المرجع في الرياضيات المتقدم

الصف الثاني عشر الأكاديمي

كتاب الطالب+كتاب التمارين

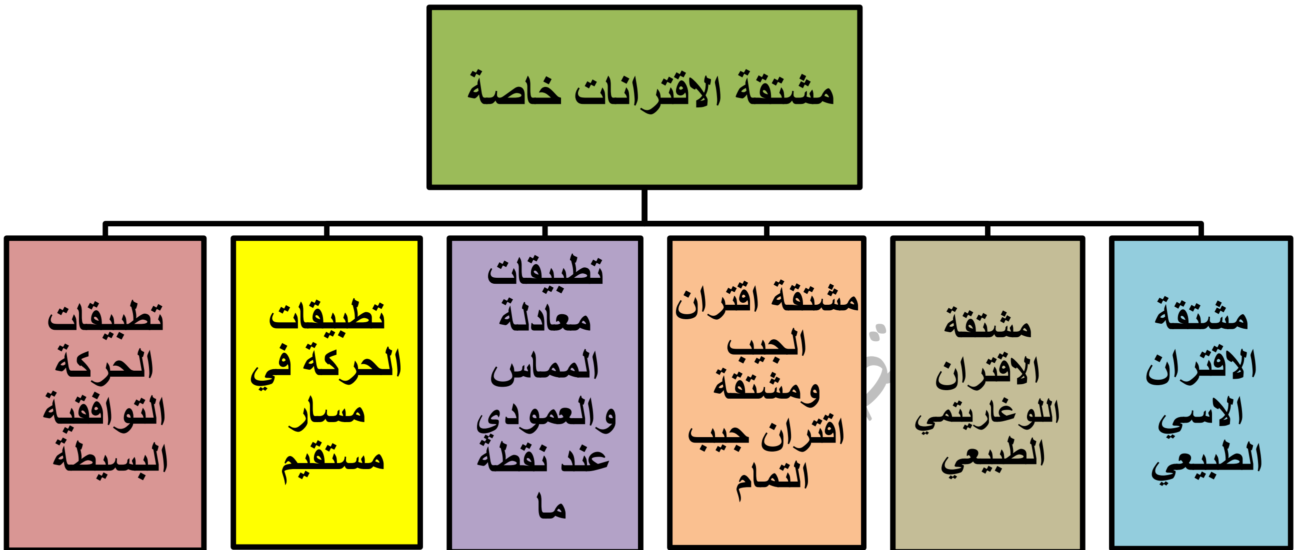
الفصل الأول/ الوحدة الثالثة (التفاضل وتطبيقاته)

الأستاذ: معتصم ابراهيم
0786667808

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

الدرس الأول: مشتقة اقترانات خاصة

مواضيع الدرس الأول



رموز الاشتقاق:

1) اذا كان الاقتران يتضمن $f(x)$ ، فإنه يرمز للمشتقة $\acute{f}(x)$.

2) اذا كان الاقتران يتضمن y ، فإنه يرمز للمشتقة $\acute{y}$ أو $\frac{dy}{dx}$.

قواعد الاشتقاق:

1)القاعدة الأولى: مشتقة الثابت = صفر

ملاحظة : الثابت معناه أن لا يكون هناك متغير في الاقتران مثل x بجانب الرقم الثابت a .

1) $f(x) = 3 \implies \acute{f}(x) = 0$

2) $f(x) = \sqrt{5} \implies \acute{f}(x) = 0$

3) $f(x) = a^2 \implies \acute{f}(x) = 0 \to a \in R$

2) القاعدة الثانية: مشتقة ax تساوي a .

$1)\ f(x) = 2x \Rightarrow \acute{f}(x) = 2$

$2)\ f(x) = -9x \Rightarrow \acute{f}(x) = -9$

$3)\ f(x) = \frac{1}{2}x \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{1}{2}$

3) القاعدة الثالثة: مشتقة x^n تساوي nx^{n-1}

وتقسم إلى ثلاث حالات:

1) إذا كانت n (الاسّ)عدد موجب : ينزل الاس بجانب المتغير (ضرب) ويطرح من الاس واحد.

$1)\ f(x) = x^5 \Rightarrow \acute{f}(x) = 5x^4$

$2)\ f(x) = x^2 \Rightarrow \acute{f}(x) = 2x$

2) إذا كانت n (الاسّ) عدد سالب: ينزل الاس مع الاشارة بجانب المتغير (ضرب) ويطرح من الاسّ واحد (الاس سيزداد كرقم بمقدار واحد)

$1)\ f(x) = x^{-5} \Rightarrow \acute{f}(x) = -5x^{-6}$

$2)\ f(x) = -2x^{-4} \Rightarrow \acute{f}(x) = 8x^{-5}$

3) إذا كان (الاسّ) كسر $\left(n = \frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}\right)$: ينزل الاسّ بجانب المتغير (ضرب) ويطرح من الاس واحد وتطبق القاعدة $\left(\frac{\text{البسط}-\text{المقام}}{\text{المقام}}\right)$

$1)\ f(x) = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

$2)\ f(x) = x^{\frac{5}{3}} \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$

$3)\ f(x) = x^{\frac{-5}{3}} \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{-5}{3}x^{\frac{-8}{3}}$

معتصم ابراهيم

ملاحظات مهمة :

ملاحظة 1): يجب تحويل الجذر إلى (أسّ) عند الاشتقاق وذلك بقسمة $\frac{\text{الداخل}}{\text{الخارج}}$.

$$1)\ f(x)=\sqrt[3]{x^2} \Longrightarrow f(x)=x^{\frac{2}{3}} \Longrightarrow \acute{f}(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}$$

ملاحظة 2): مشتقة الجذر التربيعي $\frac{\text{مشتقة داخل الجذر}}{2\times(\text{الجذر نفسه})}$.

$$1)\ f(x)=\sqrt{3x+1} \Longrightarrow \acute{f}(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$$

$$2)\ f(x)=\sqrt{5x^2-x} \Longrightarrow \acute{f}(x)=\frac{10x-1}{2\sqrt{5x^2-x}}$$

4) القاعدة الرابعة: مشتقة حاصل جمع أو طرح مجموعة اقترانات $f(x)=g(x)\pm h(x)$

المشتقة $\acute{f}(x)=\acute{g}(x)\pm\acute{h}(x)$

$$1)\ f(x)=x^2+3x^3 \Longrightarrow \acute{f}(x)=2x+9x^2$$

$$2)\ f(x)=x^5-4x^{-2}+7 \Longrightarrow \acute{f}(x)=5x^4+8x^{-3}$$

5) القاعدة الخامسة: مشتقة حاصل ضرب اقترانين $f(x)=g(x)\times h(x)$

المشتقة $\acute{f}(x)=\big(g(x)\times\acute{h}(x)\big)+\big(h(x)\pm\acute{g}(x)\big)$

المشتقة = الأول × مشتقة الثاني + الثاني × مشتقة الأول

$$1)\ f(x)=(x^2+5)\,(x^3+2)$$

$$\acute{f}(x)=(x^2+5)\,(3x^2)+(x^3+2)\,(2x) \Longrightarrow \acute{f}(x)=(3x^4+15x^2)\ +(2x^4+4x)$$

$$\Longrightarrow\ \acute{f}(x)=3x^4+15x^2+2x^4+4x \Longrightarrow \acute{f}(x)=5x^4+15x^2+4x$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

6) القاعدة السادسة: مشتقة حاصل قسمة اقترانين $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$

المشتقة $f'(x)=\frac{(h(x)\pm g'(x))-(g(x)\times h'(x))}{(h(x))^2}$ ، أي المشتقة $=\frac{(\text{المقام} \times \text{مشتقة البسطة})-(\text{البسط} \times \text{مشتقة المقام})}{(\text{المقام})^2}$

1) $f(x)=\frac{x^3+1}{x^2+5}$

$$f'(x)=\frac{(x^2+5)(3x^2)-(x^3+1)(2x)}{(x^2+5)^2}\Longrightarrow f'(x)=\frac{(3x^4+15x^2)-(2x^4+2x)}{(x^2+5)^2}$$

$$\Longrightarrow f'(x)=\frac{(3x^4+15x^2-2x^4-2x)}{(x^2+5)^2}\Longrightarrow f'(x)=\frac{x^4+15x^2-2x}{(x^2+5)^2}$$

ملاحظات مهمة:

1) إذا كان الاقتران على شكل $f(x)=\frac{\text{اقتران}}{\text{متغير لوحده}}$ يتم توزيع المقام على جميع الحدود في البسط بصورة كسر .

1) $f(x)=\frac{6x^2+3x}{x}\quad\Longrightarrow f(x)=\frac{6x^2}{x}+\frac{2x}{x}\Longrightarrow f(x)=6x+2\quad\Longrightarrow f'(x)=6$

2) إذا كان الاقتران على شكل $f(x)=\frac{\text{اقتران}}{\text{ثابت}}$ نسحب المقام ثم نشتق فيما داخل القوس ومن ثم إدخاله على القوس عند اكتمال الاشتقاق.

1) $f(x)=\frac{x^3+2}{5}\quad\Longrightarrow f(x)=\frac{1}{5}(x^3+2)\Longrightarrow f'(x)=\frac{1}{5}(3x^2)\quad\Longrightarrow f'(x)=\frac{3x^2}{5}$

أويمكن تطبيق القاعدة:

$$f(x)=\frac{\text{اقتران}}{\text{ثابت}}\Longrightarrow f'(x)=\frac{\text{مشتقة الاقتران}}{\text{الثابت نفسه}}$$

1) $f(x)=\frac{x^3+2}{5}\quad\Longrightarrow f'(x)=\frac{3x^2}{5}$

3) إذا كان الاقتران على شكل $f(x)=\frac{\text{ثابت}}{\text{متغير لوحده}}$ نرفع المتغير للمقام ونغير إشارة الأسّ .

1) $f(x)=\frac{1}{x^4}\quad\Longrightarrow f(x)=x^{-4}\Longrightarrow f'(x)=-4x^{-5}\quad\Longrightarrow f'(x)=\frac{-4}{x^5}$

2) $f(x)=\frac{-5}{x^3}\quad\Longrightarrow f(x)=-5x^{-3}\Longrightarrow f'(x)=15x^{-4}\quad\Longrightarrow f'(x)=\frac{15}{x^4}$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

4) إذا كان الاقتران على شكل $f(x)=\frac{\text{ثابت}}{\text{اقتران اكثر من متغير}}$ يمكن استخدام قاعدة مشتقة المقلوب :

$$f(x)=\frac{\text{ثابت}}{\text{اقتران}} \Rightarrow \acute{f}(x)=\frac{-(\text{الثابت})\times(\text{مشتقة الاقتران})}{(\text{الاقتران})^2}$$

1) $f(x)=\dfrac{5}{x^2+x-2}$

$$\acute{f}(x)=\frac{-5(2x+1)}{(x^2+x-2)^2} \Rightarrow \acute{f}(x)=\frac{-10x-1}{(x^2+x-2)^2}$$

7) القاعدة السابعة: مشتقة القوس المرفوع إلى أسّ $f(x)=(g(x))^n$ ،

المشتقة $\acute{f}(x)=n(g(x))^{n-1}\times\acute{g}(x)$

المشتقة = ينزل الاسّ ، وينزل القوس مع طرح من الاسّ واحد ، ونشتق ما في داخل القوس .

1) $f(x)=(x^2+1)^3$

$$\acute{f}(x)=3(x^2+1)^2(2x) \Rightarrow \acute{f}(x)=6x(x^2+1)^2$$

2) $f(x)=(x^2+4)^2$

$$\acute{f}(x)=2(x^2+4)(2x) \Rightarrow \acute{f}(x)=4x(x^2+4) \Rightarrow \acute{f}(x)=4x^3+16x$$

8) القاعدة الثامنة: مشتقة الاقترانات المثلثية.

المشتقة = مشتقة الاقتران المثلثي وتنزل الزاوية كما هي × مشتقة الزاوية .

1) $f(x)=\cos(3+x^2)$

$$\acute{f}(x)=-\sin(3+x^2)\,(2x) \Rightarrow \acute{f}(x)=-2x\sin(3+x^2)$$

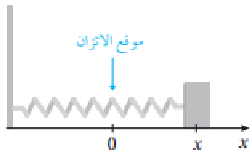
2) $f(x)=\sin x^2$

$$\acute{f}(x)=\cos x^2\,(2x) \Rightarrow \acute{f}(x)=2x\cos x^2$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

مسألة اليوم (صفحة 78):

يهتز جسم مثبت في زنبرك أفقياً على سطح أملس كما في الشكل المجاور ، ويمثل الاقتران $x(t) = 8\sin t$ موقع الجسم ، حيث t الزمن بالثواني ، و x الموقع بالسنتيمترات :



1) أجد موقع الجسم ، وسرعته وتسارعه عندما $t = \frac{2}{3}$.

أولاً: أيجاد موقع الجسم:

$$x(t) = 8\sin t \quad \Rightarrow \quad x\left(\frac{2}{3}\right) = 8\sin\left(\frac{2}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{x\left(\frac{2}{3}\right) \approx 4.95\ cm}$$

ثانياً: أيجاد سرعة الجسم:

$$x(t) = 8\sin t \Rightarrow v(t) = \frac{dx}{dt} = 8\cos t \Rightarrow v\left(\frac{2}{3}\right) = 8\cos\left(\frac{2}{3}\right) \Rightarrow \boxed{v\left(\frac{2}{3}\right) \approx 6.29\ cm/s}$$

ثالثاً: أيجاد تسارع الجسم:

$$v(t) = 8\cos t$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -8\sin t \quad \Rightarrow \quad a\left(\frac{2}{3}\right) = -8\sin\left(\frac{2}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{a\left(\frac{2}{3}\right) \approx -4.95\ cm/s^2}$$

2) في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t = \frac{2}{3}$.

بما أن السرعة موجبة ، فإن الجسم يتحرك لليمين عندما $t = \frac{2}{3}$.

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨.

مشتقة الاقتران الاسي الطبيعي (صفحة 78)

شرح الأفكار الرئيسية:

الاقتران الأسي: هو الاقتران الذي يتضمن أساً متغيراً لأساس ثابت أكبر من الصفر

أمثلة : $f(x) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^x$ $\qquad$ $f(x) = (0.3)^x + 9$ $\qquad$ $f(x) = 5^x$

اقتران الأسي الطبيعي: هو الاقتران الذي يتضمن أساً متغيراً للأساس الطبيعي أو العدد النيبيري e .

أمثلة : $f(x) = 6(e)^x$ $\quad f(x) = e^x + 4$ $\quad f(x) = e^x$

ملاحظة : يسمى العدد e الاساس الطبيعي أو العدد النيبيري ويساوي تقريباً (2.72) ، وهو عدد غير نسبي (غير منته وغير متكرر بالصورة العشرية) .

ملاحظات مهمة :

- **مشتقة الاقتران $f(x)$ عند نقطة واقعة على منحناه هي ميل المنحنى عن هذه النقطة (ميل المماس عند نقطة التماس) ، ويرمز إليها بالرمز $\acute{f}(x)$.**
- **ميل المماس عند نقطة ما يساوي مشتقة الاقتران عند هذه النقطة.**

قاعدة مهمة:

ميل المماس عند أي نقطة تقع على منحنى الاقتران الأسي الطبيعي هو الإحداثي y لهذه النقطة ومنها نخرج بقاعدة الاشتقاق الاقتران الاسي الطبيعي:

1) إذا كان : $f(x) = e^x$ ، حيث e العدد النيبيري ، فإن : $\acute{f}(x) = e^x$.

$$f(x) = e^x \quad \Longrightarrow \quad \acute{f}(x) = e^x$$

وبصورة عامة فإن مشتقة الاقتران الأسي الطبيعي ، نشتق الأس ، وينزل الاقتران الأسي الطبيعي نفسه (الاساس مع الأسّ) :

$$f(x) = e^{g(x)} \quad \Longrightarrow \quad \acute{f}(x) = \acute{g}(x)e^{g(x)}$$

$$f(x) = e^{ax+b} \quad \Longrightarrow \quad \acute{f}(x) = ae^{ax+b}$$

مثال 1: أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي: (صفحة79)

$1)\ f(x) = 3\,e^x$

$\acute{f}(x) = 3\,e^x$

$2)\ f(x) = x^2 + e^x$

$\acute{f}(x) = 2x + e^x$

3) $y = \dfrac{\sqrt[3]{x} - 2xe^x}{x}$

$$y = \frac{\sqrt[3]{x}}{x} - \frac{2xe^x}{x} \Rightarrow = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x} - \frac{2xe^x}{x} \Rightarrow = x^{\frac{-2}{3}} - 2e^x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2}{3}x^{\frac{-5}{3}} - 2e^x \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}} - 2e^x}$$

أتحقق من فهمي: (صفحة80)

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

1) $f(x) = 5\, e^x + 3$

$\acute{f}(x) = 5\, e^x$

2) $f(x) = \sqrt{x} - 4\, e^x$

$$\acute{f}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 4\, e^x$$

3) $f(x) = 8\, e^x + \dfrac{4}{\sqrt[5]{x}}$

$$f(x) = 8\, e^x + 4x^{\frac{-1}{5}} \Rightarrow \acute{f}(x) = 8\, e^x - \frac{4}{5}x^{\frac{-6}{5}} \Rightarrow \boxed{\acute{f}(x) = 8\, e^x - \frac{4}{5\sqrt[5]{x^6}}}$$

مشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي (صفحة 80)

الاقتران اللوغاريتمي: هو الاقتران العكسي للاقتران الأسي .

بحيث اذا كانت الصورة الاسية $b^y = x$ ، إذن الصورة اللوغاريتمية $\log_b x = y$

مثال 1 : $3^2 = 9 \Rightarrow \log_3 9 = 2$

مثال 2 : $2^4 = 16 \Rightarrow \log_2 16 = 4$

قوانين اللوغاريتمات:

قانون الضرب: $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$

قانون القسمة: $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$

قانون القوة: $\log_b x^p = p \log_b x$

خصائص اللوغاريتمات:

1) $\log_b 1 = 0$

2) $\log_b b = 1$

3) $\log_b b^x = x$

4) $b^{\log_b x} = x$

5) $\ln e = \log_e e = 1$

6) $\ln e^x = \log_e e^x = x$

7) $\log_b 0 =$ غير معرف

قوانين الأسس:

قانون ضرب القوى : $b^x \times b^y = b^{x+y}$

قانون قسمة القوى : $\frac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$ ، $b \neq 0$

قانون قوة القوة: $(b^x)^y = b^{xy}$

اللوغاريتم الاعتيادي: هو اللوغاريتم للأساس 10 أو $\log_{10}$ ، ويكتب عادة من دون أساس $\log$.

الاقتران اللوغاريتمي الاعتيادي: هو الاقتران العكسي للاقتران الأسي الذي أساسه 10 .

مثال 1 : $10^2 = 100 \Rightarrow \log 100 = 2$

مثال 2 : $10^3 = 1000 \Rightarrow \log 1000 = 3$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

اللوغاريتم الطبيعي: هو اللوغاريتم للأساس e أو $\log_e$ ، ويرمز له بـ $\ln$.

الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي: هو الاقتران العكسي للاقتران الأسي الطبيعي،

بحيث اذا كانت الصورة الاسية $e^y = x$

إذن الصورة اللوغاريتمية : $\ln x = y$ أو $\log_e x = y$

قاعدة اشتقاق اقتران اللوغاريتم الطبيعي:

1) إذا كان : $f(x) = \ln(\text{مقدار متغير})$ ، حيث : $x > 0$ ، فإن المشتقة : $f'(x) = \frac{\text{مشتقة المقدار}}{\text{نفس المقدار}}$

2) إذا كان : $f(x) = \ln(\text{ثابت})$، فإن المشتقة : $f'(x) = 0$

مثال 2: أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي: (صفحة82)

1) $f(x) = \ln(x^4)$

$$f(x) = 4\ln x \Rightarrow f'(x) = 4 . \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{4}{x}$$

2) $f(x) = \ln(xe^x) + \ln 7x$

$$f(x) = \ln x + \ln e^x + \ln 7 + \ln x \Rightarrow f(x) = 2\ln x + x + \ln 7$$

$$f'(x) = 2\frac{1}{x} + 1 + 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{x} + 1$$

أتحقق من فهمي (صفحة82)

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = \sqrt{x} + \ln(4x)$

$$f(x) = \sqrt{x} + \ln 4 + \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 0 + \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x}$$

2) $f(x) = \ln(2x^3)$

$$f'(x) = \frac{6x^2}{2x^3} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{x}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

مشتقة اقتران الجيب ومشتقة اقتران جيب التمام (صفحة 82)

مشتقات الاقترانات المثلثية:

المشتقة = مشتقة الاقتران المثلثي وتنزل الزاوية كما هي × مشتقة الزاوية .

1) $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$

2) $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$

3) $f(x) = \tan x \Rightarrow f'(x) = \sec^2 x$

4) $f(x) = \cot x \Rightarrow f'(x) = -\csc^2 x$

5) $f(x) = \sec x \Rightarrow f'(x) = \sec x \tan x$

6) $f(x) = \csc x \Rightarrow f'(x) = -\csc x \cot x$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

مثال 3: أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي: (صفحة83)

1) $f(x) = 3\sin x + 4$

$f'(x) = 3\cos x$

2) $y = \frac{1}{2}e^x - 7\cos x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}e^x + 7\sin x$

اتحقق من فهمي: (صفحة84)

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $y = \frac{\sin x}{2} + 3\cos x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\cos x - 3\sin x$

2) $y = x^2 + \cos x + \sin\frac{\pi}{2}$

$\frac{dy}{dx} = 2x - \sin x + \cos\frac{\pi}{2}$

تطبيقات معادلة المماس والعمودي عند نقطة ما (صفحة 84)

المماس: هو مستقيم يمس منحنى الاقتران عند نقطة.

ميل المماس: هو المشتقة الأولى عند نقطة التماس ، $m = \acute{f}(x_1)$.

معادلة المماس: هي العلاقة التي تربط بين الإحداثي السيني والإحداثي الصادي لأي نقطة تقع على المماس (المستقيم). وهي:

$$m = \frac{y-y_1}{x-x_1} \Rightarrow \quad y - y_1 = m(x - x_1)$$

ميل العامودي على المماس: هو سالب مقلوب ميل المماس. $m_1 = -\frac{1}{m}$

ملاحظة : إذا تعامد مستقيمان كل منهما ليس رأسياً، فإن حاصل ضرب ميلهما هو 1 – ، أي أن ميل أحدهما يساوي سالب مقلوب ميل الآخر . ومنها ميل العمودي على المماس يساوي سالب مقلوب ميل المماس لأنهما متعامدان.

معادلة ميل العامودي على المماس: $y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$

مثال 5: إذا كان الاقتران : $f(x) = \ln(\frac{x}{e})$ ، فأستعمل المشتقة لإيجاد كل مما يأتي : (صفحة84)

1) معادلة المماس عند النقطة $(1, -1)$

الخطوة الأولى : أجد ميل المماس عند النقطة $(1, -1)$

$$f(x) = \ln(\frac{x}{e}) \Rightarrow f(x) = \ln x - \ln e \Rightarrow f(x) = \ln x - 1$$

$$\acute{f}(x) = \frac{1}{x}$$ ميل المماس

$$\acute{f}(1) = \frac{1}{1} \Rightarrow \boxed{\acute{f}(1) = 1}$$ ميل المماس عند $x = 1$

الخطوة الثانية: أيجاد معادلة المماس.

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - (-1) = 1(x - 1) \Rightarrow y + 1 = x - 1$$

$$\Rightarrow y = x - 1 - 1 \Rightarrow \boxed{y = x - 2}$$ معادلة المماس

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

2) ايجاد معادلة العمودي على المماس:

الخطوة الاولى: ايجاد ميل العمودي على المماس:

$$m_1 = -\frac{1}{m} \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{1} \Rightarrow m_1 = -1$$

الخطوة الثانية: ايجاد معادلة العمودي على المماس:

$$y - y_1 = m_1(x - x_1) \Rightarrow y - (-1) = -1(x-1) \Rightarrow y + 1 = -x + 1$$

$$\Rightarrow y = -x + 1 - 1 \Rightarrow \boxed{y = -x}$$ معادلة العمودي على المماس

أتحقق من فهمي: (صفحة 85)

إذا كان الاقتران : $f(x) = \ln\sqrt{x}$ ، فأستعمل المشتقة لإيجاد كل مما يأتي :

1) معادلة المماس عند النقطة $(e, \frac{1}{2})$

الخطوة الأولى : أجد ميل المماس عند النقطة $(e, \frac{1}{2})$

$$f(x) = \ln\sqrt{x} \Rightarrow f(x) = \ln x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}\ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2x}$$ ميل المماس $\Rightarrow \boxed{f'(e) = \frac{1}{2e}}$ ميل المماس عند $x = e$

الخطوة الثانية: أيجاد معادلة المماس.

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - \frac{1}{2} = \frac{1}{2e}(x - e) \Rightarrow y - \frac{1}{2} = \frac{1}{2e}x - \frac{1}{2e}e$$

$$y = \frac{1}{2e}x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2e}x}$$ معادلة المماس

2) معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(e, \frac{1}{2})$

الخطوة الاولى: ايجاد ميل العمودي على المماس:

$$m_1 = -\frac{1}{m} \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{\frac{1}{2e}} \Rightarrow \boxed{m_1 = -2e}$$ ميل العمودي على المماس

الخطوة الثانية: ايجاد معادلة العمودي على المماس:

$$y - y_1 = m_1(x - x_1) \Rightarrow y - \frac{1}{2} = -2e(x - e)$$

$$\boxed{y = -2ex + 2e^2 + \frac{1}{2}}$$ معادلة العمودي على المماس

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

تطبيقات الحركة في خط مستقيم (صفحة85)

مفاهيم الدرس:

نقطة الأصل: هي النقطة التي يكون الجسم فيها في حالة سكون وتساوي 0 .

الموقع $s(t)$: هو المسافة الفاصلة بين الجسم و نقطة الأصل ، ويمثل اقتران بالنسبة إلى الزمن، ويرمز له بالرمز $s(t)$ ، وممكن أن قيمته موجبة أو سالبة أو صفر .

السرعة القياسية: هي المسافة التي يقطعها الجسم في وحدة الزمن، وتقاس (بالمتر/ ثانية) أو (كم/ ساعة)، وهي القيمة المطلقة للسرعة المتجهة. $|v(t)|$ حيث لها مقدار وليس لها اتجاه.

السرعة المتجهة $v(t)$: هو مقدار تغير اقتران موقع الجسم $s(t)$ بالنسبة إلى نقطة محددة في زمن محدد مع تحديد اتجاه السرعة، حيث أن لها مقدار ولها اتجاه.

ملاحظة مهمة: كلمة (سرعة) تعني السرعة المتجهة أينما وردت في الكتاب.

إذا كانت $v(t) = 0$ فإن الجسم يكون في حالة سكون .

إذا كانت $v(t) > 0$ فإن الجسم يتحرك في الاتجاه الموجب .

إذا كانت $v(t) < 0$ فإن الجسم يتحرك في الاتجاه السالب .

التسارع $a(t)$: هو مقدار تغير السرعة المتجهة $v(t)$ بالنسبة إلى الزمن .

الرموز المستخدمة في الدرس:
1) الزمن ويرمز له t ووحدة قياسه (ثانية ، دقيقة ، ساعة، الخ ..) .
2) موقع الجسم ويرمز له $s(t)$ ووحدة قياسها (سم ، م ، كم ، الخ .....).
3) سرعة الجسم ويرمز له $v(t)$ ووحدة قياسها (سم/ثانية ، م/ دقيقة ، كم/ساعة ، الخ ..)
4) تسارع الجسم ويرمز له $a(t)$ ووحدة قياسها (سم/ثانية^2 ،م/ دقيقة^2 ، كم/ ساعة^2،الخ ..)

العلاقة بين الموقع والسرعة والتسارع:

$$s(t) \ \text{نشتق} \Longrightarrow \acute{s}(t) = v(t) \ \text{نشتق} \Longrightarrow \acute{v}(t) = a(t)$$

ملاحظات مهمة:

1) يجب توفير الاقتران المطلوب حسب طلب السؤال، بحيث إذا كان المطلوب إيجاد سرعة الجسم والاقتران الموجود بالسؤال هو اقتران الموقع يتم الاشتقاق لإيجاد اقتران السرعة، وإذا كان المطلوب ايجاد التسارع نقوم باشتقاق اقتران السرعة .

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

2) يجب توفر الزمن بالسؤال، وإذا لم يكن متوفر نقوم بإيجاده أو استنتاجه من خلال معطيات السؤال.

3) يكون الجسم في حالة سكون لحظي إذا كان سرعته تساوي صفر $t = 0$.

4) يكون الجسم في موقعه الابتدائي عندما $t = 0$.

مثال 5: يمثل الاقتران : $t \geq 0$, $s(t) = 6t^2 - t^3$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار ، و t الزمن بالثواني : (صفحة 86)

1) أجد سرعة الجسم المتجهة وتسارعه عندما $t = 2$

سرعة الجسم:

أجد مشتقة اقتران الموقع ، ثم أعوض $t = 2$ في المشتقة :

$$s(t) = 6t^2 - t^3 \Rightarrow v(t) = \acute{s}(t) = 12t - 3t^2 \Rightarrow v(2) = 12(2) - 3(2)^2$$

$$\Rightarrow v(2) = 24 - 12 \Rightarrow \boxed{v(2) = 12 \ \ m/s}$$

تسارع الجسم:

أجد مشتقة اقتران السرعة المتجهة ، ثم أعوض $t = 2$ في المشتقة :

$$a(t) = \acute{v}(t) = 12 - 6t \quad \Rightarrow a(2) = 12 - 6(2)$$

$$\Rightarrow a(2) = 12 - 12 \quad \Rightarrow a(2) = 0 \ \ m/s^2$$

2) أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

يكون الجسم في حالة سكون لحظي إذا كان سرعته 0 ، أي عندما $v(t) = 0$:

$$v(t) = 12t - 3t^2 \Rightarrow 12t - 3t^2 = 0 \Rightarrow 3t(4 - t) = 0$$

$\Rightarrow$ إما $3t = 0 \Rightarrow \boxed{t = 0}$ أو $4 - t = 0 \Rightarrow \boxed{t = 4}$

إذن يكون الجسم في حالة سكون لحظي عندما $t = 0$ ، أي عندما $t = 4$

3) في اي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t = 5$

$$v(t) = 12t - 3t^2 \Rightarrow v(5) = 12(5) - 3(5)^2 \Rightarrow v(5) = 60 - 75 \Rightarrow v(5) = -15$$

بما أن إشارة السرعة المتجهة سالبة ، فإن الجسم يتحرك في الاتجاه السالب عندما $t = 5$.

4) متى يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي.

يكون الجسم في موقعه الابتدائي أول مرة عندما $t = 0$ ، ومنه فإن $s(0) = 0$

$$s(t) = 6t^2 - t^3 = 0 \Rightarrow 6t^2 - t^3 = 0 \Rightarrow t^2(6 - t) = 0$$

إما $t^2 = 0 \Rightarrow \boxed{t = 0}$ أو $6 - t = 0 \Rightarrow \boxed{t = 6}$

إذن يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي بعد $6\ s$

معتصم إبراهيم ٠٧٨٦٦٧٨٠٨

أتحقق من فهمي: (صفحة 88)

يمثل الاقتران : $s(t) = t^2 - 7t + 8 \ , t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار ، و t الزمن بالثواني :

1) أجد سرعة الجسم المتجهة وتسارعه عندما $t = 4$.

سرعة الجسم المتجهة

أجد مشتقة اقتران الموقع ، ثم أعوض $t = 2$ في المشتقة :

$$s(t) = t^2 - 7t + 8 \Rightarrow v(t) = \acute{s}(t) = 2t - 7$$

$$\Rightarrow v(4) = 2(4) - 7 \Rightarrow v(2) = 8 - 7 \Rightarrow \boxed{v(2) = 1 \ \ m/s}$$

تسارع الجسم

أجد مشتقة اقتران السرعة المتجهة ، ثم أعوض $t = 2$ في المشتقة :

$$a(t) = \acute{v}(t) = 2 \Rightarrow a(4) = 0 \ \ m/s^2$$

2) أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي .

يكون الجسم في حالة سكون لحظي إذا كان سرعته 0 ، أي عندما $v(t) = 0$:

$$v(t) = 2t - 7 \Rightarrow 2t - 7 = 0 \Rightarrow 2t = 7 \Rightarrow t = \frac{7}{2} \ s$$

3) في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t = 2$ ؟

$$v(t) = 2t - 7 \Rightarrow v(2) = 2(2) - 7 \Rightarrow v(2) = 4 - 7 \Rightarrow v(2) = -3$$

بما أن إشارة السرعة المتجهة سالبة ، فإن الجسم يتحرك في الاتجاه السالب عندما $t = 2$.

4) متى يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي؟

يكون الجسم في موقعه الابتدائي أول مرة عندما $t = 0$

$$s(t) = t^2 - 7t + 8 \Rightarrow s(0) = (0)^2 - 7(0) + 8 \Rightarrow s(0) = 8$$

$$\Rightarrow t^2 - 7t + 8 = 8 \Rightarrow t^2 - 7t = 8 - 8 \Rightarrow t^2 - 7t = 0$$

$$\Rightarrow t(t - 7) = 0 \Rightarrow \boxed{\text{إما} \ \ t = 0} \Rightarrow \boxed{\text{أو} \ \ t = 7}$$

إذن يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي بعد $7 \ s$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٧٨٠٨

تطبيقات الحركة التوافقية البسيطة (صفحة 88)

ملاحظات لغايات فهم الدرس:

الحركة التوافقية البسيطة: هي حركة (التذبذبية) الاهتزازية التي تكرر نفسها ذهاباً وإياباً على المسار نفسه في فترات زمنية متساوية حول موقع الاتزان، ويتناسب فيها مقدار قوة الارجاع (القوة المعيدة) تناسباً طردياً مع مقدار الإزاحة ويكون بعكس اتجاه الإزاحة.

أمثلة عليها: تذبذب البندول البسيط، حركة الأرجوحة، اهتزاز وتر آلة موسيقية.

موقع الإتزان: هي نقطة تنعدم فيها محصلة القوى المؤثرة في الجسيم وتمثل نقطة سكونه عندما يتوقف عن الاهتزاز، حيث تكون إزاحة الجسم تساوي صفر، واستطالة النابض أو انضغاطه تساوي صفر.

القوة المعيدة: هي القوة التي تؤثر في الجسم لإعادته إلى موقع الاتزان، ويكون اتجاهها دائماً باتجاه موقع الاتزان بعكس اتجاه الإزاحة.

معادلات الحركة التوافقية البسيطة (معادلات تغير الإزاحة مع الزمن):

1) المعادلة الأولى: وتنطبق على أي حركة توافقية بسيطة تبدأ من موقع الاتزان عند الزمن $t = 0$.

$$x(t) = a\sin\theta = a\sin(\omega t)$$

2) المعادلة الثانية: وتنطبق على أي حركة توافقية بسيطة تبدأ من أقصى إزاحة (A) عند الزمن $t = 0$

$$x(t) = a\cos\theta = a\cos(\omega t)$$

حيث:

التردد الزاوي (ω): عدد الدورات في وحدة الزمن مضروباً في (2π) ، ويقاس بوحدة (rad/s) .

سعة الذبذبة (a) : هي أقصى إزاحة عن موقع الاتزان .

ملاحظات مهمة:

1) **حركة الجسم باتجاه موقع الاتزان:** فإن مقدار السرعة يزداد ليصل قيمة عظمى عند مروره بموقع الاتزان، في حين يقل مقدار الإزاحة والتسارع ليصبح كل مهما صفراً لحظة مروره بموقع الاتزان.

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

2) حركة الجسم مبتعداً عن موقع الاتزان: فإن مقدار السرعة تقل تدريجياً لتصبح صفراً عند أقصى إزاحة، في حين يزداد مقدار الإزاحة والتسارع تدريجياً ليصل قيمته العظمى عند مروره بموقع الاتزان

3) عند أقصى إزاحة يتحركها الجسم: يكون للتسارع قيمة عظمى، ومقدار السرعة يساوي صفر لأن الجسم يسكن لحظياً عند هذا الموقع.

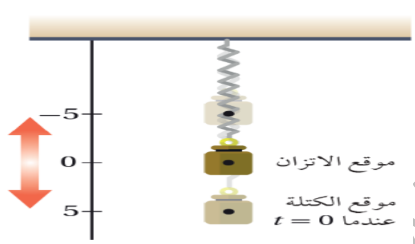
4) تستمر هذه الحركة التذبذبية في غياب قوى الاحتكاك.

5) تتلاشى هذه الحركة التذبذبية تدريجياً إلى أن يتوقف الجسم عن التذبذب بعد مدة زمنية في حال وجود قوى الاحتكاك.

مثال6: من الحياة (صفحة 88)

زنبرك : يبين الشكل المجاور جسماً معلقاً بزنبرك ، شد 5 وحدات أسفل الاتزان $(s = 0)$ ثم ترك عند الزمن $t = 0$ ليتحرك إلى الأعلى وإلى الأسفل . ويمثل الاقتران $s(t) = 5\cos t$ موقع الجسم عند أي زمن لاحق ، حيث t الزمن بالثواني ، و s الموقع بالسنتميترات:

1) أجد اقتراناً يمثل سرعة الجسم المتجهة، واقتراناً أخر يمثل تسارعه عند أي لحظة.



اقتران السرعة المتجهة

$$v(t) = \acute{s}(t) = -5\sin t$$

اقتران التسارع

$$a(t) = \acute{v}(t) = -5\cos t$$

2) أصف حركة الجسم.

1- اعتماداً على الخصائص الجبرية لاقتران الموقع ، فإن الجسم يتحرك بمرور الزمن بين الموقع $s = 5$ والموقع $s = -5$ على المحور s والقيمة السالبة تعني أن الجسم فوق موقع الإتزان .

2- ألاحظ قيمة السرعة تكون أكبر ما يمكن في الاتجاه الموجب ، والاتجاه السالب عندما $|\sin t| = 1$ وفي هذه الحالة ، فإن $\cos t = 0$ (متطابقة فيثاغورس) ، وبالرجوع إلى اقتران الموقع ، ألاحظ أن

قيمته تصبح صفراً (موقع الاتزان) عندما $\cos t = 0$ ،ما يعني أن سرعة الجسم تكون أكبر ما يمكن عندما يمر الجسم بموقع الاتزان .

3- اعتماداً على الخصائص الجبرية لاقتران التسارع، فإن قيمة تسارع الجسم تكون دائما معكوس قيمة موقع الجسم، ذلك أن محصلة القوى تسحب الجسم إلى الأسفل إذا كان أعلى موقع الاتزان، وأن محصلة القوى تسحب الجسم إلى الأعلى إذا كان أسفل موقع الاتزان.

4- تكون قيمة التسارع صفراً فقط عند موقع الاتزان، لأن قوة الجاذبية وقوة الزنبرك تلغي إحداهما الأخرى عند هذه النقطة. ولكن إذا كان الجسم عند أي موقع اخر، فإن هاتين القوتين لا تكونان متساويتين، والتسارع لا يساوي صفراً .

أتحقق من فهمي: (صفحة 90)

يتحرك جسم معلق بزنبرك إلى الأعلى وإلى الأسفل ، ويمثل الاقتران : $s(t) = 7\,\text{Sin}\,t$ موقع الجسم عند أي زمن لاحق ، حيث t الزمن بالثواني ، و s الموقع بالامتار:

1) أجد اقتراناً يمثل سرعة الجسم المتجهة، واقتراناً أخر يمثل تسارعه عند أي لحظة.

اقتران موقع الجسم

$$s(t) = 7\,\text{Sin}\,t$$

اقتران السرعة المتجهة

$$v(t) = \acute{s}(t) = 7\cos t$$ لموقع

اقتران التسارع

$$a(t) = \acute{v}(t) = -7\,\text{Sin}\,t$$

2) أصف حركة الجسم.

بالنظر لاقتران الموقع $s(x)$ فإن قيم s تنحصر بين $\pm 7m$ وهذا يعني ان الجسم يتحرك بمرور الزمن صعوداً وهبوطاً بين الموقعين $s = -7m$ ، $t = n\pi$ ويمر بنقطة الاتزان $s = 0$ عند قيم t التي تحقق $s(t) = 0$ وهي $f(x)$ حيث n أي عدد صحيح غير سالب .

تتغير سرعة الجسم بمرور الزمن وتتراوح بين القيمتين $\pm 7m$ ويكون مقدار سرعة الجسم القياسية أكبر ما يمكن $|7\cos t| = 7$ عندما $\cos t = \pm 1$ وذلك عندما $t = n\pi$ (نفسها لحظات مرور الجسم بنقطة الاتزان) ، بينما تكون سرعة الجسم صفراً (يسكن لحظياً) عندما يكون الجسم في أقصى بعد له عن نقطة الاتزان $|s(t)| = v(t) = 0$ (عندما $t = \frac{n\pi}{2}$ حيث n عدد فردي موجب) .

نلاحظ أن قيمة تسارع الجسم عند كل لحظة هي معكوس قيمة موقعه وأن التسارع ينعدم لحظة مرور الجسم بنقطة الاتزان، وهي اللحظة التي تكون القوى المؤثرة على الجسم فيها صفراً .

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

أتدرب وأحل المسائل: (صفحة 90)

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = 2\sin x - e^x$

$\acute{f}(x) = 2\cos x - e^x$

2) $f(x) = \dfrac{\ln x}{4} - \pi \cos x$

$\acute{f}(x) = \dfrac{1}{4x} + \pi \sin x$

3) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x^3}\right) + x^4$

$f(x) = \ln 1 + \ln x^3 + x^4 \implies f(x) = -3\ln x + x^4 \implies \acute{f}(x) = \dfrac{-3}{x} + 4x^3$

4) $f(x) = e^{x+1} + 1$

$\acute{f}(x) = e^{x+1}.(1) \implies \acute{f}(x) = e^{x+1}$

5) $f(x) = e^x + x^e$

$\acute{f}(x) = e^x + x^{e-1}$

6) $f(x) = \ln\left(\dfrac{10}{x^n}\right)$

$f(x) = \ln 10 - \ln x^n \implies f(x) = \ln 10 - n\ln x$

$\acute{f}(x) = \ln 10 - n\ln x \implies \acute{f}(x) = -n\left(\dfrac{1}{x}\right) \implies \acute{f}(x) = \dfrac{-n}{x}$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

إذا كان : $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}e^{x}$ ، فأجب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

7) أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران f عند النقطة $\left(\pi, \frac{1}{2}e^{\pi}\right)$.

الخطوة الأولى : أجد ميل المماس عند النقطة $\left(\pi, \frac{1}{2}e^{\pi}\right)$

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{2}e^{x} \Rightarrow f'(x) = \cos x + \frac{1}{2}e^{x}$$

$$\Rightarrow f'(\pi) = \cos \pi + \frac{1}{2}e^{\pi} \quad \Rightarrow \boxed{f'(\pi) = -1 + \frac{1}{2}e^{\pi}} \quad \Rightarrow \left(\pi, \frac{1}{2}e^{\pi}\right)$$ ميل المماس عند النقطة

الخطوة الثانية: أيجاد معادلة المماس.

$$y - y_1 = \mathrm{m}(x - x_1) \quad \Rightarrow \quad y - \frac{1}{2}e^{\pi} = -1 + \frac{1}{2}e^{\pi}(x - \pi)$$

$$\Rightarrow y - \frac{1}{2}e^{\pi} = \left(-1 + \frac{1}{2}e^{\pi}\right)x - \left(-1 + \frac{1}{2}e^{\pi}\right)\pi \Rightarrow y - \frac{1}{2}e^{\pi} = \left(-1 + \frac{1}{2}e^{\pi}\right)x + \pi - \frac{\pi}{2}e^{\pi}$$

$$y = \left(-1 + \frac{1}{2}e^{\pi}\right)x + \pi - \frac{\pi}{2}e^{\pi} + \frac{1}{2}e^{\pi} \qquad \left(\pi, \frac{1}{2}e^{\pi}\right)$$ معادلة المماس عند النقطة

8) أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران f عند النقطة $\left(\pi, \frac{1}{2}e^{\pi}\right)$.

بما أن ميل المماس عند النقطة $\left(\pi, \frac{1}{2}e^{\pi}\right)$ هو $-1 + \frac{1}{2}e^{\pi}$ ، فإن ميل العمودي على المماس هو :

$$m_1 = \frac{-1}{-1 + \frac{1}{2}e^{\pi}} \Rightarrow m_1 = \left[\frac{-1}{-1 + \frac{1}{2}e^{\pi}}\right] \times \frac{2}{2} \Rightarrow m_1 = \frac{-2}{-2 + e^{\pi}} \Rightarrow m_1 = \frac{2}{2 - e^{\pi}}$$

معادلة العمودي على المماس هي:

$$y - y_1 = m_1(x - x_1) \Rightarrow y - \frac{1}{2}e^{\pi} = \frac{2}{2 - e^{\pi}}(x - \pi)$$

$$\Rightarrow y - \frac{1}{2}e^{\pi} = \left(\frac{2}{2 - e^{\pi}}\right)x - \left(\frac{2}{2 - e^{\pi}}\right)\pi \Rightarrow$$

$$y = \left(\frac{2}{2 - e^{\pi}}\right)x - \left(\frac{2\pi}{2 - e^{\pi}}\right) + \frac{1}{2}e^{\pi} \quad \Rightarrow \quad \left(\pi, \frac{1}{2}e^{\pi}\right)$$ معادلة العمودي على المماس عند النقطة

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

9) أجد قيمة x التي يكون عندها المماس أفقياً لمنحنى الاقتران : $f(x) = e^x - 2x$

$$f(x) = e^x - 2x \Rightarrow \acute{f}(x) = e^x - 2 \Rightarrow e^x - 2 = 0 \Rightarrow e^x = 2$$

$$\ln e^x = \ln 2 \quad \Rightarrow x\ln e = \ln 2 \quad \Rightarrow x = \ln 2 \quad \Rightarrow x \approx 0.69$$

10) اختيار من متعدد : أي الآتية تمثل معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران : $f(x) =$ $\sin x + \cos x$ عندما $x = \pi$ ؟

$a)\ y = -x + \pi - 1$ $\boxed{b)\ y = x - \pi - 1}$ $c)\ y = x - \pi + 1$ $d)\ y = x + \pi + 1$

$$f(x) = \sin x + \cos x \quad \Rightarrow \acute{f}(x) = \cos x - \sin x$$

$$\Rightarrow \acute{f}(\pi) = \cos \pi - \sin \pi \Rightarrow \acute{f}(\pi) = -1 - 0 \Rightarrow \acute{f}(\pi) = -1$$

ميل المماس عند النقطة $(\pi, -1)$ هو : $\acute{f}(x) = \cos x - \sin x$

بما أن ميل المماس هو 1 - إذن ميل العمودي على المماس هو 1

معادلة العمودي على المماس:

$$y + 1 = 1(x - \pi) \Rightarrow \boxed{y = x - \pi - 1}$$

11) إذا كان : $f(x) = \ln(kx)$، حيث k عدد حقيقي موجب ، و $x > 0$ ، فأبين أن $\acute{f}(x) = \frac{1}{x}$.

$$f(x) = \ln(kx) \quad \Rightarrow f(x) = \ln k + \ln x \Rightarrow \acute{f}(x) = 0 + \frac{1}{x} \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{1}{x}$$

إذا كان الاقتران : $f(x) = \ln x$، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

12) أثبت أن مماس منحنى الاقتران عند النقطة $(e, 1)$ يمر بنقطة الأصل .

ميل المماس عند النقطة $(e, 1)$ هو : $\acute{f}(e) = \frac{1}{e}$

معادلة المماس هي:

$$y - 1 = \frac{1}{e}(x - e) \Rightarrow \quad y = \frac{1}{e}x$$

وهو مستقيم يمر بنقطة الأصل لأن النقطة $(0, 0)$ تحقق معادلته .

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

13) أثبت أن المقطع x للعمودي على المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة $(e, 1)$ هو $e + \frac{1}{e}$.

بما أن ميل المماس هو $\frac{1}{e}$ فإن ميل العمودي على المماس هو $-e$

معادلة العمودي على المماس:

$$y - 1 = -e(x - e) \quad \Rightarrow \; y = -ex + e^2 + 1$$

لإيجاد المقطع x لهذا المستقيم نضع $y = 0$ في معادلته

$$0 = -ex + e^2 + 1 \;\Rightarrow\; ex = e^2 + 1 \;\Rightarrow\; x = \frac{e^2 + 1}{e} \;\Rightarrow\; x = e + \frac{1}{e}$$

يمثل الاقتران $s(t) = t^3 - 4t^2 + 5t, \; t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار ، و t الزمن بالثواني:

14) أجد سرعة الجسم وتسارعه عندما $t = 5$.

$$s(t) = t^3 - 4t^2 + 5t \;\Rightarrow\; \acute{s}(t) = v(t) = 3t^2 - 8t + 5$$

$$\Rightarrow\; v(5) = 3(5)^2 - 8(5) + 5 \;\Rightarrow\; v(5) = 75 - 40 + 5 \Rightarrow v(5) = 40 \; m/s$$

$$\acute{v}(t) = a(t) = 6t - 8 \Rightarrow a(5) = 6(5) - 8 \Rightarrow a(5) = 30 - 8 \Rightarrow a(5) = 22 \; m/s^2$$

15) أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

$$v(t) = 3t^2 - 8t + 5 = 0 \;\Rightarrow\; (3t - 5)(t - 1) = 0$$

$$3t - 5 = 0 \;\Rightarrow\; 3t = 5 \;\Rightarrow\; \boxed{t = \frac{5}{3} \; s}$$

$$t - 1 = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{t = 1 \; s}$$

16) في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t = 4$ ؟

$$v(4) = 3(4)^2 - 8(4) + 5 \;\Rightarrow\; v(4) = 48 - 32 + 5 \;\Rightarrow v(4) = 21 \; m/s$$

بما أن إشارة السرعة المتجهة موجبة ، فإن الجسم يتحرك لليمين عندما $t = 4$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

17) متى يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي؟

الموقع الابتدائي للجسم : $s(0) = 0 \ m$

$$s(t) = 0 \implies t^3 - 4t^2 + 5t = 0 \implies t(t^2 - 4t + 5) = 0 \implies t = 0$$

العبارة التربيعية مميزها سالب وبالتالي لا تساوي صفر $b^2 - 4ac \implies 4^2 - 4(1)(5) = -4$

إذن لن يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي أبداً

يمثل الاقتران : $s(t) = e^t - 4t, \ t \geq 0$ موقع جسيم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني :

18) أحدد الموقع الابتدائي للجسيم.

$$s(0) = e^0 - 4(0) \implies s(0) = 1 \ m$$

19) أجد تسارع الجسيم عندما تكون سرعته المتجهة صفراً.

$$s(t) = e^t - 4t \implies v(t) = \acute{s}(t) = e^t - 4 \implies e^t - 4 = 0 \implies e^t = 4$$

$$\implies \ln e^t = \ln 4 \implies t(1) = \ln 4 \implies t = \ln 4$$

$$a(t) = \acute{v}(t) = e^t \implies a(\ln 4) = e^{\ln 4} \implies a(\ln 4) = 4 \ m/s^2$$

زنبرك : يتحرك جسم معلق بزنبرك إلى الأعلى وإلى الأسفل، ويحدد الاقتران $s(t) = 4\cos t$ موقع الجسم عند أي زمن لاحق ، حيث t الزمن بالثواني ، و s الموقع بالأمتار :

20) أجد اقتراناً يمثل سرعة الجسم المتجهة، واقتراناً آخر يمثل تسارعه عند أي لحظة.

$$s(t) = 4\cos t \implies v(t) = -4\sin t \implies a(t) = -4\cos t$$

21) أجد سرعة الجسم المتجهة وتسارعه عندما $t = \frac{\pi}{4}$.

$$s(t) = 4\cos t \implies v(t) = -4\sin t$$

$$v\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4\sin\frac{\pi}{4} \implies = -4 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \implies = -2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \implies = -2\sqrt{2} \ m/s^2$$

$$a(t) = -4\cos t \implies a\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4\cos\frac{\pi}{4} \implies = -4 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\implies = -2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \implies a\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\sqrt{2} \ m/s^2$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

22) أصف حركة الجسم.

من خصائص اقتران $s(t) = 4\cos t$ نعرف أن الجسم يتحرك بمرور الزمن صعوداً وهبوطاً بين الموقعين

$s = 4m\ ,s = -4m$ ، وأنه يمر بنقطة الاتزان $s = 0$ أثناء هذه الحركة عندما $t = \frac{n\pi}{2}$ حيث n أي عدد فردي موجب .

تتغير سرعة الجسم بمرور الزمن ونعرف من خصائص الاقتران $v(t) = -4\sin t$ أن قيم السرعة تتراوح بين

$-4m/s$ و $4m/s$ ونلاحظ أن الجسم يصل إلى هذه السرعة عند اللحظات التي يمر فيها بنقطة الاتزان.

نلاحظ أن قيمة تسارع الجسم عند كل لحظة تساوي معكوس قيمة اقتران الموقع عند تلك اللحظة، وان التسارع ينعدم عند مرور الجسم بنقطة الاتزان حيث تكون محصلة القوى المؤثرة في الجسم صفراً .

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

مهارات التفكير العليا (صفحة 92)

23) تبرير : إذا كان الاقتران : $y = e^x - ax$ حيث a عدد حقيقي ، فأجد معادلة المماس عند نقطة تقاطع الاقتران مع المحور y ، مبرراً إجابتي .

الخطوة الأولى: إيجاد النقطة

التقاطع مع محور y إذن $x = 0$

$$y = e^x - ax$$

$$\boxed{x = 0} \implies y = e^0 - a(0) \implies \boxed{y = 1}$$

الخطوة الثانية: إيجاد المشتقة

$$y = e^x - ax \implies \frac{dy}{dx} = e^x - a$$

الخطوة الثالثة: إيجاد ميل المماس

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = e^0 - a \implies \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 1 - a$$

الخطوة الرابعة: إيجاد معادلة المماس

$$y - y_1 = m(x - x_1) \implies y - 1 = (1 - a)(0 - x_1) \implies y = (1 - a)(0 - x_1) + 1$$

24) تحد : أثبت عدم وجود مماس ميله 2 للاقتران : $y = 2e^x + 3x + 5x^3$.

ميل مماس المنحنى عند أي نقطة عليه هو:

$$\acute{y} = 2e^x + 3 + 15x^2$$

لكل x فإن $2e^x > 0$

لكل x فإن $15x^2 \geq 0$

بالجمع نجد أنه لكل x فإن $2e^x + 15x^2 > 0$

بإضافة 3 للطرفين : لكل x فإن $2e^x + 15x^2 + 3 > 3$ أي أن $\acute{y} > 3$

إذن لا يمكن أن تكون قيمة $\acute{y}$ تساوي 2 لأي قيمة حقيقية للمتغير x .

تبرير : إذا كان الاقتران $y = ke^x$، حيث $k > 0$ ، وكان منحناه يقطع المحور y عند النقطة P ، فاجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

25) أجد نقطة تقاطع مماس منحنى الاقتران عند النقطة P مع المحور x .

الاحداثي x لنقطة تقاطع المنحنى $y = ke^x$ مع المحور y هو 0 وبالتعويض في معادلة الاقتران نجد $y = ke^0 = k$ ، أي أن إحداثيي P هما $(0, k)$

$$\frac{dy}{dx} = ke^x \implies \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = k$$

معادلة المماس $y - y_1 = m(x - x_1) \implies y - k = k(x - 0) \implies y = kx + k$

ولإيجاد نقطة تقاطعه مع المحور x نعوض $y = 0$

إذن نقطة تقاطع المماس عند P مع المحور x هي : $(-1, 0)$

26) إذا كان العمودي على المماس عند النقطة P يقطع المحور x عند النقطة $(100, 0)$،فأجد قيمة k.

ميل العمودي على المماس هو $-\frac{1}{k}$

معادلة العمودي على المماس:

$$y - k = -\frac{1}{k}(x - 0) \implies y = -\frac{1}{k}x + k$$

وبتعويض إحداثيي نقطة التقاطع نجد أن:

$$0 = -\frac{1}{k}(100) + k \implies k^2 = 100 \implies k = \pm 10$$

ولأن $k > 0$ ، فإن $k = 10$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

تحد : إذا كان الاقتران $y = \log x$ ، فأجب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

27) أثبت أن $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln 10}$.

$$y = \log x \implies \log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10} \implies \log_{10} x = \frac{1}{\ln 10} \ln x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln 10} \times \frac{1}{x} \implies \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln 10}$$

28) اعتماداً على النتيجة من السؤال السابق ، أجد $\frac{dy}{dx}$ للإقتران : $y = \log ax^2$ ، حيث a عدد حقيقي موجب .

$$y = \log ax^2 \implies y = \log a + 2\log x$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 + 2 \times \frac{1}{x \ln 10} \implies \frac{dy}{dx} = \frac{2}{x \ln 10}$$

تبرير : يمثل الاقتران : $s(t) = 4 - \sin t\ , t \geq 0$ موقع جسيم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار ، و t الزمن بالثواني :

29) أجد سرعة الجسيم المتجهة وتسارعه بعد t ثانية .

$$s(t) = 4 - \sin t \implies v(t) = -\cos t \implies a(t) = \sin t$$

30) أجد موقع الجسيم عندما كان في حالة سكون لحظي أول مرة بعد انطلاقه.

$$v(t) = -\cos t \quad \implies t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$$

يكون الجسم في حالة سكون لأول مرة بعد انطلاقه عندما $t = \frac{\pi}{2}$

ويكون موقعه عندها $s\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$$v\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 - \sin\frac{\pi}{2} \implies v\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 - 3 \implies v\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1\ m$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

31) أجد موقع الجسيم عندما يكون تسارعه صفراً ، مبرراً إجابتي.

بما أن المطلوب تحديد موقع الجسيم عندما يصل إلى أقصى سرعة، فهذا يتطلب إيجاد القيم القصوى لاقتران السرعة:

$$|v(t)| = |-\cos t| \implies |v(t)| = |\cos t|$$

ويمكن تحديدها من خصائص الاقتران وهما قيمتان : 0 (وهي قيمة صغرى) و 0 (وهي قيمة عظمى) ومنه :

$|v(t)| = 0 \implies \cos t = 0 \rightarrow \sin t = \mp 1$ متطابقة فيثاغورس

$|v(t)| = 1 \implies \cos t = 1 \rightarrow \sin t = 0$ متطابقة فيثاغورس

إذن يمكن إيجاد موقع الجسيم عندما يصل إلى أقصى سرعة كالآتي:

$$\sin t = 1 \implies s(t) = 4 - 1 = 3m$$

$$\sin t = -1 \implies s(t) = 4 - (-1) = 5m$$

$$\sin t = 0 \implies s(t) = 4 - 0 = 4m$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

كتاب التمارين

الوحدة الثالثة: التفاضل

مشتقة اقتران القوة:

أجد مشتقة اقتران كل مما يأتي:

1) $f(x) = 7x^3$

$$\acute{f}(x) = 21x^2$$

2) $f(x) = 12x^{\frac{4}{3}}$

$$\acute{f}(x) = \frac{4}{3}.12x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \ = 16x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \ = 16\sqrt[3]{x}$$

3) $f(x) = 3x^2 - 5\sqrt{x}$

$$f(x) = 3x^2 - 5x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \acute{f}(x) = 6x - \frac{1}{2}.5x^{\frac{-1}{2}} \Rightarrow \ = 6x - \frac{5}{2\sqrt{x}}$$

4) $f(x) = \frac{3}{x^7}$

$$f(x) = 3x^{-7} \Rightarrow \acute{f}(x) = -21x^{-8} \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{-21}{x^8}$$

5) $f(x) = x^2(x^3 - 2x)$

$$f(x) = x^5 - 2x^3 \Rightarrow \quad \acute{f}(x) = 5x^4 - 6x^2$$

6) $y = \frac{7}{x^3} + \frac{3}{x} - 2$

$$y = 7x^{-3} + 3x^{-1} - 2 \Rightarrow \acute{y} = -21x^{-4} - 3x^{-2} \Rightarrow \acute{y} = -\frac{21}{x^4} - \frac{3}{x^2}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

مثال: أجد مشتقة كل مما يأتي:

$$a)\ f(x)=\frac{2x-7}{x^2}$$

$$f(x)=2x^{-1}-7x^{-2}\Rightarrow \acute{f}(x)=-2x^{-2}+14x^{-3}\Rightarrow \acute{f}(x)=-\frac{2}{x^2}+\frac{14}{x^3}$$

$$b)\ f(x)=\sqrt{x}+6\sqrt{x^3}+5$$

$$f(x)=x^{\frac{1}{2}}+6x^{\frac{3}{2}}+5\Rightarrow \acute{f}(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}+\frac{3}{2}\,6x^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \acute{f}(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}+9x^{\frac{1}{2}}\Rightarrow \acute{f}(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+9\sqrt{x}$$

مشتقة الاقتران $y=(ax+b)^n$

أجد مشتقة كل مما يأتي:

$$7)\ y=(2x-3)^6$$

$$\acute{y}=6(2x-3)^5(2)\ \Rightarrow \acute{y}=12(2x-3)^5$$

$$8)\ y=\sqrt{9-3x}$$

$$y=(9-3x)^{\frac{1}{2}}\Rightarrow \acute{y}=\frac{1}{2}(9-3x)^{\frac{-1}{2}}(-3)\Rightarrow \acute{y}=-\frac{3}{2(9-3x)^{\frac{1}{2}}}\Rightarrow \acute{y}=-\frac{3}{2\sqrt{(9-3x)}}$$

$$9)\ y=\frac{1}{\sqrt{4x+1}}$$

$$y=(4x+1)^{\frac{-1}{2}}\Rightarrow \acute{y}=-\frac{1}{2}(4x+1)^{\frac{-3}{2}}(4)\Rightarrow \acute{y}=-\frac{2}{(4x+1)^{\frac{3}{2}}}\Rightarrow \acute{y}=-\frac{2}{\sqrt{(4x+1)^3}}$$

مثال: أجد مشتقة الاقتران $y=\frac{1}{\sqrt{8-x}}$

$$y=\frac{1}{\sqrt{8-x}}$$

$$y=(8-x)^{-\frac{1}{2}}\Rightarrow \acute{y}=-\frac{1}{2}(8-x)^{-\frac{3}{2}}(-1)\Rightarrow \acute{y}=\frac{1}{2(8-x)^{\frac{3}{2}}}\Rightarrow \acute{y}=\frac{1}{2\sqrt{(8-x)^3}}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

ايجاد معادلة المماس عند نقطة ما:

إذا كان الاقتران: $f(x)=(3x+2)^2$ فأستعمل المشتقة لإيجاد كل مما يأتي :

10) معادلة المماس عند النقطة $(-1\,,1)$

الخطوة الأولى : أجد ميل المماس عند النقطة $(-1\,,1)$

$$f(x)=(3x+2)^2$$

$$\acute{f}(x)=2(3x+2)(3)\Rightarrow \acute{f}(x)=6(3x+2)\Rightarrow \acute{f}(x)=18x+12$$

$$\acute{f}(-1)=18(-1)+12\Rightarrow \acute{f}(-1)=-18+12\Rightarrow \acute{f}(-1)=-6$$

الخطوة الثانية: أجد معادلة المماس

$$y-y_1=m(x-x_1)\Rightarrow y-1=-6(x-(-1))$$

$$\Rightarrow y-1=-6(x+1)\Rightarrow y=-6x-6+1\Rightarrow y=-6x-5$$

11) معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(-1\,,1)$

الخطوة الأولى: ميل العامودي على المماس

$$m_1=-\frac{1}{m}=-\frac{1}{-6}=\frac{1}{6}$$

الخطوة الثانية: معادلة العامودي على المماس

$$y-1=\frac{1}{6}(x+1)\Rightarrow y=\frac{1}{6}x+\frac{1}{6}+1\Rightarrow y=\frac{1}{6}x+\frac{7}{6}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

مثال : إذا كان الاقتران : $f(x)=x^7-x$ فأستعمل المشتقة لإيجاد كل مما يأتي :

a) معادلة المماس عند النقطة $(1\,,0)$

الخطوة الاولى: أجد ميل المماس عند النقطة $(1\,,0)$

$$f(x)=x^7-x$$

$$\acute{f}(x)=7x^6-1\Rightarrow \acute{f}(1)=7(1)^6-1\Rightarrow \acute{f}(1)=7-1\Rightarrow \acute{f}(1)=6$$

الخطوة الثانية: أجد معادلة المماس

معادلة المستقيم بصيغة الميل ونقطة $y-y_1=m(x-x_1)$

بتعويض $(x_1=1\,,y_1=0,m=6)$

بالتبسيط $y-0=6(x-1)\Rightarrow y=6(x-1)\Rightarrow y=6x-6$

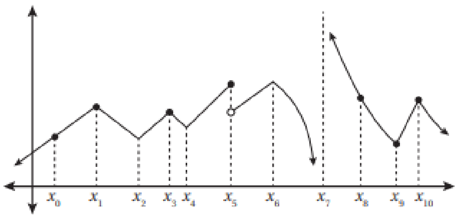
b) معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(1\,,0)$

ميل العمودي على المماس هو $-\frac{1}{m}=-\frac{1}{6}$ **، ومنه فإن معادلة العمودي على المماس عند النقطة (1,0) هي :**

$$y-0=-\frac{1}{6}(x-1)\Rightarrow y=-\frac{1}{6}x+\frac{1}{6}$$

الدرس الأول: الاشتقاق

1) يبين الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x)$ ، أحدد قيم x للنقاط التي يكون عندها الاقتران $f(x)$ غير قابل للأشتقاق ، مبررا ً إجابتي .



f غير قابل للاشتقاق عند القيم $x_1, x_2, x_3, x_4 x_6, x_9, x_{10}$ بسبب وجود زاوية لمنحنى الاقتران عند كل منها رغم أنه متصل.

f غير قابل للاشتقاق عند القيم x_5, x_7 وذلك لأنه غير متصل عندها ، والاتصال شرط ضروري.

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

2) $f(x) = 9e^x + \dfrac{1}{3\sqrt{x}}$

$$f(x) = 9e^x + \frac{1}{3}x^{\frac{-1}{2}} \Rightarrow f'(x) = 9e^x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x^{\frac{-3}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = 9e^x - \frac{1}{6}x^{\frac{-3}{2}} \Rightarrow f'(x) = 9e^x - \frac{1}{6x^{\frac{3}{2}}}$$

3) $f(x) = 2e^x + \dfrac{1}{x^2}$

$$f(x) = 2e^x + x^{-2} \Rightarrow f'(x) = 2e^x - 2x^{-3} \Rightarrow f'(x) = 2e^x - \frac{2}{x^3}$$

4) $f(x) = \dfrac{\pi}{2}\sin x - \cos x$

$$f'(x) = \frac{\pi}{2}\cos x + \sin x$$

5) أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران : $f(x) = 2e^x + x$ عندما $x = 2$

الخطوة الأولى: ايجاد النقطة عندما $x = 2$

$$f(x) = 2e^x + x \quad \Rightarrow f(2) = 2e^2 + 2$$

النقطة هي $(2\ ,\ 2e^2 + 2)$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

الخطوة الثانية: ايجاد ميل المماس عند $x = 2$

$f(x) = 2e^x + x \implies \acute{f}(x) = 2e^x + 1 \implies \acute{f}(2) = 2e^2 + 1$

الخطوة الثالثة: ايجاد معادلة المماس

معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - (2e^2 + 2) = (2e^2 + 1)(x - 2) \implies y = (2e^2 + 1)(x - 2) - (2e^2 + 2)$

$\implies y = (2e^2 + 1)(x - 2 - 2e^2 + 2) \implies y = (2e^2 + 1)(x - 2e^2)$

6) اثبت عدم وجود مماس افقي لمنحنى الاقتران : $f(x) = 3x + \sin x + 2$

نشتق ثم نساوي بالصفر وذلك لأن عند المماس الأفقي يكون $\acute{f}(x) = 0$

$\acute{f}(x) = 3 + \cos x = 0 \implies \cos x = -3$

قيمة $\cos x$ تقع بين $-1 \leq \cos x \leq 1$

اذن -3 لا تقع ضمن هذا المجال مما يعني عدم وجود مماس افقي لمنحنى f

يمثل الاقتران $s(t) = 3t^2 - t^3, t \geq 0$ موقع جسيم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار ، و t الزمن بالثواني :

7) أجد سرعة الجسيم المتجهة وتسارعه بعد t ثانية

$s(t) = 3t^2 - t^3, t \geq 0$

السرعة: $\acute{s}(t) = v(t) = 6t - 3t^2$

$v(t) = 6t - 3t^2$

التسارع: $\acute{v}(t) = a(t) = 6 - 6$

8) أجد موقع (المواقع) الذي يكون عنده الجسيم في حالة سكون.

يكون الجسيم في حالة سكون عندما $v(t) = 0$

$v(t) = 6t - 3t^2$

$6t - 3t^2 = 0 \implies 3t(2 - t) = 0 \implies$ إما $3t = 0 \implies \boxed{t = 0}$ أو $2 - t = 0 \implies \boxed{t = 2}$

$s(t) = 3t^2 - t^3$

$s(0) = 6(0) - 3(0)^2 \implies s(0) = 0$

$$s(2) = 6(2) - 3(2)^2 \Rightarrow s(2) = 12 - 12 \Rightarrow s(2) = 0$$

إذا كان: $f(x) = \ln x^2$ ، حيث $x > 0$ ، فأجب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

9) أجد معادلة مماس منحنى الاقتران عندما $x = e^2$

الخطوة الأولى: ايجاد النقطة

$f(x) = \ln x^2$

$f(x) = 2\ln x \qquad x = e^2$

$f(e^2) = 2\ln e^2 = 4 \qquad (e^2, 4)$

الخطوة الثانية: ايجاد ميل المماس

$f(x) = \ln x^2$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}(2x) \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{x} \Rightarrow f'(e^2) = \frac{2}{e^2}$$

الخطوة الثالثة: ايجاد معادلة المماس

معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 4 = \frac{2}{e^2}(x - e^2) \Rightarrow y - 4 = \frac{2}{e^2}x - \frac{2}{e^2}e^2$$

$$\Rightarrow y - 4 = \frac{2}{e^2}x - 2 \Rightarrow y = \frac{2}{e^2}x - 2 + 4 \Rightarrow y = \frac{2}{e^2}x + 2$$

10- أجد الإحداثي x للنقطة التي يكون المماس عندها موازياً للمستقيم $6x - 2y + 5 = 0$

الخطوة الأولى: ايجاد ميل المستقيم $y = mx + b$ حيث m الميل

$6x - 2y + 5 = 0$

$[-2y = -6x - 5] \qquad \div -2$

$y = 3x + \frac{5}{2} \qquad$ ميل المستقيم $= 3$

الخطوة الثانية ايجاد الاحداثي x

$f(x) = \ln x^2$

$$f'(x) = \frac{2}{x} = 3 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

إذا كان الاقتران : $f(x) = 2\sin x - 4\cos x$ ، فأجب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

11) أجد ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عندما $x = 0$

$$f(x) = 2\sin x - 4\cos x$$

$$f'(x) = 2\cos x + 4\sin x$$

$$f'(0) = 2\cos 0 + 4\sin 0 \Rightarrow f'(0) = 2\,(1) + 4(0) \Rightarrow f'(0) = 2$$

12- أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عندما $x = \frac{\pi}{2}$

1) الخطوة الأولى: ايجاد النقطة

$$f(x) = 2\sin x - 4\cos x$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\frac{\pi}{2} - 4\cos\frac{\pi}{2} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\,(1) - 4(0)$$

$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ النقطة هي $\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$

2) الخطوة الثانية: ايجاد ميل المماس

$$f(x) = 2\sin x - 4\cos x$$

$$f'(x) = 2\cos x + 4\sin x$$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\frac{\pi}{2} + 4\sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\,(0) + 4(1) \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$ ميل المماس

3) الخطوة الثالثة: ايجاد معادلة المماس

$y - y_1 = m(x - x_1)$ **معادلة المماس:**

$$y - 2 = 4\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y - 2 = 4x - 2\pi \Rightarrow y = 4x - 2\pi + 2$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

الدرس الثاني

مشتقة الضرب والقسمة والمشتقات العليا

مواضيع الدرس الثاني

مشتقة الضرب والقسمة والمشتقات العليا

- مشتقة ضرب اقترانين
- مشتقة قسمة اقترانين
- مشتقة المقلوب
- مشتقة الاقترانات المثلثية
- المشتقات العليا

تأسيس الدرس الثاني: (مهم جداً)

مراجعة طرق التحليل: (مهم جداً لهذا الدرس والدروس اللاحقة)

طرق التحليل، مهمة جداً للحل وللاختصار والتبسيط وتجهيز الحل : (فهم وحفظ)

1) تحليل الفرق بين مربعين:

(الجذر التربيعي للثاني + الجذر التربيعي للأول) (الجذر التربيعي للثاني – الجذر التربيعي للأول) = $x^2 - y^2$

$$x^2 - y^2 = (x - y)\,(x + y)$$

أمثلة :

1) $x^2 - 9 = (x - 3)\,(x + 3)$

2) $9x^2 - 1 = (3x - 1)\,(3x + 1)$

3) $25x^2 - 16y^2 = (5x - 4y)(5x + 4y)$

2) تحليل الفرق بين مكعبين:

$x^3 - y^3$

= (الجذر التكعيبي للثاني – الجذر التكعيبي للأول) (الثاني تربيع + (الأول × الثاني) + الأول تربيع)

$= (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

ملاحظة: القوس الثاني في التحليل يعتمد تحليله على القوس الأول.

أمثلة :

1) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

2) $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

3) $27x^3 - 1 = (3x - 1)(9x^2 + 3x + 1)$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٧٨٠٨

3) تحليل مجموع مكعبين:

$x^3 + y^3$

= (الجذر التكعيبي للثاني + الجذر التكعيبي للأول) (الثاني تربيع + الأول ضرب الثاني – الأول تربيع)

$= (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

أمثلة :

1) $x^3 + 64 = (x + 4)(x^2 - 4x + 16)$

2) $8x^3 + 125 = (2x + 5)(4x^2 - 10x + 25)$

3) $x^3 + 27y^3 = (x + 3y)(x^2 - 3xy + 9y^2)$

ملاحظة 1): القوس الثاني في التحليل يعتمد تحليله على القوس الأول.

ملاحظة 2): القوس الثاني الناتج عن عملية تحليل فرق مكعبين أو مجموع مكعبين لا يحلل.

4) تحليل القوس مرفوع لتربيع:

$(x+y)^2 = (x^2+2xy+y^2) =$ (الأول تربيع + (2 × الأول × الثاني) + الثاني تربيع)

$(x-y)^2 = (x^2-2xy+y^2) =$ (الأول تربيع − (2 × الأول × الثاني) + الثاني تربيع)

أمثلة :

1) $(2x+3)^2 = (4x^2+12x+9)$

2) $(x+2y)^2 = (x^2+4xy+4y^2)$

3) $(x-5)^2 = (x^2-10x+25)$

4) $(3x-7)^2 = (9x^2-42x+49)$

5) تحليل القوس مرفوع لتكعيب:

$(x+y)^3 = (x^3+3x^2y+3x^2y+y^3)$ الاشارات جميعها موجبة

(الأول تكعيب + (3 × الأول تربيع × الثاني) + (3 × الأول × الثاني تربيع) + الثاني تكعيب)

أمثلة :

1) $(x+2)^3 = (x^3+6x^2+12x+8)$

2) $(x+5)^3 = (x^3+15x^2+75x+125)$

3) $(x-y)^3 = (x^3-3x^2y+3xy^2-y^3)$ اشارة الحد الثاني والرابع سالبة

(الأول تكعيب − (3 × الأول تربيع × الثاني) + (3 × الأول × الثاني تربيع) − الثاني تكعيب)

أمثلة :

1) $(x-3)^3 = (x^3-9x^2+27x-27)$

2) $(x-1)^3 = (x^3-3x^2+3x-1)$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

5) تحليل العبارة التربيعية ثلاثية الحدود معامل x^2 فيها يساوي 1:

$x^2 \mp bx \mp c =$ (العدد الأقل + الجذر التربيعي للأول) (العدد الأكبر ∓ الجذر التربيعي للأول)

إشارة الحد الوسط × إشارة الحد الأخير

1) إذا كانت إشارة الحد الأخير موجب :
عددان حاصل ضربهما يساوي الحد الثابت،
وناتج جمعهم يساوي معامل الحد الوسط.

2) إذا كانت إشارة الحد الأخير سالب:
عددان حاصل ضربهما يساوي الحد الثابت،
وناتج طرحهم يساوي معامل الحد الوسط.

إشارة الحد الأول × إشارة الحد الثاني

أمثلة :

1) $x^2 + 9x + 14 = (x + 7)(x + 2)$

2) $x^2 - 7x + 10 = (x - 5)(x - 2)$

3) $x^2 - 3x - 18 = (x - 6)(x + 3)$

الدرس الثاني: مشتقة الضرب والقسمة والمشتقات العليا (صفحة 93)

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

مسألة اليوم: (صفحة 93)

كلما زاد سطوع الضوء الساقط على بؤبؤ العين تقلصت مساحة البؤبؤ ، يستعمل الاقتران $A(b) = \frac{40+24b^{0.4}}{1+4b^{0.4}}$ لحساب مساحة بؤبؤ العين بالمليمترات المربعة ، حيث b مقدار سطوع الضوء بوحدة اللومن (lm)، وتعرف حساسية العين للضوء بأنها مشتقة اقتران مساحة البؤبؤ بالنسبة إلى السطوع ، أجد اقتراناً يمثل حساسية العين للضوء .

$$A(b) = \frac{40+24b^{0.4}}{1+4b^{0.4}}$$

$$\acute{A}(b) = \frac{(1+4b^{0.4})(9.6b^{-0.6})-(40+24b^{0.4})(1.6b^{-0.6})}{(1+4b^{0.4})^2}$$

$$\acute{A}(b) = \frac{(9.6b^{-0.6}+38.4b^{-0.2})-(64b^{-0.6}+38.4b^{-0.2})}{(1+4b^{0.4})^2}$$

$$\acute{A}(b) = \frac{9.6b^{-0.6}+38.4b^{-0.2}-64b^{-0.6}-38.4b^{-0.2}}{(1+4b^{0.4})^2}$$

$$\acute{A}(b) = \frac{-54.4b^{-0.6}}{(1+4b^{0.4})^2}$$

مشتقة ضرب اقترانين (صفحة 93)

مشتقة حاصل ضرب اقترانين : $f(x) = g(x) \times h(x)$

المشتقة: $f'(x) = \left(g(x) \times h'(x)\right) + \left(h(x) \pm g'(x)\right)$

المشتقة = الأول × مشتقة الثاني + الثاني × مشتقة الأول

مثال 1: أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي: (صفحة 94)

1) $f(x) = (3x - 2x^2)(5 + 4x)$

$f'(x) = (3x - 2x^2)(4) + (5 + 4x)(3 - 4x)$

$f'(x) = (12x - 8x^2) + (15 - 20x + 12x - 16x^2)$

$f'(x) = (12x - 8x^2) + (15 - 8x - 16x^2)$

$f'(x) = 12x - 8x^2 + 15 - 8x - 16x^2$

$f'(x) = -24x^2 + 4x + 15$

2) $f(x) = xe^x$

$f'(x) = xe^x + (e^x \times 1) \Rightarrow f'(x) = xe^x + e^x$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

اتحقق من فهمي: (صفحة 95)

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = (x^3 - 2x^2 + 3)(7x^2 - 4x)$

$f'(x) = (x^3 - 2x^2 + 3)(14x - 4) + (7x^2 - 4x)(3x^2 - 4x)$

$f'(x) = 14x^4 - 28x^3 + 42x - 4x^3 + 8x^2 - 12 + 21x^4 - 12x^3 - 28x^3 + 16x^2$

$f'(x) = 35x^4 - 72x^3 + 24x^2 + 42x - 12$

2) $f(x) = \ln x \, \cos x$

$f'(x) = (\ln x)(-\sin x) + (\cos x)\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow f'(x) = -\ln x \, \sin x + \frac{\cos x}{x}$

مشتقة قسمة اقترانين (صفحة 95)

قاعدة: مشتقة حاصل قسمة اقترانين $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$

المشتقة $\acute{f}(x)=\frac{(h(x)\pm\acute{g}(x))-(g(x)\times\acute{h}(x))}{(h(x))^2}$ ، أي المشتقة $=$ $\frac{(\text{المقام}\times\text{مشتقة البسطة})-(\text{البسط}\times\text{مشتقة المقام})}{(\text{المقام})^2}$

مثال 2: أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي: (صفحة 96)

1) $f(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$

$$\acute{f}(x)=\frac{(1+x^2)(-2x)-(1-x^2)(2x)}{(1+x^2)^2}\Rightarrow \acute{f}(x)=\frac{-2x-2x^3-2x+2x^3}{(1+x^2)^2}\Rightarrow \acute{f}(x)=\frac{-4x}{(1+x^2)^2}$$

2) $f(x)=\frac{\ln x}{x+1}$

$$\acute{f}(x)=\frac{(x+1)(\frac{1}{x})-(\ln x)(1)}{(x+1)^2}\Rightarrow \acute{f}(x)=\frac{1+\frac{1}{x}-\ln x}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow \acute{f}(x)=\left[\frac{1+\frac{1}{x}-\ln x}{(x+1)^2}\right]\times\frac{x}{x}\Rightarrow \acute{f}(x)=\frac{x+1-x\ln x}{x(x+1)^2}$$

أتحقق من فهمي: (صفحة 97)

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x)=\frac{x+1}{2x+1}$

$$\acute{f}(x)=\frac{(2x+1)(1)-(x+1)(2)}{(2x+1)^2}\Rightarrow \acute{f}(x)=\frac{(2x+1)-(2x+2)}{(2x+1)^2}$$

$$\Rightarrow \acute{f}(x)=\frac{2x+1-2x-2}{(2x+1)^2}\Rightarrow \acute{f}(x)=\frac{-1}{(2x+1)^2}$$

2) $f(x)=\frac{\sin x}{e^x}$

$$\acute{f}(x)=\frac{(e^x)(\cos x)-(\sin x)(e^x)}{(e^x)^2}\Rightarrow \acute{f}(x)=\frac{\cos x-\sin x}{e^x}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

مثال 3: من الحياة (صفحة 98)

مرض: تعطى درجة حرارة مريض في أثناء مرضه بالاقتران : $T(t) = \frac{4t}{1+t^2} + 98.6$

حيث t الزمن بالساعات بعد ظهور أعراض المرض، و T درجة الحرارة بالفهرنهايت

1) أجد معدل تغير درجة حرارة المريض بالنسبة إلى الزمن.

$$T(t) = \frac{4t}{1+t^2} + 98.6$$

$$\acute{T}(t) = \frac{(1+t^2)\times(4) - (4t)\times(2t)}{(1+t^2)^2} \Rightarrow \acute{T}(t) = \frac{4+4t^2-8t^2}{(1+t^2)^2} \Rightarrow \acute{T}(t) = \frac{4-4t^2}{(1+t^2)^2}$$

إذن معدل تغير درجة حرارة المريض بالنسبة إلى الزمن هو : $\acute{T}(t) = \frac{4-4t^2}{(1+t^2)^2}$

2) أجد معدل تغير درجة حرارة المريض عندما $t = 2$ ، مفسراً معنى الناتج .

$$\acute{T}(2) = \frac{4-4(2)^2}{(1+(2)^2)^2} \Rightarrow \acute{T}(2) = \frac{4-16}{25} \Rightarrow \acute{T}(2) = \frac{-12}{25} \Rightarrow \acute{T}(2) = -0.48$$

إذن عندما يكون الزمن $2h$ ،فإن درجة حرارة المريض تقل بمقدار 0.48 درجة فهرنهايتية لكل ساعة .

أتحقق من فهمي: (صفحة 99)

سكان : يعطى عدد سكان مدينة صغيرة بالاقتران $P(t) = \frac{500t^2}{2t+9}$ حيث t الزمن بالسنوات ، و P عدد السكان بالآلاف :

1) أجد معدل تغير عدد السكان في المدينة بالنسبة إلى الزمن.

$$P(t) = \frac{500t^2}{2t+9}$$

$$\acute{P}(t) = \frac{(2t+9)\times(1000t) - (500t^2)\times(2)}{(2t+9)^2}$$

$$\Rightarrow \acute{P}(t) = \frac{2000t^2+9000t-1000t^2}{(2t+9)^2} \Rightarrow \acute{P}(t) = \frac{1000t^2+9000t}{(2t+9)^2}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

2) أجد معدل تغير عدد السكان في المدينة عندما $t=12$ ثم أفسر معنى الناتج .

$$\acute{P}(12)=\frac{1000(12)^2+9000(12)}{(2(12)+9)^2}\Rightarrow \acute{P}(12)=\frac{144000000+108000}{1089}$$

$$\Rightarrow \acute{P}(12)=\frac{144000+108000}{1089}\Rightarrow \acute{P}(12)=\frac{252000}{1089}\Rightarrow \acute{P}(12)\approx 231.405$$

إذن في السنة 12 يتزايد عدد سكان هذه المدينة بمعدل 231 ألف نسمة سنوياً تقريباً .

مشتقة المقلوب (صفحة 99)

يتم تطبيق هذه القاعدة عندما يكون الاقتران كسري، ويكون البسط ثابت، والمقام اقتران.

إذا كان الاقتران على شكل $f(x)=\frac{\text{ثابت}}{\text{اقتران}}$ يمكن استخدام قاعدة مشتقة المقلوب:

البسط: سالب مشتقة الاقتران مضروبة بالثابت نفسه، المقام: مربع الاقتران.

$$f(x)=\frac{\text{ثابت}}{\text{اقتران}}\quad\Rightarrow\quad \acute{f}(x)=\frac{-(\text{الثابت})\times(\text{مشتقة الاقتران})}{(\text{الاقتران})^2}$$

مثال 4: (صفحة 100)

أجد مشتقة كل مما يأتي:

1) $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$

$$\acute{f}(x)=\frac{-(1)(2x)}{(1+x^2)^2}\quad\Rightarrow\quad \acute{f}(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

2) $f(t)=\frac{1}{t+\frac{1}{t}}$

الحل بطريقة مشتقة المقلوب:

$$\acute{f}(t)=-\frac{\left(1-\frac{1}{t^2}\right)}{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2}\quad\Rightarrow \acute{f}(t)=\frac{-1+\frac{1}{t^2}}{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2}\quad\Rightarrow \acute{f}(t)=\frac{-\frac{t^2}{t^2}+\frac{1}{t^2}}{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \acute{f}(t)=\frac{\frac{1-t^2}{t^2}}{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2}\quad\Rightarrow \acute{f}(t)=\left[\frac{\frac{1-t^2}{t^2}}{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2}\right]\times\frac{t^2}{t^2}\quad\Rightarrow \acute{f}(t)=\frac{1-t^2}{t^2\left(1+\frac{1}{t}\right)^2}$$

الحل بطريقة رفع اقتران المقام ويتم الاشتقاق بتطبيق قاعدة قوس مرفوع الى أسّ:

$$f(t)=\frac{1}{t+t^{-1}} \quad \Rightarrow f(t)=(t+t^{-1})^{-1}$$

$$f'(t)=-(t+t^{-1})^{-2}(1-t^{-2}) \quad \Rightarrow f'(t)=(-1+t^{-2})(t+t^{-1})^{-2}$$

$$\Rightarrow f'(t)=\frac{-1+t^{-2}}{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2} \quad \Rightarrow f'(t)=\frac{-1+\frac{1}{t^2}}{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2} \quad \Rightarrow f'(t)=\frac{-\frac{t^2}{t^2}+\frac{1}{t^2}}{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2}$$

$$\Rightarrow f'(t)=\frac{\frac{1-t^2}{t^2}}{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2} \quad \Rightarrow f'(t)=\left[\frac{\frac{1-t^2}{t^2}}{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2}\right]\times\frac{t^2}{t^2} \quad \Rightarrow f'(t)=\frac{1-t^2}{t^2\left(1+\frac{1}{t}\right)^2}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

اتحقق من فهمي: (صفحة 100)

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x)=\frac{1}{5x-x^2}$

$$f'(x)=\frac{-(5-2x)}{(5x-x^2)^2} \quad \Rightarrow f'(x)=\frac{-5+2x}{(5x-x^2)^2}$$

2) $f(x)=\frac{1}{e^x+\sqrt{x}}$

$$f'(x)=\frac{-\left(e^x+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(e^x+\sqrt{x}\right)^2} \quad \Rightarrow f'(x)=\frac{-\left(\frac{2\sqrt{x}e^x+1}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(e^x+\sqrt{x}\right)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\left[\frac{-\left(\frac{2\sqrt{x}e^x+1}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(e^x+\sqrt{x}\right)^2}\right]\times\frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \quad \Rightarrow f'(x)=-\frac{2\sqrt{x}e^x+1}{2\sqrt{x}\left(e^x+\sqrt{x}\right)^2}$$

مشتقة الاقترانات المثلثية (صفحة 101)

ملاحظة (1): قاعدة اشتقاق الاقترانات المثلثية، والاقتران وما هي مشتقته : (حفظ)

المشتقة = نشتق الاقتران المثلثي وتنزل الزاوية كما هي × مشتقة الزاوية .

1) $f(x) = \sin x \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \cos x$

2) $f(x) = \cos x \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = -\sin x$

3) $f(x) = \tan x \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \sec^2 x$

4) $f(x) = \cot x \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = -\csc^2 x$

5) $f(x) = \sec x \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \sec x \tan x$

6) $f(x) = \csc x \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = -\csc x \cot x$

ملاحظة (2): تحويلات مهمة للاقترانات المثلثية لغايات التبسيط والاختصار: (حفظ)

1) $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ 2) $\tan x = \dfrac{1}{\cot x}$

3) $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ 4) $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$

5) $\sin x = \dfrac{1}{\csc x}$ 6) $\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$

7) $\cos x = \dfrac{1}{\sec x}$ 8) $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

ملاحظة (3): قواعد مهمة جداً : (حفظ)

1) القاعدة الذهبية وأخواتها:(مصطلح من عندي لتسهيل الحفظ)

1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

2) $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

3) $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

2) القاعدة الفضية وأخواتها:(مصطلح من عندي لتسهيل الحفظ)

1) $\sec^2 x - \tan^2 x = 1$

2) $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

3) $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$

3) القاعدة البرونزية وأخواتها:(مصطلح من عندي لتسهيل الحفظ)

1) $\csc^2 x - \cot^2 x = 1$

2) $\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$

3) $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$

مثال 5: أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي: (صفحة 101)

1) $f(x) = x^2 \sec x$

$\acute{f}(x) = x^2 \sec x \tan x + 2x \sec x$

2) $f(x) = \dfrac{\csc x}{1 + \tan x}$

$$\acute{f}(x) = \frac{(1 + \tan x) \times (-\csc x \cot x) - (\csc x) \times (\sec^2 x)}{(1 + \tan x)^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{-\csc x \cot x - \csc x \cot x \tan x - \csc x \sec^2 x}{(1 + \tan x)^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{-\csc x \cot x - \csc x \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} - \csc x \sec^2 x}{(1 + \tan x)^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{-\csc x \cot x - \csc x\,(1) - \csc x \sec^2 x}{(1 + \tan x)^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{-\csc x \cot x - \csc x - \csc x \sec^2 x}{(1 + \tan x)^2}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

أتحقق من فهمي: (صفحة 102)

1) $f(x) = x\cot x$

$$f'(x) = (x)(-\csc^2 x) + (\cot x)(1) \;\Rightarrow\; f'(x) = -x\csc^2 x + \cot x$$

2) $f(x) = \dfrac{\tan x}{1+\sin x}$

$$f'(x) = \frac{(1+\sin x)(\sec^2 x) - (\tan x)(\cos x)}{(1+\sin x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\sec^2 x + \sin x\sec^2 x - \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)(\cos x)}{(1+\sin x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\sec^2 x + \sin x\sec^2 x - \sin x}{(1+\sin x)^2}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

المشتقات العليا (صفحة 102)

ملاحظة (1): رموز الاشتقاق:

1) اذا كان الاقتران يتضمن $f(x)$

المشتقة الأولى	$f'(x)$
المشتقة الثانية	$f''(x)$
المشتقة الثالثة	$f'''(x)$
المشتقة الرابعة	$f^{(4)}(x)$

2) اذا كان الاقتران يتضمن y

المشتقة الأولى	$\frac{dy}{dx}$	أو	y'
المشتقة الثانية	$\frac{d^2y}{dx^2}$	أو	y''
المشتقة الثالثة	$\frac{d^3y}{dx^3}$	أو	y'''
المشتقة الرابعة	$\frac{d^4y}{dx^4}$	أو	y''''

مثال 6 : أجد المشتقات الأربع الأولى للاقتران $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$ (صفحة 103)

المشتقة الأولى $f'(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$

المشتقة الثانية $f''(x) = 2 - \frac{2}{x^3}$

المشتقة الثالثة $f'''(x) = \frac{6}{x^4}$

المشتقة الرابعة $f^{(4)}(x) = -\frac{24}{x^5}$

أتحقق من فهمي: (صفحة 103)

أجد المشتقات الثلاث الأولى للاقتران : $f(x) = x\sin x$

$$f(x) = x\sin x$$

$$\boxed{f'(x) = x\cos x + \sin x}$$

$$f''(x) = (x)(-\sin x) + (\cos x)(1) + \cos x$$

$$\Longrightarrow\ f''(x) = -x\sin x + \cos x + \cos x \ \Longrightarrow \boxed{f''(x) = 2\cos x - x\sin x}$$

$$f'''(x) = -2\sin x - (x\cos x + \sin x)$$

$$\Longrightarrow\ f'''(x) = -2\sin x - x\cos x - \sin x \ \Longrightarrow \boxed{f'''(x) = -3\sin x - x\cos x}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

أتدرب وأحل المسائل: (صفحة 103)

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x)=\frac{x^3}{2x-1}$

$\acute{f}(x)=\frac{(2x-1)\times(3x^2)-(x^3)\times(2)}{(2x-1)^2} \Rightarrow \acute{f}(x)=\frac{6x^3-3x^2-2x^3}{(2x-1)^2} \Rightarrow \acute{f}(x)=\frac{4x^3-3x^2}{(2x-1)^2}$

2) $f(x)=x^3\sec x$

$\acute{f}(x)=(x^3)(\sec x\tan x)+(\sec x)(3x^2) \Rightarrow \acute{f}(x)=x^3\sec x\tan x+3x^2\sec x$

3) $f(x)=\frac{x+1}{\cos x}$

$$\acute{f}(x)=\frac{(\cos x)(1)-(x+1)(-\sin x)}{(\cos x)^2} \Rightarrow \acute{f}(x)=\frac{\cos x+x\sin x+\sin x}{\cos^2 x}$$

4) $f(x)=e^x(\tan x-x)$

$\acute{f}(x)=(e^x)(\sec^2 x-1)+(\tan x-x)(e^x)$

$\acute{f}(x)=(e^x)(\tan^2 x)+(\tan x-x)(e^x)$ $\boxed{\sec^2 x-1=\tan^2 x \leftarrow \text{قاعدة فضية}}$

$\acute{f}(x)=e^x\tan^2 x+e^x\tan x-xe^x$

5) $f(x)=\frac{\sin x+\cos x}{e^x}$

$$\acute{f}(x)=\frac{(e^x)(\cos x-\sin x)-(\sin x+\cos x)(e^x)}{(e^x)^2}$$

$$\acute{f}(x)=\frac{e^x\cos x-e^x\sin x-e^x\sin x-e^x\cos x}{(e^x)^2}$$

$$\Rightarrow \acute{f}(x)=\frac{-e^x 2\sin x}{(e^x)^2} \Rightarrow \acute{f}(x)=\frac{-2\sin x}{e^x}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

6) $f(x) = x^3 \sin x + x^2 \cos x$

$\acute{f}(x) = (x^3)(\cos x) + (\sin x)(3x^2) + (x^2)(-\sin x) + (\cos x)(2x)$

$\acute{f}(x) = x^3 \cos x + 3x^2 \sin x - x^2 \sin x + 2x \cos x$

$\acute{f}(x) = x^3 \cos x + 2x^2 \sin x + 2x \cos x$

7) $f(x) = \sqrt[3]{x}(\sqrt{x} + 3)$

$f(x) = x^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{1}{2}} + 3\right) \Longrightarrow f(x) = x^{\frac{5}{6}} + 3x^{\frac{1}{3}}$

$\acute{f}(x) = \frac{5}{6}x^{\frac{-1}{6}} + \left(\frac{1}{3} \times 3x^{\frac{-2}{3}}\right) \Longrightarrow \acute{f}(x) = \frac{5}{6\sqrt[6]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

8) $f(x) = \frac{1+\sec x}{1-\sec x}$

$\acute{f}(x) = \frac{(1 - \sec x)(\sec x \tan x) - (1 + \sec x)(-\sec x \tan x)}{(1 - \sec x)^2}$

$\acute{f}(x) = \frac{\sec x \tan x - \sec^2 x \tan x + \sec x \tan x + \sec^2 x \tan x}{(1 - \sec x)^2}$

$\acute{f}(x) = \frac{\sec x \tan x + \sec x \tan x}{(1 - \sec x)^2} \Longrightarrow \acute{f}(x) = \frac{2\sec x \tan x}{(1 - \sec x)^2}$

9) $f(x) = \frac{2-\frac{1}{x}}{x-3}$

$f(x) = \frac{\frac{2x-1}{x}}{x-3} \Longrightarrow f(x) = \frac{2x-1}{x} \times \frac{1}{x-3} \Longrightarrow f(x) = \frac{2x-1}{x^2-3x}$

$\acute{f}(x) = \frac{(x^2-3x)(2) - (2x-1)(2x-3)}{(x^2-3x)^2}$

$\acute{f}(x) = \frac{2x^2 - 6x - (4x^2 - 6x - 2x + 3)}{(x^2-3x)^2}$

$\acute{f}(x) = \frac{2x^2 - 6x - 4x^2 + 6x + 2x - 3}{(x^2-3x)^2} \Longrightarrow \acute{f}(x) = \frac{-2x^2 + 2x - 3}{(x^2-3x)^2}$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

10) $f(x) = (x^3 - x)(x^2 + 2)(x^2 + x + 1)$

$f(x) = \left(x^5 + 2x^3 - x^3 - 2x\right)(x^2 + x + 1)$

$f'(x) = \left(x^5 + 2x^3 - x^3 - 2x\right)(2x + 1) + (x^2 + x + 1)(5x^4 + 6x^2 - 3x^2 - 2)$

$f'(x) = \left(x^5 + 2x^3 - x^3 - 2x\right)(2x + 1) + (x^2 + x + 1)(5x^4 + 3x^2 - 2)$

$f'(x) = \left(2x^6 + 4x^4 - 2x^4 - 4x^2 + x^5 + 2x^3 - x^3 - 2x\right) + (5x^6 + 5x^5 + 5x^4 + 3x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 2x^2 - 2x - 2)$

$f'(x) = \left(2x^6 + 2x^4 - 4x^2 + x^5 + x^3 - 2x\right) + (5x^6 + 5x^5 + 8x^4 + 3x^3 + x^2 - 2x - 2)$

$f'(x) = 2x^6 + 2x^4 - 4x^2 + x^5 + x^3 - 2x + 5x^6 + 5x^5 + 8x^4 + 3x^3 + x^2 - 2x - 2$

$f'(x) = 7x^6 + 6x^5 + 10x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 2$

11) $f(x) = (\csc x + \cot x)^{-1}$

$f'(x) = -1(\csc x + \cot x)^{-2}\,(-\csc x \cot x - \csc^2 x)$

$f'(x) = \dfrac{\csc x \cot x + \csc^2 x}{(\csc x + \cot x)^2} \Rightarrow = \dfrac{\csc x\,(\cot x + \csc x)}{(\csc x + \cot x)^2} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{\csc x}{\cot x + \csc x}$

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق عندما $x = 0$ ،

و كان $f(0) = 5, f'(0) = -3, g(0) = -1, g'(0) = 2$

فأجد كلا مما يأتي:

12) $(fg)'(0)$

$(fg)'(0) = f(0)g'(0) + g(0)f'(0) \Rightarrow (fg)'(0) = (5 \times 2) + (-1 \times -3)$

$\Rightarrow (fg)'(0) = (10) + (3) \Rightarrow (fg)'(0) = 13$

13) $\left(\frac{f}{g}\right)'(0)$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)'(0) = \dfrac{g(0)f'(0) - f(0)g'(0)}{g^2(0)} \Rightarrow \left(\dfrac{f}{g}\right)'(0) = \dfrac{(-1 \times -3) - (5 \times 2)}{(-1)^2}$

$\Rightarrow \left(\dfrac{f}{g}\right)'(0) = \dfrac{3 - 10}{1} \Rightarrow \left(\dfrac{f}{g}\right)'(0) = -7$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٧٨٠٨

14) $(7f-2fg)'(0)$

$$= 7f'(0)-2(fg)'(0) \Longrightarrow = 7(-3)-2(13) \Longrightarrow = -21-26 \Longrightarrow = -47$$

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة :

15) $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+4} \quad , x=-2$

$$f'(x)=\frac{(x^2+4)\times(2x)-(x^2-4)\times(2x)}{(x^2+4)^2} \Longrightarrow f'(x)=\frac{(2x^3+8x)-(2x^3-8x)}{(x^2+4)^2}$$

$$\Longrightarrow f'(x)=\frac{2x^3+8x-2x^3+8x}{(x^2+4)^2} \Longrightarrow \boxed{f'(x)=\frac{16x}{(x^2+4)^2}}$$

$$\boxed{f''(x)=\frac{(x^2+4)^2\times(16)-(16x)\times(2)(x^2+4)(2x)}{(x^2+4)^4}}$$

$$f''(-2)=\frac{((-2)^2+4)^2\times(16)-(16(-2))\times(2)((-2)^2+4)\times(2(-2))}{((-2)^2+4)^4}$$

$$f''(-2)=\frac{(8)^2(16)-(-32)(2)(8)(-4)}{(8)^4} \Longrightarrow f''(-2)=\frac{8(16)-(-32)(2)(-4)}{(8)^3}$$

$$\Longrightarrow f''(-2)=\frac{128-256}{512} \Longrightarrow f''(-2)=\frac{128-256}{512} \Longrightarrow \boxed{f''(-2)=-\frac{1}{4}}$$

16) $f(x)=\frac{1+x}{1+\sqrt[3]{x}} \quad , x=8$

$$f(x)=\frac{(1+\sqrt[3]{x})(1-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{1+\sqrt[3]{x}} \Longrightarrow f(x)=1-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2} \Longrightarrow f(x)=1-x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x)=-\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$f''(x)=\left(-\frac{2}{3}\times-\frac{1}{3}x^{-\frac{5}{3}}\right)+\left(-\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}x^{-\frac{4}{3}}\right)$$

$$\Longrightarrow f''(x)=\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}-\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}} \Longrightarrow f''(x)=\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}-\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

$$f''(8)=\frac{2}{9\sqrt[3]{(8)^5}}-\frac{2}{9\sqrt[3]{(8)^4}} \Rightarrow f''(8)=\frac{2}{9(2)^5}-\frac{2}{9(2)^4}$$

$$\Rightarrow f''(8)=\frac{2}{9(32)}-\frac{2}{9(16)} \Rightarrow f''(8)=\frac{1}{9(16)}-\frac{2}{9(16)}$$

$$\Rightarrow f''(8)=\frac{1}{144}-\frac{2}{144} \Rightarrow f''(8)=-\frac{1}{144}$$

17) $f(x)=\frac{1-x}{1+\sqrt{x}}\ , x=4$

$$f'(x)=\frac{(1+\sqrt{x})(-1)-(1-x)(\frac{1}{2\sqrt{x}})}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{-1-\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{2}}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{-1-\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{x}{2\sqrt{x}}}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{1-\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{x}{2\sqrt{x}}}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}-\frac{2x}{2\sqrt{x}}-\frac{1+x}{2\sqrt{x}}}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{-2\sqrt{x}-2x-1+x}{2\sqrt{x}}}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{-2\sqrt{x}-2x-1+x}{2\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2} \Rightarrow f'(x)=-\frac{x+2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x)=-\frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}{2\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2} \Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow f''(x)=-\frac{1}{2}\times-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow f''(x)=\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$$

$$f''(4)=\frac{1}{4\sqrt{4^3}} \Rightarrow f''(4)=\frac{1}{32}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

أجد معادلة المماس لكل اقتران مما يأتني عند النقطة المعطاة:

18) $f(x)=\frac{1+x}{1+e^x}\ ,(0,\frac{1}{2})$

$$\acute{f}(x)=\frac{(1+e^x)(1)-(1+x)(e^x)}{(1+e^x)^2}\Rightarrow=\frac{1+e^x-e^x-xe^x}{(1+e^x)^2}\Rightarrow\acute{f}(x)=\frac{1-xe^x}{(1+e^x)^2}$$

ميل المماس عند النقطة $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ هو :

$$\acute{f}(0)=\frac{1-0e^x}{(1+e^0)^2}\Rightarrow\acute{f}(0)=\frac{1}{(1+1)^2}\Rightarrow\acute{f}(0)=\frac{1}{4}$$

معادلة المماس هي:

$$y-y_1=\mathrm{m}(x-x_1)\Rightarrow y-\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}(x-(0))\Rightarrow y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$$

19) $f(x)=e^x\cos x+\sin x\ ,(0,1)$

$$\acute{f}(x)=(e^x)(-\sin x)+(\cos x)(e^x)+(\cos x)$$

ميل المماس عند النقطة $(0,1)$ هو :

$$\acute{f}(0)=(e^0)(-\sin 0)+(\cos 0)(e^0)+(\cos 0)$$

$$\acute{f}(0)=(1)(0)+(1)(1)+(1)\Rightarrow\acute{f}(0)=2$$

معادلة المماس هي:

$$y-y_1=\mathrm{m}(x-x_1)\Rightarrow y-1=2(x-0)\Rightarrow y=2x+1$$

أثبت صحة كل مما يأتي معتمداً أن $\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x,\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$ **:**

20) $\frac{d}{dx}(\cot x)=-\csc^2 x$

$$\frac{d}{dx}(\cot x)=\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x)=\frac{(\sin x)(-\sin x)-(\cos x)(\cos x)}{\sin^2 x}\Rightarrow\frac{d}{dx}(\cot x)=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x)=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}$$

قاعدة(1) $\Leftarrow$ $\sin^2 x+\cos^2 x=1$

$$\Rightarrow\frac{d}{dx}(\cot x)=-\frac{1}{\sin^2 x}\Rightarrow\frac{d}{dx}(\cot x)=-\csc^2 x$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

21) $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos x}\right)$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \frac{(\cos x)(0) - (1)(-\sin x)}{\cos^2 x} \Rightarrow \frac{d}{dx}(\sec x) = \frac{-(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\sec x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \Rightarrow \frac{d}{dx}(\sec x) = \frac{1}{\cos x} \times \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

22) $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sin x}\right)$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = \frac{(\sin x)(0) - (1)(\cos x)}{\sin^2 x} \Rightarrow \frac{d}{dx}(\csc x) = \frac{(-\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\csc x) = \frac{1}{\sin x} \times \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow \frac{d}{dx}(\csc x) = \frac{1}{\sin x} \times \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

ألاحظ المشتقة المعطاة في كل مما يأتي، ثم أجد المشتقة العليا المطلوبة:

23) $f''(x) = 2 - \frac{2}{x}, f'''(x)$

$$f''(x) = 2 - 2x^{-1}$$

$$f'''(x) = 2x^{-2} \Rightarrow f'''(x) = \frac{2}{x^2}$$

24) $f'''(x) = 2\sqrt{x},\ f^{(4)}(x)$

$$f^{(4)} = \frac{2(1)}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

25) $f^{(4)}(x) = 2x + 1,\ f^{(6)}(x)$

$$f^{(5)}(x) = 2 \implies f^{(6)}(x) = 0$$

26) نباتات هجينة : وجد باحثون زراعيون انه يمكن التعبير عن ارتفاع نبتة مهجنة من نبات تباع الشمس h بالأمتار ، بإستعمال الاقتران $h(t) = \frac{3t^2}{4+t^2}$ ، حيث t الزمن بالأشهر بعد زراعة البذور . أجد معدل تغير النبتة بالنسبة إلى الزمن.

$$h(t) = \frac{3t^2}{4 + t^2}$$

$$h'(t) = \frac{(4 + t^2)(6t) - (3t^2)(2t)}{(4 + t^2)^2} \implies h'(t) = \frac{(24t + 6t^3) - (6t^3)}{(4 + t^2)^2}$$

$$\implies h'(t) = \frac{24t + 6t^3 - 6t^3}{(4 + t^2)^2} \implies h'(t) = \frac{24t}{(4 + t^2)^2}$$

إذا كان الاقتران $y = e^x \sin x$ ، فأجب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

27) أجد $\frac{dy}{dx}$ ، و $\frac{d^2y}{dx^2}$

$$y = e^x \sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = (e^x)(\cos x) + (\sin x)(e^x) \implies \boxed{\frac{dy}{dx} = (e^x)(\cos x + \sin x)}$$

$$\implies \frac{d^2y}{dx^2} = (e^x)(-\sin x + \cos x) + (\cos x + \sin x)(e^x)$$

$$\implies \frac{d^2y}{dx^2} = -e^x \sin x + e^x \cos x + e^x \cos x + e^x \sin x$$

$$\implies \frac{d^2y}{dx^2} = e^x \cos x + e^x \cos x \implies \boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = 2e^x \cos x}$$

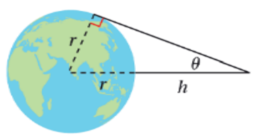
معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

28) أثبت أن $\frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{dy}{dx} - 2y$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2(e^x)(\cos x + \sin x) - 2e^x \sin x \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = (2e^x \cos x + 2e^x \sin x) - 2e^x \sin x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2e^x \cos x + 2e^x \sin x - 2e^x \sin x \Rightarrow \boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = 2e^x \cos x}$$

أقمار صناعية : عندما ترصد الأقمار الصناعية الأرض ، فإنه يمكنها مسح جزء فقط من سطح الأرض،وبعض الأقمار الصناعية تحوي مستشعرات لقياس الزاوية θ (بالراديان) المبينة في الشكل المجاور . إذا كان h يمثل المسافة بين القمر الصناعي وسطح الأرض بالكيلومتر، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً .



29) أثبت أن $h = r(\csc\theta - 1)$

$$\csc\theta = \frac{r+h}{r} \Rightarrow r + h = r\csc\theta \Rightarrow h = r\csc\theta - r \Rightarrow \boxed{h = r\,(\csc\theta - 1)}$$

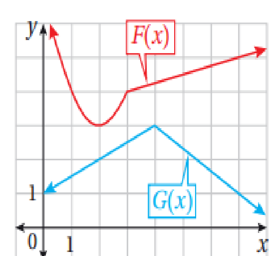
30) أجد معدل تغير h بالنسبة إلى θ عندما $\theta = \frac{\pi}{6}$ افترض أن $r = 6371\ km$

$$h = r\,(\csc\theta - 1)$$

$$\left.\frac{dh}{d\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = 6371\left(-\csc\frac{\pi}{6}\cot\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \left.\frac{dh}{d\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = 6371(-2 \times \sqrt{3})$$

$$\left.\frac{dh}{d\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{6}} \approx 22070\ km/rad$$

31) إذا كان : $f(x) = 9\ln x + \frac{1}{2x^2}$ ، فأثبت أن $\acute{f}(x) = \frac{(3x-1)(3x+1)}{x^3}$.



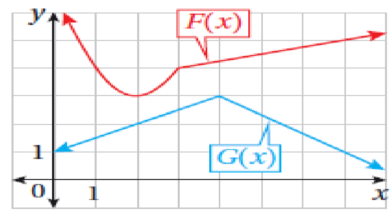
$$f(x) = 9\ln x + \frac{1}{2x^2} \Rightarrow f(x) = 9\ln x + \frac{1}{2}x^{-2}$$

$$\acute{f}(x) = 9\left(\frac{1}{x}\right) + (-4x^{-3}) \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{9}{x} - \frac{4}{4x^3} \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{9}{x} - \frac{1}{x^3}$$

$$\Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{9x^2}{x^3} - \frac{1}{x^3} \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{9x^2 - 1}{x^3} \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{(3x-1)(3x+1)}{x^3}$$

32) يبين الشكل المجاور منحنى الاقتران $F(x)$ و $G(x)$

إذا كان $P(x) = F(x)G(x)$ و $Q(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$ فأجد كلا مما يأتي :



32) $P'(2)$

$$P(x) = F(x)G(x)$$

$$P'(x) = F(x)G'(x) + G(x)F'(x)$$

$G'(2)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(2,2)$ و $(4,3)$ ويساوي $\frac{1}{2}$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow m = \frac{3-2}{4-2} \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

$F'(2)$ ميل المماس الأفقي ويساوي صفراً .

$$P'(2) = F(2)G'(2) + G(2)F'(2) \Rightarrow P'(2) = 3 \times \frac{1}{2} + 2 \times 0 \Rightarrow P'(2) = \frac{3}{2}$$

33) $Q'(7)$

$$Q(x) = \frac{F(x)}{G(x)} \Rightarrow Q'(x) = \frac{G(x) \times F'(x) - F(x) \times G'(x)}{\left(G(x)\right)^2} \Rightarrow Q'(7) = \frac{G(7) \times F'(7) - F(7) \times G'(7)}{\left(G(7)\right)^2}$$

$F'(7)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(7,5)$ و $(3,4)$ ويساوي $\frac{1}{4}$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow m = \frac{5-4}{7-3} \Rightarrow m = \frac{1}{4}$$

$G'(7)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(4,3)$ و $(7,1)$ ويساوي $\frac{2}{3}$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow m = \frac{3-1}{4-7} \Rightarrow m = \frac{2}{3}$$

$$Q'(7) = \frac{1 \times \frac{1}{4} - 5 \times -\frac{2}{3}}{(1)^2} \Rightarrow Q'(7) = \frac{1 \times \frac{1}{4} - 5 \times -\frac{2}{3}}{(1)^2} \Rightarrow Q'(7) = \frac{\frac{1}{4} + \frac{10}{3}}{1} = \frac{43}{12}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

مهارات التفكير العليا: (صفحة 105)

تبرير إذا كان : $y = \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$ ، فأجب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

34) أجد ميل المماس عند الأصل.

$$y = \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} \Rightarrow y = \frac{1-\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}} \Rightarrow y = \frac{\frac{e^x-1}{e^x}}{\frac{e^x+1}{e^x}} \Rightarrow y = \frac{e^x-1}{e^x} \times \frac{e^x}{e^x+1}$$

$$y = \frac{e^x-1}{e^x+1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(e^x+1)\times(e^x)-(e^x-1)\times(e^x)}{(e^x+1)^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2e^x+e^x-2e^x+e^x}{(e^x+1)^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \frac{2e^0}{(e^0+1)^2} \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \frac{2(1)}{(1+1)^2} \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \frac{2}{4} \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \frac{1}{2}$$

35) أبين عدم وجود مماس أفقي للاقتران y ، مبرراً إجابتي :

إذا وجد مماس أفقي فإن ميله يساوي صفراً ، أي أن : $0 = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$ ، وهذا لا يتحقق إلا إذا كان $e^x = 0$ ، ولكن $e^x > 0$ لجميع الأعداد الحقيقية x ،ولذا لا يوجد لهذا المنحنى مماسات أفقية .

تحد : إذا كان $y = \frac{x+1}{x-1}$ ، حيث $x \neq 1$ ، فأجيب عن الاسئلة الثلاثة الآتية تباعاً :

36) أجد $\frac{dy}{dx}$.

$$y = \frac{x+1}{x-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-1)\times(1)-(x+1)(1)}{(x-1)^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

37) أعد كتابة المعادلة بالنسبة إلى المتغير x (x اقتران بالنسبة إلى y) ، ثم أجد $\frac{dx}{dy}$.

$$y = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow x+1 = y(x-1) \Rightarrow x = yx-y-1 \Rightarrow x-yx = -y-1$$

$$\Rightarrow x(1-y) = -y-1 \Rightarrow x = \frac{-y-1}{1-y} \Rightarrow \boxed{x = \frac{y+1}{y-1}}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{(y-1)\times(1)-(y+1)(1)}{(y-1)^2} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{(y-1-y-1)}{(y-1)^2} \Rightarrow \boxed{\frac{dx}{dy} = \frac{-2}{(y-1)^2}}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

38) أبين أن $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-2}{(y-1)^2} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{-2}{\left(\frac{x+1}{x-1} - 1\right)^2} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{-2}{\left(\frac{2}{x-1}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{-2}{\frac{4}{(x-1)^2}} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = -2 \times \frac{(x-1)^2}{4} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{(x-1)^2}{-2} \Rightarrow \boxed{\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

تبرير : إذا كان : $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

39) أثبت أن $f''(x) = \frac{6\ln x - 5}{x^4}$ ، مبرراً إجابتي .

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2)\left(\frac{1}{x}\right) - (\ln x)(2x)}{(x^2)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{x - 2x\ln x}{x^4} \Rightarrow f'(x) = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$$

$$f''(x) = \frac{(x^3)\left(-\frac{2}{x}\right) - (1 - 2\ln x)(3x^2)}{(x^3)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{(-2x^2) - (3x^2 - 6x^2\ln x)}{x^6}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{-2x^2 - 3x^2 + 6x^2\ln x}{x^6} \Rightarrow f''(x) = \frac{-5x^2 + 6x^2\ln x}{x^6}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{-5 + 6\ln x}{x^4} \Rightarrow f''(x) = \frac{6\ln x - 5}{x^4}$$

40) أجد قيمة المقدار : $x^4 f''(x) + 4x^3 f'(x) + 2x^2 f(x) + 1$.

$$x^4 f''(x) + 4x^3 f'(x) + 2x^2 f(x) + 1$$

$$= x^4 \times \frac{6\ln x - 5}{x^4} + 4x^3 \times \frac{1 - 2\ln x}{x^3} + 2x^2 \times \frac{\ln x}{x^2} + 1$$

$$= (6\ln x - 5) + (4 \times 1 - 2\ln x) + (2 \times \ln x) + 1$$

$$= (6\ln x - 5) + (4 - 8\ln x) + (2\ln x) + 1$$

$$= 6\ln x - 5 + 4 - 8\ln x + 2\ln x + 1$$

$= 0$

كتاب التمارين

الدرس الثاني : مشتقتا الضرب والقسمة والمشتقات العليا

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

$$\acute{f}(x) = \frac{(x)(\cos x) - (\sin x)(1)}{x^2} \Rightarrow \quad \acute{f}(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$$

2) $f(x) = -\csc x - \sin x$

$$\acute{f}(x) = (-) - \csc x \cot x - \cos x \Rightarrow \quad \acute{f}(x) = \csc x \cot x - \cos x$$

3) $f(x) = \dfrac{x + c}{x + \frac{c}{x}}$

$$\acute{f}(x) = \frac{\left(x + \frac{c}{x}\right)(1) - (x + c)(1 - cx^{-2})}{(x + \frac{c}{x})^2} \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{\left(x + \frac{c}{x}\right) - (x + c)(1 - cx^{-2})}{(x + \frac{c}{x})^2} \cdot \frac{x}{x}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{x^2 + c + x(-x - c)(1 - \frac{c}{x^2})}{(\frac{x^2 + c}{x})^2} \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{x^2 + c + x(-x + \frac{c}{x} - c + \frac{c^2}{x^2})}{(x + \frac{c}{x})^2}$$

$$\Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{x^2 + c - x^2 + c - cx + \frac{c^2}{x}}{(x + \frac{c}{x})^2} \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{x^2 + c - x^2 + c - cx + \frac{c^2}{x}}{(x + \frac{c}{x})^2}$$

$$\Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{2c - cx + \frac{c^2}{x}}{(x + \frac{c}{x})^2} \cdot \frac{x}{x} \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{2cx - cx^2 + c^2}{(x^2 + c)^2}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

4) $f(x) = x\cot x$

$\acute{f}(x) = x\,(-\csc^2 x) + \cot x\,(1) \implies \acute{f}(x) = x\,(-\csc^2 x) + \cot x\,(1)$

$\acute{f}(x) = -x\csc^2 x + \cot x$

5) $f(x) = 4x - x^2\tan x$

$\acute{f}(x) = 4 - (x^2\sec^2 x + \tan x\,(2x) \implies \acute{f}(x) = 4 - x^2\sec^2 x - 2x\tan x$

6) $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^2}$

$\acute{f}(x) = \dfrac{x^2(-\sin x) - \cos x(2x)}{(x^2)^2} \implies \acute{f}(x) = \dfrac{-x^2\sin x - 2x\cos x}{x^4}$

$\acute{f}(x) = \dfrac{x(-x\sin x - 2\cos x)}{x.x^3} \implies \acute{f}(x) = \dfrac{-x\sin x - 2\cos x}{x^3}$

7) $f(x) = x(1 - \dfrac{4}{x+3})$

$f(x) = x - \dfrac{4x}{x+3}$

$\acute{f}(x) = 1 - \dfrac{(x+3)(4) - (4x)(1)}{(x+3)^2} \implies = 1 - \dfrac{4x + 12 - 4x}{(x+3)^2} \implies \acute{f}(x) = 1 - \dfrac{12}{(x+3)^2}$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

8) $f(x)=\dfrac{3(1-\sin x)}{2\cos x}$

$$f(x)=\frac{3-3\sin x}{2\cos x}$$

$$\acute{f}(x)=\frac{(2\cos x)(-3\cos x)-(3-3\sin x)(-2\sin x)}{(2\cos x)^2}$$

$$\acute{f}(x)=\frac{-6\cos^2 x+6\sin x-6\sin^2 x}{(2\cos x)^2}\Rightarrow \acute{f}(x)=\frac{-6(\cos^2 x-\sin x+\sin^2 x)}{(2\cos x)^2}$$

$$\Rightarrow \acute{f}(x)=\frac{-6(1-\sin^2 x-\sin x+\sin^2 x)}{(2\cos x)^2}$$ قاعدة $\cos^2 x=1-\sin^2 x$

$$\Rightarrow \acute{f}(x)=\frac{-6(1-\sin x)}{4\cos^2 x}\Rightarrow \acute{f}(x)=\frac{-6+6\sin x}{4\cos^2 x}$$

9) $f(x)=(x+1)e^x$

$$\acute{f}(x)=(x+1)e^x+e^x(1)\Rightarrow \acute{f}(x)=xe^x+e^x+e^x$$

$$\Rightarrow \acute{f}(x)=xe^x+2e^x\Rightarrow \acute{f}(x)=(x+2)e^x$$

أجد معادلة المماس لكل اقتران مما يأتي عند النقطة المعطاة:

10) $f(x)=x^2\cos x\ ,(\frac{\pi}{2},0)$

الخطوة الاولى: ايجاد ميل المماس

$$f(x)=x^2\cos x$$

$$\acute{f}(x)=x^2(-\sin x)+\cos x\,(2x)\Rightarrow \acute{f}(x)=-x^2\sin x+2x\cos x$$

$$\acute{f}\left(\frac{\pi}{2}\right)=-(\frac{\pi}{2})^2\sin(\frac{\pi}{2})+2(\frac{\pi}{2})\cos(\frac{\pi}{2})\Rightarrow \acute{f}\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi^2}{4}.(1)+\pi(0)$$

$\acute{f}\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{\pi^2}{4}$ ميل المماس

الخطوة الثانية: ايجاد معادلة المماس

$y-y_1=m(x-x_1)$ معادلة المماس:

$$y-0=-\frac{\pi^2}{4}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow y=-\frac{\pi^2}{4}x+\frac{\pi^3}{8}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

11) $f(x) = \dfrac{1+\sin x}{\cos x}$, $(\pi, -1)$

الخطوة الاولى: ايجاد ميل المماس

$$f(x) = \frac{1+\sin x}{\cos x}$$

$$f'(x) = \frac{(\cos x)(\cos x) - (1+\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x} \Longrightarrow f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}$$

قاعدة $\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$

$$f'(\pi) = \frac{1+\sin \pi}{\cos^2 \pi} \Longrightarrow f'(\pi) = \frac{1+(0)}{(-1)^2} \Longrightarrow f'(\pi) = \frac{1}{1} = 1$$ ميل المماس

الخطوة الثانية: ايجاد معادلة المماس

معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - (-1) = 1(x - \pi) \Longrightarrow y + 1 = x - \pi \Longrightarrow y = x - \pi - 1$$

أجد إحداثيي النقطة (النقاط) التي يكون عندها لمنحنى كل اقتران مما يأتي مماس أفقي:

12) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2}$

نشتق ثم نساوي بالصفر وذلك لأن عند المماس الأفقي يكون $f'(x) = 0$

$$f'(x) = \frac{(x^2)(2) - (2x-1)(2x)}{(x^2)^2} \Longrightarrow f'(x) = \frac{2x^2 - 4x^2 + 2x}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{-2x^2 + 2x}{x^4} \Longrightarrow f'(x) = 0 \Longrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{-2x+2}{x^3} = 0 \Longrightarrow -2x + 2 = 0 \Longrightarrow -2x = -2 \Longrightarrow \boxed{x = 1}$$

$$f(1) = \frac{2(1)-1}{(1)^2} \Longrightarrow f(1) = \frac{2-1}{1} \Longrightarrow \boxed{f(1) = 1}$$ النقطة المطلوبة $(1, 1)$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

$13)\quad h(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

$h'(x) = \dfrac{(x^2+1)(2x) - (x^2)(2x)}{(x^2+1)^2} \Longrightarrow = \dfrac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2+1)^2} \Longrightarrow h'(x) = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

$\dfrac{2x}{(x^2+1)^2} = 0 \Longrightarrow 2x = 0 \Longrightarrow \boxed{x = 0}$

$h'(0) = \dfrac{0^2}{0^2+1} \Longrightarrow h'(0) = 0$

النقطة هي : $(0,0)$

$14)\quad g(x) = \dfrac{8(x-2)}{e^x}$

$g(x) = \dfrac{(8x-16)}{e^x}$

$g'(x) = \dfrac{(e^x)(8) - (8x-16)(e^x)}{(e^x)^2} \Longrightarrow g'(x) = \dfrac{8e^x - 8xe^x + 16e^x}{e^{2x}}$

$\Longrightarrow g'(x) = \dfrac{24e^x - 8xe^x}{e^{2x}} \Longrightarrow g'(x) = \dfrac{24-8x}{e^x} \Longrightarrow g'(x) = \dfrac{8(3-x)}{e^x}$

$g'(x) = \dfrac{8(3-x)}{e^x} = 0 \Longrightarrow 8(3-x) = 0 \Longrightarrow 3 - x = 0 \Longrightarrow \boxed{x = 3}$

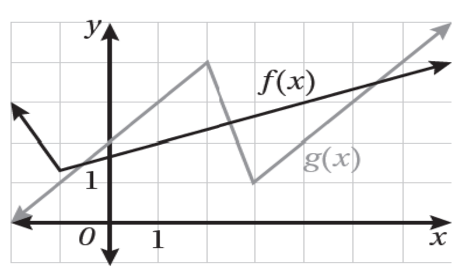
$g'(x) = \dfrac{8(3-x)}{e^x} \Longrightarrow g'(3) = \dfrac{8(3-3)}{e^3} \Longrightarrow \boxed{g'(3) = 0}$

النقطة هي : $(3,0)$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

يبين الشكل المجاور منحنى الاقترانين : $f(x)$ و $g(x)$. إذا كان : $u(x) = f(x)\,g(x)$،

وكان $v(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ فأجد كلا مما يأتي :



$15)\quad u'(1)$

$u'(x) = f(x).\ g'(x) + g(x).f'(x)$

$u'(1) = f(1).\ g'(1) + g(1).f'(1)$

$u'(1) = (2).(1) + (3).\left(\dfrac{1}{3}\right)$

$u'(1) = 3$

16) $\acute{v}(x) = \dfrac{g(x).\acute{f}(x) - f(x).\ \acute{g}(x)}{(g(x))^2}$

$$\acute{v}(4) = \frac{g(4).\acute{f}(4) - f(4).\ \acute{g}(4)}{(g(4))^2} \Rightarrow \quad \acute{v}(4) = \frac{(2).\left(\frac{1}{3}\right) - (3).(1)}{(2)^2}$$

$$\Rightarrow \acute{v}(4) = \frac{\frac{2}{3} - 3}{4} \Rightarrow \quad \acute{v}(4) = \frac{-\frac{7}{3}}{4} \Rightarrow \quad \acute{v}(4) = -\frac{7}{12}$$

17) إذا كان $f(x) = x\sec x$ ، فأثبت أن $\acute{f}(x) = \sec x(1 + x\tan x)$.

$f(x) = x\sec x$

$\acute{f}(x) = (x).(\sec x\tan x) + (\sec x).(1) \Rightarrow \acute{f}(x) = x\sec x\tan x + \sec x$

$\acute{f}(x) = \sec x(1 + x\tan x)$

18) إذا كان $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ، حيث : $x > 0$ ، فأجد $\acute{f}(x)$ ، و $\acute{\acute{f}}(x)$.

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{(x).\left(\frac{1}{x}\right) - (\ln x).(1)}{x^2} \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$\acute{\acute{f}}(x) = \frac{(x^2).\left(-\frac{1}{x}\right) - (1 - \ln x).(2x)}{(x^2)^2} \Rightarrow \acute{\acute{f}}(x) = \frac{-x - 2x + 2x\ln x}{x^4}$$

$$\acute{\acute{f}}(x) = \frac{-3x + 2x\ln x}{x^4} \Rightarrow \acute{\acute{f}}(x) = \frac{-3 + 2\ln x}{x^3}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

يمثل الاقتران : $t \geq 0$, $v(t) = \frac{10}{2t+15}$ السرعة المتجهة لسيارة بدأت الحركة في مسار مستقيم من وضع السكون ، حيث تقاس v بالقدم لكل ثانية :

19) أجد تسارع السيارة عندما $t = 5$.

$$v(t) = \frac{10}{2t+15}$$

$$a(t) = \frac{(2t+15).(0)-(10).(2)}{(2t+15)^2} \Rightarrow a(t) = \frac{-20}{(2t+15)^2}$$

$$a(5) = \frac{-20}{(2(5)+15)^2} \Rightarrow a(5) = \frac{-20}{(10+15)^2} \Rightarrow a(5) = \frac{-20}{625}$$

$$a(5) = -\frac{4}{125} = -0.032 \ \ ft/s^2$$

20) أجد تسارع السيارة عندما $t = 20$.

$$a(20) = \frac{-20}{(2(20)+15)^2} \quad \Rightarrow a(20) = \frac{-20}{(40+15)^2}$$

$$\Rightarrow a(20) = \frac{-20}{3025} \quad \Rightarrow a(20) = -\frac{4}{605} = -0.007 \ \ ft/s^2$$

21) يعطى طول مستطيل بالمقدار $6t + 5$ ، ويعطى عرضه بالمقدار $\sqrt{t}$ ، حيث tالزمن بالثواني ، والأبعاد بالسنتميترات ، أجد معدل تغير مساحة المستطيل بالنسبة إلى الزمن .

مساحة المستطيل = الطول × العرض

$$A = (\sqrt{t}).(6t+5) \ \Rightarrow A = (t)^{\frac{1}{2}}.(6t+5) \ \Rightarrow A = 6t^{\frac{3}{2}} + 5t^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{3}{2}.6t^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}.5t^{\frac{-1}{2}} \ \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 9t^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{2}t^{\frac{-1}{2}} \ \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 9\sqrt{t} + \frac{5}{2\sqrt{t}} \ \ cm^2/s$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

الدرس الثالث

قاعـــدة السـلـسـلـة

مخطط الدرس الثالث

قاعدة السلسلة

- قاعدة السلسلة
- قاعدة سلسلة القوة
- الاستعمال المتكرر لقاعدة السلسلة
- قواعد الاشتقاق الاساسية وقاعدة السلسلة
- مشتقة $a^{(g(x))}$
- مشتقة $\log_a g(x)$
- مشتقة المعادلات الوسيطية

تأسيس الدرس الثالث: (مهم جداً)

جدول قياسات الزوايا الخاصة: (مهم حفظ)

القياس الدائري	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
القياس الستيني	0	30	45	60	90	180	270	360
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0

قوانين النسب المثلثية: (مهمة جداً حفظ)

1) قوانين نصف الزاوية:

1) $\boxed{\sin 2x = 2\sin x\cos x}$

$\sin 4x = 2\sin 2x\cos 2x$

$\sin 6x = 2\sin 3x\cos 3x$

2) $\boxed{\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x}$

$\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x$

$\cos 6x = \cos^2 3x - \sin^2 3x$

3) $\boxed{\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x}$

$\cos 4x = 1 - 2\sin^2 2x$

$\cos 6x = 1 - 2\sin^2 3x$

4) $\boxed{\cos 2x = 2\cos^2 x - 1}$

$\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$

$\cos 6x = 2\cos^2 3x - 1$

2) قوانين ضعف الزاوية:

1) $\boxed{\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x}$

$\sin^2 2x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x$

$\sin^2 3x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 6x$

2) $\boxed{\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x}$

$\cos^2 2x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x$

$\cos^2 3x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 6x$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٧٨٠٨

الدرس الثالث: قاعدة السلسلة

قاعدة السلسلة (صفحة 106)

هي قاعدة الاشتقاق التي تطبق على الاقترانات المركبة أي يحتوي على اقترانين (داخلي و خارجي).

يتم اشتقاق الاقتران المركب :

$$(fog)(x) = f(g(x)) \quad \Rightarrow \quad (fog)'(x) = f'(g(x)).g'(x)$$

بمعنى مشتقة الاقتران الخارجي وقيمته عند الاقتران الداخلي، ثم ضربه في مشتقة الاقتران الداخلي.

ملاحظة مهمة: امثلة على الاقترانات التي تطبق قاعدة السلسلة:

1) الاقترانات المثلثية:

قاعدة الاشتقاق : نشتق الاقتران المثلثي وتنزل الزاوية كما هي × مشتقة الزاوية .

2) اقتران القوس المرفوع لأسّ:

الاقتران : القوس المرفوع إلى أسّ $f(x) = (g(x))^n$

المشتقة: $f(x) = (g(x))^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = n(g(x))^{n-1} \times g'(x)$

قاعدة الاشتقاق: ينزل الاسّ، وينزل القوس مع طرح من الاسّ واحد، ونشتق ما في داخل القوس.

3) الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي:

قاعدة الاشتقاق : إذا كان : $f(x) = \ln(\text{مقدار متغير})$ **، حيث :** $x > 0$ **،**

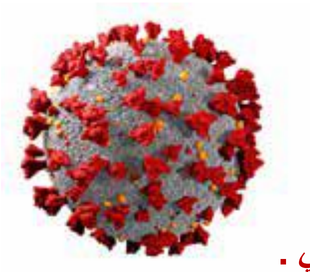
فإن المشتقة : $f'(x) = \dfrac{\text{مشتقة المقدار}}{\text{نفس المقدار}}$

4) الاقتران الأسي الطبيعي:

قاعدة الاشتقاق: نشتق اقتران الأس، وينزل الاقتران الأسي الطبيعي نفسه (الاساس مع الأسّ):

$$f(x) = e^{g(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = g'(x)e^{g(x)}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨



مسالة اليوم (صفحة 106) : يمكن نمذجة انتشار الانفلونزا في إحدى المدارس باستعمال الاقتران : $P(t)=\frac{100}{1+e^{3-t}}$ ، حيث $P(t)$ العدد التقريبي الكلي للطلبة المصابين بعد t يوماً من ملاحظة الانفلونزا أول مرة في المدرسة ، أجد سرعة انتشار الانفلونزا في المدرسة بعد 3 أيام ، مبرراً إجابتي .

$$P(t)=\frac{100}{1+e^{3-t}} \Rightarrow \acute{P}(t)=\frac{100e^{3-t}}{(1+e^{3-t})^2}$$

$$\acute{P}(3)=\frac{100e^{3-3}}{(1+e^{3-3})^2} \Rightarrow \acute{P}(3)=\frac{100(1)}{(1+1)^2} \Rightarrow \acute{P}(3)=\frac{100}{4} \Rightarrow \boxed{\acute{P}(3)=25}$$

أي أن الانفلونزا تنتشر في المدرسة بعد 5 أيام بمعدل 5 طالباً / يوم .

مثال 1: أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي: (صفحة 106)

1) $f(x)=\cos 2x$

$\acute{f}(x)=-\sin 2x\times 2 \Rightarrow \acute{f}(x)=-2\sin 2x$

2) $f(x)=e^{(x+x^2)}$

$\acute{f}(x)=e^{(x+x^2)}(1+2x)$

3) $f(x)=\ln(\sin x)$

$\acute{f}(x)=\frac{\cos x}{\sin x}\cot x$

أتحقق من فهمي: (صفحة 106)

1) $f(x)=\tan 3x^2$

$\acute{f}(x)=6x\sec^2 3x^2$

2) $f(x)=e^{\ln x}$

$f(x)=x \Rightarrow \acute{f}(x)=1 \longleftarrow \boxed{e^{\log_e x}=e^{\ln x}=x}$

3) $f(x)=\ln(\cot x)$

$\acute{f}(x)=\frac{-\csc^2 x}{\cot x}$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

قاعدة سلسلة القوة: (صفحة 108)

ويتم تطبيق قاعدة اشتقاق القوس المرفوع لأسّ:

مشتقة القوس المرفوع إلى أسّ $f(x) = \left(g(x)\right)^n$ ،

المشتقة $\acute{f}(x) = n\left(g(x)\right)^{n-1} \times \acute{g}(x)$

المشتقة = ينزل الاسّ ، وينزل القوس مع طرح من الاسّ واحد ، ونشتق ما في داخل القوس .

ملاحظة 1): يجب تحويل الجذر إلى (أسّ) عند الاشتقاق وذلك بقسمة $\frac{\text{الداخل}}{\text{الخارج}}$ **.**

ملاحظة 2): إذا كان الأسّ فوق الاقتران مثلثي فيعتبر هذا الأسّ للقوس كله ويشتق حسب قاعدة القوس المرفوع لأسّ.

مثال للتوضيح:

$$f(x) = \sin^2 5x \quad \Rightarrow f(x) = (\sin 5x)^2$$

$$\acute{f}(x) = 2\sin(5x).\cos(5x).5 \quad \Rightarrow \quad \acute{f}(x) = 10\sin(5x)\cos(5x)$$

تم الاشتقاق حسب قاعدة القوس المرفوع لأسّ.

مثال 2: أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي: (صفحة 42)

1) $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$

$$f(x) = (x^2-1)^{\frac{2}{3}}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{2}{3}(x^2-1)^{\frac{-1}{3}} \times \frac{d}{dx}(x^2-1) \Rightarrow = \frac{2}{3}(x^2-1)^{\frac{-1}{3}} \times 2x \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}}$$

2) $f(x) = \tan^4 x$

$$f(x) = \tan^4 x = (\tan x)^4$$

$$\acute{f}(x) = 4(\tan x)^3 \times \frac{d}{dx}(\tan x) \Rightarrow = 4(\tan x)^3 \times \frac{d}{dx}(\tan x) \Rightarrow \acute{f}(x) = 4\tan^3 x \times \sec^2 x$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

3) $f(x) = \sqrt{\ln x}$

$$f(x) = (\ln x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^{\frac{-1}{2}} \times \frac{d}{dx}(\ln x) \Rightarrow = \frac{1}{2}(\ln x)^{\frac{-1}{2}} \times \frac{1}{x} \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$$

أتحقق من فهمي: (صفحة 109)

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = \sqrt[5]{(x^2-1)^2}$

$$f(x) = (x^2-1)^{\frac{2}{5}}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{2}{5}(x^2-1)^{\frac{-3}{5}}(2x) \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{4x}{5\sqrt[5]{(x^2-1)^3}}$$

2) $f(x) = \sqrt{\cos x}$

$$\acute{f}(x) = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$$

3) $f(x) = (\ln x)^5$

$$\acute{f}(x) = 5(\ln x)^4\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{5(\ln x)^4}{x}$$

الاستعمال المتكرر لقاعدة السلسلة: (صفحة 110)

وهي ان نستعمل قاعدة السلسلة أكثر من مرة لإيجاد المشتقة. (بمعنى ان الاقتران مركب أكثر من مرة).

مثال: ان يكون الاقتران مثلثي مرفوع لأسّ وزاوية الاقتران المثلثي عبارة عن اقتران آخر.

المشتقة = مشتقة القوس المرفوع لقوة × مشتقة ما بداخل القوس × مشتقة الزاوية

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

امثلة توضيحية: (غير موجودة في الكتاب)

1) $f(x)=\cos^3(2x)$

$f(x)=(\cos(2x))^3$

$\acute{f}(x)=3(\cos 2x)^2(-\sin 2x)(2) \Rightarrow \acute{f}(x)=-6(\cos^2 2x)(\sin 2x)$

2) $f(x)=\sin^2(\cos 3x^2)$

$f(x)=(\sin(\cos 3x^2))^2$

$\acute{f}(x)=(2\sin(\cos 3x^2))\times(\cos(\cos 3x^2)\times(-\sin 3x^2\times 6x)$

$\acute{f}(x)=-12x\cos(\cos 3x^2)\sin(3x^2)\sin(\cos 3x^2)$

مثال 3: (صفحة 110)

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x)=e^{\csc 4x}$

$\acute{f}(x)=e^{\csc 4x}\times\frac{d}{dx}(\csc 4x) \quad \Rightarrow \acute{f}(x)=e^{\csc 4x}\times-\csc 4x\times\cot 4x\times\frac{d}{dx}(4x)$

$\acute{f}(x)=-4e^{\csc 4x}\csc 4x\cot 4x$

2) $f(x)=\sin(\tan\sqrt{3x^2+4})$

$\acute{f}(x)=\cos(\tan\sqrt{3x^2+4})\times\frac{d}{dx}(\tan\sqrt{3x^2+4})$

$\acute{f}(x)=\cos(\tan\sqrt{3x^2+4})\times\sec^2\sqrt{3x^2+4}\times\frac{d}{dx}(\sqrt{3x^2+4})$

$\acute{f}(x)=\cos(\tan\sqrt{3x^2+4})\times\sec^2\sqrt{3x^2+4}\times(3x^2+4)^{\frac{1}{2}}$

$\acute{f}(x)=\cos(\tan\sqrt{3x^2+4})\times\sec^2\sqrt{3x^2+4}\times\frac{1}{2}(3x^2+4)^{\frac{-1}{2}}\times\frac{d}{dx}6x\,(3x^2+4)$

$\acute{f}(x)=\cos(\tan\sqrt{3x^2+4})\times\sec^2\sqrt{3x^2+4}\times\frac{1}{2}(3x^2+4)^{\frac{-1}{2}}\times 6x$

$$\acute{f}(x)=\frac{3x\cos(\tan\sqrt{3x^2+4})\times\sec^2\sqrt{3x^2+4}}{\sqrt{3x^2+4}}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

أتحقق من فهمي: (صفحة 111)

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = \cos^2(7x^3 + 6x - 1)$

$$\acute{f}(x) = 2\cos(7x^3 + 6x - 1)(-\sin 7x^3 + 6x - 1)(21x^2 + 6)$$

$$\acute{f}(x) = -2(21x^2 + 6)\cos(7x^3 + 6x - 1)\sin(7x^3 + 6x - 1)$$

$$\acute{f}(x) = -(21x^2 + 6)\sin 2(7x^3 + 6x - 1)$$

قانون نصف الزاوية

2) $f(x) = (2 + (x^2 + 1)^4)^3$

$$\acute{f}(x) = 3(2 + (x^2 + 1)^4)^2(4(x^2 + 1)^3(2x))$$

$$\acute{f}(x) = 24x(2 + (x^2 + 1)^4)^2(x^2 + 1)^3$$

قواعد الاشتقاق الاساسية وقاعدة السلسلة (صفحة 111)

أي تطبيق قواعد الاشتقاق الأساسية التي تعلمناها سابقاً بالإضافة لقاعدة السلسلة معاً،
مثل: مشتقة الجمع ومشتقة الضرب ومشتقة القسمة وغيرها .

مثال 4:(صفحة 111)

أجد ميل المماس لمنحنى الاقتران : $f(x) = e^{-0.2x}\sin 4x$ عندما $x = \frac{\pi}{8}$

لإيجاد ميل المماس : (نجد المشتقة الأولى ثم نعوض قيمة x المعطاة بالسؤال)

(تم استخدام قاعدة الضرب وقاعدة السلسلة في الحل)

$$f(x) = e^{-0.2x}\sin 4x$$

$$\acute{f}(x) = e^{-0.2x}\frac{d}{dx}(\sin 4x) + \sin 4x\frac{d}{dx}(e^{-0.2x})$$

$$\acute{f}(x) = e^{-0.2x} \times 4\cos 4x + \sin 4x \times -0.2\,e^{-0.2x}$$

$$\acute{f}(x) = 4e^{-0.2x}\cos 4x - 0.2e^{-0.2x}\sin 4x$$

$$\acute{f}\left(\frac{\pi}{8}\right) = 4e^{-0.2(\frac{\pi}{8})}\cos 4(\frac{\pi}{8}) - 0.2e^{-0.2(\frac{\pi}{8})}\sin 4(\frac{\pi}{8})$$

$$\boxed{\acute{f}\left(\frac{\pi}{8}\right) = -0.2e^{-0.025\pi}}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

2) أجد ميل العمودي على المماس لمنحنى الاقتران : $f(x) = (\frac{3x-1}{x^2+3})^2$ عندما $x = 0$

لإيجاد ميل العمودي على المماس : (نجد المشتقة الأولى ثم نعوض قيمة x المعطاة بالسؤال ثم نجد سالب مقلوب ميل المماس)

(تم استخدام قاعدة القسمة وقاعدة السلسلة في الحل)

$$f(x) = (\frac{3x-1}{x^2+3})^2$$

$$f'(x) = 2\left(\frac{3x-1}{x^2+3}\right) \times \frac{d}{dx}\left(\frac{3x-1}{x^2+3}\right) \quad \Longrightarrow = 2(\frac{3x-1}{x^2+3}) \times (\frac{(x^2+3)(3)-(3x-1)(2x)}{(x^2+3)^2})$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{2(3x-1)(-3x^2+2x+9)}{(x^2+3)^3}}$$ المشتقة

$$f'(0) = \frac{2(3(0)-1)(-3(0)^2+2(0)+9)}{((0)^2+3)^3} \Longrightarrow f'(0) = \frac{-18}{27} = \boxed{\frac{-2}{3}}$$ ميل المماس

إذن ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عندما $x = 0$ هو: $\frac{-2}{3}$. ومنه،فإن ميل العمودي على المماس عندما $x = 0$ هو $\frac{2}{3}$

تحقق من فهمي: (صفحة 112)

1) أجد ميل المماس لمنحنى الاقتران : $f(x) = (2x+1)^5(x^3-x+1)^4$ عندما $x = 1$

لإيجاد ميل المماس : (نجد المشتقة الأولى ثم نعوض قيمة x المعطاة بالسؤال)

(تم استخدام قاعدة الضرب وقاعدة السلسلة في الحل)

$$f(x) = (2x+1)^5(x^3-x+1)^4$$

$$f'(x) = (2x+1)^5 4(x^3-x+1)^3(3x^2-1) + (x^3-x+1)^4 5(2x+1)^4(2)$$

$$f'(x) = (2x+1)^5 4(x^3-x+1)^3(3x^2-1) + (x^3-x+1)^4 5(2x+1)^4(2)$$

$$f'(1) = (2(1)+1)^5 4((1)^3-(1)+1)^3(3(1)^2-1) + ((1)^3-(1)+1)^4 5(2(1)+1)^4(2)$$

$$f'(1) = (3)^5(4)(1)^3(2) + (1)^4 5(3)^4(2)$$

$$f'(1) = (3)^5(4)(1)^3(2) + (1)^4(5)(3)^4(2)$$

$$\Longrightarrow f'(1) = 1944 + 810 \Longrightarrow \quad f'(1) = 2754$$

معتصم ابراهيم

2) أجد ميل العمودي على المماس لمنحنى الاقتران : $f(x) = \frac{\cos^2 x}{e^{2x}}$ عندما $x = \frac{\pi}{2}$

(تم استخدام قاعدة القسمة وقاعدة السلسلة في الحل)

$$f(x) = \frac{\cos^2 x}{e^{2x}}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{(e^{2x}) \times 2(\cos x)(-\sin x) - (\cos^2 x)(2e^{2x})}{(e^{2x})^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{(e^{2x}) \times 2(\cos x)(-\sin x) - (\cos^2 x)(2e^{2x})}{e^{4x}}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{-2(\cos x)(\sin x) - 2(\cos^2 x)}{e^{2x}}$$

قانون نصف الزاوية

$$\boxed{\acute{f}(x) = \frac{-(\sin 2x) - 2(\cos^2 x)}{e^{2x}}}$$

المشتقة

$$\acute{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-\left(\sin 2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - 2\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}{e^{2\left(\frac{\pi}{2}\right)}} \Rightarrow \acute{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-\left(\sin 2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - 2\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}{e^{2\left(\frac{\pi}{2}\right)}}$$

$$\Rightarrow \acute{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-(\sin(\pi)) - 2\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}{e^{(\pi)}} \Rightarrow \acute{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{(0) - 2(0)}{e^{(\pi)}} \Rightarrow \boxed{\acute{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0}$$

ميل العامودي على المماس: هو سالب مقلوب ميل المماس. $m_1 = -\frac{1}{m}$

$$\boxed{m_1 = -\frac{1}{0} = \text{غير معرف}}$$

ميل المماس يساوي صفراً ، أي أن المماس أفقي، ومنه يكون العمودي على المماس رأسياً وميله غير معرف.

مثال 5: من الحياة: (صفحة 112)

أعمال: طرحت إحدى الشركات منتجاً جديداً في الأسواق، ثم رصدت عدد القطع المبيعة منذ طرحه.

إذا مثل الاقتران : $t > 0$ ، $N(t) = \frac{250000t^2}{(2t+1)^2}$ عدد القطع المبيعة منذ طرحه ، حيث t الزمن بالأسابيع ، فأجب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

منتج جديد

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

1) أجد معدل تغير عدد القطع المبيعة بالنسبة إلى الزمن:

أجد $\acute{N}(t)$

$$N(t)=\frac{250000t^2}{(2t+1)^2}$$

$$\acute{N}(t)=\frac{(2t+1)^2\frac{d}{dt}(250000t^2)-(250000t^2)\frac{d}{dt}(2t+1)^2}{((2t+1)^2)^2}$$

$$\acute{N}(t)=\frac{(2t+1)^2(500000t)-(250000t^2)2(2t+1)\times 2}{(2t+1)^4}$$

$$\acute{N}(t)=\frac{(2t+1)^2(500000t)-(100000t^2)(2t+1)}{(2t+1)^4}$$

$$\acute{N}(t)=\frac{(2t+1)(500000t)((2t+1)-2t)}{(2t+1)^4}\Rightarrow \acute{N}(t)=\frac{500000t}{(2t+1)^3}$$

2) أجد $\acute{N}(52)$ مفسراً معنى الناتج .

$$\acute{N}(t)=\frac{250000t^2}{(2t+1)^2}\Rightarrow \acute{N}(52)=\frac{250000(52)^2}{(2(52)+1)^2}\Rightarrow \boxed{\acute{N}(52)\approx 22}$$

إذن $\acute{N}(52)=22$ وهذا يعني أن إجمالي عدد القطع المبيعة من المنتج يزداد بمعدل 22 قطعة لكل أسبوعاً بعد مرور 52 أسبوعاً على طرح المنتج في الأسواق .

أتحقق من فهمي: (صفحة 113)

تحسب قيمة بدل الخدمة لأحد المنتجات تحسب بالدينار ، باستعمال الاقتران: $U(x)=80\sqrt{\frac{2x+1}{3x+4}}$

حيث x عدد القطع المبيعة من المنتج .

1) أجد معدل تغير قيمة بدل الخدمة بالنسبة إلى عدد القطع المبيعة من المنتج.

$$U(x)=80\sqrt{\frac{2x+1}{3x+4}}$$

$$\acute{U}(x)=80\,\frac{\frac{(3x+4)(2)-(2x+1)(3)}{(3x+4)^2}}{2\sqrt{\frac{2x+1}{3x+4}}}\Rightarrow \acute{U}(x)=40\,\frac{\frac{6x+8-6x-3}{(3x+4)^2}}{\sqrt{\frac{2x+1}{3x+4}}}$$

$$\Rightarrow \acute{U}(x)=\frac{\frac{200}{(3x+4)^2}}{\sqrt{\frac{2x+1}{3x+4}}}\Rightarrow \acute{U}(x)=\frac{200}{(3x+4)^2}\sqrt{\frac{3x+4}{2x+1}}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

2) أجد $\acute{U}(20)$ مفسراً معنى الناتج .

$$\acute{U}(20)=\frac{200}{(3(20)+4)^2}\sqrt{\frac{3(20)+4}{2(20)+1}} \Rightarrow \acute{U}(20)=\frac{200}{4096}\sqrt{\frac{64}{41}} \Rightarrow \boxed{\acute{U}(20)\approx 0.061}$$

وهذا يعني أنه عند بيع 20 قطعة فإن قيمة بدل الخدمة تتزايد بمقدار 0.061 دينار / قطعة تقريباً .

مشتقة $a^{(g(x))}$ (صفحة 114)

قاعدة اشتقاق اقتران الثابت مرفوع لأس اقتران:

ينزل الاقتران كما هو × ln الأساس × مشتقة الاسّ

$$f(x)=a^x \quad \Longrightarrow \quad \acute{f}(x)=a^x \ln a\left(\acute{g}(x)\right)$$

ملاحظة : يشترط أن تكون $a>1$ دائماً ، لأن $\ln 1=0$ بالتالي ناتج الاشتقاق يكون صفر .

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

مثال 6: (صفحة 114)

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x)=8^{5x}$

$\acute{f}(x)=8^{5x}(\ln 8)(5) \Rightarrow \acute{f}(x)=(5\ln 8)8^{5x}$

2) $f(x)=6^{x^2}$

$\acute{f}(x)=6^{x^2}(\ln 6)(2x) \Rightarrow \acute{f}(x)=(2x\ln 6)6^{x^2}$

3) $f(x)=e^{3x}+2^{3x}$

$\acute{f}(x)=3e^{3x}+2^{3x}(\ln 2)(3) \Rightarrow \acute{f}(x)=3e^{3x}+(3\ln 2)2^{3x}$

أتحقق من فهمي : (صفحة 115)

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = \pi^{\pi x}$

$\acute{f}(x) = \pi^{\pi x}(\ln \pi)(\pi) \Rightarrow \acute{f}(x) = \pi^{1+\pi x} \ln \pi$

2) $f(x) = 6^{1-x^3}$

$\acute{f}(x) = 6^{1-x^3}(\ln 6)(-3x^2) \Rightarrow \acute{f}(x) = (-3x^2 \ln 6)6^{1-x^3}$

3) $f(x) = e^{4x} + 4^{2x}$

$\acute{f}(x) = 4e^{4x} + 4^{2x}(\ln 4)(2) \Rightarrow \acute{f}(x) = 4e^{4x} + (2 \ln 4)4^{2x}$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

مشتقة $\log_a g(x)$ (صفحة 115)

(تذكر1) اللوغاريتم الاعتيادي: هو اللوغاريتم للأساس 10 أو $\log_{10}$ ، ويكتب عادة من دون أساس $\log$.

(تذكر2) اللوغاريتم الطبيعي: هو اللوغاريتم للأساس e أو $\log_e$ ، ويرمز له بـ $\ln$.

(تذكر3) نظرية اشتقاق اقتران اللوغاريتم الطبيعي: $f(x) = \ln(\text{مقدار متغير})$ ،حيث : $x > 0$

، فإن المشتقة : $\acute{f}(x) = \frac{\text{مشتقة المقدار}}{\text{نفس المقدار}}$

قاعدة اشتقاق اقتران $\log$ للأساس a ما داخله اقتران:

نشتق ما داخل $\log$ ÷ (ln الأساس × ما داخل $\log$)

$$f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{(\acute{g}(x))}{(\ln a)(g(x))} \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{(\text{مشتقة المقدار})}{(\ln a)(\text{نفس المقدار})}$$

نلاحظ أن الفرق بين القاعدتين (قاعدة اشتقاق اللوغاريتم الطبيعي وقاعدة اشتقاق اللوغاريتم للأساس a) هو ضرب $(\ln a)$ في المقام .

مثال 7: (صفحة 116)

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = \log \cos x$

$$f'(x) = \frac{-\sin x}{(\ln 10)\cos x}$$

2) $f(x) = \log_2\left(\frac{x^2}{x-1}\right)$

$$f(x) = \log_2(x^2) - \log_2(x-1) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{2}{(\ln 2)x} - \frac{1}{(\ln 2)(x-1)}$$

(تذكر) قانون القسمة: $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$

أتحقق من فهمي: (صفحة 116)

1) $f(x) = \log \sec x$

$$f'(x) = \frac{\sec x \tan x}{(\ln 10)\sec x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\tan x}{\ln 10}$$

2) $f(x) = \log_8(x^2 + 3x)$

$$f'(x) = \frac{2x+3}{(x^2+3x)\ln 8}$$

مشتقة المعادلات الوسطية (صفحة 117)

ويتم استخدامها عندما يكون لدينا اقترانين مختلفين بدلالة نفس المتغير.

1) الاقتران الأول : (y) بدلالة المتغير (t)بحيث يكون : $y = g\ (t)$

2) الاقتران الثاني : (x) بدلالة المتغير (t) بحيث يكون : $x = h\ (t)$

ونريد إيجاد مشتقة (y) بدلالة المتغير (x) أي $\frac{dy}{dx}$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

الخطوات:

1) نشتق الاقتران الأول $y = g\,(t)$ لنحصل على المشتقة $\frac{dy}{dt}$.

2) نشتق الاقتران الثاني $x = h\,(t)$ لنحصل على المشتقة $\frac{dx}{dt}$.

3) نقسم الاقتران الأول على الاقتران الثاني $\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ لنحصل على المشتقة $\frac{dy}{dx}$.

4) نعوض قيمة (t) المعطاة في السؤال في المشتقة الوسيطية $\frac{dy}{dx}$.

مثال 8: (صفحة 118)

أجد معادلة مماس منحنى المعادلة الوسيطية الآتية عندما $t = \frac{\pi}{4}$

$$x = 2\sin t \qquad y = 3\cos t \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

الخطوة الأولى: إيجاد النقطة.

$$x = 2\sin t \implies x = 2\sin\frac{\pi}{4} \implies x = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \implies x = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$y = 3\cos\frac{\pi}{4} \implies y = 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \implies y = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

النقطة هي $\left(\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$

الخطوة الثانية : ايجاد ميل المماس عندما $t = \frac{\pi}{4}$

$$y = 3\cos t \implies \boxed{\frac{dy}{dt} = -3\sin t}$$

$$x = 2\sin t \implies \boxed{\frac{dx}{dt} = 2\cos t}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \implies \frac{dy}{dx} = \frac{-3\sin t}{2\cos t} \implies \boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{2}\tan t}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{3}{2}\tan\frac{\pi}{4} \implies \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{3}{2}(1) \implies \boxed{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{3}{2}}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

الخطوة الثالثة: أجد معادلة المماس.

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - \frac{3}{\sqrt{2}} = -\frac{3}{2}\left(x - \frac{2}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow y - \frac{3}{\sqrt{2}} = -\frac{3}{2}x + \frac{6}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow y + \frac{3}{2}x = \frac{6}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow y + \frac{3}{2}x = \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow \left[y + \frac{3}{2}x = \frac{6}{\sqrt{2}}\right] \times 2 \Rightarrow \boxed{2y + 3x = 6\sqrt{2}}$$

أتحقق من فهمي: (صفحة 119)

أجد معادلة مماس منحنى المعادلة الوسيطية الآتية عندما $t = \frac{\pi}{4}$:

$$x = \sec t \qquad y = \tan t \qquad -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$$

الخطوة الأولى: إيجاد النقطة.

$$x = \sec t \Rightarrow x = \sec\frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{2}}$$

$$y = \tan t \Rightarrow y = \tan\frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{y = 1}$$

النقطة هي $(\sqrt{2}, 1)$

الخطوة الثانية : ايجاد ميل المماس عندما $t = \frac{\pi}{4}$

$$y = \tan t \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \sec^2 t$$

$$x = \sec t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \sec t \tan t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2 t}{\sec t \tan t} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sec t\, t}{\tan t}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sec\frac{\pi}{4}}{\tan\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{1} \Rightarrow \boxed{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}}$$

الخطوة الثالثة: أجد معادلة المماس.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = \sqrt{2}(x - \sqrt{2}) \Rightarrow y - 1 = \sqrt{2}x - 2$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{2}x - 2 + 1 \Rightarrow y = \sqrt{2}x - 1$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

اتدرب وأحل المسائل: (صفحة 120)

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

$1)\ f(x) = e^{4x+2}$

$\acute{f}(x) = 4e^{4x+2}$

$2)\ f(x) = 50e^{2x-10}$

$\acute{f}(x) = 100e^{2x-10}$

$3)\ f(x) = \cos(x^2 - 3x - 4)$

$\acute{f}(x) = -\sin(x^2 - 3x - 4)\,(2x - 3) \Rightarrow \acute{f}(x) = (-2x + 3)\sin(x^2 - 3x - 4)$

$4)\ f(x) = 10x^2 e^{-x^2}$

$\acute{f}(x) = (10x^2)\left(-2xe^{-x^2}\right) + \left(e^{-x^2}\right)(20) \Rightarrow \acute{f}(x) = -20x^2xe^{-x^2} + 20xe^{-x^2}$

$\acute{f}(x) = 20xe^{-x^2}(1 - x^2)$

$5)\ f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$

$f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x} + \dfrac{1}{x}} \Rightarrow f(x) = \sqrt{1 + \dfrac{1}{x}}$

$\acute{f}(x) = \dfrac{-\dfrac{1}{x^2}}{2\sqrt{1 + \dfrac{1}{x}}} \Rightarrow \acute{f}(x) = \dfrac{-1}{2x^2\sqrt{1 + \dfrac{1}{x}}}$

$6)\ f(x) = x^2 \tan\dfrac{1}{x}$

$\acute{f}(x) = (x^2)\left(-\dfrac{1}{x^2}\sec^2\dfrac{1}{x}\right) + \left(\tan\dfrac{1}{x}\right)(2x)$

$\acute{f}(x) = (x^2)\left(-\dfrac{1}{x^2}\sec^2\dfrac{1}{x}\right) + \left(\tan\dfrac{1}{x}\right)(2x)$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

$7)\ f(x) = 3x - 5\cos(\pi x)^2$

$\acute{f}(x) = 3 - (5)(2) - \sin(\pi x)^2\,(\pi x)(\pi) \implies \acute{f}(x) = 3 + 10\pi^2 x\sin(\pi x)^2$

$8)\ f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{1-e^x}\right)$

$f(x) = \ln(1+e^x) - \ln(1-e^x)$

$\acute{f}(x) = \frac{e^x}{1+e^x} + \frac{e^x}{1-e^x} \implies \acute{f}(x) = \frac{e^x(1+e^x)+e^x(1-e^x)}{(1+e^x)(1-e^x)}$

$\implies \acute{f}(x) = \frac{(e^x+e^{2x})+(e^x-e^{2x})}{(1-e^x+e^x-e^{2x})} \implies \acute{f}(x) = \frac{e^x+e^{2x}+e^x-e^{2x}}{1-e^{2x}} \implies \acute{f}(x) = \frac{2e^x}{1-e^{2x}}$

$9)\ f(x) = (\ln x)^4$

$\acute{f}(x) = \frac{4}{x}(\ln x)^3$

$10)\ f(x) = \sin\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{\sin x}$

$f(x) = \sin x^{\frac{1}{3}} + (\sin x)^{\frac{1}{3}}$

$\acute{f}(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\cos x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}(\sin x)^{-\frac{2}{3}}(\cos x)(1) \implies \acute{f}(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\cos\sqrt[3]{x} + \frac{\cos x}{3\sqrt[3]{\sin^2 x}}$

$11)\ f(x) = \sqrt[5]{x^2+8x}$

$f(x) = (x^2+8x)^{\frac{1}{5}}$

$\acute{f}(x) = \frac{1}{5}(x^2+8x)^{-\frac{4}{5}}(2x+8) \implies \acute{f}(x) = \frac{2x+8}{5\sqrt[5]{(x^2+8x)^4}}$

$12)\ f(x) = \frac{3^{2x}}{x}$

$\acute{f}(x) = \frac{(x)(2\ln 3)3^{2x} - 3^{2x}(1)}{x^2} \implies = \frac{(2x\ln 3)3^{2x} - 3^{2x}}{x^2} \implies \acute{f}(x) = \frac{3^{2x}(2x\ln 3 - 1)}{x^2}$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

13) $f(x) = 2^{-x}\cos\pi x$

$\acute{f}(x) = (2^{-x})(\cos\pi x) + (\cos\pi x)(-\ln 2)(2^{-x})$

$\acute{f}(x) = (2^{-x}) - (\sin\pi x)(\pi) + (\cos\pi x)(-\ln 2)(2^{-x})$

$\acute{f}(x) = -\pi 2^{-x}\sin\pi x - 2^{-x}(\cos\pi x)\ln 2$

14) $f(x) = \dfrac{10\log_4 x}{x}$

$\acute{f}(x) = \dfrac{(x)\dfrac{10}{x\ln 4} - (10\log_4 x)(1)}{x^2} \Rightarrow = \dfrac{\dfrac{10x}{x\ln 4} - 10\log_4 x}{x^2} \Rightarrow \acute{f}(x) = \dfrac{\dfrac{10}{\ln 4} - 10\log_4 x}{x^2}$

15) $f(x) = \left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2$

$\acute{f}(x) = 2\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)\left(\dfrac{(1+\cos x)(\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}\right)$

$\acute{f}(x) = 2\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)\left(\dfrac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1+\cos x)^2}\right) \Rightarrow \acute{f}(x) = \left(\dfrac{2\sin x}{1+\cos x}\right)\left(\dfrac{\cos x + 1}{(1+\cos x)^2}\right)$

$\Rightarrow \acute{f}(x) = \left(\dfrac{2\sin x}{1+\cos x}\right)\left(\dfrac{1}{1+\cos x}\right) \Rightarrow \acute{f}(x) = \dfrac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}$

16) $f(x) = \log_3(1 + x\ln x)$

$\acute{f}(x) = \dfrac{(x)\left(\dfrac{1}{x}\right) + (\ln x)(1)}{(\ln 3)(1 + x\ln x)} \Rightarrow \acute{f}(x) = \dfrac{1 + \ln x}{(\ln 3)(1 + x\ln x)}$

17) $f(x) = e^{\sin 2x} + \sin(e^{2x})$

$\acute{f}(x) = e^{\sin 2x}(\cos 2x)(2) + \cos(e^{2x})(e^{2x})(2) \Rightarrow \acute{f}(x) = 2e^{\sin 2x}\cos 2x + 2e^{2x}\cos(e^{2x})$

18) $f(x) = tan^4(\sec(\cos x))$

$\acute{f}(x) = 4(tan(\sec(\cos x))^3(\sec^2(\sec(\cos x)) \times (\sec\cos x)(\tan\cos x)(-\sin x)$

$\acute{f}(x) = -4tan^3(\sec(\cos x))(\sec^2(\sec(\cos x)) \times \sec(\cos x)\tan(\cos x)\sin x$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

أجد معادلة المماس لكل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة :

19) $f(x) = 4e^{-0.5x^2} \quad , x = -2$

$f(-2) = 4e^{-0.5x^2} \Rightarrow f(-2) = 4e^{-0.5(-2)^2} \Rightarrow f(-2) = 4e^{-2} \Rightarrow \boxed{f(-2) = \frac{4}{e^2}}$

النقطة هي : $\left(-2, \frac{4}{e^2}\right)$

$\acute{f}(x) = 4e^{-0.5x^2}(-x) \Rightarrow \acute{f}(x) = -4xe^{-0.5x^2}$

$\acute{f}(-2) = -4(-2)e^{-0.5(-2)^2} \Rightarrow \acute{f}(-2) = 8e^{-2} \Rightarrow \acute{f}(-2) = \frac{8}{e^2}$ ميل المماس

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - \frac{4}{e^2} = \frac{8}{e^2}\left(x - (-2)\right) \Rightarrow y - \frac{4}{e^2} = \frac{8}{e^2}(x + 2) \Rightarrow y - \frac{4}{e^2} = \frac{8}{e^2}x + 2\frac{8}{e^2}$

$\Rightarrow y = \frac{8}{e^2}x + \frac{16}{e^2} + \frac{4}{e^2} \Rightarrow y = \frac{8}{e^2}x + \frac{20}{e^2}$ معادلة المماس

20) $f(x) = x + \cos 2x \quad , x = 0$

$f(0) = 0 + \cos 2(0) \Rightarrow f(0) = \cos 0 \Rightarrow f(0) = 1$

النقطة هي : $(0, 1)$

$\acute{f}(x) = 1 + (-\sin 2x)(2) \Rightarrow \acute{f}(x) = 1 - 2\sin 2x$

$\acute{f}(0) = 1 - 2\sin 2(0) \Rightarrow \acute{f}(0) = 1 - 2\sin 0 \Rightarrow \acute{f}(0) = 1 - 2(0) \Rightarrow \boxed{\acute{f}(0) = 1}$ ميل المماس

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 1 = 1(x - 0) \Rightarrow y - 1 = 1(x) \Rightarrow y = x + 1$ معادلة المماس

21) $f(x) = 2^x \quad , x = 0$

$f(0) = 2^0 \Rightarrow f(0) = 1$

النقطة هي : $(0, 1)$

$\acute{f}(x) = (\ln 2)2^x \Rightarrow \acute{f}(0) = (\ln 2)2^0 \Rightarrow \boxed{\acute{f}(0) = \ln 2}$ ميل المماس

$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 1 = \ln 2\,(x - 0) \Rightarrow \boxed{y = (\ln 2)x + 1}$ معادلة المماس

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

22) $f(x) = \sqrt{x+1}\sin\frac{\pi x}{2} \quad , x = 3$

$f(3) = \sqrt{3+1}\sin\frac{\pi 3}{2} \Rightarrow f(3) = 2\sin\frac{3\pi}{2} \Rightarrow f(3) = 2(-1) \Rightarrow f(3) = -2$

النقطة هي : $(3, -2)$

$\acute{f}(x) = \left(\sqrt{x+1}\right)\left(\cos\frac{\pi x}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right) + \left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)$

$\acute{f}(3) = \left(\sqrt{3+1}\right)\left(\cos\frac{\pi 3}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right) + \left(\sin\frac{\pi 3}{2}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{3+1}}\right)$

$\Rightarrow \acute{f}(3) = (2)(0)\left(\frac{\pi}{2}\right) + (-1)\left(\frac{1}{4}\right) \Rightarrow \acute{f}(3) = 0 + \left(-\frac{1}{4}\right) \Rightarrow \boxed{\acute{f}(3) = -\frac{1}{4} \text{ ميل المماس}}$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - (-2) = -\frac{1}{4}(x-3) \Rightarrow y + 2 = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4} \text{ معادلة المماس}}$

23) إذا كان : $A(x) = f(g(x))$ ، وكان : $f(-2) = 8, \acute{f}(-2) = 4, \acute{f}(5) = 3, g(5) =$
$-2, \acute{g}(5) = 6$ ، فأجد $\acute{A}(5)$.

$A(x) = f(g(x))$

$\acute{A}(x) = \acute{f}(g(x)) \times \acute{g}(x) \Rightarrow \acute{A}(5) = \acute{f}(g(5)) \times \acute{g}(5)$

$\acute{A}(5) = \acute{f}(-2) \times \acute{g}(5) \Rightarrow \acute{A}(5) = 4 \times 6 \Rightarrow \acute{A}(5) = 24$

24) إذا كان : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ، فأثبت أن $\acute{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.

$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$\acute{f}(x) = \frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)(1) - (x)\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2} \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right) - \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{x^2+1}$

$\Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{1}{(x^2+1)\left(\sqrt{x^2+1}\right)}$

$\Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{1}{(x^2+1)(x^2+1)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

بكتيريا :يمثل الاقتران : $A(t) = Ne^{0.1t}$ عدد الخلايا البكتيرية بعد t ساعة في مجتمع بكتيري :

25) أجد معدل نمو المجتمع بعد 3ساعات بدلالة الثابت N .

$A(t) = Ne^{0.1t}$

$A'(t) = 0.1Ne^{0.1t} \Rightarrow A'(3) = 0.1Ne^{0.1(3)} \Rightarrow A'(3) = 0.1Ne^{0.3}$

26) إذا كان معدل نمو المجتمع بعد k ساعة هو 0.2 خلية لكل ساعة ، فما قيمة k بدلالة الثابت N ؟

$A'(k) = 0.1Ne^{0.1(k)} \Rightarrow 0.2 = 0.1Ne^{0.1(k)} \Rightarrow \frac{0.2}{0.1N} = \frac{0.1N}{0.1N}e^{0.1(k)} \Rightarrow e^{0.1(k)} = \frac{2}{N}$

$\Rightarrow \ln e^{0.1(k)} = \ln\frac{2}{N} \Rightarrow 0.1(k) = \ln\frac{2}{N} \Rightarrow \frac{0.1(k)}{0.1} = \frac{\ln\frac{2}{N}}{0.1} \Rightarrow \boxed{k = 10\ln\frac{2}{N}}$

أجد المشتقة العليا المطلوبة في كل مما يأتي:

27) $f(x) = \sin\pi x \quad , f'''(x)$

$f'(x) = \pi\cos\pi x$

$f''(x) = -\pi\,\pi\sin\pi x \Rightarrow f''(x) = -\pi^2\sin\pi x$

$f'''(x) = -\pi^2\pi\cos\pi x \Rightarrow f'''(x) = -\pi^3\cos\pi x$

28) $f(x) = \cos(2x+1) \quad , f^{(5)}(x)$

$f'(x) = -2\sin(2x+1)$

$f''(x) = -2(2)\cos(2x+1) \Rightarrow f''(x) = -4\cos(2x+1)$

$f'''(x) = -(2) -4\sin(2x+1) \Rightarrow f'''(x) = 8\sin(2x+1)$

$f^{(4)}(x) = (2)8\cos(2x+1) \Rightarrow f^{(4)}(x) = 16\cos(2x+1)$

$f^{(5)}(x) = -(2)16\sin(2x+1) \Rightarrow f^{(5)}(x) = -32\sin(2x+1)$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

29) $f(x) = \cos x^2 \quad , f''(x)$

$f'(x) = -\sin x^2 (2x) \implies f'(x) = -2x \sin x^2$

$f''(x) = (-2x)\cos x^2\,(2x) + (\sin x^2)(-2) \implies f''(x) = -4x^4 \cos x^2 - 2\sin x^2$

30) إذا كان الاقتران : $y = e^{\sin x}$ ، فأجد ميل مماس منحنى الاقتران عند النقطة $(0\,,1)$.

$$y = e^{\sin x} \implies \frac{dy}{dx} = e^{\sin x}\cos x$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = e^{\sin 0}\cos 0 \implies = e^{0}(1) \implies = (1)(1) \implies \boxed{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 1 \quad \text{ميل المماس}}$$

31) مواد مشعة : يمكن نمذجة الكمية A (بالغرام) المتبقية من عينة كتلتها الابتدائية $20\ g$ من عنصر البلوتونيوم بعد tيوماً باستعمال الاقتران $A(t) = 20(\frac{1}{2})^{\frac{t}{140}}$ ، أجد معدل تحلل عنصر البلوتونيوم عندما $t = 2$.

$$A(t) = 20\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{140}}$$

$$A'(t) = 20\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{140}}\left(\ln\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{140}\right) \implies A'(t) = \frac{20}{140}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{140}}\left(\ln\frac{1}{2}\right)$$

$$A'(2) = \frac{20}{140}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{140}}\left(\ln\frac{1}{2}\right) \implies A'(2) = \frac{20}{140}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{140}}\left(\ln\frac{1}{2}\right)$$

$$\implies A'(2) = \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{70}}\left(\ln\frac{1}{2}\right) \implies A'(2) = 0.142 \times 0.99 \times (-0.693) \implies A'(2) \approx -0.098$$

إذن يتحلل البلوتونيوم بمعدل $0.098\ g$ كل يوم عندما $t = 2$.

زنبرك : تتحرك كرة معلقة بزنبرك إلى الأعلى وإلى الأسفل ، ويحدد الاقتران : $s(t) = 0.1\sin 2.4t$ موقع الكرة عند أي زمن لاحق ، حيث t الزمن بالثواني ، و s الموقع بالسنتميترات .

32) أجد السرعة المتجهة للكرة عندما $t = 1$.

$$s(t) = 0.1\sin 2.4t \implies v(t) = 0.1\cos 2.4t(2.4) \implies v(t) = 0.24\cos 2.4t$$

$$v(1) = 0.24\cos 2.4(1) \implies v(1) = 0.24\cos 2.4$$

$$\implies v(1) = 0.24 \times -0.737 \implies v(1) \approx -0.177\ cm/s$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

33) أجد موقع الكرة عندما تكون سرعتها صفراً .

$v(t) = 0 \implies 0.24\cos 2.4t = 0 \implies \cos 2.4t = 0$

عندما يكون $\cos\theta = 0$ فهذا يعني ان $\sin\theta$ يساوي إما 1 أو -1 .

وبتعويض قيمة $\sin 2.4t = \pm 1$ في اقتران الموقع نجد ان :

$s(t) = 0.1\sin 2.4t$

$s(1) = (0.1)(1)(1) \implies s(1) = 0.1$

$s(-1) = (0.1)(-1)(1) \implies s(-1) = -0.1$

إذن ، عندما يكون تسارع الكرة صفراً يكون موقعها عند $0.1\ cm$ أو $-0.1\ cm$

34) أجد موقع الكرة عندما يكون تسارعها صفراً .

$a(t) = 0.24 - \sin 2.4t\,(2.4) \implies a(t) = -5.76\sin 2.4t$

$a(t) = -5.76\sin 2.4t = 0 \implies \sin 2.4t = 0$

بتعويض قيمة $\sin 2.4t = 0$ في اقتران الموقع نجد :

$s(t) = 0.1\sin 2.4t \implies s(t) = 0.1(0) \implies s(t) = 0$

إذن عندما يكون تسارع الكرة صفراً يكون موقعها عند $s = 0$ ، أي عند مرور بموقع الاتزان.

أجد معادلة المماس لمنحنى كل معادلة وسيطية مما يأتي عند النقطة المحددة بقيمة t المعطاة :

$35)\quad x = t + 2 \quad , y = t^2 - 1 \, , t = 1$

$x = t + 2 \implies x = 1 + 2 \implies \boxed{x = 3}$

$y = (1)^2 - 1 \implies \boxed{y = 0}$

النقطة هي : $(3, 0)$

$y = t^2 - 1 \implies \boxed{\dfrac{dy}{dt} = 2t} \quad \Leftrightarrow \quad x = t + 2 \implies \boxed{\dfrac{dx}{dt} = 1}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \implies \frac{dy}{dx} = \frac{2t}{1} \implies \boxed{\frac{dy}{dx} = 2t}$$

$m = \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=1} = 2(1) \implies \boxed{m = 2 \quad \text{ميل المماس}}$

$y - y_1 = m(x - x_1) \implies y - 0 = 2(x - 3)$

$y - 0 = 2x - 6 \implies \boxed{y = 2x - 6 \quad \text{معادلة المماس}}$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

36) $x = \frac{t}{2} \quad , y = t^2 - 4 \, , t = -1$

$$x = \frac{t}{2} \implies \boxed{x = -\frac{1}{2}}$$

$$y = t^2 - 4 \implies y = (1)^2 - 4 \implies y = 1 - 4 \implies \boxed{y = -3}$$

نقطة التماس هي : $\boxed{(-\frac{1}{2}, -3)}$

$$\frac{dy}{dt} = 2t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \implies \frac{dy}{dx} = \frac{2t}{\frac{1}{2}} \implies \boxed{\frac{dy}{dx} = 4t}$$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=-1} = 4(-1) \implies \boxed{m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=-1} = -4 \quad \text{ميل المماس}}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-3) = -4\left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) \implies y + 3 = -4(x + \frac{1}{2})$$

$$\implies y = -4x - 2 - 3 \implies \boxed{y = -4x - 5 \quad \text{معادلة المماس}}$$

37) $x = t - \sin t \quad , y = 1 - \cos t \, , t = \frac{\pi}{3}$

$$x = t - \sin t \implies x = \frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3} \implies x = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \implies \boxed{x = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$y = 1 - \cos t \implies y = 1 - \cos\frac{\pi}{3} \implies y = 1 - \frac{1}{2} \implies \boxed{y = \frac{1}{2}}$$

نقطة التماس هي : $\boxed{(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})}$

$$\frac{dy}{dt} = -(-\sin t) \implies \frac{dy}{dt} = \sin t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{dt} = 1 - \cos t$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{\sin t}{1-\cos t}$$

$$m=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{3}}=\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{1-\cos\frac{\pi}{3}} \Rightarrow =\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{1}{2}} \Rightarrow =\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow =\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{1} \Rightarrow \boxed{m=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{3}}=\sqrt{3} \quad \text{ميل المماس}}$$

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-\frac{1}{2}=\sqrt{3}\left(x-\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \Rightarrow y-\frac{1}{2}=\sqrt{3}\left(x-\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow y-\frac{1}{2}=\sqrt{3}x-\frac{\pi}{\sqrt{3}}+\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow y=\sqrt{3}x-\frac{\pi}{\sqrt{3}}+\frac{3}{2}+\frac{1}{2} \Rightarrow y=\sqrt{3}x-\frac{\pi}{\sqrt{3}}+\frac{4}{2} \Rightarrow \boxed{y=\sqrt{3}x-\frac{\pi}{\sqrt{3}}+2 \quad \text{معادلة المماس}}$$

38) $x=\sec^2 t-1 \quad , y=\tan t \ , t=-\frac{\pi}{4}$

$$x=\sec^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)-1 \Rightarrow x=\left(-\sqrt{2}\right)^2-1 \Rightarrow x=2-1 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

$$y=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \boxed{y=-1}$$

نقطة التماس هي : $\boxed{(1,-1)}$

$$y=\tan t \Rightarrow \frac{dy}{dt}=\sec^2 t$$

$$x=\sec^2 t \Rightarrow \frac{dx}{dt}=2\sec t\sec t\tan t \Rightarrow \frac{dx}{dt}=2\sec^2 t\tan t$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{\sec^2 t}{2\sec^2 t\tan t} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\tan t} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\cot t$$

$$m=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=-\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)} \Rightarrow =\frac{1}{2(-1)} \Rightarrow \boxed{m=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=-\frac{\pi}{4}}=-\frac{1}{2} \quad \text{ميل المماس}}$$

$$y-y_1=m(x-x_1) \Rightarrow y-(-1)=-\frac{1}{2}(x-1)$$

$$\Rightarrow y+1=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \Rightarrow y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}-1 \Rightarrow \boxed{y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2} \quad \text{معادلة المماس}}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

**39) يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية : $x = 2(t - \sin t), y = 2(1 - \cos t)$ ،
حيث : $0 \le t \le 2\pi$ ، أثبت أن ميل المماس وميل العمودي على المماس لمنحنى هذه العلاقة عندما
$t = \frac{\pi}{4}$ هما : $1 + \sqrt{2}$ ، و $1 - \sqrt{2}$ على الترتيب .**

$$y = 2(1 - \cos t) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 2(-(-\sin t) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 2\sin t$$

$$x = 2(t - \sin t) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 2(1 - \cos t)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2\sin t}{2(1 - \cos t)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

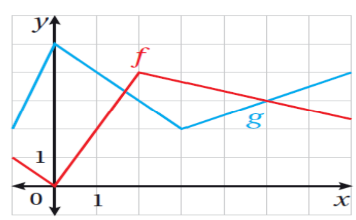
$$m = \frac{dy}{dx}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{1 - \cos\frac{\pi}{4}} \Rightarrow = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} \Rightarrow = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}} \Rightarrow = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}$$

$$\Rightarrow = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \times \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} \Rightarrow m = \frac{dy}{dx}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} + 1$$ ميل المماس

$$m_1 = -\frac{1}{m}$$ ميل العمودي المماس

$$m_1 = -\frac{1}{\sqrt{2} + 1} \Rightarrow = \frac{-1}{\sqrt{2} + 1} \times \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1} \Rightarrow = -\sqrt{2} + 1 \Rightarrow \boxed{m_1 = 1 - \sqrt{2} \quad \text{ميل العمودي المماس}}$$

**يبين الشكل المجاور منحنى الاقترانيين $f(x)$ و $g(x)$. إذا كان : $h(x) = f(g(x))$ وكان
$p(x) = g(f(x))$ ، فأجد كلا مما يأتي :**



40) $\acute{h}(1)$

$$h(x) = f\big(g(x)\big) \Rightarrow \acute{h}(x) = \acute{f}\big(g(x)\big) \times \acute{g}(x)$$

$$\Rightarrow \acute{h}(1) = \acute{f}\big(g(1)\big) \times \acute{g}(1) \Rightarrow \acute{h}(1) = \acute{f}(4) \times \acute{g}(1)$$

$\acute{f}(1)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(5,3)$ و $(2,4)$ ويساوي $-\frac{1}{3}$

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow m = \frac{3 - 4}{5 - 2} \Rightarrow m = \frac{-1}{3}$$

$\acute{g}(1)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(3,2)$ و $(0,5)$ ويساوي -1

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

$$m=\frac{y-y_1}{x-x_1} \Rightarrow m=\frac{2-5}{3-0} \Rightarrow m=\frac{-3}{3} \Rightarrow m=-1$$

$$\acute{h}(1)=\acute{f}(4)\times\acute{g}(1) \Rightarrow \acute{h}(1)=\frac{-1}{3}\times -1 \Rightarrow \acute{h}(1)=\frac{1}{3}$$

41) $\acute{p}(1)$

$$\acute{p}(x)=\acute{g}(f(x))\times\acute{f}(x) \Rightarrow \acute{p}(1)=\acute{g}(f(1))\times\acute{f}(1) \Rightarrow \acute{p}(1)=\acute{g}(2)\times\acute{f}(1)$$

$\acute{g}(2)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(3,2)$ و $(0,5)$ ويساوي -1

$$m=\frac{y-y_1}{x-x_1} \Rightarrow m=\frac{2-5}{3-0} \Rightarrow m=\frac{-3}{3} \Rightarrow m=-1$$

$\acute{f}(4)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(0,0)$ و $(2,4)$ ويساوي 2

$$m=\frac{y-y_1}{x-x_1} \Rightarrow m=\frac{0-4}{0-2} \Rightarrow m=\frac{-4}{-2} \Rightarrow m=2$$

$$\acute{h}(1)=\acute{f}(4)\times\acute{g}(1) \Rightarrow \acute{h}(1)=2\times -1 \Rightarrow \acute{h}(1)=-2$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

مهارات التفكير العليا: (صفحة121)

تبرير : إذا كان الاقتران : $y=\ln(ax+b)$ ، حيث a و b ثابتان موجبان ، وكان ميل المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة P هو 1 ، فأجب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

42) أثبت أن الإحداثي x للنقطة p أقل من 1 .

$$y=\ln(ax+b) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{a}{ax+b}$$

ليكن إحداثيا P هما (x_1,y_1) فيكون ميل المماس عند P هو :

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_1}=\frac{a}{ax_1+b} \Rightarrow \frac{a}{ax_1+b}=1 \Rightarrow ax_1+b=a \Rightarrow ax_1=a-b$$

$$\frac{ax_1}{a}=\frac{a-b}{a} \Rightarrow x_1=\frac{a-b}{a} \Rightarrow x_1=1-\frac{b}{a}$$

المقدار $(1-\frac{b}{a})$ أقل من 1 لأن $\frac{b}{a}$ مقدار موجب كون a,b موجبين .

إذن الإحداثي x للنقطة P أقل من 1

43) أجد قيمة كل من a و b ، علماً بأن P هي النقطة $(0,2)$ ، ثم أبرر إجابتي .

$$y = f(x) = \ln(ax+b)$$

$$y' = f'(x) = \frac{a}{ax+b} \implies f'(0) = \frac{a}{a(0)+b} \implies f'(0) = \frac{a}{b}$$

ميل المماس عند النقطة $P(0,2)$ يساوي 1 أي أن : $f'(0) = 1$

$$\frac{a}{b} = 1 \implies a = b$$

$$f(x) = \ln(ax+b) \implies f(0) = \ln(a(0)+b) \implies f(0) = \ln b$$

$$\ln b = 2 \implies b = e^2 \implies \boxed{a = b = e^2}$$

معتصم ابراهيم

44) أجد إحداثيي النقطة التي يكون عندها ميل المماس $\frac{1}{2}$

افترض ان النقطة التي ميل المماس عندها يساوي $\frac{1}{2}$ هي (x_1, y_1)

بتعويض قيمة كل من a و b نجد أن :

$$f(x) = \ln(ax+b) \implies = \ln(e^2x + e^2) \implies = \ln\left(e^2(x+1)\right) \implies f(x) = 2 + \ln(x+1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} \implies f'(x_1) = \frac{1}{x_1+1}$$

$$\frac{1}{x_1+1} = \frac{1}{2} \implies x_1 + 1 = 2 \implies x_1 = 2 - 1 \implies \boxed{x_1 = 1}$$

$$y_1 = f(x_1)$$

$$f(1) = \ln(e^2(1) + e^2) \implies f(1) = \ln(e^2 + e^2)$$

$$\implies f(1) = \ln(2e^2) \implies f(1) = \ln 2 + \ln e^2 \implies f(1) = \ln 2 + 2$$

إذن النقطة التي ميل المماس عندها يساوي $\frac{1}{2}$ هي $(1, \ln 2 + 2)$

تبرير : يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية : $y = 2t$ ، $x = t^2$.

45) أجد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة t .

$$y = 2t \quad \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 2$$

$$x = t^2 \quad \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 2t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2}{2t} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{t}$$

46) أجد معادلة العمودي على مماس المنحنى عند النقطة $(t^2, 2t)$.

$\boxed{m = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{t} \quad \text{ميل المماس}}$

$m_1 = -\frac{1}{m}$ ميل العمودي على المماس

$m_1 = -\frac{1}{\frac{1}{t}} \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{1} \times \frac{t}{1} \Rightarrow$ $\boxed{m_1 = -t \quad \text{ميل العمودي على المماس}}$

$y - y_1 = m_1(x - x_1)$ معادلة العمودي على المماس

$y - 2t = -t(x - t^2) \Rightarrow y - 2t = -tx + t^3$

$\boxed{y = -tx + t^3 + 2t \quad \text{معادلة العمودي على المماس}}$

47) أثبت أن مساحة المثلث المكون من العمودي على المماس، والمحورين الإحداثيين، هي $\frac{1}{2}|t|\ (2 + t^2)^2$.

لإيجاد المقطع x للعمودي على المماس نضع $y = 0$ في معادلته .

$$0 = -tx + t^3 + 2t \quad \Rightarrow tx = t^3 + 2t \quad \Rightarrow x = \frac{t^3 + 2t}{t} \quad \Rightarrow x = t^2 + 2$$

لإيجاد المقطع y للعمودي على المماس نضع $x = 0$ في معادلته .

$$y = -t(0) + t^3 + 2t \quad \Rightarrow y = t^3 + 2t$$

مساحة المثلث:

$$A = \frac{1}{2} \times x \times y \quad \Rightarrow A = \frac{1}{2} \times |t^2 + 2| \times |t^3 + 2t|$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} \times |(t^2 + 2)| \times |t(t^2 + 2)| \quad \Rightarrow A = \frac{1}{2} \times |t||(t^2 + 2)^2|$$

تحد : أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

48) $y = \sqrt{\sin\sqrt{x}}$

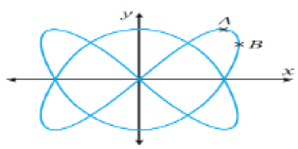
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos\sqrt{x}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{\sin\sqrt{x}}} \Longrightarrow\ = \cos\sqrt{x}\,\frac{1}{2\sqrt{x}} \times \frac{1}{2\sqrt{\sin\sqrt{x}}} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\sqrt{\sin\sqrt{x}}}$$

49) $y = e^x \sin^2 x \cos x$

$$y = (e^x \sin^2 x)(-\sin x) + (\cos x)\Big((e^x)(2\sin x\cos x) + (\sin^2 x)(e^x)\Big)$$

$$y = -e^x\sin^3 x + 2e^x\cos^2 x\sin x + e^x\cos x\sin^2 x$$

تحد: يبين الشكل المجاور منحنى المعادلة الوسيطية:



$x = \sin 2t \qquad y = \sin 3t \qquad 0 \le t \le 2\pi$

50) إذا كان مماس منحنى المعادلة أفقياً عند النقطة A الواقعة في الربع الأول ، فأجد إحداثيي A .

$$y = \sin 3t \Longrightarrow \frac{dy}{dt} = 3\cos 3t$$

$$x = \sin 2t \Longrightarrow \frac{dx}{dt} = \cos 2t\,(2) \Longrightarrow \frac{dx}{dt} = 2\cos 2t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = 0 \Longrightarrow \frac{3\cos 3t}{2\cos 2t} = 0$$

$$3\cos 3t = 0 \Longrightarrow \cos 3t = 0 \Longrightarrow 3t = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \boxed{t = \frac{\pi}{6}}$$

$$x = \sin 2\left(\frac{\pi}{6}\right) \Longrightarrow x = \sin\frac{\pi}{3} \Longrightarrow \boxed{x = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$y = \sin 3\left(\frac{\pi}{6}\right) \Longrightarrow y = \sin\frac{\pi}{2} \Longrightarrow \boxed{y = 1}$$

إذن إحداثيا A هما $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$.

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

51) إذا كان مماس المنحنى موازياً للمحور y عند النقطة B ، فأجد إحداثيي B .

عند النقطة B يكون المماس موازياً لمحور y ، أي أن ميله غير معرف ، ومنه يكون :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3\cos 3t}{2\cos 2t} = \text{غير معرف}$$

$$\therefore \ 2\cos 2t = 0 \implies \cos 2t = 0 \implies 2t = \frac{\pi}{2} \implies t = \frac{\pi}{4}$$

$$x = \sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right) \implies x = \sin\frac{\pi}{2} \implies \boxed{x = 1}$$

$$y = \sin 3\left(\frac{\pi}{4}\right) \implies y = \sin\frac{3\pi}{4} \implies \boxed{y = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

إذن إحداثيا B هما $\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

52) إذا مر فرعان من المنحنى بنقطة الأصل كما هو موضح في الشكل ، فأجد ميل المماس لكل منهما عند هذه النقطة .

أي أن : $\sin 2t = 3\cos 3t = 0$

تتحقق هاتان المعادلتان معاً عندما $t = 0$ ، وعندها يكون ميل المماس :

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0} = \frac{3\cos 3(0)}{2\cos 2(0)} \implies = \frac{3\cos 0}{2\cos 0} \implies = \frac{3(1)}{2(1)} \implies m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0} = \frac{3}{2}$$

كما تتحققان أيضاً عندما $t = \pi$ ، وعندها يكون ميل المماس :

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\pi} = \frac{3\cos 3\pi}{2\cos 2\pi} \implies = \frac{3\cos\pi}{2\cos 0} \implies = \frac{3(-1)}{2(1)} \implies m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\pi} = \frac{-3}{2}$$

تبرير : يمثل الاقتران : $s(t) = \ln(t^2 - 2t + 1.9)\ , t \geq 0$ موقع جسيم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار ، و t الزمن بالثواني :

53) أجد سرعة الجسيم المتجهة وتسارعه بعد t ثانية .

$$s(t) = \ln(t^2 - 2t + 1.9)$$

$$v(t) = \frac{2t - 2}{t^2 - 2t + 1.9}$$

$$a(t) = \frac{(t^2 - 2t + 1.9)(2) - (2t - 2)(2t - 2)}{(t^2 - 2t + 1.9)^2}$$

$$a(t) = \frac{2t^2 - 4t + 3.8 - 4t^2 + 4t + 4t - 4}{(t^2 - 2t + 1.9)^2}$$

$$a(t) = \frac{-2t^2 + 4t - 0.2}{(t^2 - 2t + 1.9)^2}$$

54) أجد موقع الجسيم وتسارعه عندما تكون سرعته صفراً .

$$v(t) = \frac{2t - 2}{t^2 - 2t + 1.9} = 0$$

$$2t - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2t = 2 \quad \Rightarrow \quad t = 1$$

$$s(1) = \ln((1)^2 - 2(1) + 1.9) \Rightarrow = \ln(1 - 2 + 1.9) \Rightarrow s(1) = \ln 0.9\ m$$

$$a(1) = \frac{-2(1)^2 + 4(1) - 0.2}{((1)^2 - 2(1) + 1.9)^2} \quad \Rightarrow \quad a(1) = \frac{-2 + 4 - 0.2}{(1 - 2 + 1.9)^2}$$

$$a(1) = \frac{1.8}{(0.9)^2} \quad \Rightarrow \quad a(1) = \frac{1.8}{0.81} \quad \Rightarrow \quad a(1) \approx 2.2\ m/s^2$$

55) متى يعود الجسيم إلى موقعه الابتدائي؟

$$s(0) = \ln((0)^2 - 2(0) + 1.9) \Rightarrow s(0) = \ln(1.9)$$ الموقع الابتدائي

$$s(t) = \ln(1.9) = \ln(t^2 - 2t + 1.9)$$

$$1.9 = t^2 - 2t + 1.9 \quad \Rightarrow \quad t^2 - 2t + 1.9 - 1.9 = 0$$

$\Rightarrow t^2 - 2t = 0 \Rightarrow t(t - 2) = 0 \Rightarrow t - 2 = 0$ إما $\boxed{t = 2}$ أو $\boxed{t = 0}$

يعود الجسيم إلى موقعه الابتدائي بعد ثانيتين من بدء حركته.

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

كتاب التمارين

الدرس الثالث

قاعدة السلسلة

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = 100e^{-0.1x}$

$\acute{f}(x) = (100)e^{-0.1x}(-0.1) \implies \acute{f}(x) = -10e^{-0.1x}$

2) $f(x) = \sin(x^2 + 2)$

$\acute{f}(x) = \cos(x^2 + 2).(2x) \implies \acute{f}(x) = 2x\cos(x^2 + 2)$

3) $f(x) = \cos^2 x$

$\acute{f}(x) = (2\cos x)(-\sin x)(1)$

$\acute{f}(x) = -2\cos x \sin x$

$\boxed{\text{قانون نصف الزاوية} \quad \sin 2x = 2\sin x \cos x}$

$\acute{f}(x) = -\sin 2x$

4) $f(x) = \cos 2x - 2\cos x$

$\acute{f}(x) = (-\sin 2x).(2) - 2(-\sin x)(1) \implies \acute{f}(x) = -2\sin 2x + 2\sin x$

5) $f(x) = \log_3 \dfrac{x\sqrt{x-1}}{2}$

$f(x) = \log_3 \dfrac{x(x-1)^{\frac{1}{2}}}{2} \implies f(x) = \log_3 x + \dfrac{1}{2}\log_3(x-1) - \log_3 2$

$\acute{f}(x) = \dfrac{1}{x\ln 3} + \dfrac{1}{2\,(x-1)\ln 3} - 0 \implies \acute{f}(x) = \dfrac{1}{x\ln 3} + \dfrac{1}{2\,x\ln 3 - 2\ln 3}$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

$$6)\quad f(x) = 2\cot^2(\pi x + 2)$$

$$\acute{f}(x) = (2)2\cot(\pi x + 2) - \csc^2(\pi x + 2)\,(\pi)$$

$$\acute{f}(x) = -4\pi\cot(\pi x + 2)\csc^2(\pi x + 2)$$

$$7)\quad f(x) = \log 2x$$

$$\acute{f}(x) = \frac{2}{2x\ln 10} \quad \Longrightarrow \quad \acute{f}(x) = \frac{1}{x\ln 10}$$

$$8)\quad f(x) = \ln(x^3 + 2)$$

$$\acute{f}(x) = \frac{3x^2}{x^3 + 2}$$

$$9)\quad f(x) = \left(\frac{x^2}{x^3 + 2}\right)^2$$

$$\acute{f}(x) = (2)\left(\frac{x^2}{x^3 + 2}\right) \times \left(\frac{(x^3 + 2).(2x) - (x^2).(3x^2)}{(x^3 + 2)^2}\right)$$

$$\acute{f}(x) = \frac{2x^2}{x^3 + 2} \times \frac{2x^4 + 4x - 3x^4}{(x^3 + 2)^2} \Longrightarrow = \frac{2x^2}{x^3 + 2} \times \frac{4x - x^4}{(x^3 + 2)^2} \Longrightarrow \acute{f}(x) = \frac{8x^3 - 2x^6}{(x^3 + 2)^3}$$

$$10)\quad f(x) = x^2\sqrt{20 - x}$$

$$\acute{f}(x) = (x^2).\frac{-1}{2\sqrt{20 - x}} + \sqrt{20 - x}.(2x) \quad \Longrightarrow = \frac{-x^2}{2\sqrt{20 - x}} + 2x\sqrt{20 - x}$$

$$\Longrightarrow = \frac{-x^2}{2\sqrt{20 - x}} + \frac{2x\sqrt{20 - x}.\left(2\sqrt{20 - x}\right)}{1.\left(2\sqrt{20 - x}\right)} \quad \Longrightarrow = \frac{-x^2}{2\sqrt{20 - x}} + \frac{4x(20 - x)}{2\sqrt{20 - x}}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

$$\Rightarrow = \frac{-x^2}{2\sqrt{20-x}} + \frac{80x-4x^2}{2\sqrt{20-x}} \quad \Rightarrow \quad \acute{f}(x) = \frac{80x-5x^2}{2\sqrt{20-x}}$$

11) $f(x) = \dfrac{\sin(2x+1)}{e^{x^2}}$

$$\acute{f}(x) = \frac{e^{x^2}\cos(2x+1)(2) - \sin(2x+1)2xe^{x^2}}{\left(e^{x^2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow = \frac{2e^{x^2}\cos(2x+1) - 2xe^{x^2}\sin(2x+1)}{e^{2x^2}} \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{2\cos(2x+1) - 2x\sin(2x+1)}{e^{x^2}}$$

12) $f(x) = 3^{\cot x}$

$$\acute{f}(x) = 3^{\cot x}(-\csc^2 x)\ln 3 \quad \Rightarrow \quad \acute{f}(x) = -3^{\cot x}\ln 3 \csc^2 x$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

أجد معادلة المماس لكل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة :

13) $f(x) = 2\sin 5x - 4\cos 3x \quad , x = \dfrac{\pi}{2}$

1) الخطوة الاولى: ايجاد النقطة

$$f(x) = 2\sin 5(\frac{\pi}{2}) - 4\cos 3(\frac{\pi}{2}) \quad \Rightarrow = 2(1) - 4(0) \quad \Rightarrow \quad f(x) = 2$$

النقطة هي : $\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$

2) الخطوة الثانية: ايجاد ميل المماس

$$f(x) = 2\sin 5x - 4\cos 3x$$

$$\acute{f}(x) = 2\cos 5x(5) - 4(-\sin 3x)(3) \Rightarrow \acute{f}(x) = 10\cos 5x + 12\sin 3x$$

$$\acute{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 10\cos 5\left(\frac{\pi}{2}\right) + 12\sin 3\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad = 10\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) + 12\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow = 10\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) + 12\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad = 10\cos(\pi) + 12\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

$\Longrightarrow = 10\,(0) + 12\,(-1) \;\; \Longrightarrow$ $\boxed{\acute{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -12 \quad \text{ميل المماس}}$

3) الخطوة الثالثة: إيجاد معادلة المماس

معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 2 = -12\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \;\Longrightarrow\; y - 2 = -12x + 6\pi \;\Longrightarrow\; \boxed{y = -12x + 6\pi + 2}$

14) $f(x) = (x^2 + 2)^3 \quad , x = -1$

1) الخطوة الاولى: ايجاد النقطة

$f(-1) = ((-1)^2 + 2)^3 \;\Longrightarrow\; = (1 + 2)^3 \;\Longrightarrow\; = (3)^3 \;\Longrightarrow\; f(-1) = 27$

النقطة هي : $(-1, 27)$

2) الخطوة الثانية: ايجاد ميل المماس

$f(x) = (x^2 + 2)^3$

$\acute{f}(x) = 3(x^2 + 2)^2(2x) \Longrightarrow \; \acute{f}(x) = 6x(x^2 + 2)^2$

$\acute{f}(-1) = 6(-1)((-1)^2 + 2)^2 \;\Longrightarrow = -6(3)^2 \;\Longrightarrow = -6(9) \;\Longrightarrow\; \acute{f}(-1) = -54$

3) الخطوة الثالثة: إيجاد معادلة المماس

معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 27 = -54(x - (-1)) \;\Longrightarrow\; y - 27 = -54(x + 1)$

$\Longrightarrow\; y - 27 = -54x - 54 \;\Longrightarrow\; y = -54x - 54 + 27 \;\Longrightarrow\; y = -54x - 27$

15) $f(x) = \tan 3x \quad , x = \frac{\pi}{4}$

1) الخطوة الاولى: ايجاد النقطة

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan 3\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$ النقطة هي $\left(\frac{\pi}{4}, -1\right)$

2) الخطوة الثانية: ايجاد ميل المماس

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

$\acute{f}(x) = \sec^2 3x.(3) \implies \acute{f}(x) = 3\sec^2 3x$

$\acute{f}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\sec^2 3\left(\frac{\pi}{4}\right) \implies \acute{f}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3(-\sec\frac{\pi}{4})^2$

$\acute{f}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3(-\sqrt{2})^2$ ملاحظة $\boxed{\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}}$

$\acute{f}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3(2) = 6$

3) الخطوة الثالثة: إيجاد معادلة المماس

$y - y_1 = m(x - x_1)$ معادلة المماس:

$y - (-1) = 6\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \implies y + 1 = 6x - \frac{3\pi}{2}$

$\implies y = 6x - \frac{3\pi}{2} - 1 \implies y = 6x - \frac{3\pi + 2}{2}$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

إذا كان الاقتران : $f(x) = 3\sin x - \sin^3 x$ ، فأجب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

16) أثبت أن $\acute{f}(x) = 3\cos^3 x$.

$f(x) = 3\sin x - \sin^3 x$

$\acute{f}(x) = 3(\cos x).(1) - (3\sin^2 x).(\cos x).(1)$

$\implies \acute{f}(x) = 3\cos x - 3\sin^2 x \cos x \implies \acute{f}(x) = 3\cos x(1 - \sin^2 x)$

$\implies \acute{f}(x) = 3\cos x(\cos^2 x) \implies \acute{f}(x) = 3\cos^3 x$

17) أجد و $\acute{\acute{f}}(x)$.

$\acute{f}(x) = 3\cos^3 x$

$\acute{\acute{f}}(x) = 3(3)\cos^2 x . -\sin x\,(1) \implies \acute{\acute{f}}(x) = -9\cos^2 x . \sin x$

18) يعطي منحنى بالمعادلة الوسيطية: $x = a\cos t\ , y = b\sin t$ ، حيث :
$0 \le t \le 2\pi$. أجد المقطع y لمماس المنحنى عندما $t = \frac{\pi}{4}$ بدلالة a و b .

1) الخطوة الاولى: ايجاد النقطة

$$x = a\cos(\frac{\pi}{4}) \quad \Rightarrow x = a\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$y = b\sin(\frac{\pi}{4}) = b\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

النقطة هي : $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$

2) الخطوة الثانية: ايجاد ميل المماس

$$y = b\sin t \Rightarrow \frac{dy}{dt} = b\cos t$$

$$x = a\cos t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -a\sin t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\cot t$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{b}{a}\cot\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{b}{a}(1) \Rightarrow \boxed{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{b}{a}}$$ ميل المماس

3) الخطوة الثالثة: ايجاد معادلة المماس:

$y - y_1 = m(x - x_1)$ معادلة المماس:

$$y - \frac{b}{\sqrt{2}} = -\frac{b}{a}\left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow y - \frac{b}{\sqrt{2}} = -\frac{b}{a}x + \frac{b}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{b}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow y = -\frac{b}{a}x + \frac{\sqrt{2}\,b}{2} + \frac{\sqrt{2}\,b}{2}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{b}{a}x + \frac{2\sqrt{2}\,b}{2} \quad \Rightarrow y = -\frac{b}{a}x + \sqrt{2}\,b$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

إذا كان الاقتران : $y = e^{ax}$ ، حيث a ثابت، و$a > 0$ ، فأجب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

19) أجد إحداثيي النقطة P التي تقع على منحنى الاقتران ، ويكون ميل المماس عندها 1 .

1) الخطوة الأولى : نشتق الاقتران $y = e^{ax}$ ثم نساوي المشتقة بالميل وهو 1 لإيجاد قيمة x

$$y = e^{ax} \implies \frac{dy}{dx} = ae^{ax}$$

$$ae^{ax} = 1 \implies \frac{ae^{ax}}{a} = \frac{1}{a} \implies e^{ax} = \frac{1}{a}$$

$$\implies \ln e^{ax} = \ln\frac{1}{a} \implies ax.(1) = \ln\frac{1}{a} \implies ax = \ln 1 - \ln a \implies ax = 0 - \ln a$$

$$\implies ax = -\ln a \implies \frac{ax}{a} = \frac{-\ln a}{a} \implies \boxed{x = \frac{-\ln a}{a}}$$

2) الخطوة الثانية: نعوض قيمة $x = \frac{-\ln a}{a}$ في الاقتران لإيجاد قيمة y

$$y = e^{a\left(\frac{-\ln a}{a}\right)} \implies y = e^{-\ln a} \implies y = (e^{\ln a})^{-1} \implies y = a^{-1} \implies \boxed{y = \frac{1}{a}}$$

إذن النقطة هي : $P\left(\frac{-\ln a}{a}, \frac{1}{a}\right)$

20) أثبت أنه يمكن كتابة معادلة العمودي على المماس عند النقطة P في صورة : $x + y = k$ ، ثم أجد قيمة الثابت k .

1) الخطوة الأولى: إيجاد ميل العمودي على المماس:

بما أن ميل المماس هو 1 فإن ميل العمودي على المماس هو (- مقلوب ميل المماس) $m_1 = -1$

2) الخطوة الثانية: إيجاد معادلة العمودي على المماس:

معادلة المماس: $y - y_1 = m_1(x - x_1)$

$$y - \frac{1}{a} = -1\left(x - \frac{-\ln a}{a}\right) \implies y - \frac{1}{a} = -x - \frac{\ln a}{a} \implies \boxed{y = -x - \frac{\ln a}{a} + \frac{1}{a}}$$

3) الخطوة الثالثة : كتابة معادلة العمودي على المماس عند النقطة P في صورة : $x + y = k$:

$$x + y = k$$

$$y = -x - \frac{\ln a}{a} + \frac{1}{a} \implies \boxed{y + x = -\frac{\ln a}{a} + \frac{1}{a}}$$

4) الخطوة الرابعة : إيجاد قيمة الثابت k :

$$k = -\frac{\ln a}{a} + \frac{1}{a} \implies \boxed{k = \frac{1 - \ln a}{a}}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

21) إذا كان الاقتران : $h(x)=\sqrt{4+3f(x)}$ ، وكان : $f'(1)=4$ ، وكان : $f(1)=7$ فأجد $h'(1)$.

$$h(x)=\sqrt{4+3f(x)}$$

$$h'(x)=\frac{(3f'(x))}{2\sqrt{4+3f(x)}} \implies h'(1)=\frac{(3f'(1))}{2\sqrt{4+3f(1)}}$$

$$\implies h'(1)=\frac{3(4)}{2\sqrt{4+3(7)}} \implies h'(1)=\frac{12}{2\sqrt{25}} \implies h'(1)=\frac{6}{5}$$

22) إذا كان الاقتران : $f(x)=e^{2x}+e^{-2x}$ فأثبت أن $f''(x)=4f(x)$.

$$f(x)=e^{2x}+e^{-2x}$$

$$f'(x)=(2)e^{2x}+(-2)e^{-2x} \implies f'(x)=2e^{2x}-2e^{-2x}$$

$$\implies f''(x)=(2)2e^{2x}-(-2)2e^{-2x} \implies f''(x)=4e^{2x}+4e^{-2x}$$

$$\implies f''(x)=4(e^{2x}+e^{-2x}) \implies f''(x)=4f(x)$$

23) إذا كان : $f(x)=\sin 4x+\cos 4x$ ، فأثبت أن $f''(x)+16f(x)=0$.

$$f(x)=\sin 4x+\cos 4x$$

$$f'(x)=\cos 4x(4)+-\sin 4x\,(4) \implies f'(x)=4\cos 4x-4\sin 4x$$

$$f''(x)=4-\sin 4x(4)-4\cos 4x(4) \implies f''(x)=-16\sin 4x-16\cos 4x$$

$$\implies f''(x)=-16(\sin 4x+\cos 4x) \implies f''(x)=-16f(x)$$

اثبات $f''(x)+16f(x)=0$

$$f''(x)+16f(x)=0 \implies \boxed{-16f(x)+16f(x)=0}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٧٧٨٠٨

يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية: $y = 2\cos\theta$, $x = \sin^2\theta$ ، حيث : $0 \le \theta \le 2\pi$:

24) أجد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة θ .

$$y = 2\cos\theta \implies \frac{dy}{d\theta} = -2\sin\theta$$

$$x = \sin^2\theta \implies \frac{dx}{d\theta} = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2\sin\theta}{2\sin\theta\cos\theta} \implies \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\cos\theta} \implies \boxed{\frac{dy}{dx} = -\sec\theta}$$

25) أجد معادلة المماس عندما يكون الميل $\sqrt{2}$.

1) الخطوة الأولى: مساواة المشتقة مع الميل

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{2} \implies \boxed{-\sec\theta = \sqrt{2}}$$

2) الخطوة الثانية : ايجاد قيم : y, x

$$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

قانون $\boxed{\cos x = \frac{1}{\sec x}}$

$$y = 2\cos\theta \implies y = 2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \implies y = \sqrt{2}.\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \implies y = \sqrt{2}(-1) \implies \boxed{y = -\sqrt{2}}$$

$$x = \sin^2\theta$$

قاعدة $\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$

قاعدة $\boxed{\sin^2 x = 1 - \cos^2 x}$

$$\sin^2\theta = 1 - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\implies \sin^2\theta = 1 - \frac{1}{2} \implies \sin^2\theta = 1 - \frac{1}{2} \implies \sin^2\theta = \boxed{x = \frac{1}{2}}$$

3) الخطوة الثالثة: إيجاد معادلة العمودي على المماس:

معادلة المماس: $y - y_1 = m_1(x - x_1)$

$$y - (-\sqrt{2}) = \sqrt{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) \implies y + \sqrt{2} = \sqrt{2}x - (\sqrt{2}.\frac{1}{2})$$

$$\implies y + \sqrt{2} = \sqrt{2}x - \left(\sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{2}.\sqrt{2}}\right) \implies y + \sqrt{2} = \sqrt{2}x - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\implies y = \sqrt{2}x - \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \implies y = \sqrt{2}x - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} \implies \boxed{y = \sqrt{2}x - \frac{3}{\sqrt{2}}}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

26) أجد النقطة التي يكون عندها المماس موازياً للمحور y .

يكون المماس موازياً للمحور y عندما يكون $\frac{dy}{dx}$ غير معرف ، أي عندما يكون $\cos\theta = 0$

عندها يتم إيجاد قيم y و x على ان $\cos\theta = 0$

$$\sin^2\theta = 1 - (0)^2 \Rightarrow \boxed{x = \sin^2\theta = 1} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \quad \text{قاعده}}$$

$$y = 2\cos\theta \Rightarrow \boxed{y = 2 \times 0 = 0}$$

إذن النقطة هي : $(1, 0)$

27) سيارة : يمثل الاقتران $v(t) = 15te^{-0.05t^2}$ السرعة المتجهة (بالمتر لكل ثانية) لسيارة تتحرك في مسار مستقيم ، حيث : $0 \le t \le 10$. أجد السرعة المتجهة للسيارة عندما يكون تسارعها صفراً .

$$v(t) = 15te^{-0.05t^2}$$

$$a(t) = 15\left(\left(t.\left(e^{-0.05t^2}\right).(-0.1t) + \left(e^{-0.05t^2}\right).(1)\right)\right)$$

$$\Rightarrow a(t) = -1.5t^2e^{-0.05t^2} + 15e^{-0.05t^2} \Rightarrow a(t) = 15e^{-0.05t^2}(1 - 0.1t^2)$$

$$\Rightarrow a(t) = 0 \Rightarrow 15e^{-0.05t^2}(1 - 0.1t^2) = 0 \Rightarrow \frac{15e^{-0.05t^2}}{15e^{-0.05t^2}}(1 - 0.1t^2) = \frac{0}{15e^{-0.05t^2}}$$

$$\Rightarrow 1 - 0.1t^2 = 0 \Rightarrow 0.1t^2 = 1 \Rightarrow \frac{0.1t^2}{0.1} = \frac{1}{0.1} \Rightarrow t^2 = 10$$

$$\Rightarrow \sqrt{t^2} = \sqrt{10} \Rightarrow t = \sqrt{10}$$

$$v(\sqrt{10}) = 15\sqrt{10}e^{-0.05(\sqrt{10})^2} \Rightarrow v(\sqrt{10}) = 15\sqrt{10}e^{-0.5}$$

$$\Rightarrow v(\sqrt{10}) = \frac{15\sqrt{10}}{e^{0.5}} \Rightarrow v(\sqrt{10}) = \frac{15\sqrt{10}}{\sqrt{e}} \quad m/s$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

أجد $(fo\acute{g})(x)$ عند قيمة x المعطاة في كل مما يأتي :

28) $f(u) = u^5 + 1 \quad , u = g(x) = \sqrt{x} \ , \quad x = 1$

$\acute{f}(u) = 5u^4 \implies \acute{f}(u) = 5\left(\sqrt{1}\right)^4$

$\acute{g}(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$(fog)(x) = f[g(x)] = f[\sqrt{1}] \implies (fog)(x) = \left(\sqrt{x}\right)^5 + 1$

$\implies (fog)(x) = x^{\frac{5}{2}} + 1 \implies (fo\acute{g}) = \dfrac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$

$(fo\acute{g})(x) = \acute{f}(u) \times \acute{g}(x) \implies (fo\acute{g})(x) = \acute{f}(g(x)) \times \acute{g}(x)$

$\implies \left(fo\acute{g}\right)(x) = \acute{f}\left(g(1)\right) \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$\implies \left(fo\acute{g}\right)(1) = \acute{f}(1) \times \dfrac{1}{2\sqrt{1}} \implies \left(fo\acute{g}\right)(1) = \acute{f}(1) \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2}$

29) $f(u) = u + \dfrac{1}{\cos^2 u} \quad , u = g(x) = \pi x \ , x = \dfrac{1}{4}$

$f(u) = u + \sec^2 u$

$\acute{f}(u) = 1 + 2\sec u \sec u \tan u \implies \acute{f}(u) = 1 + 2\sec^2 u \tan u$

$u = g(x) = \pi x$

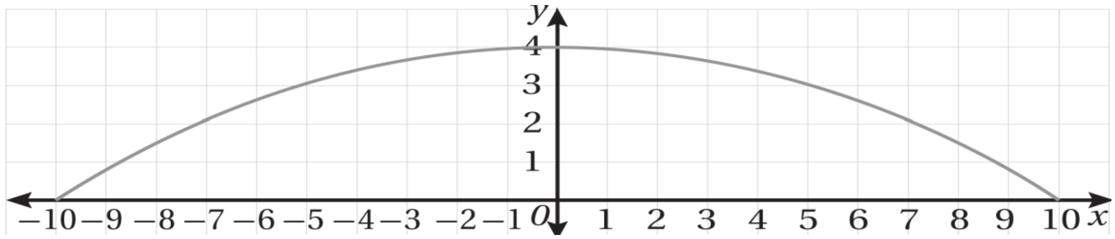
$\acute{g}(x) = \pi$

$(fo\acute{g})(x) = \acute{f}(u) \times \acute{g}(x) \implies (fo\acute{g})(x) = \acute{f}(g(x)) \times \acute{g}(x)$

$\implies \left(fo\acute{g}\left(\dfrac{1}{4}\right) = \acute{f}\left(g\left(\dfrac{1}{4}\right)\right) \times \acute{g}\left(\dfrac{1}{4}\right) \implies = \acute{f}\left(\dfrac{\pi}{4}\right) \times \pi \implies (fo\acute{g})(\dfrac{1}{4}) = 5\pi\right.$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

مرور: يبين التمثيل البياني المجاور شكل مطب سرعة صمم للتخفيف من سرعة السيارات على أحد الطرق. وفيه يمثل المحور x سطح الأرض ، وتقاس جميع الأطوال بالسنتيمترات .



إذا كانت المعادلة الوسيطية التي تمثل منحنى المطب هي:

$x = 10\sin t$, $y = 2 + 2\cos 2t$ ، حيث $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$ ، فأجد كلا ما يأتي :

30) ميل المماس لمنحنى المطب بدلالة t .

$$y = 2 + 2\cos 2t$$

$$\frac{dy}{dt} = 2(-\sin 2t)(2) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -4\sin 2t$$

$$x = 10\sin t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 10\cos t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-4\sin 2t}{10\cos t} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-2\sin 2t}{5\cos t}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4\sin t\cos t}{5\cos t} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{4\sin t}{5}$$

قاعدة $\sin 2x = 2\sin x\cos x$

31) قيمة t عند أعلى نقطة على منحنى المطب .

يكون المماس عند اعلى نقطة في المنحنى المعطى أفقيا، إذن ميله يساوي صفر.

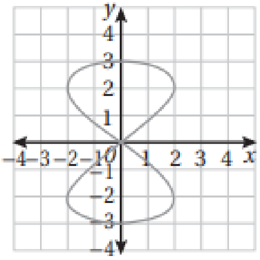
$$\frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow \sin t = 0 \Rightarrow t = 0$$

أو أن قيمة x عند أعلى نقطة تساوي صفر ، إذن

$$x = 10\sin t \Rightarrow 10\sin t = 0 \Rightarrow t = 0$$

أو أن قيمة y عند أعلى نقطة تساوي 4 ، إذن

$$y = 2 + 2\cos 2t \Rightarrow 2 + 2\cos 2t = 4 \Rightarrow 2\cos 2t = 2 \Rightarrow \cos 2t = 1 \Rightarrow t = 0$$



32) تبرير: يبين الشكل المجاور منحنى المعادلة الوسيطية:

$$x = 2\sin 2t \qquad , y = 3\cos t \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

أجد ميل المماس لكل من فرعي المعادلة عند نقطة الأصل، مبررا ً إجابتي.

1) الخطوة الأولى: إيجاد النقطة، من السؤال نقطة الأصل وهي: (0,0)

2) الخطوة الثانية: ايجاد ميل المماس

$$y = 3\cos t \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} = -3\sin t$$

$$x = 2\sin 2t \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = 2\cos 2t\,(2) \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = 4\cos 2t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-3\sin t}{4\cos 2t}$$

$$(x, y) = (0, 0) \quad \Rightarrow \quad (x, y) = (2\sin 2t\,, 3\cos t)$$

$$\Rightarrow \quad 2\sin 2t = 0 \Rightarrow \quad \sin 2t = 0 \quad \Rightarrow t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$$

$$3\cos t = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

يتحقق الشرطان معاً عندما $t = \frac{\pi}{2}, t = \frac{3\pi}{2}$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{-3\sin\frac{\pi}{2}}{4\cos 2\frac{\pi}{2}} \Rightarrow = \frac{-3(1)}{4(-1)} \quad \Rightarrow = \frac{-3}{-4} \quad \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{4}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{3\pi}{2}} = \frac{-3\sin\frac{3\pi}{2}}{4\cos 2\frac{3\pi}{2}} \quad \Rightarrow = \frac{-3(-1)}{4(-1)} \quad \Rightarrow = \frac{3}{-4} \quad \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{3\pi}{2}} = -\frac{3}{4}$$

إذن أحد فرعي المعادلة ميله عند نقطة الاصل $\frac{3}{4}$, والاخر ميله $-\frac{3}{4}$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

الدرس الرابع: الاشتقاق الضمني

مخطط الدرس الرابع

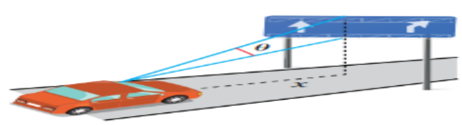
الاشتقاق الضمني

- العلاقة الضمنية ومشتقتها
- ميل المماس لمنحنى علاقة ضمنية
- معادلة المماس لمنحنى علاقة ضمنية
- المشتقة الثانية للعلاقات الضمنية
- المشتقة الثانية للمعادلات الوسيطية
- الاشتقاق اللوغاريتمي

مسألة اليوم: (صفحة123)

يقود سائق سيارته في اتجاه لافته على طريق سريع كما في الشكل المجاور ، إذا كانت θ زاوية رؤية السائق للافته ، و x المسافة بينه وبين اللافته بالأمتار ، وكانت العلاقة التي تربط θ بـ x هي :

$\tan\theta = \frac{4x}{x^2+252}$ فما معدل تغير θ بالنسبة إلى x ؟



$$\tan\theta = \frac{4x}{x^2+252}$$

$$\sec^2\theta \times \frac{d\theta}{dx} = \frac{(x^2+252)(4)-(4x)(2x)}{(x^2+252)^2}$$

$$\sec^2\theta \times \frac{d\theta}{dx} = \frac{(4x^2+1008)-(8x^2)}{(x^2+252)^2} \Rightarrow \sec^2\theta \times \frac{d\theta}{dx} = \frac{1008-4x^2}{(x^2+252)^2}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1008-4x^2}{\sec^2\theta\,(x^2+252)^2} \Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{1008-4x^2}{(1+\tan^2\theta)(x^2+252)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{1008-4x^2}{\left(1+\left(\frac{4x}{x^2+252}\right)^2\right)(x^2+252)^2} \Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{1008-4x^2}{\left(1+\frac{16x^2}{(x^2+252)^2}\right)(x^2+252)^2}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1008-4x^2}{(x^2+252)^2+16x^2}$$

العلاقة الضمنية ومشتقاتها: (صفحة 123)

مثال 1: أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي : (صفحة124)

1) $x^2 + y^2 = 4$

$$\frac{dy}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(4) \Rightarrow \frac{dy}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0 \Rightarrow 2x + 2y\frac{d}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx} = -\frac{x}{y}$$

2) $\sin x + \cos y = 2x - 3y$

$$\frac{d}{dx}(\sin x + \cos y) = \frac{d}{dx}(2x - 3y) \Rightarrow \frac{d}{dx}(\sin x) + \frac{d}{dx}(\cos y) = \frac{d}{dx}(2x) - \frac{d}{dx}(3y)$$

$$\Rightarrow \cos x - \sin y\frac{dy}{dx} = 2 - 3\frac{dy}{dx} \Rightarrow 3\frac{dy}{dx} - \sin y\frac{dy}{dx} = 2 - \cos x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(3 - \sin y) = 2 - \cos x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2-\cos x}{3-\sin y}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٧٨٠٨

أتحقق من فهمي: (صفحة125)

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

1) $x^2 + y^2 = 13$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 2y\frac{dy}{dx} = -2x \Rightarrow \frac{2y}{2y}\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

2) $2x + 5y^2 = \sin y$

$$2 + 10y\frac{dy}{dx} = \cos y\frac{dy}{dx} \Rightarrow 10y\frac{dy}{dx} - \cos y\frac{dy}{dx} = -2 \Rightarrow \frac{dy}{dx}(10y - \cos y) = -2$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\frac{(10y - \cos y)}{(10y - \cos y)} = \frac{-2}{(10y - \cos y)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-2}{10y - \cos y}$$

مثال 2 : أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي : (صفحة125)

1) $2xy + y^3 = 1$

$$\frac{d}{dx}(2xy - y^3) = \frac{d}{dx}(1) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}(2xy) - \frac{d}{dx}(y^3) = 0$$

$$\Rightarrow \; 2x\frac{d}{dx}(y) + y\frac{d}{dx}(2x) - \frac{d}{dx}(y^3) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x\frac{dy}{dx} + 2y - 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \; 2x\frac{dy}{dx} - 3y^2\frac{dy}{dx} = -2y \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx}(2x - 3y^2) = -2y \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{2x - 3y^2}$$

2) $\sin(x + y) = y^2 \cos x$

$$\frac{d}{dx}(\sin(x + y)) = \frac{d}{dx}(y^2 \cos x)$$

$$\frac{d}{dx}(\sin(x + y)) = y^2\frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x\frac{d}{dx}(y^2)$$

$$\cos(x + y)\left(1 + \frac{dy}{dx}\right) = -y^2 \sin x + \cos x\,(2y\frac{dy}{dx})$$

$$\cos(x + y) + \cos(x + y)\frac{dy}{dx} = -y^2 \sin x + 2y\cos x\frac{dy}{dx}$$

$$\cos(x + y)\frac{dy}{dx} - 2y\cos x\frac{dy}{dx} = -y^2 \sin x - \cos x\,(x + y)$$

$$\frac{dy}{dx}(\cos(x + y) - 2y\cos x) = -y^2 \sin x - \cos x\,(x + y)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y^2 \sin x - \cos x\,(x + y)}{\cos(x + y) - 2y\cos x}$$

3) $y = \frac{x-1}{x+1}$

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \quad \Rightarrow \; 2y\frac{d}{dx} = \frac{(x+1)\frac{d}{dx}(x-1) - (x-1)\frac{d}{dx}(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow \; 2y\frac{dy}{dx} = \frac{(x+1)(1) - (x-1)(1)}{(x+1)^2} \quad \Rightarrow \; 2y\frac{dy}{dx} = \frac{(x+1)(1) - (x-1)(1)}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow 2y\frac{dy}{dx} = \frac{x + 1 - x + 1}{(x+1)^2} \quad \Rightarrow 2y\frac{dy}{dx} = \frac{2}{(x+1)^2} \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2}{2y(x+1)^2} \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y(x+1)^2}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

أتحقق من فهمي: (صفحة127)

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

1) $3xy^2 + y^3 = 8$

$$3\left((x)(2y)\left(\frac{dy}{dx}\right) + (y^2)(1)\right) + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow\ 6xy\frac{dy}{dx} + 3y^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow\ 6xy\frac{dy}{dx} + 3y^2\frac{dy}{dx} = -3y^2$$

$$\Rightarrow\ \frac{(6xy+3y^2)}{(6xy+3y^2)}\frac{dy}{dx} = \frac{-3y^2}{(6xy+3y^2)} \quad \Rightarrow\ \frac{dy}{dx} = -\frac{3y^2}{6xy+3y^2}$$

2) $\tan(x-y) = 2xy^3 + 1$

$$\sec^2(x-y)(1-\frac{dy}{dx}) = 2\left((x)\left(3y^2\frac{dy}{dx}\right) + (y^3)(1)\right)$$

$$\sec^2(x-y)(1-\frac{dy}{dx}) = 6xy^2\frac{dy}{dx} + y^3$$

$$\sec^2(x-y) - \sec^2(x-y)\frac{dy}{dx} = 6xy^2\frac{dy}{dx} + 2y^3$$

$$\sec^2(x-y) - 2y^3 = 6xy^2\frac{dy}{dx} + \sec^2(x-y)\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}(6xy^2 + \sec^2(x-y)) = \sec^2(x-y) - 2y^3$$

$$\frac{dy}{dx}\frac{(6xy^2+\sec^2(x-y))}{(6xy^2+\sec^2(x-y))} = \frac{\sec^2(x-y) - 2y^3}{(6xy^2+\sec^2(x-y))} \quad \Rightarrow\ \frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2(x-y) - 2y^3}{6xy^2+\sec^2(x-y)}$$

3) $x^2 = \frac{x-y}{x+y}$

$$2x = \frac{(x+y)\left(1-\frac{dy}{dx}\right) - (x-y)\left(1+\frac{dy}{dx}\right)}{(x+y)^2}$$

$$2x(x+y)^2 = (x+y)\left(1-\frac{dy}{dx}\right) - (x-y)\left(1+\frac{dy}{dx}\right)$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

$$2x(x+y)^2=\left(x-x\frac{dy}{dx}+y-y\frac{dy}{dx}\right)-\left(x+x\frac{dy}{dx}-y-y\frac{dy}{dx}\right)$$

$$2x(x+y)^2=x-x\frac{dy}{dx}+y-y\frac{dy}{dx}-x-x\frac{dy}{dx}+y+y\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow\ 2x(x+y)^2=-2x\frac{dy}{dx}+2y\quad\Rightarrow\ 2x\frac{dy}{dx}=2y-2x(x+y)^2$$

$$\Rightarrow\frac{2x}{2x}\frac{dy}{dx}=\frac{2y-2x(x+y)^2}{2x}\quad\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{2y-2x(x+y)^2}{2x}\quad\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{y-x(x+y)^2}{x}$$

ميل المماس لمنحنى علاقة ضمنية (صفحة127)

مثال 3: (صفحة127)

أجد ميل مماس منحنى العلاقة : $e^{2x}\ln y=x+y-2$ عند النقطة (1،1) .

الخطوة الأولى : إيجاد ميل المماس

$$\frac{d}{dx}(e^{2x}\ln y)=\frac{d}{dx}(x+y-2)$$

$$e^{2x}\frac{d}{dx}(\ln y)+\ln y\frac{d}{dx}(e^{2x})=\frac{d}{dx}(x)+\frac{d}{dx}(y)-\frac{d}{dx}(2)$$

$$\Rightarrow e^{2x}\times\frac{1}{y}\times\frac{dy}{dx}+\ln y\times 2\,e^{2x}=1+\frac{dy}{dx}\quad\Rightarrow\ \frac{e^{2x}}{y}\times\frac{dy}{dx}-\frac{dy}{dx}=1-2e^{2x}\ln y$$

$$\Rightarrow\frac{dy}{dx}\left(\frac{e^{2x}}{y}-1\right)=1-2e^{2x}\ln y\quad\Rightarrow\ \boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{1-2e^{2x}\ln y}{\frac{e^{2x}}{y}-1}}$$

الخطوة الثانية: أجد $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة (1,1)

$$\frac{dy}{dx}_{(1,1)}=\frac{1-2e^{2(1)}\ln(1)}{\frac{e^{2(1)}}{(1)}-1}\quad\Rightarrow\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{e^2-1}$$

إذن ميل المماس لمنحنى العلاقة عند النقطة (1،1) هو : $\frac{1}{e^2-1}$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

2) أجد ميل مماس منحنى العلاقة $y^2 = x$ عندما $x = 4$

الخطوة الأولى : إيجاد ميل المماس

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(x) \quad \Rightarrow 2y\frac{d}{dx} = 1 \quad \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}}$$

الخطوة الثانية: أجد $\frac{dy}{dx}$ عندما $x = 4$

$$y^2 = x \quad \Rightarrow \quad y^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = \pm 2}$$

إذن، أجد الميل عند النقطتين: (1, 2) و (1,-2)

الميل عند النقطة $(1, 2)$

$$\frac{dy}{dx}_{(1,2)} = \frac{1}{2y} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}_{(1,2)} = \frac{1}{2(2)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dy}{dx}_{(1,2)} = \frac{1}{4}}$$

الميل عند النقطة $(1, -2)$

$$\frac{dy}{dx}_{(1,-2)} = \frac{1}{2y} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}_{(1,-2)} = \frac{1}{2(-2)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dy}{dx}_{(1,-2)} = -\frac{1}{4}}$$

أتحقق من فهمي: (صفحة128)

1) أجد ميل مماس منحنى العلاقة: $y^2 = \ln x$ عند النقطة $(e, 1)$

$$y^2 = \ln x \quad \Rightarrow 2y\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \left[2y\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\right] \times \frac{1}{2y}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2xy} \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx}\bigg|_{(e,1)} = \frac{1}{2e(1)} \quad \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx}\bigg|_{(e,1)} = \frac{1}{2e}}$$

2) أجد ميل مماس منحنى العلاقة: $(y-3)^2 = 4(x-5)$ عند النقطة $x = 6$

الخطوة الأولى : إيجاد النقطة :

$$(y-3)^2 = 4(x-5) \quad \Rightarrow (y-3)^2 = 4(6-5) \quad \Rightarrow (y-3)^2 = 4$$

$$\Rightarrow (y-3) = \pm 2 \quad \Rightarrow y = 2+3 \Rightarrow \boxed{y = 5} \quad \Leftrightarrow y = -2+3 \Rightarrow \boxed{y = 1}$$

النقاط هي : $(6, 5)$ و $(6, 1)$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

الخطوة الثانية : إيجاد ميل المماس عند النقاط $(6,1)$ و$(6,5)$:

$$(y-3)^2 = 4(x-5) \Rightarrow 2(y-3)\frac{dy}{dx} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{2(y-3)}{2(y-3)}\frac{dy}{dx} = \frac{4}{2(y-3)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2}{y-3}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(6,1)} = \frac{2}{1-3} \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(6,1)} = \frac{2}{-2} \Rightarrow \boxed{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(6,1)} = -1}$$ ميل المماس عند النقطة الأولى هو

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(6,5)} = \frac{2}{5-3} \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(6,5)} = 2 \Rightarrow \boxed{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(6,5)} = 1}$$ ميل المماس عند النقطة الثانية هو

معادلة المماس لمنحنى علاقة ضمنية (صفحة129)

مثال 4: (صفحة129)

أجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة : $x^2 - xy + y^2 = 7$ عند النقطة $(-1,2)$.

الخطوة الأولى: أجد $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{d}{dx}(x^2 - xy + y^2) = \frac{d}{dx}(7) \Rightarrow \frac{d}{dx}(x^2) - \frac{d}{dx}(xy) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

$$\Rightarrow 2x - \left(x\frac{dy}{dx} + y\right) + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 2x - x\frac{dy}{dx} - y + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow 2y\frac{dy}{dx} - x\frac{dy}{dx} = y - 2x \Rightarrow (2y - x)\frac{dy}{dx} = y - 2x \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{y-2x}{2y-x}}$$

الخطوة الثانية:أجد $\frac{dy}{dx}$عند النقطة $(-1,2)$.

$$\frac{dy}{dx}_{(-1,2)} = \frac{2-2(-1)}{2(2)-(-1)} \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx}_{(-1,2)} = \frac{4}{5}}$$

إذن ميل المماس لمنحنى العلاقة عند النقطة $(-1,2)$ هو : $\frac{4}{5}$

الخطوة الثالثة :أجد معادلة المماس عند النقطة $\frac{dy}{dx}$ $(-1,2)$.

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - (2) = m(x - (-1)) \Rightarrow \boxed{y = \frac{4}{5}x + \frac{14}{5}}$$ معادلة المماس

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

أتحقق من فهمي: (صفحة130)

أجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة : $x^3 + y^3 - 3xy = 17$ عند النقطة $(2, 3)$.

الخطوة الأولى : أجد $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة $(2, 3)$.

$$x^3 + y^3 - 3xy = 17$$

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} - 3x\frac{dy}{dx} - 3y(1) = 0$$

بتعويض $x = 2$ و $y = 3$ ينتج أن :

$$3(2)^2 + 3(3)^2\frac{dy}{dx} - 3(2)\frac{dy}{dx} - 3(3) = 0$$

$$12 + 27\frac{dy}{dx} - 6\frac{dy}{dx} - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad (27 - 6)\frac{dy}{dx} = 9 - 12$$

$$\Rightarrow\ 21\frac{dy}{dx} = -3 \quad \Rightarrow \frac{21}{21}\frac{dy}{dx} = \frac{-3}{21} \quad \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx_{(2,3)}} = \frac{-1}{7}}$$ ميل المماس

الخطوة الثانية :أجد معادلة المماس عند النقطة $\frac{dy}{dx}$ $(2, 3)$.

$$y - y_1 = \mathrm{m}(x - x_1) \quad \Rightarrow\ y - 3 = \frac{-1}{7}(x - 2)$$

$$\Rightarrow\ y - 3 = \frac{-1}{7}x + \frac{2}{7} \quad \Rightarrow\ y = \frac{-1}{7}x + \frac{2}{7} + 3$$

$$\Rightarrow\ y = \frac{-1}{7}x + \frac{2}{7} + \frac{21}{7} \Rightarrow \boxed{y = \frac{-1}{7}x + \frac{23}{7}}$$ معادلة المماس

المشتقة الثانية للعلاقات الضمنية (صفحة130)

مثال 5: (صفحة130)

إذا كان : $2x^3 - 3y^3 = 8$ فأجد $\frac{d^2y}{dx^2}$.

الخطوة الأولى: أجد $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{d}{dx}(2x^3 - 3y^2) = \frac{d}{dx}(8) \quad \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(2x^3\right) - \frac{d}{dx}\left(3y^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow\ 6x^2 - 6y\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

الخطوة الثانية: أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(y)\frac{dy}{dx}(x^2) - (x^2)\frac{dy}{dx}(y)}{(y^2)} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2xy - x^2\frac{dy}{dx}}{y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2xy - x^2\left(\frac{x^2}{y}\right)}{y^2} \Rightarrow \boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2xy^2 - x^4}{y^3}}$$

اتحقق من فهمي : (صفحة64)

إذا كان : $xy + y^2 = 2x$ فأجد $\frac{d^2y}{dx^2}$.

$$xy + y^2 = 2x \Rightarrow x\frac{dy}{dx} + y(1) + 2y\frac{dy}{dx} = 2$$

$$x\frac{dy}{dx} + y(1) + 2y\frac{dy}{dx} = 2 \Rightarrow x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 2 - y$$

$$\Rightarrow (x+2y)\frac{dy}{dx} = 2 - y \Rightarrow \frac{(x+2y)}{x+2y}\frac{dy}{dx} = \frac{2-y}{x+2y} \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{2-y}{x+2y}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x+2y)\left(-\frac{dy}{dx}\right) - (2-y)\left(1 + 2\frac{dy}{dx}\right)}{(x+2y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\left(\frac{2-y}{x+2y}\right)(x+2y) - (2-y)(1 + \left(2 \times \frac{2-y}{x+2y}\right))}{(x+2y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\left(\frac{2-y}{x+2y}\right)(x+2y) - (2-y)(\frac{x+2y+4-2y}{x+2y})}{(x+2y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(-\left(\frac{2-y}{x+2y}\right)(x+2y) - (2-y)(\frac{x+4}{x+2y})\right)\left(\frac{1}{(x+2y)^2}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\left(\frac{2-y}{(x+2y)^3}\right) - (x+2y) - (x+4)\right) \Rightarrow = \left(\left(\frac{2-y}{(x+2y)^3}\right)(-x-2y-x-4)\right)$$

$$\Rightarrow = \left(\left(\frac{2-y}{(x+2y)^3}\right)(-2x-2y-4)\right) \Rightarrow = \left(\frac{-4x-4y-8+2xy+2y^2+4y}{(x+2y)^3}\right)$$

$$\Rightarrow = \left(\frac{-4x-8+2xy+2y^2}{(x+2y)^3}\right) \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2xy-4x+2y^2-8}{(x+2y)^3}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

المشتقة الثانية للمعادلات الوسيطية (صفحة131)

مثال 6: (صفحة131)

أجد : $\frac{d^2y}{dx^2}$ للمعادلة الوسيطية عندما $t = 1$

$$x = t^3 + 3t^2 \quad , \quad y = t^4 - 8t^2$$

الخطوة الأولى : أيجاد $\frac{dy}{dx}$.

$$x = t^3 + 3t^2 \Rightarrow \boxed{\frac{dx}{dt} = 3t^2 + 6t}$$

$$y = t^4 - 8t^2 \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dt} = 4t^3 - 16t}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{4t^3 - 16t}{3t^2 + 6t} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{4t(t^2 - 4)}{3t(t + 2)}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{4(t + 2)(t - 2)}{3(t + 2)} \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{4}{3}(t - 2)}$$

الخطوة الثانية: إيجاد $\frac{d^2y}{dx^2}$ عندما $t = 1$.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}(t - 2)\right) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{4}{3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{4}{3}}{3t^2 + 6t} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4}{3(3t^2 + 6t)}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1} = \frac{4}{3(3(1)^2 + 6(1))} \Rightarrow \boxed{\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1} = \frac{4}{27}}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

أتحقق من فهمي: (صفحة132)

أجد : $\frac{d^2y}{dx^2}$ للمعادلة الوسيطية عندما $t = 2$

$$x = 3t^2 + 1 \quad , \quad y = t^3 - 2t^2$$

الخطوة الأولى: أيجاد $\frac{dy}{dx}$.

$$y = t^3 - 2t^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dy}{dt} = 3t^2 - 4t}$$

$$x = 3t^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dx}{dt} = 6t}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3t^2 - 4t}{6t} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3t^2}{6t} - \frac{4t}{6t} \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}t - \frac{2}{3}}$$

الخطوة الثانية: إيجاد $\frac{d^2y}{dx^2}$ عندما $t = 2$.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}t - \frac{2}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{1}{2}}{6t} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6t} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{12t} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{12t}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=2} = \frac{1}{12(2)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=2} = \frac{1}{24}}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

أتدرب وأحل المسائل: (صفحة132)

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

1) $x^2 - 2y^2 = 4$

$$2x - 4y\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \ 2x - 4y\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \ -4y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\Rightarrow \ \frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{-4y} \quad \Rightarrow \ \frac{dy}{dx} = \frac{x}{2y}$$

2) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{10}$

$$x^{-2} + y^{-2} = \frac{1}{10}$$

$$-2x^{-3} - 2y^{-3}\frac{dy}{dx} = 0 \ \Rightarrow \ -\frac{2}{x^3} - \frac{2}{y^3}\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow -\frac{2}{y^3}\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x^3}$$

$$\Rightarrow \left[-\frac{2}{y^3}\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x^3}\right] \ \times -\frac{y^3}{2} \quad \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{y^3}{x^3}}$$

3) $(x^2 + y^2)^2 = 50(x^2 - y^2)$

$$(x^2 + y^2)^2 = 50x^2 - 50y^2$$

$$2(x^2 + y^2)(2x + 2y\frac{dy}{dx}) = 100x - 100y\frac{dy}{dx}$$

$$(2x^2 + 2y^2)(2x + 2y\frac{dy}{dx}) = 100x - 100y\frac{dy}{dx}$$

$$4x^3 + 4y\frac{dy}{dx}x^2 + 4xy^2 + 4y^3\frac{dy}{dx} = 100x - 100y\frac{dy}{dx}$$

$$4y\frac{dy}{dx}x^2 + 4y^3\frac{dy}{dx} + 100y\frac{dy}{dx} = 100x - 4x^3 - 4xy^2$$

$$\left[4\frac{dy}{dx}(yx^2 + y^3 + 25y) = 100x - 4x^3 - 4xy^2\right] \quad \div 4$$

$$\frac{dy}{dx}(yx^2 + y^3 + 25y) = 25x - x^3 - xy^2 \quad \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{25x - x^3 - xy^2}{yx^2 + y^3 + 25y}}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

4) $e^x y = x e^y$

$$(e^x)\left(\frac{dy}{dx}\right) + (y)(e^x) = (x)\left(e^y \frac{dy}{dx}\right) + (e^y)(1)$$

$$e^x \frac{dy}{dx} + ye^x = xe^y \frac{dy}{dx} + e^y \implies e^x \frac{dy}{dx} - xe^y \frac{dy}{dx} = e^y - ye^x$$

$$\implies \frac{dy}{dx}(e^x - xe^y) = e^y - ye^x \implies \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{e^y - ye^x}{e^x - xe^y}}$$

5) $3^x = y - 2xy$

$$3^x \ln 3 = \frac{dy}{dx} - 2x\frac{dy}{dx} - 2y \implies \frac{dy}{dx} - 2x\frac{dy}{dx} = 3^x \ln 3 + 2y$$

$$\implies \frac{dy}{dx}(1 - 2x) = 3^x \ln 3 + 2y \implies \frac{dy}{dx} = \frac{3^x \ln 3 + 2y}{1 - 2x}$$

6) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$

$$x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = 5 \implies \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} + \frac{1}{2}y^{\frac{-1}{2}}\frac{dy}{dx} = 0 \implies \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2y^{\frac{1}{2}}}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\implies \left[\frac{1}{2y^{\frac{1}{2}}}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}\right] \times \frac{2y^{\frac{1}{2}}}{1} \implies \frac{dy}{dx} = -\frac{2y^{\frac{1}{2}}}{2x^{\frac{1}{2}}} \implies \frac{dy}{dx} = -\frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$$\implies \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-\sqrt{y}}{\sqrt{x}}}$$

7) $x = \sec\frac{1}{y}$

$$1 = \sec\frac{1}{y}\ \tan\frac{1}{y}\ \frac{(y.0)-(1.\frac{dy}{dx})}{y^2} \Rightarrow 1 = -\frac{\sec\frac{1}{y}\ \tan\frac{1}{y}\ \frac{dy}{dx}}{y^2}$$

$$\left[1 = -\frac{\sec\frac{1}{y}\ \tan\frac{1}{y}\ \frac{dy}{dx}}{y^2}\right] \times -y^2 \Rightarrow \frac{\sec\frac{1}{y}\ \tan\frac{1}{y}\ \frac{dy}{dx}}{\sec\frac{1}{y}\ \tan\frac{1}{y}} = \frac{-y^2}{\sec\frac{1}{y}\ \tan\frac{1}{y}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{\sec\frac{1}{y}\ \tan\frac{1}{y}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{\frac{1}{\cos\frac{1}{y}}}\ \frac{1}{\frac{\sin\frac{1}{y}}{\cos\frac{1}{y}}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{\frac{1}{\cos\frac{1}{y}}}\ \frac{\cos\frac{1}{y}}{\sin\frac{1}{y}}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{\frac{1}{\cos\frac{1}{y}}}\cot\frac{1}{y} \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = -y^2\cos\frac{1}{y}\cot\frac{1}{y}}$$

8) $(\sin\pi x + \cos\pi y)^2 = 2$

$$2(\sin\pi x + \cos\pi y)(\pi\cos\pi x - \pi\sin\pi y\frac{dy}{dx}) = 0$$

$$(2\sin\pi x + 2\cos\pi y)(\pi\cos\pi x - \pi\sin\pi y\frac{dy}{dx}) = 0$$

$$\frac{(2\sin\pi x + 2\cos\pi y)(\pi\cos\pi x - \pi\sin\pi y\frac{dy}{dx})}{(2\sin\pi x + 2\cos\pi y)} = \frac{0}{(2\sin\pi x + 2\cos\pi y)}$$

$$\pi\cos\pi x - \pi\sin\pi y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\pi\cos\pi x}{\pi\sin\pi y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\cos\pi x}{\sin\pi y}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

9) $\frac{x}{y^2}+\frac{y^2}{x}=5$

$$\frac{(x.x)+(y^2.y^2)}{xy^2}=5 \Rightarrow x^2+y^4=5xy^2$$

$$2x+4y^3\frac{dy}{dx}=5\left(x.2y\frac{dy}{dx}+y^2\right) \Rightarrow 2x+4y^3\frac{dy}{dx}=10xy\frac{dy}{dx}+5y^2$$

$$\Rightarrow 4y^3\frac{dy}{dx}-10xy\frac{dy}{dx}=5y^2-2x \Rightarrow \frac{dy}{dx}(4y^3-10xy)=5y^2-2x$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{5y^2-2x}{4y^3-10xy}}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

10) $x+y=\cos(xy)$

$$1+\frac{dy}{dx}=-\sin(xy)((x)(\frac{dy}{dx})+(y)(1)) \Rightarrow 1+\frac{dy}{dx}=-\sin(xy)(x\frac{dy}{dx}+y)$$

$$\Rightarrow 1+\frac{dy}{dx}=-x\sin xy\frac{dy}{dx}-y\sin xy \Rightarrow x\sin xy\frac{dy}{dx}+\frac{dy}{dx}=-1-y\sin xy$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(x\sin xy+1)=-1-y\sin xy \Rightarrow \frac{dy}{dx}(x\sin xy+1)=-(1+y\sin xy)$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=-\frac{1+y\sin xy}{x\sin xy+1}}$$

11) $x^2+y^2=\ln(x+y)^2$

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=\frac{2(x+y)\,(1+\frac{dy}{dx})}{(x+y)^2} \Rightarrow 2x+2y\frac{dy}{dx}=\frac{2\,(1+\frac{dy}{dx})}{(x+y)}$$

$$\Rightarrow \left(2x+2y\frac{dy}{dx}\right)(x+y)=2\,(1+\frac{dy}{dx}) \Rightarrow 2x^2+2xy+2xy\frac{dy}{dx}+2y^2\frac{dy}{dx}=2+2\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow 2xy\frac{dy}{dx}+2y^2\frac{dy}{dx}-2\frac{dy}{dx}=2-2x^2-2xy \Rightarrow 2\frac{dy}{dx}(xy+y^2-1)=2-2x^2-2xy$$

$$\Rightarrow \frac{2\frac{dy}{dx}(xy+y^2-1)}{2(xy+y^2-1)}=\frac{2-2x^2-2xy}{2(xy+y^2-1)} \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{1-x^2-xy}{xy+y^2-1}}$$

12) $\sin x \cos y = x^2 - 5y$

$$(\sin x)(-\sin y\frac{dy}{dx}) + (\cos y)(\cos x) = 2x - 5\frac{dy}{dx}$$

$$(-\sin x \sin y\frac{dy}{dx}) + 5\frac{dy}{dx} = 2x - (\cos y)(\cos x)$$

$$\frac{dy}{dx} - (\sin x \sin y - 5) = 2x - (\cos y)(\cos x)$$

$$\frac{dy}{dx}\frac{-(\sin x \sin y - 5)}{-(\sin x \sin y - 5)} = \frac{2x - (\cos y)(\cos x)}{-(\sin x \sin y - 5)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - (\cos y)(\cos x)}{-\sin x \sin y + 5} \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-2x + (\cos y)(\cos x)}{\sin x \sin y - 5}}$$

أجد $\acute{y}$ لكل مما يأتي عند القيمة المعطاة :

13) $2y^2 + 2xy - 1 = 0 \quad , x = \frac{1}{2}$

$$2y^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)y - 1 = 0 \Rightarrow 2y^2 + y - 1 = 0 \Rightarrow (2y - 1)(y + 1) = 0$$

إما $\Rightarrow 2y - 1 = 0 \quad \Rightarrow 2y = 1 \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2}}$ أو $\quad y + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{y = -1}$

$$2y^2 + 2xy - 1 = 0$$

$$4y\frac{dy}{dx} + \left(2x.\frac{dy}{dx}\right) + (2y.1) = 0 \Rightarrow 4y\frac{dy}{dx} + 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(4y + 2x) = -2y \Rightarrow \frac{dy}{dx}\frac{(4y + 2x)}{4y + 2x} = \frac{-2y}{4y + 2x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-2y}{4y + 2x} \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{2y + x}}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} = \frac{-y}{2y + \frac{1}{2}} \Rightarrow = \frac{-\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} \Rightarrow = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} \Rightarrow = -\frac{1}{2}.\frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} = -\frac{1}{3}}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(\frac{1}{2},-1\right)} = \frac{-y}{2y + \frac{1}{2}} \Rightarrow = \frac{-(-1)}{2(-1) + \frac{1}{2}} \Rightarrow = \frac{1}{-2 + \frac{1}{2}} \Rightarrow = \frac{1}{\frac{-3}{2}} \Rightarrow = \frac{1}{1}.\frac{-2}{3} \Rightarrow \boxed{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(\frac{1}{2},-1\right)} = \frac{-2}{3}}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

14) $y^3 + 2x^2 = 11y \quad , y = 1$

$$(1)^3 + 2x^2 = 11(1) \Rightarrow 1 + 2x^2 = 11 \Rightarrow \frac{2x^2}{2} = \frac{10}{2} \Rightarrow x^2 = 5 \Rightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{5}}$$

$$3y^2\frac{dy}{dx} + 4x = 11\frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow 3y^2\frac{dy}{dx} - 11\frac{dy}{dx} = -4x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(3y^2 - 11) = -4x \Rightarrow \frac{dy}{dx}\frac{(3y^2 - 11)}{3y^2 - 11} = \frac{-4x}{3y^2 - 11} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-4x}{3y^2 - 11}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(\sqrt{5},1)} = \frac{-4(\sqrt{5})}{3(1)^2 - 11} \Rightarrow = \frac{-4(\sqrt{5})}{8} \Rightarrow \boxed{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(\sqrt{5},1)} = \frac{-(\sqrt{5})}{2}}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(-\sqrt{5},1)} = \frac{-4(-\sqrt{5})}{3(1)^2 - 11} \Rightarrow = \frac{-4(-\sqrt{5})}{8} \Rightarrow \boxed{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(-\sqrt{5},1)} = \frac{(\sqrt{5})}{2}}$$

أجد ميل المماس لمنحنى العلاقة عند النقطة المعطاة:

15) $x^2 + y^2 = 25 \quad , (3, -4)$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \frac{2y}{2y}\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(3,-4)} = \frac{-x}{y} \quad \Rightarrow \boxed{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(3,-4)} = \frac{-3}{4}}$$

16) $x^2y = 4(2 - y) \quad , (2, 1)$

$$(x^2\frac{dy}{dx}) + (y.2x) = 4\left(-\frac{dy}{dx}\right) \Rightarrow x^2\frac{dy}{dx} + 2xy = -4\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow x^2\frac{dy}{dx} + 4\frac{dy}{dx} = -2xy \Rightarrow \frac{dy}{dx}(x^2 + 4) = -2xy$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\frac{(x^2 + 4)}{x^2 + 4} = \frac{-2xy}{x^2 + 4} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-2xy}{x^2 + 4}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2,1)} = \frac{-2(2)(1)}{(2)^2 + 4} \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2,1)} = \frac{-4}{4 + 4} \Rightarrow \boxed{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2,1)} = -\frac{1}{2}}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

17) $e^{\sin x} + e^{\cos y} = e + 1 \quad ,(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

$$(e^{\sin x}).(\cos x) + (e^{\cos y}).(-\sin y\frac{dy}{dx}) = 0 \Rightarrow \quad e^{\sin x}\cos x - e^{\cos y}\sin y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{e^{\sin x}\cos x}{e^{\cos y}\sin y} = \frac{e^{\cos y}\sin y}{e^{\cos y}\sin y}\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{e^{\sin x}\cos x}{e^{\cos y}\sin y} \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{e^{\sin x-\cos y}\cos x}{\sin y}}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} = \frac{e^{\sin\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{2}}\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} = \frac{e^{(1)-(0)}(0)}{1} \Rightarrow \boxed{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} = 0}$$

18) $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 5 \quad ,(8,1)$

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 5 \quad \Rightarrow \frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}} + \frac{2}{3}y^{\frac{-1}{3}}\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{2}{3\sqrt[3]{y}}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(8,1)} \Rightarrow \frac{2}{3\sqrt[3]{8}} + \frac{2}{3\sqrt[3]{1}}\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \frac{2}{3(2)} + \frac{2}{3(1)}\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \left[\frac{2}{3}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{3}\right] \times \frac{3}{2} \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(8,1)} = -\frac{3}{6} \quad \Rightarrow \boxed{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(8,1)} = -\frac{1}{2}}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

أجد معادلة المماس لمنحنى كل علاقة مما يأتي عند النقطة المعطاة:

19) $x^2 + xy + y^2 = 13 \quad ,(-4,3)$

الخطوة الأولى: إيجاد ميل المماس

$$2x + (x).\left(\frac{dy}{dx}\right) + (y).(1) + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 2x + x\frac{dy}{dx} + y + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = -2x - y \Rightarrow \frac{dy}{dx}\frac{(x+2y)}{x+2y} = \frac{-2x-y}{x+2y} \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{2x+y}{x+2y}}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(-4,3)} = -\frac{2(-4)+(3)}{(-4)+2(3)} \Rightarrow = -\frac{-8+3}{-4+6} \Rightarrow = -\frac{-5}{2} \Rightarrow \boxed{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(-4,3)} = \frac{5}{2}}$$

الخطوة الثانية: إيجاد معادلة المماس

$$y - y_1 = \mathrm{m}(x - x_1) \;\Rightarrow\; y - 3 = \frac{5}{2}\big(x - (-4)\big) \;\Rightarrow\; y - 3 = \frac{5}{2}(x + 4)$$

$$\Rightarrow\; y = \frac{5}{2}x + \frac{20}{2} + 3 \;\Rightarrow\; \boxed{y = \frac{5}{2}x + 13}$$

20) $x + y - 1 = \ln(x^2 + y^2) \;\;, (1, 0)$

الخطوة الأولى: إيجاد ميل المماس

$$x + y - 1 = \ln x^2 + \ln y^2 \;\Rightarrow\; 1 + \frac{dy}{dx} = \frac{2x + 2y\frac{dy}{dx}}{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{dy}{dx} = \frac{2x + 2y\frac{dy}{dx}}{x^2 + y^2} \;\Rightarrow\; (1 + \frac{dy}{dx})(x^2 + y^2) = 2x + 2y\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow\; x^2 + y^2 + x^2\frac{dy}{dx} + y^2\frac{dy}{dx} = 2x + 2y\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\frac{(x^2 + y^2 - 2y)}{x^2 + y^2 - 2y} = \frac{2x - x^2 - y^2}{x^2 + y^2 - 2y} \;\Rightarrow\; \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{2x - x^2 - y^2}{x^2 + y^2 - 2y}}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,0)} = \frac{2(1) - (1)^2 - (0)^2}{(1)^2 + (0)^2 - 2(0)} \;\Rightarrow = \frac{2 - 1}{1} \;\Rightarrow\; \boxed{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,0)} = 1}$$

الخطوة الثانية: إيجاد معادلة المماس

$$y - y_1 = \mathrm{m}(x - x_1) \;\Rightarrow\; y - 0 = 1(x - 1) \;\Rightarrow\; \boxed{y = x - 1}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

أجد : $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكل مما يأتي :

21) $x + y = \sin y$

$$(x).\left(\frac{dy}{dx}\right) + (y).(1) = \cos y\frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow 1 + \frac{dy}{dx} = \cos y\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\frac{(1-\cos y)}{1-\cos y} = \frac{-1}{1-\cos y} = \frac{1}{-1+\cos y} \quad \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{-1+\cos y}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = (-1+\cos y)^{-1} \quad \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -(-1+\cos y)^{-2}(-\sin y)\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (-1+\cos y)^{-2}(\sin y)\frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(\sin y)\frac{1}{-1+\cos y}}{(-1+\cos y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\sin y}{(-1+\cos y)^2.(-1+\cos y)} \quad \Rightarrow \boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\sin y}{(-1+\cos y)^3}}$$

22) $4y^3 = 6x^2 + 1$

$$12y^2\frac{dy}{dx} = 12x \quad \Rightarrow \frac{12y^2\frac{dy}{dx}}{12y^2} = \frac{12x}{12y^2} \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x}{y^2} \Rightarrow \quad = \frac{(y^2).(1)-(x).2y(\frac{dy}{dx})}{(y^2)^2} \quad \Rightarrow = \frac{y^2 - 2xy\frac{dy}{dx}}{y^4}$$

$$\Rightarrow = \frac{y^2 - 2xy\frac{x}{y^2}}{y^4} \quad \Rightarrow = \frac{y - 2x\frac{x}{y^2}}{y^3} \quad \Rightarrow = \frac{y - \frac{2x^2}{y^2}}{y^3} \quad \Rightarrow = \frac{\frac{y^3-2x^2}{y^2}}{y^3}$$

$$= \frac{y^3-2x^2}{y^3.y^2} \quad \Rightarrow \boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y^3-2x^2}{y^5}}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

23) $xy + e^y = e$

$$(x).\left(\frac{dy}{dx}\right) + (y).(1) + \frac{dy}{dx}e^y = 0 \Rightarrow x\frac{dy}{dx} + y + e^y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(x + e^y) = -y \quad \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x + e^y}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{(x + e^y).\left(\frac{dy}{dx}\right) - (y).(1 + e^y\frac{dy}{dx})}{(x + e^y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x + e^y).\left(\frac{y}{x + e^y}\right) + (y).(1 + \frac{-y}{x + e^y})}{(x + e^y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x + e^y).\left(\frac{y}{x + e^y}\right) + (y).(\frac{x + e^y - y}{x + e^y})}{(x + e^y)^2}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

24) أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة : $(x - 6)(y + 4) = 2$ عند النقطة $(7, -2)$.

الخطوة الأولى: إيجاد ميل المماس

$$(x - 6)(y + 4) = 2 \Rightarrow (x - 6)\left(\frac{dy}{dx} + 0\right) + (y + 4)(1 + 0) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 6)\left(\frac{dy}{dx}\right) + (y + 4)(1) = 0 \Rightarrow x\frac{dy}{dx} - 6\frac{dy}{dx} + y + 4 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\frac{(x - 6)}{x - 6} = \frac{-y - 4}{x - 6} \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y + 4}{x - 6}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(7,-2)} = -\frac{-2 + 4}{7 - 6} \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(7,-2)} = -\frac{2}{1} \Rightarrow \boxed{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(7,-2)} = -2}$$

الخطوة الثانية: إيجاد ميل العمودي على المماس

$$\mathrm{m_1} = -\frac{1}{\mathrm{m}} \Rightarrow \mathrm{m_1} = -\frac{1}{-2} \Rightarrow \boxed{\mathrm{m_1} = \frac{1}{2}}$$

الخطوة الثالثة: إيجاد معادلة العمودي على المماس

$$y - y_1 = \mathrm{m}_1(x - x_1) \Rightarrow y - (-2) = \frac{1}{2}(x - 7) \Rightarrow y + 2 = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2} - 2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2} - \frac{4}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{11}{2}$$

25) اثبت أن لمنحنى العلاقة : $3x^2 + 2xy + y^2 = 6$ مماسين أفقيين ، ثم أجد إحداثيي نقطتي التماس.

1) الخطوة الأولى : ايجاد مشتقة العلاقة $\frac{dy}{dx}$

$$3x^2 + 2xy + y^2 = 6$$

$$6x + (2x).\left(\frac{dy}{dx}\right) + (2y).(1) + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow 6x + 2x\frac{dy}{dx} + 2y + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(2x + 2y) = -6x - 2y \Rightarrow \frac{dy}{dx}\frac{(2x + 2y)}{2x + 2y} = \frac{-6x - 2y}{2x + 2y}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-6x - 2y}{2x + 2y} \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-3x - y}{x + y}}$$

2) الخطوة الثانية: نساوي المشتقة بالصفر

$$\frac{-3x - y}{x + y} = 0$$

لكي يكون الناتج صفر يجب ان يكون البسط يساوي صفر

$$-3x - y = 0 \quad \Rightarrow y = -3x$$

3) نعوض قيمة $y = -3x$ في العلاقة الرئيسية لإيجاد قيمة x

$$3x^2 + 2x(-3x) + (-3x)^2 = 6 \quad \Rightarrow 3x^2 - 6x^2 + 9x^2 = 6$$

$$\Rightarrow \frac{6x^2}{6} = \frac{6}{6} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{1} \Rightarrow \boxed{x = \pm 1}$$

4) نعوض قيمتي $x = \pm 1$ في العلاقة $y = -3x$ لإيجاد قيمة y

$$y = -3(1) = \boxed{-3} \quad \Leftrightarrow \quad y = -3(-1) = \boxed{3}$$

إذن للمنحنى مماسان أفقيان عند النقطتين $(1, -3), (-1, 3)$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

26) أجد إحداثيي نقطة على المنحنى $x + y^2 = 1$ ، بحيث يكون عندها مماس المنحنى موازياً للمستقيم $x + 2y = 0$

1) الخطوة الاولى: ايجاد ميل المنحنى:

$$x + y^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{2y}{2y}\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2y} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2y}$$

2) الخطوة الثانية: ايجاد ميل المستقيم:

$$x + 2y = 0 \quad \Rightarrow 1 + 2\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \frac{2}{2}\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2} \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2}$$

3) الخطوة الثالثة: مساواة ميل المنحنى مع ميل المستقيم:

$$\frac{-1}{2y} = \frac{-1}{2} \Rightarrow \frac{-2y}{-2} = \frac{-2}{-2} \Rightarrow \boxed{y = 1}$$

4) الخطوة الرابعة: نعوض قيمة $y = 1$ في علاقة المنحنى $x + y^2 = 1$

$$x + y^2 = 1 \quad \Rightarrow x + (1)^2 = 1 \quad \Rightarrow x + 1 = 1 \Rightarrow x = 1 - 1 \quad \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

اذن النقطة المطلوبة هي $\boxed{(0, 1)}$

27) أجد إحداثيي نقطة (نقاط) على المنحنى: $y^3 = x^2$ ، بحيث يكون عندها مماس المنحنى عمودياً على المستقيم: $y + 3x - 5 = 0$

1) الخطوة الاولى: ايجاد ميل المنحنى:

$$y^3 = x^2 \quad \Rightarrow 3y^2\frac{dy}{dx} = 2x \quad \Rightarrow \frac{3y^2}{3y^2}\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2} \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2}$$

2) الخطوة الثانية: ايجاد ميل المستقيم:

$$y + 3x - 5 = 0 \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} + 3 = 0$$

$\frac{dy}{dx} = -3$ ميل المستقيم $\Rightarrow \frac{1}{3}$ ميل العمودي المستقيم

3) الخطوة الثالثة: مساواة ميل المنحنى مع ميل المستقيم:

$$\frac{2x}{3y^2} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow 6x = 3y^2 \quad \Rightarrow \frac{6x}{6} = \frac{3y^2}{6} \quad \Rightarrow x = \frac{1}{2}y^2$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

4) الخطوة الرابعة: نعوض قيمة $x = \frac{1}{2}y^2$ في علاقة المنحنى $y^3 = x^2$

$$y^3 = x^2 \Rightarrow y^3 = (\frac{1}{2}y^2)^2 \Rightarrow y^3 = \frac{1}{4}y^4 \Rightarrow y^3 - \frac{1}{4}y^4 = 0 \Rightarrow y^3(1 - \frac{y}{4}) = 0$$

إما $y^3 = 0 \quad \rightarrow \boxed{y = 0}$ $\Rightarrow$ أو $1 - \frac{y}{4} = 0 \Rightarrow \frac{y}{4} = 1 \Rightarrow \boxed{y = 4}$

4) الخطوة الخامسة: نعوض قيم y في $x = \frac{1}{2}y^2$ لإيجاد قيم x

$$x = \frac{1}{2}y^2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(0)^2 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

$$x = \frac{1}{2}(4)^2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}16 \boxed{x = 8}$$

اذن النقاط المطلوبة هي $\boxed{(8,4)}$ و $\boxed{(0,0)}$

28) إذا كان $x^2 + y^2 = 25$ ، فأثبت أن : $\acute{y} = \frac{25}{y^3}$

29) إذا كان : $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = 10$ ، حيث $y > 0$ ، $x > 0$ ، فأثبت أن $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$.

$$\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = 10$$

$$\frac{\frac{(y.1) - (x.\frac{dy}{dx})}{y^2}}{2\sqrt{\frac{x}{y}}} + \frac{\frac{\left(x.\frac{dy}{dx}\right) - (y.1)}{x^2}}{2\sqrt{\frac{y}{x}}} = 0 \Rightarrow \frac{y - x\frac{dy}{dx}}{2y^2\sqrt{\frac{x}{y}}} + \frac{x\frac{dy}{dx} - y}{2x^2\sqrt{\frac{y}{x}}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{y - x\frac{dy}{dx}}{2y^2\sqrt{\frac{x}{y}}} + \frac{x\frac{dy}{dx} - y}{2x^2\sqrt{\frac{y}{x}}} = 0 \Rightarrow \frac{y - x\frac{dy}{dx}}{2y^2\sqrt{\frac{x}{y}}} = \frac{y - x\frac{dy}{dx}}{2x^2\sqrt{\frac{y}{x}}}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

$$\Rightarrow = \left[\frac{y - x\frac{dy}{dx}}{2y^2\sqrt{\frac{x}{y}}} = \frac{y - x\frac{dy}{dx}}{2x^2\sqrt{\frac{y}{x}}}\right] \times \frac{2}{1} \Rightarrow = \frac{y - x\frac{dy}{dx}}{y^2\sqrt{\frac{x}{y}}} = \frac{y - x\frac{dy}{dx}}{x^2\sqrt{\frac{y}{x}}}$$

$$\Rightarrow \left(y - x\frac{dy}{dx}\right)\left(x^2\sqrt{\frac{y}{x}}\right) = \left(y - x\frac{dy}{dx}\right)\left(y^2\sqrt{\frac{x}{y}}\right) \Rightarrow x^2y\sqrt{\frac{y}{x}} - x^3\sqrt{\frac{y}{x}}\frac{dy}{dx} = y^3\sqrt{\frac{x}{y}} - xy^2\sqrt{\frac{x}{y}}\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow xy^2\sqrt{\frac{x}{y}}\frac{dy}{dx} - x^3\sqrt{\frac{y}{x}}\frac{dy}{dx} = y^3\sqrt{\frac{x}{y}} - x^2y\sqrt{\frac{y}{x}} \Rightarrow \frac{dy}{dx}(xy^2\sqrt{\frac{x}{y}} - x^3\sqrt{\frac{y}{x}}) = y^3\sqrt{\frac{x}{y}} - x^2y\sqrt{\frac{y}{x}}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\left(\frac{xy^2\sqrt{\frac{x}{y}} - x^3\sqrt{\frac{y}{x}}}{xy^2\sqrt{\frac{x}{y}} - x^3\sqrt{\frac{y}{x}}}\right) = \frac{y^3\sqrt{\frac{x}{y}} - x^2y\sqrt{\frac{y}{x}}}{xy^2\sqrt{\frac{x}{y}} - x^3\sqrt{\frac{y}{x}}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^3\sqrt{\frac{x}{y}} - x^2y\sqrt{\frac{y}{x}}}{xy^2\sqrt{\frac{x}{y}} - x^3\sqrt{\frac{y}{x}}}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y(y^2\sqrt{\frac{x}{y}} - x^2\sqrt{\frac{y}{x}})}{x(y^2\sqrt{\frac{x}{y}} - x^2\sqrt{\frac{y}{x}})} \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}}$$

30) أجد إحداثيي النقطة على منحنى الاقتران : $x^2 + y^2 = 100$ التي يكون عندها ميل المماس $\frac{3}{4}$.

1) الخطوة الأولى: ايجاد ميل المماس للاقتران

$$x^2 + y^2 = 100 \quad \Rightarrow 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow 2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\Rightarrow \frac{2y}{2y}\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} \quad \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}}$$ ميل المماس

2) الخطوة الثانية : مساواة ميل المماس بـ $\frac{3}{4}$

$$\frac{-x}{y} = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow 3y = -4x \quad \Rightarrow \frac{3y}{3} = \frac{-4x}{3} \quad \Rightarrow \boxed{y = \frac{-4x}{3}}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

3) الخطوة الثالثة : نعوض المعادلة y في الاقتران لإيجاد قيم x

$$x^2 + (\frac{-4x}{3})^2 = 100 \Rightarrow x^2 + \frac{16}{9}x^2 = 100 \Rightarrow \frac{25}{9}x^2 = 100$$

$$\Rightarrow \left[\frac{25}{9}x^2 = 100\right] \times \frac{9}{25} \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \pm\sqrt{36} \Rightarrow \boxed{x = \pm 6}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 6} \Rightarrow y = \frac{-4(6)}{3} \Rightarrow y = \frac{-24}{3} \Rightarrow \boxed{y = -8}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = -6} \Rightarrow y = \frac{-4(-6)}{3} \Rightarrow y = \frac{24}{3} \Rightarrow \boxed{y = 8}$$

4) الخطوة الرابعة : النقاط المطلوبة هي $\boxed{(-6, 8)}$ و $\boxed{(6, -8)}$

31) إذا كان $y = \ln x$ ، حيث : $x > 0$ ، فأثبت أن $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ باستعمال الاشتقاق الضمني :

$$y = \ln x \ , x > 0$$

بالتحويل إلى الصيغة الأسية ينتج أن:

$$e^y = x$$

باشتقاق الطرفين ضمنياً بالنسبة إلى x ينتج أن :

$$e^y \frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y}$$

بتعويض $e^y = x$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}}$$

أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكل معادلة وسيطية مما يأتي عند قيمة t المعطاة :

32) $x = \sin t \ , \ y = \cos t \ , \ t = \frac{\pi}{4}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\sin t}{\cos t} = -\tan t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(\frac{d}{dt})\frac{dy}{dx}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\sec^2 t}{\cos t} \Rightarrow = \frac{-\sec^2 t}{\frac{1}{\sec t}} \Rightarrow = -\sec^2 t \, . \sec t \Rightarrow = -\sec^3 t$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\sec^3\frac{\pi}{4} \Rightarrow = -\sec^3\frac{\pi}{4} \Rightarrow = -(\frac{2}{\sqrt{2}})^3 . \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow = -(\frac{2\sqrt{2}}{2})^3$$

$$\Rightarrow = -\sqrt{2}^3 \Rightarrow \quad = -(2^3)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow = -\sqrt{2^3} \Rightarrow = -\sqrt{8} \Rightarrow = -\sqrt{4}.\sqrt{2} \Rightarrow = -2\sqrt{2}$$

33) $x = e^{-t},\ y = t^3 + t + 1\ ,\ t = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2+1}{-e^{-t}} = e^t(-3t^2-1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(\frac{d}{dt})\frac{dy}{dx}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{(e^t)(-6t) + (-3t^2-1)(e^t)}{-e^{-t}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-6e^t t - 3e^t t^2 + e^t}{-e^{-t}} \Rightarrow = \frac{e^t(-6t-3t^2-1)}{-e^{-t}}$$

$$\Rightarrow = \frac{e^t e^t(-6t-3t^2-1)}{-1} \Rightarrow = e^{2t}(6t+3t^2+1)$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0} = e^{2t}(6t+3t^2+1) \Rightarrow = e^{2(0)}(6(0)+3(0)^2+1) \Rightarrow \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0} = e^0(1) = 1$$

إذا كانت العلاقة $x^3 + y^3 = 6xy$ ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً.

34) أجد معادلة المماس عند نقطة تقاطع منحنى المعادلة مع منحنى $y = x$ في الربع الأول.

1) الخطوة الأولى: إيجاد النقطة

$y = x$

$$x^3 + (x)^3 = 6x(x) \Rightarrow x^3 + x^3 = 6x^2 \Rightarrow 2x^3 = 6x^2 \Rightarrow \frac{2x^3}{2} = \frac{6x^2}{2}$$

$$\Rightarrow x^3 = 3x^2 \Rightarrow x^3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x-3) = 0$$

$\Rightarrow$ إما $x^2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$ أو $(x-3) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 3}$

بما أن $y = x$ فإن $y = 3$ بالتالي نقطة التقاطع في الربع الأول هي $(3,3)$

2) الخطوة الثانية: إيجاد ميل المماس للمنحنى

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

$x^3 + y^3 = 6xy$

$$3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} = (6x)\left(\frac{dy}{dx}\right) + (6y).(1) \Rightarrow 3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 6x\frac{dy}{dx} + 6y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\left(\frac{3y^2 - 6x}{3y^2 - 6x}\right) = \frac{6y - 3x^2}{3y^2 - 6x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{6y - 3x^2}{3y^2 - 6x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(3,3)} = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x} \Rightarrow = \frac{2(3) - (3)^2}{(3)^2 - 2(3)} \Rightarrow = \frac{6 - 9}{9 - 6} \Rightarrow = \frac{-3}{3} \Rightarrow \boxed{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(3,3)} = -1 \text{ ميل المماس}}$$

3) الخطوة الثالثة: إيجاد معادلة المماس للمنحنى

$$y - y_1 = m_1(x - x_1) \Rightarrow y - 3 = -1(x - 3)$$

$$\Rightarrow y - 3 = -x + 3 \Rightarrow y = -x + 3 + 3 \Rightarrow \boxed{y = -x + 6 \quad \text{معادلة المماس}}$$

35) أجد إحداثيي نقطة على منحنى العلاقة في الربع الأول ، بحيث يكون مماس المنحنى أفقياً .

الخطوة الأولى : بما أن المماس أفقي نساوي المشتقة بالصفر ، فإن $\frac{dy}{dx} = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x} = 0 \Rightarrow 2y - x^2 = 0 \Rightarrow 2y = x^2 \Rightarrow \frac{2y}{2} = \frac{x^2}{2} \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2}x^2}$$

الخطوة الثانية : نعوض قيمة $y = \frac{1}{2}x^2$ في العلاقة $x^3 + y^3 = 6xy$ لإيجاد قيم x

$$x^3 + y^3 = 6xy \Rightarrow x^3 + \left(\frac{1}{2}x^2\right)^3 = 6x\left(\frac{1}{2}x^2\right) \Rightarrow x^3 + \frac{1}{8}x^6 = 3x(x^2)$$

$$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{8}x^6 = 3x^3 \Rightarrow x^3 + \frac{1}{8}x^6 - 3x^3 = 0 \Rightarrow \left[\frac{1}{8}x^6 - 2x^3 = 0\right] \times \frac{8}{1}$$

$$\Rightarrow x^6 - 16x^3 = 0 \Rightarrow x^3(x^3 - 16) = 0$$

$$\Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0} \Rightarrow x^3 - 16 = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{16} \Rightarrow \boxed{x = \sqrt[3]{16}}$$

الخطوة الثالثة : نعوض قيم x المستخرجة في العلاقة $y = \frac{1}{2}x^2$ لإيجاد قيم y

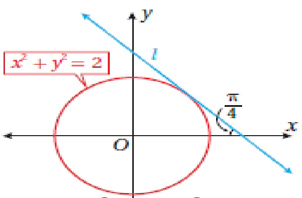
$$y = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}(0)^2 \Rightarrow \boxed{y = 0}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

$$y = \frac{1}{2}\sqrt[3]{(16)^2}$$

النقطة المطلوبة في الربع الأول هي : $\left(\sqrt[3]{16}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{(16)^2}\right)$

36) يبين الشكل المجاور منحنى العلاقة: $x^2 + y^2 = 2$ ، والمستقيم l يمثل مماساً لمنحنى العلاقة في الربع الأول ، أجد معادلة المستقيم l باستعمال المشتقة.



لتكن $A(x_1, y_1)$ نقطة تماس

باشتقاق طرفي العلاقة $x^2 + y^2 = 2$ بالنسبة إلى x نجد أن:

$$x^2 + y^2 = 2 \Longrightarrow 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Longrightarrow \frac{2y}{2y}\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

إذن ميل المماس هو l هو $-\frac{x_1}{y_1}$

لكن ميل المماس l هو $\tan\frac{3\pi}{4} = -1$

إذن، $-\frac{x_1}{y_1} = -1 \Longrightarrow x_1 = y_1$

وبتعويض (x_1, y_1) في المعادلة المعطاة نجد أن:

$$x_1{}^2 + y_1{}^2 = 2$$

وبتعويض $x_1 = y_1$ في المعادلة المعطاة نجد أن:

$$x_1{}^2 + y_1{}^2 = 2 \Longrightarrow x_1{}^2 + x_1{}^2 = 2 \Longrightarrow 2x_1{}^2 = 2 \Longrightarrow x_1{}^2 = 1 \Longrightarrow x_1 = 1$$

إذن نقطة التماس هي: $A(x_1, y_1)$ ، ومعادلة المماس l هي :

$$y - y_1 = \mathrm{m}_1(x - x_1) \Longrightarrow y - 1 = -1(x - 1) \Longrightarrow y - 1 = -x + 1 \Longrightarrow y = -x + 2$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

مهارات التفكير العليا: : (صفحة69)

تبرير : إذا كان : $x^2 - y^2 = 1$ ، فأجب عن الاسئلة الأربعة الآتية تباعاً :

37) أجد $\frac{dy}{dx}$.

$$x^2 - y^2 = 1 \quad \Rightarrow \; 2x - 2y\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \frac{2y}{2y}\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{2y} \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

38) يمكن التعبير عن منحنى العلاقة: $x^2 - y^2 = 1$ بالمعادلة الوسيطية: $x = \sec t\,, y = \tan t$ ، حيث: $0 \le t \le 2\pi$.

استعمل هذه الحقيقة لإيجاد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة t.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$y = \tan t \; \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \sec^2 t$$

$$x = \sec t \; \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \sec t \tan t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2 t}{\sec t \tan t} \; \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sec t}{\tan t}$$

39) أثبت أن المقدارين الجبريين اللذين يمثلان $\frac{dy}{dx}$ الناتجين في الفرعين السابقين متكافئان ، مبرراً إجابتي.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sec t}{\tan t} = \frac{x}{y}$$

المقداران الجبريان اللذان يمثلان $\frac{dy}{dx}$ متكافئان ، لأنه من نص السؤال : $x = \sec t$ و $y = \tan t$
ومنه فإن $\frac{x}{y} = \frac{\sec t}{\tan t}$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

40) أجد إحداثيات النقاط التي يكون عندها ميل المماس لمنحنى العلاقة 2.

$$\frac{dy}{dx} = 2 \;\rightarrow\; \frac{x}{y} = 2 \;\Rightarrow x = 2y$$

$$x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow (2y)^2 - y^2 = 1 \Rightarrow 4y^2 - y^2 = 1 \Rightarrow 3y^2 = 1 \Rightarrow \sqrt{y^2} = \sqrt{\frac{1}{3}} \Rightarrow \boxed{y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = 2\frac{1}{\sqrt{3}} = \boxed{x = \frac{2}{\sqrt{3}}}$$

$$y = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = -2\frac{1}{\sqrt{3}} = \boxed{x = -\frac{2}{\sqrt{3}}}$$

النقطة التي يكون عندها ميل المماس 2 هي : $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

41) تبرير: إذا مثل l أي مماس لمنحنى المعادلة: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{k}$ ، حيث k عدد حقيقي موجب ، فأثبت أن مجموع المقطع x والمقطع y للمستقيم l يساوي k ، مبرراً إجابتي.

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{k} \;\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{\frac{dy}{dx}}{2\sqrt{y}} = 0 \Rightarrow \left[\frac{\frac{dy}{dx}}{2\sqrt{y}} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}\right] \times \frac{2\sqrt{y}}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

نفرض نقطة التماس هي (x_1, y_1) فيكون ميل المماس:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_1,y_1)} = -\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}$$

معادلة المماس:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \;\Rightarrow\; y - y_1 = -\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}(x - x_1)$$

المقطع x والمقطع y للمماس :

$$x = 0 \rightarrow y - y_1 = -\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}(0 - x_1) \;\Rightarrow y - y_1 = \sqrt{y_1}\sqrt{x_1} \;\Rightarrow \boxed{y = y_1 + \sqrt{y_1}\sqrt{x_1}}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

$$y = 0 \Rightarrow 0 - y_1 = -\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}(x - x_1) \Rightarrow -y_1 = -\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}(x - x_1)$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}(x - x_1) \Rightarrow y_1 = \frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}x - \sqrt{y_1}\sqrt{x_1} \Rightarrow \left[\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}x = y_1 + \sqrt{y_1}\sqrt{x_1}\right] \times \frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{y_1}}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{y_1}\sqrt{x_1} + x_1 \Rightarrow \boxed{x = x_1 + \sqrt{y_1}\sqrt{x_1}}$$

مجموع المقطعين:

$$y_1 + \sqrt{y_1}\sqrt{x_1} + x_1 + \sqrt{y_1}\sqrt{x_1}$$

$$= y_1 + 2\sqrt{y_1}\sqrt{x_1} + x_1 \Rightarrow = \left(\sqrt{y_1} + \sqrt{y_1}\right)^2 \Rightarrow = \left(\sqrt{k}\right)^2 \Rightarrow = k$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

الدرس الخامس

المعدلات المرتبطة

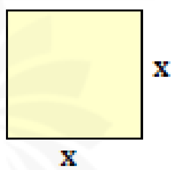
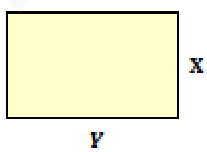
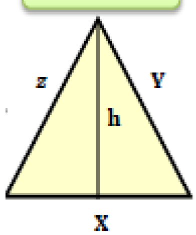
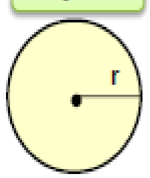
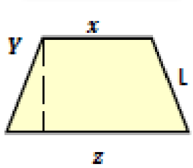
مسائل المعدلات المرتبطة: هي أحد تطبيقات الاشتقاق الضمني باستخدام قاعدة السلسلة وتستخدم لإيجاد معدل التغير في المساحة أو الحجم أو الطول أو العرض أو نصف القطر أو الارتفاع أو الزاوية بمرور الزمن.

مخطط الدرس الأول

- **المعدلات المرتبطة**
  - معدل تغير المساحة والحجم بالنسبة إلى الزمن
  - معدل تغير المسافة بالنسبة إلى الزمن
  - معدل تغير الزاوية بالنسبة إلى الزمن
  - معدل التغير بالنسبة إلى الزمن والحركة الدائرية
  - معدل التغير بالنسبة إلى الزمن وميكانيكا الحركة
  - معدل تغير حجم السائل بالنسبة إلى الزمن

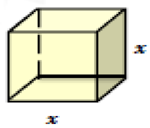
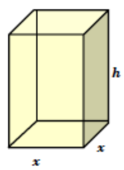
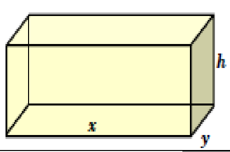
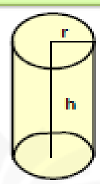
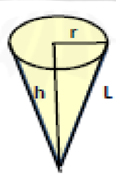
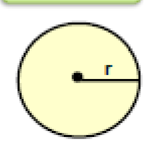
تأسيس الدرس الأول أو المعرفة المفترضة (Assumed knowledge):

قوانين الأشكال الهندسية ثنائية الأبعاد:

ت	الشكل	المساحة	المحيط
1	المربع 	طول الضلع × طول الضلع = مساحة المربع $A = x \times x$ $A = x^2$	محيط المربع = مجموع أطوال أضلاعه $P = 4x$
2	المستطيل 	طول الضلع × طول الضلع = مساحة المستطيل $A = x \times y$	محيط المستطيل = 2 × (الطول + العرض) $P = 2(x + y)$
3	المثلث 	الارتفاع × القاعدة $\frac{1}{2}$ = مساحة المثلث $A = \frac{1}{2} x \times h$	مجموع أطوال أضلاعه = محيط المثلث $P = x + y + z$
4	الدائرة 	$\pi \times$ (نصف القطر)^2 = مساحة الدائرة $A = \pi r^2$	$\pi \times$ القطر = محيط الدائرة $C = 2r\pi$
5	شبه المنحرف 	الارتفاع المحصور بينهما × (مجموع ضلعيه المتوازيين) $\frac{1}{2}$ = مساحة شبه المنحرف $A = \frac{1}{2}(x + z) \times h$	مجموع أطوال أضلاعه = محيط شبه المنحرف $P = x + y + z + L$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨.

قوانين الأشكال الهندسية ثلاثية الأبعاد (المجسمة):

ت	الشكل	الحجم V	المساحة الجانبية LA	المساحة الكلية SA
1	المكعب 	الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع $V = x^2 \times x$ $V = x^3$	المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع $LA = 4x \times x$ $LA = 4x^2$	المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين $SA = 4x^2 + 2x^2$ $SA = 6x^2$
2	متوازي السطوح المستطيلة (قاعدته مربعة) 	الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع $V = x^2 \times x$	المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع $LA = 4xh$	المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين $SA = 4xh + 2x^2$ ملاحظة: إذا كان متوازي المستطيلات مفتوح من إحدى الجهتين يكون القانون: $SA = 4xh + x^2$
3	متوازي السطوح المستطيلة (قاعدته مستطيل) 	الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع $V = xyh$	المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع $LA = 2(x + y)h$ $LA = 2h(x + y)$	المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين $SA = 2h(x + y) + 2(xy)$ ملاحظة: إذا كان متوازي المستطيلات مفتوح من إحدى الجهتين يكون القانون: $SA = 2h(x + y) + (xy)$
4	الاسطوانة 	الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع $V = \pi r^2 h$	المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع $LA = 2\pi rh$	المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين $SA = 2\pi rh + 2\pi r^2$
5	المخروط 	الحجم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع $V = \frac{1}{3}(\pi r^2)h$ $V = \frac{\pi}{3} r^2 h$	المساحة الجانبية = $\frac{1}{2}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي $LA = \frac{1}{2}(2\pi r)L$ $LA = \pi rL$	المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين $SA = \pi rL + 2\pi r^2$
6	الكرة 	الحجم = $\frac{4}{3}$ × (نصف القطر)^3 × π $V = \frac{4}{3}\pi r^3$	ليس لها مساحة جانبية	المساحة الكلية = 4 × (نصف القطر)^2 × π $SA = 4\pi r^2$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

ملاحظة: يمكن إيجاد معدل التغير بالاشتقاق بالنسبة إلى الزمن (t) لكل من:

ت	التغير	الرمز	معدل التغير بالنسبة للزمن
1	المساحة	A	$\frac{dA}{dt}$
2	الحجم	v	$\frac{dv}{dt}$
3	نصف القطر	r	$\frac{dr}{dt}$
4	الارتفاع	h	$\frac{dh}{dt}$
5	الطول	x	$\frac{dx}{dt}$
6	العرض	y	$\frac{dy}{dt}$
7	الزاوية	θ	$\frac{d\theta}{dt}$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

خطوات حل المعدلات الزمنية:

1) نستنتج (الشكل الهندسي والعلاقة المعطاة بالسؤال) ونحدد المتغيرات في المسألة. والمتغيرات يتم إعطائها رموز كما هو مبين في الجدول أعلاه.

2) إيجاد علاقة بين المتغيرات والعلاقة (إما قانون شكل هندسي أو علاقة مثلثية أو علاقة تشابه مثلثات أو علاقة مسافة بين نقطتين أو أي علاقة أخرى موجودة في السؤال) والعلاقات نوعان:

- علاقة رئيسية: وهي العلاقة التي يتم اشتقاقها بالنسبة للزمن.

- علاقة ثانوية: وهي العلاقة يتم استخدامها من أجل تقليل عدد المجاهيل في السؤال.

3) يتم تحديد الأعداد التي تكون بالسؤال وهي نوعان:

- ثابت دائم. (يتم تعويض العدد في العلاقة قبل الاشتقاق).

- متغير دائم. (وهناك كلمات في السؤال تدل على أنه متغير دائم مثل: في اللحظة، أو عندما يكون) ويتم تعويضه بعد الاشتقاق.

4) اشتقاق العلاقة الرئيسية بالنسبة للزمن.

5) التعويض بالمعلوم لإيجاد المجهول ومطلوب السؤال.

ملاحظة مهمة جداً:

1) الكلمات في السؤال (يتسرب، ينقص، ينخفض، يذوب، يتقلص، ينكمش) نعوض المقدار وتكون الإشارة (سالب).

مثال : مكعب جليدي يذوب بمعدل $0.5\ cm^3/min$ ، نعوضها بالحل $\frac{dv}{dt} = -0.5\ cm^3/min$

2) الكلمات (يصب، يزداد، يزيد، يتمدد) نعوض المقدار وتكون الإشارة (موجب).

مثال : مرشح مخروطي يصب فيه الماء بمعدل $0.1\ cm^3/sec$ ، نعوضها بالحل $\frac{dv}{dt} = +0.1\ cm^3/sec$

ملاحظة مهمة جداً:

1) إذا كانت وحدة القياس تحوي تكعيب فهذا يدل على معدل تغير في الحجم،
مثال: $\frac{dv}{dt} = 0.1\ cm^3/s$

2) إذا كانت وحدة القياس تحوي تربيع فهذا يدل على معدل تغير في المساحة،
مثال: $\frac{dA}{dt} = 2\ cm^2/s$

ملاحظة مهمة جداً:

عند اشتقاق أي متغير بالسؤال بالنسبة للزمن نشتقه اعتيادياً كما تعلمنا سابقاً عندما كنا نشتق الـ x ، ونضربه في $\frac{d(\text{اسم المتغير})}{dt}$.

$$A = x.y$$

$$\frac{dA}{dt} = x.\frac{dy}{dt} + y.\frac{dx}{dt}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

ملاحظة مهمة جداً:

تتضمن أسئلة المعدلات الزمنية إحدى المعطيات التالية:

1) شكل هندسي ثلاثي الأبعاد (مجسم): (مكعب، متوازي مستطيلات قاعدته مربعة، متوازي مستطيلات قاعدته مستطيلة، أسطوانة، مخروط، كرة) ويكون المطلوب إما: (معدل التغير في الحجم، أو معدل التغير في المساحة الكلية، أو معدل التغير في المساحة الجانبية) أو معدل التغير في إحدى أبعاد الشكل (الطول، العرض، الارتفاع، نصف القطر).

2) أسئلة التعامد التي ينتج عنها مثلث قائم الزاوية : وهي كل سؤال يكون الشكل الناتج من معطياته مثلث قائم الزاوية : ونستفيد من نظرية فيثاغورس $(z^2 = x^2 + y^2)$ كعلاقة أساسية أو كعلاقة ثانوية، ويكون المطلوب إيجاد:

- إما معدل التغير في طول أحد أضلاع المثلث وعندها نستخدم نظرية فيثاغورس كعلاقة رئيسية ويمكن استخدام إحدى القوانين المثلثية كعلاقة ثانوية:

$1)\ z^2 = x^2 + y^2$ نظرية فيثاغورس

-أو معدل التغير في الزاوية وعندها نستخدم قانون:

$$1)\quad \tan x = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

3) أسئلة النقاط على المنحنى وتكون على حالتين:

الحالة الأولى: عندما يذكر في المعطيات نقطة تنتمي أو تتحرك على منحنى ولا ترتبط هذه النقطة بنقطة خارج المنحنى، بحيث لا يذكر معدل اقتراب أو معدل ابتعاد، عندها تكون العلاقة المعطاة في السؤال هي العلاقة الأساسية التي يتم اشتقاقها.

الحالة الثانية: عندما يذكر في المعطيات نقطة تنتمي أو تتحرك على منحنى وترتبط هذه النقطة بنقطة خارج المنحنى، بحيث يطلب معدل اقتراب أو معدل ابتعاد، عندها يكون قانون المسافة بين نقطتين هي العلاقة الأساسية التي يتم اشتقاقها، وتكون معادلة المنحنى المعطاة في السؤال هي العلاقة الثانوية.

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

ملاحظة مهمة جداً: قانون المسافة بين نقطتين

$$S = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

4) أسئلة تشابه المثلثات القائمة الزاوية: وهي نوعان:

- أسئلة ظل الجسم: بحيث يتحرك الجسم مبتعداً أو مقترباً من مصدر ضوئي، بحيث تكون العلاقة الرئيسية قانون التشابه بين مثلثين.

- اسئلة المخروط: بحيث ينتج مثلث صغير عندما يكون المخروط يحتوي على سائل ويأخذ شكل المخروط بحيث تكون العلاقة الرئيسية قانون التشابه بين مثلثين.

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

ملاحظة مهمة:

تشابه المثلثات: إذا كانت زوايا المثلث الأول تساوي زوايا المثلث الثاني يكون المثلثان متشابهان.

ملاحظة مهمة جداً:

إذا تشابه مثلثان تناسبت أطوال أضلاعهما. بمعنى:

1) $\dfrac{\text{قاعدة(مثلث صغير)}}{\text{ارتفاع(مثلث صغير)}} = \dfrac{\text{قاعدة(مثلث كبير)}}{\text{ارتفاع(مثلث كبير)}}$

2) $\dfrac{\text{ارتفاع(مثلث صغير)}}{\text{قاعدة(مثلث صغير)}} = \dfrac{\text{ارتفاع(مثلث كبير)}}{\text{قاعدة(مثلث كبير)}}$

3) $\dfrac{\text{قاعدة(مثلث كبير)}}{\text{قاعدة(مثلث صغير)}} = \dfrac{\text{ارتفاع(مثلث كبير)}}{\text{ارتفاع(مثلث صغير)}}$

4) $\dfrac{\text{قاعدة(مثلث صغير)}}{\text{قاعدة(مثلث كبير)}} = \dfrac{\text{ارتفاع(مثلث صغير)}}{\text{ارتفاع(مثلث كبير)}}$

ملاحظة مهمة:

إذا كان المثلث قائم الزاوية يمكن استخدام قوانين النسب المثلثية كبديل لقوانين التشابه لأنها تعطي نفس النتيجة.

1) $\sin x = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

2) $\cos x = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

3) $\tan x = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

5) أسئلة المثلثات الغير قائم الزاوية:

أما إذا كان المثلث غير قائم الزاوية فلا نستطيع استخدام قوانين النسب المثلثية ويتم استخدام قوانين جيوب التمام.

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\theta$$
$$x^2 = z^2 + y^2 - 2zy\cos\theta$$
$$y^2 = z^2 + x^2 - 2zx\cos\theta$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

مسألة اليوم: (صفحة 135)

تستعمل المعادلة $S=\frac{\sqrt{hm}}{19}$ لحساب المساحة التقريبية لسطح جسم الإنسان، حيث h ثابت طوله بالسنتيميتر ، و S كتلته بالكيلو جرام .

يتبع خالد حمية غذائية تجعله غذائية تجعله يخسر من كتلته $2kg$ شهرياً ، ما معدل النقصان في مساحة سطح جسمه عندما تصبح كتلته $70kg$ ، علما بأن طوله $170cm$ ؟

المطلوب $\frac{dS}{dt}$, $h=170cm$, $m=70kg$, $\frac{dm}{dt}=-2kg/month$

$$S=\frac{\sqrt{hm}}{19} \Rightarrow S=\frac{\sqrt{170m}}{19} \Rightarrow S=\frac{\sqrt{170}}{19}\sqrt{m}$$

$$\frac{dS}{dt}=\frac{\sqrt{170}}{19}\times\frac{\frac{dm}{dt}}{2\sqrt{m}} \Rightarrow \frac{dS}{dt}=\frac{\sqrt{170}}{38\sqrt{m}}\times\frac{dm}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dS}{dt}=\frac{\sqrt{170}}{38\sqrt{70}}\times -2 \Rightarrow \frac{dS}{dt}=\frac{\sqrt{170}}{38\sqrt{70}}\times -2$$

$$\Rightarrow \frac{dS}{dt}=\frac{-\sqrt{170}}{19\sqrt{70}} \Rightarrow \frac{dS}{dt}=\frac{-\sqrt{170}}{19\sqrt{70}} \Rightarrow \boxed{\frac{dS}{dt}\approx -0.082\ cm^2/month}$$

معدل تغير المساحة والحجم بالنسبة إلى الزمن (فكرة الاشكال الهندسية)

مثال 1: (صفحة 136)

عند سقوط قطرة ماء على مسطح مائي تتكون موجات دائرية متحدة المركز ،

إذا كان نصف قطر إحدى الدوائر يزداد بمعدل $3cm/s$ ، فأجد كلا مما يأتي :

1) معدل تغير محيط الدائرة عندما يكون نصف قطرها $5cm$.

- نفرض نصف القطر r وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق $r=5cm$
- نفرض معدل تغير نصف القطر $\frac{dr}{dt}=3cm/s$ وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق
- نفرض محيط الدائرة C وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق
- نفرض معدل تغير محيط الدائرة $\frac{dC}{dt}$ وهو المطلوب

العلاقة الرئيسة في السؤال هي قانون محيط الدائرة:

$$C=2\pi r \Rightarrow \frac{dC}{dt}=2\pi\frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dC}{dt}=2\pi(3) \Rightarrow \frac{dC}{dt}=6\pi\ cm/s$$

إذن يزداد محيط الدائرة بمعدل $6\pi\ cm/s$ عندما يكون نصف قطرها $5\ cm$.

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

2) معدل تغير مساحة الدائرة عندما يكون نصف قطرها $9cm$.

- نفرض نصف القطر $r = 9cm$ وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق

- نفرض معدل تغير مساحة الدائرة $\frac{dA}{dt}$ وهو المطلوب

العلاقة الرئيسة في السؤال هي قانون مساحة الدائرة:

$$A = \pi r^2 \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 2\pi(9)(3) \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 54\pi\ cm^2/s$$

أتحقق من فهمي: (صفحة 137)

تنفخ ماجدة بالوناً على شكل كرة ، فيزداد حجمه بمعدل $80\ cm^3/s$ ، أجد معدل زيادة نصف قطر البالون عندما يكون نصف القطر $6cm$.

- الشكل: كرة

- نفرض نصف القطر $r = 6cm$ وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق

- نفرض معدل تغير نصف القطر $\frac{dr}{dt}$ وهو المطلوب

- نفرض حجم الكرة V وهو متغير .

- نفرض معدل تغير حجم الكرة $\frac{dv}{dt} = 80\ cm^3/s$ وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق

العلاقة الرئيسة في السؤال هي قانون حجم الكرة =

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \Rightarrow 80 = 4\pi(6)^2\left(\frac{dr}{dt}\right) \Rightarrow 80 = 144\pi\left(\frac{dr}{dt}\right)$$

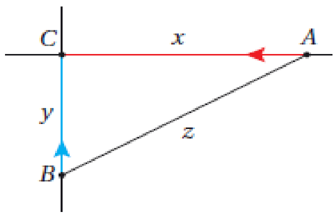
$$\frac{80}{144\pi} = \frac{144\pi}{144\pi}\left(\frac{dr}{dt}\right) \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{80}{144\pi} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = 0.55\pi\ cm/s$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

معدل تغير المسافة بالنسبة إلى الزمن (فكرة التعامد التي ينتج عنها مثلث قائم الزاوية)

مثال 2: (صفحة 138)

تتحرك السيارة A في اتجاه الغرب بسرعة 80Km/h وتتحرك السيارة B في اتجاه الشمال بسرعة 100Km/h وهما تتجهان نحو تقاطع مروري، أجد معدل تغير البعد بين السيارتين عندما تكون السيارة A والسيارة B على بعد 0.3Km و 0.4Km (على الترتيب) من التقاطع.



- الشكل: مثلث قائم الزاوية
- طول الضلع القائم الأول $x = 0.3\ km$ وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق
- التغير بطول الضلع $\frac{dx}{dt} = 80\ km/h$ وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق
- طول الضلع القائم الثاني $y = 0.4\ km$ وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق
- التغير بطول الضلع $\frac{dy}{dt} = 100\ km/h$ وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق
- المطلوب: التغير بطول الضلع الثالث $\frac{dz}{dt}$

العلاقة الرئيسة في السؤال هي قانون نظرية فيثاغورس للمثلث القائم الزاوية

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \Longrightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{2(0.3)(-80) + 2(0.4)(-100)}{2\sqrt{(0.3)^2 + (0.4)^2}}$$

$$\Longrightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{-48 - 80}{2\sqrt{0.25}} \Longrightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{-128}{1} \Longrightarrow \frac{dz}{dt} = -128\ Km/h$$

اذن تقترب السيارتان إحداهما من الاخر بمعدل 128km/h عندما تكون السيارة A والسيارة B على بعد 0.3km و 0.4km (على الترتيب) من التقاطع.

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

أتحقق من فهمي: (صفحة 139)

تحركت السيارة A والسيارة B في الوقت نفسه ومن النقطة نفسها بحيث اتجهت السيارة A نحو الشمال بسرعة 45Km/h, واتجهت السيارة B نحو الشرق بسرعة 40km/h، أجد معدل تغير البعد بين السيارتين بعد ساعتين من انطلاقهما .

- الشكل: مثلث قائم الزاوية
- طول الضلع القائم الأول $x = 40 \times 2 = 80\ km$ وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق
- التغير بطول الضلع $\frac{dx}{dt} = 40\ km/h$ وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق
- طول الضلع القائم الثاني $y = 45 \times 2 = 90 km$ وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق
- التغير بطول الضلع $\frac{dy}{dt} = 45\ km/h$ وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق
- المطلوب : التغير بطول الضلع الثالث $\frac{dz}{dt}$

العلاقة الرئيسة في السؤال هي قانون نظرية فيثاغورس للمثلث القائم الزاوية

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{(80)(40) + (90)(45)}{\sqrt{(80)^2 + (90)^2}} \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{3200 + 4050}{\sqrt{6400 + 8100}}$$

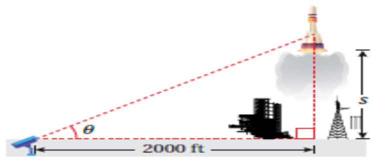
$$\Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{7250}{\sqrt{14500}} \Rightarrow \frac{dz}{dt} \approx 60.21\ Km/h$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

معدل تغير الزاوية بالنسبة إلى الزمن: (فكرة التعامد التي ينتج عنها مثلث قائم الزاوية)

مثال 3 من الحياة: (صفحة 139)

رصدت كاميرا مثبتة عند مستوى سطح الأرض لحظة إطلاق صاروخ رأسياً إلى الأعلى ، وقد أعطي ارتفاعه بالاقتران : $s(t) = 50\,t^2$ ، حيث s الموقع بالأقدام ، و t الزمن بالثواني ، إذا كانت الكاميرا تبعد مسافة $2000\,ft$ عن منصة الإطلاق ، فأجد معدل تغير زاوية ارتفاع الصاروخ 10 ثوان من انطلاقه .



- الشكل: مثلث قائم الزاوية ، نفرض s موقع الصاروخ ، نفرض θ زاوية ارتفاع الصاروخ

المطلوب: أجد معدل تغير زاوية

العلاقة : $\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{s}{2000}$

نشتق اقتران الموقع لإيجاد السرعة:

$$s(t) = 50\,t^2 \implies v(t) = \boxed{\frac{ds}{dt} = 100\,t}$$

- طول الضلع القائم الأول $x = 2000\,ft$ وهو ثابت يعوض بعد الاشتقاق
- طول الضلع القائم الثاني y وهو يمثل الاقتران $s(t) = 50\,t^2$
- المطلوب $\frac{d\theta}{dt}$

$$\tan\theta = \frac{s}{2000} \implies \sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2000}\times\frac{ds}{dt}$$

$$\left[\frac{1}{\cos^2}\theta\,\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2000}\times\frac{ds}{dt}\right]\cos^2\theta \implies \frac{d\theta}{dt} = \frac{\cos^2\theta}{2000}\times\frac{ds}{dt}$$

عدد المجاهيل في العلاقة 2 بالتالي نحتاج لعلاقة ثانوية لتقليل عدد المجاهيل $\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$.

ولكن الوتر غير موجود بالمعطيات لذلك، نستعين بعلاقة ثانوية (نظرية فيثاغورس) لإيجاد طول الضلع الثالث (الوتر).

$$z = \sqrt{y^2 + x^2} \implies z = \sqrt{(50\,t^2)^2 + (2000)^2} \implies z = \sqrt{(50\,(10)^2)^2 + (2000)^2}$$

$$\implies z = \sqrt{(5000)^2 + (2000)^2} \implies \boxed{z = \sqrt{(5000)^2 + (2000)^2} \quad \text{طول الوتر}}$$

$$\cos\theta = \frac{2000}{\sqrt{(5000)^2 + (2000)^2}} \implies \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{(5)^2 + (2)^2}} \implies \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{25 + 4}}$$

$$\implies \boxed{\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{29}}}$$

نعوض القيم في العلاقة الرئيسية لإيجاد المطلوب $\frac{d\theta}{dt}$:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\cos^2\theta}{2000}\times\frac{ds}{dt} \implies \frac{d\theta}{dt} = \frac{(\frac{2}{\sqrt{29}})^2}{2000}\times 100\,t$$

$$\implies \frac{d\theta}{dt} = \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{29}}\right)^2}{2000}\times 100\,(10) \implies \frac{d\theta}{dt} = \frac{\frac{4}{29}}{2} \implies \frac{d\theta}{dt} = \frac{2}{29}\;rad/s$$

إذن معدل تغير زاوية ارتفاع الصاروخ عندما $t = 10$ هو: $\frac{d\theta}{dt} = \frac{2}{29}\,rad/s$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

اتحقق من فهمي: (صفحة 141)

أمسك ولد ببكرة خيط طائرة ورقية تحلق على ارتفاع $50m$ فوق سطح الأرض ، وتتحرك أفقياً بسرعة $2m/s$. أجد معدل تغير الزاوية بين الخيط والمستوى الأفقي عندما يكون طول الخيط $100m$ ، علماً بأن ارتفاع يد الولد عن الأرض $1.5m$.

$x = ?$

$\frac{dx}{dt} = 2$

$y = 50 - 1.5 = 48.5$

$L = 100$

$\frac{d\theta}{dt} = \text{المطلوب}$

$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} \Rightarrow \tan\theta = \frac{48.5}{x}$

$\sec^2\theta \frac{d\theta}{dt} = -\frac{48.5}{x^2} \times \frac{dx}{dt} \Rightarrow \sec^2\theta \frac{d\theta}{dt} = -\frac{48.5}{x^2} \times \frac{dx}{dt}$

عدد المجاهيل في العلاقة 2 بالتالي نحتاج لعلاقة ثانوية لتقليل عدد المجاهيل.

$\sec\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} \Rightarrow \sec^2\theta = \frac{L^2}{x^2}$

$\frac{L^2}{x^2} \times \frac{d\theta}{dt} = -\frac{48.5}{x^2} \times \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{L^2}{x^2} \times \frac{d\theta}{dt} = -\frac{48.5}{x^2} \times \frac{dx}{dt}$

$\Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = -\frac{48.5}{x^2} \times \frac{dx}{dt} \times \frac{x^2}{L^2} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = -\frac{48.5}{L^2} \times \frac{dx}{dt}$

$\Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = -\frac{48.5}{(100)^2} \times 2 \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = -\frac{48.5}{5000} \Rightarrow \boxed{\frac{d\theta}{dt} \approx -0.0097\, rad/s}$

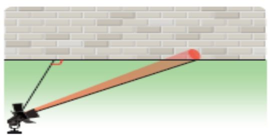
معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

معدل التغير بالنسبة إلى الزمن والحركة الدائرية:

(فكرة التعامد التي ينتج عنها مثلث قائم الزاوية)

مثال 4: (صفحة 141)

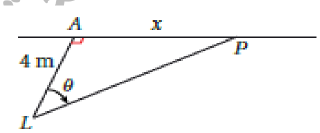
يدور مصباح مثبت بالأرض حول نفسه 3 دورات في الدقيقة ، ويبعد مسافة $4m$ عن جدار مستقيم كما في الشكل المجاور، أجد سرعة تحرك بقعة ضوء المصباح على الجدار عندما تكون على بعد $8m$ من أقرب نقطة إلى المصباح على الجدار أثناء حركتها مبتعدة عن هذه النقطة .



المطلوب : $\frac{dx}{dt}$

- العلاقة الرئيسية هي $\tan\theta$

$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$



$$\tan\theta = \frac{x}{4} \Rightarrow x = 4\tan\theta \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 4\sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dt}$$

عدد المجاهيل في العلاقة 3 بالتالي نحتاج لعلاقات ثانوية لتقليل عدد المجاهيل.

- لإيجاد معدل تغير الزاوية $\frac{d\theta}{dt}$ وهو يمثل السرعة الزاوية

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\pi \times \frac{\text{عدد الدورات}}{\text{الزمن}} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = 2\pi \times \frac{3}{1} \Rightarrow \boxed{\frac{d\theta}{dt} = 6\pi\ rad/min}$$

- لإيجاد $\sec^2\theta$ نستخدم متطابقة فيثاغورس : $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} \Rightarrow \tan\theta = \frac{8}{4} \Rightarrow \tan\theta = 2$$

$$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta \Rightarrow \sec^2\theta = 1 + (2)^2 \Rightarrow \boxed{\sec^2\theta = 5}$$

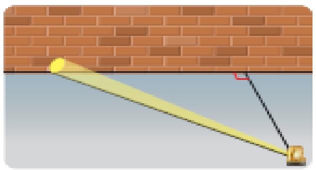
بتعويض القيم $\boxed{\frac{d\theta}{dt} = 6\pi}$ و $\boxed{\sec^2\theta = 5}$ بالعلاقة الرئيسية التي تم اشتقاقها ، يتبقى مجهول واحد في المعادلة $\frac{dx}{dt}$ وهو المطلوب في السؤال .

$$\frac{dx}{dt} = 4\sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 4\,(5)(6\pi) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 120\pi$$

إذن تتحرك بقعة الضوء بسرعة $120\pi m/min$ عندما تكون على بعد $8m$ عن النقطة A أثناء حركتها مبتعدة عن هذه النقطة .

أتحقق من فهمي: (صفحة 143)

يدور مصباح مثبت بالأرض حول نفسه 4 دورات في الدقيقة ، ويبعد مسافة $3m$ عن جدار مستقيم كما في الشكل المجاور، أجد سرعة تحرك بقعة ضوء المصباح على الجدار عندما تكون على بعد $1m$ من أقرب نقطة إلى المصباح على الجدار أثناء حركتها مقتربة عن هذه النقطة .



المطلوب : $\frac{dx}{dt}$

- العلاقة الرئيسية هي $\tan\theta$

$$\tan\theta=\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}\Rightarrow \tan\theta=\frac{x}{3}\Rightarrow x=3\tan\theta\Rightarrow\frac{dx}{dt}=3\sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dt}$$

عدد المجاهيل في العلاقة 3 بالتالي نحتاج لعلاقات ثانوية لتقليل عدد المجاهيل.

- لإيجاد معدل تغير الزاوية $\frac{d\theta}{dt}$ وهو يمثل السرعة الزاوية

$$\frac{d\theta}{dt}=2\pi\times\frac{\text{عدد الدورات}}{\text{الزمن}}\Rightarrow\frac{d\theta}{dt}=2\pi\times\frac{4}{1}\Rightarrow\boxed{\frac{d\theta}{dt}=-8\pi\ rad/min}$$

- لإيجاد $\sec^2\theta$ نستخدم متطابقة فيثاغورس : $\sec^2\theta=1+\tan^2\theta$

$$\tan\theta=\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}\Rightarrow\tan\theta=\frac{1}{3}$$

$$\sec^2\theta=1+\tan^2\theta\Rightarrow\sec^2\theta=1+\left(\frac{1}{3}\right)^2\Rightarrow\sec^2\theta=1+\frac{1}{9}\Rightarrow\boxed{\sec^2\theta=\frac{10}{9}}$$

بتعويض القيم $\boxed{\frac{d\theta}{dt}=-8\pi}$ و $\boxed{\sec^2\theta=\frac{10}{9}}$ بالعلاقة الرئيسية التي تم اشتقاقها ، يتبقى مجهول واحد في المعادلة $\frac{dx}{dt}$ وهو المطلوب في السؤال .

$$\frac{dx}{dt}=3\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt}\Rightarrow\frac{dx}{dt}=3\left(\frac{10}{9}\right)(-8\pi)\Rightarrow\frac{dx}{dt}=\left(\frac{10}{3}\right)(-8\pi)\Rightarrow\boxed{\frac{dx}{dt}=-\frac{80\pi}{3}}$$

إذن تتحرك بقعة الضوء بسرعة $-\frac{80\pi}{3}m/min$ عندما تكون على بعد $1m$ عن النقطة A أثناء حركتها مقتربة عن هذه النقطة .

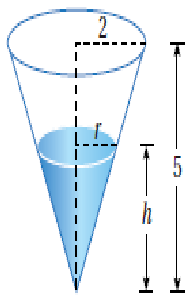
معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

معدل تغير حجم السائل بالنسبة إلى الزمن: (فكرة تشابه المثلثات القائمة الزاوية)

مثال 5: (صفحة 143)

خزان ماء على شكل مخروط دائري قائم ، ارتفاعه 5m ، ونصف قطر قاعدته 2m ، ورأسه إلى الأسفل .

تسرب الماء من الخزان بمعدل $\frac{1}{12}\mathrm{m^3/min}$. ما معدل تغير ارتفاع الماء في الخزان عندما يكون ارتفاعه 4m ؟



الشكل مخروط رأسه للأسفل

نصف قطر المخروط 2 ، نصف قطر سطح الماء r ، ارتفاع المخروط 5

ارتفاع الماء في المخروط h وتساوي 4 وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق

حجم الماء في الخزان V ، التغير في حجم الماء $\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{12}$

المطلوب : معدل تغير ارتفاع الماء في الخزان $\frac{dh}{dt}$

باستعمال تشابه المثلثات

$$\frac{r}{h} = \frac{2}{5} \Rightarrow r = \frac{2h}{5}$$

العلاقة الرئيسية هي حجم المخروط

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{2h}{5}\right)^2 h \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi\frac{4h^2}{25}h \Rightarrow V = \frac{4\pi}{75}h^3$$

$$\frac{dV}{dt} = \left(\frac{4\pi}{75}\right)3h^2\frac{dh}{dt} \Rightarrow -\frac{1}{12} = \left(\frac{4\pi}{75}\right)3(4)^2\frac{dh}{dt} \Rightarrow -\frac{1}{12} = \frac{192\pi}{75}\frac{dh}{dt}$$

$$\Rightarrow \left[-\frac{1}{12} = \frac{192\pi}{75}\frac{dh}{dt}\right] \times \frac{75}{192\pi} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = -\frac{75}{2304\pi} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = -\frac{25}{768\pi}$$

إذن يتناقص ارتفاع الماء في الخزان بمعدل $\frac{25}{768\pi}m/min$ عندما يكون ارتفاع الماء $4m$.

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

أتحقق من فهمي: (صفحة 144)

خزان ماء على شكل مخروط دائري قائم ، ارتفاعه $10m$ ، ونصف قطر قاعدته $5m$ ، صب الماء في الخزان بمعدل $\pi m^3/min$. ما معدل تغير ارتفاع الماء في الخزان عندما يكون ارتفاعه $8m$ ؟

الشكل مخروط رأسه للأسفل

نصف قطر المخروط 5

نصف قطر سطح الماء r

ارتفاع المخروط 10

ارتفاع الماء في المخروط h وتساوي 8 وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق

حجم الماء في الخزان V

التغير في حجم الماء $\frac{dV}{dt} = \pi$

المطلوب : معدل تغير ارتفاع الماء في الخزان $\frac{dh}{dt}$

باستعمال تشابه المثلثات

$$\frac{r}{h} = \frac{5}{10} \Rightarrow r = \frac{1}{2}h$$

المعادلة الرئيسية هي حجم المخروط

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2}h\right)^2 h \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{4}h^2\right)h \Rightarrow V = \frac{\pi}{12}h^3$$

$$\frac{dV}{dt} = \left(\frac{\pi}{12}\right)3h^2\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt} \Rightarrow \pi = \frac{\pi}{4}(8)^2\frac{dh}{dt}$$

$$\Rightarrow \pi = 16\pi\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{\pi}{16\pi} = \frac{16\pi}{16\pi}\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{1}{16}m/min$$

إذن يزداد ارتفاع الماء في الخزان بمعدل $\frac{1}{16}m/min$ عندما يكون ارتفاع الماء 8m .

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

أتدرب وأحل المسائل: (صفحة 145)

يزداد طول أحد أضلاع مستطيل بمعدل $2m/s$ ، ويقل طول ضلعه الآخر بمعدل $3m/s$ ، بحيث يحافظ المستطيل على شكله ، وفي لحظة معينة بلغ طول الضلع الأول $20cm$ ، وطول الضلع الثاني $50cm$.

1) ما معدل تغير مساحة المستطيل في تلك اللحظة؟

الشكل: مستطيل

القانون : مساحة المستطيل $A = xy$

$$\frac{dx}{dt} = 2\ cm/s \qquad , \frac{dy}{dt} = -3\ cm/s \qquad , x = 20\ cm/s \qquad , y = 50\ cm/s$$

$$A = xy \quad \Rightarrow \frac{dA}{dt} = x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 20(-3) + 50(2)$$

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = -60 + 100 \quad \Rightarrow \boxed{\frac{dA}{dt} = 40\ cm^2/s}$$

2) ما معدل تغير محيط المستطيل في تلك اللحظة؟

القانون : محيط المستطيل $C = 2x + 2y$

$$C = 2x + 2y \quad \Rightarrow \frac{dC}{dt} = 2\frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt} \quad \Rightarrow \frac{dC}{dt} = 2(2) + 2(-3)$$

$$\Rightarrow \frac{dC}{dt} = 4 + (-6) \quad \Rightarrow \frac{dC}{dt} = \boxed{-2\ cm/s}$$

3) ما معدل تغير طول قطر المستطيل في تلك اللحظة؟

$$R^2 = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow R = \sqrt{(20)^2 + (50)^2} \quad \Rightarrow R = \sqrt{2900}$$

$$\Rightarrow \quad R = \sqrt{1000 \times 29} \quad \Rightarrow \quad R = 10\sqrt{29} \quad \Rightarrow \quad 2R\frac{dR}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$\Rightarrow 2(10\sqrt{29})\frac{dR}{dt} = 2(20)(2) + 2(50)(-3) \Rightarrow \ 2(10\sqrt{29})\frac{dR}{dt} = 80 + (-300)$$

$$\Rightarrow \frac{2(10\sqrt{29})}{2(10\sqrt{29})}\frac{dR}{dt} = \frac{-220}{2(10\sqrt{29})} \qquad \Rightarrow \boxed{\frac{dR}{dt} = -\frac{11}{\sqrt{29}}\ cm/s}$$

4) أي الكميات في المسألة متزايدة؟ أيهما متناقصة؟ أبرر إجابتي.

في اللحظة المذكورة تكون المساحة متزايدة (لأن معدل تغيرها موجب) ، بينما يتناقص كل من المحيط وطول القطر (لأن معدل نغير كل منهما سالب) .

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

مكعب طول ضلعه $10cm$ ، بدأ المكعب يتمدد ، فزاد طول ضلعه بمعدل $6cm/s$ ، وظل محافظاً على شكله :

5) أجد معدل تغير حجم المكعب بعد $4\ s$ من بدء تمدده .

الشكل: مكعب ، القانون حجم المكعب : $V = x^3$

$$x = 10\ cm \qquad , \frac{dx}{dt} = 6\ cm/s \qquad , t = 4\ s \qquad , \frac{dV}{dt} = ?$$

$$V = x^3 \Rightarrow V = (10+6t)^3 \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 3(10+6t)^2(6)$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dt} = 18\big(10+6(4)\big)^2 \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 18(34)^2 \Rightarrow \boxed{\frac{dV}{dt} = 20808\ cm^3/s}$$

6) أجد معدل تغير مساحة سطح المكعب بعد $6s$ من بدء تمدده .

القانون مساحة المكعب : $V = 6x^2$

$$V = 6(10+6t)^2 \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 12(10+6t)6$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dt} = 72\big(10+6(6)\big) \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 72(46) \Rightarrow \boxed{\frac{dV}{dt} = 3312\ cm^2/s}$$

وقود : خزان أسطواني الشكل، ارتفاعه $15m$ ، وقطر قاعدته $2m$ ملئ الخزان بالوقود بمعدل $500\ L/min$:

7) أجد معدل ارتفاع الوقود في الخزان عند أي لحظة.

الشكل: أسطواني ، القانون : حجم الاسطوانة $V = \pi r^2 h$

ارتفاع الخزان $h = 15m$ ، قطر قاعدته $2r = 2m$

نصف قطر قاعدته $r = 1m$ ثابت يعوض قبل الاشتقاق

معدل التغير في الحجم $\frac{dV}{dt} = 500\ L/min$ وتساوي $\frac{dV}{dt} = 0.5\ m^3/min$

المطلوب : معدل ارتفاع الوقود في الخزان $\frac{dh}{dt} = ?$

$$V = \pi r^2 h \Rightarrow V = \pi(1)^2 h \Rightarrow V = \pi h \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \pi \frac{dh}{dt}$$

$$\Rightarrow 0.5 = \pi \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{0.5}{\pi} \Rightarrow \boxed{\frac{dh}{dt} = \frac{1}{2\pi} m/min}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

8) أجد معدل تغير المساحة الجانبية للوقود عند أي لحظة.

القانون : المساحة الجانبية للأسطوانة = محيط القاعدة × الارتفاع

المطلوب : معدل تغير المساحة الجانبية للوقود $\frac{dA}{dt} = ?$

$$A = 2\pi r h \quad \Rightarrow A = 2\pi(1)h \quad \Rightarrow A = 2\pi h$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi \frac{dh}{dt} \quad \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 2\pi \frac{1}{2\pi} \quad \Rightarrow \boxed{\frac{dA}{dt} = 1\ m^2/min}$$

الآن : يسقط الرمل من حزام ناقل بمعدل $10\ m^3/min$ على قمة كومة مخروطية الشكل ، إذا كان ارتفاع الكومة يساوي دائماً ثلاثة أثمان طول قطر قاعدتها ، فأجد كلا مما يأتي :

أشاهد المقطع المرئي (الفيديو) في الرمز الآتي:

9) سرعة تغير ارتفاع الكومة عندما يكون ارتفاعها $4\ m$.

الشكل مخروط رأسه للأعلى

معدل تغير حجم كومة الرمل $\frac{dV}{dt} = 10\ m^3/min$

ارتفاع كومة الرمل $h = \frac{3}{8}(2r)$ وتساوي $h = \frac{3}{8}(2r)$

$$h = \frac{3}{8}(2r) \quad \Rightarrow h = \frac{3}{4} r \quad \Rightarrow \boxed{r = \frac{4}{3} h}$$

المطلوب : سرعة تغير ارتفاع الكومة $\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=4} = ?$

العلاقة الرئيسية هي حجم المخروط

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \quad \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{4}{3}h\right)^2 h \quad \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{4}{3}h\right)^2 h$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{16}{9}h^2\right)h \quad \Rightarrow \boxed{V = \frac{16}{27}\pi h^3}$$

$$\frac{dV}{dt} = (3)\frac{16}{27}\pi h^2 \frac{dh}{dt} \quad \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{16}{9}\pi h^2 \frac{dh}{dt} \quad \Rightarrow 10 = \frac{16}{9}\pi(16)\frac{dh}{dt}$$

$$\Rightarrow \left[10 = \frac{256}{9}\pi\frac{dh}{dt}\right] \times \frac{9}{256\pi} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{90}{256\pi} \Rightarrow \boxed{\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=4} = \frac{45}{128\pi}\ m/min}$$

$$\boxed{\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=4} = 0.112\ m/min}$$

إذن يزداد ارتفاع الكومة المخروطية عند تلك اللحظة بمعدل 0.112 متراً لكل ثانية تقريباً .

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

10) سرعة تغير طول نصف قطر قاعدة الكومة عندما يكون ارتفاعها $4\ m$.

$$r = \frac{4}{3}h \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{4}{3}\frac{dh}{dt}$$

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{h=4} = \frac{4}{3}\frac{dh}{dt} \quad \Rightarrow \left.\frac{dr}{dt}\right|_{h=4} = \frac{4}{3} \times \frac{45}{128\pi}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{dr}{dt}\right|_{h=4} = \frac{15}{32\pi}\frac{m}{min} \quad \Rightarrow \boxed{\left.\frac{dr}{dt}\right|_{h=4} = 0.149\ m/min}$$

إذن يزداد نصف القطر عند تلك اللحظة بمعدل 0.149 متراً لكل ثانية تقريباً .

11) سرعة تغير مساحة قاعدة الكومة عندما يكون ارتفاعها $4\ m$.

المطلوب : سرعة تغير مساحة قاعدة الكومة $\left.\frac{dA}{dt}\right|_{h=4} = ?$

$$h = \frac{3}{8}(2r)$$

$$A = \pi r^2 \quad \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 2\pi r\frac{dr}{dt} \quad \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 2\pi r\frac{15}{32\pi}$$

عدد المجاهيل 2 نحتاج علاقة ثانوية لتقليل عدد المجاهيل:

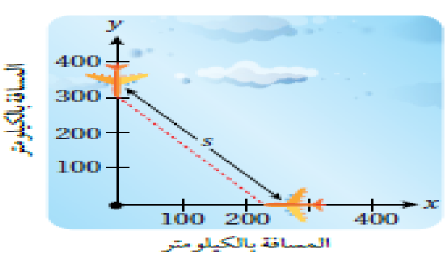
$$h = \frac{3}{8}(2r) \quad \Rightarrow 4 = \frac{3}{8}(2r) \quad \Rightarrow \left[4 = \frac{3}{4}r\right] \times \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \boxed{r = \frac{16}{3}}$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi\left(\frac{16}{3}\right)\left(\frac{15}{32\pi}\right) \quad \Rightarrow \boxed{\frac{dA}{dt} = 5\ m^2/min}$$

إذن تزداد مساحة قاعدة الكومة بمعدل $5\ m^2/min$ عندما يكون ارتفاعها 4 أمتار .

طيران: رصد مراقب الحركة الجوية في أحد المطارات طائرتين تحلقان على الارتفاع نفسه، وتقتربان من نقطة التقاء مسار حركتيهما في زاوية قائمة كما في الشكل المجاور.

كانت الطائرة الأولى تسير بسرعة $450\ km/h$ ، في حين كانت الطائرة الثانية تسير بسرعة $600\ km/h$:



معتصم ابراهيم

12) أجد معدل تغير المسافة بين الطائرتين في اللحظة التي تبعد فيها الطائرة الأولى مسافة $225\ km$ عن نقطة التقاء مسار حركة الطائرتين، في حين تبعد الطائرة الثانية مسافة $450\ km/h$ عن النقطة نفسها .

بعد الطائرة الأولى عن نقطة التقاء المسارين في لحظة ما هو $x = 225km$ وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق

معدل تغير (تقترب) المسافة بين الطائرة الأولى ونقطة الالتقاء $\frac{dx}{dt} = -450km/h$

بعد الطائرة الثانية عن نقطة التقاء المسارين في لحظة ما هو $y = 300km$ وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق

معدل تغير(تقترب) المسافة بين الطائرة الأولى ونقطة الالتقاء $\frac{dy}{dt} = -600km/h$

البعد بين الطائرتين هو $s = ?$

المطلوب : معدل تغير المسافة بين الطائرتين $\frac{ds}{dt} = ?$

العلاقة الرئيسة في السؤال هي نظرية فيثاغورس للمثلث القائم الزاوية

$$s = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{(225)(-450) + (300)(-600)}{\sqrt{(225)^2 + (300)^2}} \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{-101250 - 180000}{\sqrt{50625 + 90000}}$$

$$\Rightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{-281250}{\sqrt{140625}} \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{-281250}{375} \Rightarrow \frac{ds}{dt} \approx -750\ Km/h$$

إذن في تلك اللحظة تقل المسافة بين الطائرتين بمعدل 750 كيلومتراً في الساعة .

13) هل يجب على مراقب الحركة الجوية توجيه إحدى الطائرتين لاتخاذ مسار مختلف؟ أبرر إجابتي.

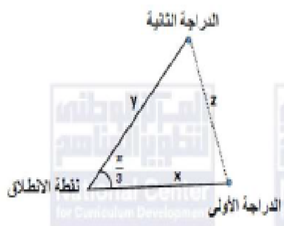
يتم حساب الوقت الذي تحتاجه كل من الطائرتين للوصول لنقطة التقاء المسارين: الزمن = $\frac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}}$

$$t_1 = \frac{225}{450} \Rightarrow t_1 = 0.5\ h \Rightarrow t_2 = \frac{300}{600} \Rightarrow t_2 = 0.5\ h$$

بما أن الطائرتين ستصلان لنقطة التقاء المسارين بعد نصف ساعة من لحظة رصدهما من قبل المراقب الجوي، فإن اصطدامهما متوقع، ويجب على مراقب الحركة الجوية التوجيه بالتغيير اللازم في مسار إحداهما أو في سرعتها على الأقل حتى لا تصلان إلى نقطة التقاء المسارين معاً في الوقت نفسه.

معتصم ابراهيم 0786667808

14) دراجات نارية : تحركت دراجتان في الوقت نفسه ، ومن النقطة نفسها ، على طريقين مستقيمين ، قياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{3} rad$. إذا كانت سرعة الدراجة الأولى $15km/h$، وسرعة الدراجة الثانية $20km/h$ ، فأجد سرعة ابتعاد كل منهما عن الأخرى بعد ساعتين من انطلاقهما .



المسافة المقطوعة للدراجة الأولى $x = 15t$ وهو ثابت يعوض قبل الاشتقاق.

المسافة المقطوعة للدراجة الثانية $y = 20t$ وهو ثابت يعوض قبل الاشتقاق.

سرعة الدراجة الأولى $\frac{dx}{dt} = 15km/h$ وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق

سرعة الدراجة الثانية $\frac{dy}{dt} = 20km/h$ وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق

الزاوية بينهما $\theta = \frac{\pi}{3} rad$ ، المطلوب : $\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=2} = ?$

الشكل مثلث غير قائم الزاوية ، العلاقة الرئيسية: قانون جيوب التمام

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\frac{\pi}{3}$$

$$z = \sqrt{(15t)^2 + (20t)^2 - 2(15t)(20t)\left(\frac{1}{2}\right)} \Rightarrow z = \sqrt{225t^2 + 400t^2 - (15t)(20t)}$$

$$\Rightarrow z = \sqrt{225t^2 + 400t^2 - 300t^2} \Rightarrow z = \sqrt{625t^2 - 300t^2}$$

$$\Rightarrow z = \sqrt{325t^2} \Rightarrow z = 5\sqrt{13}t \Rightarrow \frac{dz}{dt} = 5\sqrt{13}\ km/h$$

إذن بعد ساعتين من انطلاقهما تتباعد الدراجتان كل منهما عن الأخرى بسرعة $5\sqrt{13}$ كيلومتر كل ساعة.

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

15) قوارب : يسحب جمال قاربه إلى رصيف الاصطفاف باستعمال بكرة سحب ترتفع $1m$ عن مقدمة القارب ، إذا طوت البكره حبل السحب بسرعة $1m/s$ ، وكان القارب يبعد عن الرصيف مسافة $8m$ في لحظة ما ، فما سرعة اقتراب القارب من الرصيف عندئذ ؟

الشكل: مثلث قائم الزاوية ، العلاقة الرئيسية: نظرية فيثاغورس

المسافة بين الرصيف والبكرة $y = 1m$ وهي ثابتة تعوض قبل الاشتقاق

المسافة بين الرصيف والقارب $x = 8m$ وهي متغيرة تعوض بعد الاشتقاق

معدل تغير المسافة بين القارب ورصيف الاصطفاف $\frac{dL}{dt} = -1m/s$

المطلوب : سرعة اقتراب القارب من الرصيف $\frac{dx}{dt} = ?$

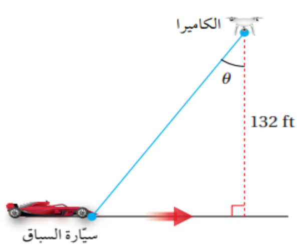
$$L^2 = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow L^2 = x^2 + (1)^2 \quad \Rightarrow L^2 = x^2 + 1$$

$$2L\frac{dL}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow 2L\frac{dL}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \frac{2x}{2x}\frac{dx}{dt} = \frac{2L}{2x}\frac{dL}{dt} \quad \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\frac{dL}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{8^2+1}}{8}\frac{dL}{dt} \quad \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{64+1}}{8}(-1) \Rightarrow \boxed{\frac{dx}{dt} = -\frac{\sqrt{65}}{8}\ m/s}$$

إذن في تلك اللحظة يقترب القارب من الرصيف بسرعة $\frac{\sqrt{65}}{8}\ m/s$

سباقات سيارات : ترتفع كاميرا عن الارض مسافة $132\ ft$ ، وترصد سيارة تتحرك على مضمار سباق ، وتبلغ سرعتها $264\ ft/s$ كما في الشكل المجاور :

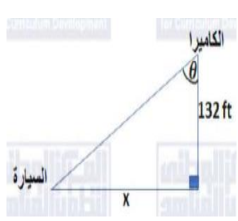


16) أجد سرعة تغير الزاوية θ عندما تكون السيارة أسفل الكاميرا تماماً .

الشكل: مثلث قائم الزاوية ، العلاقة الرئيسية : $\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

المسافة بين الكاميرا والأرض $y = 132\ ft$ وهي ثابتة تعوض قبل الاشتقاق

المسافة بين السيارة والنقطة على الأرض $x = ?$ وهي متغيرة



معدل تغير المسافة بين السيارة والنقطة على الأرض (تقترب) $\frac{dx}{dt} = -264\ ft/s$

الزاوية $\theta = 0$ لأنه عندما تكون السيارة أسفل الكاميرا تماماً .

المطلوب : معدل تغير الزاوية θ $\frac{d\theta}{dt} = ?$

$$\tan\theta = \frac{x}{132} \quad \Rightarrow \sec^2\theta\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{132}.\frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{132}.\frac{dx}{dt} \times \cos^2 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{132}(-264) \times (1) \quad \Rightarrow \boxed{\frac{d\theta}{dt} = -2\ rad/s}$$

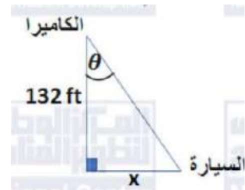
معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

17) أجد سرعة تغير الزاوية θ بعد نصف ثانية من مرور السيارة أسفل الكاميرا .

بعد نصف ثانية:

المسافة بين السيارة والنقطة على الأرض = السرعة × الزمن وتساوي $x = 0.5 \times 264 =$ 132 وهي متغيرة .

معدل تغير المسافة بين السيارة والنقطة على الأرض (تبتعد) $\frac{dx}{dt} = 264\ ft/s$



$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \Longrightarrow \tan\theta = \frac{132}{132} \Longrightarrow \tan\theta = 1 \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\tan\theta = \frac{x}{132} \Longrightarrow \sec^2\theta\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{132}\cdot\frac{dx}{dt} \Longrightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{132}\cdot\frac{dx}{dt}\times\cos^2\frac{\pi}{4}$$

$$\Longrightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{132}(264)\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \Longrightarrow \frac{d\theta}{dt} = 2\times\frac{1}{2} \Longrightarrow \boxed{\frac{d\theta}{dt} = 1\ rad/s}$$

يزداد قياس الزاوية θ بسرعة $1\ rad/s$ في تلك اللحظة .

18) فيزياء : يتحرك جسيم على منحنى الاقتران : $f(x) = 2\sin\frac{\pi x}{2}$ ، وعند مروره بالنقطة $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ ، فإن الإحداثي x لموقعه يزداد بمعدل $\sqrt{10}$ وحدة طول لكل ثانية .

أجد معدل تغير المسافة بين الجسيم ونقطة الأصل في هذه اللحظة.

العلاقة الرئيسية : المسافة بين نقطتين $L = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$

النقطة الأولى $\left(x, 2\sin\frac{\pi x}{2}\right)$

النقطة الثانية (نقطة الأصل) $(0, 0)$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{10}$$

$$L = \sqrt{(x - 0)^2 + \left(2\sin\frac{\pi x}{2} - 0\right)^2} \Longrightarrow L = \sqrt{x^2 + \left(2\sin\frac{\pi x}{2}\right)^2}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

$$\frac{dL}{dt}=\frac{2x\frac{dx}{dt}+(2)(2)\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)\left(2\cos\frac{\pi x}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2\sqrt{x^2+(2\sin\frac{\pi x}{2})^2}}$$

$$\frac{dL}{dt}=\frac{2x\frac{dx}{dt}+4\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)\left(2\cos\frac{\pi x}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2\sqrt{x^2+(2\sin\frac{\pi x}{2})^2}}$$

$$\frac{dL}{dt}=\frac{(2)\left(\frac{1}{3}\right)(\sqrt{10})+4\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(2\sin\frac{\pi}{6}\right)^2}}$$

$$\frac{dL}{dt}=\frac{(2)\left(\frac{1}{3}\right)(\sqrt{10})+4\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+(2\frac{1}{2})^2}}$$

$$\Rightarrow\frac{dL}{dt}=\frac{\frac{2}{3}(\sqrt{10})+(\sqrt{3})\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2\sqrt{\frac{1}{9}+1}}\quad\Rightarrow\frac{dL}{dt}=\frac{\frac{2}{3}(\sqrt{10})+(\sqrt{3})\left(\frac{\pi}{2}\right)}{(2)\left(\frac{1}{3}+1\right)}$$

$$\Rightarrow\frac{dL}{dt}=\frac{\frac{2}{3}(\sqrt{10})+(\sqrt{3})\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{2}{3}+2}\quad\Rightarrow\frac{dL}{dt}=\frac{\frac{2}{3}(\sqrt{10})+(\sqrt{3})\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{8}{3}}$$

$$\Rightarrow\frac{dL}{dt}=\left(\frac{2}{3}(\sqrt{10})+(\sqrt{3})\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\frac{3}{8}\quad\Rightarrow\frac{dL}{dt}=\left(\frac{1}{4}(\sqrt{10})+3(\sqrt{3})\left(\frac{\pi}{16}\right)\right)$$

$$\Rightarrow\frac{dL}{dt}=\frac{\frac{1}{3}\sqrt{10}+\left(2\frac{1}{2}\right)\left(2\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{9}+\left(2\frac{1}{2}\right)^2}}\quad\Rightarrow\frac{dL}{dt}=\frac{\frac{1}{3}\sqrt{10}+(1)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\right)}{\sqrt{\frac{1}{9}+1}}$$

$$\Rightarrow\frac{dL}{dt}=\frac{\frac{1}{3}\sqrt{10}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\right)}{\frac{1}{3}+1}\quad\Rightarrow\frac{dL}{dt}=\frac{\frac{1}{3}\sqrt{10}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\right)}{\frac{4}{3}}$$

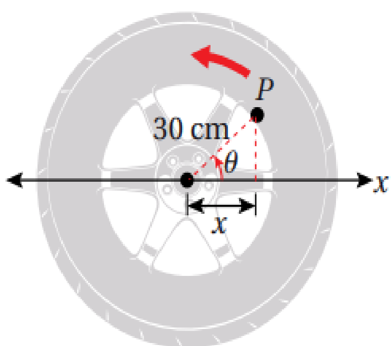
معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

$$\Rightarrow \frac{dL}{dt}=\left(\frac{1}{3}\sqrt{10}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\right)\right)\times\frac{3}{4} \quad \Rightarrow \frac{dL}{dt}=\left(\frac{\sqrt{10}}{3}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\right)\right)\times\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{dL}{dt}=\left(\frac{\sqrt{10}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\right)\times\frac{3}{4} \quad \Rightarrow \frac{dL}{dt}=\frac{\sqrt{10}}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{8}\pi \quad \Rightarrow \boxed{\frac{dL}{dt}=\frac{\sqrt{10}}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{8}\pi}$$

سيارات : عجلة سيارة طول نصف قطرها الداخلي $30cm$ ، وهي تدور بمعدل 10 دورات في الثانية ، رسمت النقطة P على حافة العجلة كما في الشكل المجاور :

19) أجد $\frac{dx}{dt}$ بدلالة θ .



الشكل: دائرة بداخلها مثلث قائم الزاوية

عدد الدورات في الثانية 10

الضلع القائم الأول $x=?$

الضلع القائم الثاني $y=?$

الوتر نصف قطر الدائرة $r=30cm$

العلاقة الرئيسية التي تربط بين المتغيرات والثوابت في المعطيات $\cos\theta=\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

$$\cos\theta=\frac{x}{30} \quad \Rightarrow x=30\cos\theta \quad \Rightarrow \frac{dx}{dt}=-30\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$

- لإيجاد معدل تغير الزاوية $\frac{d\theta}{dt}$ وهو يمثل السرعة الزاوية

$$\frac{d\theta}{dt}=2\pi\times\frac{\text{عدد الدورات}}{\text{الزمن}} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt}=2\pi\times\frac{10}{1} \Rightarrow \boxed{\frac{d\theta}{dt}=20\pi\ rad/s}$$

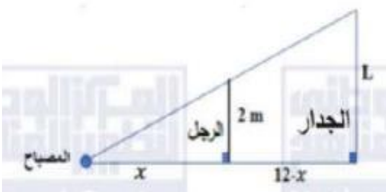
$$\frac{dx}{dt}=-30\sin\theta\,20\pi \quad \Rightarrow \frac{dx}{dt}=-600\pi\sin\theta$$

20) أجد $\frac{dx}{dt}$ عندما $\theta=\frac{\pi}{4}$

$$\frac{dx}{dt}=-600\pi\sin\theta \Rightarrow =-600\pi\sin\frac{\pi}{4} \Rightarrow =-600\pi\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{\frac{dx}{dt}=-\frac{600\pi}{\sqrt{2}}\ cm/s}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

21) ضوء : مصباح مثبت بالأرض ، وهو يضيء على جدار يبعد عنه مسافة $12m$ ، إذا سار رجل طوله $2m$ من موقع المصباح إلى الجدار بسرعة $1.6m/s$ ، فأجد معدل تغير طول ظله على الجدار عندما يكون على بعد $4m$ من الجدار .



ليكن بعد الرجل عن المصباح أفقياً x وطول ظله على الجدار L

الشكل: مثلثين قائمين الزاوية

العلاقة: تشابه مثلثين

المثلث الصغير : طول الضلع القائم الأول (طول الرجل) $2m$ ، طول الضلع القائم الثاني(بعد الرجل $x = 12 - 4 = 8$ وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق .

المثلث الكبير : طول الضلع القائم الأول L ، طول الضلع القائم الثاني 12

معدل التغير في المسافة بين موقع المصباح إلى الجدار $\frac{dx}{dt} = 1.6m/s$

المطلوب : معدل تغير طول ظله على الجدار عندما يكون على بعد $4m$ من الجدار $\left.\frac{dL}{dt}\right|_{x=8} = ?$

$$\frac{L}{2} = \frac{12}{x} \quad \Rightarrow \frac{L}{2} = \frac{12}{x} \quad \Rightarrow xL = 24 \quad \Rightarrow L = \frac{24}{x}$$

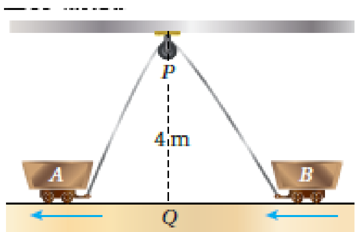
$$\frac{dL}{dt} = \frac{-24\frac{dx}{dt}}{x^2} \quad \Rightarrow \quad = \frac{-24(1.6)}{8^2} \quad \Rightarrow \quad = \frac{-38.4}{64} \quad \Rightarrow \boxed{\frac{dL}{dt} = -0.6\ m/s}$$

إذن يتناقص طول ظل الرجل عند تلك اللحظة بمعدل 0.6 متر لكل ثانية .

مهارات التفكير العليا:

22) تبرير : ربطت العربتان A و B بحبل طوله $12m$ ، وهو يمر بالبكره P كما في الشكل المجاور. إذا كانت النقطة Q تقع على الأرض بين العربتين أسفل P مباشرة ، وتبعد عنها مسافة $4m$ ، وكانت العربة A تتحرك بعيداً عن النقطة Q بسرعة $0.5m/s$ ، فأجد سرعة اقتراب العربة B من النقطة Q في اللحظة التي تكون فيها العربة A على بعد $3m$ من النقطة Q ، مبرراً إجابتي .

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨



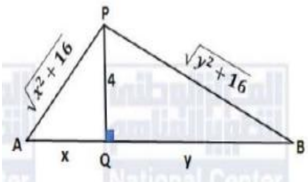
الشكل: مثلثين قائمين الزاوية.

المثلث الأول : PQA ، المثلث الثاني : PQB

المسافة بين QP تساوي 4 وهي ثابتة

المسافة بين QA تساوي $x = 3$ وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق .

المسافة بين QB تساوي $y = ?$ وهو متغير يعوض بعد الاشتقاق .



معدل التغير في المسافة بين QA تساوي $\frac{dx}{dt} = 0.5m/s$ وهي متغيرة .

معدل التغير في المسافة بين QB تساوي $\frac{dy}{dt} = ?$ وهو المطلوب.

طول الحبل : $12m$

$$AP + BP = 12$$

$$\sqrt{x^2+16} + \sqrt{y^2+16} = 12 \implies \sqrt{3^2+16} + \sqrt{y^2+16} = 12$$

$$\implies \sqrt{9+16} + \sqrt{y^2+16} = 12 \implies \sqrt{25} + \sqrt{y^2+16} = 12$$

$$\implies 5 + \sqrt{y^2+16} = 12 \implies \sqrt{y^2+16} = 7 \implies y^2 + 16 = 49$$

$$\implies y^2 = 33 \implies y = \sqrt{33}$$

$$\sqrt{x^2+16} + \sqrt{y^2+16} = 12 \implies \frac{2x\frac{dx}{dt}}{2\sqrt{x^2+16}} + \frac{2y\frac{dy}{dt}}{2\sqrt{y^2+16}} = 0$$

$$\implies \frac{x\frac{dx}{dt}}{\sqrt{x^2+16}} + \frac{y\frac{dy}{dt}}{\sqrt{y^2+16}} = 0 \implies \frac{y\frac{dy}{dt}}{\sqrt{y^2+16}} = -\frac{x\frac{dx}{dt}}{\sqrt{x^2+16}}$$

$$\implies \left[\frac{y\frac{dy}{dt}}{\sqrt{y^2+16}} = -\frac{x\frac{dx}{dt}}{\sqrt{x^2+16}}\right] \times \frac{\sqrt{y^2+16}}{y}$$

$$\implies \frac{dy}{dt} = -\frac{x\sqrt{y^2+16}}{y\sqrt{x^2+16}}\frac{dx}{dt} \implies \frac{dy}{dt} = -\frac{3\sqrt{\left(\sqrt{33}\right)^2+16}}{\sqrt{33}\sqrt{3^2+16}} \times 0.5$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{3\sqrt{33+16}}{\sqrt{33}\sqrt{9+16}} \times 0.5 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{3\sqrt{49}}{\sqrt{33}\sqrt{25}} \times 0.5$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{3\times 7}{\sqrt{33}\times 5} \times 0.5 \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dt} = -\frac{21}{10\sqrt{33}}\ m/s}$$

إذن تقترب العربة B من النقطة Q بسرعة مقدارها $\frac{21}{10\sqrt{33}}\ m/s$

23) تبرير : يركض عداء في مضمار دائري ، طول نصف قطره $100\ m$ ، بسرعة ثابتة مقدارها $7m/s$ ، ويقف صديقه على بعد $200\ m$ من مركز مضمار الركض . أجد معدل تغير المسافة بين العداء وصديقه عندما تكون المسافة بينهما $200\ m$.

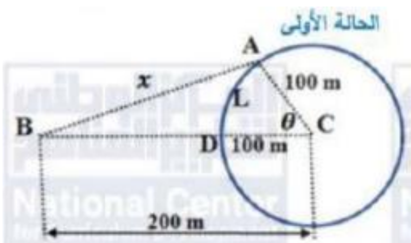
الشكل: دائرة ، طول نصف قطرها : $r = 100\ m$ ، مركز الدائرة C

العداء : A ، صديقه: B ، القوس الجزء من محيط الدائرة والذي يقع بين نصفي قطرين L

معدل التغير بالمسافة على القوس $\frac{dL}{dt} = 7m/s$

المسافة بين BC تساوي $200\ m$ ، المسافة بين AB تساوي $x = 200$ وهي متغيرة .

الحالة الأولى:



المعطى (تكون L متناقصة) ويكون : $\frac{dL}{dt} = -7m/s$

المطلوب : التغير في المسافة بين AB ?= $\frac{dx}{dt}$.

العلاقة: قانون طول القوس

$$L = r\theta \Rightarrow L = 100\theta$$

$$\frac{dL}{dt} = 100\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow -7 = 100\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = -\frac{7}{100} \Rightarrow \boxed{\frac{d\theta}{dt} = -0.07}$$

- العلاقة الرئيسية: قانون جيوب التمام

$$x^2 = (200)^2 + (100)^2 - 2(200)(100)\cos\theta$$

$$\Rightarrow x^2 = 40000 + 10000 - 40000\cos\theta \Rightarrow x^2 = 50000 - 40000\cos\theta$$

$$\Rightarrow 40000\cos\theta = 50000 - x^2 \Rightarrow \frac{40000}{40000}\cos\theta = \frac{50000 - x^2}{40000}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{50000 - x^2}{40000} \quad \Rightarrow \cos\theta = \frac{50000 - (200)^2}{40000}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{50000 - 40000}{40000} \quad \Rightarrow \cos\theta = \frac{10000}{40000} \quad \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{4}$$

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta \quad \Rightarrow \sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} \quad \Rightarrow \sin\theta = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} \quad \Rightarrow \sin\theta = \sqrt{\frac{15}{16}} \quad \Rightarrow \boxed{\sin\theta = \frac{\sqrt{15}}{4}}$$

$$x^2 = 50000 - 40000\cos\theta \quad \Rightarrow 2x\frac{dx}{dt} = 40000\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{2x}{2x}\frac{dx}{dt} = \frac{40000\sin\theta}{2x} \cdot \frac{d\theta}{dt} \quad \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{20000\sin\theta}{x} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{20000\frac{\sqrt{15}}{4}}{200} \times -0.07 \quad \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 100\frac{\sqrt{15}}{4} \times -0.07 \quad \Rightarrow \boxed{\frac{dx}{dt} = -\frac{7\sqrt{15}}{4}\ m/s}$$

الحالة الثانية:

المعطى (تكون L متزايدة) ويكون : $\frac{dL}{dt} = 7m/s$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{20000\frac{\sqrt{15}}{4}}{200} \times 0.07 \quad \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 100\frac{\sqrt{15}}{4} \times 0.07 \quad \Rightarrow \boxed{\frac{dx}{dt} = \frac{7\sqrt{15}}{4}\ m/s}$$

إذن عندما تكون المسافة بين العداء وصديقه $200\ m$ ، فإنهما يقتربان من بعضهما أو يتباعدان عن بعضهما بسرعة مقدارها $\frac{7\sqrt{15}}{4}\ m/s$.

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

اختبار نهاية الوحدة:

1) يمثل الاقتران $s(t) = 3 + \sin t$ حركة توافقية بسيطة لجسيم ، إحدى الآتية تمثل الزمن الذي تكون عنده سرعة الجسيم المتجهة صفراً :

$s(t) = 3 + \sin t \quad \Longrightarrow \quad v(t) = \cos t = 0$

a) $t = 0$ b) $t = \frac{\pi}{4}$ c) $\boxed{t = \frac{\pi}{2}}$ d) $t = \pi$

2) إذا كان: $y = uv$ ، وكان : $u(1) = 2, u'(1) = 3 , v(1) = -1 , v'(1) = 1$ فإن $y'(1)$ تساوي :

$y = uv$

$y' = (u.v') + (v.u') \Longrightarrow y' = (2.1) + (-1.3) \Longrightarrow y' = (2) + (-3) \Longrightarrow y' = -1$

a) 1 b) $\boxed{-1}$ c) 1 d) 4

3) إذا كان $f(x) = x - \frac{1}{x}$ ، فإن $f''(x)$ هو :

$f(x) = x - \dfrac{1}{x} \quad \Longrightarrow f(x) = x - x^{-1}$

$\Longrightarrow f'(x) = 1 + x^{-2} \quad \Longrightarrow f''(x) = -2x^{-3} \quad \Longrightarrow f''(x) = -\dfrac{2}{x^3}$

a) $1 + \frac{1}{x^2}$ b) $1 - \frac{1}{x^2}$ c) $\frac{2}{x^3}$ d) $\boxed{-\frac{2}{x^3}}$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

4) إذا كان $y = \tan 4t$ ، فإن $\frac{dy}{dt}$ هو :

$y = \tan 4t \implies \acute{y} = \sec^2 4t\ (4) \implies \acute{y} = 4\sec^2 4t$

a) $4\sec 4t \tan 4t$ b) $\sec 4t \tan 4t$ c) $\sec^2(4t)$ d) $\boxed{4\sec^2(4t)}$

5) إذا كان $y^2 - x^2 = 1$ ، فإن ميل المماس لمنحنى العلاقة عند النقطة $(1, \sqrt{2})$ هو:

$y^2 - x^2 = 1$

$2y\frac{dy}{dx} - 2x = 0 \implies \frac{2y}{2y}\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{2y} \implies \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \implies \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

a) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $-\sqrt{2}$ c) $\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ d) $\sqrt{2}$

6) إذا كان $f(x) = \log\ (2x-3)$ ، فإن $\acute{f}(x)$ هو:

$f(x) = \log\ (2x-3)$

$\acute{f}(x) = \frac{1}{(2x-3)\ln 10}(2) \implies \acute{f}(x) = \frac{2}{(2x-3)\ln 10}$

a) $\boxed{\frac{2}{(2x-3)\ln 10}}$ b) $\frac{2}{(2x-3)}$ c) $\frac{1}{(2x-3)\ln 10}$ d) $\frac{1}{(2x-3)}$

7) إذا كان $y = 2^{1-x}$ ، فإن ميل المماس لمنحنى العلاقة عندما $x = 2$ هو :

$y = 2^{1-x}$

$\acute{y} = 2^{1-x}(-1) \implies \acute{y} = -2^{1-x}\ln 2 \implies \acute{y} = -2^{1-2}\ln 2$

$\implies \acute{y} = -2^{-1}\ln 2 \implies \acute{y} = -\frac{\ln 2}{2}$

a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{\ln 2}{2}$ d) $\boxed{-\frac{\ln 2}{2}}$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

8) إذا زاد حجم مكعب بمعدل $24\ cm^3/min$ ، وزادت مساحة سطحه بمعدل $12\ cm^3/min$ ، فإن طول ضلعه في تلك اللحظة هو:

الخطوة الأولى: كتابة معطيات السؤال وتحديد المطلوب والمجاهيل :

الشكل : مكعب ، قانون حجم المكعب $V = x^3$ ، قانون المساحة السطحية $A = 6x^2$

$$\frac{dV}{dt} = 24cm^3/min \quad , \frac{dA}{dt} = 12\ cm^2/min \quad , x = ?\ cm$$

الخطوة الثانية: الاشتقاق بالنسبة للزمن وتعويض المعطيات :

$$V = x^3 \implies \frac{dV}{dt} = 3x^2\frac{dx}{dt} \implies 24 = 3x^2\frac{dx}{dt} \implies \frac{24}{3x^2} = \frac{dx}{dt} \implies \boxed{\frac{dx}{dt} = \frac{8}{x^2}}$$

$$A = 6x^2 \implies \frac{dA}{dt} = 12x\frac{dx}{dt} \implies 12 = 12x\left(\frac{8}{x^2}\right)$$

$$\implies 12 = \frac{96}{x} \implies 12x = 96 \implies \boxed{x = 8\ cm}$$

a) $2\ cm$ b) $2\sqrt{2}\ cm$ c) $4\ cm$ d) $\boxed{8\ cm}$

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

9) $f(x) = e^x(x + x\sqrt{x})$

$$\acute{f}(x) = (e^x)\left(1 + (x)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + (\sqrt{x})(1)\right) + (x + x\sqrt{x})(e^x)$$

$$\acute{f}(x) = (e^x)\left(1 + \frac{\sqrt{x}}{2} + \sqrt{x}\right) + (x + x\sqrt{x})(e^x) \implies = e^x + \frac{\sqrt{x}}{2}e^x + \sqrt{x}e^x + xe^x + x\sqrt{x}e^x$$

$$\implies = e^x\left(1 + \frac{\sqrt{x}}{2} + \sqrt{x} + x + x\sqrt{x}\right) \implies \acute{f}(x) = e^x\left(1 + \frac{3\sqrt{x}}{2} + x + x\sqrt{x}\right)$$

10) $f(x) = \frac{x}{\tan x}$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

$$\acute{f}(x) = \frac{(\tan x)\,(1) - (x)(\sec^2 x)}{\tan^2 x} \implies \acute{f}(x) = \frac{\tan x - x\sec^2 x}{\tan^2 x}$$

11) $f(x) = \frac{1}{x} - 12\sec x$

$$f(x) = x^{-1} - 12\sec x$$

$$\acute{f}(x) = -x^{-2} - 12\sec x\tan x \implies \acute{f}(x) = \frac{-1}{x^2} - 12\sec x\tan x$$

12) $f(x) = \frac{e^x}{\ln x}$

$$\acute{f}(x) = \frac{e^x\,(\ln x - \frac{1}{x})}{\ln^2 x} \implies \acute{f}(x) = \frac{e^x\,(\frac{x\ln x - 1}{x})}{\ln^2 x} \implies \acute{f}(x) = \frac{e^x\,(x\ln x - 1)}{x\ln^2 x}$$

13) $f(x) = \frac{\ln x}{x^4}$

$$\acute{f}(x) = \frac{(x^4)\left(\frac{1}{x}\right) - (\ln x)(4x^3)}{x^8} \implies = \frac{(x^4)\left(\frac{1}{x}\right) - (\ln x)(4x^3)}{x^8}$$

$$\implies = \frac{x^3 - (\ln x)(4x^3)}{x^8} \implies = \frac{1 - (\ln x)(4)}{x^5} \implies \acute{f}(x) = \frac{1 - 4\ln x}{x^5}$$

14) $f(x) = 5^{2-x}$

قاعدة الاشتقاق = الاقتران نفسه × مشتقة الآس × الاساس $\ln$

$$\acute{f}(x) = -\ln 5(5^{2-x})$$

15) $f(x) = 10\sin 0.5x$

$$\acute{f}(x) = 10\cos 0.5x\,(0.5) \implies \acute{f}(x) = 5\cos 0.5x$$

16) $f(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^3 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

$$f'(x) = \left(\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^3 2\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\right) + \left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)\right)$$

$$f'(x) = \left(\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) 2\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\right) + \left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)\right)$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)\right)$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{2}{x}-\frac{2}{x^3}+\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^4}-\frac{3}{x}-\frac{6}{x^2}-\frac{3}{x^3}-\frac{6}{x^4}\right)$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{2x^3}{x^4}-\frac{2x}{x^4}+\frac{2x^2}{x^4}-\frac{2}{x^4}-\frac{3x^3}{x^4}-\frac{6x^2}{x^4}-\frac{3x}{x^4}-\frac{6}{x^4}\right)$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{2x^3-2x+2x^2-2-3x^3-6x^2-3x-6}{x^4}\right)$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{-x^3-4x^2-5x-8}{x^4}\right)$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{x^3+4x^2+5x+8}{x^4}\right)$$

17) $f(x) = e^{-1.5x}\cos x^2$

$$f'(x) = (e^{-1.5x})(-\sin x^2)(2x) + (\cos x^2)(e^{-1.5x})(-1.5)$$

$$f'(x) = (e^{-1.5x})(-2x\sin x^2) + (\cos x^2)(-1.5e^{-1.5x})$$

$$f'(x) = (-e^{-1.5x})(2x\sin x^2 + 1.5\cos x^2)$$

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين :

وكان : $g'(2) = 2$, $g(2) = 1$, $f'(2) = -4$, $f(2) = 3$ فأجد كلا مما يأتي :

18) $f(g)'(2)$

$$f(g)'(2) = f(2)g'(2) + g(2)f'(2) \Rightarrow f(g)'(2) = (3\times 2) + (1\times -4)$$

$$\Rightarrow f(g)'(2) = 6 - 4 \quad \Rightarrow f(g)'(2) = 2$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

19) $f(\frac{f}{g})'\ (2)$

$$f(\frac{f}{g})'\ (2) = \frac{g(2)f'(2) - f(2)g'(2)}{g^2(2)} \Rightarrow f(\frac{f}{g})'\ (2) = \frac{(1 \times -4) - (3 \times 2)}{(1)^2}$$

$$\Rightarrow f(\frac{f}{g})'\ (2) = \frac{-4-6}{1} \quad \Rightarrow f(\frac{f}{g})'\ (2) = -10$$

20) $(3f - 4fg)'\ (2)$

$$= 3f'(2) - 4(fg)'(2) \quad \Rightarrow = 3(-4) - 4(2) \quad \Rightarrow = -12 - 8 \quad \Rightarrow = -20$$

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران مما يأتي:

21) $f(x) = x^7 \ln x$

$$f'(x) = (x^7)\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(7x^6) \quad \Rightarrow f'(x) = x^6 + 7x^6 \ln x$$

$$\Rightarrow f''(x) = 6x^5 + (7x^6)\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(42x^5) \quad \Rightarrow f''(x) = 6x^5 + 7x^5 + 42x^5 \ln x$$

$$f''(x) = 13x^5 + 42x^5 \ln x$$

22) $f(x) = \frac{\cos x}{x}$

$$f'(x) = \frac{(x)\,(-\sin x) - (cosx)(1)}{x^2} \quad \Rightarrow f'(x) = \frac{-\sin x}{x} - \frac{cosx}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{(x)(-\cos x) - (-\sin x)(1)}{x^2} - \frac{(x^2)(-\sin x) - (cosx)(2x)}{x^4}$$

$$f''(x) = \frac{-x\cos x + \sin x}{x^2} + \frac{x^2 \sin x + 2xcosx}{x^4}$$

$$f''(x) = \frac{-x^3 \cos x + x^2 \sin x}{x^4} + \frac{x^2 \sin x + 2xcosx}{x^4}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

$$\acute{\acute{f}}(x) = \frac{-x^3\cos x + 2x^2\sin x + 2x\cos x}{x^4}$$

$$\acute{\acute{f}}(x) = \frac{-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x}{x^3}$$

23) $f(x) = \frac{x}{1+\sqrt{x}}$

$$\acute{f}(x) = \frac{(1+\sqrt{x})(1) - (x) - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2} \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^2}$$

$$\acute{\acute{f}}(x) = \frac{(1+\sqrt{x})^2\left(\frac{1}{4\sqrt{x}}\right) - \left(1+\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)(2(1+\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}})}{(1+\sqrt{x})^4}$$

$$\Rightarrow = \frac{(1+\sqrt{x})^2\left(\frac{1}{4\sqrt{x}}\right) - \left(1+\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)(1+\sqrt{x})\frac{1}{\sqrt{x}})}{(1+\sqrt{x})^4} \Rightarrow = \frac{(1+\sqrt{x})\left(\frac{1}{4\sqrt{x}}\right) - \left(1+\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)\frac{1}{\sqrt{x}})}{(1+\sqrt{x})^3}$$

$$\Rightarrow = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{x}}{4\sqrt{x}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)}{(1+\sqrt{x})^3} \Rightarrow = \frac{\left(\left(\frac{1+\sqrt{x}}{4\sqrt{x}}\right) - \left(\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)\right)}{(1+\sqrt{x})^3} \Rightarrow = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{x}}{4\sqrt{x}} - \left(\frac{4+4\sqrt{x}}{4\sqrt{x}}\right)\right)}{(1+\sqrt{x})^3}$$

$$\Rightarrow = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{x}-4-4\sqrt{x}}{4\sqrt{x}}\right)}{(1+\sqrt{x})^3} \Rightarrow = \frac{\left(\frac{-3-\sqrt{x}}{4\sqrt{x}}\right)}{(1+\sqrt{x})^3} \Rightarrow \acute{\acute{f}}(x) = \frac{-3-\sqrt{x}}{4\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^3}$$

24) $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$

$$\acute{f}(x) = \frac{(1+x^2)(-2x) - (1-x^2)(2x)}{(1+x^2)^2} \Rightarrow = \frac{(-2x-2x^3) - (2x-2x^3)}{(1+x^2)^2}$$

$$\Rightarrow = \frac{-2x - 2x^3 - 2x + 2x^3}{(1+x^2)^2} \Rightarrow = \frac{-2x - 2x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow \boxed{\acute{f}(x) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}}$$

$$\acute{\acute{f}}(x) = \frac{(1+x^2)^2(-4) - (-4x)(2(1+x^2)(2x)}{(1+x^2)^4} \Rightarrow = \frac{(1+x^2)^2(-4) - (-4x)(2(1+x^2)(2x)}{(1+x^2)(1+x^2)^3}$$

$$\Rightarrow = \frac{(1+x^2)(-4) - (-4x)(2(2x)}{(1+x^2)^3} \Rightarrow = \frac{-4 - 4x^2 + 16x^2}{(1+x^2)^3} \Rightarrow \acute{\acute{f}}(x) = \frac{12x^2 - 4}{(1+x^2)^3}$$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل معادلة وسيطية مما يأتي عند النقطة المحددة بقيمة t المعطاة :

25) $x = t^2 \quad , y = t + 2 \, , t = 4$

الخطوة الأولى: إيجاد نقطة التماس:

$$x = t^2 \quad \Rightarrow x = (4)^2 \quad \Rightarrow \boxed{x = 16}$$

$$y = t + 2 \quad \Rightarrow y = 4 + 2 \quad \Rightarrow \boxed{y = 6}$$

نقطة التماس هي $\boxed{(16\,,6)}$

الخطوة الثانية: إيجاد ميل المماس

$$\frac{dx}{dt} = 2t \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2t}$$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=4} = \frac{1}{2(4)} \Rightarrow \boxed{m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=4} = \frac{1}{8}}$$

الخطوة الثالثة: إيجاد معادلة المماس

$$y - y_1 = \mathrm{m}(x - x_1) \quad \Rightarrow y - 6 = \frac{1}{8}(x - 16)$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{8}x - 16\left(\frac{1}{8}\right) + 6 \quad \Rightarrow y = \frac{1}{8}x - 2 + 6 \quad \Rightarrow y = \frac{1}{8}x + 4$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

26) $x = 4\cos t \quad , y = 3\sin t \ , \quad t = \frac{\pi}{4}$

الخطوة الأولى: إيجاد نقطة التماس:

$$x = 4\cos t \Rightarrow x = 4\cos\frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \boxed{x = 2\sqrt{2}}$$

$$y = 3\sin\frac{\pi}{4} \Rightarrow y = 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow y = 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \boxed{y = \frac{3\sqrt{2}}{2}}$$

نقطة التماس هي $\boxed{\left(2\sqrt{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)}$

الخطوة الثانية: إيجاد ميل المماس

$$\frac{dx}{dt} = -4\sin t \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 3\cos t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3\cos t}{-4\sin t} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}\cot t$$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{3}{4}\cot\frac{\pi}{4} \Rightarrow = -\frac{3}{4}(1) \Rightarrow \boxed{m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{3}{4}}$$

الخطوة الثالثة: إيجاد معادلة المماس

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - \frac{3\sqrt{2}}{2} = -\frac{3}{4}\left(x - 2\sqrt{2}\right)$$

$$\Rightarrow y - \frac{3\sqrt{2}}{2} = -\frac{3}{4}x + 2\sqrt{2}\left(\frac{3}{4}\right) \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{6\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{y = -\frac{3}{4}x + 3\sqrt{2}}$$

إذا كان : $y = x\ln x$ ، حيث : $x > 0$ ، فأجب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

27) أجد معادلة المماس عند النقطة $(1, 0)$.

الخطوة الأولى: إيجاد ميل المماس

$$y = x\ln x$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

$$\acute{f}(x) = (x)\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(1) \quad \Longrightarrow \quad \acute{f}(x) = 1 + \ln x$$

$$\Longrightarrow \ \acute{f}(1) = 1 + \ln 1 \quad \Longrightarrow \boxed{\acute{f}(1) = 1 \quad \text{ميل المماس}}$$

الخطوة الثانية: إيجاد معادلة المماس

$$y - y_1 = \mathrm{m}(x - x_1) \quad \Longrightarrow \ y - 0 = 1(x - 1) \quad \Longrightarrow \boxed{y = x - 1 \quad \text{معادلة المماس}}$$

28) أجد إحداثيي النقطة التي يكون ميل المماس عندها 2 .

$$\acute{f}(x) = 2 \ \Longrightarrow \ 1 + \ln x = 2 \ \Longrightarrow \ln x = 2 - 1 \ \Longrightarrow \ \ln x = 1 \ \Longrightarrow \boxed{x = e}$$

$$y = x \ln x \quad \Longrightarrow \ y = e \ln e \quad \Longrightarrow \boxed{y = e}$$

نقطة المطلوبة هي $\boxed{(e\,,e)}$

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

29) $x(x+y) = 2y^2$

$$x^2 + xy = 2y^2$$

$$2x + x\frac{dy}{dx} + y = 4y\frac{dy}{dx} \Longrightarrow 4y\frac{dy}{dx} - x\frac{dy}{dx} = 2x + y \ \Longrightarrow \frac{dy}{dx}(4y - x) = 2x + y$$

$$\frac{dy}{dx}\frac{(4y - x)}{4y - x} = \frac{2x + y}{4y - x} \quad \Longrightarrow \ \frac{dy}{dx} = \frac{2x + y}{4y - x}$$

30) $x = \frac{2y}{x^2 - y}$

$$x^3 - xy = 2y$$

$$3x^2 - x\frac{dy}{dx} - y = 2\frac{dy}{dx} \quad \Longrightarrow \ 3x^2 - y = 2\frac{dy}{dx} + x\frac{dy}{dx}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

$$\Rightarrow 2\frac{dy}{dx}+x\frac{dy}{dx}=3x^2-y \Rightarrow \frac{dy}{dx}\frac{(2+x)}{2+x}=\frac{3x^2-y}{2+x} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-y}{2+x}$$

31) $y\cos x = x^2+y^2$

$$(y)\,(-\sin x)+(\cos x)(\frac{dy}{dx})=2x+2y\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx}\cos x-2y\frac{dy}{dx}=2x+y\sin x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\frac{(\cos x-2y)}{\cos x-2y}=\frac{2x+y\sin x}{\cos x-2y} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{2x+y\sin x}{\cos x-2y}$$

32) $2xe^y+ye^x=3$

$$(2x)\left(e^y\frac{dy}{dx}\right)+(e^y)(2)+(y)(e^x)+(e^x)(\frac{dy}{dx})=0$$

$$2xe^y\frac{dy}{dx}+2e^y+ye^x+e^x\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow 2xe^y\frac{dy}{dx}+e^x\frac{dy}{dx}=-2e^y-ye^x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(2xe^y+e^x)=-2e^y-ye^x \Rightarrow \frac{dy}{dx}(\frac{2xe^y+e^x}{2xe^y+e^x})=\frac{-2e^y-ye^x}{2xe^y+e^x}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2e^y-ye^x}{2xe^y+e^x}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

33) أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة: $y^2=\frac{x^3}{2-x}$ عند النقطة $(1,-1)$.

الخطوة الأولى: إيجاد ميل المماس

$$y^2=\frac{x^3}{2-x}$$

$$2y\frac{dy}{dx}=\frac{(2-x)(3x^2)-(x^3)(-x)}{(2-x)^2} \Rightarrow 2(-1)\frac{dy}{dx}=\frac{(2-1)(3(1)^2)-((1)^3)(-1)}{(2-1)^2}$$

$$\Rightarrow (-2)\frac{dy}{dx}=\frac{3+1}{1} \Rightarrow \frac{-2}{-2}\frac{dy}{dx}=\frac{4}{-2} \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx}=-2 \quad \text{ميل المماس}}$$

الخطوة الثانية: إيجاد ميل العمودي على المماس

$m=-2$ ميل المماس $\Rightarrow m_1=\frac{-1}{m} \Rightarrow m_1=\frac{-1}{-2} \Rightarrow \boxed{m_1=\frac{1}{2}}$ ميل العمودي

الخطوة الثالثة: إيجاد معادلة العمودي على المماس

$$y-y_1=m_1(x-x_1) \Rightarrow y-(-1)=\frac{1}{2}(x-1)$$

$$y+1=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}}$$ معادلة العمودي

أجد معادلة المماس لمنحنى كل علاقة مما يأتي عند النقطة المعطاة:

34) $x^2+3xy+y^2=x+3y \quad ,(2,-1)$

الخطوة الأولى : ايجاد ميل المماس عند النقطة $(2,-1)$

$$2x+3x\frac{dy}{dx}+3y+2y\frac{dy}{dx}=1+3\frac{dy}{dx}$$

$$2(2)+3(2)\frac{dy}{dx}+3(-1)+2(-1)\frac{dy}{dx}=1+3\frac{dy}{dx}$$

$$4+6\frac{dy}{dx}-3-2\frac{dy}{dx}=1+3\frac{dy}{dx}$$

$$6\frac{dy}{dx}-2\frac{dy}{dx}-3\frac{dy}{dx}=1+3-4 \Rightarrow \boxed{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2,-1)}=0}$$ ميل المماس

الخطوة الثانية: إيجاد معادلة المماس

$$y-y_1=\mathrm{m}(x-x_1) \Rightarrow y-(-1)=0(x-2)$$

$$\Rightarrow y+1=0 \Rightarrow \boxed{y=-1}$$ معادلة المماس

35) $x^2e^y=1 \quad ,(1,0)$

الخطوة الأولى : ايجاد ميل المماس عند النقطة $(1,0)$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

$$x^2 e^y \frac{dy}{dx} + 2xe^y = 0$$

$$(1)^2 e^0 \frac{dy}{dx} + 2(1)e^0 = 0$$

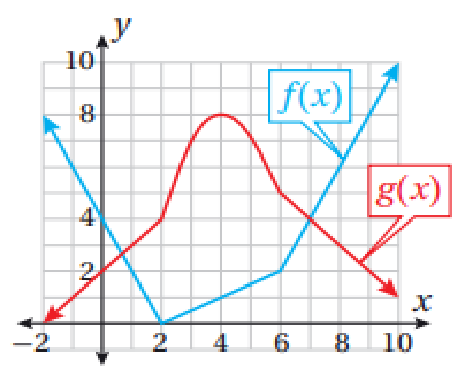
$$\frac{dy}{dx} + 2 = 0$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,0)} = -2$$

الخطوة الثانية: إيجاد معادلة المماس

$$y - y_1 = m(x - x_1) \implies y - 0 = -2(x - 1) \implies \boxed{y = -2x + 2 \quad \text{معادلة المماس}}$$

يبين الشكل المجاور منحنى الاقترانيين : $f(x)$ و $g(x)$. إذا كان $p(x) = f(x)g(x)$ ، وكان $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ، فأجد كلا مما يأتي:



36) $p'(1)$

$$p'(1) = f(1)g'(1) + g(1)f'(1) \implies = f(1)g'(1) + g(1)f'(1)$$

$$\implies = 2 \times 1 + 3 \times -2 \implies p'(1) = -4$$

37) $p'(4)$

$$p'(4) = f(4)g'(4) + g(4)f'(4)$$

$$p'(4) = 1 \times 0 + 8 \times 0.5$$

$$p'(4) = 4$$

38) $q'(7)$

$$q'(7) = \frac{g(7)f'(7) - f(7)g'(7)}{(g(7))^2} \implies q'(7) = \frac{4 \times 2 - 4 \times -1}{(4)^2}$$

$$\implies q'(7) = \frac{12}{16} \implies q'(7) = \frac{3}{4}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

39) مواد مشعة : يمكن نمذجة الكمية R (بالغرام) المتبقية من عينة كتلتها $200\ g$ من عنصر مشع بعد t يوماً باستعمال الاقتران : $R(t) = 200(0.9)^t$. أجد $\frac{dR}{dt}$ عندما $t = 2$.

$$R(t) = 200(0.9)^t \implies \frac{dR}{dt} = 200(0.9)^t \ln 0.9$$

$$\implies \left.\frac{dR}{dt}\right|_{t=2} = 200(0.9)^2 \ln 0.9 \implies \boxed{\left.\frac{dR}{dt}\right|_{t=2} \approx -17.1\ g/day}$$

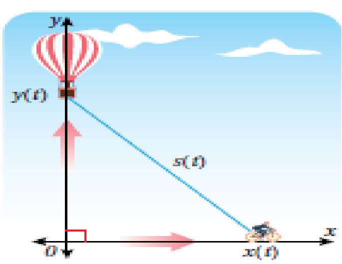
40) يمثل الاقتران : $s(t) = 10 + \frac{1}{4}\sin(10\pi t)$ موقع جسيم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالسنتيمترات ، و t الزمن بالثواني . أجد سرعة الجسيم المتجهة وتسارعه بعد t ثانية .

$$s(t) = 10 + \frac{1}{4}\sin(10\pi t)$$

$$v(t) = 10\pi \frac{1}{4}\cos(10\pi t) \implies v(t) = \frac{5\pi}{2}\cos(10\pi t)$$

$$a(t) = -10\pi \frac{5\pi}{2}\sin(10\pi t) \implies a(t) = -5\pi \frac{5\pi}{1}\sin(10\pi t)$$

$$a(t) = -25\pi^2 \sin(10\pi t)$$



41) يرتفع بالون رأسياً فوق مستوى طريق مستقيم أفقي بمعدل $1\ ft/s$ ، وفي اللحظة التي كان فيها البالون على ارتفاع $65\ ft$ فوق الطريق ، مرت أسفله دراجة تتحرك بسرعة $17\ ft/s$ كما في الشكل المجاور. أجد سرعة تغير المسافة بين البالون والدراجة بعد 3 ثوان من هذه اللحظة .

الخطوة الأولى: كتابة معطيات السؤال وتحديد المطلوب والمجاهيل :

الشكل : مثلث قائم الزاوية ، قانون فيثاغورس $s^2 = x^2 + y^2$

$$\frac{dy}{dt} = 1\ ft/s \quad , \frac{dx}{dt} = 17\ ft/s \quad , \frac{ds}{dt} = ?\ ft/s \quad , t = 3s$$

$$y = 65 + (1\ ft/s \times t) \implies y = 65 + t \implies y = 65 + 3 \implies \boxed{y = 68}$$

$$, x = 17 \times t \implies x = 17t \implies x = 17(3) \implies \boxed{x = 51}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

الخطوة الثانية: الاشتقاق بالنسبة للزمن وتعويض المعطيات :

$$s^2 = x^2 + y^2 \implies 2s\frac{ds}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} \implies s\frac{ds}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}$$

$$s\frac{ds}{dt} = (51)(17) + (68)(1)$$

- عدد المجاهيل اثنان نحتاج علاقة لتقليل عدد المجاهيل ، نستخدم فيثاغورس لإيجاد s :

$$s^2 = x^2 + y^2 \implies s = \sqrt{51^2 + 68^2} \implies s = \sqrt{2601 + 5624} \implies s = \sqrt{7225} \implies \boxed{s = 85}$$

- نعوض قيمة $\boxed{s = 85}$ في المشتقة أعلاه:

$$(85)\frac{ds}{dt} = (51)(17) + (68)(1) \implies 85\frac{ds}{dt} = 867 + 68$$

$$\implies 85\frac{ds}{dt} = 935 \implies \boxed{\frac{ds}{dt} = 11\ \mathrm{f}t/s}$$

معدل تغير المسافة بين الدراجة والبالون بعد 3 ثوان هو: $11\ \mathrm{f}t/s$

إذن تتزايد المسافة بين البالون والدراجة بمعدل 11 قدماً في الثانية وذلك بعد مرور 3 ثوان من لحظة مرور الدراجة تحت البالون.

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

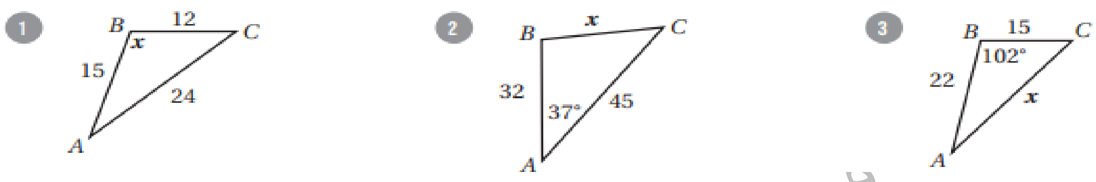
كتاب التمارين

الوحدة الثالثة: التفاضل و تطبيقاته

استعد لدراسة الوحدة:

حل المثلث باستعمال قانون جيوب التمام:

أجد قيمة x في كل من المثلثات الاتية :



1) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$ قانون جيب التمام

$24^2 = 12^2 + 15^2 - 2 \times 12 \times 15 \cos x$

$2 \times 12 \times 15 \cos x = 12^2 + 15^2 - 24^2$

$\dfrac{2 \times 12 \times 15 \cos x}{2 \times 12 \times 15} = \dfrac{12^2 + 15^2 - 24^2}{2 \times 12 \times 15}$

$\cos x = \dfrac{12^2 + 15^2 - 24^2}{2 \times 12 \times 15} \Rightarrow \cos x = \dfrac{144 + 225 - 576}{360}$

$\cos x = \dfrac{-207}{360} \quad \Rightarrow x \approx 2.18\, rad \quad \Rightarrow x \approx 125.1^\circ$

2) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$ قانون جيب التمام

$x^2 = 32^2 + 45^2 - 2 \times 32 \times 45 \cos 37^\circ$

$2 \times 32 \times 45 \cos 37^\circ = 32^2 + 45^2 - x^2$

$2300.07 = 1024 + 2025 - x^2 \quad \Rightarrow x^2 = 1024 + 2025 - 2300.07$

$\Rightarrow x^2 = 748.92 \quad \Rightarrow x = 748.92 \quad \Rightarrow x \approx 27.37$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

$3)\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$ قانون جيب التمام

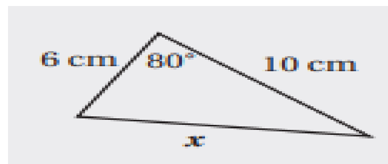
$x^2 = 15^2 + 22^2 - 2 \times 15 \times 22 \cos 102^\circ$

$2 \times 15 \times 22 \cos 102^\circ = 15^2 + 22^2 - x^2$

$-137.22 = 225 + 484 - x^2$

$x^2 = 709 + 137.22 \quad \Rightarrow x^2 = 846.22 \quad \Rightarrow \boxed{x \approx 29.1}$

مثال : أجد قيمة x في المثلث المجاور:



$x^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \times 6 \times 10 \cos 80^\circ$

$x^2 = 115.16 \quad \Rightarrow x = \pm\sqrt{115.16} \quad \Rightarrow x = \pm 10.7$

$x = 10.7$ $\quad$ x لا يمكن أن تكون سالبة

حل المعادلات المثلثية:

أحل كل معادلة مما يأتي في الفترة $(0, 2\pi)$:

$4)\ \tan 2x + 1 = 0$

$\tan 2x = -1$

$2x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, \frac{15\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}$

$5)\ 2\sin^2 x + \sin x = 0$

$\sin x\,(2\sin x + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0, \pi$

$2\sin x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin x = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

$6)\ 1 - \cos x = \frac{1}{2}$

$\cos x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

مثال : أحل المعادلة $\sin 2x - \cos x = 0$ في الفترة $(0, 2\pi)$:

$\sin 2x - \cos x = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2\sin x \cos x - \cos x = 0$

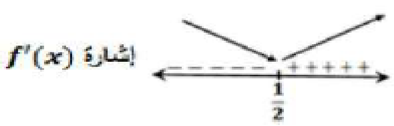
$\Longrightarrow \; \cos x\,(2\sin x - 1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \cos x = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}}$

$or \;\; 2\sin x - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sin x = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}}$

7) $f(x) = 6x^2 - 6x + 12$

$\acute{f}(x) = 12x - 6$

$\acute{f}(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 12x - 6 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{12x}{12} = \frac{6}{12} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{1}{2}$



الاقتران متناقص في $(-\infty, \frac{1}{2})$ ومتزايد في الفترة $(\frac{1}{2}, \infty)$

8) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 3$

$\acute{f}(x) = 3x^2 - 6x + 4$

$\acute{f}(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 3x^2 - 6x + 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 3x^2 - 6x + 4 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac \quad \Longrightarrow \quad a = 3 \;, \quad b = 6 \quad , c = 4$

$\Delta = (6)^2 - 4(3)(4) \quad \Longrightarrow \quad \Delta = 36 - 48 = -12 \; < 0$

ليس للمشتقة اصفار وإشارتها مماثلة لإشارة معامل x^2 لجميع الأعداد الحقيقية ،

أي ان : $\acute{f}(x) > 0$ فالاقتران متزايد على $\mathbb{R}$

9) $f(x) = x^2 - 8x^4$

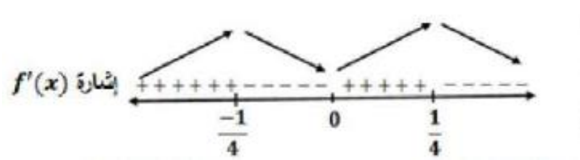
$\acute{f}(x) = 2x - 32x^3$

$\acute{f}(x) = 0 \;\Longrightarrow\; 2x - 32x^3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2x(1 - 16x^2) = 0$

$2x = 0 \quad \Longrightarrow \; x = 0$

$1 - 16x^2 = 0 \;\Longrightarrow\; 16x^2 = 1 \;\Longrightarrow\; x^2 = \frac{1}{16} \;\Longrightarrow\; x = \pm\frac{1}{4}$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٧٨٠٨



الاقتران x متزايد على $\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right)$ و $\left(0,\frac{1}{4}\right)$

الاقتران x متناقص على $\left(-\frac{1}{4},0\right)$ و $\left(\frac{1}{4},\infty\right)$

مثال : أحدد فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران : $f(x)=x^2-2x-3$

الخطوة الأولى: أجد مشتقة الاقتران، ثم أحدد أصفار المشتقة.

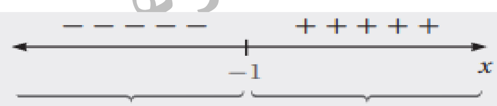
$$\acute{f}(x)=2x+2$$

إذن صفر المشتقة هو : $2x+2=0 \quad \Longrightarrow \quad 2x=2 \quad \Longrightarrow \quad x=-1$

الخطوة الثانية: ادرس إشارة المشتقة.

اختار قيمة أقل من صفر المشتقة ، ولتكن (-2) واختار قيمة أخرى اكبر منه ، ولتكن (0) ، ثم أحدد إشارة المشتقة عند كل منهما .

إذن ، $f(x)$ متناقص في الفترة $(-\infty,-1)$ ، ومتزايد في الفترة $(-1,\infty)$



	$x<-1$	$x>-1$
قِيَم الاختبار (x)	$x=-2$	$x=0$
إشارة $f'(x)$	$f'(-2)<0$	$f'(0)>0$
تزايد الاقتران وتناقصه	مُتناقِص	مُتزايِد

الدرس الخامس

المعدلات المرتبطة

ملئ بالون كروي بالهيليوم بمعدل $8\ cm^3/s$ ، أجد معدل تغير نصف قطر البالون في كل من الحالات الآتية :

1) عندما يكون طول نصف قطره $12\ cm$.

$$\frac{dv}{dt}=8 \quad ,r=12 \quad , \quad \frac{dr}{dt}=?$$

$$v=\frac{4}{3}\pi r^3$$ قانون حجم الكرة

$$\frac{dv}{dt}=(3)\frac{4}{3}\pi r^2\frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt}=4\pi r^2\frac{dr}{dt}$$ عدد المجاهيل (1) بعد الاشتقاق

$$8=4\pi(12)^2\frac{dr}{dt} \Rightarrow 8=576\pi\frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{576\pi}{576\pi}\frac{dr}{dt}=\frac{8}{576\pi}$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{dt}=\frac{8}{576\pi} \Rightarrow \boxed{\frac{dr}{dt}=\frac{1}{72\pi}\ cm/s}$$

2) عندما يكون حجمه $36\pi\ cm^3$ (أقرب إجابتي إلى أقرب جزء من مئة) .

$$\frac{dv}{dt}=8 \quad ,v=36\pi\ cm^3 \quad ,\frac{dr}{dt}=?$$

$$v=\frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \frac{dv}{dt}=4\pi r^2\frac{dr}{dt}$$ عدد المجاهيل (2) بعد الاشتقاق

ملاحظة(1): إذن نحتاج علاقة لإيجاد قيمة المجهول r ليتم تعويضها في المشتقة ليتبقى مجهول واحد فقط ومن ثم إيجاد $\frac{dr}{dt}$.

ملاحظة(2) :لإيجاد قيمة المجهول r نستفيد من قانون حجم الكرة.

$$\left[v=\frac{4}{3}\pi r^3\right]\times\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{\pi}\right)$$

$$r^3=\frac{3v}{4\pi} \Rightarrow r=\sqrt[3]{\frac{3v}{4\pi}} \Rightarrow \boxed{r=\left(\frac{3v}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

طريقة الحل (1):

$$\frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \quad \Longrightarrow 8 = 4\pi\left(\left(\frac{3v}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^2 \frac{dr}{dt}$$

$$\Longrightarrow 8 = 4\pi\left(\frac{3(36\pi)}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{dr}{dt} \quad \Longrightarrow 8 = 4\pi\left(\frac{108\pi}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{dr}{dt} \quad \Longrightarrow 8 = 4\pi(27)^{\frac{2}{3}} \frac{dr}{dt}$$

$$8 = 4\pi(9)\frac{dr}{dt} \quad \Longrightarrow 36\pi\frac{dr}{dt} = 8 \quad \Longrightarrow \boxed{\frac{dr}{dt} = \frac{2}{9\pi}\, cm/s}$$

طريقة الحل (2):

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \Longrightarrow \left[36\pi = \frac{4}{3}\pi r^3\right] \times \frac{3}{4} \quad \Longrightarrow 27\pi = \pi r^3$$

$$\Longrightarrow r^3 = 27 \Longrightarrow \boxed{r = 3\ cm}$$

$$\frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \quad \Longrightarrow 8 = 4\pi(3)^2 \frac{dr}{dt} \Longrightarrow 8 = 36\pi\frac{dr}{dt}$$

$$\Longrightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{8}{36\pi} \quad \Longrightarrow \boxed{\frac{dr}{dt} = \frac{2}{9\pi}\, cm/s}$$

3) إذا ملئ مدة $33.5\ s$.

$$t = 33.5 \qquad , v = 8 \times 33.5 = 268\ cm^3$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3(268)}{4\pi}} \quad \Longrightarrow r \approx 4cm$$

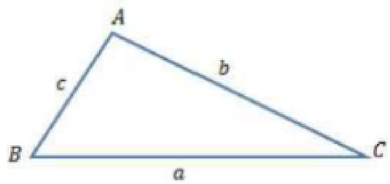
$$\frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \quad \Longrightarrow 8 = 4\pi(4)^2 \frac{dr}{dt} \quad \Longrightarrow 8 = 64\pi\frac{dr}{dt}$$

$$\Longrightarrow \frac{8}{64\pi} = \frac{64\pi}{64\pi}\frac{dr}{dt} \quad \Longrightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{8}{64\pi} \quad \Longrightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{1}{8\pi} \quad \Longrightarrow \frac{dr}{dt} \approx 0.04\ cm/s$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

إذا كانت θ الزاوية المحصورة بين الضلعين اللذين طول كل منهما s في مثلث متطابق الضلعين ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

4) أثبت أن مساحة المثلث تعطى بالمعادلة : $A = \frac{1}{2}s^2 \sin\theta$.



معلوم أن مساحة المثلث تساوي نصف ناتج ضرب طولي أي ضلعين في جيب الزاوية المحصورة بينهما.

$$A = \frac{1}{2}ab\sin C$$

فإذا كان $c = \theta$, $a = b = s$ ، فإن :

$$A = \frac{1}{2}s^2 \sin\theta$$

5) إذا كانت الزاوية θ تزداد بمعدل $\frac{1}{2}rad/min$ ، فأجد معدل تغير مساحة المثلث عندما $\theta = \frac{\pi}{6}$ ، علماً بأن طول الضلعين المتطابقين ثابت .

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} \quad , \quad \theta = \frac{\pi}{6} \quad , \quad \frac{dA}{dt} = ?$$

$$A = \frac{1}{2}s^2\sin\theta \quad \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}s^2\cos\theta\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}s^2(\cos\frac{\pi}{6})\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}s^2(\frac{\sqrt{3}}{2})\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{8}s^2}$$

6) يتحرك جسيم على منحنى الاقتران : $f(x) = \frac{10}{1+x^2}$ ، إذا كان معدل تغير الإحداثي x هو $3cm/s$ ، فأجد معدل تغير الإحداثي y عندما $x = 20$.

$$\frac{dx}{dt} = 3 \quad , x = 20 \quad , \frac{dy}{dt} = ?$$

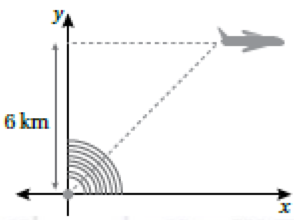
$$y = \frac{10}{1+x^2} \quad \Rightarrow y = 10(1+x^2)^{-1}$$

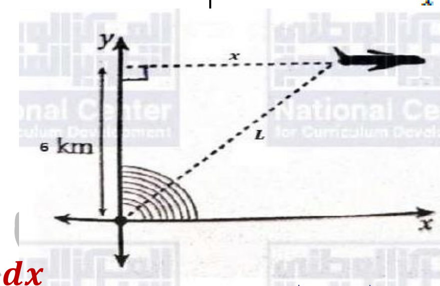
$$\frac{dy}{dt} = -10(1+x^2)^{-2}(2x)\frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-20x}{(1+x^2)^2}.\frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-20(20)}{(1+20^2)^2}.3 \quad \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-1200}{(401)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-1200}{160801} \quad \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dt} \approx -0.007\ cm/s}$$

7) حلقت طائرة على ارتفاع $6km$ ، ومرت في أثناء تحليقها مباشرة فوق رادار كما في الشكل المجاور ، وعندما أصبح البعد بينهما وبين الرادار $10km$ ، رصد الرادار معدل تغير البعد بينه وبين الطائرة ، فكان $300km/h$ ،أجد سرعة الطائرة في هذه اللحظة .





$\dfrac{dL}{dt} = 300 \quad , \quad L = 10 \quad , \quad y = 6$

$\dfrac{dy}{dt} = 0$ لأن y ثابت $\quad , \quad x = ? \quad , \quad \dfrac{dx}{dt} = ?$

$L^2 = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow 10^2 = x^2 + 6^2$

$\Rightarrow 100 = x^2 + 36 \quad \Rightarrow x^2 = 64 \quad \Rightarrow x = 8$

$L^2 = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow 2L\dfrac{dL}{dt} = 2x\dfrac{dx}{dt} + 2y\dfrac{dy}{dt}$

$\Rightarrow 2(10)(300) = 2x\dfrac{dx}{dt} + 2(7)(0) \Rightarrow 60000 = 2x\dfrac{dx}{dt}$ عدد المجاهيل (2) بعد الاشتقاق

ملاحظة(1): إذن نحتاج علاقة لإيجاد قيمة المجهول x ليتم تعويضه في المشتقة ليتبقى مجهول واحد فقط ومن ثم إيجاد $\dfrac{dx}{dt}$.

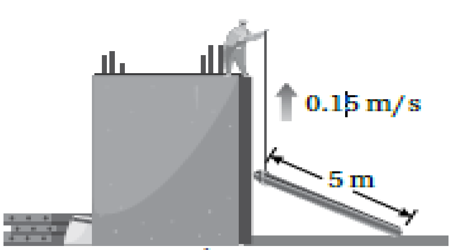
ملاحظة(2) :لإيجاد قيمة المجهول x نستفيد من نظرية فيثاغورس .

$L^2 = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow 10^2 = x^2 + 6^2 \quad \Rightarrow 100 = x^2 + 36 \quad \Rightarrow x^2 = 64 \quad \Rightarrow x = 8$

$6000 = 2(8)\dfrac{dx}{dt} \quad \Rightarrow 6000 = 16\dfrac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{3000}{16} \quad \Rightarrow \boxed{\dfrac{dx}{dt} = 375\ km/h}$

ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

8) بناء: يسحب عامل بناء لوحًا خشبيًّا طوله $5\ m$ إلى الأعلى بجانب مبنى لم يكتمل إنشاؤه بعدُ، وذلك باستعمال حبل رُبِط به أحد طرفي اللوح كما في الشكل المجاور. إذا افترضْتُ أنَّ طرف اللوح غير المربوط بالحبل يتبع مسارًا عموديًّا على جدار المبنى، وأنَّ العامل يسحب الحبل بمُعدَّل $0.15\ m/s$ ، بحيث يظلُّ الطرف العلوي من اللوح مُلامِسًا للجدار، فما سرعة انزلاق الطرف الآخر للوح على الأرض عندما يكون على بُعْد $3\ m$ من جدار المبنى؟



أشاهد المقطع المرئي (الفيديو) في الرمز الآتي:

الخطوة الأولى: كتابة معطيات السؤال وتحديد المطلوب والمجاهيل :

الشكل : مثلث قائم الزاوية ، قانون فيثاغورس $s^2 = x^2 + y^2$

$s = 5\text{ m}$ طول اللوح ، $x = 3\text{ m}$ ، $y = ?\text{ m}$

$\frac{dy}{dt} = 0.15\, m/s$ ، $\frac{dx}{dt} = ?\; m/s$ المطلوب

الخطوة الثانية: الاشتقاق بالنسبة للزمن وتعويض المعطيات :

$$5^2 = x^2 + y^2 \Longrightarrow 25 = x^2 + y^2 \Longrightarrow 0 = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$\Longrightarrow 0 = 2(3)\left(\frac{dx}{dt}\right) + 2(y)(0.15)$$

- عدد المجاهيل اثنان نحتاج علاقة لتقليل عدد المجاهيل ، نستخدم فيثاغورس لإيجاد y :

$$s^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow 5^2 = 3^2 + y^2 \Rightarrow 25 = 9 + y^2 \Rightarrow y^2 = 16 \Rightarrow \boxed{y = 4}$$

- نعوض قيمة $\boxed{y = 4}$ **في المشتقة أعلاه:**

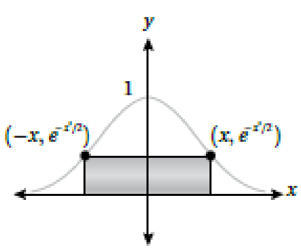
$$\Longrightarrow 0 = 2(3)\left(\frac{dx}{dt}\right) + 2(4)(0.15) \Longrightarrow 0 = 6\left(\frac{dx}{dt}\right) + 1.2$$

$$\Longrightarrow 6\left(\frac{dx}{dt}\right) = -1.2 \Longrightarrow \boxed{\frac{dx}{dt} = -0.2\, m/s}$$

إذن يتحرك الطرف السفلي في تلك اللحظة بسرعة $0.2\, m/s$ **نحو اليسار مقترباً من الجدار.**

يُبيِّن الشكل المجاور مستطيل مرسومًا داخل منحنى الاقتران: $f(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}$.

إذا كان x **يتغيَّر مع الزمن، مُغيِّرًا معه موضع المستطيل، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:**



9) أجد مساحة المستطيل بدلالة x .

مساحة المستطيل = الطول × العرض

الطول = $e^{\frac{-x^2}{2}}$ ، **العرض =** $2x$

$$A = l \times w \Longrightarrow A = e^{\frac{-x^2}{2}} \times 2x \Longrightarrow A = 2xe^{\frac{-x^2}{2}}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨

10) أجد معدل تغير مساحة المستطيل عندما $x = 4\ cm$ ، وعندما $\frac{dx}{dt} = 4cm/min$

$$A = 2x\left(e^{\frac{-x^2}{2}}\right) \Rightarrow \frac{dA}{dt} = (2x)\left(-xe^{\frac{-x^2}{2}}\frac{dx}{dt}\right) + \left(e^{\frac{-x^2}{2}}\right)\left(2\frac{dx}{dt}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = \left(-2x^2e^{\frac{-x^2}{2}}\frac{dx}{dt}\right) + \left(2e^{\frac{-x^2}{2}}\frac{dx}{dt}\right) \Rightarrow \frac{dA}{dt} = e^{\frac{-x^2}{2}}(2-2x^2)\frac{dx}{dt}$$

- نعوض قيم $x = 4\ cm$ و $\frac{dx}{dt} = 4cm/min$

$$\Rightarrow \left.\frac{dA}{dt}\right|_{x=4} = e^{\frac{-(4)^2}{2}}(2-2(4)^2)(4) \qquad \Rightarrow \left.\frac{dA}{dt}\right|_{x=4} = e^{-8}(-30)(4)$$

$$\Rightarrow \boxed{\left.\frac{dA}{dt}\right|_{x=4} = -120e^{-8}\ cm^2/min}$$

معتصم ابراهيم ٠٧٨٦٦٦٧٨٠٨