الوحدة الثانية

الاحصاء والاحتمالات

الأدبي والمعلوماتية

المستوى الرابع

الأستاذ : عماد مسك

٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

التحـــدّي

مقدمة :

مبدأ العدّ

⊛ ينص مبدأ العد على :

إذا أمكننا إجراء عملية ما على خطوتين و أجريت الخطوة الأولى بطرق عددها $ن_١$ ، والثانية بطرق عددها $ن_٢$ ، فيمكن إجراء هذه العملية بطرق عددها $ن_١ \times ن_٢$

أمثلة :

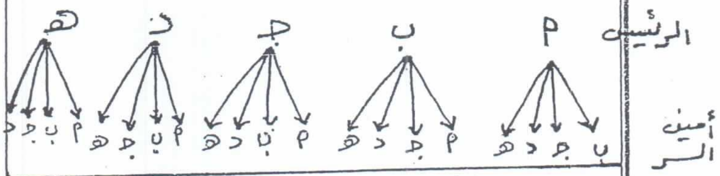
1 بكم طريقة يمكن اختيار رئيس وأمين سر للجنة مكونة من خمسة أشخاص أ ، ب ، جـ ، د ، هـ بشرط ألا يشغل أحد الأشخاص المركزين معاً .

الحل :

يمكن اختيار الرئيس بطرق عددها = ٥

أما أمين السر فيتم اختياره بطرق عددها = ٤

فيكون عدد طرق اختيارهما معاً = ٥×٤ = ٢٠ طريقة



2 بناية يتم الدخول إليها والخروج منها عن طريق (٧) أبواب ، فكم عدد الطرق التي تتيح لشخص أن يدخل من باب ويخرج من باب آخر؟

الحل : عدد طرق الدخول = ٧

عدد طرق الخروج = ٦

عدد طرق عملية الدخول والخروج = ٧×٦ = ٤٢ طريقة

⊛ تعميم مبدأ العد :

إذا أمكننا إجراء عملية ما على خطوات عددها (ك) فالخطوة الأولى تجرى بطرق عددها $ن_١$ ، الثانية تجرى بطرق عددها $ن_٢$ ، وهكذا حتى الخطوة الأخيرة ك التي تجرى بطرق عددها $ن_ك$ فيمكن إجراء هذه العملية بطرق عددها $ن_١ \times ن_٢ \times \dots \times ن_ك$

3 كم عدد الطرق التي يمكن أن يجلس بها خمسة أشخاص في ٧ مقاعد على خط مستقيم ؟؟

الحل : الشخص الأول يجلس بطرق عددها ٧ والثاني بطرق عددها ٦ وهكذا

∴ عدد الطرق التي يجلس بها الأشخاص الخمسة = ٧×٦×٥×٤×٣ = ٢٥٢٠ طريقة

4 كم كلمة من ثلاثة أحرف يمكن تكوينها من الأحرف { أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، و } في الحالتين الآتيتين مع ملاحظة عدم ضرورة أن يكون للكلمة معنى :

ⓐ إذا لم يكن مسموحاً تكرار أي حرف في الكلمة

ⓑ إذا كان التكرار مسموحاً به

الحل :

ⓐ التكرار غير مسموح به :

عدد طرق اختيار الحرف الأول = ٦

عدد طرق اختيار الحرف الثاني = ٥

عدد طرق اختيار الحرف الثالث = ٤

∴ عدد الكلمات التي يمكن تكوينها = ٦×٥×٤ = ١٢٠ كلمة

ⓑ التكرار مسموح به :

عدد طرق اختيار أي حرف = ٦

∴ عدد الكلمات التي يمكن تكوينها = ٦×٦×٦ = ٢١٦

* مبدأ العد :-

لإيجاد عدد الطرق التي يمكن بها إجراء عدة عمليات ويمكن إيجاد عدد الطرق عن طريق إيجاد حاصل ضرب ن١ × ن٢ × ن٣ × ——

*مثال: لنفرض أن مقصف مدرسة يقدم ٣ أنواع من السندويشات و ٤ أنواع من العصير ، فما عدد الطرق التي يمكن لطالب أن يتناول بها وجبة مكونة من عصير وساندويش.

الحل :- عدد الطرق لتناول الوجبة = ٣×٤ = ١٢

مثال: أراد شخص السفر من المدينة (س) إلى المدينة (ص) ثم إلى المدينة (ع) ، فإذا كان هناك طريقتان للسفر من (س) إلى (ص) و ٥ طرق للسفر من (ص) إلى (ع) فكم عدد الطرق المختلفة للسفر من (س) إلى (ع) مروراً بالمدينة (ص) .

الحل:- عدد الطرق من (س) إلى (ع) = ٢×٥ = ١٠

*مثال:- في صف ٢٠ طالباً بكم طريقة يمكن اختيار ٣ طلاب منهم لتشكيل لجنة ثلاثية بحيث يكون الأول رئيساً والثاني نائب للرئيس والثالث أميناً للصندوق .

الحل: عدد طرق اختيار الرئيس هو ٢٠ طريقة

″ ″ ″ نائباً للرئيس هو ١٩ طريقة

″ ″ ″ أميناً للصندوق هو ١٨ طريقة

فيكون عدد الطرق = ٢٠×١٩×١٨ = ٦٨٤٠

*مثال:- اذا كان لديك الأرقام {٥، ٣، ٨، ٦، ٤، ٩} كم عدداً مؤلفاً من ثلاثة منازل يمكن تكوينه باستخدام هذه الأرقام -

أ) اذا سمح بتكرار الرقم ب) إذا لم يسمح بتكرار الرقم

الحل:- أ) عدد الأعداد المؤلفة من ٣ منازل = ٦×٦×٦ = ٢١٦

ب) عدد الأعداد المؤلفة من ٣ منازل = ٦×٥×٤ = ١٢٠

مثال: اذا كان لديك الأحرف {أ، ب، جـ، د، هـ} والأرقام {٢، ٥، ٨، ٧، ٣، ١}

نريد تكوين لوحات وكل لوحة تحوي حرفين ثم رقمين، ما عدد اللوحات التي يمكن تكوينها في الحالات التالية:

أ) اذا سمح بتكرار الحرف وتكرار الرقم

ب) اذا لم يسمح بتكرار الحرف ولا تكرار الرقم

جـ) اذا سمح بتكرار الحرف ولم يسمح بتكرار الرقم

د) اذا لم يسمح بتكرار الحرف وسمح بتكرار الرقم

الحل: - أ) العدد = ٥ × ٥ × ٦ × ٦ = ٩٠٠

ب) العدد = ٥ × ٤ × ٦ × ٥ = ٦٠٠

جـ) العدد = ٥ × ٥ × ٦ × ٥ = ٧٥٠

د) العدد = ٥ × ٤ × ٦ × ٦ = ٧٢٠

* **مثال:** ما عدد الطرق التي يمكن أن يجلس بها خمسة أشخاص على خمسة مقاعد مرقمة في صف.

الحل: - هناك ٥ اماكن أمام الشخص الأول ويبقى ٤ أمام الثاني وهكذا

عدد الطرق = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٢٠ طريقة

ملاحظة: - مضروب العدد الصحيح غير السالب (ن) هو ن!

ن! = ن × (ن - ١) × (ن - ٢) × (ن - ٣) × ـــ ـــ ـــ × ٣ × ٢ × ١

وهناك حالة خاصة ٠! = ١

مثل: ٤! = ٤ × ٣ × ٢ × ١

٦! = ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١

٣! = ٣ × ٢ × ١

عماد عساف

مدارس النظم الحديثة

0795153669

مثال :- أوجد قيمة كل مما يلي :-

① ٤!   ② ٥! - ٣!   ③ ٧! / ٥!   ④ ٢! + ٠!

الحل :- ① ٤! = ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٢٤

② ٥! - ٣! = (٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١) - (٣ × ٢ × ١)
= ١٢٠ - ٦ = ١١٤

③ ٧! / ٥! = (٧ × ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١) / (٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١) = ٧ × ٦ = ٤٢

④ ٢! + ٠! = (٢ × ١) + ١ = ٢ + ١ = ٣

ملاحظة :- ن! = ن × (ن - ١)!
= ن × (ن - ١) × (ن - ٢)!
= ن × (ن - ١) × (ن - ٢) × (ن - ٣)! وهكذا

مثل :- ٣٠! = ٣٠ × ٢٩!
= ٣٠ × ٢٩ × ٢٨!
= ٣٠ × ٢٩ × ٢٨ × ٢٧! ...... وهكذا

سؤال :- أوجد قيمة كل مما يلي :

① ٢٠! / ١٨!   ② ١٠٠! / ٩٩!   ③ ١٢! / (٩! × ٣!)

مثال :- ما عدد طرق جلوس ٤٠ طالب على ٤٠ مقعد مرقمة في صف

الحل :- عدد الطرق = ٤٠ × ٣٩ × ٣٨ × ...... × ٢ × ١ = ٤٠!

سؤال :- ما عدد طرق جلوس ١٥ طالب على ١٥ مقعد مرقمة في إحدى الصفوف ؟

مثال :- أوجد قيمة ن في كل مما يلي :-

① ن! = ٢٤ ② ٣ن! = ٣٦٠ ③ (٣ن)! = ٧٢٠

④ ن! − ٤! = ٩٦ ⑤ (٢ن+١)! = ١٢٠ ⑥ ن! = ١

الحل :- ① ن! = ٢٤

ن! = ١ × ٢ × ٣ × ٤ = ٤! ⇐ $\boxed{\text{ن = ٤}}$

② ٣ن! = ٣٦٠ ⇐ ن! = $\frac{٣٦٠}{٣}$ = ١٢٠

١٢٠ = ١ × ٢ × ٣ × ٤ × ٥ = ٥! ⇐ $\boxed{\text{ن = ٥}}$

③ (٣ن)! = ٧٢٠

٧٢٠ = ١ × ٢ × ٣ × ٤ × ٥ × ٦ = ٦!

⇐ ٣ن = ٦ ⇐ $\boxed{\text{ن = ٢}}$

④ ن! − ٤! = ٩٦ ⇐ ن! − (٢٤) = ٩٦

⇐ ن! = ٩٦ + ٢٤ = ١٢٠

⇐ ١٢٠ = ١ × ٢ × ٣ × ٤ × ٥ = ٥! ⇐ $\boxed{\text{ن = ٥}}$

⑤ (٢ن+١)! = ١٢٠ ⇐ ١٢٠ = ١ × ٢ × ٣ × ٤ × ٥ = ٥!

⇐ ٢ن + ١ = ٥ ⇐ ٢ن = ٤ ⇐ $\boxed{\text{ن = ٢}}$

⑥ ن! = ١ ⇐ $\boxed{\text{ن = ٠}}$ أو $\boxed{\text{ن = ١}}$

* التباديل :-

لإيجاد تباديل ثلاثية لمجموعة العناصر {أ ، ب ، جـ} فهي :

أ ب جـ ، أ جـ ب ، ب أ جـ ، ب جـ أ ، جـ أ ب ، جـ ب أ وتباديلها الثنائية هي :

أ ب ، أ جـ ، ب أ ، ب جـ ، جـ أ ، جـ ب وتباديلها الأحادية هي :

أ ، ب ، جـ

ونعبر عن التباديل الثلاثية بالرمز ل(٣، ٣) = ٦

" الثنائية بالرمز ل(٣، ٢) = ٦

" الأحادية " ل(٣، ١) = ٣

⇐ $$\boxed{\text{ل}(\text{ن}،\text{ر}) = \frac{\text{ن}!}{(\text{ن}-\text{ر})!}}$$

مثل :- ل(٥، ٣) = ٥ × ٤ × ٣ = ٦٠

أو $$\text{ل}(٥،٣) = \frac{٥!}{(٥-٣)!} = \frac{٥!}{٢!} = \frac{٥ \times ٤ \times ٣ \times \cancel{٢!}}{\cancel{٢!}} = ٦٠$$

* **مثال** :- جد : أ ل(٧، ٤) ب ل(١٠، ٣) جـ ل(١٠٠، ٢)

الحل :- أ $\text{ل}(\overset{\text{عدد العناصر}}{٧}، \overset{\text{عدد الحدود}}{٤}) = ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ = ٨٤٠$

ب ل(١٠، ٣) = ١٠ × ٩ × ٨ = ٧٢٠

جـ ل(١٠٠، ٢) = ١٠٠ × ٩٩ = ٩٩٠٠

الحد الذي نقف عنده هو (ن − ر + ١)

سؤال :- جد : أ ل(٥، ١) ب ل(٧، ١) جـ ل(١٢، ١)

مثال : أوجد : ل(٣، ١) = ٣

ل(١٠، ١) = ١٠

ل(٦، ١) = ٦

∴ $\boxed{\text{ل}(\text{ن}،١) = \text{ن}}$

مثال: جد: أ) ل(٣، ٠) ب) ل(٧، ٠)

الحل: أ) ل(٣، ٠) = ٣! / (٣ − ٠)! = ٣! / ٣! = ١

ب) ل(٧، ٠) = ٧! / (٧ − ٠)! = ٧! / ٧! = ١

∴ $\boxed{\text{ل(ن، ٠) = ١}}$

* **مثال:** جد: أ) ل(٢، ٢) ب) ل(٤، ٤) جـ) ل(٥، ٥)

الحل: أ) ل(٢، ٢) = ٢ × ١ = ٢ = ٢!

ب) ل(٤، ٤) = ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٤! = ٢٤

جـ) ل(٥، ٥) = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٥! = ١٢٠

∴ $\boxed{\text{ل(ن، ن) = ن!}}$

طريقك إلى النجاح

* **مثال:** كم كلمة باستخدام حروف مختلفة يمكن تكوينها من الحروف أ، ب، جـ، د، هـ، و، ز إذا كانت كل كلمة مكونة من: أ) ٣ حروف ب) ٤ حروف جـ) ٥ حروف

الحل: أ) ل(٧، ٣) = ٧ × ٦ × ٥ = ٢١٠

ب) ل(٧، ٤) = ٧ × ٦ × ٥ × ٤ = ٨٤٠

جـ) ل(٧، ٥) = ٧ × ٦ × ٥ × ٤ × ٣ = ٢٥٢٠

مثال: بكم طريقة يمكن أن يجلس ٥٠ شخص في ٥٠ مقعد مرقمة على خط مستقيم؟

الحل: ل(٥٠، ٥٠) = ٥٠!

مثال: جد قيمة ر في كل مما يلي: أ) ل(٨، ر) = ١٨٦٠ ب) ل(١٠، ر) = ٧٢٠

الحل: أ) ل(٨، ر) = ٨ × ٧ × ٦ × ٥ = ١٨٦٠ ⇐ ∴ $\boxed{\text{ر = ٤}}$

ب) ل(١٠، ر) = ١٠ × ٩ × ٨ = ٧٢٠ ⇐ ∴ $\boxed{\text{ر = ٣}}$

مثال :- جد قيمة ن في كل مما يلي :-

أ) ل(ن، ٢) = ٧٢ ب) ل(ن، ٣) = ٢١٠ جـ) ٣ ل(ن، ٢) = ٦٠

الحل :- أ) نبحث عن عددين متتاليين حاصل ضربهما يساوي ٧٢

ل(ن، ٢) = ٩ × ٨ = ٧٢ ∴ $\boxed{\text{ن} = ٩}$

ب) نبحث عن ٣ أعداد متتالية حاصل ضربها ٢١٠

ل(ن، ٣) = ٧ × ٦ × ٥ = ٢١٠ ⇐ ∴ $\boxed{\text{ن} = ٧}$

جـ) ٣ ل(ن، ٢) = ٦٠ ⇐ ل(ن، ٢) = $\frac{٦٠}{٣}$ = ٢٠

ل(ن، ٢) = ٥ × ٤ ⇐ ∴ $\boxed{\text{ن} = ٥}$

* **مثال :-** إذا كان ل(ن، ٣) = ٩ ل(ن، ٢) فجد ن

الحل :- ل(ن، ٣) = ٩ ل(ن، ٢)

$\cancel{\text{ن}}$ × $\cancel{(\text{ن} - ١)}$ × (ن - ٢) = ٩ × $\cancel{\text{ن}}$ × $\cancel{(\text{ن} - ١)}$

⇐ ن - ٢ = ٩ ⇐ $\boxed{\text{ن} = ١١}$

* **مثال :-** إذا كان ٣ ل(٦، ر) = ٩٠ فما قيمة ر

الحل :- ٣ ل(٦، ر) = ٩٠ ⇐ ل(٦، ر) = $\frac{٩٠}{٣}$ = ٣٠

ل(٦، ر) = ٣٠ ⇐ ٦ × ٥ = ٣٠

⇐ [illegible] $\boxed{\text{ر} = ٢}$

* التوافيق :-

عندما يكون الاختيار بدون اهتمام لترتيب الأشخاص أو العناصر فهنا يسمى بالتوافيق .

مثل أن نجد عدد طرق اختيار شخصين من بين ٥ أشخاص بدون الاهتمام لترتيب الشخصين :

$$\binom{٥}{٢} = \frac{٥!}{٢!\,٣!} = \frac{٥×٤×\cancel{٣!}}{٢×١×\cancel{٣!}} = \frac{٢٠}{٢} = ١٠$$

$$\Leftarrow \binom{ن}{ر} = \frac{ن!}{ر!×(ن-ر)!}$$ وأيضاً $$\binom{ن}{ر} = \frac{ل(ن، ر)}{ر!}$$

مثال :- أوجد : (أ) $\binom{٨}{٣}$ (ب) $\binom{٦}{٤}$ (جـ) $\binom{١٠}{٢}$

الحل :- (أ) $\binom{٨}{٣} = \frac{٨!}{٣!×٥!} = \frac{٨×٧×٦×\cancel{٥!}}{٣×٢×١×\cancel{٥!}} = ٥٦$

(ب) $\binom{٦}{٤} = \frac{٦!}{٤!×٢!} = \frac{٦×٥×\cancel{٤!}}{\cancel{٤!}×٢×١} = ١٥$

(جـ) $\binom{١٠}{٢} = \frac{١٠!}{٢!×٨!} = \frac{١٠×٩×\cancel{٨!}}{٢×١×\cancel{٨!}} = ٤٥$

* $\boxed{\binom{ن}{٠} = ١}$ مثل :- $\binom{٩}{٠} = \frac{\cancel{٩!}}{٠!×\cancel{٩!}} = \frac{١}{١} = ١$

* $\boxed{\binom{ن}{ن} = ١}$ مثل : $\binom{٨}{٨} = ١$ ، $\binom{١٥}{١٥} = \frac{\cancel{١٥!}}{\cancel{١٥!}×٠!} = ١$

* $\boxed{\binom{ن}{١} = ن}$ مثل : $\binom{٧}{١} = \frac{٧!}{١!×٦!} = \frac{٧×\cancel{٦!}}{١!×\cancel{٦!}} = ٧$ ، $\binom{٣}{١} = ٣$

مثال :- أوجد ناتج : (أ) $\binom{٥}{٣}$ ، $\binom{٥}{٢}$ (ب) $\binom{٧}{٤}$ ، $\binom{٧}{٣}$ (جـ) $\binom{٩}{٢}$ ، $\binom{٩}{٧}$

الحل :- (أ)

$$\left[\begin{array}{l} \binom{٥}{٣} = \frac{٥!}{٣!×٢!} = ١٠ \\ \binom{٥}{٢} = \frac{٥!}{٢!×٣!} = ١٠ \end{array}\right.$$

$$\binom{٥}{٣} = \binom{٥}{٢}$$

$$٣ + ٢ = ٥$$

ب) $\binom{٧}{٤} = \frac{٧!}{٤! \times ٣!} = \frac{\cancel{٤!} \times ٥ \times ٦ \times ٧}{١ \times ٢ \times ٣ \times \cancel{٤!}} = ٣٥$

$\binom{٧}{٣} = \frac{٧!}{٣! \times ٤!} = \frac{\cancel{٤!} \times ٥ \times ٦ \times ٧}{٣! \times \cancel{٤!}} = ٣٥$

$\binom{٧}{٤} = \binom{٧}{٣}$

$٤ + ٣ = ٧$

ج) $\binom{٩}{٢} = \frac{٩!}{٢! \times ٧!} = \frac{\cancel{٧!} \times ٨ \times ٩}{\cancel{٧!} \times ١ \times \cancel{٢}} = ٣٦$

$\binom{٩}{٧} = \frac{٩!}{٧! \times ٢!} = \frac{\cancel{٧!} \times ٨ \times ٩}{\cancel{٧!} \times ٢ \times ١} = ٣٦$

$\binom{٩}{٢} = \binom{٩}{٧}$

$٢ + ٧ = ٩$

⇐ ① $\binom{ن}{ر} = \binom{ن}{ن - ر}$

② اذا كان $\binom{ن}{ر_١} = \binom{ن}{ر_٢}$ فإن $ر_١ = ر_٢$ أو $ر_١ + ر_٢ = ن$

مثال :- حل المعادلات التالية :-

① $\binom{١٥}{٧} = \binom{١٥}{س}$

الحل :- $\boxed{س = ٧}$ أو $س + ٧ = ١٥ \Leftarrow \boxed{س = ٨}$

الأستاذ عماد مساك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

② $\binom{٣٢}{١٢} = \binom{٣٢}{٢س + ٦}$

الحل :- $٢س + ٦ = ١٢$ أو $٢س + ٦ + ١٢ = ٣٢$

$٢س = ٦$

$\boxed{س = ٣}$

$٢س + ١٨ = ٣٢$

$٢س = ١٤$

$\boxed{س = ٧}$

③ $\binom{س}{٤} = \binom{س}{٩}$

$س = ٤ + ٩ = ١٣$

مثال: - حل المعادلات التالية:

أ) $\binom{٨}{س} = ١$

الحل: - $\boxed{س = ٠}$ أو $\boxed{س = ٨}$

ب) $\binom{١٥}{س} = ١٥$

الحل: - $\boxed{س = ١}$ أو $س = ١٥ - ١ = ١٤$ ⇐ $\boxed{س = ١٤}$

جـ) $\binom{س}{١} = ٩$

الحل: - $\boxed{س = ٩}$

مثال: - حل المعادلة أ) $\binom{ن}{٢} = ٢١$ ب) $\binom{ن}{٢} = ٢٨$

الحل: - أ) $\binom{ن}{٢} = \frac{ل(ن، ٢)}{٢!}$ ⇐ $٢١ = \frac{ل(ن، ٢)}{٢}$

⇐ $ل(ن، ٢) = ٤٢$ ⇐ $٧ \times ٦ = ٤٢$ ⇐ $\boxed{ن = ٧}$

ب) $\binom{ن}{٢} = \frac{ل(ن، ٢)}{٢!}$ ⇐ $٢٨ = \frac{ل(ن، ٢)}{٢}$ ⇐ $ل(ن، ٢) = ٥٦$

⇐ $٨ \times ٧ = ٥٦$ ⇐ $\boxed{ن = ٨}$

مثال: - إذا كان $\binom{ن}{٣} = ١٦٥$ نجد ل(ن، ٣)

الحل: - $\binom{ن}{٣} = \frac{ل(ن، ٣)}{٣!}$ ⇐ $١٦٥ = \frac{ل(ن، ٣)}{٦}$ (ضرب تبادلي)

⇐ $ل(ن، ٣) = ٩٩٠$

مثال: - اذا كان $ل(ن، ر) = ٢٠$ ، $\binom{ن}{ر} = ١٠$ نجد ن ، ر

الحل: - $\binom{ن}{ر} = \frac{ل(ن، ر)}{ر!}$ ⇐ $١٠ = \frac{٢٠}{ر!}$ ⇐ $١٠ ر! = ٢٠$ ⇐ $ر! = ٢$

⇐ $\boxed{ر = ٢}$

بالتعويض: $ل(ن، ٢) = ٢٠$ ⇐ $٥ \times ٤ = ٢٠$ ⇐ $\boxed{ن = ٥}$

مثال: - إذا كان ل(ن، ر) = ٢١٠ ، $\binom{ن}{ر}$ = ٣٥ فجد ن ، ر

الحل: - $\binom{ن}{ر} = \frac{ل(ن، ر)}{ر!}$ ⟸ $٣٥ = \frac{٢١٠}{ر!}$ ⟸ $ر! = \frac{٢١٠}{٣٥} = ٦$

⟸ $\boxed{ر = ٣}$

بالتعويض: ل(ن، ٣) = ٢١٠

⟸ ن × (ن - ١) × (ن - ٢) = ٧ × ٦ × ٥ = ٢١٠

⟸ $\boxed{ن = ٧}$

مثال: - اذا كان ل(ن، ١) = $\binom{ن}{٢}$ فجد قيمة ن

الحل: - ل(ن، ١) = ن

$\binom{ن}{٢} = \frac{ل(ن، ٢)}{٢!} = \frac{ن × (ن - ١)}{٢}$

∴ $\frac{ن(ن - ١)}{٢}$ = ن ⟸ ن(ن - ١) = ٢ن ⟸ $ن^٢$ - ن - ٢ن = ٠

⟸ $ن^٢$ - ٣ن = ٠ ⟸ ن(ن - ٣) = ٠ ⟸ ن = ٠ (مرفوض)

⟸ $\boxed{ن = ٣}$

مثال: - اذا كان $\binom{ن}{ن - ٢}$ = ل(٣، ٢) فجد قيمة ن

الحل: - ل(٣، ٢) = ٣ × ٢ = ٦

$\binom{ن}{ن - ٢} = \binom{ن}{٢} = \frac{ل(ن، ٢)}{٢!} = ٦$

⟸ ل(ن، ٢) = ١٢ ⟸ ٤ × ٣ = ١٢ ⟸ $\boxed{ن = ٤}$

مثال: - امتحان مكون من ٩ أسئلة، بكم طريقة يمكن لشخص اختيار ٦ أسئلة للاجابة عنها.

الحل: عدد الطرق = $\binom{٩}{٦} = \frac{٩!}{٦! × ٣!} = \frac{\overset{٣}{\cancel{٩}} × \overset{٤}{\cancel{٨}} × ٧ × \cancel{٦!}}{\cancel{٦!} × \underset{١}{\cancel{٣}} × \underset{١}{\cancel{٢}} × ١} = ٨٤$

مثال:- من بين ٥ طلاب نريد تكوين لجنة، ما عدد طرق تكوين اللجنة إذا كانت تحوي: أ) ٣ طلاب   ب) ٣ طلاب على الأقل

الحل:- أ) عدد الطرق $= \binom{٥}{٣} = \frac{٥!}{٣! \times ٢!} = \frac{٥ \times ٤ \times ٣!}{٣! \times ٢ \times ١} = ١٠$

ب) ٣ طلاب + ٤ طلاب + ٥ طلاب

$$= \binom{٥}{٣} + \binom{٥}{٤} + \binom{٥}{٥} = ١٠ + ٥ + ١ = ١٦$$

مثال: بكم طريقة يمكن اختيار ٤ طلاب ومعلمين اثنين لتشكيل لجنة من بين ٧ طلاب و ٥ معلمين.

الحل:- عدد طرق اختيار الطلاب $= \binom{٧}{٤} = \frac{٧!}{٤! \times ٣!} = \frac{٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤!}{٤! \times ٣ \times ٢ \times ١} = ٣٥$

عدد طرق اختيار المعلمين $= \binom{٥}{٢} = \frac{٥!}{٢! \times ٣!} = \frac{٥ \times ٤ \times ٣!}{٢ \times ١ \times ٣!} = ١٠$

⇐ عدد طرق اختيار اللجنة $= ٣٥ \times ١٠ = ٣٥٠$

مثال:- مجلس ادارة مكون من (٨ رجال) و (٥ سيدات) نريد تكوين لجنة رباعية منهم، ما عدد طرق تشكيل اللجنة في الحالات التالية:

١) اذا كان في اللجنة رجلين وسيدتين

٢) اذا كان في اللجنة ٣ رجال على الأقل

٣) رئيس اللجنة ونائبه من الرجال والباقي سيدات.

الحل:- ١) عدد الطرق = عدد طرق اختيار رجلين × عدد طرق اختيار سيدتين

$$= \binom{٨}{٢} \times \binom{٥}{٢} = ٢٨ \times ١٠ = ٢٨٠$$

٢) ٣ رجال على الأقل تعني ٣ رجال وسيدة واحدة أو ٤ رجال

$$= \binom{٨}{٣}\binom{٥}{١} + \binom{٨}{٤} = ٥٦ \times ٥ + ٧٠ = ٢٨٠ + ٧٠ = ٣٥٠$$

٣) عدد الطرق = عدد طرق اختيار الرئيس × عدد طرق اختيار النائب × عدد طرق اختيار السيدتين

$$= ٨ \times ٧ \times \binom{٥}{٢} = ٥٦ \times ١٠ = ٥٦٠$$

مثال ٥:- في مسابقة ٦ أسئلة علوم و ٥ أسئلة أدب ، ويختار المتسابق ٣ أسئلة للإجابة عنها ، ما عدد طرق اختيار الأسئلة إذا كان على المتسابق أن يختار :

١) سؤال علوم وسؤالين أدب ٢) سؤالين على الأقل علوم

٣) جميع الأسئلة من نوع واحد

الحل :- ١) عدد الطرق $= \binom{٦}{١} \times \binom{٥}{٢} = ٦ \times ١٠ = ٦٠$

٢) عدد الطرق = عدد طرق (سؤالين علوم وسؤال أدب) + عدد طرق ٣ أسئلة علوم

$= \binom{٦}{٢}\binom{٥}{١} + \binom{٦}{٣}$

$= ١٥ \times ٥ + ٢٠ = ٧٥ + ٢٠ = ٩٥$

٣) عدد الطرق = عدد طرق جميع الأسئلة علوم + عدد طرق جميع الأسئلة أدب

$= \binom{٦}{٣} + \binom{٥}{٣} = ٢٠ + ١٠ = ٣٠$

* المتغير العشوائي المنفصل :-

عند إجراء تجربة نهتم بخاصية معينة لنواتج التجربة فمثلاً عند رمي قطعة نقد مرتين فإن الفضاء العيني Ω = {ص ص ، ص ك ، ك ص ، ك ك} ، فإذا دل المتغير س على عدد مرات ظهور الصورة فإن س (ص ص) = ٢ ، س (ص ك) = ١ ، ~~س (ك ص) = ١~~ س (ك ك) = ٠ ، وتكون قيم س {٠، ١، ٢} وإذا ربطنا كل قيمة باحتمالها :

س	٠	١	٢
ل(س)	$\frac{١}{٤}$	$\frac{٢}{٤}$	$\frac{١}{٤}$

ويسمى هذا التوزيع الاحتمالي ويمكن كتابته على الصورة

{(٠، $\frac{١}{٤}$) ، (١، $\frac{٢}{٤}$) ، (٢، $\frac{١}{٤}$)} ⇐ نلاحظ أن $\sum$ ل (س) = ١

⇐ $\frac{١}{٤} + \frac{٢}{٤} + \frac{١}{٤}$ = ١

مثال :- عند رمي قطعة نقد ٣ مرات ، سجل الفضاء العيني وإذا دل المتغير العشوائي س على عدد مرات ظهور الصورة ١) اكتب قيم س ٢) جد التوزيع الاحتمالي لـ س

الحل :- Ω = {(ص ص ص) ، (ص ص ك) ، (ك ك ص) ، (ك ك ك) ، (ص ك ص) ، (ك ص ك) ، (ك ص ص) ، (ص ك ك)}

١) قيم س هي {٠، ١، ٢، ٣}

٢)

س	٠	١	٢	٣
ل(س)	$\frac{١}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{١}{٨}$

مثال :- عند تسجيل طفلين حسب الجنس وتسلسل الولادة إذا دل المتغير س على عدد الأطفال الذكور ، اكتب التوزيع الاحتمالي واكتب التوقع .

الحل : Ω = {و و ، و ب ، ب و ، ب ب}

قيم س هي : {٠، ١، ٢}

س	٠	١	٢	
ل(س)	$\frac{١}{٤}$	$\frac{٢}{٤}$	$\frac{١}{٤}$	

مثال :- اذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير ص هو { (٠ ، ٠٫١) ، (١ ، ٠٫٣) ، (٢ ، ب) }
جد قيمة ب

الحل :- ٠٫١ + ٠٫٣ + ب = ١
٠٫٤ + ب = ١ ⟸ ب = ١ - ٠٫٤ = ٠٫٦

مثال :- اذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير كما في الجدول التالي جد ب

س	٠	١	٢	٣
ل(س)	٠٫١	٠٫١	٠٫٤	ب

الحل :- ٠٫١ + ٠٫١ + ٠٫٤ + ب = ١
ب = ١ - ٠٫٦ = ٠٫٤

* توزيع ذات الحدين :-

اذا اجريت تجربة ن من المرات وكان احتمال النجاح في المحاولة الواحدة هو (م)
وكان س متغيرا عشوائيا يمثل عدد مرات النجاح فإن ل(س = ر) = $\binom{ن}{ر}$ $(م)^{ر}$ $(١ - م)^{ن - ر}$
ويسمى ن ، م معاملي المتغير س

مثال :- عند رمي قطعة نقد ١٠ مرات
١) ما احتمال ظهور الصورة في ٧ مرات
٢) ما احتمال ظهور الصورة في ٤ مرات
٣) ما احتمال ظهور الصورة في جميع المرات

الحل :- ن = ١٠   م = $\frac{١}{٢}$ ١ - م = ١ - $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$

١) ل(٧) = $\binom{١٠}{٧} \left(\frac{١}{٢}\right)^{٧} \left(\frac{١}{٢}\right)^{٣}$

٢) ل(٤) = $\binom{١٠}{٤} \left(\frac{١}{٢}\right)^{٤} \left(\frac{١}{٢}\right)^{٦}$

٣) ل(١٠) = $\binom{١٠}{١٠} \left(\frac{١}{٢}\right)^{١٠} \left(\frac{١}{٢}\right)^{٠}$ = ١ × $\left(\frac{١}{٢}\right)^{١٠}$ × ١ = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{١٠}$

مثال:- اذا كان س متغيراً عشوائياً ذا حدين معاملاه ن = ٥ ، م = ٤و٠

فجد كلاً عن :

① $ل(س = ٢)$ ② $ل(س = ٣)$ ③ $ل(س \le ١)$ ④ $ل(س > ٣)$

⑤ $ل(٢ < س \le ٤)$

الحل:- ن = ٥ م = ٠و٤ ١-م = ١-٠و٤ = ٠و٦

① $ل(٢) = \binom{٥}{٢}(٠و٤)^{٢}(٠و٦)^{٣}$

② $ل(٣) = \binom{٥}{٣}(٠و٤)^{٣}(٠و٦)^{٢}$

③ $ل(س \le ١) = ل(١) + ل(٠)$

$= \binom{٥}{١}(٠و٤)^{١}(٠و٦)^{٤} + \binom{٥}{٠}(٠و٤)^{٠}(٠و٦)^{٥}$

$= ٥ \times ٠و٤ \times (٠و٦)^{٤} + ١ \times ١ \times (٠و٦)^{٥}$

$= ٢ \times (٠و٦)^{٤} + (٠و٦)^{٥}$

④ $ل(س > ٣) = ل(٤) + ل(٥)$

$= \binom{٥}{٤}(٠و٤)^{٤}(٠و٦) + \binom{٥}{٥}(٠و٤)^{٥}(٠و٦)^{٠}$

⑤ $ل(٢ < س \le ٤) = ل(٣) + ل(٤)$

$= \binom{٥}{٣}(٠و٤)^{٣}(٠و٦)^{٢} + \binom{٥}{٤}(٠و٤)^{٤}(٠و٦)^{١}$

مثال:- اذا كان س متغيراً عشوائياً ذا حدين معاملاه ن = ٣ ، م = ٠و٨ فجد

① قيم س ② $ل(س = ٢)$ ③ جدول التوزيع الاحتمالي

الحل:- ① ن = ٣ فتكون قيم س هي {٠، ١، ٢، ٣}

② $ل(٢) = \binom{٣}{٢}(٠و٨)^{٢}(٠و٢)^{١} = ٣ \times ٠و٦٤ \times ٠و٢ = ٠و٣٨٤$

③ $ل(٠) = \binom{٣}{٠}(٠و٨)^{٠}(٠و٢)^{٣} = ١ \times ١ \times ٠و٠٠٨ = ٠و٠٠٨$

$ل(١) = \binom{٣}{١}(٠و٨)^{١}(٠و٢)^{٢} = ٣ \times ٠و٨ \times ٠و٠٤ = ٠و٠٩٦$

$ل(٣) = \binom{٣}{٣}(٠و٨)^{٣}(٠و٢)^{٠} = ١ \times ٠و٥١٢ \times ١ = ٠و٥١٢$

س	٠	١	٢	٣
ل(س)	٠و٠٠٨	٠و٠٩٦	٠و٣٨٤	٠و٥١٢

*<u>مثال</u> :- عند رمي حجر النرد ٤ مرات ما احتمال ظهور العدد ٢ في ٣ مرات

<u>الحل</u> :- ن = ٤ $\quad$ $م = \frac{١}{٦}$ $\quad$ $١ - م = ١ - \frac{١}{٦} = \frac{٥}{٦}$

$$ل(٣) = \binom{٤}{٣}\left(\frac{١}{٦}\right)^{٣}\left(\frac{٥}{٦}\right)^{١} = ٤ \times \frac{١}{٢١٦} \times \frac{٥}{٦} = \frac{٢٠}{١٢٩٦}$$

<u>مثال</u> :- اذا كان احتمال اصابة صياد لهدف في الرمية الواحدة هو $\frac{٢}{٣}$ وأطلق الصياد ٥ طلقات :

١) ما احتمال أن يصيب الهدف ٣ مرات

٢) ما احتمال أن يصيب الهدف في ٤ مرات على الأقل

<u>الحل</u> :- ن = ٥ $\quad$ $م = \frac{٢}{٣}$ $\quad$ $١ - م = ١ - \frac{٢}{٣} = \frac{١}{٣}$

١) $ل(٣) = \binom{٥}{٣}\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٣}\left(\frac{١}{٣}\right)^{٢} = ١٠ \times \frac{٨}{٢٧} \times \frac{١}{٩} = \frac{٨٠}{٢٤٣}$

$ل(س \geq ٤)$

٢) $ل(٤) + ل(٥) = \binom{٥}{٤}\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٤}\left(\frac{١}{٣}\right)^{١} + \binom{٥}{٥}\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٥}\left(\frac{١}{٣}\right)^{٠}$

$$= ٥ \times \frac{١٦}{٨١} \times \frac{١}{٣} + ١ \times \frac{٣٢}{٢٤٣} \times ١ = \frac{٨٠}{٢٤٣} + \frac{٣٢}{٢٤٣} = \frac{١١٢}{٢٤٣}$$

<u>مثال</u> :- اذا كانت نسبة المعيب في انتاج مصنع هي ١٠٪ وأخذنا ٨ قطع من انتاج المصنع بطريقة عشوائية :

١) ما احتمال وجود ٣ قطع معيبة

٢) ما احتمال عدم وجود أي قطعة معيبة

٣) ما احتمال أن لا يزيد عدد القطع المعيبة عن واحدة

<u>الحل</u> :- ن = ٨ $\quad$ $م = \frac{١٠}{١٠٠} = ٠٫١$ $\quad$ $١ - م = ٠٫٩$

١) $ل(٣) = \binom{٨}{٣}(٠٫١)^{٣}(٠٫٩)^{٥}$

٢) $ل(٠) = \binom{٨}{٠}(٠٫١)^{٠}(٠٫٩)^{٨} = ١ \times ١ \times (٠٫٩)^{٨} = (٠٫٩)^{٨}$

٣) $ل(١) + ل(٠) = \binom{٨}{١}(٠٫١)^{١}(٠٫٩)^{٧} + \binom{٨}{٠}(٠٫١)^{٠}(٠٫٩)^{٨}$

مثال ٤:- مصنع به ٥ آلات اذا كان احتمال أن تحتاج أي آلة إلى إصلاح في السنة الخامسة من عمرها هو ٢و٠ فاحسب احتمال:

١) ألا تحتاج أيٍ من الآلات إلى إصلاح

٢) أن تحتاج اثنتان فقط إلى إصلاح

٣) أن تحتاج اثنتان على الأكثر إلى إصلاح

٤) أن تحتاج واحدة على الأقل الى إصلاح

الحل:- ن = ٥ $\quad$ م = ٢و٠

$١ - م = ١ - ٢و٠ = ٨و٠$

١) $ل(٠) = \binom{٥}{٠}(٢و٠)^{٠}(٨و٠)^{٥}$

٢) $ل(٢) = \binom{٥}{٢}(٢و٠)^{٢}(٨و٠)^{٣}$

٣) $ل(٢) + ل(١) + ل(٠) = \binom{٥}{٢}(٢و٠)^{٢}(٨و٠)^{٣} + \binom{٥}{١}(٢و٠)^{١}(٨و٠)^{٤} + \binom{٥}{٠}(٢و٠)^{٠}(٨و٠)^{٥}$

٤) $ل(١) + ل(٢) + \cdots + ل(٥) = ١ - ل(٠)$

$= ١ - \binom{٥}{٠}(٢و٠)^{٠}(٨و٠)^{٥}$

مثال ٥:- اذا كانت نسبة التالف في انتاج مصنع هي ٠٢و٠ وأخذت عينة مكونة من ٥ قطع ، فما احتمال أن تكون جميعها صالحة .

الحل:- ن = ٥ $\quad$ م = ٠٢و٠

$١ - م = ١ - ٠٢و٠ = ٩٨و٠$

١) $ل(٠) = \binom{٥}{٠}(٠٢و٠)^{٠}(٩٨و٠)^{٥} = ١ \times ١ \times (٩٨و٠)^{٥} = (٩٨و٠)^{٥}$

مثال ٦:- اذا كان س متغيراً عشوائياً ذا حدين ن = ٣ وكان ل(س ≥ ١) = $\frac{١٩}{٢٧}$ جد

١) قيمة م

٢) ل(س = ٢)

الحل:-

$\boxed{٠} \quad \boxed{١ \quad ٢ \quad ٣} \rightarrow \frac{١٩}{٢٧}$

١) $١ - \frac{١٩}{٢٧} = \frac{٨}{٢٧}$

$ل(٠) = \binom{٣}{٠}(م)^{٠}(١ - م)^{٣} = \frac{٨}{٢٧} \Rightarrow (١ - م)^{٣} = \frac{٨}{٢٧} \Rightarrow ١ - م = \frac{٢}{٣}$

$\Rightarrow م = ١ - \frac{٢}{٣} = \frac{١}{٣}$

٢) $ل(٢) = \binom{٣}{٢}\left(\frac{١}{٣}\right)^{٢}\left(\frac{٢}{٣}\right)^{١} = ٣ \times \frac{١}{٩} \times \frac{٢}{٣} = \frac{٢}{٩}$

مثال: اذا كان س متغيراً ذا حدين حيث ن = ٣ وكان $ل(س \le ٢) = \frac{٩٨}{١٢٥}$ جد،

١) قيمة أ ٢) ل(س = ٢)

الحل: ١) $\{٠ ، ١ ، ٢\} \to \frac{٩٨}{١٢٥}$ ، $③ \to ١ - \frac{٩٨}{١٢٥} = \frac{٢٧}{١٢٥}$

$$ل(٣) = \binom{٣}{٣} (أ)^{٣} (١ - أ)^{٠} = \frac{٢٧}{١٢٥}$$

$$(أ)^{٣} = \frac{٢٧}{١٢٥} \Leftarrow أ = \frac{٣}{٥}$$

② $$ل(٢) = \binom{٣}{٢} \left(\frac{٣}{٥}\right)^{٢} \left(\frac{٢}{٥}\right)^{١} = ٣ \times \frac{٩}{٢٥} \times \frac{٢}{٥} = \frac{٥٤}{١٢٥}$$

* العلامة المعيارية:

لإيجاد موقع علامة الطالب بالنسبة لعلامات بقية الطلاب وذلك بإيجاد عدد الانحرافات المعيارية لتلك العلامة عن الوسط الحسابي وبذلك نكون قد حولنا العلامة الأصلية إلى علامة معيارية حيث: $ز_{س} = \frac{س - \bar{س}}{ع}$ حيث:

س العلامة الأصلية
$\bar{س}$ الوسط الحسابي
ع الانحراف المعياري
$ز_{س}$ العلامة المعيارية

مثال: اذا كان الوسط الحسابي لتوزيع ما يساوي ٧٢ والانحراف المعياري يساوي ٨ جد العلامات المعيارية للعلامات الأصلية ٨٤ ، ٧٢ ، ٥٢

الحل: $\bar{س} = ٧٢$ ، $ع = ٨$

$$ز_{٨٤} = \frac{٨٤ - ٧٢}{٨} = \frac{١٢}{٨} = ١٫٥$$

$$ز_{٧٢} = \frac{٧٢ - ٧٢}{٨} = \frac{٠}{٨} = ٠$$

$$ز_{٥٢} = \frac{٥٢ - ٧٢}{٨} = \frac{-٢٠}{٨} = -٢٫٥$$

مثال: اذا كان الوسط الحسابي لعلامات صف هو ٧٠ والانحراف المعياري هو ٦ جد العلامات الأصلية للعلامات المعيارية أ) ١٫٥ ب) -٢

الحل: $\bar{س} = ٧٠$ ، $ع = ٦$

أ) $١٫٥ = \frac{س - ٧٠}{٦}$

$س - ٧٠ = ٩$

$\boxed{س = ٧٩}$

ب) $-٢ = \frac{س - ٧٠}{٦}$

$س - ٧٠ = -١٢$

$س = ٧٠ - ١٢$

$\boxed{س = ٥٨}$

مثال:- في توزيع ما كان الوسط الحسابي يساوي ٥٤ وحصل طالب على العلامة ٧٠ وكانت علامته المعيارية هي ٢ نجد الانحراف المعياري

الحل:- $\bar{س} = ٥٤$ $س = ٧٠$ $ع$ ؟؟

$$ز = \frac{س - \bar{س}}{ع} \Leftarrow ٢ = \frac{٧٠ - ٥٤}{ع} \Leftarrow ٢ع = ١٦ \Leftarrow \boxed{ع = ٨}$$

مثال: في توزيع ما كان الانحراف المعياري يساوي ١٠ وحصل طالب على العلامة ٧٥ وكانت علامته المعيارية هي ١٫٥ نجد الوسط الحسابي.

الحل:- $ع = ١٠$ $س = ٧٥$ $ز = ١٫٥$ $\bar{س}$ ؟؟

$$ز = \frac{س - \bar{س}}{ع} \Leftarrow ١٫٥ = \frac{٧٥ - \bar{س}}{١٠} \Leftarrow ٧٥ - \bar{س} = ١٥$$

$$\Leftarrow ٧٥ - ١٥ = \bar{س} \Leftarrow \bar{س} = ٦٠$$

مثال:- في امتحان لصف ما حصل طالبان على العلامتين ٧٠ ، ٨٤ وكانت علاماتيهما المعياريتين هما ١ ، ٣ نجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لعلامات الصف.

الحل:- $٧٠ \downarrow ١$ $٨٤ \downarrow ٣$

$$١ = \frac{٧٠ - \bar{س}}{ع} \Leftarrow ع = ٧٠ - \bar{س} \text{ —— } ①$$

بالطرح

$$٣ = \frac{٨٤ - \bar{س}}{ع} \Leftarrow ٣ع = ٨٤ - \bar{س} \text{ —— } ②$$

$$٢ع = ١٤ \Leftarrow \boxed{ع = ٧}$$

نعوض في ① $\Leftarrow ٧ = ٧٠ - \bar{س} \Leftarrow \boxed{\bar{س} = ٦٣}$

سؤال: في امتحان الرياضيات حصل طالب على العلامة ٨٠ وكان الوسط الحسابي يساوي ٧٠ والانحراف المعياري يساوي ١٠ ، وفي امتحان الحاسوب حصل نفس الطالب على العلامة ٦٠ وكان الوسط الحسابي يساوي ٥٠ والانحراف المعياري يساوي ٥ ففي أي المبحثين يكون تحصيل الطالب أفضل بالنسبة لمستوى الصف ؟؟.

الحل: الرياضيات —— $س = ٨٠$ ، $\bar{س} = ٧٠$ ، $ع = ١٠$

الحاسوب —— $س = ٦٠$ ، $\bar{س} = ٥٠$ ، $ع = ٥$

نجد العلامة المعيارية للمبحثين —— أكمل

مثال :- ثلاثة طلاب أ ، ب ، جـ في أحد الصفوف علاماتهم المعيارية ٢ ، ١ ، ٠٫٧٥ على الترتيب وكان الوسط الحسابي لعلامات جميع طلاب الصف هو ٦٨ والفرق بين علامتي أ ، جـ هو (١٠) فجد :

① الانحراف المعياري لعلامات الصف

② العلامات الفعلية للطلاب أ ، ب ، جـ

الحل : أ ← ٢ ، ب ← ١ ، جـ ← ٠٫٧٥

أ - جـ = ١٠

س̄ = ٦٨

٢ = (أ - ٦٨) / ع ⇐ ٢ع = أ - ٦٨ ——— ①

بالطرح

٠٫٧٥ = (جـ - ٦٨) / ع ⇐ ٠٫٧٥ع = جـ - ٦٨ ——— ②

بحل المعادلتين ١٫٢٥ ع = ١٠ ⇐ ع = ١٠ / ١٫٢٥ = ١٠٠٠ / ١٢٥ = ٨

٢ = (أ - ٦٨) / ٨ ⇐ ١٦ = أ - ٦٨

⇐ **أ = ١٦ + ٦٨ = ٨٤** ⇐ ∴ جـ = أ - ١٠

جـ = ٧٤

⇐ ١ = (ب - ٦٨) / ٨ ⇐ ٨ = ب - ٦٨ ⇐ **ب = ٧٦**

مثال :- اذا كان الوسط الحسابي لعلامات صف هو ٦٠ والانحراف المعياري لها هو ٨

جد : ① العلامة التي تنحرف فوق الوسط الحسابي بمقدار ٣ انحرافات معيارية

② العلامة التي تنحرف دون الوسط الحسابي بمقدار انحرافين معياريين

③ عدد الانحرافات المعيارية التي تنحرفها العلامة ٧٢ عن الوسط الحسابي .

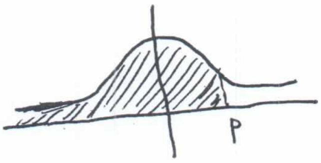
الحل : ① ٣ × ٨ = ٢٤ ⇐ فوق الوسط ٦٠ + ٢٤ = ٨٤

② ٢ × ٨ = ١٦ ⇐ دون الوسط ٦٠ - ١٦ = ٤٤

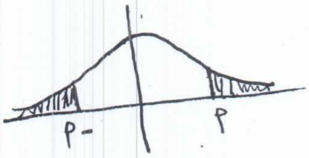
③ ز = (٧٢ - ٦٠) / ٨ = ١٢ / ٨ = ١٫٥ (عدد الانحرافات المعيارية = ١٫٥ انحراف معياري)

* التوزيع الطبيعي :-

التوزيع الطبيعي المعياري هو توزيع طبيعي وسطه الحسابي (صفر) وانحرافه المعياري يساوي (١) ومتغيره العشوائي هو العلاقة المعيارية ز ويتم استخدام جدول التوزيع الطبيعي لإيجاد الاحتمال لقيم (ز) الأقل من (م) أي ل(ز ≤ م) حيث م > ٠.

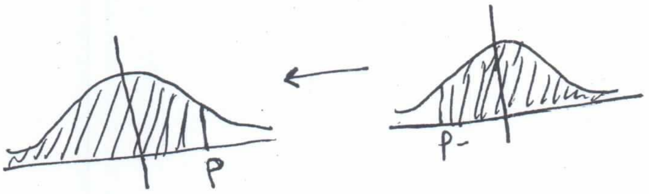


ولإيجاد بقية الاحتمالات (على يسار قيم ز السالبة أو يمينها) أو على يمين قيم ز الموجبة فيتم استخدام خاصية التماثل فإذا كانت م > ٠ ، فإنه

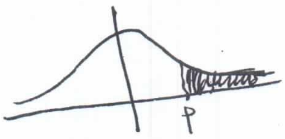


① ل(ز ≤ -م) = ل(ز ≥ م) = ١ - ل(ز ≤ م)

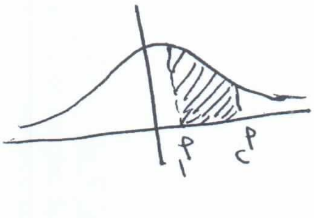
② ل(ز ≥ -م) = ل(ز ≤ م) (من الجدول مباشرة)



③ ل(ز ≥ م) = ١ - ل(ز ≤ م)



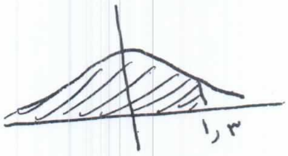
④ ل(م١ ≤ ز ≤ م٢) = ل(ز ≤ م٢) - ل(ز ≤ م١) حيث م٢ > م١



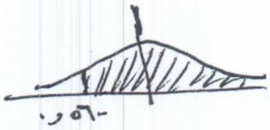
الأستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

مثال :- جد ما يلي :-

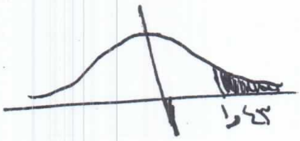
① ل(ز ≤ ١٫٣) = ٠٫٩٠٣٢ (مباشرة من الجدول)



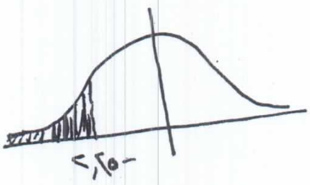
② ل(ز ≥ -٠٫٥٦) = ل(ز ≤ ٠٫٥٦) = ٠٫٧١٢٣



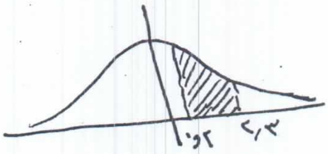
③ ل(ز ≥ ١٫٤٣) = ١ - ل(ز ≤ ١٫٤٣) = ١ - ٠٫٩٢٣٦
= ٠٫٠٧٦٤



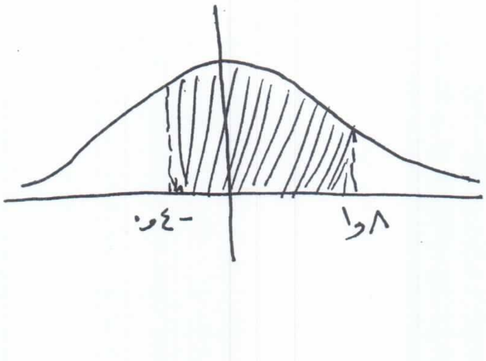
④ ل(ز ≤ -٢٫٢٥) = ١ - ل(ز ≤ ٢٫٢٥) = ١ - ٠٫٩٨٧٨
= ٠٫٠١٢٢



⑤ ل(٠٫٢ ≤ ز ≤ ٢٫٣) = ل(ز ≤ ٢٫٣) - ل(ز ≤ ٠٫٢)
= ٠٫٩٨٩٣ - ٠٫٥٧٩٣ = ٠٫٤١٠٠



⑥ ل(-٠٫٤ ≤ ز ≤ ١٫٨) = ل(ز ≤ ١٫٨) - ل(ز ≤ -٠٫٤)
= ل(ز ≤ ١٫٨) - (١ - ل(ز ≤ ٠٫٤))
= ٠٫٩٦٤١ - (١ - ٠٫٦٥٥٤)
= ٠٫٩٦٤١ - ٠٫٣٤٤٦
= ٠٫٦١٩٥



كما يمكن استخدام الجدول في ايجاد قيمة ز إذا علم الاحتمال

مثال :- جد ز في الحالات التالية :-

① ل(ز ≤ م) = ٠٫٨٧٠٨ ⟸ م = ١٫١٣

② ل(ز ≥ م) = ٠٫٩٩٦٠ ⟸ م = -٢٫٦٥

③ ل(ز ≤ م) = ٠٫١١٥١

ل(ز ≥ م) = ١ - ٠٫١١٥١ = ٠٫٨٨٤٩

∴ م = -١٫٢٠

④ ل(ز ≥ م) = ٠٫٠٦٦٨

ل(ز ≤ م) = ١ - ٠٫٠٦٦٨ = ٠٫٩٣٣٢

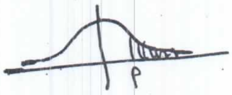
∴ م = ١٫٥

ملاحظة :- لتحديد موقع م

① اذا كانت م في المنتصف فإن : ل(ز ≤ م) = ٠٫٥٠٠٠ أيضاً ل(ز ≥ م) = ٠٫٥٠٠٠

② إذا كانت م موجبة فإن : ل(ز ≤ م) تكون اكبر من ٠٫٥٠٠٠

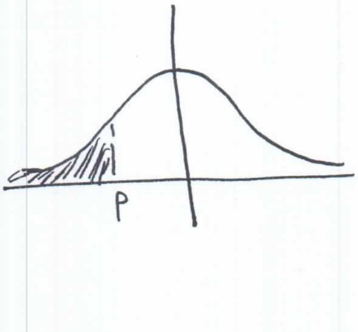
ل(ز ≥ م) تكون أصغر من ٠٫٥٠٠٠



③ إذا كانت م سالبة فإن :

ل(ز ≤ م) تكون أصغر من ٠٫٥٠٠٠

ل(ز ≥ م) تكون أكبر من ٠٫٥٠٠٠



مثال ٥:- إذا كانت علامات ٣٠٠٠٠ طالب تتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي مقداره ٦٠ وانحراف معياري مقداره ١٠ اخترنا طالب عشوائياً .

① ما احتمال أن تقل علامته عن ٧٣
② ما احتمال أن تزيد علامته عن ٦٨
③ ما احتمال أن تنحصر علامته بين ٥٢ ، ٧٤
④ اذا قبلت الجامعة أعلى ٣٠٪ من الطلاب فجد علامة القبول

الحل:- $\bar{س} = ٦٠$ $\quad$ $ع = ١٠$

① $ز_{٧٣} = \frac{٧٣ - ٦٠}{١٠} = ١٫٣ \Leftarrow ل(ز \leq ١٫٣) = ٠٫٩٠٣٢$

② $ز_{٦٨} = \frac{٦٨ - ٦٠}{١٠} = ٠٫٨ \Leftarrow ل(ز > ٠٫٨) = ١ - ل(ز \leq ٠٫٨)$

$= ١ - ٠٫٧٨٨١ = ٠٫٢١١٩$

③ $ز_{٥٢} = \frac{٥٢ - ٦٠}{١٠} = -٠٫٨$

$ز_{٧٤} = \frac{٧٤ - ٦٠}{١٠} = ١٫٤$

$\Leftarrow ل(-٠٫٨ \leq ز \leq ١٫٤) = ل(ز \leq ١٫٤) - ل(ز \leq -٠٫٨)$

$= ل(ز \leq ١٫٤) - (١ - ل(ز \leq ٠٫٨))$

$= ٠٫٩١٩٢ - (١ - ٠٫٧٨٨١)$

$= ٠٫٩١٩٢ - ٠٫٢١١٩ = ٠٫٧٠٧٣$

المطلوب (أ) ثم س

④ $ل(ز > أ) = ٠٫٣$

$\therefore ل(ز \leq أ) = ١ - ٠٫٣ = ٠٫٧$

ومن الجدول $أ = ٠٫٥٢$

$٠٫٥٢ = \frac{س - ٦٠}{١٠}$

$٥٫٢ = س - ٦٠ \Leftarrow س = ٦٥٫٢$

مثال :- إذا كانت أوزان ١٠٠٠٠ طفل تتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي مقداره ٤ كغم وانحراف معياري مقداره ٠,٥ كغم . اختير طفل عشوائياً

① ما احتمال أن يكون وزنه أصغر من ٤,٨ كغم

② ما احتمال أن يكون وزنه أصغر من ٣,٦ كغم

③ ما عدد الأطفال الذين تنحصر أوزانهم بين ٣,٥ كغم ، ٤,٤ كغم

الحل :- سَ = ٤   ع = ٠,٥

① $ز_{٤,٨} = \frac{٤,٨ - ٤}{٠,٥} = \frac{٠,٨}{٠,٥} = \frac{٨}{٥} = ١,٦$

ل(ز ≤ ١,٦) = ٠,٩٤٥٢

② $ز_{٣,٦} = \frac{٣,٦ - ٤}{٠,٥} = \frac{-٠,٤}{٠,٥} = -٠,٨$

ل(ز ≤ -٠,٨) = ١ - ل(ز ≤ ٠,٨) = ١ - ٠,٧٨٨١ = ٠,٢١١٩

③ $ز_{٣,٥} = \frac{٣,٥ - ٤}{٠,٥} = \frac{-٠,٥}{٠,٥} = -١$

$ز_{٤,٤} = \frac{٤,٤ - ٤}{٠,٥} = \frac{٠,٤}{٠,٥} = ٠,٨$

ل(-١ ≤ ز ≤ ٠,٨) = ل(ز ≤ ٠,٨) - ل(ز ≤ -١)

= ٠,٧٨٨١ - (١ - ٠,٨٤١٣)

= ٠,٧٨٨١ - ٠,١٥٨٧ = ٠,٦٢٩٤

العدد هو ١٠٠٠٠ × ٠,٦٢٩٤ = ٦٢٩٤ طفل

مثال :- اذا كانت علامات ١٠٠٠ طالب تتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي مقداره ٦٥ وانحراف معياري مقداره ١٠ وكان عدد الناجحين ٧٥٨ فجد علامة النجاح

الحل :- نسبة الناجحين = $\frac{٧٥٨}{١٠٠٠}$ = ٠,٧٥٨٠

∴ ل(ز ≥ أ) = ٠,٧٥٨٠   ومن الجدول   أ = -٠,٧

$ز = \frac{س - سَ}{ع} \Leftarrow -٠,٧ = \frac{س - ٦٥}{١٠} \Leftarrow -٧ = س - ٦٥$

$\boxed{س = ٥٨}$ علامة النجاح

مثال ٤:- إذا كان معامل الذكاء يتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي مقداره ١١٠ وانحراف معياري مقداره ٢٠

١) اذا اخترنا شخص عشوائياً نجد احتمال أن يكون معامل ذكاءه أقل من ١٢٥

٢) اذا قررت إحدى المؤسسات قبول فقط من يزيد معامل ذكائهم عن ١٢٠ نجد نسبة الأشخاص المقبولين .

الحل:- $سَ = ١١٠$ ، $ع = ٢٠$

١) $ز_{١٢٥} = \frac{١٢٥ - ١١٠}{٢٠} = \frac{١٥}{٢٠} = ٠و٧٥$

$ل(ز \le ٠و٧٥) = ٠و٧٧٣٤$

٢) $ز_{١٢٠} = \frac{١٢٠ - ١١٠}{٢٠} = \frac{١٠}{٢٠} = ٠و٥$

$ل(ز \ge ٠و٥) = ١ - ل(ز \le ٠و٥) = ١ - ٠و٦٩١٥ = ٠و٣٠٨٥$

مثال ٥:- اذا كانت رواتب ١٠٠٠٠ موظف تتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي مقداره ٢٠٠ دينار وانحراف معياري مقداره ١٠ دنانير

١) جد عدد الموظفين الذين تنحصر رواتبهم بين ١٩٢ ، ٢١٥ دينار

٢) إذا كان عدد الموظفين الذين تزيد رواتبهم عن الوسط الحسابي وتقل عن راتب معين (س) هو ٤٤٥٢ نجد س -

الاستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

الحل:- $سَ = ٢٠٠$ ، $ع = ١٠$

١) $ز_{١٩٢} = \frac{١٩٢ - ٢٠٠}{١٠} = \frac{-٨}{١٠} = -٠و٨$

$ز_{٢١٥} = \frac{٢١٥ - ٢٠٠}{١٠} = \frac{١٥}{١٠} = ١٫٥$

$ل(-٠و٨ \le ز \le ١٫٥) = ل(ز \le ١٫٥) - ل(ز \le -٠و٨)$

$= ل(ز \le ١٫٥) - (١ - ل(ز \le ٠و٨))$

$= ٠و٩٣٣٢ - (١ - ٠و٧٨٨١)$

$= ٠و٩٣٣٢ - ٠و٢١١٩ = ٠و٧٢١٣$

العدد = $١٠٠٠٠ \times ٠و٧٢١٣ = ٧٢١٣$

تابع ←

٢) عدد الموظفين الذين تقل رواتبهم عن س = ٤٤٥٢ + ٥٠٠٠ = ٩٤٥٢

النسبة = $\frac{\text{٩٤٥٢}}{\text{١٠٠٠٠}}$ = ٠٫٩٤٥٢

ل(ز ≤ م) = ٠٫٩٤٥٢

ز = ١٫٦ ⇐ ز = $\frac{\text{س} - \bar{\text{س}}}{\text{ع}}$

⇐ ١٫٦ = $\frac{\text{س} - \text{٢٠٠}}{\text{١٠}}$

⇐ ١٦ = س − ٢٠٠

$\boxed{\text{س = ٢١٦}}$

طريقك إلى النجاح
والتميز

0795153669

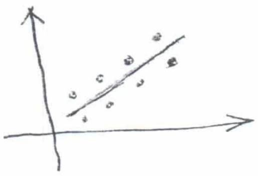
* الارتباط ومعامل الارتباط :-

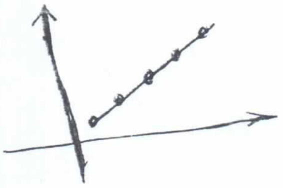
* الارتباط : هو دراسة العلاقة بين متغيرين من حيث كون هذه العلاقة طردية أو عكسية ضعيفة أو قوية .
يساعدنا على ذلك شكل الانتشار وهو يبين مدى تباعد أو تقارب القيم ونوعها .

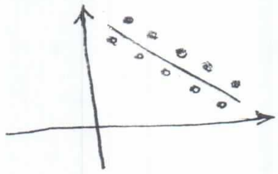
* يمكن معرفة نوع الارتباط من شكل الانتشار ، فعندما تقع النقاط على خط مستقيم أو تتجمع حول خط مستقيم نسمي الارتباط خطياً .

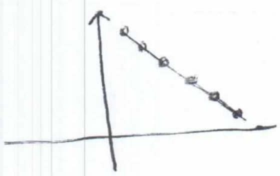
* اذا كان الخط صاعداً (متزايداً) فإن الارتباط طردي .
* اذا كان الخط هابطاً (متناقصاً) فإن الارتباط عكسي .

مثال : ما نوع الارتباط بين المتغيرين س ، ص في كل شكل مما يلي :


(أ)


(ب)


(ج)


(د)

الحل : (أ) علاقة طردية

(ب) علاقة طردية تامة

(ج) علاقة عكسية

(د) علاقة عكسية تامة

* نقيس قوة الارتباط بين المتغيرين بمقياس يسمى معامل ارتباط بيرسون :

$$ر = \frac{\sum (س - \overline{س})(ص - \overline{ص})}{\sqrt{\sum (س - \overline{س})^2 \times \sum (ص - \overline{ص})^2}}$$

مثال : احسب معامل ارتباط بيرسون بين قيم س ، ص في الجدول التالي :

س	٤	٨	٤	٩	١١	١٢
ص	٦	٩	٣	٧	٨	٩

الحل:

	س	ص	$\text{س} - \bar{\text{س}}$	$\text{ص} - \bar{\text{ص}}$	$(\text{س} - \bar{\text{س}}) \times (\text{ص} - \bar{\text{ص}})$	$(\text{س} - \bar{\text{س}})^2$	$(\text{ص} - \bar{\text{ص}})^2$
	٤	٦	٤-	١-	٤	١٦	١
	٨	٩	٠	٢	٠	٠	٤
	٤	٣	٤-	٤-	١٦	١٦	١٦
	٩	٧	١	٠	٠	١	٠
	١١	٨	٣	١	٣	٩	١
	١٢	٩	٤	٢	٨	١٦	٤
المجموع	٤٨	٤٢	٠	٠	٣١	٥٨	٢٦

$\bar{\text{س}} = \frac{٤٨}{٦} = ٨$ $\quad$ $\bar{\text{ص}} = \frac{٤٢}{٦} = ٧$

$$\text{ر} = \frac{\sum (\text{س} - \bar{\text{س}})(\text{ص} - \bar{\text{ص}})}{\sqrt{\sum (\text{س} - \bar{\text{س}})^2 \times \sum (\text{ص} - \bar{\text{ص}})^2}} = \frac{٣١}{\sqrt{٥٨ \times ٢٦}} = \frac{٣١}{\sqrt{١٥٠٨}}$$

مثال: احسب معامل ارتباط بيرسون بين قيم س، ص في الجدول التالي:

س	٥	٨	٦	٢	٤
ص	٣	٥	٤	٣	٥

الحل:

	س	ص	$\text{س} - \bar{\text{س}}$	$\text{ص} - \bar{\text{ص}}$	$(\text{س} - \bar{\text{س}}) \times (\text{ص} - \bar{\text{ص}})$	$(\text{س} - \bar{\text{س}})^2$	$(\text{ص} - \bar{\text{ص}})^2$
	٥	٣	٠	١-	٠	٠	١
	٨	٥	٣	١	٣	٩	١
	٦	٤	١	٠	٠	١	٠
	٢	٣	٣-	١-	٣	٩	١
	٤	٥	١-	١	١-	١	١
مج	٢٥	٢٠	٠	٠	٥	٢٠	٤

$\bar{\text{س}} = \frac{٢٥}{٥} = ٥$ $\quad$ $\bar{\text{ص}} = \frac{٢٠}{٥} = ٤$

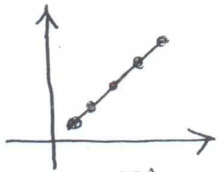
$$\text{ر} = \frac{٥}{\sqrt{٢٠ \times ٤}} = \frac{٥}{\sqrt{٨٠}} = \frac{٥}{\sqrt{١٦ \times ٥}} = \frac{٥}{٤\sqrt{٥}}$$

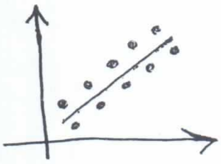
مثال: اذا كان $\sum(\text{س}-\bar{\text{س}})(\text{ص}-\bar{\text{ص}})=١٨$ ، $\sum(\text{س}-\bar{\text{س}})^٢=٨١$ ، $\sum(\text{ص}-\bar{\text{ص}})^٢=٣٦$
جد معامل ارتباط بيرسون .

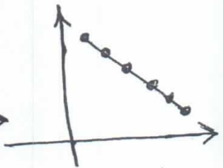
الحل: $\text{ر} = \dfrac{\sum(\text{س}-\bar{\text{س}})(\text{ص}-\bar{\text{ص}})}{\sqrt{\sum(\text{س}-\bar{\text{س}})^٢ \times \sum(\text{ص}-\bar{\text{ص}})^٢}} = \dfrac{١٨}{\sqrt{٨١\times٣٦}} = \dfrac{١٨}{٩\times٦} = \dfrac{١}{٣}$

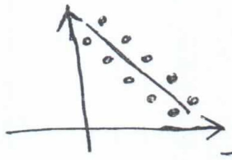
* **ملاحظة:** - يمكن ايجاد قيمة تقديرية لمعامل الارتباط من شكل الانتشار .

مثال: قدر قيمة معامل الارتباط في كل شكل مما يلي:


(أ)


(ب)


(جـ)


(د)


(هـ)

الحل: (أ) ⇐ ر = ١ (علاقة طردية تامة)
(ب) ⇐ ر = ٠٫٨ (علاقة طردية قوية)
(جـ) ⇐ ر = -١ (علاقة عكسية تامة)
(د) ⇐ ر = -٠٫٨ (علاقة عكسية قوية)
(هـ) ⇐ ر = صفر (لا توجد علاقة)

* **أثر التعديلات الخطية في قيمة معامل الارتباط:**

اذا تم تعديل القيم حسب العلاقة $\text{س}^* = \text{أ}\,\text{س} + \text{ب}$ ، $\text{ص}^* = \text{جـ}\,\text{ص} + \text{د}$ فإنه معامل الارتباط بين س^* ، ص^* يساوي:
① (ر) اذا كانت اشارتا أ ، جـ متشابهتين
② (-ر) اذا كانت اشارتا أ ، جـ مختلفتين

مثال: اذا كان معامل الارتباط بين قيم س ، ص هو ٠٫٧ فجد معامل الارتباط بين س^* ، ص^* في الحالات التالية:
① $\text{س}^* = ٢\text{س} + ١$ ، $\text{ص}^* = ٥\text{ص} - ٣$
② $\text{س}^* = ٣ - ٢\text{س}$ ، $\text{ص}^* = ٤ - \text{ص}$
③ $\text{س}^* = ٢\text{س} - ١$ ، $\text{ص}^* = ٥ - \text{ص}$

الحل: ① تبقى ر = ٠٫٧
② تبقى ر = ٠٫٧
③ تصبح ر = -٠٫٧

* الانحدار

معادلة الانحدار: معادلة خطية على الصورة ص = أ س + ب وتستخدم للتنبؤ بقيم المتغير ص إذا علمت أن قيم س معلومة.

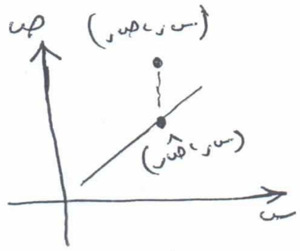
عند رسم شكل الانتشار فإن بعض النقاط لا تقع على الخط المستقيم ويسبب خطأ في التنبؤ.

* **الخطأ في التنبؤ** = القيمة الحقيقية - القيمة المتنبأ بها.

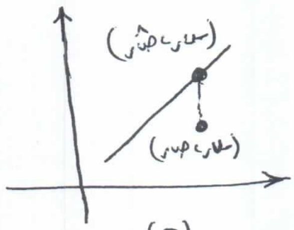
الخطأ في التنبؤ = $ص_ر - \hat{ص}_ر$

القيمة الحقيقية ← $ص_ر$ ، القيمة المتنبأ بها ← $\hat{ص}_ر$

* يكون الخطأ في التنبؤ موجباً إذا كانت $ص_ر > \hat{ص}_ر$ أي تقع فوقها على الخط
* يكون الخطأ في التنبؤ سالباً إذا كانت $ص_ر < \hat{ص}_ر$ أي تقع تحتها على الخط



(١)



(٢)

الشكل (١) الخطأ في التنبؤ موجب

الشكل (٢) = = = سالب

∴ معادلة الانحدار $\hat{ص} = أ س + ب$ ، الحجب معرفة أ ، ب

$$أ = \frac{\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sum (س - \bar{س})^2} \quad ، \quad ب = \bar{ص} - أ\bar{س}$$

مثال: الجدول يبين قيم س، ص

س	٥	٦	٢	٨	٤
ص	٣٥	٥٠	٣٠	٦٠	٣٥

① جد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم ص إذا علمت قيم س

② جد القيمة المتوقعة لـ ص إذا كانت س = ٧

③ جد خطأ التنبؤ عند س = ٥

الأستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

الحل:

	س	ص	$س - \bar{س}$	$ص - \bar{ص}$	$(س - \bar{س}) \times (ص - \bar{ص})$	$(س - \bar{س})^٢$
	٥	٣٥	٠	-٧	٠	٠
	٦	٥٠	١	٨	٨	١
	٢	٣٠	-٣	-١٢	٣٦	٩
	٨	٦٠	٣	١٨	٥٤	٩
	٤	٣٥	-١	-٧	٧	١
المجموع	٢٥	٢١٠	٠	٠	١٠٥	٢٠

$\bar{س} = \frac{٢٥}{٥} = ٥$ $\qquad$ $\bar{ص} = \frac{٢١٠}{٥} = ٤٢$

$$أ = \frac{\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sum (س - \bar{س})^٢} = \frac{١٠٥}{٢٠} = \frac{٢١}{٤}$$

$$ب = \bar{ص} - أ\bar{س} = ٤٢ - \frac{٢١}{٤} \times ٥ = \frac{١٦٨}{٤} - \frac{١٠٥}{٤} = \frac{٦٣}{٤}$$

$$\hat{ص} = أس + ب \Rightarrow \hat{ص} = \frac{٢١}{٤}س + \frac{٦٣}{٤}$$

② عند $\boxed{س = ٧} \Rightarrow \hat{ص} = \frac{٢١}{٤} \times ٧ + \frac{٦٣}{٤} = \frac{١٤٧}{٤} + \frac{٦٣}{٤} = \frac{٢١٠}{٤} = ٥٢,٥$

③ عند $\boxed{س = ٥} \Rightarrow \hat{ص} = \frac{٢١}{٤} \times ٥ + \frac{٦٣}{٤} = \frac{١٠٥}{٤} + \frac{٦٣}{٤} = \frac{١٦٨}{٤} = ٤٢$

الخطأ = الحقيقية - المتنبأ بها

$$= \underset{\text{من الجدول}}{٣٥} - \underset{\text{من المعادلة}}{٤٢} = -٧$$

سؤال: الجدول يبين قيم س، ص

س	٢	٣	٦	٩
ص	٣	٥	٤	٨

① احسب معامل ارتباط بيرسون

② اكتب معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم ص اذا علمت س

الاجابة ـــــ ① $ر = \frac{١٧}{\sqrt{٤٢٠}}$ $\qquad$ ② $\hat{ص} = \frac{٦٥}{٣٠}س + \frac{١٧}{٣٠}$

مثال : الجدول يمثل عدد ساعات الدراسة (س) ومعدل الطلبة في الثانوية العامة .

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥
عدد الساعات (س)	٨	٢	٥	٣	٧
المعدل (ص)	٩٥	٦٥	٩٠	٧٠	٩٠

① ما نوع العلاقة بين س ، ص (من خلال شكل الانتشار)

② جد معادلة خط الانحدار

③ اذا درس طالب ٦ ساعات قدر المعدل المتوقع له

④ اذا درس طالب ٨ ساعات جد خطأ التنبؤ في المعدل

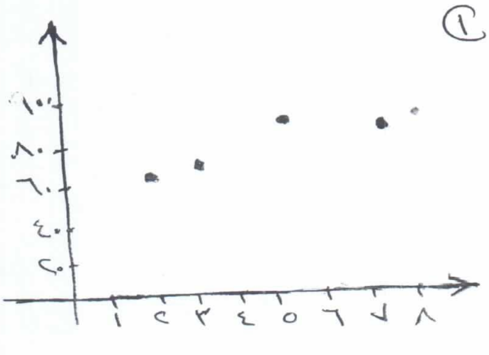
الحل :

	س	ص	$(س-\bar{س})$	$(ص-\bar{ص})$	$(س-\bar{س})\times(ص-\bar{ص})$	$(س-\bar{س})^2$
	٨	٩٥	٣	١٣	٣٩	٩
	٢	٦٥	-٣	-١٧	٥١	٩
	٥	٩٠	٠	٨	٠	٠
	٣	٧٠	-٢	-١٢	٢٤	٤
	٧	٩٠	٢	٨	١٦	٤
المجموع	٢٥	٤١٠	٠	٠	١٣٠	٢٦

$\bar{س} = \frac{٢٥}{٥} = ٥$

$\bar{ص} = \frac{٤١٠}{٥} = ٨٢$

①



نلاحظ أن العلاقة طردية أي أن المعدل يزداد بازدياد ساعات الدراسة .

② $أ = \frac{\sum (س-\bar{س})(ص-\bar{ص})}{\sum (س-\bar{س})^2} = \frac{١٣٠}{٢٦} = ٥$ ، $ب = \bar{ص} - أ\,\bar{س}$
$= ٨٢ - ٥\times٥ = ٥٧$

$\hat{ص} = أ\,س + ب = ٥\,س + ٥٧$

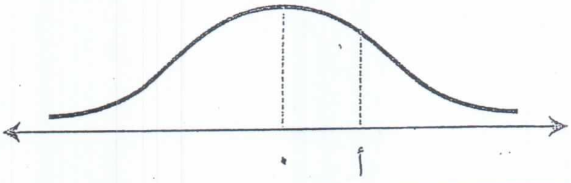
③ عند $\boxed{س = ٦}$ ⟸ $\hat{ص} = ٥\times٦ + ٥٧ = ٣٠ + ٥٧ = ٨٧$

④ عند $\boxed{س = ٨}$ ⟸ $\hat{ص} = ٥\times٨ + ٥٧ = ٤٠ + ٥٧ = ٩٧$ (القيمة المتوقعة)

القيمة الحقيقية ⟸ ص = ٩٥ (من الجدول)

∴ الخطأ = الحقيقية - المتوقعة = ٩٥ - ٩٧ = -٢

جدول التوزيع الطبيعي المعياري



ز	٠,٠٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,٠٦	٠,٠٧	٠,٠٨	٠,٠٩
٠,٠	٠,٥٠٠٠	٠,٥٠٤٠	٠,٥٠٨٠	٠,٥١٢٠	٠,٥١٦٠	٠,٥١٩٩	٠,٥٢٣٩	٠,٥٢٧٩	٠,٥٣١٩	٠,٥٣٥٩
٠,١	٠,٥٣٩٨	٠,٥٤٣٨	٠,٥٤٧٨	٠,٥٥١٧	٠,٥٥٥٧	٠,٥٥٩٦	٠,٥٦٣٦	٠,٥٦٧٥	٠,٥٧١٤	٠,٥٧٥٣
٠,٢	٠,٥٧٩٣	٠,٥٨٣٢	٠,٥٨٧١	٠,٥٩١٠	٠,٥٩٤٨	٠,٥٩٨٧	٠,٦٠٢٦	٠,٦٠٦٤	٠,٦١٠٣	٠,٦١٤١
٠,٣	٠,٦١٧٩	٠,٦٢١٧	٠,٦٢٥٥	٠,٦٢٩٣	٠,٦٣٣١	٠,٦٣٦٨	٠,٦٤٠٦	٠,٦٤٤٣	٠,٦٤٨٠	٠,٦٥١٧
٠,٤	٠,٦٥٥٤	٠,٦٥٩١	٠,٦٦٢٨	٠,٦٦٦٤	٠,٦٧٠٠	٠,٦٧٣٦	٠,٦٧٧٢	٠,٦٨٠٨	٠,٦٨٤٤	٠,٦٨٧٩
٠,٥	٠,٦٩١٥	٠,٦٩٥٠	٠,٦٩٨٥	٠,٧٠١٩	٠,٧٠٥٤	٠,٧٠٨٨	٠,٧١٢٣	٠,٧١٥٧	٠,٧١٩٠	٠,٧٢٢٤
٠,٦	٠,٧٢٥٧	٠,٧٢٩١	٠,٧٣٢٤	٠,٧٣٥٧	٠,٧٣٨٩	٠,٧٤٢٢	٠,٧٤٥٤	٠,٧٤٨٦	٠,٧٥١٧	٠,٧٥٤٩
٠,٧	٠,٧٥٨٠	٠,٧٦١١	٠,٧٦٤٢	٠,٧٦٧٣	٠,٧٧٠٤	٠,٧٧٣٤	٠,٧٧٦٤	٠,٧٧٩٤	٠,٧٨٢٣	٠,٧٨٥٢
٠,٨	٠,٧٨٨١	٠,٧٩١٠	٠,٧٩٣٩	٠,٧٩٦٧	٠,٧٩٩٥	٠,٨٠٢٣	٠,٨٠٥١	٠,٨٠٧٨	٠,٨١٠٦	٠,٨١٣٣
٠,٩	٠,٨١٥٩	٠,٨١٨٦	٠,٨٢١٢	٠,٨٢٣٨	٠,٨٢٦٤	٠,٨٢٨٩	٠,٨٣١٥	٠,٨٣٤٠	٠,٨٣٦٥	٠,٨٣٨٩
١,٠	٠,٨٤١٣	٠,٨٤٣٨	٠,٨٤٦١	٠,٨٤٨٥	٠,٨٥٠٨	٠,٨٥٣١	٠,٨٥٥٤	٠,٨٥٧٧	٠,٨٥٩٩	٠,٨٦٢١
١,١	٠,٨٦٤٣	٠,٨٦٦٥	٠,٨٦٨٦	٠,٨٧٠٨	٠,٨٧٢٩	٠,٨٧٤٩	٠,٨٧٧٠	٠,٨٧٩٠	٠,٨٨١٠	٠,٨٨٣٠
١,٢	٠,٨٨٤٩	٠,٨٨٦٩	٠,٨٨٨٨	٠,٨٩٠٧	٠,٨٩٢٥	٠,٨٩٤٤	٠,٨٩٦٢	٠,٨٩٨٠	٠,٨٩٩٧	٠,٩٠١٥
١,٣	٠,٩٠٣٢	٠,٩٠٤٩	٠,٩٠٦٦	٠,٩٠٨٢	٠,٩٠٩٩	٠,٩١١٥	٠,٩١٣١	٠,٩١٤٧	٠,٩١٦٢	٠,٩١٧٧
١,٤	٠,٩١٩٢	٠,٩٢٠٧	٠,٩٢٢٢	٠,٩٢٣٦	٠,٩٢٥١	٠,٩٢٦٥	٠,٩٢٧٩	٠,٩٢٩٢	٠,٩٣٠٦	٠,٩٣١٩
١,٥	٠,٩٣٣٢	٠,٩٣٤٥	٠,٩٣٥٧	٠,٩٣٧٠	٠,٩٣٨٢	٠,٩٣٩٤	٠,٩٤٠٦	٠,٩٤١٨	٠,٩٤٢٩	٠,٩٤٤١
١,٦	٠,٩٤٥٢	٠,٩٤٦٣	٠,٩٤٧٤	٠,٩٤٨٤	٠,٩٤٩٥	٠,٩٥٠٥	٠,٩٥١٥	٠,٩٥٢٥	٠,٩٥٣٥	٠,٩٥٤٥
١,٧	٠,٩٥٥٤	٠,٩٥٦٤	٠,٩٥٧٣	٠,٩٥٨٢	٠,٩٥٩١	٠,٩٥٩٥	٠,٩٦٠٨	٠,٩٦١٦	٠,٩٦٢٥	٠,٩٦٣٣
١,٨	٠,٩٦٤١	٠,٩٦٤٩	٠,٩٦٥٦	٠,٩٦٦٤	٠,٩٦٧١	٠,٩٦٧٨	٠,٩٦٨٦	٠,٩٦٩٣	٠,٩٦٩٩	٠,٩٧٠٦
١,٩	٠,٩٧١٣	٠,٩٧١٩	٠,٩٧٢٦	٠,٩٧٣٢	٠,٩٧٣٨	٠,٩٧٤٤	٠,٩٧٥٠	٠,٩٧٥٦	٠,٩٧٦١	٠,٩٧٦٧
٢,٠	٠,٩٧٧٢	٠,٩٧٧٨	٠,٩٧٨٣	٠,٩٧٨٨	٠,٩٧٩٣	٠,٩٧٩٨	٠,٩٨٠٣	٠,٩٨٠٨	٠,٩٨١٢	٠,٩٨١٧
٢,١	٠,٩٨٢١	٠,٩٨٢٦	٠,٩٨٣٠	٠,٩٨٣٤	٠,٩٨٣٨	٠,٩٨٤٢	٠,٩٨٤٦	٠,٩٨٥٠	٠,٩٨٥٤	٠,٩٨٥٧
٢,٢	٠,٩٨٦١	٠,٩٨٦٤	٠,٩٨٦٨	٠,٩٨٧١	٠,٩٨٧٥	٠,٩٨٧٨	٠,٩٨٨١	٠,٩٨٨٤	٠,٩٨٨٧	٠,٩٨٩٠
٢,٣	٠,٩٨٩٣	٠,٩٨٩٦	٠,٩٨٩٨	٠,٩٩٠١	٠,٩٩٠٤	٠,٩٩٠٦	٠,٩٩٠٩	٠,٩٩١١	٠,٩٩١٣	٠,٩٩١٦
٢,٤	٠,٩٩١٨	٠,٩٩٢٠	٠,٩٩٢٢	٠,٩٩٢٥	٠,٩٩٢٧	٠,٩٩٢٩	٠,٩٩٣١	٠,٩٩٣٢	٠,٩٩٣٤	٠,٩٩٣٦
٢,٥	٠,٩٩٣٨	٠,٩٩٤٠	٠,٩٩٤١	٠,٩٩٤٣	٠,٩٩٤٥	٠,٩٩٤٦	٠,٩٩٤٨	٠,٩٩٤٩	٠,٩٩٥١	٠,٩٩٥٢
٢,٦	٠,٩٩٥٣	٠,٩٩٥٥	٠,٩٩٥٦	٠,٩٩٥٧	٠,٩٩٥٩	٠,٩٩٦٠	٠,٩٩٦١	٠,٩٩٦٢	٠,٩٩٦٣	٠,٩٩٦٤
٢,٧	٠,٩٩٦٥	٠,٩٩٦٦	٠,٩٩٦٧	٠,٩٩٦٨	٠,٩٩٦٩	٠,٩٩٧٠	٠,٩٩٧١	٠,٩٩٧٢	٠,٩٩٧٣	٠,٩٩٧٤
٢,٨	٠,٩٩٧٤	٠,٩٩٧٥	٠,٩٩٧٦	٠,٩٩٧٧	٠,٩٩٧٧	٠,٩٩٧٨	٠,٩٩٧٩	٠,٩٩٧٩	٠,٩٩٨٠	٠,٩٩٨١
٢,٩	٠,٩٩٨١	٠,٩٩٨٢	٠,٩٩٨٢	٠,٩٩٨٣	٠,٩٩٨٤	٠,٩٩٨٤	٠,٩٩٨٥	٠,٩٩٨٥	٠,٩٩٨٦	٠,٩٩٨٦
٣,٠	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٨	٠,٩٩٨٨	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٩٠	٠,٩٩٩٠
٣,١	٠,٩٩٩٠	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٣
٣,٢	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥
٣,٣	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٧
٣,٤	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٨