حيث يُعطى موقعه بالاقتران : $s(t)=t^2\ \ e^{-t}$ فإن قيمة (t) التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي بعد حركته هي :

a) 2   b) 1   c) 0.5   d) 1.5

***معتمداً المعلومات الآتية ، أجب عن الأسئلة (7 ، 8 ، 9): $f(1)=5, f'(1)=-2, g(1)=2, g'(1)=4$

7) $(f\ g)'(1)$ تساوي:

$a)\ 16 \quad b)-2 \quad c)-24 \quad d)-8$

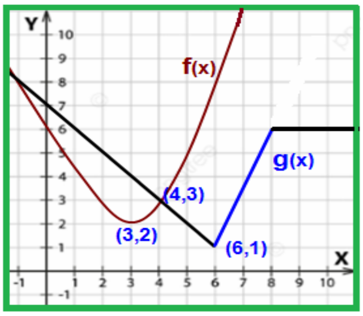
8) $(\frac{f}{g})'(1)$ تساوي:

$a)\ 6 \quad b)\ 4 \quad c)-4 \quad d)-6$

9) $(3f - g)'(1)$ تساوي:

$a)-2 \quad b)-8 \quad c)-10 \quad d)-6$

معتمداً الشكل المجاور والذي يمثل منحنيي الاقترانين ، أجب عن الأسئلة (10 ،11)



10) $(f\ g)'(3)$ تساوي :

$a)\ 4 \quad b)\ 2 \quad c)\ 0 \quad d)\ -2$

11) $(\frac{g}{f})'(3)$ تساوي :

$a)\ \frac{-1}{4} \quad b)\ \frac{1}{2} \quad c)\ 0 \quad d)\ -\frac{1}{2}$

12) إذا كان $f(2)=4,\ g(2)=1, g'(2)=2$ وكانت $(f\ g)'(2)=5$ فإن $f'(2)=$

$a)\ 2 \quad b)\ 13 \quad c)-3 \quad d)-2$

13) إذا كان $f(3)=g'(3)=4, f'(3)=8$ وكانت $(\frac{f}{g})'(3)=1$ فإن $g(3)=$

$a)-4 \quad b)\ 8 \quad c)-4,4 \quad d)\ 4$

14) إذا كان $f(x)=x^3\ \ g(x)$, $g(-1)=-2$, $g'(-1)=2$ فإن $f'(-1)=$

$a)-4 \quad b)-\ 8 \quad c)-6 \quad d)\ 8$

15) إذا كان $f(x)=\frac{1}{x}+x$, فإن $f''(x)$ يساوي :

$a)\ 0 \quad b)\ \frac{2}{x} \quad c)\ \frac{-2}{x^3} \quad d)\ \frac{2}{x^3}$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a	b	b	c	d	a	a	d	c	d	d	c	d	b	d

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

16) إذا كان $f(x)=\cot x$ فأثبت أن $f'(x)=-\csc^2 x$

17) إذا كان عدد السكان في بلدة ما يُعطى بالعلاقة $P(t)=\dfrac{100t^2}{2t+5}$ حيث (t) الزمن بالسنوات ، جد معدل التغير في عدد السكان بعد (10) سنوات

18) جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x)=\dfrac{x^2}{\ln x}$ عند $x=e$

19) إذا كان $f(x)=x^n$, $f''(x)=12x^{n-2}$, فجد قيمة n

20) إذا كان $f(x)=\dfrac{g(x)}{x^2h(x)}$, $f(1)=g'(2)=2$, $g(1)=8$, $f'(1)=5$ فجد قيمة $h'(1)$

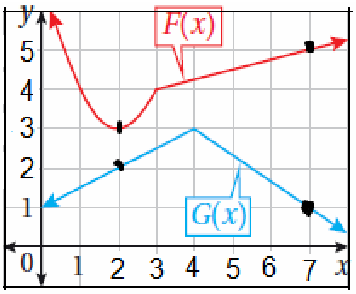
إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق عندما $x=0$، وكان $f(0)=5, f'(0)=-3, g(0)=-1, g'(0)=2$،

فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

⑫ $(fg)'(0)$

⑬ $\left(\frac{f}{g}\right)'(0)$

⑭ $(7f-2fg)'(0)$



يُبيِّن الشكل المجاور منحنيي الاقترانين: $F(x)$، و $G(x)$.

إذا كان: $P(x)=F(x)G(x)$، وكان: $Q(x)=\dfrac{F(x)}{G(x)}$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

㉜ $P'(2)$

㉝ $Q'(7)$

أجد إحداثيي النقطة (النقاط) التي يكون عندها لمنحنى كل اقتران ممّا يأتي مماس أفقي:

⑫ $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2}$

⑬ $h(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$

⑭ $g(x)=\dfrac{8(x-2)}{e^x}$

يُمثِّل الاقتران: $v(t)=\dfrac{10}{2t+15}, t\geq 0$ سرعة سيّارة بدأت الحركة في مسار مستقيم، حيث تقاس v بالقدَم لكل ثانية:

⑲ أجد تسارع السيّارة عندما $t=5$.

⑳ أجد تسارع السيّارة عندما $t=20$.

㉑ يعطى طول مستطيل بالمقدار $6t+5$، ويعطى عرضه بالمقدار $\sqrt{t}$، حيث t الزمن بالثواني، والأبعاد بالسنتيمترات.

أجد مُعدَّل تغيُّر مساحة المستطيل بالنسبة إلى الزمن.

ملخص الجزء الأول من الدرس الثالث ثم اختبار **ورقة عمل (5)** **قاعدة السلسلة ونتائجها**

$$y=f(u),u=g(t),t=h(x)\Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dt}\times\frac{dt}{dx}}$$

$$\boxed{y\rightarrow u\rightarrow t\rightarrow x}$$

$$f(x)=(goh)(x)=g(h(x))\Rightarrow \boxed{f'(x)=(goh)'(x)=g'(h(x))\times h'(x)}$$

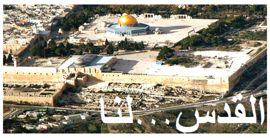
بشرط قابلية الاشتقاق لكل من $h(x),g(x)$

مشتقة الاقتران المُركَّب f(g(x)) هي : حاصل ضرب مشتقة الاقتران الخارجي f عند الاقتران الداخلي g(x) في مشتقة الاقتران الداخلي g(x)

ملخص نتائج قاعدة السلسلة

	من نتائج قاعدة السلسلة	Abdulkadir Hasanat 078 531 88 77 f(x)=sin (3x−2) ← الزاوية
1	$\frac{d}{dx}\left(\sin g(x)\right)=\cos\left(g(x)\right)\times g'(x)$	مشتقة الاقتران المثلثي : نضرب في مشتقة الزاوية
2	$\frac{d}{dx}\left(e^{(g(x))}\right)=e^{g(x)}\times g'(x)$	مشتقة الاقتران الأسي : نضرب في مشتقة القوة
3	$\frac{d}{dx}\left(\ln g(x)\right)=\frac{g'(x)}{g(x)}$	مشتقة الاقتران اللوغاريتمي : $\frac{\text{مشتقة ما بداخل اللوغاريتم}}{\text{ما بداخل الوغاريتم}}$
4	$\frac{d}{dx}\left(g(x)\right)^{n}=n\left(g(x)\right)^{n-1}\times g'(x)$	مشتقة القوس المرفوع لقوة : نضرب في مشتقة ما بداخل القوس
5	$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{g(x)}\right)=\frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$	مشتقة الجذر التربيعي : $\frac{\text{مشتقة ما بداخل الجذر}}{2\times\text{الجذر نفسه}}$

أخطاء شائعة



$f(x)=\sin(x^2)\Rightarrow f'(x)=\cos(2x)$..... خطأ

$f(x)=\sin(x^2)\Rightarrow f'(x)=\cos(x^2)(2x)$ ... صح

الأستاذ عبدالقادر الحسنات 078 531 88 77

$f(x)=\sin^2 x\Rightarrow f'(x)=2\cos x$ ..... خطأ

$f(x)=\sin^2 x=(\sin x)^2\Rightarrow f'(x)=2(\sin x)(\cos x)$ ... صح

$f(x)=Ln(x^2+9)\Rightarrow f'(x)=Ln\frac{2x}{x^2+9}$ خطأ

$f(x)=Ln(x^2+9)\Rightarrow f'(x)=\frac{2x}{x^2+9}$ صح

اختبر نفسك

السـؤال الأول

1) $f(x)=x+\sin x \quad , \quad g(x)=x^2-1 \Rightarrow (fog)'(1)=$ a) 4 b) −4 c) 0 d) 2

2) $f(x)=Lnx \quad , \quad g(x)=x^2 \Rightarrow (fog)'(x)=$ a) x b) $\frac{2}{x}$ c) $\frac{1}{x}$ d) $\mathrm{Ln}\frac{1}{x}$

3) $f(x)=x^3+1 \, , \, g(2)=1 \, , g'(2)=-4 \Rightarrow (fog)'(2)=$ a) −8 b) 12 c) −12 d) 4

4) $f(x)=\sin 3x^2 \Rightarrow f'(x)=?$

a) $-6x\cos 3x^2$ b) $6x^2\cos 3x^2$ c) $2\sin 3 \;\; \cos 6x$ d) $6x\cos 3x^2$

5) $f(x)=4\cos(Lnx) \Rightarrow f'(x)=?$

a) $-4\sin(\mathrm{Lnx})$ b) $4-\sin(\frac{1}{x})$ c) $4-\frac{1}{x}\sin(\mathrm{Lnx})$ d) $-\frac{4}{x}\sin(\mathrm{Lnx})$

6) $f(x)=Ln(\tan x) \Rightarrow f'(x)=?$

a) $\mathrm{Ln}\frac{\sec^2 x}{\tan x}$ b) $\frac{\sec x}{\tan x}$ c) $\sec^2(\frac{1}{x})$ d) $\frac{\sec^2 x}{\tan x}$

7) $f(x)=2\sin^3 x \Rightarrow f'(x)=?$

a) $3\sin x \;\sin 2x$ b) $6\sin x \;\cos x$ c) $6\sin x$ d) $6\sin^2 x$

8) $f(x)=\cos x \; e^{\sin x} \Rightarrow f'(\pi)=$ a) 1 b) −1 c) −2 d) 0

9) $f(x)=\sqrt{1-x^3} \Rightarrow f'(-2)=$ a) −24 b) −2 c) 2 d) −12

10) $f(x)=e^{x^2\cos(x-1)} \Rightarrow f'(1)=$ a) 1 b) −1 c) 2e d) e

11) $f(x)=(x\,g(x))^2 \quad , \quad g'(-1)=-2 \quad , g(-1)=4 \Rightarrow f'(-1)=?$

a) −16 b) −8 c) 48 d) −48

12) $f(x)=(\sin 2x-2)^4 \Rightarrow f'(0)=$ a) −64 b) 32 c) −32 d) 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a	b	c	d	d	d	a	a	b	c	d	a

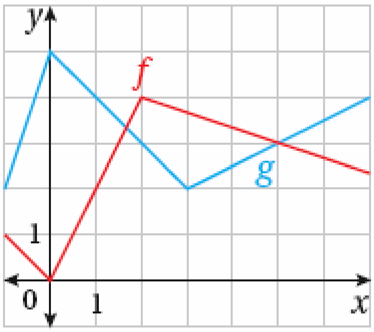
السؤال الثاني : جد المشتقة الأولى لكل مما يأتي :

1) $f(x)=x^3e^{x^2}$ 2) $f(x)=\cot(3-x^2)$ 3) $f(x)=e^{\sin 2x}+\sin e^{4x}$

4) $f(x)=Ln(\sin^3 x)$ 5) $f(x)=(Ln(\sin x))^3$ 6) $f(x)=Ln(\sin(x^3))$

السؤال الثالث : أثبت أن : $\boxed{f(x)=Ln(\tan x)\Rightarrow f'(x)=2\csc 2x}$

㉓ إذا كان: $A(x)=f(g(x))$، وكان: $f(-2)=8, f'(-2)=4, f'(5)=3, g(5)=-2, g'(5)=6$، فأجـد $A'(5)$.



يُبيِّن الشكل المجاور منحنيي الاقترانين $f(x)$ و $g(x)$. إذا كان: $h(x)=f(g(x))$، وكان: $p(x)=g(f(x))$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

㊵ $h'(1)$

㊶ $p'(1)$

أجد $(f\circ g)'(x)$ عند قيمة x المعطاة في كلٍّ ممّا يأتي:

㉘ $f(u)=u^5+1,\ u=g(x)=\sqrt{x},\ x=1$

㉙ $f(u)=u+\frac{1}{\cos^2 u},\ u=g(x)=\pi x,\ x=\frac{1}{4}$

جد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

① $f(x)=e^{4x+2}$

⑥ $f(x)=x^2\tan\frac{1}{x}$

⑨ $f(x)=(\ln x)^4\quad 3x-4)$

⑦ $f(x)=3x-5\cos(\pi x)^2$

⑧ $f(x)=\ln\left(\frac{1+e^x}{1-e^x}\right)$

⑪ $f(x)=\sqrt[5]{x^2+8x}$

⑩ $f(x)=\sin\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{\sin x}$

⑮ $f(x)=\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2$

⑱ $f(x)=\tan^4(\sec(\cos x))$

إذا كان الاقتران: $f(x)=3\sin x-\sin^3 x$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

⑯ أُثبِت أنَّ $f'(x)=3\cos^3 x$.

⑰ أجد $f''(x)$.

㉑ إذا كان: $h(x)=\sqrt{4+3f(x)}$، وكان: $f(1)=7, f'(1)=4$، فأجد $h'(1)$.

㉒ إذا كان الاقتران: $f(x)=e^{2x}+e^{-2x}$، فأُثبِت أنَّ $f''(x)=4f(x)$.

㉓ إذا كان: $f(x)=\sin 4x+\cos 4x$، فأُثبِت أنَّ $f''(x)+16f(x)=0$.

ملخص الجزء الثاني من الدرس الثالث ثم اختبار

ورقة عمل (6)

قاعدة السلسلة ونتائجها

نظرية إذا كان a عددًا حقيقيًّا موجبًا، و $a \neq 1$، وكان $g(x)$ اقترانًا قابلًا للاشتقاق، فإنَّ:

$$\frac{d}{dx}(a^{g(x)}) = \ln a \times a^{g(x)} \times g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(a^{x}) = a^{x} \times \ln a$$

$$a^x = a^{Ln(a)^x} \Rightarrow a^x = a^{(x)Lna}$$

عند اشتقاق اقتران أسي غير طبيعي (أساسه يختلف عن e) : نضرب في Ln(الأساس)

$$\frac{d}{dx}(7^x) = 7^x Ln7$$

نظرية إذا كان a عددًا حقيقيًّا موجبًا، و $a \neq 1$، وكان $g(x)$ اقترانًا قابلًا للاشتقاق، فإنَّ:

$$\frac{d}{dx}(\log_a g(x)) = \frac{g'(x)}{(\ln a)g(x)}$$

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

عند اشتقاق اقتران لوغاريتمي غير طبيعي (أساسه يختلف عن e):نقسم على Ln(الأساس)

$$\frac{d}{dx}(Log_7 x) = \frac{1}{x\,Ln7}$$

مشتقة المعادلات الوسيطية

إذا كان h و g اقترانين قابلين للاشتقاق عند t، وكان $x = h(t)$، و $y = g(t)$، فإنَّ: $\frac{dx}{dt} \neq 0$ ، $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

السؤال الأول :

1) $f(x) = 5^{x+1} \Rightarrow f'(x) =$

a) 5^{x+1} b) $5^{x+1} Ln5$ c) $Ln5^{x+1}$ d) $(x+1)5^x$

2) $f(x) = \pi^{2x} \Rightarrow f'(x) =$

a) $(2Ln\pi)\pi^{2x}$ b) $(Ln\pi)\pi^{2x}$ c) $(2Ln\pi)\pi^{x}$ d) $2x\pi^x$

3) $f(x) = 4^x \Rightarrow f'(x) =$

a) 4^x b) $4x - 1$ c) $(2Ln2)4^x$ d) $Ln(4^x)$

$$\boxed{3Ln2 = Ln2^3 = Ln8}$$

4) $f(x) = e^{3x} + 3^{2x} \Rightarrow f'(0) =$

a) 3+Ln9 b) 3+Ln3 c) 4 d) 1+2Ln3

5) $f(x) = 7^{-x} \Rightarrow f'(x) =$

a) $7^{-x} Ln7$ b) $7^{-x} - Ln7$ c) -7 d) $-7^{-x} Ln7$

$$\boxed{Ln6 = Ln(2\times3) = Ln2 + Ln3}$$

6) $f(x) = 4^{x^2-3x} \Rightarrow f'(0) =$

a) $Ln4$ b) $3Ln4$ c) $-3Ln4$ d) $Ln(64)$

7) $f(x)=Log_3(x^2+4)\Rightarrow f'(x)=$

$a)\ \dfrac{2x}{x^2+4}\qquad b)\ \dfrac{2x\ Ln3}{x^2+4}\qquad c)\ \dfrac{2x}{(x^2+4)Ln3}\qquad d)\ \dfrac{2x}{(x^2+4)Log_3x}$

8) $f(x)=Log_2x\Rightarrow f'(x)=\quad a)\ \dfrac{1}{xLn2}\qquad b)\ \dfrac{1}{x}\qquad c)\ \dfrac{1}{2Lnx}\qquad d)\ \dfrac{Ln2}{x}$

9) $f(x)=Ln9\times Log_3x\Rightarrow f'(1)=\quad a)\ 2\qquad b)\ 3\qquad c)\ Ln3\qquad d)\ Ln9$

10) معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x) = 2^x$ عند $x = 1$ هي :

$a)\ y=xLn4-Ln4+2\qquad b)\ y=xLn4-Ln4-2$

$c)\ y=xLn4-Ln4+1\qquad d)\ y=2x-2$

11) $x=\sin^2\theta\ ,\ y=1-2\cos\theta\ ,\ 0\le\theta\le2\pi\Rightarrow\dfrac{dy}{dx}=$

$a)\ \csc\theta\qquad b)\ \sec\theta\qquad c)-sec\theta\qquad d)\ 1$

12) معادلة المماس لمنحنى العلاقة الوسيطية $x = 3t + 2$, $y = 3t^2 – 1$ عند $t = 1$ هي :

$a)\ y=2x-10\qquad b)\ y=2x-8\qquad c)\ y=2x-5\qquad d)\ y=2x$

13) معادلة المماس لمنحنى العلاقة الوسيطية $x = sint$, $y = cost$ عند $t=\dfrac{\pi}{4}$ هي :

$a)\ y=\sqrt{2}+x\qquad b)\ y=\sqrt{2}-x\qquad c)\ y=\sqrt{2}x\qquad d)\ y=-x$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
b	a	c	a	d	c	c	a	a	a	b	b	b

السؤال الثاني : جد المشتقة الأولى لكل مما يأتي :

1) $f(x)=Log\ \dfrac{3^x-1}{x+1}$ 2) $f(x)=x^2Log_2(\sin x)$ 3) $f(x)=3^{Log_2x}$

السؤال الثالث : جد المشتقة الأولى لكل من المعادلات الوسيطية الآتية عند القيم المبينة إزاء كل منها :

1) $x = t - \cos t \quad , \quad y = 2 - \sin t \quad , \quad t = \frac{\pi}{3}$

2) $x = \frac{1}{2}t^{2} - 1 \quad , \quad y = t^{3} - 2t \quad , \quad t = 1$

3) $x = 2^{t+1} \quad , \quad y = Log_{2}(t^{2} + 1) \quad , \quad t = 0$

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

أتحقَّق من فهمي أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = \log \sec x$

b) $f(x) = \log_{8}(x^{2} + 3x)$

أجد معادلة المماس لكل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

㉑ $f(x) = 2^{x}, x = 0$

أتحقَّق من فهمي أجد معادلة مماس منحنى المعادلة الوسيطية الآتية عندما $t = \frac{\pi}{4}$:

$x = \sec t \ , \quad y = \tan t \ , \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل معادلة وسيطية ممّا يأتي عند النقطة المُحدَّدة بقيمة t المعطاة:

㉟ $x = t + 2, y = t^{2} - 1, t = 1$

㊲ $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t , t = \frac{\pi}{3}$

⑱ يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية: $x = a\cos t, y = b\sin t$، حيث: $0 \le t \le 2\pi$.
أجد المقطع y لمماس المنحنى عندما $t = \frac{\pi}{4}$ بدلالة a و b.

ملخص الدرس الرابع ثم اختبار ورقة عمل (7) الاشتقاق الضمني

العلاقة الضمنية هي التي لا يمكن (أو يصعب) كتابتها على الصورة $y = f(x)$ ، مثل : $x^2 + y^2 - 3xy = 0$ ، $x = \sin^2 y$

خطوات الحل : 1) اشتقاق كل حد على حدة ، وعند اشتقاق (y) نضرب بـ ($\frac{dy}{dx}$) أو y'

2) تجميع الحدود المحتوية على (y') على الطرف الأيسر

3) إخراج (y') عامل مشترك ثم القسمة على معاملها الناتج لتصبح موضوعا للقانون

$\sin(x+y)=x \Rightarrow \cos(x+y)\times y'=1$ ...خطأ

$\sin(x+y)=x \Rightarrow \cos(x+y)(1+y')=1$ ...صح

$y^2+3y = 4x^2 \Rightarrow \boxed{2y'}+\boxed{3} = 8x$ ...خطأ

$y^2+3y = 4x^2 \Rightarrow 2y\ y'+3y' = 8x$ ...صح

في الاشتقاق للمرة الثانية : عندما نشتق (y) نضربها بـ ($\frac{dy}{dx}$) أيضا ، ويمكن تعويض قيمتها من المشتقة الأولى

$$\boxed{y = \sin y \Rightarrow y' = \cos y\ y' \Rightarrow y'' = (-\sin y\ y')(y')+(y'')(\cos y)}$$

$(y')(y') = y''$ ... خطأ

$(y')(y') = (y')^2$ ...صح

المشتقة الثانية للمعادلات الوسيطية

عندما نشتق المقدار ($\frac{dy}{dx}$) بالنسبة للمتغير (t) نضرب هذه المشتقة بالمقدار($\frac{dt}{dx}$) أو نقسم على ($\frac{dx}{dt}$)

$\frac{dy}{dx} = 2t \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 2$..... خطأ

$$x(t) = 3t^2\ ,\ y(t) = 4t^3 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{12t^2}{6t} = 2t = Q(t)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(Q(t)) = \frac{\frac{dQ}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2}{6t} = \frac{1}{3t}$$ ...صح

الاشتقاق اللوغاريتمي : وهو نوعان : إجباري و اختياري

$y = x^x \Rightarrow y' = x\ (x)^{x-1}$ (خطأ)

إذا كانت القوة متغيرة ، فيجب استعمال الاشتقاق اللوغاريتمي : $y = x^{2x}\ , f(x) = (\sin x)^{\sqrt{x}}\ , y = (3x^2+1)^{x-1}$

أما إذا كان اشتقاق الاقتران صعباً بسبب الجذور أو القوى ، فيمكن تبسيطه بالاشتقاق اللوغاريتمي (اختياري)

$$y = \sqrt{(x-2)^3(x)^5 \sin 4x}\ , f(x) = \frac{3x^2 \sin 2x}{(x+1)^2+5}$$

وتتلخص الطريقة بما يأتي :

نأخذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي المعادلة (y= f(x))

ثم نشتق ضمنيا بالنسبة لـ(x) (ويشترط أن يكون الاقتران موجباً)

$\frac{d}{dx}(a^b) = 0$

$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$

$\frac{d}{dx}(x^x) = x^x(1+\ln x)$

Abdulkadir Hasanat

اختبر نفسك ... الاشتقاق الضمني

1) $x = \sin y \Rightarrow y' =$

$a)\ \cos y \qquad b)\ \sec y \qquad c)\ \sec x \qquad d)\ \csc y$

---

2) $x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow y' =$

$a)\ \dfrac{x}{y} \qquad b)\ -\dfrac{x}{y} \qquad c)\ -\dfrac{y}{x} \qquad d)\ \dfrac{y}{x}$

---

3) $\sin x + \cos y = 5x - 2y + 1 \Rightarrow \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(0,0)} =$

$a)\ 2 \qquad b)\ -2 \qquad c)\ -4 \qquad d)\ 5$

---

4) $xy + x^2y^2 = 6 \Rightarrow \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(1,2)} =$

$a)\ 2 \qquad b)\ -6 \qquad c)\ -2 \qquad d)\ 5$

---

5) $\tan y = x + y \Rightarrow y' =$

$a)\ \cot y \qquad b)\ \tan^2 y \qquad c)\ \sec^2 y \qquad d)\ \cot^2 y$

---

6) $e^y = e^x + 1 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} =$

$a)\ e^y \qquad b)\ e^x \qquad c)\ e^{x+y} \qquad d)\ e^{x-y}$

---

7) $Lnx + Lny = x + y \Rightarrow y' =$

$a)\ \dfrac{xy - y}{x - xy} \qquad b)\ \dfrac{xy + y}{x - xy} \qquad c)\ \dfrac{x}{y} \qquad d)\ \dfrac{xy + y}{x + xy}$

---

8) $xe^y - ye^x = 0 \Rightarrow y' =$

$a)\ \dfrac{ye^x - e^y}{xe^y - e^x} \qquad b)\ \dfrac{ye^x + e^y}{xe^y + e^x} \qquad c)\ \dfrac{y - 1}{x - 1} \qquad d)\ \dfrac{ye^x - e^y}{xe^y + e^x}$

---

9) $x^2 - xy + y^2 = 7\ ,\ y > 0 \Rightarrow \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=2} =$

$a)\ -\dfrac{1}{4} \qquad b)\ -\dfrac{5}{4} \qquad c)\ \dfrac{5}{4} \qquad d)\ \dfrac{7}{8}$

---

10) $y^2 + y = (Lnx)^3 + 1 \Rightarrow \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(e,1)} = \quad a)\ e \qquad b)\ 3 \qquad c)\ 3\,e^2 \qquad d)\ e^{-1}$

11) $x=\cos y \Rightarrow y''=$

$a)\ \cot y\ \csc^2 y \qquad b)\ -\cot y\ \csc^2 y \qquad c)\ -\sin y\ \cos y \qquad d)\ -\cos^2 y$

---

12) $x^2+y^2=1 \Rightarrow y''=$

$a)\ \dfrac{1}{y^2} \qquad b)\ -\dfrac{x^2}{y^2} \qquad c)\ -\dfrac{1}{y^2} \qquad d)\ -y^2-x^2$

Hasanat

Hasanat

---

13) $x-y=\cos y \Rightarrow y''=$

$a)\ \dfrac{\cos y}{1-\sin y} \qquad b)\ \dfrac{\cos y}{(\sin y-1)^3} \qquad c)\ \dfrac{\cos y}{(1-\sin y)^3} \qquad d)\ \dfrac{\sin y}{(1-\cos y)^3}$

---

14) $x(t)=t^2\ ,\ y(t)=4t^5 \Rightarrow \dfrac{d^2y}{dx^2}=\ a)\ 15t \qquad b)\ 10t^3 \qquad c)\ 30t^2 \qquad d)\ 60t^3$

---

15) $x(t)=\sin t\ ,\ y(t)=\cos t \Rightarrow \left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{3}}=\ a)\ 8 \qquad b)\ -8 \qquad c)\ -4 \qquad d)\ \dfrac{-8}{3\sqrt{3}}$

---

16) $x(t)=\cos t\ ,\ y(t)=\sin t \Rightarrow \dfrac{d^2y}{dx^2}=\ a)\ -\csc^2 t \qquad b)\ \sec^3 t \qquad c)\ \csc^3 t \qquad d)\ -\csc^3 t$

---

17) $x(t)=2t\ ,\ y(t)=6e^{t^2} \Rightarrow \left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=2}=\ a)\ 9 \qquad b)\ 9e \qquad c)\ 6e \qquad d)\ 27e^2$

---

18) $y=x^x \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=\ a)\ x(x^{x-1}) \qquad b)\ (x)(x) \qquad c)\ x^x Lnx+x^x \qquad d)\ Lnx+1$

---

19) $y=(x^2)^x \Rightarrow \dfrac{y'}{y}=$

$a)\ Lnx^2+2 \qquad b)\ 2Lnx+x \qquad c)\ x^{2x}Lnx^2+2 \qquad d)\ 2x^x$

---

20) $y^y=2^x \Rightarrow y'=$

$a)\ \dfrac{2^x Ln2}{Lny+1} \qquad b)\ \dfrac{2^x Ln2}{y} \qquad c)\ 2^x y^{y-1} \qquad d)\ \dfrac{Ln2}{Lny+1}$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b	b	a	c	d	d	a	a	a	d

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح

الأستاذ عبدالقادر الحسنات

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
b	c	c	a	b	d	b	c	a	d

1) العلاقة الضمنية ومشتقتها

أتحقّق من فهمي 58 أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

a) $x^2+y^2=13$

b) $2x+5y^2=\sin y$

2) ميل المماس ومعادلته لمنحنى علاقة ضمنية :

أتحقّق من فهمي 61 a) أجد ميل مماس منحنى العلاقة: $y^2=\ln x$ عند النقطة $(e, 1)$.

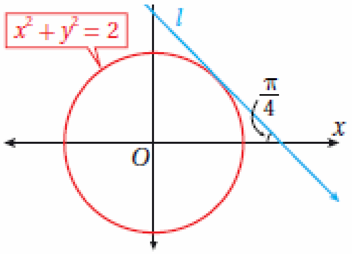
أتحقّق من فهمي 63 أجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة: $x^3+y^3-3xy=17$ عند النقطة $(2, 3)$

㉕ أُثبت أنَّ لمنحنى العلاقة: $3x^2+2xy+y^2=6$ مماسين أفقيين، ثم أجد إحداثيي نقطتي التماس.

㉖ أجد إحداثيي نقطة على المنحنى: $x+y^2=1$، بحيث يكون عندها مماس المنحنى موازيًا للمستقيم: $x+2y=0$.

㉗ أجد إحداثيي نقطة (نقاط) على المنحنى: $y^3=x^2$، بحيث يكون عندها مماس المنحنى عموديًّا على المستقيم: $y+3x-5=0$، حيث: $y\neq 0$.

㊶ يُبيِّن الشكل المجاور منحنى العلاقة: $x^2+y^2=2$، والمستقيم l الذي يُمثِّل مماسًّا لمنحنى العلاقة في الربع الأوَّل. أجد معادلة المستقيم l.



3) المشتقة الثانية للعلاقات الضمنية

أتحقّق من فهمي 64 إذا كان: $xy+y^2=2x$، فأجد $\frac{d^2y}{dx^2}$

أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكلٍّ ممّا يأتي: ⑬ $y^2=x^3$ ⑫ $x^2+y^2=8$ ⑪ $x^2y-4x=5$

4) المشتقة الثانية للمعادلات الوسيطية

أتحقّق من فهمي أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ للمعادلة الوسيطية الآتية عندما $t=2$

$$x=3t^2+1 \quad , \quad y=t^3-2t^2$$

أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكل معادلة وسيطية ممّا يأتي عند قيمة t المعطاة:

㊳ $x=e^{-t},\ y=t^3+t+1,\ t=0$

㊲ $x=\sin t,\ y=\cos t,\ t=\frac{\pi}{4}$

5) الاشتقاق اللوغاريتمي :

أتحقّق من فهمي 67 أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي:

b) $y=\sqrt{\frac{x-1}{x^4+1}}$

a) $y=x^{\sqrt{x}},\ x>0$

⑭ أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران: $y=x^{x^2}$ عندما $x=2$.

⑯ أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران: $y=x(\ln x)^x$ عندما $x=e$.

أسئلة الوزارة على وحدة التفاضل

من أسئلة الوزارة 2023 / العلمي / وحدة التفاضل

1) إذا كان: $f(x) = e^{\sqrt[3]{x}}$ ، فإنّ $f'(x)$ هي:

a) $2\sqrt[3]{x}e^{\sqrt[3]{x}}$ b) $\frac{1}{2\sqrt[3]{x}}e^{\sqrt[3]{x}}$ c) $3\sqrt[3]{x^2}e^{\sqrt[3]{x}}$ [✓ d)] $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}e^{\sqrt[3]{x}}$

2) إذا كان: $f(x) = (x-1)\cos x$ ، فإنّ $f'(x)$ هي:

[✓ a)] $\cos x + (1-x)\sin x$ c) $\cos x\,(1-x) + \sin x$

b) $\cos x\,(x-1) + \sin x$ d) $\cos x + (x-1)\sin x$

3) يمثّل الاقتران: $s(t) = t^3 - \frac{9}{2}t^2 + 6t \;,\; t \geq 0$ موقع جسم يتحرّك في مسار مستقيم، حيثُ s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني. ما قيم t بالثواني التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي؟

a) $1\,,\,\frac{3}{2}$ [✓ b)] $1\,,2$ c) $\frac{3}{2}\,,2$ d) $1\,,\,3$

4) إذا كان: $y = \frac{\sqrt{2}}{\sin x}$ ، فإنّ $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{4}}$ هي:

a) $\sqrt{2}$ b) 2 c) $-\sqrt{2}$ [✓ d)] -2

5) إذا كان: $x \neq 0$ ، $f'(x) = \frac{2(x^3-1)}{x^3}$ ، فإنّ $f^{(3)}(x)$ هي:

a) $-120x^6$ b) $\frac{6}{x^4}$ c) $-24x^5$ [✓ d)] $-\frac{24}{x^5}$

6) إذا كان: $x > 0$ ، $f(x) = \sqrt{\ln x}$ ، فإنّ $f'(x)$ هي:

a) $\frac{2f(x)}{x}$ b) $\frac{x}{f(x)}$ [✓ c)] $\frac{1}{2xf(x)}$ d) $\frac{x}{2f(x)}$

7) إذا كان: $f(x) = 3^{(x^2+1)}$ ، فإنّ قيمة x التي يكون للاقتران عندها مماس أفقي هي:

[✓ a)] 0 b) 1 c) 2 d) 3

8) إذا كان: $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ ، $x = \tan^2 t \;, y = \sec^2 t$ ، فإنّ مشتقة المعادلة الوسيطية هي:

a) $\tan t$ b) -1 c) $\tan t \sec t$ [✓ d)] 1

9) إذا كان: $y^2 = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}e^{\ln x}\right)$ ، فإنّ ميل المماس لمنحنى العلاقة y عند النقطة $(1\,,1)$ هو:

a) $-\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{6}$ [✓ c)] $-\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$ d) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$

10) إذا كان: $x > 0$ ، $y = x^{x^2}$ ، فإنّ $\frac{d}{dx}(\ln y)$ هي:

a) $x(1 - \ln x^2)$ [✓ c)] $x(1 + \ln x^2)$

b) $x(1 + (\ln x)^2)$ d) $x(1 - (\ln x)^2)$

a) ابحث قابلية الاقتران: $f(x) = (2x-6)^{\frac{1}{3}} + 4$ للاشتقاق عندما $x = 3$

(استعمل التعريف العام للمشتقة لبحث قابلية الاشتقاق) (12 علامة)

تم حذفه

b) جد مشتقة الاقتران: $f(x) = \left(\cot\left(\tan^2\sqrt{2x^3+1}\right)\right)^5$ (10 علامات)

a) إذا كان: $3y^2 = 4x^2 + xy$ ، فأثبت أنّ: $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(-a\,,a)} = -1$ ، حيث a عدد حقيقي لا يساوي الصفر.

(8 علامات)

b) جد $\frac{d^2y}{dx^2}$ للمعادلة الوسيطية الآتية عندما $t=1$:

$$x = t^3 - 3t^2 + 1 \quad , \quad y = t^2 + 2$$

(10 علامات)

من أسئلة الوزارة 2023 تكميلي / العلمي / وحدة التفاضل

1) إذا كان: $f(x) = e^2 - e^{-x}$ ، فإنّ $f'(1)$ ، هي:

a) $2e + \frac{1}{e}$ b) $2e - \frac{1}{e}$ ▼ $\frac{1}{e}$ d) $-\frac{1}{e}$

2) إذا كان: $f(x) = \sin\frac{x}{2} + \frac{\cos x}{2}$ ، فإنّ $f'(2\pi)$ ، هي:

a) 0 b) $\frac{1}{2}$ ▼ $-\frac{1}{2}$ d) -1

3) إذا كان الاقتران: $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 5t^2 + 9t + 2 \; , \; t \geq 0$ يمثّل موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني. فإنّ تسارع هذا الجسم عندما يكون في حالة سكون لحظي لأول مرة بعد انطلاقه، هو:

▼ -8 m/s^2 b) 8 m/s^2 c) -16 m/s^2 d) 16 m/s^2

4) إذا كان: $f(x) = \frac{-1}{6x-x^2}$ ، فإنّ $f'(2)$ ، هي:

a) $-\frac{1}{4}$ b) $-\frac{1}{32}$ c) $\frac{1}{4}$ ▼ $\frac{1}{32}$

5) إذا كان: $f(x) = \frac{x^2-4}{2x}$ ، فإنّ $f''(-1)$ ، هي:

▼ 4 b) -4 c) $\frac{5}{2}$ d) $-\frac{3}{2}$

6) إذا كان: $f(x) = (\log_e x)^5$ ، فإنّ $f'(x)$ ، هي:

a) $\frac{5\log_e x}{x}$ ▼ $\frac{5(\log_e x)^4}{x}$

c) $\frac{5(\log_e x)^4}{x\ln x}$ d) $\frac{5\log_e x}{x\ln x}$

7) إذا كان: $f(x) = 7^{(x+1)^2}$ ، فإنّ للاقتران f مماسًا أفقيًا عندما x تساوي:

a) 7 b) 1 c) -2 ▼ -1

8) إذا كان: $5y = \log(x - x^3)$ ، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

a) $\frac{1-3x^2}{(x-x^3)\ln 10}$ b) $\frac{1-3x^2}{5(x-x^3)}$

▼ $\frac{1-3x^2}{5(x-x^3)\ln 10}$ d) $\frac{1-3x^2}{x-x^3}$

9) ميل المماس لمنحنى العلاقة: $(x-3)(y+2)=5$ عند النقطة $(4,3)$ ، هو:

[✓ -5] b) 5 c) $-\frac{1}{5}$ d) $\frac{1}{5}$

10) إذا كان: $x>0$, $y=x^{2x}$ ، فإنّ $\frac{d}{dx}(\ln y)$ ، هي:

a) $1+\ln x$ [✓ $2(1+\ln x)$]

c) $2(x+\ln x)$ d) $2x^{2x}(1+\ln x)$

السؤال الثاني: (22 علامة)

a) ابحث قابلية الاقتران: $f(x)=(2x-4)^{\frac{1}{3}}+6$ للاشتقاق عندما $x=2$

تم حذفه

(استعمل التعريف العام للمشتقة لبحث قابلية الاشتقاق) (12 علامة)

b) جد ميل العمودي على المماس لمنحنى الاقتران: $f(x)=\left(\frac{x^2+x}{x^2+1}\right)^5$ ، عندما $x=1$ (10 علامات)

السؤال الثالث: (28 علامة)

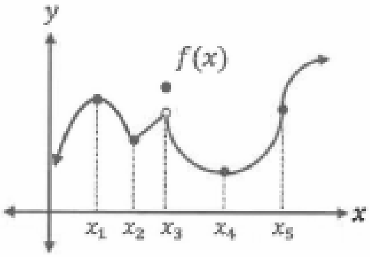
a) إذا كانت B هي نقطة تقاطع منحنى العلاقة: $x^3+4xy+y^3=0$ مع المستقيم: $y=x$ في الربع الثالث من المستوى الإحداثي، وكان مماس منحنى العلاقة عند النقطة B يقطع المحور y في النقطة C ، فجد مساحة المثلث OBC ، حيث O هي نقطة الأصل. (10 علامات)

b) إذا كان: $y=t^3+3t^2$, $x=3t^2+1$ ، فجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ للمعادلة الوسيطية عندما $t=1$ (8 علامات)

الأستاذ عبدالقادر الحسنات 078 531 88 77

من أسئلة الوزارة / 2024 / العلمي / وحدة التفاضل

1) معتمدًا الشكل الآتي الذي يُمثّل منحنى الاقتران f ، فإنّ عدد قيم x للنقاط التي يكون عندها الاقتران f غير قابل للاشتقاق، هو:



a) 4

[✓ b) 3]

c) 2

d) 1

2) إذا كان: $f(x)=2\sin(x+\pi)-\frac{x^2}{\pi}$ ، فإنّ $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ، هي:

a) 1

b) 2

[✓ c) −1]

d) −2

3) يُمثّل الاقتران: $s(t)=2t^2-\frac{1}{2}t^3+4\,,\ t\geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، t الزمن بالثواني، فإنّ سرعة الجسم بالمتر لكل ثانية في اللحظة التي يعود فيها إلى موقعه الابتدائي، هي:

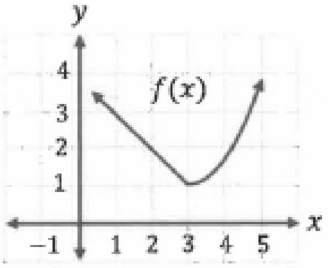
[✓ a) −8]

b) −1.5

c) −2.5

d) 0

4) يُمثّل الشكل الآتي منحنى الاقتران f ، إذا كان: $g(x) = \frac{-1}{f(x)}$ ، فإنّ $g'(2)$ ، هي:



a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{4}$

[✓ c)] $-\frac{1}{4}$

d) $-\frac{1}{2}$

5) إذا كان: $f(x) = \csc x + e^2$ ، فإنّ $f''\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ، هي:

a) $\sqrt{2}$

b) $\sqrt{2}+2$

c) $3\sqrt{2}+2$

[✓ d)] $3\sqrt{2}$

6) إذا كان: $f(x) = e^x - 3x$ ، فإنّ الإحداثي x للنقطة التي يكون عندها المماس موازيًا للمستقيم الذي معادلته: $4x + 2y + 2 = 0$ ، هو:

a) $\ln 5$

b) $\ln 7$

[✓ c)] 0

d) 1

7) إذا كان: $f(x) = a^{(x^2-4x)}$ ، فإنّ قيمة الثابت a التي تجعل $f'(4) = 4$ ، هي:

[✓ a)] e

b) e^{-1}

c) e^4

d) e^{-4}

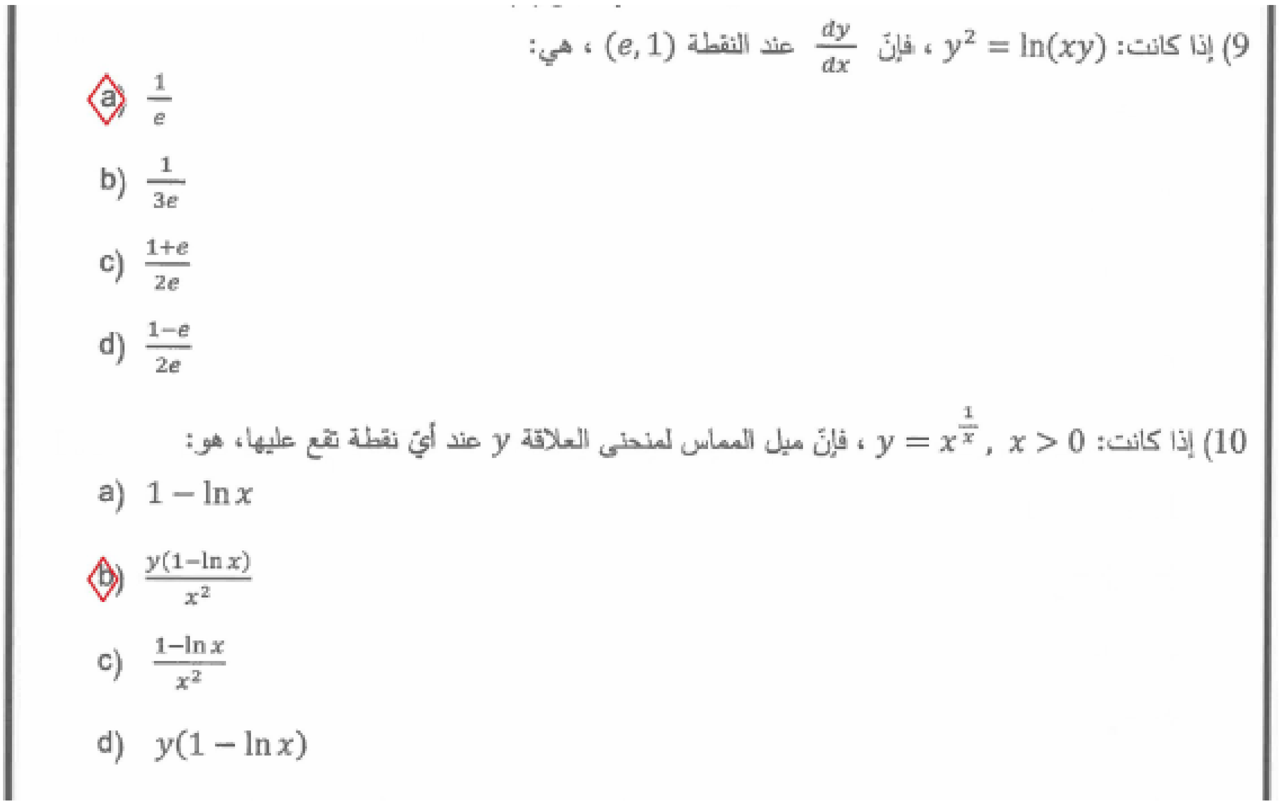
8) إذا كان: $y = \log(\tan x)\ , 0 < x < \frac{\pi}{2}$ ، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ ، هي:

a) $\frac{\sec x}{\ln 10 \tan x}$

[✓ b)] $\frac{\sec^2 x \cot x}{\ln 10}$

c) $\frac{\sec x \cot^2 x}{\ln 10}$

d) $\frac{\csc^2 x \cot x}{\ln 10}$



9) إذا كانت: $y^2=\ln(xy)$ ، فإن $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة $(e,1)$ ، هي:

[✓ a)] $\frac{1}{e}$

b) $\frac{1}{3e}$

c) $\frac{1+e}{2e}$

d) $\frac{1-e}{2e}$

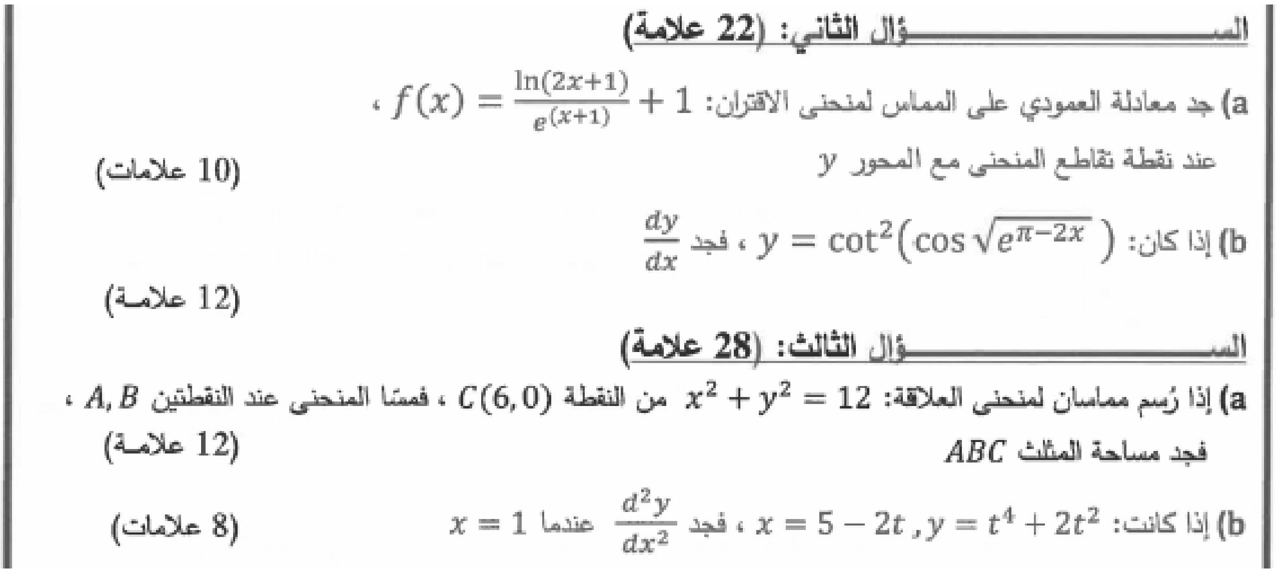
10) إذا كانت: $x>0$, $y=x^{\frac{1}{x}}$ ، فإن ميل المماس لمنحنى العلاقة y عند أيّ نقطة تقع عليها، هو:

a) $1-\ln x$

[✓ b)] $\frac{y(1-\ln x)}{x^2}$

c) $\frac{1-\ln x}{x^2}$

d) $y(1-\ln x)$



السؤال الثاني: (22 علامة)

a) جد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران: $f(x)=\frac{\ln(2x+1)}{e^{(x+1)}}+1$ ، عند نقطة تقاطع المنحنى مع المحور y (10 علامات)

b) إذا كان: $y=\cot^2\left(\cos\sqrt{e^{\pi-2x}}\right)$ ، فجد $\frac{dy}{dx}$ (12 علامة)

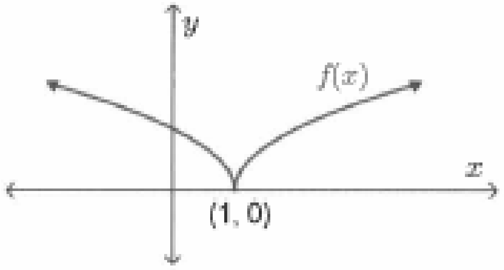
السؤال الثالث: (28 علامة)

a) إذا رُسم مماسان لمنحنى العلاقة: $x^2+y^2=12$ من النقطة $C(6,0)$ ، فمسّا المنحنى عند النقطتين A,B ، فجد مساحة المثلث ABC (12 علامة)

b) إذا كانت: $x=5-2t\ ,y=t^4+2t^2$ ، فجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ عندما $x=1$ (8 علامات)

من أسئلة الوزارة 2024 / تكميلي / العلمي / وحدة التفاضل

1) معتمدًا الشكل الآتي الذي يُمثّل مُنحنى الاقتران $f(x)$ ، فإن الاقتران $f(x)$ غير قابل للاشتقاق عند النقطة $(1,0)$ لأنّه يوجد لمنحناه عندها:



a) مماس أفقي

b) نقطة عدم اتصال

c) مماس رأسي

[✓ رأس حاد]

2) إذا كان: $y=\frac{(e\,x)^2-x\,e^{2x}}{x}$ ، فإن $\frac{dy}{dx}$ عندما $x=1$ هي:

a) $1-e^2$

[✓ $-e^2$]

c) $1+e^2$

d) e^2

3) إذا كان: $f(x)=\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{\pi}{2}$ ، فإن $f'(0)$ هي:

[✓ $\frac{1}{2}$]

b) $-\frac{1}{2}$

c) 1

d) -1

4) إذا كان الاقتران: $s(t)=t^3-6t^2+1\,,\ t\geq 0$ يُمثّل موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني، فإن سرعة الجسم عندما يكون تسارعه صفرًا هي:

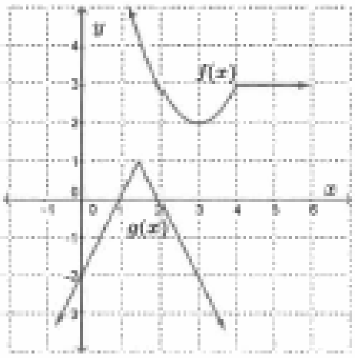
a) 12 m/s

[✓ −12 m/s]

c) 24 m/s

d) −24 m/s

5) يُبيّن الشكل الآتي منحنيي الاقترانين $f(x),\ g(x)$. إذا كان: $h(x)=f(x)\,g(x)$ ، فإن $h'(3)$ هي:



[✓ −4]

b) 0

c) 2

d) −2

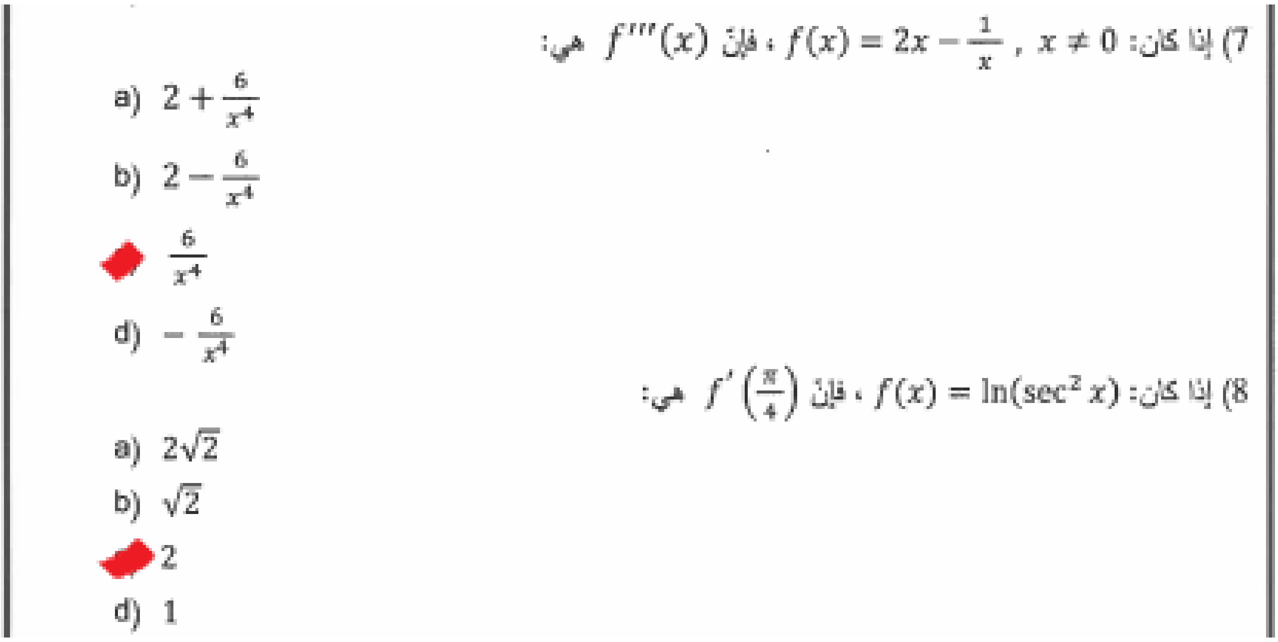
6) إذا كان: $f(x)=3\cot 2x$ ، فإن $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ هي:

a) 8

b) −24

[✓ −8]

d) 24



7) إذا كان: $x \neq 0$, $f(x) = 2x - \frac{1}{x}$ ، فإن $f'''(x)$ هي:

a) $2 + \frac{6}{x^4}$

b) $2 - \frac{6}{x^4}$

[✓ $\frac{6}{x^4}$]

d) $-\frac{6}{x^4}$

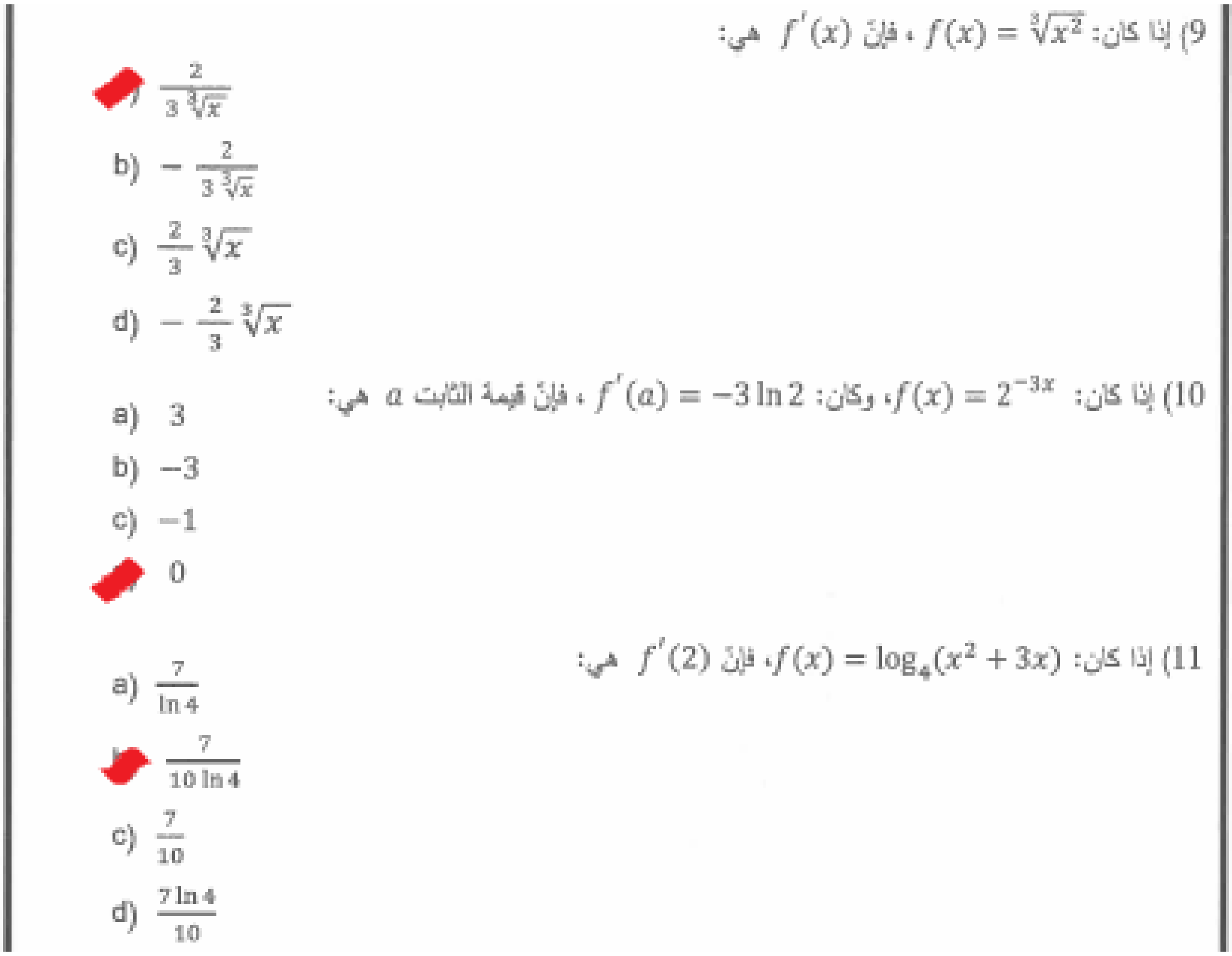
8) إذا كان: $f(x) = \ln(\sec^2 x)$ ، فإن $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ هي:

a) $2\sqrt{2}$

b) $\sqrt{2}$

[✓ 2]

d) 1



9) إذا كان: $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ ، فإن $f'(x)$ هي:

[✓ $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$]

b) $-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

c) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{x}$

d) $-\frac{2}{3}\sqrt[3]{x}$

10) إذا كان: $f(x) = 2^{-3x}$ ، وكان: $f'(a) = -3\ln 2$ ، فإن قيمة الثابت a هي:

a) 3

b) -3

c) -1

[✓ 0]

11) إذا كان: $f(x) = \log_4(x^2 + 3x)$ ، فإن $f'(2)$ هي:

a) $\frac{7}{\ln 4}$

[✓ $\frac{7}{10\ln 4}$]

c) $\frac{7}{10}$

d) $\frac{7\ln 4}{10}$

الســـــــــــــــــؤال الثاني: (20 علامة)

a) طَرَحت إحدى الشركات مُنتَجًا جديدًا في الأسواق، ثم رَصَدت عدد القِطَع المَبيعة من المُنتَج، فإذا مَثَّل الاقتران: $t > 0$, $N(t) = \frac{250\,t^2}{1+2t}$ عدد القطع المَبيعة منذ طرح المُنتَج في الأسواق، حيث t الزمن بالأشهر،

فجد كلًا ممّا يأتي: 1) معدّل تغيُّر عدد القِطَع المَبيعة بالنسبة إلى الزمن. (8 علامات)

2) قيمة $N'(3)$ ، مُفسّرًا معنى الناتج.

b) جد $\frac{d^2y}{dx^2}$ للمعادلة الوسيطية الآتية عندما $t = \frac{\pi}{8}$:

$x = 2\sin 2t \quad , \quad y = \cos^2 2t \quad , \quad 0 \le t \le 2\pi$ (12 علامة)

الســـــــــــــــــؤال الثالث: (34 علامة)

a) جد معادلة المماس لمنحنى العلاقة: $x^3 + y^3 = 8xy$ ، عند نقطة تقاطع منحناها مع المستقيم $y = x$ في الرُّبع الأول من المستوى الإحداثي.

(12 علامة)

b) إذا كان: $y = \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2+1}}$ ، فأثبت باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي أنّ: $\frac{dy}{dx} = \frac{(x-1)(x^2+x+2)}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$

(10 علامات)

أسئلة الوزارة على وحدة التفاضل

من أسئلة الوزارة 2023 / الصناعي

1- إذا كان: $f(x)=e^{2x}+\ln(4x)$ ، فإن $f'(x)$ هي:

a) $e^{2x}+\frac{4}{x}$ [✓ c)] $2e^{2x}+\frac{1}{x}$

b) $2e^{2x}+\frac{1}{4x}$ d) $e^{2x}+\frac{1}{x}$

2- إذا كان: $f(x)=\ln\left(\frac{e}{x}\right)$ ، فإن $f'(x)$ هي:

a) $\frac{e}{x}$ b) $\frac{x}{e}$ c) $\frac{1}{x}$ [✓ d)] $-\frac{1}{x}$

3- إذا كان: $f(t)=\cos 4t$ ، فإن $f'(t)$ هي:

a) $\sin 4t$ c) $4\sin 4t$

b) $-\sin 4t$ [✓ d)] $-4\sin 4t$

4- إذا كانت: $y=2x-3$ معادلة المماس لمنحنى الاقتران f عند النقطة $(2,1)$،
فإنّ قيمة ميل العمودي على المماس عند النقطة $(2,1)$ هي:

[✓ a)] $-\frac{1}{2}$ b) -2 c) $\frac{1}{2}$ d) 2

5- الإحداثي x للنقطة الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x)=2\sin x+1\ ,\ x\in[0,2\pi]$
التي يكون المماس عندها أفقيًا هو:

[✓ a)] $\frac{\pi}{2}$ b) 0 c) π d) 2π

6- إذا كان: $f(x)=4-\frac{1}{x}$ ، فإن $f'(x)$ هي:

a) $\frac{4}{x^2}$ b) $-\frac{1}{x^2}$ [✓ c)] $\frac{1}{x^2}$ d) $-\frac{3}{x^2}$

7- إذا كان: $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق عند $x=1$ ، وكان:
$f(1)=-1\ ,f'(1)=5\ ,g(1)=1\ ,g'(1)=2$ ، فإنّ قيمة $(fg)'(1)$ هي:

[✓ a)] 3 b) -7 c) 10 d) -3

السؤال الثاني: (34 علامة)

a) يمثّل الاقتران: $s(t)=2t^3-12t^2-14t\ ,t\geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم،
حيث s الموقع بالأمتار، t الزمن بالثواني. جد كلًا ممّا يأتي: (12 علامة)

1) سرعة الجسم عندما ينعدم تسارعه.   2) اللحظة التي يعود فيها الجسم إلى موقعه الابتدائي.

b) جد $\frac{dy}{dx}$ لكل ممّا يأتي عند القيمة المعطاة إزاء كل منها: (13 علامة)

1) $y=\frac{\sin 2x}{e^x}\quad ,\quad x=0$ 2) $y=\frac{2}{3+\sqrt{x}}\quad ,\quad x=4$

3) $y=t^2-4\quad ,\quad x=\frac{1}{2}t\quad ,\quad t=-1$

c) جد معادلة المماس لمنحنى العلاقة $5xy-y^2=4$ عند النقطة $(1,4)$. (9 علامات)

من أسئلة الوزارة 2023 تكميلي / الصناعي / وحدة التفاضل

1- إذا كان: $f(x)=e^{1-2x}+3\cos x$ ، فإنّ $f'(x)$ هي:

▼ $-2e^{1-2x}-3\sin x$ c) $2e^{1-2x}-3\sin x$

b) $-2e^{1-2x}+3\sin x$ d) $2e^{1-2x}+3\sin x$

2- إذا كان: $f(x)=\ln\left(\frac{5}{x^2}\right)$ ، فإنّ $f'(x)$ هي:

a) $\frac{10}{x}$ ▼ $\frac{-2}{x}$ c) $\frac{2}{x}$ d) $\frac{-10}{x}$

3- إذا كان: $f(x)$ ، $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق عند $x=2$ ، وكان: $g(2)=-3$ ،$g'(2)=-4$ ، $f(2)=3$ ،$f'(2)=-2$ ، فإنّ $(fg)'(2)$ هي:

a) -18 b) 18 ▼ -6 d) 6

4- إذا كان: $f(x)=6-\frac{1}{e^x}$ ، فإنّ $f'(x)$ هي:

a) $\frac{1}{e^{2x}}$ b) $\frac{-1}{e^{2x}}$ c) $\frac{-1}{e^x}$ ▼ $\frac{1}{e^x}$

5- إذا كان: $f(x)=\sqrt{2+\sin x}$ ، فإنّ $f'(x)$ هي:

a) $-\frac{\cos x}{\sqrt{2+\sin x}}$ c) $-\frac{\cos x}{2\sqrt{2+\sin x}}$

▼ $\frac{\cos x}{2\sqrt{2+\sin x}}$ d) $\frac{\cos x}{\sqrt{2+\sin x}}$

6- إذا كان: $x=2\sin t$, $y=5\cos t$ ، فإنّ ميل المماس للمعادلة الوسيطية عند $x=\frac{\pi}{4}$ هو:

▼ $-\frac{5}{2}$ b) $\frac{5}{2}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $-\frac{2}{5}$

7- إذا كان: $\ln y=x^{-2}$ ، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ هي:

a) $\frac{2y}{x^3}$ ▼ $-\frac{2y}{x^3}$ c) $2yx^3$ d) $-2yx^3$

8- معادلة المماس لمنحنى العلاقة: $x^2+y^2=45$ عند النقطة $(6\ ,-3)$ هي:

a) $y=2x+15$ b) $y=-2x+15$ ▼ $y=2x-15$ d) $y=-2x-15$

a) جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي عند القيمة المعطاة إزاء كل منها: (12 علامة)

1) $y=\frac{e^x+x^2}{\cos x}$, $x=0$

2) $y=x\ln x+\sqrt{3-x^2}$, $x=1$

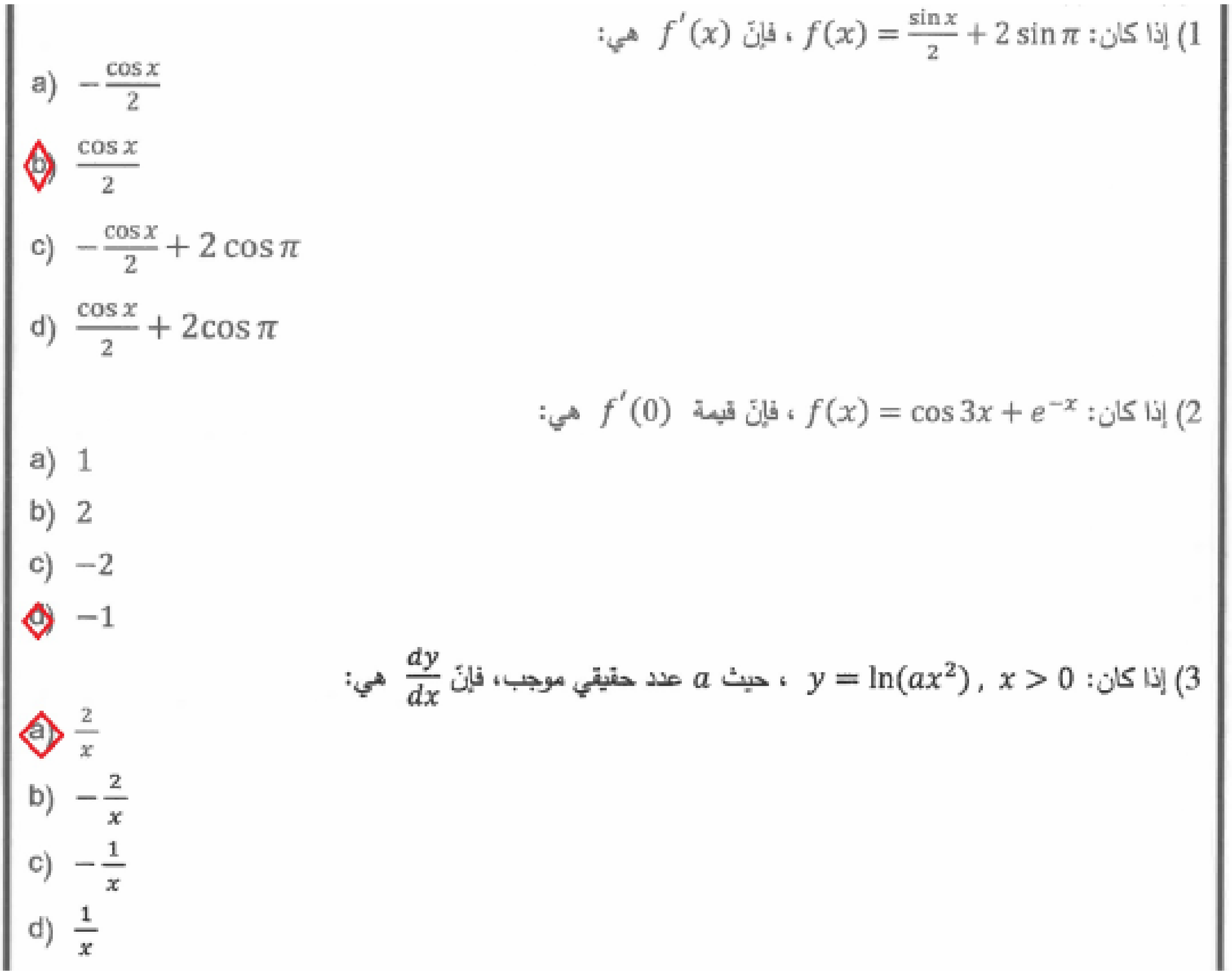
3) $y=u^3-1$, $u=6-2x$, $x=2$

b) يمثّل الاقتران: $s(t)=2t^3-8t^2-10t$, $t\geq 0$ ، موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار ، t الزمن بالثواني، جد كلًا مما يأتي: (13 علامة)

1) اللحظة التي يعود فيها الجسم إلى موقعه الابتدائي. 2) سرعة الجسم عندما يكون تسارعه $8\ \mathrm{m/s^2}$

c) جد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة: $x^2+y^3=28+\ln x$ ، عند النقطة $(1\ ,\ 3)$ (9 علامات)

من أسئلة الوزارة 2024 / الصناعي / وحدة التفاضل



1) إذا كان: $f(x)=\frac{\sin x}{2}+2\sin\pi$ ، فإنّ $f'(x)$ هي:

a) $-\frac{\cos x}{2}$

[✓ b)] $\frac{\cos x}{2}$

c) $-\frac{\cos x}{2}+2\cos\pi$

d) $\frac{\cos x}{2}+2\cos\pi$

2) إذا كان: $f(x)=\cos 3x+e^{-x}$ ، فإنّ قيمة $f'(0)$ هي:

a) 1

b) 2

c) −2

[✓ d)] −1

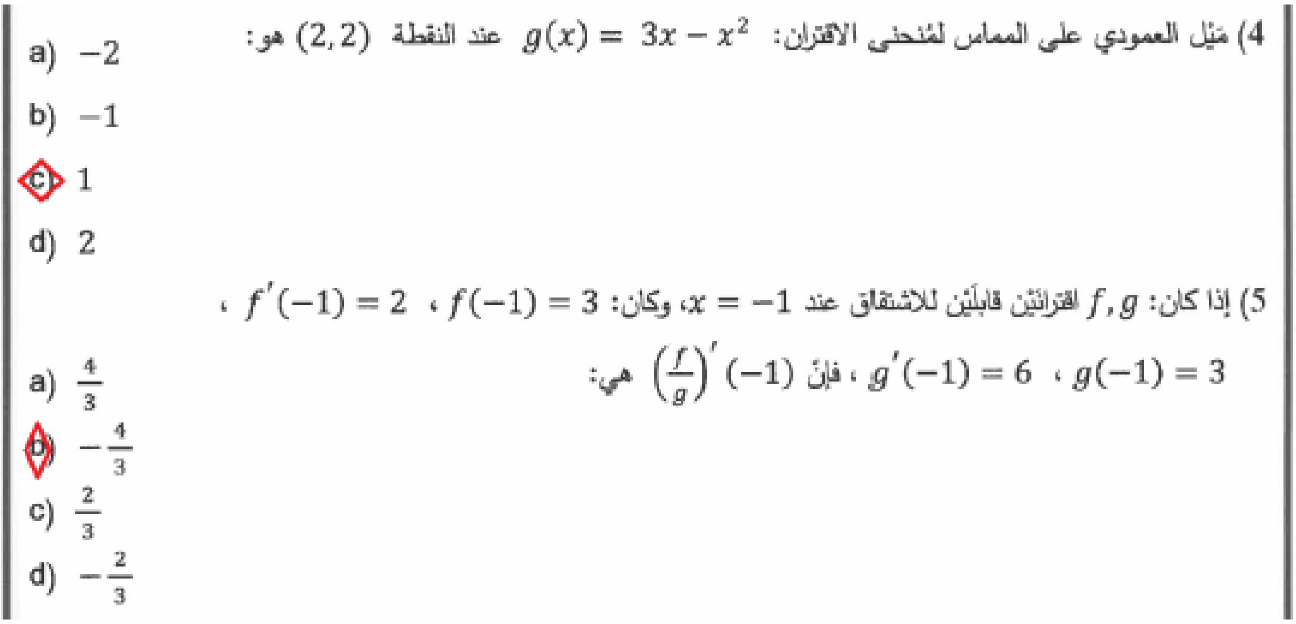
3) إذا كان: $y=\ln(ax^2),\ x>0$ ، حيث a عدد حقيقي موجب، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ هي:

[✓ a)] $\frac{2}{x}$

b) $-\frac{2}{x}$

c) $-\frac{1}{x}$

d) $\frac{1}{x}$



4) مَيل العمودي على المماس لمُنحنى الاقتران: $g(x)=3x-x^2$ عند النقطة $(2,2)$ هو:

a) −2

b) −1

[✓ c)] 1

d) 2

5) إذا كان: f,g اقترانين قابلَين للاشتقاق عند $x=-1$، وكان: $f(-1)=3$ ، $f'(-1)=2$ ،
$g(-1)=3$ ، $g'(-1)=6$ ، فإنّ $\left(\frac{f}{g}\right)'(-1)$ هي:

a) $\frac{4}{3}$

[✓ b)] $-\frac{4}{3}$

c) $\frac{2}{3}$

d) $-\frac{2}{3}$

6) إذا كان: $x \neq 0$, $f(x) = \left(2+\frac{1}{x}\right)^2$ ، فإنّ $f'(x)$ هي:

a) $-2(\frac{1}{x^2})$

[✓ b)] $-2(2+\frac{1}{x})(\frac{1}{x^2})$

c) $2(2+\frac{1}{x})$

d) $2(2+\frac{1}{x})(\frac{1}{x^2})$

7) إذا كان: $f(x) = x\tan x$ ، فإنّ قيمة $f'(\pi)$ هي:

[✓ a)] π

b) $\pi - 1$

c) $-\pi$

d) $1 - \pi$

السؤال الثاني: (34 علامة)

a) جد $\frac{dy}{dx}$ لكلّ ممّا يأتي عند القيمة المُعطاة إزاء كلّ منها: (13 علامة)

1) $y = e^{(\frac{x}{2})}\ln(x+1)$, $x = 2$

2) $y = \frac{\sin x}{1+\cos x}$, $x = 0$

3) $x = t+2$, $y = t^2-1$, $t = 1$

b) يُمثّل الاقتران: $s(t) = 8t^2 - t^3,\ t \geq 0$ ، موقع جسم يتحرّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، t الزمن بالثواني . جد كلاًّ ممّا يأتي: (12 علامة)

1) سرعة الجسم عندما $t = 3$.

2) قيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لَحظي.

3) اللحظة التي يعود فيها الجسم إلى موقعه الابتدائي.

c) جد معادلة المماس لمُنحنى العلاقة: (9 علامات)

$2y^2 + 2xy - 3 = x$ عند النقطة $(1,1)$.

من أسئلة الوزارة 2024 تكميلي / الصناعي / وحدة التفاضل

1) إذا كان: $f(x) = e^{-2x} - x$ ، فإن قيمة $f'(0)$ هي:

a) -2 c) 0

b) 1 [✓ d) -3]

2) إذا كان: $x > 0$, $f(x) = \ln\sqrt{x}$ ، فإن ناتج $f'(x)$ هو:

a) $\frac{1}{x}$ c) $2x$

[✓ b) $\frac{1}{2x}$] d) x

3) إذا كان: $f(x) = \pi x - 2\cos x$ ، فإن $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ هي:

a) $\pi - 2$ [✓ c) $\pi + 2$]

b) 0 d) π

4) ميل المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = \frac{4}{3-x^2}$ عند النقطة $(1,2)$ هو:

[✓ a) 2] c) -16

b) -2 d) 16

5) إذا كان: $f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$، فإن قيمة $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ هي:

[✓ a) $-\frac{16}{\pi^3}$] c) $\frac{16}{\pi^3}$

b) $-\frac{16}{\pi^4}$ d) $\frac{16}{\pi^4}$

6) إذا كان: $y = \sqrt{3x^2+1}$ ، فإن $\frac{dy}{dx}$ هي:

a) $\frac{6x}{\sqrt{3x^2+1}}$ [✓ c) $\frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}}$]

b) $\frac{2x}{\sqrt{3x^2+1}}$ d) $\frac{3x}{2\sqrt{3x^2+1}}$

7) إذا كان: $f(x) = \tan(x^2 - 3x + 4)$ ، فإن ناتج $f'(x)$ هو:

a) $-(2x-3)\csc^2(x^2-3x+4)$ c) $\sec^2(x^2-3x+4)$

b) $-\csc^2(x^2-3x+4)$ [✓ d) $(2x-3)\sec^2(x^2-3x+4)$]

8) إذا كانت: $2x + y = 2\sin y$ ، فإن قيمة $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة $(0,0)$ هي:

[✓ a) 2] b) $-\frac{1}{2}$ c) -2 d) $\frac{1}{2}$

السـؤال الثاني: (34 علامة)

a) جد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍ مما يأتي عند القيمة المعطاة إزاء كلٍ منها: (13 علامة)

1) $y = \frac{5x}{(e^{x}+1)^2} \quad , \quad x = 0$

2) $y = \frac{x^2}{\pi}\tan x \quad , \quad x = \frac{\pi}{4}$

3) $x = \frac{t}{2} \quad , \quad y = t^2 - 4 \quad , \quad t = -1$

b) يُمثّل الاقتران: $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 4t, \ t \geq 0$ ، موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، t الزمن بالثواني . جد كلًّا مما يأتي: (12 علامة)

1) قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

2) تسارع الجسم عندما $t = 2$

3) اللحظة التي يعود فيها الجسم إلى موقعه الابتدائي.

c) جد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة: (9 علامات)

$$x^2 - xy + y^2 = 13$$

عند النقطة $(-1, 3)$.

الرياضيات 2024 - 2025

الصف الثاني الثانوي/العلمي

2007

مُكثف وحدة تطبيقات التفاضل

الأستاذ : عبدالقادر الحسنات 078 531 88 77

عبدالقادر الحسنات

I ❤ Maths $\sqrt[3]{64}$ Ever

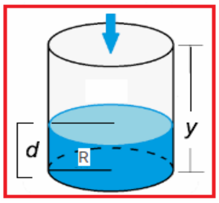
2 ∞ & >

I LOVE MATH
SAID NO ONE EVER!

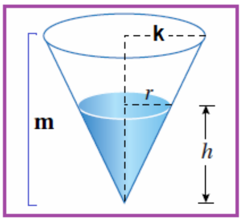
الدرس 1 المُعدَّلات المرتبطة

Related Rates

في البداية يجب التمييز بين الكميات أو المقادير أو القيم الثابتة والمتغيرة بالنسبة للزمن في كل مسألة ، مثلاً :

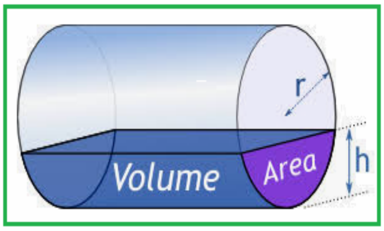


1) في عملية صب الماء في وعاء أسطواني قائم فإن :
الكميات والقيم الثابتة : ارتفاع الأسطوانة (y) ، نصف قطر الأسطوانة (R)
وكذلك نصف قطر الماء ومحيطه ومساحة سطحه
الكميات والقيم المتغيرة : حجم الماء ، ارتفاع الماء(d)



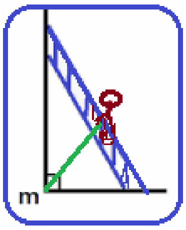
2) في عملية صب الماء في وعاء مخروطي قائم فإن :
الكميات والقيم الثابتة : ارتفاع المخروط (m) ، نصف قطر المخروط (k)

الكميات والقيم المتغيرة : حجم الماء ، ارتفاع الماء(h)
وكذلك نصف قطر الماء ومحيطه ومساحة سطحه



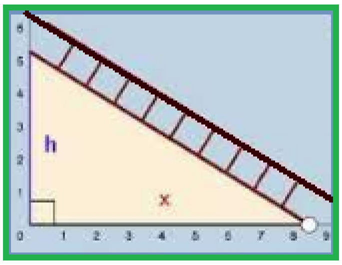
3) في عملية صب الماء في أنبوب أفقي أسطواني فإن :
الكميات والقيم الثابتة : نصف قطر الأسطوانة (r) ، طول الأسطوانة

الكميات والقيم المتغيرة : حجم الماء ، ارتفاع الماء(h)
وكذلك مساحة سطح الماء (على شكل مستطيل)



4) في عملية صعود شخص على سلم مثبت على جدار فإن :
الكميات والقيم الثابتة : طول السلم وارتفاع رأسه عن الأرض وبعد قاعدته عن الجدار
مساحة المثلث المكون من السلم والأرض والجدار

الكميات والقيم المتغيرة : ارتفاع الشخص عن الأرض ، بعد الشخص عن النقطة (m)
المسافة بين الشخص وقاعدة السلم وكذلك قمته
مساحة المثلث المكون من الشخص وقمة السلم والنقطة (m)



5) في عملية انزلاق سلم مثبت على جدار فإن :
الكميات والقيم الثابتة : طول السلم ، الزاوية التي يصنعها الجدار مع الأرض(قائمة)

الكميات والقيم المتغيرة : سرعة ابتعاد قاعدة السلم عن الجدار
وكذلك اقتراب رأسه من الأرض
الزاوية التي يصنعها السلم مع الأرض
مساحة المثلث المكون من السلم والأرض والجدار

*** في كل مسألة قد يُطلب إيجاد معدل تغير أي قيمة (من القيم المتغيرة) بعد زمن معين

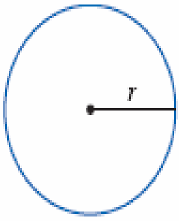
ملخص طريقة الحل : نكتب معادلة تربط بين المُتغيِّر الذي نُريد إيجاد مُعدَّل تغيُّره والمُتغيِّرات التي عُلمَت مُعدَّلات تغيُّرها ثم نشتق بالنسبة للزمن ونجعل المعدل المطلوب موضوعا للقانون

باختصار :

1) فهم المسألة وقراءتها جيدًا لتحديد المُتغيِّر المطلوب إيجاد مُعدَّل تغيُّره، ومُعدَّلات التغيُّر المعطاة.
2) رسم مُخطَّطٍ يُمثِّل المسألة
3) كتابة معادلة تربط بين المُتغيِّر المطلوب إيجاد مُعدَّل تغيُّره والمُتغيِّرات التي عُلم مُعدَّلات تغيُّرها.
4) الاشتقاق بالنسبة إلى الزمن
5) التعويض في المعادلة الناتجة جميع القِيَم المعلومة للمُتغيِّرات لإيجاد مُعدَّل التغيُّر المطلوب

قوانين مهمة

الدائرة:



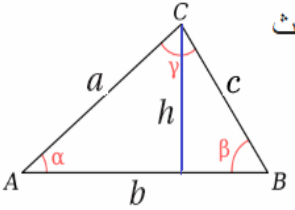
مساحة $A = \pi r^2$

محيط $C = 2\pi r$

مساحة المثلث = نصف حاصل ضرب القاعدة في الارتفاع

أو نصف حاصل ضرب أي ضلعين في (جيب) الزاوية بينهما

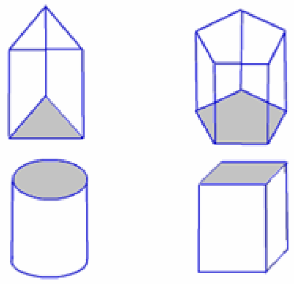
مساحة المثلث



$A = \frac{1}{2} ab \sin\theta$ | $A = \frac{1}{2} bh$

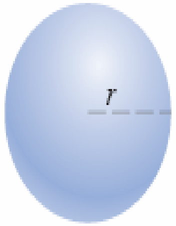
$$A = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}}{4}$$

حجم المنشور = مساحة القاعدة × الارتفاع



المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

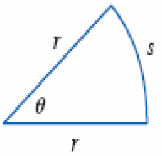
الكرة:



حجم $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

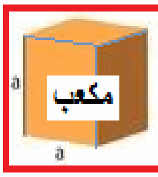
مساحة $A = 4\pi r^2$

القطاع الدائري



$A = \frac{1}{2} r^2 \theta$

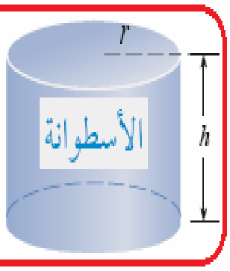
$s = r\theta \ (\theta \, \text{radian})$



$A = 6a^2$

$V = a^3$

الأسطوانة

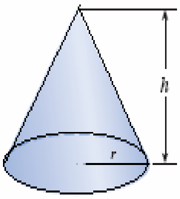


$V = \pi r^2 h$

الجانبية $A = 2\pi rh$

$A = 2\pi rh + 2\pi r^2$

المخروط:

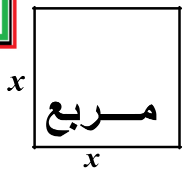


$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

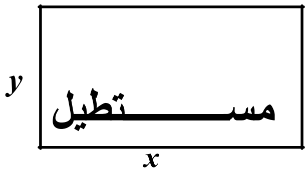
الجانبية $A = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$

$A = \pi r\sqrt{r^2 + h^2} + \pi r^2$

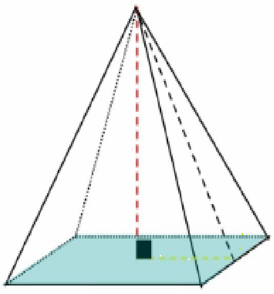
الأستاذ: عبدالقادر الحسنات



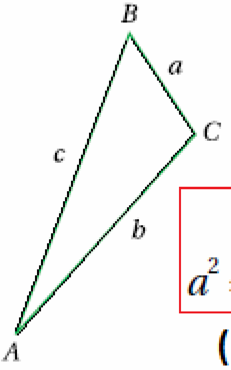
$Area = x^2$



$Area = x \ y$



حجم الهرم = ثلث مساحة القاعدة × الارتفاع



قانون الجيوب

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

قانون جيوب التمام

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

(نظرية فيثاغورس العامة)

المسافة بين النقطتين $P_1\,(x_1, y_1)$ و $P_2\,(x_2, y_2)$ هي:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

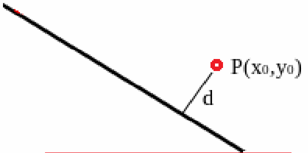
إحداثيا نقطة منتصف القطعة المستقيمة $\overline{P_1 P_2}$ هما:

$$M : \left(\frac{x_1 + x_2}{2} , \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

معادلة المستقيم المارّ بالنقطة $P_1\,(x_1, y_1)$، وميله m هي: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

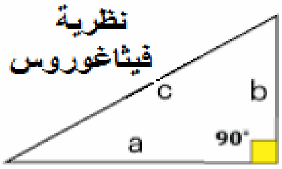
$ax + by + c = 0$



$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

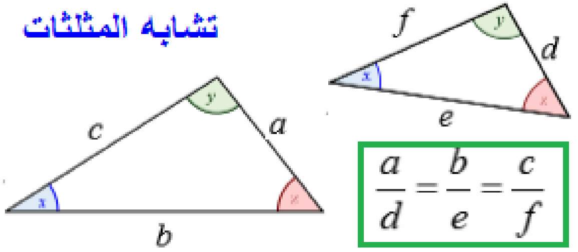
بعد نقطة عن مستقيم

نظرية فيثاغورس



$c^2 = a^2 + b^2$

تشابه المثلثات



$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$$

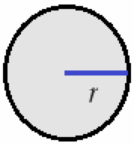
هناك عدة محاور أساسية لهذا الموضوع ، منها :

أ) معدل تغير المساحة ، الحجم ، المحيط والأطوال بالنسبة إلى الزمن ، وعندما يتم إعطاء القاعدة

1) بالون على شكل كرة، يزداد حجمه بمُعدَّل $80\ cm^3/s$.
جد معدل التغير في مساحة سطحه عندما يكون نصف قُطْره 6 cm . (الجواب 26.6)

2) يزداد طول ضلع مكعب بمعدل 2 cm/s، جد معدل زيادة الحجم عندما يصبح طوله 8 cm (الجواب 384)

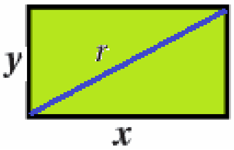
3) صفيحة معدنية دائرية الشكل، تتمدد بالحرارة إذا كان معدل زيادة نصف قطرها يساوي 0.005 cm/min
أوجد معدل الزيادة في مساحة سطح الصفيحة، عندما يكون طول نصف قطرها 15 cm .
الحل : نكتب قانون مساحة الدائرة ثم نشتق ضمنيا بالنسبة للزمن ثم نعوض (ولا يجوز التعويض قبل الاشتقاق)



$$A=\pi r^2$$

$$\frac{dA}{dt}=2\pi r\frac{dr}{dt}=2\pi(15)(0.005)=0.15\pi$$

4) يزداد طول أحد أضلاع مستطيل بمُعدَّل 4 cm/s ، ويتناقص طول ضلعه الآخر بمُعدَّل 3 cm/s ، بحيث يحافظ المستطيل على شكله ، جد مُعدَّل التغيُّر في محيط المستطيل ، وطول قطره عندما يصبح طول الضلع الأوَّل 40 cm ، وطول الضلع الثاني 30



القطـــــــر

$$r^2=x^2+y^2$$

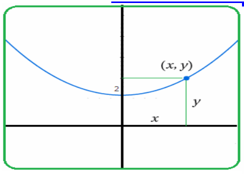
$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

المحيـــــط

$$C=2x+2y$$

$$\frac{dC}{dt}=2\frac{dx}{dt}+2\frac{dy}{dt}=2(4)+2(-3)=2$$

$$\frac{dr}{dt}=\frac{2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{2(40)(4)+2(30)(-3)}{2\sqrt{(40)^2+(30)^2}}=1.4$$



5) تتحرك نقطة على منحنى الاقتران$(y=x^2+2)$ وفي لحظة ما كان معدل تغير الإحداثي (x) يساوي (0.25 cm/s) ومعدل تغير الإحداثي (y) يساوي (0.3 cm/s) ،
جد إحداثيي موقع النقطة على المنحنى في تلك اللحظة.

$$y=x^2+2 \Rightarrow \frac{dy}{dt}=2x\frac{dx}{dt}$$

$$0.3=2x(0.25) \rightarrow x=0.6$$

$$\rightarrow y=(0.6)^2+2=2.36 \rightarrow (0.6,2.36)$$

6) أتحقَّق من فهمي **76** تنفخ ماجدة بالونًا على شـــكل كرة،
فيزداد حجمه بمُعدَّل $80\ cm^3/s$. أجد مُعدَّل زيادة نصف قُطْر البالون عندما يكون نصف القُطْر 6 cm.

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \frac{dV}{dt}=4\pi r^2\frac{dr}{dt} \Rightarrow \left.\frac{dV}{dt}\right|_{r=6}=4\pi(6)^2\frac{dr}{dt} \rightarrow 80=144\pi\frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dr}{dt}=\frac{80}{144\pi}=\frac{5}{9\pi}\ cm/s$$

7) مسألة اليوم **74**

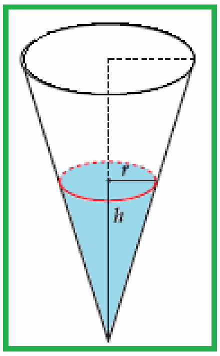
تُستعمَل المعادلة: $S=\frac{\sqrt{hm}}{19}$ لحساب المساحة التقريبية لسطح جسم الإنسان، حيث h ثابت يُمثِّل طوله بالسنتيمتر، و m كتلته بالكيلوغرام.

يتَّبع خالد حِمية غذائية تجعله يخسر من كتلته 2 kg شهريًّا. ما مُعدَّل النقصان في مساحة ســـطح جسمه عندما تصبح كتلته 70 kg، علمًا بأنَّ طوله 170 cm؟

الجـواب:0.082–

$$S=\frac{\sqrt{hm}}{19}=\frac{\sqrt{170m}}{19}=\frac{\sqrt{170}}{19}\sqrt{m} \Rightarrow \frac{dS}{dt}=\frac{\sqrt{170}}{38\sqrt{m}}\frac{dm}{dt}=\frac{\sqrt{170}}{38\sqrt{70}}\times -2 \approx -0.082$$

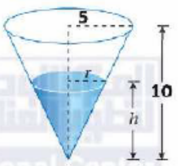
8) أتحقَّق من فهمي **86**



خـزّان مـاء على شـكل مخـروط دائـري قائم رأسـه إلـى الأسـفل، وارتفاعـه **10 m**، ونصف قُطْـر قاعدتـه **5 m**. صُـبَّ المـاء فـي الخـزّان بمُعـدَّل $\pi\ \mathrm{m^3/min}$. مـا مُعـدَّل تغيُّـر ارتفاع المـاء فـي الخـزّان عندمـا يكـون ارتفاعه **8 m**؟

$$\frac{r}{h}=\frac{5}{10} \rightarrow r=\frac{1}{2}h \Rightarrow V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2}h\right)^2 h=\frac{\pi}{12}h^3$$

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt} \Rightarrow \pi=\frac{\pi}{4}(8)^2\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt}=\frac{1}{16}\ \mathrm{m/min}$$



---

9) يزداد طول أحد أضلاع مســتطيل بمُعدَّل **2 cm/s**، ويقل طول ضلعه الآخر بمُعدَّل **3 cm/s**، بحيث يحافظ المســتطيل على شكله، وفي لحظة مُعيَّنة بلغ طول الضلع الأوَّل **20 cm**، وطول الضلع الثاني **50 cm**:

① ما مُعدَّل تغيُّر مساحة المستطيل في تلك اللحظة؟

② ما مُعدَّل تغيُّر محيط المستطيل في تلك اللحظة؟

③ ما مُعدَّل تغيُّر طول قُطْر المستطيل في تلك اللحظة؟

④ أيُّ الكمِّيات في المسألة مُتزايِدة؟ أيُّها مُتناقِصة؟

1 ليكن طول المستطيل x وعرضه y ومساحته A ومحيطه P وطول قطره R

$$A=xy \Rightarrow \frac{dA}{dt}=x\frac{dy}{dt}+y\frac{dx}{dt}$$
$$\Rightarrow \frac{dA}{dt}=20(-3)+50(2)=40\ \mathrm{cm^2/s}$$

2
$$P=2x+2y \Rightarrow \frac{dP}{dt}=2\frac{dx}{dt}+2\frac{dy}{dt}=2(2)+2(-3)=-2\ \mathrm{cm/s}$$

3
$$R^2=x^2+y^2 \Rightarrow 2R\frac{dR}{dt}=2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}$$
$$\sqrt{(20)^2+(50)^2}\,\frac{dR}{dt}=20(2)+50(-3) \Rightarrow \frac{dR}{dt}=\frac{-110}{10\sqrt{29}}=\frac{-11}{\sqrt{29}}\ \mathrm{cm/s}$$

4 في اللحظة المذكورة تكون المساحة متزايدة (لأن معدل تغيرها موجب)،
بينما يتناقص كل من المحيط وطول القطر(لأن معدل تغير كل منهما سالب).

---

10) مُكعَّب طول ضلعه **10 cm**. بدأ المُكعَّب يتمدَّد، فزاد طول ضلعه بمُعدَّل **6 cm/s**، وظلَّ مُحافِظًا على شكله:

⑤ أجد مُعدَّل تغيُّر حجم المُكعَّب بعد 4s من بَدْء تمدُّده.

⑥ أجد مُعدَّل تغيُّر مساحة سطح المُكعَّب بعد 6s من بَدْء تمدُّده.

5 ليكن حجم المكعب V وطول ضلعه (حرفه) x

$$x=10+6t$$
$$V=x^3=(10+6t)^3$$
$$\frac{dV}{dt}=3(10+6t)^2\times 6=3(34)^2(6)=20808\ \mathrm{cm^3/s}$$

6 لتكن مساحة سطح المكعب A

$$A=6x^2=6(10+6t)^2$$
$$\frac{dA}{dt}=12(10+6t)\times 6=12(46)(6)=3312\ \mathrm{cm^2/s}$$

---

11) وقود: خزّان أسطواني الشكل، ارتفاعه **15 m**، وقُطْر قاعدته **2 m**. مُلِئَ الخزّان بالوقود بمُعدَّل **500 L/min**:

⑦ أجد مُعدَّل ارتفاع الوقود في الخزّان عند أيِّ لحظة.

⑧ أجد مُعدَّل تغيُّر المساحة الجانبية للوقود عند أيِّ لحظة.

7 ليكن ارتفاع الوقود في الخزان h، سيكون طول نصف قطر قاعدته 1 m، وحجمه: $V=\pi r^2 h=\pi h$

$$\frac{dV}{dt}=500\mathrm{L/min}=0.5\ \mathrm{m^3/min}$$
$$V=\pi h \Rightarrow \frac{dV}{dt}=\pi\frac{dh}{dt} \Rightarrow 0.5=\pi\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt}=\frac{1}{2\pi}\ \mathrm{m/min}$$

8
$$A=2\pi rh=2\pi h \Rightarrow \frac{dA}{dt}=2\pi\frac{dh}{dt}=2\pi\times\frac{1}{2\pi}=1\ \mathrm{m^2/min}$$

ب) معدل تغير المسافة بالنسبة إلى الزمن

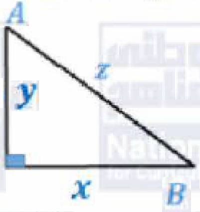
12) أتحقَّق من فهمي 78

تحرَّكت السـيّارة A والسيّارة B في الوقت نفسه، ومن النقطة نفسها، بحيث اتَّجهت السيّارة A نحو الشـمال بسرعة 45 km/h، واتَّجهت السـيّارة B نحو الشرق بسرعة 40 km/h. أجد مُعدَّل تغيُّر البُعْد بين السيّارتين بعد ساعتين من انطلاقهما.

$x = 40 \times 2 = 80$ km , $y = 45 \times 2 = 90$ km

$$z^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow z = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=2} = \frac{80 \times 40 + 90 \times 45}{\sqrt{6400 + 8100}} = \frac{7250}{10\sqrt{145}} \approx 60.21\text{km/h}$$



الحل بطريقة ثانية:

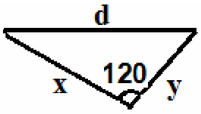
$x = 40t$ km , $y = 45t$ km

$$z^2 = x^2 + y^2$$

$$z = \sqrt{(40t)^2 + (45t)^2} = \sqrt{3625}\, t$$

$$\frac{dz}{dt} = \sqrt{3625} \approx 60.21$$

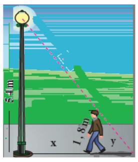
13) بدأت سفينتان الحركة من نفس الميناء بشكل مستقيم في اتجاهين مختلفين قياس الزاوية بينهما (120) ، إذا كانت سرعة السفينة الأولى (6 km / h) وسرعة الثانية (8 km / h) فجد معدل التغير في المسافة بينهما بعد ساعة واحدة من الانطلاق



$$d^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 120 \Rightarrow d = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy(-\tfrac{1}{2})}$$

$$\Rightarrow d' = \frac{2xx' + 2yy' + (x'y + y'x)}{2\sqrt{x^2 + y^2 + xy}} = \frac{2(6)(6) + 2(8)(8) + (6)(8) + (8)(6)}{2\sqrt{(8)^2 + (6)^2 + (8)(6)}} = 2\sqrt{37}$$

14) يتقدم رجل طوله (1.8 m) نحو مصباح مثبت على ارتفاع (5.4 m) ، فإذا كانت سرعة الرجل (1.2 m/sec) ، جد **معدل تغير طول ظل الرجل**

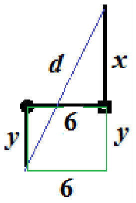


مــن تشــابه المثلثــات

$$\frac{5.4}{1.8} = \frac{x + y}{y} \Rightarrow 3 = \frac{x + y}{y} \Rightarrow 3y = x + y \Rightarrow 2y = x$$

$$2\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} \Rightarrow 2\frac{dy}{dt} = -1.2 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-1.2}{2} = -0.6$$

15) مصعدان كهربائيان المسافة بينهما (6) أمتار ، بدأ الأول الارتفاع بسرعة (3 m /s) ، وفي نفس الوقت بدأ الثاني بالنزول وبسرعة (1 m /s) ، جد معدل التغير في المسافة بينهما بعد (ثانيتين) من بدء الحركة



$$d^2 = (x + y)^2 + (6)^2 \Rightarrow d = \sqrt{(x + y)^2 + 36} \Rightarrow d' = \frac{2(x + y)(x' + y')}{2\sqrt{(x + y)^2 + 36}}$$

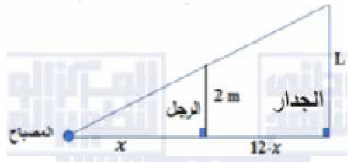
$$= \frac{(6 + 2)(3 + 1)}{\sqrt{(6 + 2)^2 + 36}} = \frac{32}{\sqrt{100}} = \frac{16}{5}$$

16) ㉓ ضــوء: مصباح مُثبَّت بالأرض، وهو يضيء على جدار يبعد عنه مســافة 12 m. إذا ســار رجل طوله 2 m من موقع المصباح إلى الجدار بسرعة 1.6 m/s، فأجد مُعدَّل تغيُّر طول ظلِّه على الجدار عندما يكون على بُعْد 4 m من الجدار.

ليكن بعد الرجل عن المصباح أفقيا x ، وطول ظله على الجدار L

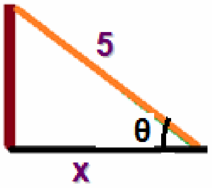
23 $\frac{L}{2} = \frac{12}{x} \rightarrow L = \frac{24}{x}$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{-24\frac{dx}{dt}}{x^2} = \frac{-24(1.6)}{64} = -0.6 \text{ m/s}$$



ج) معدل تغير الزاوية بالنسبة إلى الزمن

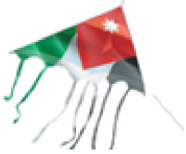
17) سلم طوله (5 m) أمتار يرتكز بطرفه العلوي على حائط عمودي وبطرفه السفلي على أرض أفقية ، بدأ الطرف السفلي بالانزلاق مبتعداً عن الحائط بمعدل (2 m/s) . جد معدل تغير الزاوية بين السلم والأرض عندما يكون الطرف السفلي على بعد (3 m) من الحائط



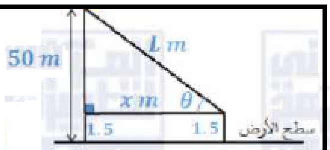
$$\cos\theta=\frac{x}{5}\Rightarrow-\sin\theta\frac{d\theta}{dt}=\frac{-1}{5}\frac{dx}{dt}\Rightarrow\frac{d\theta}{dt}=\frac{-1}{5}(2)(\frac{5}{4})=\frac{-1}{2}$$

$$\boxed{\cos\theta=\frac{3}{5}:\sin^2\theta+\cos^2\theta=1\Rightarrow\sin^2\theta+\frac{9}{25}=1\Rightarrow\sin\theta=\frac{4}{5}}$$

18) أتحقَّق من فهمي 80 أمســك ولد ببكرة خيط طائرة ورقية تُحلِّق على ارتفاع 50 m فوق سطح الأرض، وتتحرَّك أفقيًّا بسرعة 2 m/s. أجد مُعدَّل تغيُّر الزاوية بين الخيط والمســتوى الأفقي عندما يكون طول الخيط 100 m، علمًا بأنَّ ارتفاع يد الولد عن الأرض 1.5 m

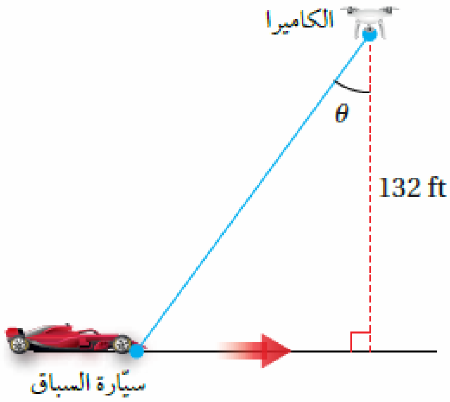


$$\tan\theta=\frac{50-1.5}{x}=\frac{48.5}{x}\Rightarrow\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt}=-\frac{48.5\frac{dx}{dt}}{x^2}$$



$$\frac{L^2}{x^2}\times\frac{d\theta}{dt}=-\frac{48.5\frac{dx}{dt}}{x^2}\Rightarrow\frac{d\theta}{dt}=-\frac{48.5\left(\frac{dx}{dt}\right)}{x^2}\times\frac{x^2}{L^2}=\frac{48.5\left(\frac{dx}{dt}\right)}{L^2}=-\frac{48.5(2)}{(100)^2}\approx-0.0097\text{ rad/s}$$

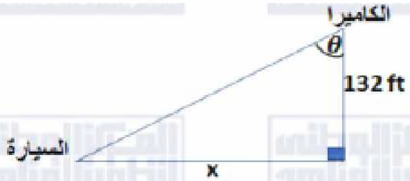
19) سباقات سيّارات: ترتفع كاميرا عن الأرض مسافة 132 ft، وترصد سيّارة تتحرَّك على مضمار ســباق، وتبلغ ســرعتها 264 ft/s كما في الشــكل المجاور:



⑱ أجد سرعة تغيُّر الزاوية θ عندما تكون السيّارة أسفل الكاميرا تمامًا.

⑲ أجد ســرعة تغيُّر الزاوية θ بعد نصف ثانية من مرور السيّارة أسفل الكاميرا تمامًا.

18 $\tan\theta=\dfrac{x}{132}$ $\sec^2\theta\dfrac{d\theta}{dt}=\dfrac{1}{132}\dfrac{dx}{dt}$



$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{132}\frac{dx}{dt}\times\cos^2\theta=\frac{1}{132}(-264)\cos^2 0=-2\text{ rad/s}$$

19 $\tan\theta=\dfrac{x}{132}$ $\dfrac{dx}{dt}=264$ ft/s بعد تجاوز السيارة للكاميرا تتزايد المسافة x حيث يصبح بعد نصف ثانية:

$x=0.5\times264=132$

$\tan\theta=1\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$

$$\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{132}\frac{dx}{dt}$$

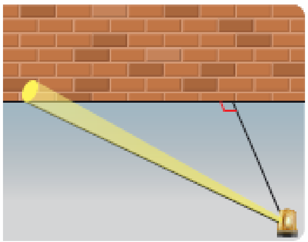
$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{132}\frac{dx}{dt}\times\cos^2\theta=\frac{1}{132}(264)\times\cos^2(\frac{\pi}{4})=2(\frac{1}{\sqrt{2}})^2=1\text{ rad/s}$$

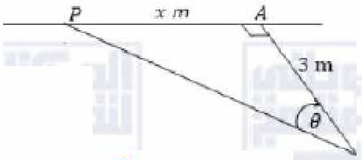
د) مُعدَّل التغيُّر بالنسبة إلى الزمن والحركة الدائرية

السرعة الزاويّة $w = \frac{\theta}{t}$

السرعة الزاوية : **هي مقدار التغير في قياس الزاوية بالراديان مقسوماً على الزمن**

20) أتحقّق من فهمي **82** يدور مصبـــاح مُثبَّت بـــالأرض حول نفســـه **4** دورات في الدقيقـــة، ويبعد مســـافة **3 m** عن جدار مســـتقيم كما في الشـــكل المجاور. أجد ســـرعة تحرُّك بقعة ضوء المصباح على الجدار عندما تكون على بُعْد **1 m** من أقرب نقطة إلى المصباح على الجدارأثناء حركتها مُقترِبة من هذه النقطة.





$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = 4(2\pi) = -8\pi \text{ rad/min}$$

$$\tan\theta = \frac{x}{3} \Rightarrow x = 3\tan\theta \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 3\sec^2\theta \frac{d\theta}{dt}$$

نجد قيمة $\sec^2\theta$ عندما $x = 1$

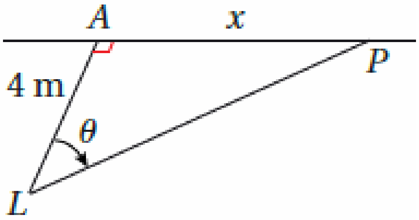
$$x = 3\tan\theta \Rightarrow 1 = 3\tan\theta \Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{3}$$

$$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta = 1 + \frac{1}{9} = \frac{10}{9} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 3\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt} = 3 \times \frac{10}{9} \times -8\pi = -\frac{80\pi}{3}$$

---

21) يدور مصباح مُثبَّت بالأرض حول نفسه **3** دورات في الدقيقة، ويبعد مسافة **4 m** عن جدار مستقيم. أجد سرعة تحرُّك بقعة ضوء المصباح على الجدار عندما تكون على بُعد **8 m** من أقرب نقطة إلى المصباح على الجدار أثناء حركتها مُبتعِدة عن هذه النقطة.

$$\boxed{\frac{d\theta}{dt} = \omega = \frac{\theta}{t} = \frac{6\pi}{1 \text{ min}} = 6\pi \text{ rad/ min}}$$



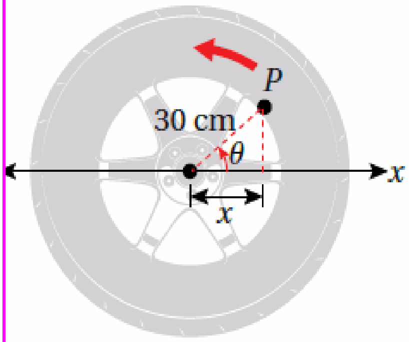
$$x = 4\tan\theta \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 4\sec^2\theta \times \frac{d\theta}{dt}$$

$$8 = 4\tan\theta \Rightarrow \tan\theta = 2 \Rightarrow \sec^2\theta = 5$$

$$\frac{dx}{dt} = 4(5) \times 6\pi = 120\pi$$

---

22) سـيّارات: عجلة سـيّارة طول نصف قُطْرها الداخلـي **30 cm**، وهي تدور بمُعدَّل **10** دورات في الثانية. رُسِـمت النقطـة P على حافة العجلة كما في الشكل المجاور: **88**



(21) أجد $\frac{dx}{dt}$ بدلالة θ.

(22) أجد $\frac{dx}{dt}$ عندما $\theta = \frac{\pi}{4}$.

21	$\omega = \frac{d\theta}{dt} = 10 \times 2\pi = 20\pi \text{ rad/s}$ $\cos\theta = \frac{x}{30} \Rightarrow x = 30\cos\theta \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -30\sin\theta\frac{d\theta}{dt} = -30(20\pi)\sin\theta = -600\pi\sin\theta$
22	$\frac{dx}{dt} = -600\pi\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{600\pi}{\sqrt{2}} \text{ cm/s}$

الدرس 2

القِيَم القصوى والتقعُّر Extreme Values and Concavity

القِيَم القصوى المُطلَقة

إذا كان f اقترانًا مجاله D، وكان c عددًا ينتمي إلى مجال الاقتران f، فإنَّ $f(c)$ هي:

- قيمة عظمى مُطلَقة للاقتران f في D إذا كان $f(c) \geq f(x)$ لجميع قِيَم x في D.
- قيمة صغرى مُطلَقة للاقتران f في D إذا كان $f(c) \leq f(x)$ لجميع قِيَم x في D.

يُطلَق على القِيَم الصغرى المُطلَقة والقِيَم العظمى المُطلَقة للاقتران اسم القِيَم القصوى المُطلَقة

(قصوى لا تعني عظمى فقط)

المحلية لا تكون على الأطراف

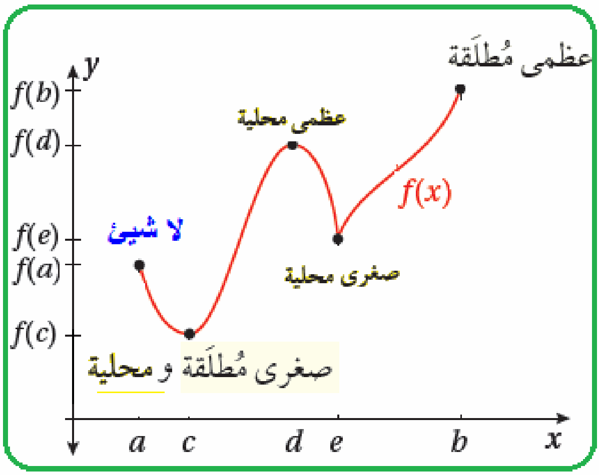
المطلقة قد تكون داخلية أو على الأطراف

النقطة على الأطراف : إما أن تكون مطلقة أو (لا شيء)

ضمن المجال : قد تكون النقطة محلية فقط ... f(d)

أو مطلقة فقط ... f(b)

أو محلية ومطلقة ... f(c)



قصوى تعني صغرى أو عظمى

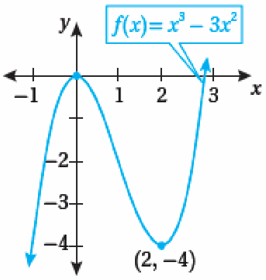
القِيَم القصوى المحلية

إذا كان c نقطة داخلية في مجال الاقتران f، فإنَّ $f(c)$ هي:

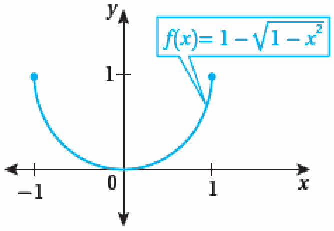
- قيمة عظمى محلية للاقتران f إذا كان $f(c) > f(x)$ لجميع قِيَم x في فترة مفتوحة تحوي c، وتقع كلها داخل المجال : **أكبر من أي قيمة في جوارها**
- قيمة صغرى محلية للاقتران f إذا كان $f(c) < f(x)$ لجميع قِيَم x في فترة مفتوحة تحوي c، وتقع كلها داخل المجال: **أصغر من أي قيمة في جوارها**

أتحقَّق من فهمي أجد القِيَم القصوى المحلية والقِيَم القصوى المُطلَقة (إنْ وُجِدت) للاقتران المعطى تمثيله البياني في كلٍّ ممّا يأتي:

a)



b)



ليس للاقتران f قيم قصوى مطلقة للاقتران قيمة عظمى محلية عند $x = 0$ هي 0 وله قيمة صغرى محلية عند $x = 2$ هي -4	a
للاقتران قيمة عظمى مطلقة عند 1 و -1 هي $f(\pm1) = 1$ وله قيمة صغرى محلية ومطلقة عند 0 هي 0	b

النقاط الحرجة :(critical points) هي النقاط الداخلية التي تكون عندها المشتقة صفرا أو غير موجودة، ويُسمّى الإحداثي x لكلٍّ من هذه النقاط قيمة حرجة

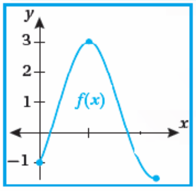
إذا كان للاقتران قيم قصوى محلية فهي عند النقاط الحرجة

ولكن العكس غير صحيح : فليس كل حرجة عندها قصوى محلية

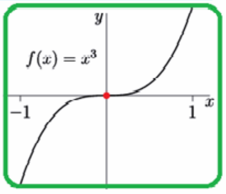
القيم القصوى المحلية لا تكون إلا عند القيم الحرجة

ولكن العكس غير صحيح

ليس كل قيمة حرجة يكون عندها قيمة قصوى محلية



يوجد قيمة حرجة
وعندها قيمة قصوى محلية



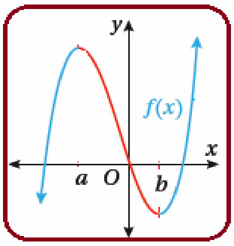
يوجد قيمة حرجة
ولا يوجد عندها قيم قصوى محلية

النقاط الحرجة تكون داخلية فقط
أي أن: الأطراف ليست حرجة

أي أن : النقاط الحرجة و القيم القصوى المحلية لا تكون على الأطراف

اختبار تزايد الاقترانات وتناقصها

- إذا كان: $f'(x) > 0$ لِقيَم x جميعها في الفترة I، فإنَّ f يكون مُتزايدًا على الفترة I.
- إذا كان: $f'(x) < 0$ لِقيَم x جميعها في الفترة I، فإنَّ f يكون مُتناقِصًا على الفترة I.



عندما تكون المشتقة الأولى موجبة ... يكون منحنى الاقتران متزايدا (لأن ميل جميع المماسات يكون موجباً)
و عندما تكون المشتقة الأولى سالبة ... يكون منحنى الاقتران متناقصا (لأن ميل جميع المماسات يكون سالباً)

باختصار : لإيجاد القيم الحرجة ، التزايد والتناقص والقيم القصوى المحلية نجد المشتقة الأولى
ونجد قيم (x) التي تجعلها صفراً أو غير موجودة

أتحقَّق من فهمي 99

أجد القيمة العظمى المُطلَقة والقيمة الصغـــرى المُطلَقة (إنْ وُجِدت) لكل اقتران ممّا يأتي في الفترة المعطاة:

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5, [-3, 5]$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x}, [-8, 8]$

c) $f(x) = \sin^2 x + \cos x, [0, 2\pi]$

أتحقَّق من فهمي 102

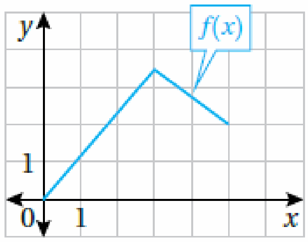
أجد القِيَم القصوى المحلية (إنْ وُجِدت) للاقتران: $f(x) = (x-1)e^x$

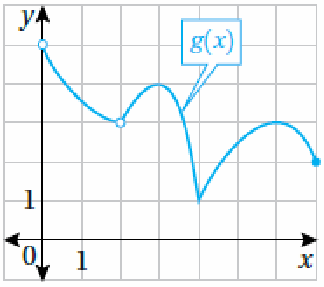
أتحقَّق من فهمي 103

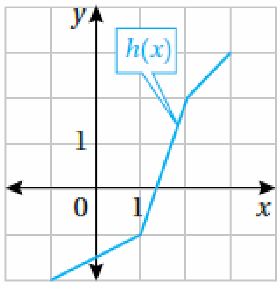
أجد القِيَم القصوى المحلية (إنْ وُجِدت) للاقتران: $f(x) = \sqrt[3]{x-3}$.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل 112

أجد القِيَم الحرجة والقِيَم القصوى المحلية والمُطلَقة (إنْ وُجِدت) للاقتران المُمثَّل بيانيًّا في كلٍّ ممّا يأتي:

①


②


③


أجد القيمة العظمى المُطلَقة والقيمة الصغرى المُطلَقة (إنْ وُجِدت) لكل اقتران ممّا يأتي في الفترة المعطاة:

④ $f(x) = 1 + 6x - 3x^2, [0, 4]$

⑤ $f(x) = (x+3)^{2/3} - 5, [-3, 3]$

⑥ $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}, [-2, 2]$

⑧ $f(x) = 2\cos x + \sin 2x, [0, \frac{\pi}{2}]$

⑩ $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}, [\frac{1}{2}, 4]$

⑫ $f(x) = \sqrt{4 - x^2}, [-2, 2]$

㉞ إذا كان للاقتـــران: $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ قيمـــة عظمى محلية عندمـــا $x = -3$، وقيمة صغرى محلية عند النقطة $(1, -14)$، فأجد قيمة كلٍّ من الثوابت: a، وb، وc.

ورقة عمل / القِيَم القصوى ، النقط الحرجة و التزايد والتناقص :

1) قصوى لا تعني عظمى فقط ، بل صغرى أو عظمى
2) المحلية والحرجة لا تكون على الأطراف (داخلية فقط)
3) النقاط الحرجة:النقاط الداخلية التي تكون عندها المشتقة صفرا أو غير موجودة،وتكون ضمن المجال(معرفة)
4) إذا كان للاقتران قيم قصوى محلية فهي عند النقاط الحرجة ولكن العكس غير صحيح
5) إذا كانت المشتقة الأولى موجبة فإن منحنى الاقتران متزايد وإذا كانت سالبة فهو متناقص
6) إذا تم إعطاء التمثيل البياني (رسمة) المشتقة الأولى للاقتران f(x) ، فلا ننظر إلى الشكل (متزايد أو متناقص)
بل نحوله إلى خط أعداد وإشارات للمشتقة الأولى : ما فوق المحور (x) موجب وما تحته سالب

1) إذا كان $f(x)=\sqrt{x^2-4x}$ ، فإن القيم الحرجة للاقتران f هي :

$a)\ 2 \qquad b)\ 0\ ,\ 4 \qquad c)\ 0\ ,\ 2\ ,\ 4 \qquad d)\ \phi$

2) إذا كان $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+4\ ,\ x\in[0\ ,\ 5]$ ، فإن القيم الحرجة للاقتران f هي :

$a)\ 3 \qquad b)-1\ ,\ 3 \qquad c)-1 \qquad d)\ 0\ ,\ 3\ ,\ 5$

3) إذا كان $f(x)=x^2-6x+1\ ,\ x\in[0\ ,\ 5]$ ، فإن للاقتران قيمة صغرى مطلقة هي :

$a)\ 3 \qquad b)-8 \qquad c)\ 1 \qquad d)-4$

4) إذا كان $f(x)=e^{\sin x}\ ,\ x\in[0\ ,\ \pi]$ ، فإن للاقتران قيمة عظمى محلية ومطلقة قيمتها :

$a)\ e \qquad b)-e \qquad c)\ e^{-1} \qquad d)\ 1$

5) إذا كان $f(x)=x^2e^{1-x}$ ، فإن الاقتران متزايد في الفترة :

$a)\ (0\ ,\ 1) \qquad b)\ (0\ ,\ 2) \qquad c)\ (2\ ,\ \infty) \qquad d)\ (-\infty,-2)\ ,\ (0\ ,\ \infty)$

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

6) إذا كان $f(x)=e^{\sqrt{6x-x^2}}$ ، فإن القيم الحرجة للاقتران هي :

$a)\ 0\ ,\ 6 \qquad b)-3 \qquad c)\ 0\ ,\ 3\ ,\ 6 \qquad d)\ 3$

7) إذا كان $f(x)=\cos 2x+8\ ,\ x\in[-\pi\ ,\ \pi]$ ، فإن للاقتران قيمة عظمى محلية ومطلقة عند :

$a)\ x=3 \qquad b)\ x=\pi \qquad c)\ x=0 \qquad d)-\pi$

8) إذا كان للاقتران $f(x)=x^3+ax^2+15x+1$ قيمة حرجة عند x = 3 فإن قيمة الثابت (a) =

$a)\ 7 \qquad b)-7 \qquad c)\ 1 \qquad d)\ 3$

9) إذا كانت (2 , 3) نقطة حرجة للاقتران $f(x)=x^2+2ax+b$ ، فإن قيم a , b هي :

$a)\ a=2\ ,b=1$ $b)\ a=-2, b=-1$ $c)\ a=-2\ , b=1$ $d)\ a=2\ , b=-1$

10) إذا كان مجال الاقتران f (x) هو الفترة [0 , 6] ومداه [2 , 8] ، وكانت f '(x) > 0 لجميع قيم x في الفترة (0 , 6) ، فإن f (6) تساوي :

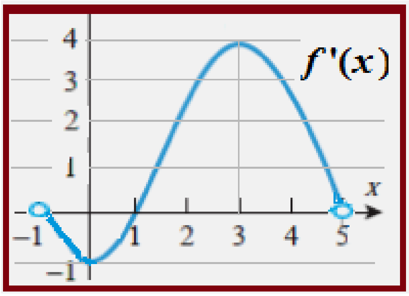
$a)\ 6$ $b)\ 0$ $c)\ 2$ $d)\ 8$

11) الاقتران الوحيد الذي له قيم حرجة فيما يأتي هو :

$a)\ f(x)=\dfrac{1}{x}$ $b)\ g(x)=\dfrac{5x}{x^2-4}$ $c)\ h(x)=x^3-1$ $d)\ k(x)=x\ e^{x^2+1}$

12) الاقتران الوحيد الذي له قيم قصوى محلية فيما يأتي هو :

$a)\ f(x)=\tan x$ $b)\ g(x)=Ln(x^2+4)$ $c)\ h(x)=x^3-1$ $d)\ k(x)=2x-8$



***إذا كان الاقتران f(x) معرف على الفترة [– 1 , 5] ، فاستعمل التمثيل البياني المجاور لمنحنى f '(x) للإجابة على الأسئلة (13– 16)

13) قِيَم x التي يكون عندها للاقتران f قِيَم قصوى محلية ، هي:

$a)\ 0\ ,\ 3$ $b)\ -1,4$ $c)\ 1$ $d)\ -1,\ 1\ ,5$

14) الاقتران متزايد في الفترة :

$a)\ (0\ ,3)$ $b)\ (-1,1)$ $c)\ (1,5)$ $d)\ (-1,5)$

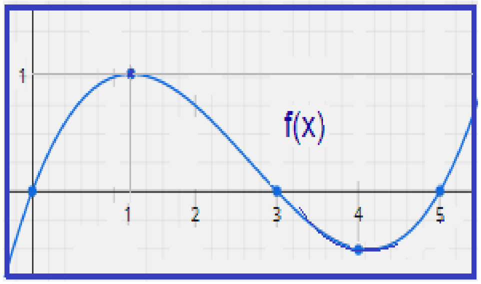
15) قيمة f '(3) تساوي:

a) 0 b) 4 c) 3 d) غير موجودة

16) قيمة f ''(3) تساوي:

a) 0 b) 4 c) 3 d) غير موجودة

*** f (x) كثير حدود من الدرجة الثالثة ، استعمل تمثيله البياني المجاور للإجابة على الأسئلة (17– 20)



17) القيم الحرجة للاقتران هي :

a) 0 , 3 b) 1 , 3 , 4 c) 0 , 1 , 4 , 5 d) 1 , 4

18) الاقتران متناقص في الفترة :

a) (1 , 4) b) (3 , 5) c) (0 , 5) d) (3 , ∞)

19) قِيَم x التي يكون عندها للاقتران f قِيَم قصوى محلية ، هي :

a) 0 , 3 , 5 b) 1 c) 0 , 1 , 3 , 4 , 5 d) 1 , 4

20) واحدة فقط من العبارات الآتية صحيحة :

$a)\ f\ '(2)>0$ $b)\ f\ '(3)=0$ $c)\ f\ ''(4)=0$ $d)\ f\ '(5)<\ 0$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
d	a	b	a	b	d	c	b	c	d	c	b	c	c	b	a	d	a	d	c

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح

الأستاذ عبدالقادر الحسنات

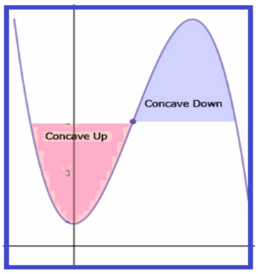
التقعُّر و الانعطاف

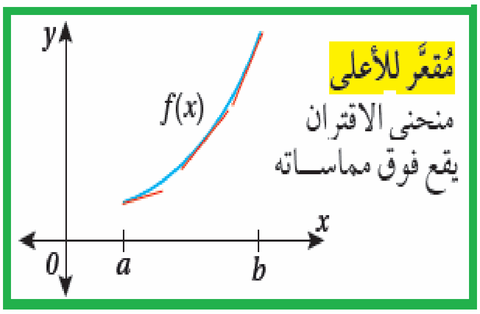
إذا كان منحنى (f ') مُتزايِدًا، فإنَّ إشارة مشتقته(f ") تكون موجبة ، وبالتالي منحنى f يكون مُقعَّرًا للأعلى

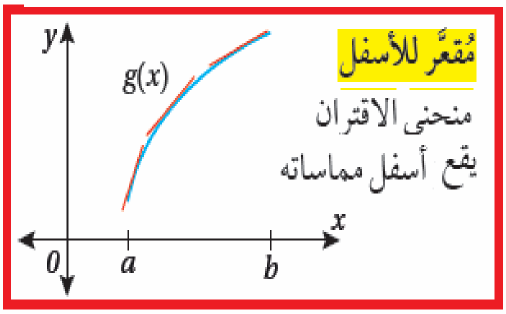
وإذا كان منحنى (f ') مُتناقِصًا، فإنَّ إشارة مشتقته(f ") تكون سالبة؛ ما يعني أنَّ منحنى f يكون مُقعَّرًا للأسفل

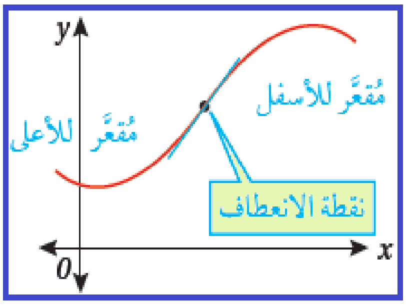
نظرية إذا كانت المشتقة الثانية للاقتران f موجودة على الفترة المفتوحة I، فإنَّ:

- منحنى f يكون مُقعَّرًا للأعلى على الفترة I إذا كان: $f''(x) > 0$ لجميع قِيَم x فيها.
- منحنى f يكون مُقعَّرًا للأسفل على الفترة I إذا كان: $f''(x) < 0$ لجميع قِيَم x فيها.





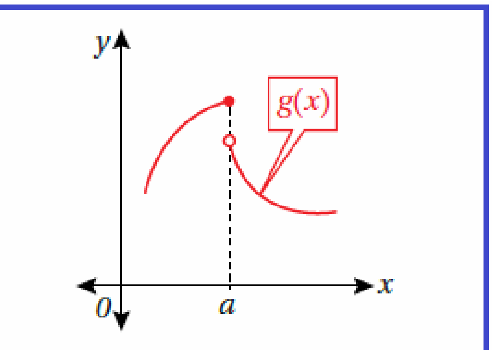




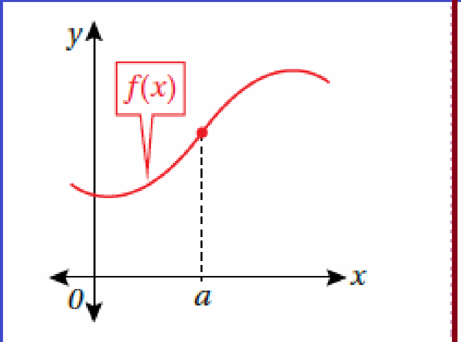
النقطة التي يُغيِّر عندها الاقتران اتجاه تقعُّره، تُسمّى نقطة انعطاف

تعريف نقطة الانعطاف

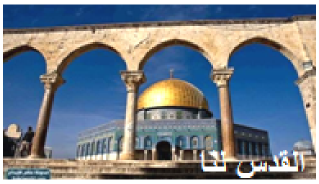
إذا كان الاقتــران f متصلاً على فترة مفتوحة تحوي c، وكان منحنى f قد غيَّر اتجاه تقعُّره عند c، فإنَّ النقطة $(c, f(c))$ تكون نقطة انعطاف لمنحنى f.



عدم وجود نقطة انعطــاف لمنحنى الاقتران g عنــدما $x = a$؛ لأنَّ الاقتران g غير متصل عند هذه النقطــة (بالرغم من تغيُّر اتجاه تقعُّر الاقتران عندها).

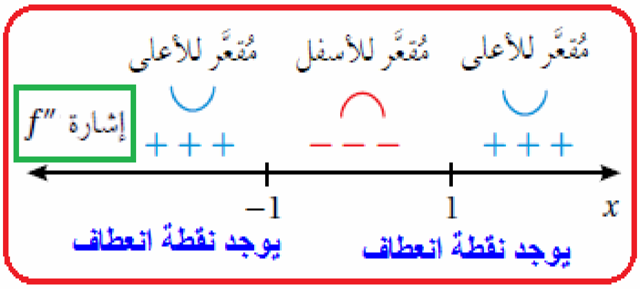


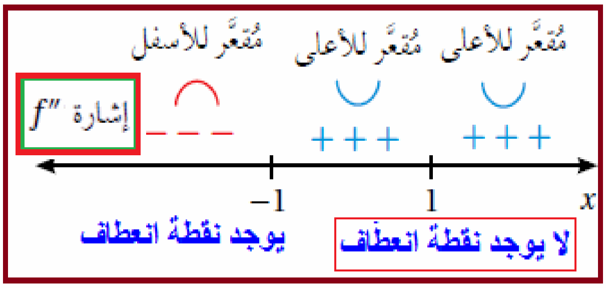
وجود نقطة انعطــاف لمنحنى الاقتران f عندما $x = a$؛ لأنَّ الاقتران f متصل عند هذه النقطة، وتغيَّر اتجاه تقعُّره عندها.



Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

نظرية إذا كانــت $(c, f(c))$ نقطة انعطاف لمنحنى الاقتران f، فإنَّ $f''(c) = 0$، أو تكون f'' غير موجودة عندما $x = c$.





أتحقق من فهمي أجد فترات التقعُّر للأعلى وللأسفل ونقاط الانعطاف (إنْ وُجِدت) لمنحنى كل اقتران ممّا يأتي:

b) $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$

a) $f(x)=(x-2)^3(x-1)$

أجد فترات التقعُّر للأعلى وللأسفل ونقاط الانعطاف (إنْ وُجِدت) لمنحنى كل اقتران ممّا يأتي:

㉓ $f(x)=\ln(x^2+5)$

㉒ $f(x)=\dfrac{3}{x^2+1}$

㉑ $f(x)=\sin x\,,\,[-\pi,\pi]$

㉟ إذا كان للاقتران: $f(x)=\sqrt{x+1}+\dfrac{b}{x}$ نقطة انعطاف عندما $x=3$، فأجد قيمة الثابت b.

نظرية اختبار المشتقة الثانية

بافتراض أنَّ f' و f'' موجودة لأيِّ نقطة في فترة مفتوحة تحوي c، وأنَّ $f'(c)=0$، فإنَّه يُمكِن استنتاج ما يأتي:

- إذا كانت $f''(c)<0$، فإنَّ $f(c)$ هي قيمة عظمى محلية للاقتران f.
- إذا كانت $f''(c)>0$، فإنَّ $f(c)$ هي قيمة صغرى محلية لـلاقتران f.

إذا كانت $f''(c)=0$، فإنَّ الاختبار يفشل

أتحقَّق من فهمي 110

إذا كان: $f(x)=xe^x$، فأستعمل اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القِيَم القصوى المحلية للاقتران f.

أجد القِيَم القصوى المحلية لكل اقتران ممّا يأتي، مُستعمِلًا اختبار المشتقة الثانية (إنْ أمكن):

㉘ $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$

㉗ $f(x)=\cos x-x,\ [0,4\pi]$

㉖ $f(x)=6x-x^2$

㉛ $f(x)=x^{2/3}-3$

㉚ $f(x)=\dfrac{x}{2^x}$

㉙ $f(x)=x\ln x$

تطبيقات : السرعة المتجهة والتسارع

الهدف هو تحديد الفترات الزمنية التي يتحرَّك فيها الجسم في الاتجاه الموجب والاتجاه السالب، والفترات الزمنية التي تكون فيها سرعته مُتزايِدة أو مُتناقِصة.

ملاحظات :1) يتحرَّك الجسم في الاتجاه الموجب عندما $v(t)>0$

2) يتحرَّك الجسم في الاتجاه السالب عندما $v(t)<0$

3) تكون سرعة الجسم المتجهة مُتزايِدة عندما يكون التسارع موجباً : $a(t)>0$

أتحقَّق من فهمي 112

يُمثِّل الاقتران: $s(t)=t^3-3t+3,\ t\geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم،

a) ما الفترات الزمنية التي يتحرَّك فيها الجسم في الاتجاه الموجب والاتجاه السالب؟

b) ما الفترات التي تتزايد فيها سرعة الجسم المتجهة؟ وما الفترات التي تتناقص فيها سرعة الجسم المتجهة؟

يُمثِّل الاقتران: $s(t)=t^3-2t^2+t,\ t\geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني: 114

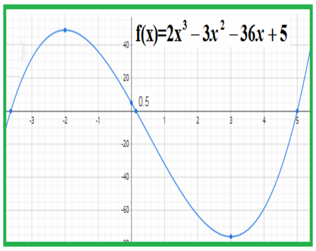
㊷ ما الفترات الزمنية التي يتحرَّك فيها الجسم في الاتجاه الموجب والاتجاه السالب؟

㊸ ما الفترات التي تتزايد فيها سرعة الجسم؟ وما الفترات التي تتناقص فيها سرعة الجسم؟

من خلال الرسم

يمكن استنتاج بعض خصائص الاقترانات المتعلقة بالقيم الحرجة ، التزايد والتناقص ، القيم القصوى المحلية ، التقعر والانعطاف من خلال التمثيل البياني لمنحنى الاقتران (رسمة المنحنى)

وهناك ثلاثة أنواع من المنحنيات ، وفيما يأتي وصف (غير علمي) لها:



1) منحنى f(x) :

القيم الحرجة تكون عند القيم الصغرى والعظمى المحلية الداخلية (حفرة أو جبل)

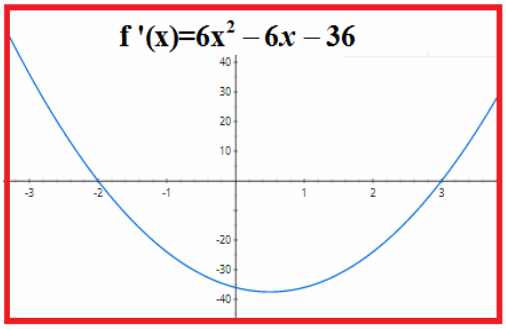
وهنا تكون المشتقة الأولى صفراً $f'(3)=0$, $f'(-2)=0$

التزايد والتناقص : يكون الاقتران متزايداً عندما يصعد منحناه إلى الأعلى كلما اتجهنا إلى اليمين ومتناقصا إذا كان ينزل إلى أسفل

التقعر : إذا كان المنحنى على شكل حفرة فهو مقعر للأعلى ، على شكل جبل مقعر للأسفل

هنا : مقعر للأعلى في $(0.5 , \infty)$ ، ومقعر للأسفل في $(-\infty, 0.5)$

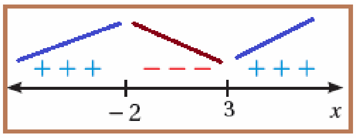
يوجد نقطة انعطاف عند $x = 0.5$



2) منحنى f '(x) : هنا لا ننظر إلى الشكل صاعد أو نازل (مهم جداً)

بل نحوله إلى خط أعداد وإشارات لـ (f ') :

ما فوق محور السينات موجب وما تحت السينات سالب



إشارة f '(x)

ثم من خلاله نحدد التزايد والتناقص والقصوى

ملاحظة مهمة : عندما يكون منحنى الاقتران متزايدا في فترة ما ، فإن مشتقته تكون موجبة في تلك الفترة

مثلاً هنا : منحنى f '(x) متزايد من 0.5 إلى مالا نهاية وبالتالي f "(x) تكون موجبة أي أن f(x) مقعر للأعلى

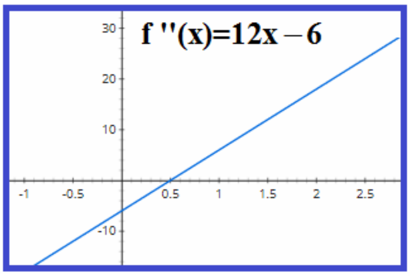
منحنى (f) متزايد ، إذاً (f ') موجبة
منحنى (f ') متزايد ، إذاً (f ") موجبة
منحنى (f ") متزايد ، إذاً (f "') موجبة
وهكذا ...

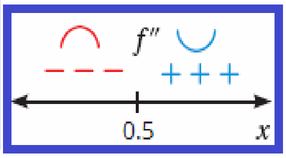
منحنى (f) متناقص ، إذاً (f ') سالبة
منحنى (f ') متناقص ، إذاً (f ") سالبة

3) منحنى f "(x) :

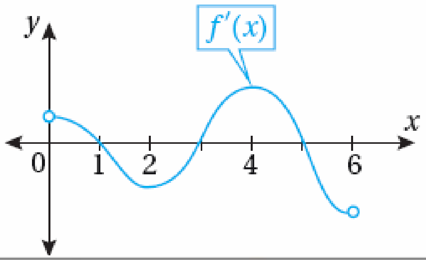
لتحديد التقعر والانعطاف ، نحوله إلى خط أعداد وإشارات

ما فوق محور السينات موجب وتحت السينات سالب



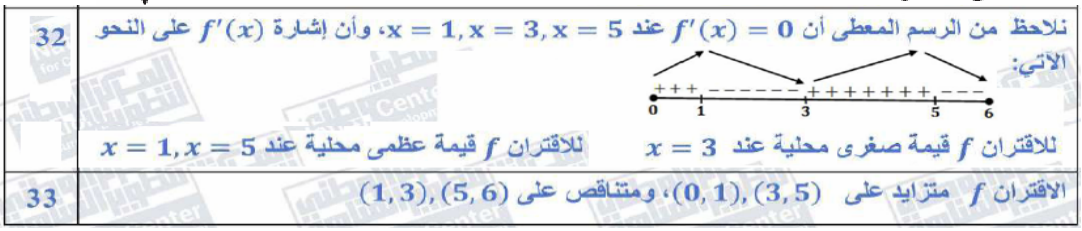


يُبيِّن الشكل المجاور منحنى المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$ المتصل على الفترة $[0, 6]$. أستعمل التمثيل البياني لإيجاد كلٍّ ممّا يأتي:

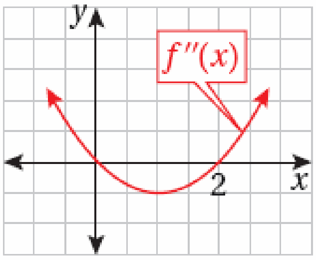


32 قِيَم x التي يكون عندها للاقتران f قِيَم قصوى محلية، مُبيِّنًا نوعها.

33 فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران f.



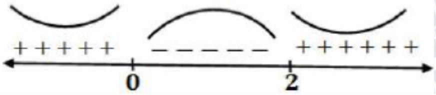
32	نلاحظ من الرسم المعطى أن $f'(x) = 0$ عند $x = 1, x = 3, x = 5$، وأن إشارة $f'(x)$ على النحو الآتي: + + + − − − − − − + + + + + + + + − − − 0 1 3 5 6 للاقتران f قيمة صغرى محلية عند $x = 3$ للاقتران f قيمة عظمى محلية عند $x = 1, x = 5$
33	الاقتران f متزايد على $(0, 1), (3, 5)$، ومتناقص على $(1, 3), (5, 6)$

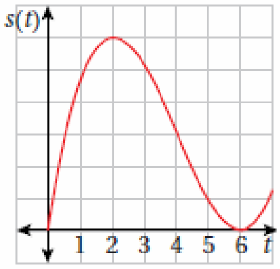


أستعمل التمثيل البياني المجاور لمنحنى $f''(x)$ لإيجاد كلٍّ ممّا يأتي:

㊱ فترات التقعُّر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران f.

㊲ الإحداثي x لنقاط انعطاف منحنى الاقتران f.

نلاحظ من الشكل أنّ $f''(x) = 0$ عند $x = 0$ و $x = 2$ ، وأنّ إشارة $f''(x)$ على النحو الآتي:  إشارة $f''(x)$ f مقعر للأسفل على $(0,2)$ ، f مقعر للأعلى على $(-\infty,0), (2,\infty)$	36
توجد نقطتا انعطاف عند $x = 0$ و $x = 2$	37



يُمثِّل الاقتران $s(t)$ المُبيَّن منحناه في الشكل المجاور موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

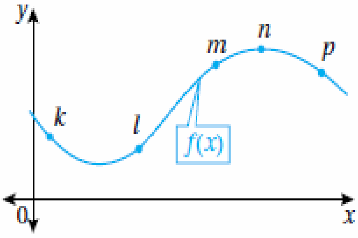
㊳ أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون.

㊴ ما الفترات الزمنية التي يتحرَّك فيها الجسم في الاتجاه الموجب والاتجاه السالب؟

㊵ إذا كان تسارع الجسم صفرًا عندما $t = 4$، فما الفترات التي تتزايد فيها سرعة الجسم المتجهة؟ وما الفترات التي تتناقص فيها سرعة الجسم المتجهة؟

يكون الجسم في حالة سكون عندما $v(t) = 0$ أي: $s'(t) = 0$ وهذا يحدث عندما يكون لمنحنى $s(t)$ مماس أفقي، أي عند $t = 2$ و $t = 6$	38
يتحرك الجسم في الاتجاه الموجب أو السالب تبعًا لإشارة $s'(t) = v(t)$، وهذه الإشارة ترتبط بكون منحنى $s(t)$ متزايدًا أو متناقصًا: يتحرك الجسم بالاتجاه الموجب في كل من الفترتين: $(0,2), (6,7)$ لأن اقتران الموقع متزايد فيهما. ويتحرك في الاتجاه السالب في الفترة $(2,6)$ لأن اقتران الموقع متناقص فيها.	39
تتزايد $v(t)$ عندما $s''(t) = v'(t)$ يكون موجبًا أي عندما يكون منحنى $s(t)$ مقعرًا للأعلى، أي في الفترة $(4,7)$ تتناقص $v(t)$ عندما $s''(t) = v'(t)$ يكون سالبًا أي عندما يكون منحنى $s(t)$ مقعرًا للأسفل، أي في الفترة $(0,4)$	40

مهارات التفكير العليا



تبرير: يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x)$. أُحدِّد النقطة (النقاط) من بين مجموعة النقاط: $\{k, l, m, n, p\}$ على منحنى الاقتران التي تُحقِّق كُلًّا من الشروط الآتية، مُبرِّرًا إجابتي:

㊺ أنْ تكون إشارة كلٍّ من $f'(x)$ و $f''(x)$ موجبة.

㊻ أنْ تكون إشارة كلٍّ من $f'(x)$ و $f''(x)$ سالبة.

㊼ أنْ تكون إشارة $f'(x)$ سالبة، وإشارة $f''(x)$ موجبة

l	45
p	46
k	47

ورقة عمل / التقعُّر والانعطاف

1) إذا كان منحنى (f ') مُتزايِدًا، فإنَّ إشارة مشتقته(f ") تكون موجبة ، وبالتالي منحنى f يكون مُقعَّرًا للأعلى
كذلك منحنى (f ') مُتناقِصً ← إشارة مشتقته (f ") سالبة ؛ ما يعني أنَّ منحنى f يكون مُقعَّرًا للأسفل

2) النقطة التي يُغيِّر عندها الاقتران اتجاه تقعُّره ، تُسمّى نقطة انعطاف بشرط أن يكون الاقتران متصلاً عندها

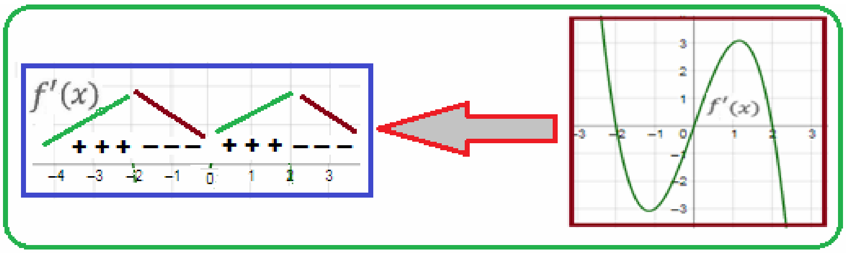
3) عند نقطة الانعطاف : المشتقة الثانية تكون صفرا أو غير موجودة

4) اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى : نجد $f'(x)$ ونساويها بالصفر لإيجاد أصفرها (جذورها)
ثم نجد $f''(x)$ ونعوض فيها تلك الجذور : فالموجب يكون عنده قيمة صغرى محلية
والسالب يكون عنده قيمة عظمى محلية ، أما الصفر فلا يعطي نتيجة ويجب فحصه عن طريق إشارة $f'(x)$

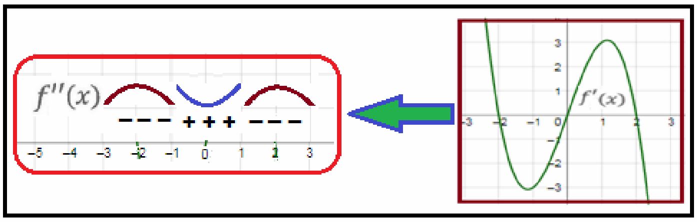
5) يتحرَّك الجسم في الاتجاه الموجب عندما $s'(t) = v(t) > 0$ ويتحرَّك في الاتجاه السالب عندما $s'= v(t)< 0$

6) تكون سرعة الجسم المتجهة مُتزايِدة عندما يكون التسارع موجباً : $s''(t) = a(t) > 0$ ... والعكس

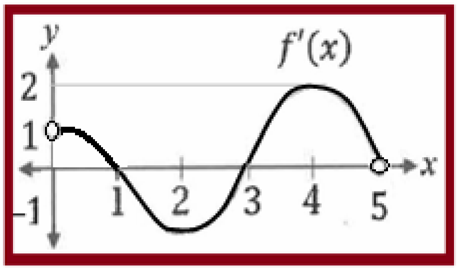
7) من خلال الرسم : إذا كان المعطى هو منحنى $f'(x)$ نحوله إلى خط أعداد وإشارات لـ (f ') :
ما فوق محور السينات (x) موجب وما تحت السينات سالب ثم من خلاله نحدد التزايد والتناقص والقصوى



8) عندما يكون منحنى الاقتران متزايدا في فترة ما ، فإن مشتقته تكون موجبة في تلك الفترة
مثلاً: منحنى $f'(x)$ متزايد إذا $f''(x)$ تكون موجبة أي أن $f(x)$ مقعر للأعلى ... وهكذا



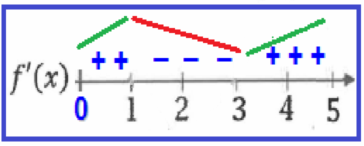
*** مثال : معتمدا الشكل المجاور والذي يمثل منحنى $f'(x)$ جد :



أ) القيم الحرجة ب) فترات التزايد والتناقص ج) القيم القصوى المحلية
د) فترات التقعر هـ) نقط الانعطاف

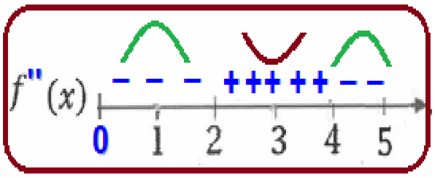
الحل :

أ) القيم الحرجة: x = 3 , x = 1



ب) متزايد في (0,1) ، (3,5) ومتناقص في (1,3)

ج) عظمى محلية عند x = 1 ، وصغرى محلية عند x = 3



د) مقعر للأسفل في (0,2) ، (4,5) ومقعر للأعلى في (2,4)

هـ) يوجد نقطتا انعطاف عند x = 4 , x = 2

تمارين

1) إذا كان $f(x)=2x^3+6x^2+7$، فإن للاقتران f نقطة انعطاف هي :

$a)\ (-1\ ,-6)\quad b)\ (-1\ ,0)\quad c)\ (-1\ ,11)\quad d)\ (-1,7)$

2) إذا كان $f(x)=x\ e^x$ ، فإن الإحداثي (x) لنقطة الانعطاف لمنحنى الاقتران f(x) هو :

$a)\ 1\quad b)\ -1\quad c)\ -2\quad d)\ 2$

3) إذا كان $f(x)=x^4-4x^3+1$ ، فإن منحنى f (x) مقعر للأسفل في الفترة :

$a)\ (2\ ,\infty)\quad b)\ (0\ ,2)\quad c)\ (-\infty\ ,2)\quad d)\ (-\infty\ ,0)$

4) إذا كان $f(x)=\sqrt[3]{x}-x$ ، فإن منحنى f (x) مقعر للأسفل في الفترة :

$a)\ (-\infty,0)\quad b)\ (1,\infty)\quad c)\ (\infty,0)\quad d)\ (0,\infty)$

5) إذا كان $f(x)=Ln(x^2+9)$ ، فإن الإحداثي (x) لنقطة (نقاط) الانعطاف لمنحنى الاقتران f(x) هو :

$a)\ 3\quad b)\ -3\quad c)\ -3,3\quad d)\ 0$

6) إذا كان $f(x)=2x-(a-5)x^2$ ، فإن قيم الثابت (a) التي تجعل منحنى f(x) مقعراً للأعلى هي :

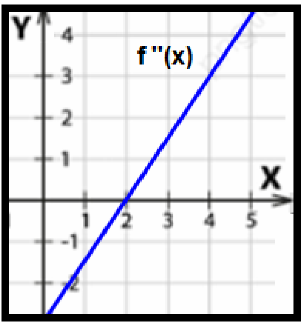
$a)\ (5\ ,\infty)\quad b)\ (-5\ ,\infty)\quad c)\ (-\infty\ ,-5)\quad d)\ (-\infty\ ,5)$

7) إذا كان $f(x)=4\cos x-ax^2$ له نقطة انعطاف عند $x=\frac{\pi}{3}$ فإن قيمة الثابت (a) هي :

$a)\ -1\quad b)\ \frac{1}{2}\quad c)\ -\frac{1}{2}\quad d)\ 1$

8) إذا كان $f''(1)<0\ ,\ f(1)=2\ ,\ f'(1)=0$ ، فإن (1 , 2) هي نقطة :

a) نقطة انعطاف b) قيمة صغرى محلية c) قيمة عظمى محلية d) لا شيء مما ذكر



*** معتمداً الشكل المجاور والذي يمثل منحنى المشتقة الثانية لكثير الحدود f(x)
إذا علمت أن للاقتران f نقطتان حرجتان عند x=0 و x=3 فأجب عن الفقرتين (9، 10)

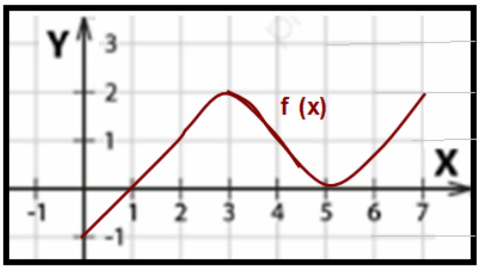
9) منحنى الاقتران متناقص في الفترة :

$a)\ (2,\infty)\quad b)\ (0\ ,3)\quad c)\ (-\infty,2)\quad d)\ (0,2)$

10) الإحداثي (x) لنقطة الانعطاف لمنحنى الاقتران f(x) هو :

$a)\ 3\quad b)\ 1\quad c)\ 2\quad d)\ 0$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c	c	b	d	c	d	a	c	b	c



*** معتمداً الشكل المجاور والذي يمثل منحنى كثير الحدود f(x) المعرف على [0,7] ، أجب عن الفقرات (11،12،13،14و15)

11) منحنى الاقتران مقعر للأعلى في الفترة :

$a)\ (1,7) \quad b)\ (4\ ,7) \quad c)\ (4,5) \quad d)\ (1,5)$

12) يوجد نقطة انعطاف لمنحنى الاقتران f(x) هي :

$a)\ (4,1) \quad b)\ (3,4) \quad c)\ (5,0) \quad d)\ (1,0)$

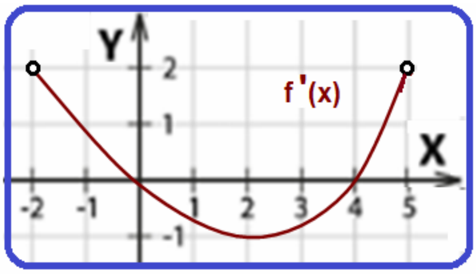
13) قيمة f '(3) تساوي :

$a)\ 2 \quad b)\ 0 \quad c)\ 1 \quad d)$ غير موجودة

14) قيمة f ' '(4) تساوي :

$a)\ 2 \quad b)\ 0 \quad c)\ 1 \quad d)$ غير موجودة

15) القيم الحرجة للاقتران f هي : $a)\ 0,3,5,7 \quad b)\ 4 \quad c)\ 3 \quad d)\ 3,5$



*** معتمداً الشكل المجاور والذي يمثل منحنى المشتقة الأولى لكثير الحدود f(x) المعرف على [– 2 ,5] ، أجب عن الفقرات (16،17،18،19)

16) منحنى الاقتران مقعر للأسفل في الفترة :

$a)\ \phi \quad b)\ (0\ ,3) \quad c)\ (-2,2) \quad d)\ (-2,5)$

17) الإحداثي (x) لنقطة الانعطاف لمنحنى الاقتران f(x) هو :

$a)\ 3 \quad b)\ 1 \quad c)\ 2 \quad d)\ 0$

18) العبارة الصحيحة فيما يأتي هي :

$a)\ f''(2)=0 \quad b)\ f''(3)<0 \quad c)\ f''(0)>0 \quad d)\ f''(2)=-1$

19) القيم الحرجة للاقتران f هي : $a)\ 2 \quad b)\ 0,3 \quad c)\ -2,0,3,5 \quad d)\ -2,5$

20) إذا كان مجال الاقتران المتصل هو [2 ,9] ومداه [4,7] ، وكانت $f'(x)>0$ لجميع قيم x ، فإن $f(2)$ تساوي :

$a)\ 9 \quad b)\ 2 \quad c)\ 7 \quad d)\ 4$

21) إذا كان الاقتران $s(t)=t^3-12t+3$ يمثل موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم ، فإن الفترة التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه السالب هي:

$a)\ (0,4) \quad b)\ (0,\infty) \quad c)\ (2,\infty) \quad d)\ (0,2)$

22) إذا كان الاقتران $s(t)=6t^2-t^3$ يمثل موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم ، فإن الفترة التي تكون فيها سرعة الجسم متزايدة :

$a)\ (0,4) \quad b)\ (0,\infty) \quad c)\ (2,\infty) \quad d)\ (0,2)$

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
b	a	b	b	d	c	c	a	a	d	d	d

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

السؤال الثاني : لكل من الاقترانات الآتية ، جد a) القيم الحرجة b) فترات التزايد والتناقص

c) القيم القصوى المحلية d) فترات التقعر للأعلى والأسفل e) نقاط الانعطاف (إن وجدت)

1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 5$

2) $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-4)^2}$

3) $f(x) = \cos^2 x - \sin x \quad , \quad [0, 2\pi]$

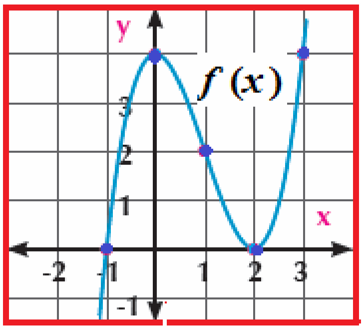
4) $f(x) = x^2 (x-1)^3$

5) $f(x) = \dfrac{e^x}{x+1}$

6) $f(x) = \dfrac{Lnx}{x-1}$

---

1) معتمدا الشكل المجاور والذي يمثل منحنى كثير الحدود f(x) ، جد:



أ) القيم الحرجة

ب) فترات التزايد والتناقص

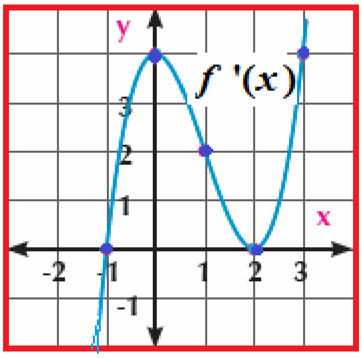
ج) القيم القصوى المحلة والمطلقة

د) فترات التقعر للأعلى والأسفل

هـ) نقط الانعطاف

---

2) معتمدا الشكل المجاور والذي يمثل منحنى المشتقة الأولى f '(x) ، حيث f(x) كثير حدود ، جد :



أ) القيم الحرجة

ب) فترات التزايد والتناقص

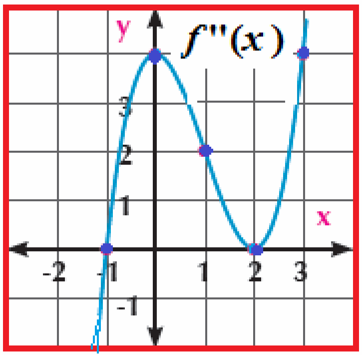
ج) القيم القصوى المحلة والمطلقة

د) فترات التقعر للأعلى والأسفل

هـ) نقط الانعطاف

---

4) معتمدا الشكل المجاور والذي يمثل منحنى المشتقة الثانية f "(x) ، حيث f(x) كثير حدود ، جد :



أ) f " (0)

ب) f "' (2)

جـ) فترات التقعر للأعلى والأسفل

هـ) نقط الانعطاف

و) إذا كان للاقتران f قيمتين حرجتين عند x = – 3 ، x = 0 : فجد فترات التزايد والتناقص للاقتران f ثم جد قيم (x) التي عندها قيم قصوى محددا نوعها

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

الدرس 3 تطبيقات القِيَم القصوى
Optimization Problems

تطبيقات التفاضل من أكثر الموضوعات استعمالاً في التطبيقات الحياتية والعلمية، مثل: تحديد أكبر ربح مُمكِن، أو أقل تكلفة مُمكِنة ، وإيجاد أقل جهد ، وأكبر مسافة.

ملخص طريقة الحل : نحدد الكمية المطلوب أن تكون عظمى أو صغرى ثم نكتب اقترانا يتضمنها (وهنا يجب أن يكون الاقتران بمتغير واحد فقط لأن الاشتقاق سيكون بدلالة ذلك المتغير ، بخلاف المعدلات المرتبطة حيث كان الاشتقاق بالنسبة للزمن فلم يكن ما يمنع من ووجود عدة متغيرات)

نحدِّد مجال الاقتران (إنْ أمكن) ثم نشتق ونساوي بالصفر لإيجاد القيم الحرجة

وملاحظة إشارة المشتقة لإيجاد القيم القصوى المطلقة (حسب المطلوب : أكبر ما يمكن أو أصغر ما يمكن)

المحاور الأساسية الواردة في الكتاب :

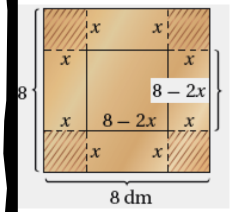
1) إيجاد أكبر حجم مُمكِن 2) إيجاد أقل طول مُمكِن 3) إيجاد أقرب مسافة 4) إيجاد أقل زمن مُمكِن

5) تطبيقات اقتصادية 6) إيجاد أكبر زاوية 7) تطبيقات في المستوى الإحداثي 8) إيجاد أكبر مساحة ممكنة

---

1) إيجاد أكبر حجم مُمكِن

1) مثال الكتاب: صندوق على شكل متوازي مستطيلات، صُنِع من قطعة كرتون رقيقة، مربعة الشكل، طولها 8 dm ، وذلك بقطع 4 مربعات متطابقة من زواياها، وطَيِّ الجوانب إلى الأعلى. أجد أبعاد الصندوق ليكون حجمه أكبر ما يُمكِن.



$$V(x)=(8-2x)\times(8-2x)\times x$$
$$=4x^3-32x^2+64x$$

الجواب $x=\frac{4}{3}$

---

2) مثال : قطعة من الورق المقوى مستطيلة الشكل ، نُرِيد صُنع صندوق على شكل متوازي مستطيلات منها : وذلك بقطع 4 مربعات متطابقة من زواياها ، وطَيِّ الجوانب إلى الأعلى ، إذا كان طول القطعة (21 cm) ، وعرضها (16 cm) ، جد أبعاد الصندوق ليكون حجمه أكبر ما يُمكِن .

الحل : الحجم = الطول × العرض × الارتفاع = (x)(16 – 2x)(21 – 2x)

الطول = 21 – 6 = 15 ، العرض = 16 – 6 = 10 ، الارتفاع = 3

---

3) مثال :صندوق على شكل متوازي مستطيلات، قاعدته مربّعة الشكل طول ضلعها (x cm) كما في الشكل المجاور. إذا كان مجموع أطوال أحرف الصندوق يساوي 144 cm ؛ فجد قيمة x التي تجعل حجم الصندوق أكبر ما يمكن.

الجواب : 12

---

4) مثال :يُبيّن الشكل المجاور متوازي مستطيلات ارتفاعه h متر،موضوعًا داخل هرم رباعي منتظم ارتفاعه 8 متر وطول ضلع قاعدته (4 m) بحيث تنطبق قاعدة متوازي المستطيلات على قاعدة الهرم، وتقع رؤوسه على أحرف الهرم . إذا علمتُ أنّ الهرم OPQRS والهرم OABCD متشابهان، فجد قيمة h التي تجعل حجم متوازي المستطيلات أكبر ما يُمكن.

الجواب : $h=\frac{8}{3}$

---

5) مثال : يُبيّن الشكل المجاور مخروطًا طول نصف قطر قاعدته(r cm)، وارتفاعه (h cm) حيث: r + h = 60 ، جد قيمتَي r و h اللتين يكون عندهما حجم المخروط أكبر ما يُمكن .

الحل: حجم المخروط = ثلث مساحة القاعدة × الارتفاع

الجواب : $r=40\ ,\ h=20$

---

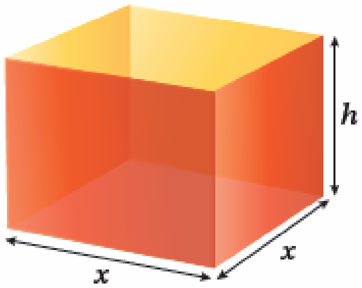
6) مثال : جد حجم أكبر أسطوانة يُمكن وضعها داخل مخروط نصف قطر قاعدته (5 cm) وارتفاعه (9 cm)

$$\Rightarrow V=\pi\left(\frac{10}{3}\right)^2(3)=\frac{100}{3}\pi$$

7) تمرين : جد أبعاد وحجم أكبر مخروط دائري قائم يمكن وضعه داخل تجويف كروي نصف قطره (3 cm) .

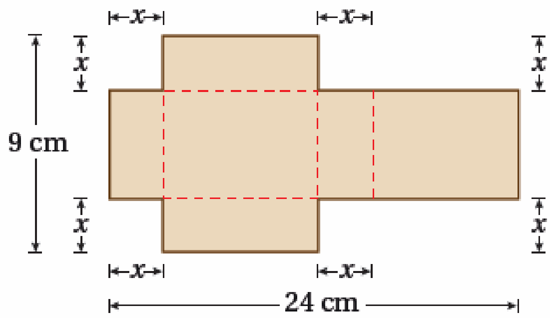
(الجـواب) : $V=\frac{32}{3}\pi \Rightarrow r=\sqrt{8}$, $h=4$

أتحقَّق من فهمي



ترغب شـــركة في تصميم صنـــدوق مفتوح مـــن الأعلى، وقاعدته مربعة الشكل، ومساحة سطحه الكلية $1080\ \text{cm}^2$ كما في الشكل المجاور. أجد أبعاد الصندوق ليكون حجمه أكبر ما يُمكِن

الحجم أكبر ما يمكن عندما $x=6\sqrt{10}\text{ cm}$



قطعـــة كرتون طولها 24 cm، وعرضها 9 cm، أُزيل منها مربعان متطابقان ومســـتطيلان متطابقان كما في الشكل المجاور، بحيث أمكن طيُّها، وتكوين صندوق له غطاء منها:

1. أكتب الاقتران $V(x)$ الذي يُمثِّل حجم الصندوق.
2. أُحدِّد مجال الاقتران V.
3. أجد أبعاد الصندوق بحيث يكون حجمه أكبر ما يُمكِن.

مجال الاقتران $V(x)$ هو $\left(0,\frac{9}{2}\right)$	2	$V(x)=(12-x)(9-2x)x=2x^3-33x^2+108x$	1
حجم الصندوق يكون أكبر ما يمكن عندما تكون أبعاده: 2 m, 5 m, 10m، ⇦		$V(2)=100$	3

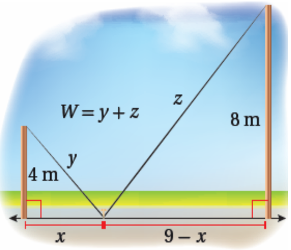
---

⑳ يُبيِّن الشـــكل المجاور نافذة مُكوَّنة من جزأين؛ أحدهما علوي على شكل نصف دائرة قُطْرها x m، والآخر سفلي على شكل مستطيل عرضه x m وارتفاعه y m. صُنِع الجزء العلوي من زجاج مُلوَّن يســـمح بمرور 1 وحدة ضوء لكل متر مربع، وصُنِع الجزء الســـفلي من زجاج شفّاف يســـمح بمرور 3 وحدات ضوء لكل متر مربـــع. أجد قيمة كلٍّ من x وy التي تجعل كميـــة الضوء المارِّ خلال النافذة أكبر ما يُمكِن، علمًا بأنَّ 10 m من المعدن الرقيق استُعمِل في تشكيل إطار النافذة كاملًا، بما في ذلك القطعة الفاصلة بين الجزأين.

تكون كمية الضوء المار خلال النافذة أكبر ما يمكن عندما: $x=\frac{60}{24+5\pi}$ ، $y=\frac{60+10\pi}{24+5\pi}$	⑳

2) إيجاد أقل طول مُمكِن

8) مثال الكتاب: عمودان طول أحدهما 8 m ، وطول الآخر 4 m ، والمسافة بينهما 9 m ، وهما مُثبَّتان بسلكين يصلان قِمَّة كل عمود بوتد عند سطح الأرض كما في الشكل المجاور. أجد الموقع المناسب لتثبيت الوتد بين العمودين بحيث يكون طول السلك المُستعمَل أقل ما يُمكِن.



$$W(x) = \sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{(9 - x)^2 + 64}$$

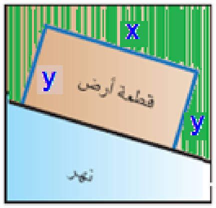
$$W'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}} + \frac{-(9 - x)}{\sqrt{(9-x)^2 + 64}} = 0$$

الجواب : x = 3

9) مثال: قطعة أرض مستطيلة الشكل مساحتها $(400\ m^2)$ ، جد بعديها بحيث يكون محيطها أقل ما يمكن

الجـواب: $10\sqrt{2}$

10) مثال: أراد رجل شراء قطعة أرض مستطيلة الشكل مساحتها $(450\ m^2)$ ، ويقع أحد جوانبها بمحاذاة نهر كما في الشكل المجاور. ما بُعدا هذه القطعة اللذين يجعلان طول السياج اللازم لإحاطتها من الجهات الثلاث الأخر أقل ما يمكن؟ وإذا كانت تكلفة المتر الواحد من السياج (10 JD) ، فكم تبلغ قيمة هذه التكاليف؟

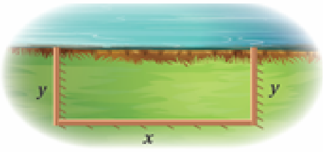


المحيط = الطول + العرض + العرض = 60

التكلفة = 600

11) أتحقق من فهمي

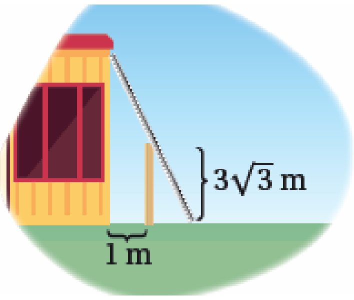
خطَّط مُزارِع لتســييج حظيرة مســتطيلة الشكل قرب نهر كما في الشكل المجاور، وحدَّد مساحة الحظيرة بـ $245000\ m^2$؛ لتوفير كمية عشب كافية لأغنامه. أجــد أبعاد الحظيرة التي تجعل طول الســياج أقل مــا يُمكِن، علمًا بأنَّ الجــزء المُقابِل للنهر لا يحتاج إلى تسييج.

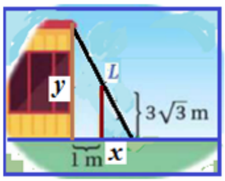


X=700 , y = 350

12) مسألة اليوم

يحيط ســياج ارتفاعه $3\sqrt{3}$ m بمبنى، ويبعد عنه مسافة 1 m كما في الشــكل المجاور. أجد طول أقصر سُلَّم قد يصل من الأرض إلى المبنى، ويمرُّ فوق السياج مُلامِسًا له.





$$L^2 = (x+1)^2 + y^2$$

$$L^2 = (x+1)^2 + 27(1+x^{-1})^2$$

$$L = \sqrt{(x+1)^2 + 27(1+x^{-1})^2}$$

$$L' = \frac{2(x+1) + 54(1+x^{-1})(-x^{-2})}{2\sqrt{(x+1)^2 + 27(1+x^{-1})^2}} = 0$$

$$\Rightarrow 2x + 2 - 54x^{-2} - 54x^{-3} = 0$$

$$\Rightarrow x^4 + x^3 - 27x - 27 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$\Rightarrow y = 3\sqrt{3}(1+3^{-1}) = 4\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow y^2 = 27(1+x^{-1})^2$$

$$L^2 = (x+1)^2 + y^2$$

$$L^2 = (3+1)^2 + (4\sqrt{3})^2 = 16 + 48$$

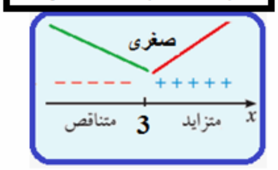
$$\Rightarrow L = \sqrt{64} = 8$$

من التشابه

$$\frac{y}{3\sqrt{3}} = \frac{x+1}{x} = 1 + x^{-1}$$

$$\Rightarrow y = 3\sqrt{3}(1+x^{-1})$$

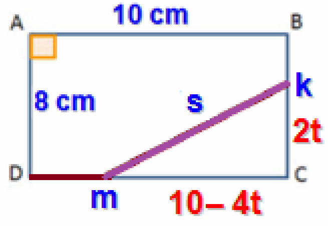
$$\Rightarrow y^2 = 27(1+x^{-1})^2$$



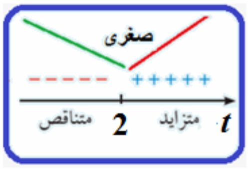
Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

3) إيجاد أقرب مسافة

13) مثال: ABCD مستطيل ، بدأت النقطة (m) الحركة من (D) متجهة إلى (C) بسرعة (4 cm / s)
وفي نفس الوقت تحركت النقطة (k) من (C) باتجاه (B) وبسرعة (2 cm/s)
بعد كم ثانية تصبح المسافة بين النقطتين أقل ما يمكن ؟



الحل : نفرض أنه بعد (t) ثانية كانت المسافة بينهما أقرب ما يمكن



$$s^2 = (10-4t)^2 + (2t)^2 \Rightarrow s = \sqrt{100-80t+16t^2+4t^2}$$

$$s' = \frac{-80+40t}{2\sqrt{100-80t+20t^2}} = 0 \Rightarrow -80+40t = 0 \Rightarrow t = 2$$

(14

أتحقَّق من فهمي

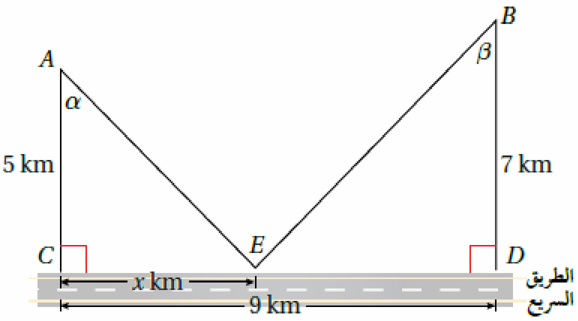
انطلـق قطار مـن إحـدى المحطّات السـاعة **10:00 a.m.**، وتحـرَّك في اتجـاه الجنوب بسـرعة **60 km/h**، حيـث المحطّـة التالية. وفـي الوقت نفسـه، انطلق قطار آخـر نحو الغرب بسـرعة **45 km/h**، ثم وصل إلى محطَّة انطلاق القطار الأوَّل الساعة **11:00 a.m.**

في أيِّ ساعة يكون القطاران أقرب ما يُمكِن إلى بعضهما؟

يكون القطاران أقرب ما يمكن إلى بعضهما عندما $t = \frac{9}{25}\ h$ أي بعد 21 دقيقة و36 ثانية وتكون الساعة حينئذ 10: 21: 36

(25

يُمارِس يوسـف هواية ركوب الدرّاجـات. وفي أحد الأيام، انطلق على درّاجته مـن البيت عند النقطة A إلى المدرسة عند النقطة B، مارًّا بالنقطة E الواقعة على حافة الطريق السريع كما في الشكل المجاور:



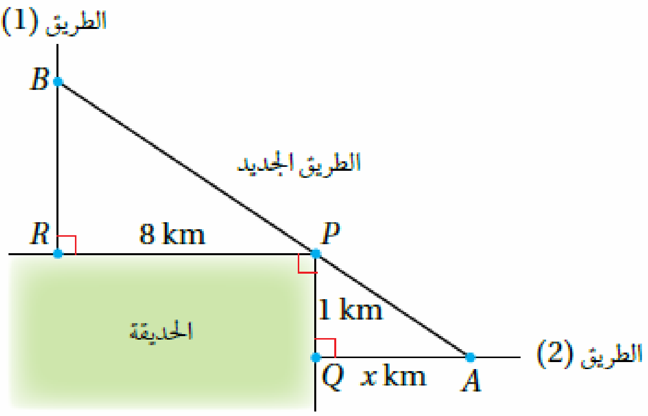
㉑ إذا كان الاقتـران L يُمثِّل المسـافة التي يقطعها يوسف من البيت إلى المدرسة، فأكتب L بدلالة x.

㉒ أثبِت أنَّه إذا كان: $\frac{dL}{dx} = 0$، فإنَّ: $\sin\alpha = \sin\beta$.

㉓ أجد قيمة x التي تجعل المسافة التي يقطعها يوسف أقل ما يُمكِن.

㉑	$L = AE + EB = \sqrt{x^2+25} + \sqrt{(9-x)^2+49} \quad ,0 \le x \le 9$
㉒	$\frac{dL}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+25}} + \frac{-(9-x)}{\sqrt{(9-x)^2+49}}$ $\frac{dL}{dx} = 0 \rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+25}} = \frac{9-x}{\sqrt{(9-x)^2+49}} \rightarrow \sin\alpha = \sin\beta$
㉓	إذن قيمة x التي تجعل المسافة التي يقطعها يوسف أقل ما يمكن هي 3.75 km

24 يُبيِّن الشكل المجاور مدخلين لحديقة عامة عند النقطة R والنقطة Q، ويُمكِن الوصول إلى هذين المدخلين من طريقين عموديين على ضلعي الحديقة. أرادت البلدية إنشاء طريق جديد يصل بين الطريقين القديمين، ويمرُّ بالنقطة P التي تُمثِّل زاوية الحديقة، فاختارت النقطة A والنقطة B على الطريقين ليكون طول الطريق الجديد أقصر ما يُمكِن، علمًا بأنَّ النقطة A تقع على بُعد x km من النقطة Q. أجد قيمة x التي تجعل طول الطريق الجديد أقصر ما يُمكِن.



24 ليكن L طول AB ، النقاط A و B و P على استقامة واحدة، إذن المثلثان القائمان AQP,PRB متشابهان،

ينتج عن ذلك: $\frac{BR}{1}=\frac{8}{x}\to BR=\frac{8}{x}$

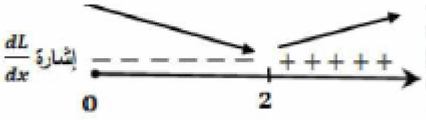
$$L=AP+PB=\sqrt{1+x^2}+\sqrt{64+\left(\frac{8}{x}\right)^2}$$

$$=\sqrt{1+x^2}+\sqrt{\frac{64x^2+64}{x^2}}=\sqrt{1+x^2}+\frac{8}{x}\sqrt{1+x^2}=\sqrt{1+x^2}\left(1+\frac{8}{x}\right),x>0$$

$$\frac{dL}{dx}=\sqrt{1+x^2}\left(-\frac{8}{x^2}\right)+\left(1+\frac{8}{x}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{-8\sqrt{1+x^2}}{x^2}+\frac{8+x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\frac{dL}{dx}=0\to\frac{8\sqrt{1+x^2}}{x^2}=\frac{8+x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\to 8(1+x^2)=8x^2+x^3\to x^3=8\to x=2$$

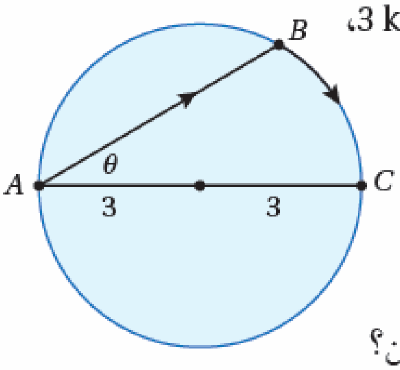


إذن قيمة x التي تجعل طول الطريق الجديد أقصر ما يمكن هي: x = 2 km

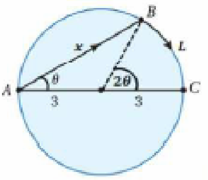
4) إيجاد أقل زمن مُمكِن

25 تبرير: يقف رجل عند النقطة A على شاطئ بحيرة دائرية نصف قُطْرها 3 km، وهو يريد الوصول إلى النقطة C المقابلة تمامًا للنقطة A، على الجانب الآخر من البحيرة، في أقصر وقت مُمكِن كما في الشكل المجاور.

يُمكِن للرجل أنْ يَجدِف بزورق من النقطة A إلى النقطة B بسرعة 3 km/h، ثم يركض حول حافة البحيرة بسرعة 6 km/h.



أُحدِّد موقع النقطة B ليصل الرجل من النقطة A إلى النقطة C في أقل وقت مُمكِن؟



ليكن الزمن الكلي الذي يحتاجه الرجل للوصول إلى النقطة C هو T

$$T=T_{A\to B}+T_{B\to C}=\frac{x}{3}+\frac{L}{6}$$

$$=\frac{6\cos\theta}{3}+\frac{3(2\theta)}{6}=2\cos\theta+\theta\ ,0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{dT}{d\theta}=1-2\sin\theta=0\to\sin\theta=\frac{1}{2}\to\theta=\frac{\pi}{6}$$

$T(0)=2\text{ h}$ $T\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}\approx 2.25\text{ h}$ $T\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\approx 1.57\text{ h}$

5) تطبيقات اقتصادية

الهدف دائماً إيجاد أعلى ربح ، أو أعلى إيراد، أو أقل تكلفة لمُنتَج مُعيَّن .
اقتران التكلفة يُرمَز إليه بالرمز $C(x)$. ويُطلَق على مُعدَّل تغيُّر C بالنسبة إلى x اسم التكلفة الحدِّية $(C'(x))$
اقتران الإيراد يُرمَز إليه بالرمز $R(x)$. ومشتقة اقتران الإيراد $R'(x)$ فتُسمّى الإيراد الحدِّي

بناءً على ما سبق، فإنَّ اقتران الربح $P(x)$ يعطى بالاقتران الآتي: $P(x) = R(x) - C(x)$
والربح الحدِّي هو $P'(x)$

---

12) مثال: يبيع أحد المحلات جهاز الحاسوب بمبلغ $(s(x) = 1000 - x)$ دينار ، حيث x عدد الأجهزة المبيعة.
فإذا كانت تكلفة إنتاج x من هذه الأجهزة تُعطى بالاقتران $C(x) = 3000 + 20x$ ؛
فجد عدد الأجهزة التي يجب بيعها للحصول على أكبر ربح ممكن.

الجـواب: $x = 490$

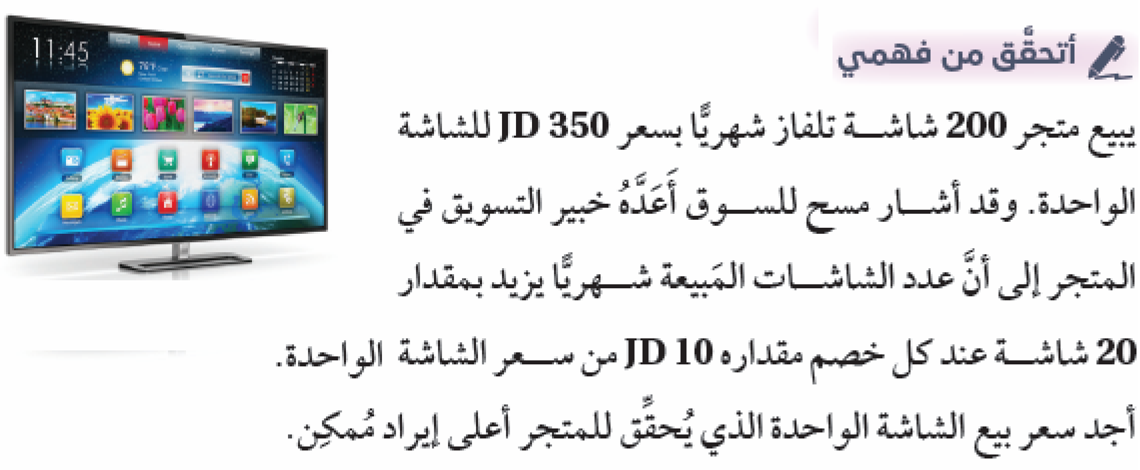
---

13) مثال: تنتج إحدى شركات الأدوات الكهربائية خلال فترة زمنية محددة كمية (x) من الخلاطات الكهربائية..

إذا كان معدل كلفة إنتاج كل قطعة (بالدينار) يعطى بالعلاقة $C(x) = x - 20 + \dfrac{400}{x}$

أ) جد عدد القطع المنتجة خلال الفترة لتحقيق أقل كلفة ممكنة
ب) إذا كانت كل قطعة منتجة تباع بمبلغ 100 دينار ، فجد عدد القط التي تحقق أكبر ربح ممكن

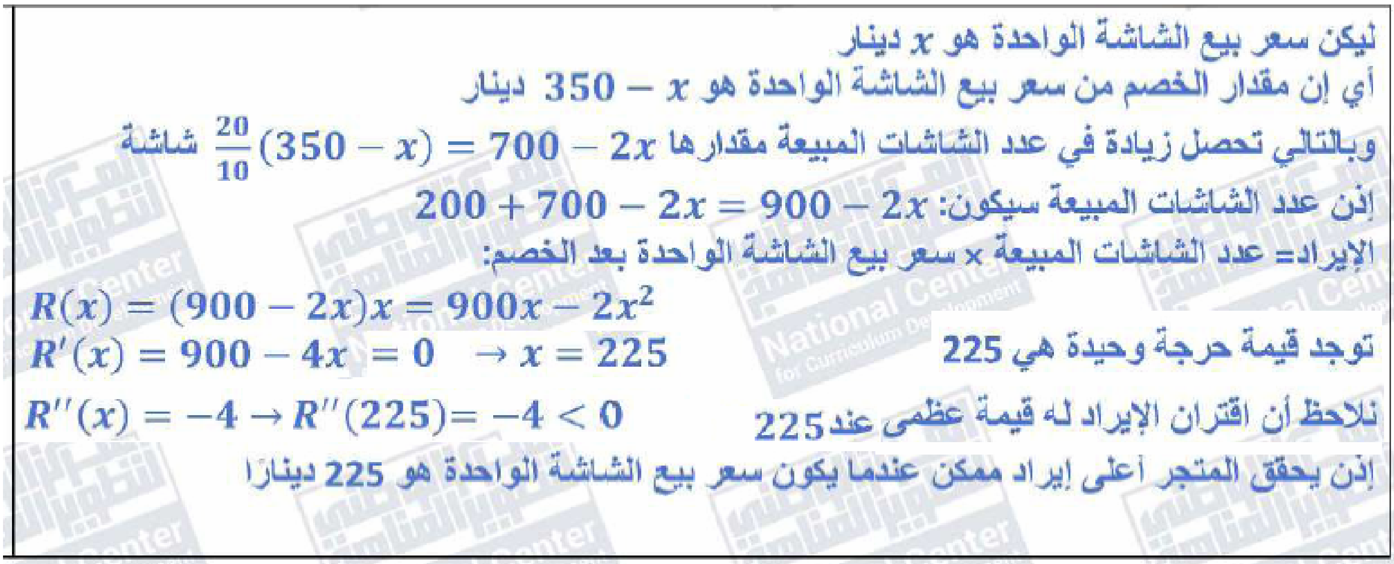
الجـواب: $x = 20$, $x = 60$



أتحقَّق من فهمي

يبيع متجر 200 شاشة تلفاز شهريًّا بسعر JD 350 للشاشة الواحدة. وقد أشار مسح للسوق أَعَدَّهُ خبير التسويق في المتجر إلى أنَّ عدد الشاشات المَبيعة شهريًّا يزيد بمقدار 20 شاشة عند كل خصم مقداره JD 10 من سعر الشاشة الواحدة.

أجد سعر بيع الشاشة الواحدة الذي يُحقِّق للمتجر أعلى إيراد مُمكِن.



ليكن سعر بيع الشاشة الواحدة هو x دينار
أي إن مقدار الخصم من سعر بيع الشاشة الواحدة هو $350 - x$ دينار
وبالتالي تحصل زيادة في عدد الشاشات المبيعة مقدارها $\frac{20}{10}(350 - x) = 700 - 2x$ شاشة
إذن عدد الشاشات المبيعة سيكون: $200 + 700 - 2x = 900 - 2x$
الإيراد= عدد الشاشات المبيعة x سعر بيع الشاشة الواحدة بعد الخصم:

$$R(x) = (900 - 2x)x = 900x - 2x^2$$

$$R'(x) = 900 - 4x \ = 0 \quad \rightarrow x = 225$$

توجد قيمة حرجة وحيدة هي 225

$$R''(x) = -4 \rightarrow R''(225) = -4 < 0$$

نلاحظ أن اقتران الإيراد له قيمة عظمى عند225
إذن يحقق المتجر أعلى إيراد ممكن عندما يكون سعر بيع الشاشة الواحدة هو 225 دينارًا

يُمثِّل الاقتران: $s(x) = 150 - 0.5x$ سعر البدلة الرجالية (بالدينار) الذي حدَّدته إحدى الشركات، حيث x عدد البدلات المَبيعة.

ويُمثِّل الاقتران: $C(x) = 4000 + 0.25x^2$ تكلفة إنتاج x بدلة:

⑨ أجد اقتران الإيراد.

⑩ أجد اقتران الربح.

⑪ أجد عدد البدلات اللازم بيعها لتحقيق أكبر ربح مُمكِن، ثم أجد أكبر ربح مُمكِن.

⑫ أجد سعر البدلة الواحدة الذي يُحقِّق أعلى ربح مُمكِن.

⑨	$R(x) = xp(x) = 150x - 0.5x^2$
⑩	$P(x) = R(x) - C(x) = 150x - 0.5x^2 - 4000 - 0.25x^2$ $= 150x - 0.75x^2 - 4000$
⑪	$P'(x) = 150 - 1.5x \implies P'(x) = 0 \rightarrow 150 - 1.5x = 0 \rightarrow x = 100$ $P''(x) = -1.5 \rightarrow P''(100) = -1.5 < 0 \implies P(100) = 3500\,JD$ إذن لتحقيق أكبر ربح ممكن يلزم بيع 100 بدلة، وتكون عندها قيمة الربح:
⑫	عندما $x = 100$ ، فإن سعر البدلة الواحدة يساوي: $p(100) = 150 - 0.5(100) = 100\,JD$

⑬ تُنتِج مزرعة للتفّاح 30 صندوقًا من الشجرة الواحدة تقريبًا عند زراعة 20 شجرة في كل فَدّان من الأرض. ويقل إنتاج الشجرة الواحدة بمقدار صندوق عند زراعة شجرة إضافية في كل فَدّان بسبب قرب الأشجار الشديد بعضها من بعض. ما عدد الأشجار التي يجب زراعتها في كل فَدّان لتحقيق أكبر إنتاج مُمكِن؟

⑬

ليكن عدد الأشجار التي ستزرع في الفدان هو x شجرة حيث $x \geq 20$

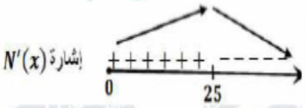
إذن عدد الأشجار الزائدة على العشرين شجرة هو: $x - 20$

سينقص عدد الصناديق التي تنتجها كل شجرة بمقدار $(x - 20)$ صندوق

ويكون عدد الصناديق التي تنتجها كل شجرة: $30 - (x - 20) = 50 - x$

سيكون اقتران الانتاج الكلي من الفدان:(عدد الأشجار×عدد الصناديق من كل شجرة)

$N(x) = x(50 - x) = 50x - x^2$



$N'(x) = 50 - 2x$

$N'(x) = 0 \rightarrow 50 - 2x = 0 \rightarrow x = 25$

إذن يتحقق أكبر إنتاج عندما يتم زرع 25 شجرة في كل فدان

$20 \rightarrow 30$

$21 \rightarrow 29$

$22 \rightarrow 28$

.

.

$20 = x \rightarrow 30 - x$

$\Rightarrow R = (20 + x)(30 - x) = 600 = 10x - x^2$

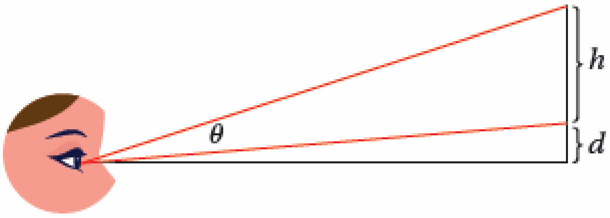
$\Rightarrow R' = 10 - 2x = 0 \Rightarrow x = 5$

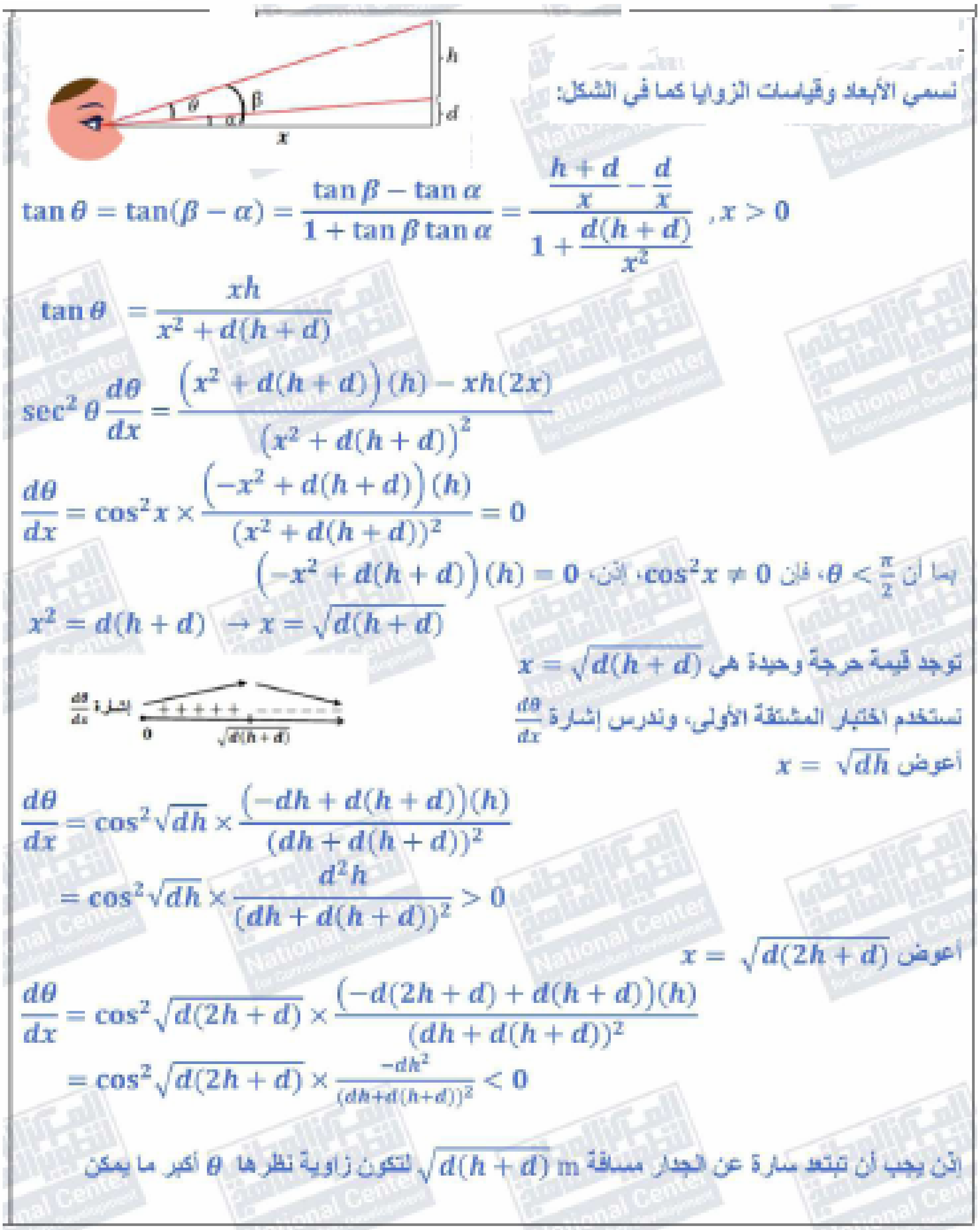
$\Rightarrow$ 25 : عدد الاشجار

6) إيجاد أكبر زاوية

أتحقَّق من فهمي

نظرت ســارة إلى لوحة مُعلَّقة على حائط في منزلها، ارتفاعها h مترًا، وارتفاع حافتها السفلية d مترًا فوق عينها كما في الشكل المجاور. كم مترًا يجب أنْ تبتعد ســارة عن الجدار لتكون زاوية نظرها θ أكبر ما يُمكِن؟





نسمي الأبعاد وقياسات الزوايا كما في الشكل:

$$\tan\theta = \tan(\beta-\alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha} = \frac{\frac{h+d}{x} - \frac{d}{x}}{1+\frac{d(h+d)}{x^2}}\ , x > 0$$

$$\tan\theta = \frac{xh}{x^2+d(h+d)}$$

$$\sec^2\theta\frac{d\theta}{dx} = \frac{\left(x^2+d(h+d)\right)(h) - xh(2x)}{\left(x^2+d(h+d)\right)^2}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \cos^2 x \times \frac{\left(-x^2+d(h+d)\right)(h)}{(x^2+d(h+d))^2} = 0$$

بما أن $\theta < \frac{\pi}{2}$، فإن $\cos^2 x \neq 0$، إذن، $\left(-x^2+d(h+d)\right)(h) = 0$

$$x^2 = d(h+d) \ \to x = \sqrt{d(h+d)}$$

توجد قيمة حرجة وحيدة هي $x = \sqrt{d(h+d)}$

نستخدم اختبار المشتقة الأولى، وندرس إشارة $\frac{d\theta}{dx}$

أعوض $x = \sqrt{dh}$

$$\frac{d\theta}{dx} = \cos^2\sqrt{dh} \times \frac{\left(-dh+d(h+d)\right)(h)}{(dh+d(h+d))^2}$$

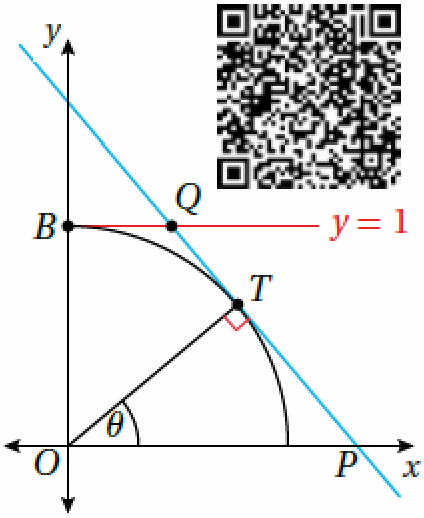
$$= \cos^2\sqrt{dh} \times \frac{d^2h}{(dh+d(h+d))^2} > 0$$

أعوض $x = \sqrt{d(2h+d)}$

$$\frac{d\theta}{dx} = \cos^2\sqrt{d(2h+d)} \times \frac{\left(-d(2h+d)+d(h+d)\right)(h)}{(dh+d(h+d))^2}$$

$$= \cos^2\sqrt{d(2h+d)} \times \frac{-dh^2}{(dh+d(h+d))^2} < 0$$

إذن يجب أن تبتعد سارة عن الجدار مسافة $\sqrt{d(h+d)}$ m لتكون زاوية نظرها θ أكبر ما يمكن



تقع النقطة T على دائرة الوحدة التي معادلتها: $x^2 + y^2 = 1$، حيث تَصنَع القطعة المستقيمة OT الزاوية θ مع محور x الموجب، و $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ كما في الشكل المجاور:

⑰ أُثبِت أنَّ معادلة المستقيم PT هي: $x\cos\theta + y\sin\theta = 1$

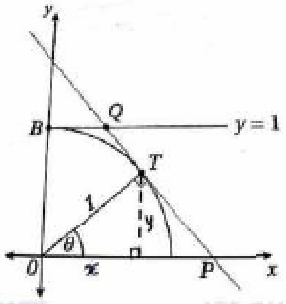
⑱ أُثبِت أنَّ مساحة شبه المُنحرِف $OBQP$ تعطى بالاقتران الآتي:

$$A = \frac{2 - \sin\theta}{2\cos\theta}$$

⑲ أجد قياس الزاوية θ الذي تكون عنده مساحة شبه المُنحرِف أقل ما يُمكِن.

⑰

$\sin\theta = \frac{y}{1} \;, \cos\theta = \frac{x}{1} \;\; \rightarrow T(\cos\theta \,, \sin\theta)$



ميل OT يساوي $\tan\theta$ لأن زاوية ميله θ ،

ومنه فإن ميل TP يساوي $\frac{-\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{-1}{\tan\theta}$ لأنه يعامد OT

معادلة TP :

$$y - \sin\theta = \frac{-\cos\theta}{\sin\theta}(x - \cos\theta)$$

$$\rightarrow y\sin\theta - \sin^2\theta = -\cos\theta\,(x - \cos\theta)$$

$$\rightarrow y\sin\theta - \sin^2\theta = -x\cos\theta + \cos^2\theta \;\; \rightarrow y\sin\theta + x\cos\theta = 1$$

⑱

$$A = \frac{1}{2}(OP + BQ)(OB)$$

لإيجاد OP نضع y=0 في معادلة المستقيم TP فنجد أنّ :

$$0 + x\cos\theta = 1 \rightarrow x = \frac{1}{\cos\theta} = OP$$

لإيجاد BQ نضع y=1 في معادلة المستقيم TP فنجد أنّ:

$$\sin\theta + x\cos\theta = 1 \rightarrow x = \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} = BQ$$

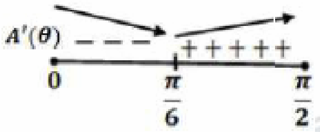
ومنه تكون مساحة شبه المنحرف هي:

$$A(\theta) = \frac{1}{2}(OP + BQ)(OB) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos\theta} + \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}\right)(1) = \frac{2-\sin\theta}{2\cos\theta}$$

⑲

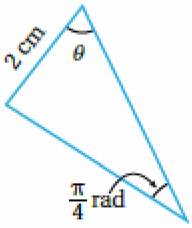
$$A'(\theta) = \frac{(2\cos\theta)(-\cos\theta) - (2-\sin\theta)(-2\sin\theta)}{4\cos^2\theta} = \frac{2\sin\theta - 1}{2\cos^2\theta}$$

$$A'(\theta) = 0 \;\; \rightarrow 2\sin\theta - 1 = 0 \;\; \rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2} \;\; \rightarrow \; \theta = \frac{\pi}{6}$$



تكون مساحة شبه المنحرف أقل ما يمكن عندما $\theta = \frac{\pi}{6}$

تحدٍّ: يُبيِّن الشكل المجاور مثلثًا، قياس إحدى زواياه $\frac{\pi}{4}$ **rad**، ومُقابِلها ضلع طوله **2 cm**:

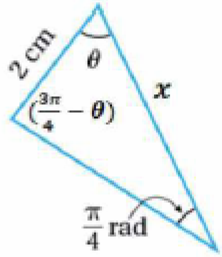


26 أُثبِت أنَّ مساحة المثلث A تعطى بالاقتران: $A = \sin 2\theta - \cos 2\theta + 1$.

27 أجد مجال الاقتران في السؤال السابق.

28 أُثبِت أنَّ أكبر مساحة مُمكِنة للمثلث هي: $(1 + \sqrt{2})\ \text{cm}^2$.

26



ليكن طول الضلع الآخر من ضلعي الزاوية θ هو x، فيكون قياس الزاوية المقابلة له هو $(\pi - \theta - \frac{\pi}{4})$ أي $\left(\frac{3\pi}{4} - \theta\right)$

ولتكن مساحة هذا المثلث A، فإنّ: $A = \frac{1}{2} \times 2 \times x \times \sin\theta$

وبتطبيق قانون الجيوب على هذا المثلث ينتج أن:

$$\frac{2}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{x}{\sin(\frac{3\pi}{4} - \theta)} \Longrightarrow x = 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \theta\right)$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\sin\frac{3\pi}{4}\cos\theta - \cos\frac{3\pi}{4}\sin\theta\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\right)$$

$$= 2(\cos\theta + \sin\theta)$$

$$A = \frac{1}{2} \times 2 \times 2(\cos\theta + \sin\theta) \times \sin\theta$$

$$= 2(\cos\theta + \sin\theta) \times \sin\theta \quad = 2\cos\theta\sin\theta + 2\sin^2\theta$$

$$= 2\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta + 1 - \cos^2\theta$$

$$= 2\cos\theta\sin\theta - (\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 1$$

إذن، مساحة المثلث المعطى هي: $= \sin 2\theta - \cos 2\theta + 1$

27

المجال هو الفترة التي تكون فيها مساحة المثلث عددًا حقيقيًا موجبًا وهو هنا الفترة $(0, \frac{3\pi}{4})$ التي طرفاها جذري اقتران المساحة لأن المساحة عند هذين الحدين تكون صفرًا وعند أي عدد بينهما تكون عددًا موجبًا،

فإذا كانت $\theta = \frac{\pi}{6}$، تكون مساحة المثلث: $A = \sin\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{3} + 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + 1 \approx 1.37 > 0$

28

$A'(\theta) = 2\cos 2\theta + 2\sin 2\theta = 0$

$2\sin 2\theta = -2\cos 2\theta \qquad \tan 2\theta = -1 \rightarrow 2\theta = \frac{3\pi}{4} \rightarrow \theta = \frac{3\pi}{8}$

توجد قيم حرجة وحيدة ضمن مجال الاقتران هي $\theta = \frac{3\pi}{8}$

لذلك نقارن قيمة الاقتران عند النقطة الحرجة مع قيمتيه عند طرفي المجال.

$$A(0) = \sin 0 - \cos 0 + 1 = 0$$

$$A\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \sin\frac{3\pi}{4} - \cos\frac{3\pi}{4} + 1 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 1 = \frac{2}{\sqrt{2}} + 1 = \sqrt{2} + 1$$

$$A\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\frac{3\pi}{2} - \cos\frac{3\pi}{2} + 1 = -1 - 0 + 1 = 0$$

إذن، أكبر قيمة ممكنة (العظمى المطلقة) لمساحة المثلث هي: $A\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \sqrt{2} + 1 = 1 + \sqrt{2}$

7) تطبيقات في المستوى الإحداثي

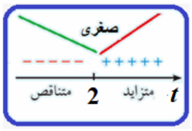
14) مثال: جد النقطة (x , y) الواقعة في الربع الأول على منحنى الاقتران ($y^2 = 2x - 1$) والتي أقر ما يمكن إلى النقطة (3 , 0)

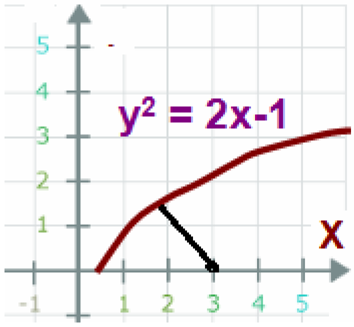
$$D=\sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x-3)^2+2x-1}$$

$$\Rightarrow D'=\frac{2(x-3)+2}{2\sqrt{(x-3)^2+2x-1}}=0\Rightarrow x=2$$

$$\Rightarrow y^2=2(2)-1\Rightarrow y=\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow (2,\sqrt{3})$$ ...(النقطـــة)





أتحقّق من فهمي

أجــد النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتــران: $f(x)=\sqrt{8x}$، التي هي أقرب ما يُمكِن إلى النقطة (4, 2).

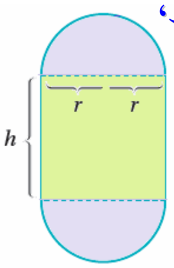
الجـواب : (2,4)

4 أجد النقطة الواقعة على منحنى العلاقة: $4x^2+y^2=4$، التي هي أقرب ما يُمكِن إلى النقطة (0, 1).

الجـواب : $(\frac{\sqrt{5}}{3},\frac{4}{3}),(\frac{-\sqrt{5}}{3},\frac{4}{3})$

8) إيجاد أكبر مساحة ممكنة

15) مثال: سلك طوله (100 cm) يُراد ثنيه لإحاطة شباك مكوّن من مستطيل طوله (h cm) وعرضه (2r cm) ، ونصفَي دائرة نصف قطر كل منهما (r cm) في أعلى المستطيل وأسفله كم في الشكل المجاور، جد أكبر مِساحة مغلقة يُمكن للسلك إحاطتها.



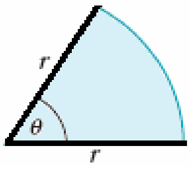
الحل : الاقتران الذي يمثل مساحة المنطقة المطلوبة = مساحة نصفي الدائرة + مساحة المستطيل

محيط الشباك = طول السلك

الجـواب : $r=\frac{50}{\pi}\ ,A=\frac{2500}{\pi}$

---

16) مثال: يُبيّن الشكل المجاور قطاعًا دائريًّا محيطه (200 cm)، جد أكبر مِساحة ممكنة للقطاع الدائري.

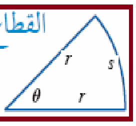


الجـواب : $A=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}r^2(\frac{200-2r}{r})\Rightarrow r=50$

القطاع الدائري

$A=\frac{1}{2}r^2\theta$

$s=r\theta\ (\theta\,\text{radian})$



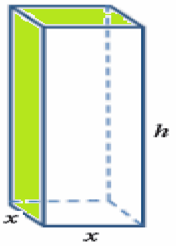
---

17)مثال:يُريد حداد صنع صندوق من الصفيح على شكل متوازي مستطيلات قاعدته مربعة ومفتوح من الأعلى .إذا كان الحجم المطلوب ($32000\ cm^3$)؛فجد أبعاد الصندوق التي تجعل كمّية الصفيح المستعملة في تصنيعه أقلّ ما يُمكن .

الحل : المطلوب أن تكون المساحة الجانبية ومساحة القاعدة السفلية أصغر ما يمكن

وهذا يعني : مساحة القاعدة + المساحة الجانبية

= مساحة المربع + محيط القاعدة × الارتفاع:



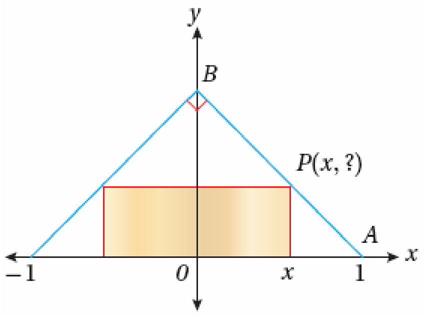
$$A=x^2+4xh$$

$$V=x\times x\times h$$

$$V=x^2h=32000\Rightarrow \text{h}=\frac{32000}{x^2}$$

الجـواب : $x=40,\text{h}=20$

أتدرّب وأحلّ المسائل



يُبيِّن الشكل المجاور مستطيلًا مرسومًا داخل مثلث قائم الزاوية. وهو متطابق الضلعين، وطول قاعدته 2 وحدة طول:

5 أجد الإحداثي y للنقطة P بدلالة x.

6 أكتب مساحة المستطيل بدلالة x.

7 أجد أكبر مساحة مُمكِنة للمستطيل.

8 أجد أبعاد المستطيل التي تجعل مساحته أكبر ما يُمكِن.

5 المثلث قائم ومتطابق الضلعين، إذن قياس كل زاوية من زوايا قاعدته $\frac{\pi}{4}$

ميل المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ هو $\tan\frac{3\pi}{4} = -1$ وهو يمر بالنقطة $A(1,0)$

معادلة $\overleftrightarrow{AB}$ هي: $y - 0 = -1(x-1) \rightarrow y = 1 - x$ إذن، الإحداثي y للنقطة P هو $1 - x$.

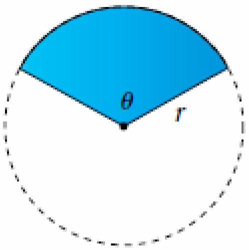
6 مساحة المستطيل = طوله × عرضه $A = 2xy = 2x(1-x) = 2x - 2x^2$,$0 < x < 1$

7 $A'(x) = 2 - 4x$

$A'(x) = 0 \rightarrow 2 - 4x = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2} \rightarrow A(0) = A(1) = 0,\ A\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

للاقتران A قيمة عظمى مطلقة هي: $A\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ ، إذن أكبر مساحة ممكنة للمستطيل هي $\frac{1}{2}$ وحدة مربعة.

8 الأبعاد التي تجعل مساحة المستطيل أكبر ما يمكن هي: الطول: $2x = 1$، والعرض: $y = 1 - x = \frac{1}{2}$



لدى مُزارِع P مترًا طوليًّا من سياج، يرغب في استعماله كاملًا لتسييج حقل رَعْي على شكل قطاع دائري، زاويته θ بالراديان، في دائرة نصف قُطْرها r مترًا كما في الشكل المجاور:

14 أُثبِت أنَّ طول السياج اللازم إحاطة الحقل به هو: $P = r(\theta + 2)$.

15 أُثبِت أنَّ مساحة القطاع هي: $A = \frac{1}{2}Pr - r^2$.

16 أجد نصف قُطْر القطاع بدلالة P الذي تكون عنده مساحة الحقل أكبر ما يُمكِن.

14 ليكن L طول قوس القطاع الدائري المظلل، إذن: $P = r + r + L = 2r + r\theta = r(2 + \theta)$

15 لتكن A مساحة القطاع الدائري المظلل، إذن:

$A = \frac{1}{2}r^2\theta$

وبما أن $P = r(2 + \theta)$ فإن $\theta = \frac{P-2r}{r} = \frac{P}{r} - 2$

$A = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}r^2\left(\frac{P}{r} - 2\right) = \frac{1}{2}Pr - r^2$

16 $A'(r) = \frac{1}{2}P - 2r$

$A'(r) = 0 \rightarrow \frac{1}{2}P - 2r = 0 \rightarrow r = \frac{1}{4}P$

$A''(r) = -2 \rightarrow A''\left(\frac{1}{4}P\right) = -2 < 0$ تكون مساحة الحقل أكبر ما يمكن عندما $r = \frac{1}{4}P$

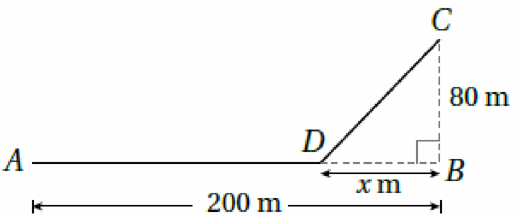
من كتاب التمارين

1 إذا كان a cm و b cm همــا طولــي ضلعين ثابتين في مثلث، وكانت الزاوية بينهما θ، فأجد قيمة θ التي تجعل مســاحة المثلث أكبر ما يُمكِن.

2 ترغب شـــركة في تصميم خزّان من الفولاذ الرقيق المُقاوِم للصدأ على شـــكل متوازي مســـتطيلات، حجمه $500\ \text{m}^3$، وقاعدته مربعة الشكل، ومفتوح من الأعلى. أجد الأبعاد التي تجعل مساحة سطح الخزّان أقل ما يُمكِن.

يمتدُّ مســـار للركض شرقًا من النقطة A إلى النقطة B مسافة **200 m**، وتقع النقطة C على بُعْد **80 m** شمال النقطة B.

انطلق راكب على درّاجة من النقطة A إلى النقطة D بسرعة **10 m/s**، حيث تقع النقطة D على بُعْد x مترًا غرب النقطة B، ثم سار في طريق مستقيم وَعِر من النقطة D إلى النقطة C بسرعة **6 m/s**:



3 أجد اقترانًا بدلالة x يُمثِّل الزمن الذي سيستغرقه راكب الدرّاجة في الانتقال من النقطة A إلى النقطة C.

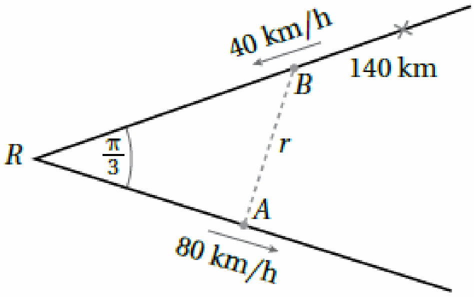
4 بافتراض أنَّ x قيمة مُتغيِّرة، أجد قيمة x التي يكون عندها الزمن اللازم للانتقال من النقطة A إلى النقطة C أقل ما يُمكِن.

سلك يبلغ طوله **24 cm**، ويراد قَصُّه إلى قطعتين لصنع دائرة ومربع:

5 أُحدِّد مكان القَصِّ، بحيث يكون مجموع مساحتي الدائرة والمربع أصغر ما يُمكِن.

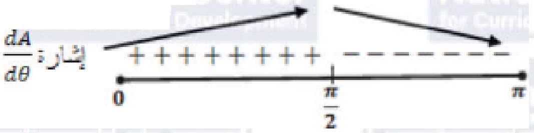
6 أُحدِّد مكان القَصِّ، بحيث يكون مجموع مساحتي الدائرة والمربع أكبر ما يُمكِن.

7 يلتقي طريقان مســـتقيمان عند النقطة R بزاوية قياســـها $\frac{\pi}{3}$. إذا انطلقت الســـيّارة A من النقطة R على أحد الطريقين بســـرعة 80 km/h، وفي الوقت نفســـه انطلقت السيّارة B بسرعة 40 km/h على الطريق الآخر في اتجاه النقطـــة R من نقطة تبعد عنها مســـافة 140 km، فأجد أقصر مسافة مُمكِنة بين السيّارتين.



1 $A = \frac{1}{2}ab\sin\theta \Rightarrow \frac{dA}{d\theta} = \frac{1}{2}ab\cos\theta$ ، $0 < \theta < \pi$

$\frac{dA}{d\theta} = 0 \Rightarrow \cos\theta = 0 \to \theta = \frac{\pi}{2}$

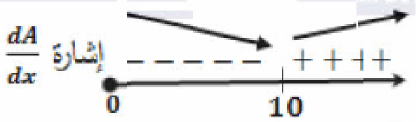


2 ليكن x طول ضلع القاعدة المربعة، h ارتفاع الخزان، A مساحة سطحه، V حجمه.

$V = x^2h = 500 \to h = \frac{500}{x^2}$

$A = x^2 + 4xh = x^2 + 4x \times \frac{500}{x^2} = x^2 + \frac{2000}{x}$

$\frac{dA}{dx} = 2x - \frac{2000}{x^2} = 0 \Rightarrow 2x^3 = 2000 \Rightarrow x = 10$



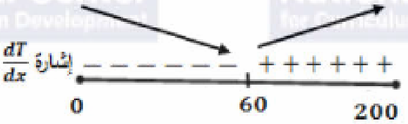
3 ليكن الزمن اللازم للوصول من A إلى D هو T_{AD}، والزمن اللازم للوصول من D إلى C هو T_{DC}،
فإن الزمن الكلي $T(x)$ هو: $T(x) = T_{AD} + T_{DC} = \frac{200-x}{10} + \frac{\sqrt{x^2+6400}}{6}$

4

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{1}{10} + \frac{x}{6\sqrt{x^2+6400}} \Rightarrow \frac{dT}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{x}{6\sqrt{x^2+6400}} = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow 10x = 6\sqrt{x^2+6400} \Rightarrow 25\,x^2 = 9(x^2+6400)$$

$$\Rightarrow 16x^2 = 9(6400) \Rightarrow x = 60\text{ m}$$



5 لتكن A مجموع مساحتي الدائرة والمربع، r طول نصف قطر الدائرة

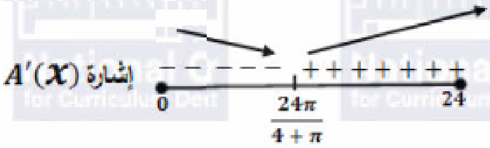
ليكن طول الجزء الذي تصنع منه الدائرة x cm، فإن: $x = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{x}{2\pi}$

$$A(x) = \pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{24-x}{4}\right)^2 \Rightarrow A'(x) = 2\pi\frac{x}{2\pi}\times\frac{1}{2\pi} + 2\left(6-\frac{1}{4}x\right)\times -\frac{1}{4}$$

$$A'(x) = \frac{1}{2\pi}x - 3 + \frac{1}{8}x = \left(\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{8}\right)x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{8}} = \frac{24\pi}{4+\pi}$$

إذن يكون مجموع مساحتي الدائرة والمربع أصغر ما يمكن

عندما نقطع للدائرة من السلك طولًا مقداره $\frac{24\pi}{4+\pi}$ cm



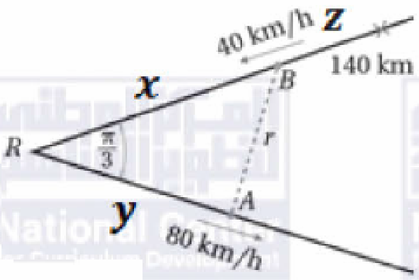
6 للحصول على أكبر قيمة للاقتران A
نقارن القيمتين $A(0)$ و $A(24)$:

$$A(0) = \pi\left(\frac{0}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{24-0}{4}\right)^2 = 36\text{ cm}^2$$

$$A(24) = \pi\left(\frac{24}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{24-24}{4}\right)^2 = \frac{144}{\pi} \approx 45.8\text{ cm}^2$$

إذن للحصول على أكبر مجموع للمساحتين نخصص السلك كله للدائرة، ولا نقطع للمربع شيئًا منه.

7 لتكن الأبعاد كما في الشكل أدناه: بعد مرور t ساعة من انطلاق السيارتين يكون:



$$y = 80t\,, z = 40t \Rightarrow x = 140-40t$$

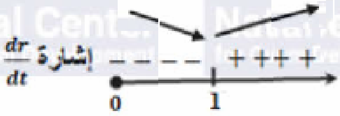
$$r^2 = x^2+y^2-2xy\cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow r^2 = x^2+y^2-xy$$

$$\Rightarrow r^2 = (140-40t)^2 + (80t)^2 - (140-40t)(80t)$$

$$= 19600 - 22400t + 11200t^2$$

$$\Rightarrow 2r\frac{dr}{dt} = -22400+22400t \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{-22400+22400t}{2r}$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{dt} = 0 \Rightarrow -22400+22400t = 0 \Rightarrow t = 1\,h$$



أقصر مسافة ممكنة بين السيارتين هي: $r = \sqrt{19600-22400+11200} \approx 91.7\text{ km}$

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح

الأستاذ عبدالقادر الحسنات

أسئلة الوزارة على وحدة التطبيقات حسب الدرس

◆ من أسئلة الوزارة 2023 / علمي ◆

11) l و m طريقان مستقيمان متعامدان في النقطة C. تقع محطة وقود على الطريق m وتبعد 12 km عن نقطة التقاطع C. إذا تحركت سيارة على الطريق l بسرعة 26 km/h في اتجاه نقطة التقاطع C، فما معدّل تغيّر المسافة بين السيارة ومحطة الوقود عندما تكون السيارة على بعد 5 km من نقطة التقاطع؟

a) -4 km/h [✓ b) -10 km/h] c) 10 km/h d) 4 km/h

12) مثلث متطابق الضلعين طول كل من ضلعيه المتطابقين 10 cm، وقياس الزاوية بينهما θ . إذا تغيّرت θ بمعدّل $\frac{\pi}{60}$ rad/min ، فإنّ معدّل تغيّر مساحة المثلث عندما $\theta = \frac{\pi}{3}$ هو:

a) $\frac{5\pi}{6}$ cm^2/min b) $\frac{\pi}{6}$ cm^2/min [✓ c) $\frac{5\pi}{12}$ cm^2/min] d) $\frac{\pi}{12}$ cm^2/min

c) يتساقط الرمل من شاحنة متوقفة على أرض مستوية بمعدل 2 cm^3/s فيتشكل منه مخروط قائم ارتفاعه مساوٍ لطول قطر قاعدته. جد معدّل التغيّر في مساحة السطح الجانبية للمخروط المتشكل في اللحظة التي يكون فيها ارتفاع المخروط يساوي 12 cm . (10 علامات)

◆ من أسئلة الوزارة 2023 تكميلي / علمي ◆

11) حَلّقت طائرة أفقيًا على ارتفاع 12 km من سطح الأرض، ومرّت أثناء تحليقها مباشرة فوق رادار على الأرض. إذا كان معدل تغيّر البُعد بين الطائرة والرادار 200 km/h، فإنّ سرعة الطائرة في اللحظة التي يكون بُعدها عن الرادار يساوي 13 km ، هي:

a) 260 km/h c) 1040 km/h

[✓ 520 km/h] d) 1300 km/h

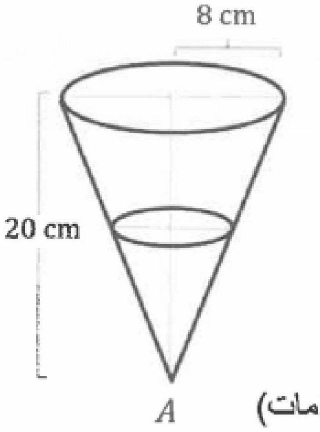
12) صفيحة معدنية رقيقة على شكل مثلث متطابق الضلعين، وطول كلٍ منهما يساوي 6 cm ، إذا سُخّنت الصفيحة بحيث تبقى محافظة على شكلها، وكان معدّل التغيّر في مساحة سطحها يساوي 36 cm^2/s ، فإنّ معدّل التغيّر في الزاوية المحصورة بين الضلعين المتطابقين عندما يكون قياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{3}$ ، هو:

a) 2 rad/s c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ rad/s

b) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ rad/s [✓ 4 rad/s]

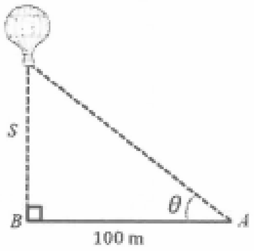
c) يُستعمل قُمع على شكل مخروط قائم، كما في الشكل المجاور، طول نصف قطر قاعدته 8 cm وعمقه 20 cm ، لصبّ الزيت في محرك سيارة بمعدّل 35 cm^3/s ، فيخرج الزيت من رأس القُمع A إلى المحرك بمعدّل 25 cm^3/s .

جد معدّل التغيّر في ارتفاع سطح الزيت في القُمع عند اللحظة التي يصبح فيها نصف قطر سطح الزيت يساوي $\frac{1}{4}$ قطر القُمع. (10 علامات)



◆ من أسئلة الوزارة 2024 / علمي ◆

11) معتمدًا الشكل الآتي الذي يُمثّل كاميرا مثبّتة عند النقطة A ترصُد منطادًا يرتفع رأسيًا إلى أعلى من النقطة B ، إذا أُعطي ارتفاع المنطاد بالاقتران: $s(t) = 10t^2$ ، حيث s موقع المنطاد بالأمتار، t الزمن بالدقائق، فإنّ معدّل تغيّر زاوية ارتفاع المنطاد θ بعد دقيقتين من بدء ارتفاعه، هو:



a) 0.25 rad/min

[✓ b) 0.34 rad/min]

c) 0.86 rad/min

d) 0.93 rad/min

12) مكعب طول ضلعه 5 cm . إذا بدأ المكعب بالتمدد فزاد طول ضلعه بمعدل 2 cm/min ، وظلّ محافظًا على شكله، فإنّ معدّل تغيّر حجم المكعب بعد 1 min من بدء تمدده، هو:

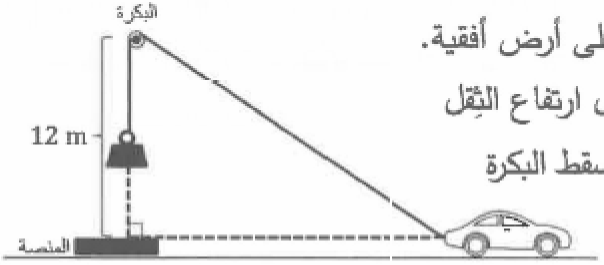
a) $147\ cm^3/min$

[✓ c) $294\ cm^3/min$]

b) $216\ cm^3/min$

d) $108\ cm^3/min$

c) حبل طوله 25 m يمر حول بكرة ترتفع عن منصة مسافة 12 m ، (8 علامات)
مربوط بطرف الحبل ثِقل وطرفه الآخر مربوط بسيارة على أرض أفقية.
إذا سَحَبت السيارة الحبل بسرعة 0.5 m/s ، فجد معدّل ارتفاع الثِقل
في اللحظة التي تَبعُد فيها السيارة مسافة 16 m عن مسقط البكرة
على المنصة. (انظر الشكل التوضيحي المجاور)



◆ من أسئلة الوزارة 2024 تكميلي / علمي ◆

12) سقطت قطرة ماء على سطح مائي، فتكوّنت موجات دائرية مُتّحدة المركز ، فإذا ازدادت مساحة إحدى الدوائر بمعدّل $12\ cm^2/s$ ، فإنّ معدّل تغيُّر محيط هذه الدائرة عندما يكون طول نصف قطرها 3 cm هو:

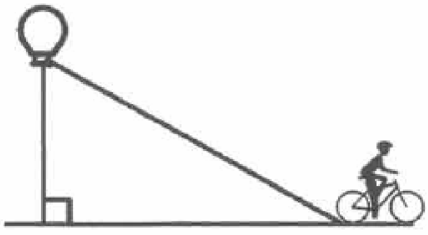
a) 2 cm/s

b) $\frac{2}{\pi}$ cm/s

[✓ c) 4 cm/s]

d) $\frac{4}{\pi}$ cm/s

c) يرتفع بالون رأسيًّا فوق مستوى طريق مستقيم أفقي بمعدّل 3 m/s ،
وفي اللحظة التي كان فيها البالون على ارتفاع 9 m فوق الطريق ،
مرّت أسفله دراجة تتحرك بسرعة 5 m/s ، كما في الشكل التوضيحي المجاور.
جد معدّل تغيُّر المسافة بين البالون والدراجة بعد ثانية واحدة من تلك اللحظة.



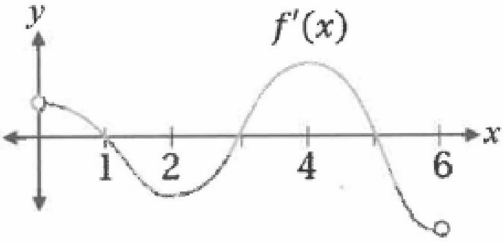
(12 علامة)

من أسئلة الوزارة / علمي 2023

13) إذا كان: $x \neq 0$, $f(x)=\frac{x}{3}+\frac{9}{x}$ ، فإنّ القيمة العظمى المطلقة للاقتران $f(x)$ في الفترة $[-6,-1]$ هي:

a) $-3\sqrt{3}$ [✓ b) $-2\sqrt{3}$] c) $-\frac{7}{2}$ d) $-\frac{28}{3}$

14) معتمدًا الشكل الآتي الذي يمثّل منحنى المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$، ما الفترة (الفترات) التي يكون فيها منحنى الاقتران $f(x)$ مقعرًا لأعلى؟



a) $(0,1),(3,5)$ b) $(0,2)$

c) $(1,3),(5,6)$ [✓ d) $(2,4)$]

15) يمثّل الاقتران: $s(t)=t^3-6t^2+5$, $t \geq 0$ موقع جسم يتحرّك في مسار مستقيم، حيثُ s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني. ما الفترة الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه السالب؟

a) $(4,\infty)$ [✓ b) $(0,4)$] c) $(2,4)$ d) $(2,\infty)$

a) حدّد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقتران: $f(x)=\frac{x^3}{3}-8\ln x$ (10 علامات)

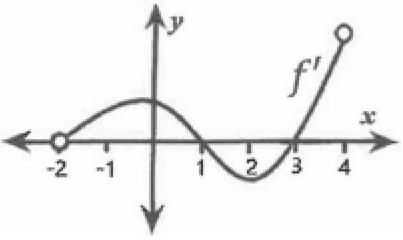
من أسئلة الوزارة / صناعى 2023

8- القيمة العظمى المطلقة للاقتران: $f(x)=1+6x-3x^2$ ، في الفترة $[0,4]$ هي:

[✓ a) 4] b) 1 c) 23 d) 10

a) معتمدًا الشكل المجاور الذي يمثّل منحنى المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$ المتصل على الفترة $[-2,4]$.

جد كلًا ممّا يأتي: (8 علامات)



1) قيم x التي يكون عندها للاقتران f قيم قصوى محلية، مبينًا نوعها

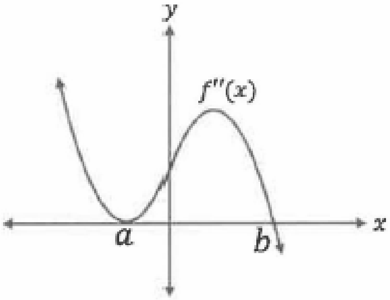
2) فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران f .

من أسئلة الوزارة / علمي 2023 تكميلي

13) إذا كان: $f(x) = x^{\frac{2}{5}} + 3$ ، فإنّ القيمة العظمى المطلقة للاقتران f في الفترة $[-1\,,\,\frac{1}{2}]$ ، هي:

[✓ 4] b) 3 c) $3 + \frac{1}{\sqrt[5]{2}}$ d) $3 + \frac{1}{\sqrt[5]{4}}$

14) إذا كان الشكل الآتي يمثّل منحنى المشتقة الثانية للاقتران f ، فإنّ الفترة التي يكون فيها منحنى الاقتران f مقعرًا لأسفل، هي:



a) $(0\,,\infty)$
[✓ $(b\,,\infty)$]
c) $(-\infty\,,b)$
d) $(a\,,b)$

15) إذا كان الاقتران: $v(t) = 12t - 2t^2 \;,\; t\,\epsilon\,[0\,,10]$ يمثّل السرعة المُتَّجهة لجسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيثُ v السرعة المُتَّجهة بالمتر لكل ثانية، و t الزمن بالثواني. فإنّ الفترة الزمنية التي تتناقص فيها سرعة الجسم المُتَّجهة، هي:

a) $(0\,,3)$ [✓ $(3\,,10)$] c) $(0\,,\,6)$ d) $(6\,,10)$

a) جد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقتران: $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - x)^2}$ (10 علامات)

من أسئلة الوزارة / صناعي 2023 تكميلي

9- القيمة الصغرى المطلقة للاقتران: $f(x) = 2x^2 \;- 8x + 1$ في الفترة $[-1\,,4]$ هي:

[✓ -7] b) 2 c) -11 d) 1

a) إذا كان: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 9$ ، فجد كلًا مما يأتي: (8 علامات)

1) قيم x التي يكون عندها للاقتران f قيم قصوى محلية، مبينًا نوعها.

2) فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران f

الأستاذ عبدالقادر الحسنات
078 531 88 77

من أسئلة الوزارة / علمي 2024

13) إذا كان: $f(x) = (x-2)e^x$ ، فإنّ القيمة الصغرى المطلقة للاقتران f في الفترة $[-2,2]$ ، هي:

a) 0 b) $-\frac{4}{e^2}$ c) $-\frac{3}{e}$ [✓ d) $-e$]

14) إذا كان: $g(x) = 2x + \frac{2}{x-2}$, $x \neq 2$ ، فإنّ منحنى الاقتران g يكون مقعرًا للأسفل على الفترة:

[✓ a) $(-\infty, 2)$]   b) $(0, \infty)$ c) $(-2, \infty)$ d) $(2, \infty)$

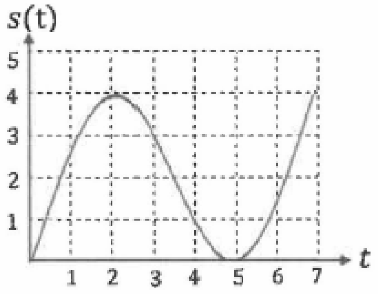
15) يُمثّل المنحنى المُبيّن في الشكل الآتي اقتران الموقع $s(t)$ لجسم يتحرك في مسار مستقيم في الفترة $[0,7]$، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني. إذا علمت أنَّ: $v(2.2) = v(4.8) = 0$ m/s ، $a(3.5) = 0\ m^2/s$ ، حيث v سرعة الجسم، و a تسارعه، فإنّ الفترة الزمنية التي تتزايد فيها سرعة الجسم، هي:

a) $(0, 2.2)$

b) $(0, 4.8)$

[✓ c) $(3.5, 7)$]

d) $(2.2, 3.5)$



a) جد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقتران: $f(x) = 2\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^4}$ (10 علامات)

من أسئلة الوزارة / صناعي 2024

8) القيمة العظمى المُطلَقة للاقتران: $f(x) = x^2 - 4x$ في الفترة $[-1,3]$ هي:

a) 7 [✓ b) 5]   c) -3 d) -4

a) إذا كان: $f(x) = 3x^2 - 2x^3$ ، فجد كلاً مما يأتي: (8 علامات)

1) قيم x التي يكون عندها للاقتران f قيم قصوى مَحلية، مُبيّنًا نوعها.

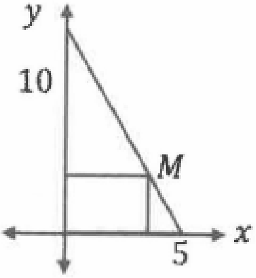
2) فترات التزايُد وفترات التناقُص للاقتران f .

◆ من أسئلة الوزارة 2023 / علمي ◆

16) إذا كان: $R(x) = -50x^2 + 200(3x + 160)$ يمثّل اقتران الإيراد الكلي بالدينار من بيع x صندوقًا، فإنّ أعلى إيراد يُمكن تحقيقه بالدينار هو:

a) 35600   b) 11400   [✓ c) 33800]   d) 35300

17) معتمدًا الشكل الآتي الذي يمثل مستطيلاً مرسومًا داخل مثلث قائم الزاوية. ما قيمة الإحداثي x للنقطة M التي تكون عندها مساحة المستطيل أكبر ما يمكن؟



a) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{5}{4}$

b) $\frac{3}{2}$ [✓ d) $\frac{5}{2}$]

b) ترغب شركة في تصميم صندوق مفتوح من الأعلى طول قاعدته يساوي مثلي عرضها، ومساحة سطحه الكلية تساوي $2400\ \text{cm}^2$ ، جد أبعاد الصندوق التي تجعل حجمه أكبر ما يمكن . (12 علامة)

◆ من أسئلة الوزارة 2023 تكميلي / علمي ◆

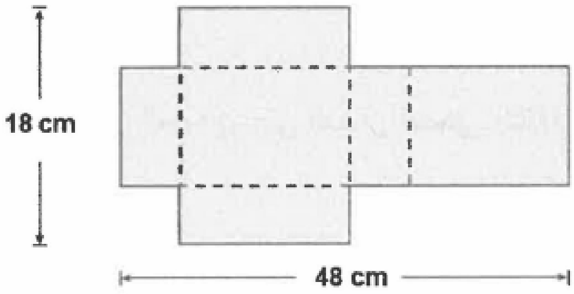
16) إذا كان الاقتران: $S(x) = 200 - x$ يمثّل سعر القطعة الواحدة من أحد المنتجات بالدينار، حيث x عدد القطع المبيعة من المنتج. فإنّ أعلى إيراد يمكن تحقيقه عندما يكون عدد القطع المبيعة، هو:

[✓ 100]   b) 10000   c) 200   d) 20000

17) الإحداثي x للنقطة P التي تقع على المستقيم: $y = 3 - \frac{1}{2}x$ ، والتي يكون بُعدها أقل ما يمكن عن نقطة الأصل، هو:

[✓ $\frac{6}{5}$]   b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{5}{4}$ d) $\frac{5}{2}$

b) قطعة كرتون طولها 48 cm، وعرضها 18 cm ، أُزيل منها مربعان متطابقان ومستطيلان متطابقان كما في الشكل المجاور، بحيث أمكن طيُّها، وتكوين صندوق له غطاء منها.



1) إذا علمت أنّ V هو حجم الصندوق الناتج، فحدّد مجال الاقتران V .

2) جد أبعاد الصندوق بحيث يكون حجمه أكبر ما يمكن.

(12 علامة)

◆ من أسئلة الوزارة 2024 / علمي ◆

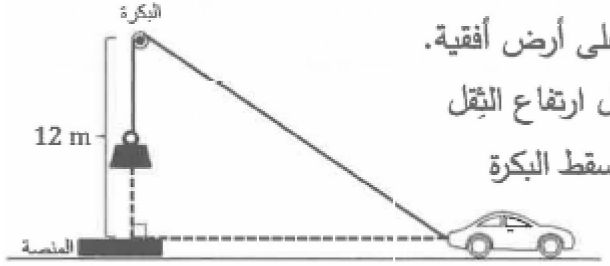
16) إذا كان الاقتران: $S(x) = 200 - x$ يمثّل سعر القطعة الواحدة من أحد المنتجات بالدينار، حيث x عدد القطع المبيعة من المنتج. فإنّ أعلى إيراد يمكن تحقيقه عندما يكون عدد القطع المبيعة، هو:

[✓ 100] b) 10000 c) 200 d) 20000

17) الإحداثي x للنقطة P التي تقع على المستقيم: $y = 3 - \frac{1}{2}x$ ، والتي يكون بُعدها أقل ما يمكن عن نقطة الأصل، هو:

[✓ $\frac{6}{5}$] b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{5}{4}$ d) $\frac{5}{2}$

c) حبل طوله 25 m يمر حول بكرة ترتفع عن منصة مسافة 12 m ، مربوط بطرف الحبل ثِقل وطرفه الآخر مربوط بسيارة على أرض أفقية. إذا سَحَبت السيارة الحبل بسرعة 0.5 m/s ، فجد معدّل ارتفاع الثِقل في اللحظة التي تَبعُد فيها السيارة مسافة 16 m عن مسقط البكرة على المنصة. (انظر الشكل التوضيحي المجاور) (8 علامات)



◆ من أسئلة الوزارة 2024 تكميلي / علمي ◆

17) إذا مثَّل الاقتران: $s(x) = 120 - 7x$ سعر القطعة لمُنتَج ما (بالدينار) حيث x عدد القِطَع المَبيعة من المُنتَج ومَثَّل الاقتران: $C(x) = 200 + \frac{1}{2}x^2$ تكلفة إنتاج x قطعة (بالدينار) من هذا المُنتَج، فإنّ عدد القِطَع اللّازم بيعها لتحقيق أكبر ربح ممكن هو:

a) 13 b) 10 c) 9 [✓ 8]

b) يَنظُر طالب إلى لوحة علمية ارتفاعها 5 ft مُعلَّقة على حائط في غرفة الصف، وارتفاع حافتها السفلية 1 ft فوق مستوى خطّ نظره الأفقي كما في الشكل التوضيحي المجاور. كم قدمًا يجب أن يبتعد الطالب عن الحائط لتكون زاوية نظره θ أكبر ما يمكن؟ (10 علامات)