الوحدة الاولى

النهايات والاتصال

١- نهاية الاقتران عند نقطة

٢- نظريات على النهايات

٣- نهاية خارج قسمة اقترانين

٤- الاتصال

٥- حل جميع تدريبات وتمارين الكتاب

٦- اسئلة الوزارة (٢٠٠٨-٢٠١٦) مع الحلول النموذجية

٧- ورقة عمل على الوحدة الاولى اكثر من ١٠٠ سؤال

مع تحيات

ناجح الجمزاوي

٠٧٩٥٦٥٦٨٨١ ٠٧٨٨٦٥٦٠٥٧

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم :ناجح الجمزاوي

الدرس الأول :-

نهاية الأقتران عند نقطة

تعريف النهاية

يكون للأقتران ق(س) نهاية تساوي العدد (ل) عندما تقترب قيم س من العدد (أ) ، اذا كانت ق(س) تقترب من العدد (ل) ، كلما اقتربت س من العدد (أ) من كلا الجانبين اليسار واليمين على محور السينات ونعبر عن ذلك بالرموز

اذا كانت نهاية ق(س) = ل
س ← أ

تسمى النهاية من اليمين ونقرأ نهاية ق(س) عندما س تقترب أو تؤول من يمين العدد أ يساوي (ل)

نهاية ق(س) = ل تسمى النهاية من
س ← أ اليسار
ونقرأ نهاية ق(س) عندما س تقترب من العدد أ من اليسار تساوي (ل)

وتكون النهاية موجودة اذا كانت النهاية من يمين = النهاية من اليسار

⇐ نهاية ق(س) = ل
س ← أ

س ← أ⁻ س تقترب من العدد أ من اليسار (عدد أقل من أ)

س ← أ⁺ س تقترب من العدد (أ) من اليمين (عدد أكبر من أ)

① حساب النهاية عن طريق الجدول

مثال (١)

بالاعتماد على الجدول الآتي الذي يبين قيم س ← ٢ فاوجد نهاية ق(س)
س ← ٢

س	١و٩	١و٩٩	١و٩٩٩	٢	٢و٠٠١	٢و٠١	٢و١	١و٩
ق(س)	١و١	١و٠١	١و٠٠١		٢و٠٠١	٢و٠١	٢و١	٣و٩

الحل

نلاحظ ان كلما اقتربت س من العدد (٢) من اليمين كلما اقتربت ق(س) من العدد (١) وعليه فان

نهاية ق(س) = ١
س ← ٢⁺

المعلم ناجح الجمزاوي

مثال (٢)

باالاعتماد على الجدول المالي الذي يبين قيم س ← ١ فاوجد

نهـا ق(س)

س ← ١

س	١و١	١و١	١و٠١	١	٩٩٩و٠	٩٩و٠	٩و٠
ق(س)	٩و٢	٨٥و٢	٨ح		٩٩و٢	٩٥و٢	٩و٢

الحل

نلاحظ انه كلما اقتربت س من العدد (١) من اليسار فان ق(س) تقترب من العدد (٣).

⇐ نهـا ق(س) = ٣

س ← ١

مثال (٣)

باالاعتماد على الجدول المالي الذي يبين قيم ق(س) عندما س ← ٣ فاوجد

نهـا ق(س)

س ← ٣+

س	٣و١	٣و٠١	٣و٠٠١	٣	٩٩٩و٢	٩٩٨و٢	٩و٢
ق(س)	٤و١	٤و٠١	٤و٠٠١		٥و٩٩	٥و٩٨	٥و٩٠

الحل

نهـا ق(س) = ٤

س ← ٣+

مثال (٤)

باالاعتماد على الجدول المالي الذي يبين قيم س عندما س ← ٣ فاوجد

نهـا ق(س)

س ← ٣

س	٣و١	٣و٠١	٣و٠٠١	٣	٩٩٩و٢	٩و٢	٨٥و٢
ق(س)	١	٢	٣		٣	٣	٣

الحل

نهـا ق(س) = ٣ ، نهـا ق(س) = ٣

س ← ٣+ ، س ← ٣-

⇐ نهـا ق(س) = ٣

س ← ٣

مثال (٥)

ليكن ق(س) = { س٢ ، س ≤ ٢ ؛ ٧ - س ، س > ٢

اوجد نهـا ق(س) عندما الجدول ؟

س ← ٢

الحل

نجد قيم ق(س) بتعويض س = ٢ في القاعدة

مثال ق(١و٢) بتعويضها في القاعدة

الثانية لأن ١و٢ أكبر من ٢

= ٧ - ١و٢ = ٩و٤

ق(١و٩) = في القاعدة الأولى

لأن ١و٩ < ٢

= (١و٩)٢ = ٩و١ × ١و٩

= ٦١و٣ ⇐ يتبع الحل

ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

س	٣ود٢	٢ود٤	٢ود١	٢	٩ود١	٨ود١	لا١
ق(س)	٧ود٤	٨ود٤	٩ود٤		٣ود٦١	٣ود٤٢	٩ود٢٨

$\lim_{س \to ٢^+} ق(س) = ٥$ ، $\lim_{س \to ٢^-} ق(س) = ٤$

$\lim_{س \to ٢} ق(س)$ غير موجودة

مثال (٦)

إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^٢ + ٢ & س < ١ \\ ٣ & س > ١ \end{cases}$

أوجد $\lim_{س \to ١} ق(س)$ باستخدام الجدول

س	-لا١	-٨ود١	-٩ود١	-١	-١ود١	-٢ود١	-٣ود١
ق(س)	٣	٣	٣		٩ود٠	٨ود٠	٧ود٠

ملاحظة: هنا نعلن لا رقم عندما يكون العدد (سالب)

$\lim_{س \to ١^+} ق(س) = ٣$ ، $\lim_{س \to ١^-} ق(س) = ١$

$\lim_{س \to ١} ق(س)$ غير موجودة

س	-لا١	-٨ود١	-٩ود١	-١	-١ود١	-٢ود١	-٣ود١
ق(س)	-لا١	-٨ود١	-٩ود١		-١ود٢	-٢ود٢	-٣ود٢

$\lim_{س \to ١^+} ق(س) = -٢$ ، $\lim_{س \to ١^-} ق(س) = -٢$

$\lim_{س \to ١} ق(س) = -٢$

تدريبات وتمارين الكتاب

مدرسيت ① ص ١٤

إذا كان $ق(س) = \frac{س^٢ - ١}{س + ١}$ $س \neq -١$

كون جدول كما في ق(س)

$س \to -١$

الحل

نبسط الاقتران ق(س) وذلك ليصبح التعويض أسرع:

$ق(س) = \frac{س^٢ - ١}{س + ١} = \frac{(س - ١)(س + ١)}{س + ١}$

$ق(س) = س - ١$

لإيجاد قيم ق(س) نعوض في الاقتران $(س \to ١)$

ق(-٩ود٠) = -٩ود١ - ١ = -١٩ود٠

ق(-١ود١) = -١ود١ - ١ = -٢ود١

$\lim_{س \to ١^+} ق(س) = -٢$ ، $\lim_{س \to ١^-} ق(س) = -٢$

$\lim_{س \to ١} ق(س) = -٢$

مركز الوسام AlwesAM

المعلم ناجح الجمزاوي

تدريب ② صـ ١٦

اذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٣ & س = ١ \\ س^٢ & س > ١ \end{cases}$

كون جدولاً لايجاد $\lim_{س \to ١^-} ق(س)$ إن وجدت ؟

الحل

س	١,٧	١,٨	١,٩	١	١,١	١,٢	١,٣
ق(س)	٢,٤٩	٣,٢٤	٣,٨١		٣	٣	٣

$ق(١,٩) = (١,٩)^٢ = ٣,٦١$

$\lim_{س \to ١^+} ق(س) = ١$

$\lim_{س \to ١^-} ق(س) = ٣$

$\lim_{س \to ١} ق(س)$ غير موجود

$\lim_{س \to ١} ق(س)$ غير موجود

مكتبة الوسام AlWesam

المعلم: ناجح الجمزاوي

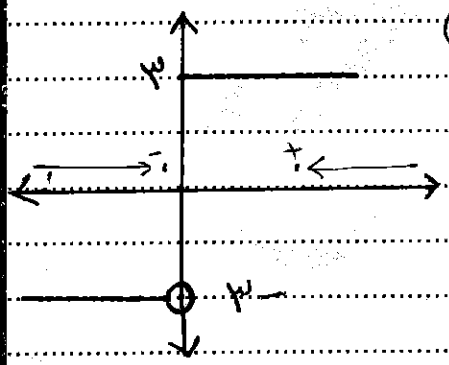
(٢) ايجاد النهاية من خلال الرسم

مثال (١)

بالاعتماد على الشكل المقابل أوجد

ثا ق (س)

س ← ٣



الحل

ثا ق (س) = ٣

س ← ٣+

ثا ق (س) = ٣-

س ← ٣-

∴ ثا ق (س) غير موجودة

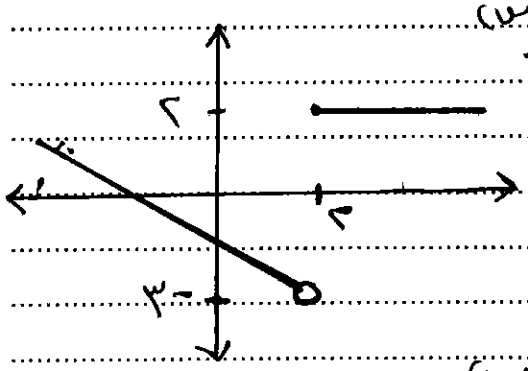
س ← ٣

مثال (٢)

اعتمد على الشكل المجاور لايجاد

ثا ق (س)

س ← ٢



الحل

ثا ق (س) = ٣-

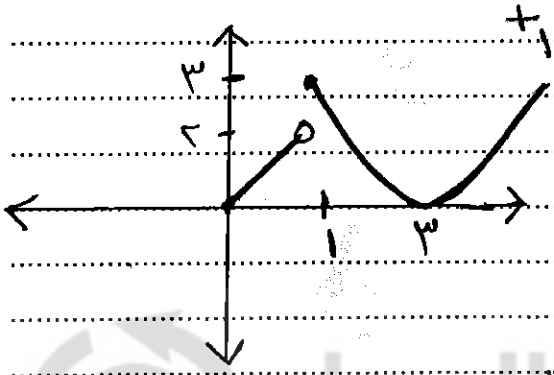
س ← ٢

مثال (٣)

بالاعتماد على الشكل المجاور فاوجد

ثا ق (س)

س ← ١+

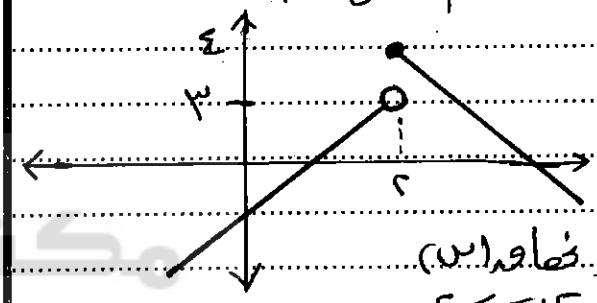


ثا ق (س) = ٣

س ← ١+

مثال (٤)

بالاعتماد على الشكل المجاور



اوجد ثا ق (س)

س ← ٢

الحل :-

ثا ق (س) = ٤

س ← ٢+

ثا ق (س) = ٣

س ← ٢-

∴ ثا ق (س) غير موجودة

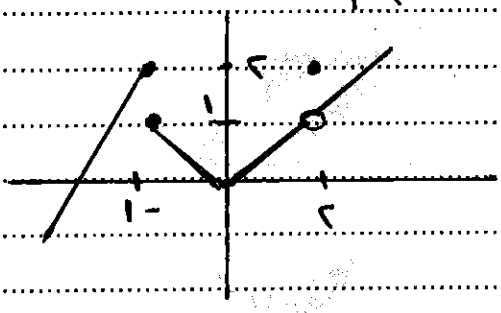
س ← ٢

AlwesAM

الاستاذ ناجح الجمزاوي

مثال (٥)

من الشكل المجاور ما هي قيم p التي عندها $\lim_{س \to p} هـ(س)$ غير موجودة



الحل

$\lim_{س \to 1^+} هـ(س) = 1$ ، $\lim_{س \to 1^-} هـ(س) = 2$

$\lim_{س \to -1} هـ(س)$ غير موجودة

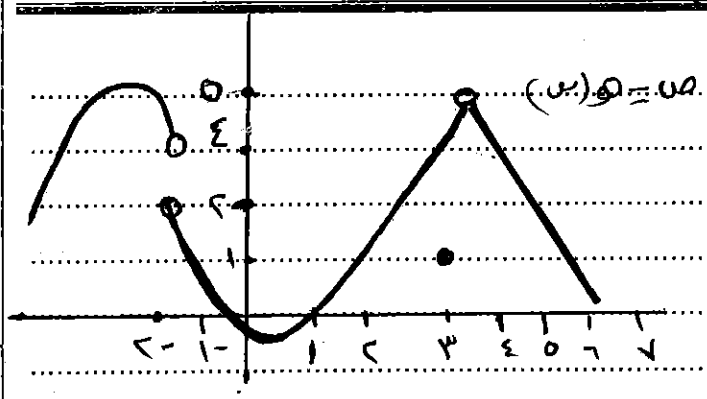
$\lim_{س \to 2} هـ(س) = 1$

$p = -1$ الجواب

تدريبات مسائل الكتاب

تدريب (٣) ص ١٧

استعمل الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الدالة $هـ$ لايجاد كل مما يلي



١) $\lim_{س \to 3^+} هـ(س) = 5$

٢) $\lim_{س \to 3^-} هـ(س) = 5$

٣) $\lim_{س \to 3} هـ(س) = 5$

٤) $هـ(3) = 1$

٥) $\lim_{س \to -2^+} هـ(س) = 2$

٦) $\lim_{س \to -2^-} هـ(س) = 4$

٧) $\lim_{س \to -2} هـ(س)$ غير موجودة

٨) $هـ(-2)$ غير معرفة

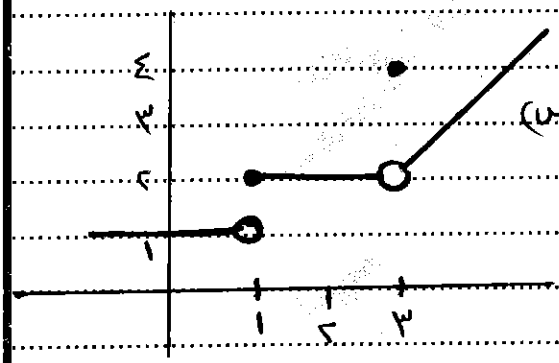
٩) $\lim_{س \to 4} هـ(س) = 4$

١٠) $هـ(4) = 4$

المعلم ناجح الجمزاوي

السؤال الأول تمارين مسائل ص ١٨

عثل الشكل المجاور منحنى $ص = هـ(س)$ ما قيمة كل من النهايات الآتية ان وجدت



أ) $\lim_{س \to 1^+} هـ(س) = ٢$

ب) $\lim_{س \to 1^-} هـ(س) = ١$

ج) $\lim_{س \to 1} هـ(س)$ غير موجودة

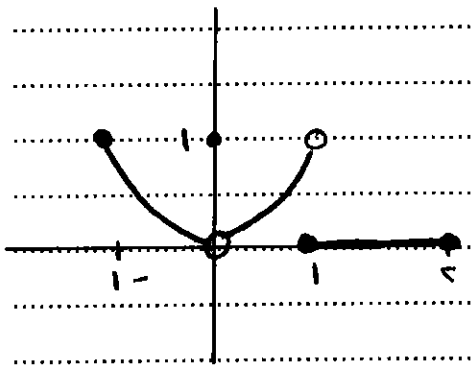
د) $\lim_{س \to 3^+} هـ(س) = ٢$

هـ) $\lim_{س \to 3^-} هـ(س) = ٢$

و) $\lim_{س \to 0} هـ(س) = ١$

السؤال الثاني ص ١٨

اذا كان الشكل الجانبي عثل منحنى الدالة $هـ(س)$ فأي العبارات الآتية صحيحة



أ) $\lim_{س \to 1^+} هـ(س) = ١$ ✓

ب) $\lim_{س \to 0^-} هـ(س) = ١ \times$ الجواب = ٠

ج) $\lim_{س \to 0} هـ(س) = ٠$ ✓

د) $\lim_{س \to 0} هـ(س)$ موجودة ✓

هـ) $\lim_{س \to 0} هـ(س) = ١ \times$

و) $\lim_{س \to 1} هـ(س) = ١ \times$

ز) $\lim_{س \to 2^-} هـ(س) = ٢ \times$

ح) $\lim_{س \to 1^+} هـ(س) = ٠$ ✓

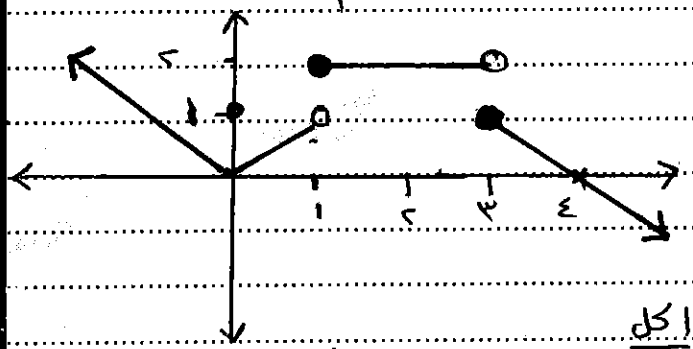
مركز الوسام AlwesAM
المعلم ناجح الجمزاوي

اسئلة لوزارة

(١) وزارة (٢٠٠٩) شتوية

اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى ده المعرف على ح فاوجد مجموعة ميم م حيث نهـ ده(س) غير موجودة

س ← م



الحل

نهـ ده(س) = ٢ ، نهـ ده(س) = ١

س ← ١⁺ ، س ← ١⁻

نهـ ده(س) غير موجودة

س ← ١

نهـ ده(س) = ١ ، نهـ ده(س) = ٢

س ← ٣⁺ ، س ← ٣⁻

نهـ ده(س) غير موجودة

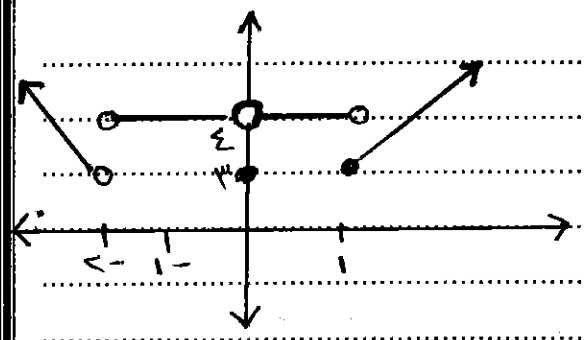
س ← ٣

م = ح ، {١ ، ٣}

(٢) وزارة (٢٠١٠) شتوية

اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الأقتران ده المعرف على ح فاوجد مجموعة ميم م حيث نهـ ده(س) = ٣

س ← م⁺



الحل

نهـ ده(س) = ٣

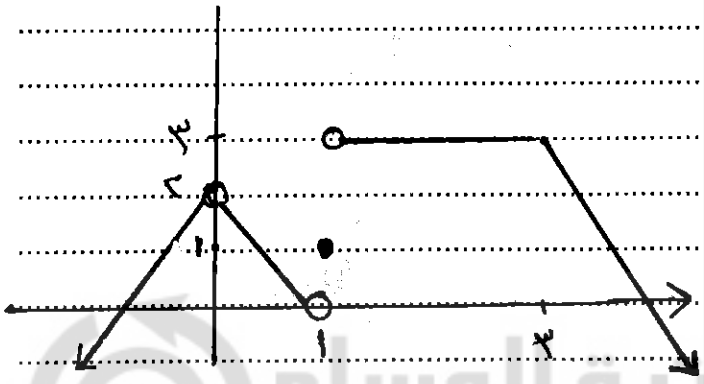
س ← ١⁺

م = {١}

وزارة (٢٠١١) شتوية

اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى ده(س) المعرف على ح فاوجد مجموعة ميم ل حيث نهـ ده(س) غير موجودة

س ← ل



الحل

نهـ ده(س) = ٣

س ← ١⁺

نهـ ده(س) = صفر

س ← ١⁻

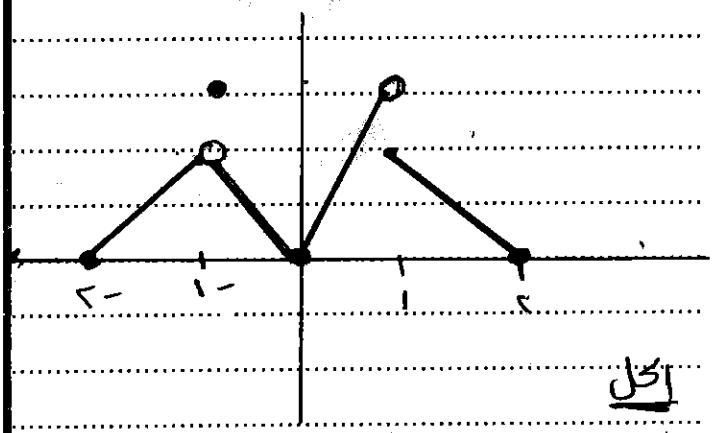
ل = {١ ، ٣} نهـ ده(س) غير موجودة

س ← ١

(٤) وزارة (٢٠١١) صيفية

اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقترانين ق(س) ، ك(س) المعرف على $[-٢ ، ٢]$ فأوجد مجموعة قيم م حيث نهـا ق(س) = صفر

س ← م



الحل

نهـا ق(س) = صفر

س ← ٢-

نهـا ك(س) = صفر

س ← ٠

قيم م هي $\{٠ ، ٢-\}$

(٥) وزارة (٢٠١٢) صيفية

اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على ح اوجد

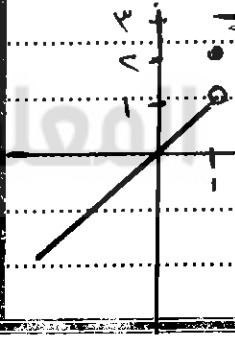
نهـا ق(س)

س ← ١+

الحل

نهـا ق(س) = ٣

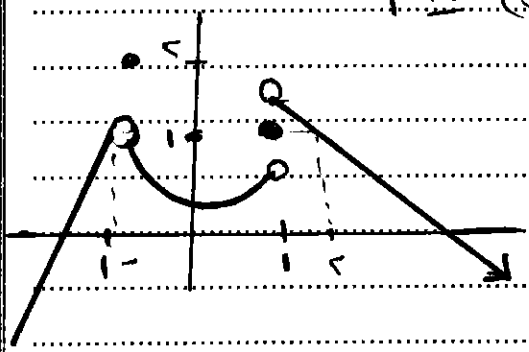
س ← ١+



(٦) وزارة (٢٠١٢) شتوية

اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقترانين ق(س) ، ك(س) المعرف على ح فأوجد مجموعة قيم م حيث تكون نهـا ق(س) = ١

س ← م



الحل

نهـا ق(س) = ١

س ← ١-

نهـا ق(س) = ١

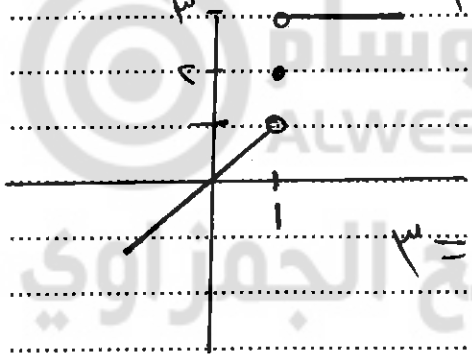
س ← ٢

قيم م هي $\{٢ ، ١-\}$

(٧) وزارة (٢٠١٣)

اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقترانين ق(س) ، ك(س) اوجد نهـا ق(س)

س ← ١+



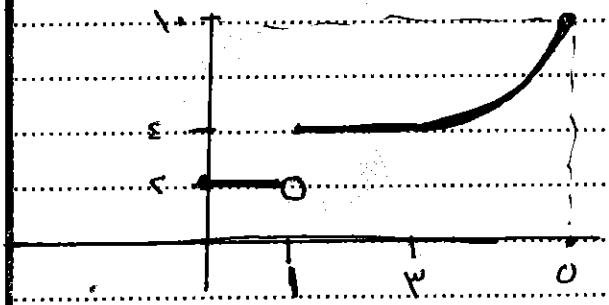
نهـا ق(س) = ٣

س ← ١+

مكتبة الوسام ALWESAM الاستاذ ناجح الجمزاوي

(٨) وزارة (٢٠١٤) شتوية

اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الأقتران $f(x)$ ، أوجد $\lim_{x \to 1^-} f(x)$

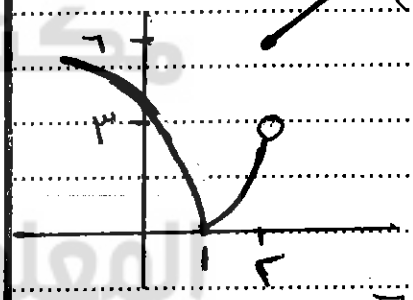


الحل

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$

(٩) وزارة (٢٠١٤) صيفية

اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الأقتران $f(x)$ ، اعتمد على مجموعة الاعداد الحقيقية أوجد $\lim_{x \to 2^+} f(x)$

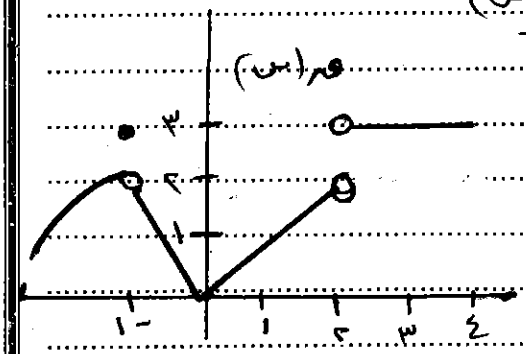


الحل

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 6$

(١٠) وزارة (٢٠١٥) شتوية

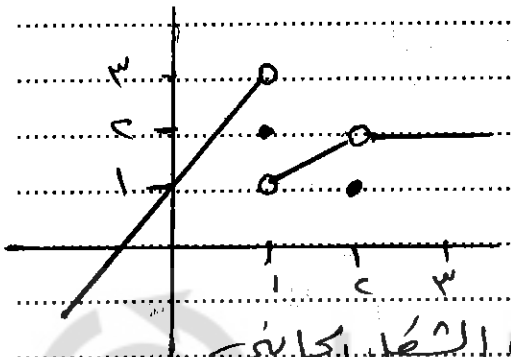
اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الأقتران $f(x)$ ، جد $\lim_{x \to 2^+} f(x)$



الحل

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3$

(١١) وزارة (٢٠١٥) صيفية



اعتماداً على الشكل المجاور أوجد $\lim_{x \to 1^-} f(x)$

الحل

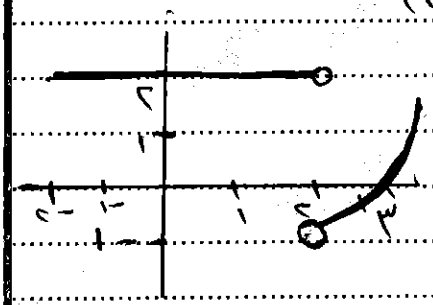
$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3$

مركز الوسام ALWISSAM
الاستاذ ناجح الجمزاوي

(١٢) وزارة (٢٠١٦) شتوية

اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الأقتران ق(س) المعرف على مجموعة الأعداد الحقيقية أوجد

نهـا ق(س)
س ← ٢+



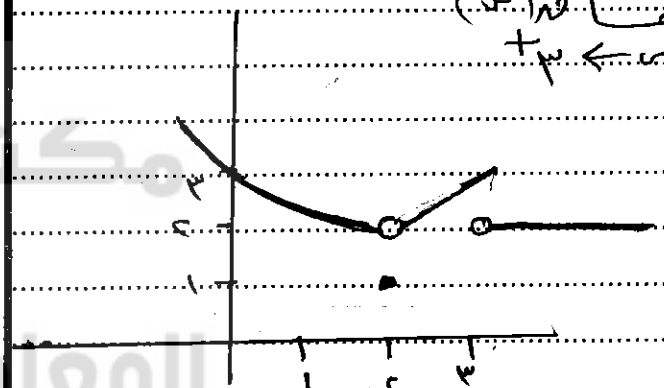
الحل

نهـا ق(س) = ١-
س ← ٢+

(١٣) وزارة (٢٠١٦) صيفية

اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الأقتران ق(س) المعرف على مجموعة الأعداد الحقيقية أوجد

نهـا ق(س)
س ← ٣+



الحل

نهـا ق(س) = ٢
س ← ٣+

مكتبة الوسام AlWeSAM المعلم: ناجح الجمزاوي

الدرس الثاني

نظريات على النهايات

نظرية (١)

نهـا جـ = جـ ، حيث جـ : عدد ثابت
س ← أ

نهاية الثابت = الثابت نفسه

مثال:- جد قيمة كل من النهايات التالية

١) نهـا ٨ = ٨
س ← ٥

٢) نهـا أ = أ
س ← ٥

٣) نهـا ٥/٩ = ٥/٩
س ← ٢

٤) نهـا ٣ = ٣
س ← ١+

نظرية (٢)

اذا كان هـ(س) = ق(أ) عندما س ≠ أ
فإن
نهـا هـ(س) = ق(أ)
س ← أ

تحسب نهاية اقترانات كثيرات الحدود بالتعويض المباشر بدل س

مثال ①
نهـا ٤س٢ + ٥ = ٤(١)٢ + ٥
س ← ١
= ٤ × ١ + ٥
= ٤ + ٥
= ٩

مثال (٢)
اوجد نهـا ص = ٤س٣ + ١
س ← ٢

الحل
تعويض مباشر
نهـا ص = ٤س٣ + ١ = ٤(٢)٣ + ١
س ← ٢
= ٤ × ٨ + ١ = ٨ + ١ = ١

مثال (٣)
اوجد نهـا ٣س٣ + ٥س٢ - ٤
س ← -١

الحل
= ٣(-١)٣ + ٥(-١)٢ - ٤
= -٣ + ٥ - ٤ = -٦

مثال (٤)
اذا علمت ان نهـا (٣س + أ) = ١٥
س ← ٢
فاوجد قيمة أ

الحل
٣ × ٢ + أ = ١٥
٦ + أ = ١٥
أ = ١٥ - ٦ = ٩

مكتب الوسام ALWSAM
الاستاذ ناجح الجمزاوي

مثال (٥)

اذا كانت $\text{ها}(٣ب+٥)=٢١$

$س \leftarrow ٨$

فاوجد قيمة $ب$

الحل

تعويض مباشر

$٨ب+٥=٢١$

$٨ب=٢١-٥=١٦$ بالقسمة ع ٨

$ب=٢$

مثال (٦)

اذا كانت $\text{ها}(ب س^{٢}+٢)=-٢$

$س \leftarrow -١$

اوجد قيمة $ب$ ؟

الحل

تعويض مباشر

$ب(-١)^{٢}+٢=-٢ \Leftarrow$

$ب+٢=-٢$

$ب=-٤$

مثال (٧)

اذا علمت ان $\text{ها}(٥س+٣)=٢$

$س \leftarrow ب$

فاوجد $ب$

الحل $٥ب+٣=٢$

$٥ب=٢-٣=-١$

$ب=-\frac{١}{٥} \Leftarrow$

مثال (٨)

اذا كانت $\text{ها}(س^{٢}+٣س)=-١$

$س \leftarrow -ب$

فاوجد قيمة $ب$

الحل

تعويض مباشر

$(-ب)^{٢}+٣(-ب)=-١$

$ب^{٢}-٣ب+١=٠$

بالتحليل

$(ب-١)(ب-١)=٠$

$ب=١ \Leftarrow$

مثال (٩)

اذا كانت $\text{ها}(س^{٢}+٦س)=-٩$

$س \leftarrow ب$

اوجد قيمة $ب$

الحل

$ب^{٢}+٦ب=-٩$

$ب^{٢}+٦ب+٩=٠$

$(ب+٣)(ب+٣)=٠$

$ب=-٣ \Leftarrow$

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

نظرية (٣)

اذا كانت P ، $ل$ ، $ك$ ، $ن$ اعداد حقيقية وكانت

$\lim_{س \to P} هـ(س) = ل$ ، $\lim_{س \to P} و(س) = ك$

فإن

١. $\lim_{س \to P} (ك هـ(س)) = ك \lim_{س \to P} هـ(س) = ك ل$

٢. $\lim_{س \to P} (هـ(س) \pm و(س)) = \lim_{س \to P} هـ(س) \pm \lim_{س \to P} و(س) = ل \pm ك$

٣. $\lim_{س \to P} (هـ(س) \times و(س)) = \lim_{س \to P} هـ(س) \times \lim_{س \to P} و(س) = ل \times ك$

٤. $\lim_{س \to P} \sqrt[ن]{هـ(س)} = \sqrt[ن]{\lim_{س \to P} هـ(س)} = \sqrt[ن]{ل}$

٥. $\lim_{س \to P} (هـ(س))^{ن} = (\lim_{س \to P} هـ(س))^{ن} = (ل)^{ن}$

ملاحظة هامة

في اسئلة المعطيات و المطلوب يجب تجهيز المعطيات قبل البدء في ايجاد المطلوب وذلك بجعل $\lim هـ(س)$ لوحدها دون اضافة أو طرح أو ضرب أو قسمة ثم التعويض في المطلوب وهذا التعويض المباشر في اغلب الاحيان الا في حدود المستقيمات.

مثال (١)

اذا كانت $\lim_{س \to ١} هـ(س) = ٨$ أوجد مايلي

١) $\lim_{س \to ١} ٣هـ(س)$ ٢) $\lim_{س \to ١} (هـ(س) + س^{٢} - ١٢)$

٣) $\lim_{س \to ١} (٢هـ(س) - س - ٣)$

٤) $\lim_{س \to ١} \left(٢ - \frac{هـ(س)}{٤}\right)$

٥) $\lim_{س \to ١} \sqrt[٣]{(هـ(س))^{٢}}$

الحل

١) $\lim_{س \to ١} ٣هـ(س) = ٣ \lim_{س \to ١} هـ(س) = ٣ \times ٨ = ٢٤$

٢) $\lim_{س \to ١} (هـ(س) + س^{٢} - ١٢) = \lim_{س \to ١} هـ(س) + \lim_{س \to ١} س^{٢} - ١٢$

$= ٨ + (١)^{٢} - ١٢ = ١٢ - ٩ = ٣-$

٣) $٢ \lim_{س \to ١} هـ(س) + \lim_{س \to ١} (-س - ٣)$

$= ٢ \times ٨ - ١ - ٣ = ١٦ - ٤ = ١٢$

يتبع الحل ⇐

مكتبة نسيبة
المعلم ناجح الجمزاوي

٤) $\lim_{س \to ١} \frac{ق(س) - ق(١)}{س - ١} = ٢ - ٨ = -٦$

٥) $= (\lim_{س \to ١} هـ(س))^{٣} - \sqrt[٣]{\lim_{س \to ١} هـ(س)}$

$= ٨^{٢} - \sqrt[٣]{٨}$

$= ٦٤ - ٢ = ٦٢$

مثال (٢)

اذا كانت $\lim_{س \to ١} هـ(س) = ٤$ ، $\lim_{س \to ١} ق(س) = ٥$

فاوجد ما يلي

١) $\lim_{س \to ١} ٣ هـ(س)$

الحل $= ٣ \lim_{س \to ١} هـ(س) = ٣ \times ٤ = ١٢$

٢) $\lim_{س \to ١} (هـ(س) + ق(س))$

الحل

$= \lim_{س \to ١} هـ(س) + \lim_{س \to ١} ق(س) = ٤ + ٥$

$= ٩$

٣) $\lim_{س \to ١} ٢ هـ(س) - ٣ ق(س)$

الحل

$= ٢ \lim_{س \to ١} هـ(س) - ٣ \lim_{س \to ١} ق(س)$

$= ٢ \times ٤ - ٣ \times ٥$

$= ٨ - ١٥ = -٧$

٤) $\lim_{س \to ١} هـ^{٣}(س)$

الحل

$= (\lim_{س \to ١} هـ(س))^{٣} = ٤^{٣} = ٦٤$

٥) $\lim_{س \to ١} (٢ هـ(س) + س^{٢} - ٤)$

الحل

$= ٢ \lim_{س \to ١} هـ(س) + \lim_{س \to ١} (س^{٢} - ٤)$

$= ٢ \times ٤ + (١^{٢} - ٤)$

$= ٨ - ٣ = ٥$

مثال (٣)

اذا كانت $\lim_{س \to ١} (٢ هـ(س) - ١) = ١٧$

فاوجد $\lim_{س \to ١} (\sqrt{هـ(س)} - ٥)$

اولاً

تجهيز المعطيات

$\lim_{س \to ١} (٢ هـ(س) - ١) = ٢ \lim_{س \to ١} هـ(س) - ١$

$= ٢ \lim_{س \to ١} هـ(س) - ١ = ١٧$

$+١ \quad +١$

$\Leftarrow ٢ \lim_{س \to ١} هـ(س) = ١٨$ بالقسمة على ٢

$\lim_{س \to ١} هـ(س) = \frac{١٨}{٢} = ٩$

نعوضها في المطلوب

$= \sqrt{\lim_{س \to ١} هـ(س)} - ٥ = \sqrt{٩} - ٥$

$= ٣ - ٥ = -٢$

مثال (٤)

اذا كانت $\lim_{س \to ٢} هـ(س) = ٥$ وكانت $\lim_{س \to ٢} ها هـ(س) = -٤$ فاوجد مايلي

١) $\lim_{س \to ٢} (ها هـ(س) + س^٢)$

٢) $\lim_{س \to ٢} (هـ(س) \times ٥ ها^٢(س))$

٣) $\lim_{س \to ٢} \sqrt[٣]{٤ هـ(س)}$

الحل

من المعطيات $\lim_{س \to ٢} ها هـ(س) = -٤$

بالقسمة على (٢) $\Leftarrow \lim_{س \to ٢} هـ(س) = -٢$

① $\lim_{س \to ٢} هـ(س) + \lim_{س \to ٢} س^٢$

$= -٢ \times ٥ + ٢^٢ = -١٠ + ٤ = -٦$

② $\lim_{س \to ٢} هـ(س) \times (\lim_{س \to ٢} ها هـ(س))$

$= ٥ \times (-٤) = -٢٠$

③ $\sqrt[٣]{\lim_{س \to ٢} ٤ ها هـ(س)} = \sqrt[٣]{٤ \times -٢}$

$= \sqrt[٣]{-٨} = -٢$

مثال (٥)

اذا كانت $\lim_{س \to ٣} (٢ هـ(س) - ٣س + ٧) = ٨$

فاوجد $\lim_{س \to ٣} هـ(س)$

الحل

من المعطيات نجد $\lim_{س \to ٣} هـ(س)$

$\lim_{س \to ٣} (٢ هـ(س) - ٣س + ٧) = ٨$

$٢ \lim_{س \to ٣} هـ(س) + \lim_{س \to ٣} -٣س + ٧ = ٨$

$٢ \lim_{س \to ٣} هـ(س) - ٩ + ٧ = ٨$

$٢ \lim_{س \to ٣} هـ(س) = ٨$

$\lim_{س \to ٣} هـ(س) = ٤$

$\lim_{س \to ٣} هـ(س) = ١٠$ بالقسمة على ٢

$\lim_{س \to ٣} ها هـ(س) = ٥$

نجد $\lim_{س \to ٣} هـ(س) - (\lim_{س \to ٣} ها هـ(س))^٢$

$= ٥ - ٢٥$

AlwaSAM
ناجح الجمزاوي

مثال (٦)

اذا كانت $\lim_{س \to ٢} (٢ه(س) - و(س)) = ٨$

وكانت $\lim_{س \to ٢} ٣ه(س) = ٦$ فاوجد

$\lim_{س \to ٢} ه(س)$

الحل

من المعطيات

$\lim_{س \to ٢} ٣ه(س) = ٦$ بالقسمة على ٣

$\Leftarrow \lim_{س \to ٢} ه(س) = ٢$

ايضاً $\lim_{س \to ٢} (٢ه(س) - و(س)) = ٨$

$\Leftarrow ٢ \lim_{س \to ٢} ه(س) - \lim_{س \to ٢} و(س) = ٨$

$\Leftarrow ٢ \lim_{س \to ٢} ه(س) - ٢ = ٨$

$\Leftarrow ٢ \lim_{س \to ٢} ه(س) = ٨ + ٢$

$\Leftarrow ٢ \lim_{س \to ٢} ه(س) = ١٠$ بالقسمة على ٢

$\Leftarrow \lim_{س \to ٢} ه(س) = ٥$

وضربها $\lim_{س \to ٢} ه(س) \times \lim_{س \to ٢} ه(س)$

$= ٥ \times ٥ = ٢٥$

مثال (٧)

اوجد $\lim_{س \to ٢} \sqrt{س^٣ + ١٧}$

الحل

بالتعويض المباشر

$= \sqrt{٢^٣ + ١٧} = \sqrt{٨ + ١٧}$

$= \sqrt{٢٥} = ٥$

مثال (٨)

اذا علمت أن $\lim_{س \to -١} (٢ه(س) + ٣س^٢) = ٧$

فاوجد قيمة $\lim_{س \to -١} (٤ - ٣ه(س))$

الحل

نجد $\lim_{س \to -١} ه(س)$ من المعطيات

$\lim_{س \to -١} (٢ه(س) + ٣س^٢) = ٧$

$\lim_{س \to -١} ٢ه(س) + \lim_{س \to -١} ٣س^٢ = ٧$

$٢ \lim_{س \to -١} ه(س) + ٣(-١)^٢ = ٧$

$٢ \lim_{س \to -١} ه(س) + ٣ = ٧$

$٢ \lim_{س \to -١} ه(س) = ٧ - ٣$

$\lim_{س \to -١} ه(س) = ٤$ بالقسمة على ٢

نتبع الحل

$\Leftarrow$ نها $ق(س) = ٢$ نعوض مباشر في المطلوب

$س \to -١$

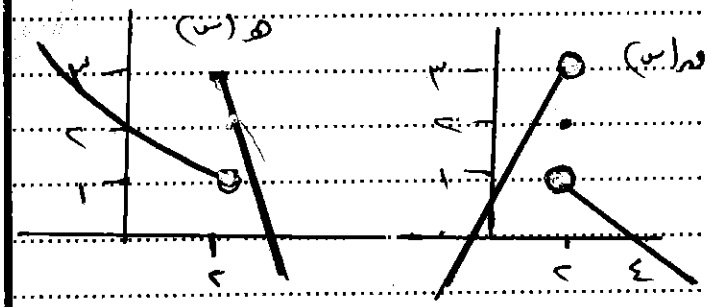
$\Leftarrow$ نها $٤ - ٣$ نها $ق(س) =$

$س \to -١ \quad س \to -١$

$= ٤ - ٣ \times ٢ = ٤ - ٦ = -٢$

مثال (٩)

بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى $ق$ ، $ه$ اوجد ما يلي



١) نها $ق(س)$

$س \to ٤$

الحل نها $ق(س) =$ صفر

$س \to ٤$

٢) نها $ه(س) = ٢$

$س \to ٢^+$

٣) نها $س^٤ \times ه(س) = (٢)^٤ \times ٢$

$س \to ٢^+$

$= ١٦ \times ٢ = ٣٢$

٤) نها $ق(س) \times ه(س) =$ نها $ق(س) \times$ نها $ه(س)$

$س \to ٢ \quad س \to ٢ \quad س \to ٢$

$= ٣ \times ١ = ٣$

مثال (١٠)

اذا كانت نها $٧ ب س^٢ - ٥ = ٧$

$س \to ٣$

فاوجد قيمة $ب$

الحل

نها $\sqrt{٧ ب س^٢ - ٥} = \sqrt{ب \times ٩ - ٥} = \sqrt{٧}$

$س \to ٣ \quad س \to ٣$

بتربيع الطرفين

$\Leftarrow$ نها $٧ ب س^٢ - ٥ = ٤٩$

$س \to ٣$

$٤٩ = ٥ - ٩ ب \times ٧$

$٥+ \quad ٥+$

$٥٤ = ٩ ب \Leftarrow ب = ٦$

$٩ \quad ٩$

مثال (١١)

اذا كانت نها $ب س - ٤ =$ صفر

$س \to ب$

اوجد قيمة $ب$

الحل

نعوض مباشر

$ب \times ب - ٤ =$ صفر

$ب^٢ - ٤ = ٠$

$ب^٢ = ٤ \Leftarrow ب = \pm \sqrt{٤}$

$ب = \pm ٢ \quad \{٢، -٢\} = ب$

مركز الوسام ALWSAM المعلم ناجح الجمزاوي

تدريبات و تمارين الكتاب

تدريب (٢) ص ٢٣

ماجمة هـا (٢ س^{٣} - ١٥ س)

س ← ٢

الحل

بتعويض مباشر = ٢ (٢)^{٣} - ١٥ × ٢

= ٢ × ٨ - ٣٠ = ١٦ - ٣٠

= - ١٤

تدريب (٣) ص ٢٥

ماجمة كل مما يأتي

① هـا (٣ س + ٥) (س^{٤} - ٢ س + ٣)

س ← ١

الحل

= (٣ + ١ × ٣) (٥ + ١ × ٢ - (١)^{٤})

= ٨ × (١ - ٢ + ٣)

= ٨ × ٢ = ١٦

② هـا $\sqrt{س^{٣} + ١٧}$

س ← ٢

= $\sqrt{٢^{٣} + ١٧}$ = $\sqrt{٨ + ١٧}$

= $\sqrt{٢٥}$ = ٥

سؤال (١) ص ٢٨

اذا كانت هـا و(س) = ٤ وكانت

س ← ٦

هـا هـ(س) = ٣ فجد ماجمة كل مما يأتي

س ← ٦

أ) هـا (٣ و(س) - هـ(س))

الحل:

= ٣ هـا و(س) - هـا هـ(س)

س ← ٦ س ← ٦

= ٣ × ٤ - ٣ = ١٢ - ٣ = ٩

ب) هـا (و(س))^{٢} = (هـا و(س))^{٢}

س ← ٦ س ← ٦

= ٤^{٢} = ١٦

ج) هـا (و(س) × هـ(س) + ٣ س - ١٠)

س ← ٦

الحل

= هـا و(س) × هـا هـ(س) + هـا ٣ س - ١٠

س ← ٦ س ← ٦ س ← ٦

= ٤ × ٣ + (٣ × ٦ - ١٠)

= ١٢ + ١٨ - ١٠ = ١٢ + ٣ - ١٠

د) هـا $\sqrt[٣]{٣ هـ(س) - ١}$

س ← ٦

= $\sqrt[٣]{٣ هـا هـ(س) - ١}$ = $\sqrt[٣]{٣ \times ٣ - ١}$

س ← ٦

= $\sqrt[٣]{٨}$ = ٢

مكتبة الوسام AlwesAM

الاستاذ ناجح الجمزاوي

السؤال الثاني ص ٢٨

أوجد قيمة كل مما يأتي

أ) $\lim_{س \to ٣} (٢س - ٦) = ٢ \times ٣ - ٦ = ٦ - ٦ = صفر$

ب) $\lim_{س \to -٢} س^٣ (٣س + ٤) = (-٢)^٣ (٣ \times -٢ + ٤)$

$= -٨ (-٦ + ٤) = -٨ \times -٢ = ٨$

ج) $\lim_{س \to \frac{١}{٢}} (٤س^٢ + ١) = ٤ \times (\frac{١}{٢})^٢ + ١$

$= ٤ \times \frac{١}{٤} + ١ = ١ + ١ = ٢$

د) $\lim_{س \to ٠} (٣س + ٢)^٤ = (٣ \times ٠ + ٢)^٤$

$= (٢)^٤ = ١٦$

هـ) $\lim_{س \to -٣} \sqrt{١ - ٥س} = \sqrt{١ - ٥ \times -٣}$

$= \sqrt{١ + ١٥} = \sqrt{١٦}$

$= ٤$

و) $\lim_{س \to -٢} (س^٣ + ٢س^٢ - ٩)$

$= (-٢)^٣ + ٢(-٢)^٢ - ٩$

$= -٨ + ٨ - ٩ = -١٦ - ٩$

$= -٧$

السؤال الثالث ص ٢٨

اذا كانت $\lim_{س \to ٨} (م س + ٥) = ٢١$

فما قيمة الثابت م

الحل

بالتعويض مباشر

$٨ م + ٥ = ٢١$

$٨ م = ١٦$ بالقسمة على ٨

$م = \frac{١٦}{٨} = ٢$

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

أسئلة الوزارة

① وزارة (٢٠٠٩)

اذا كانت $\lim_{س \to ٢} هـ(س) = ٥$ فاوجد

$\lim_{س \to ٢} (٦س هـ(س) + ٣)$

الحل

$= \lim_{س \to ٢} ٦س \times \lim_{س \to ٢} هـ(س) + \lim_{س \to ٢} ٣$

$= ٦ \times ٢ \times ٥ + ٣$

$= ٦٠ + ٣ = ٦٣$

② وزارة (٢٠١٠)

اذا علمت ان $\lim_{س \to ٢} هـ(س) = ٤$

فاوجد $\lim_{س \to ٢} (س هـ(س) - ٣)$

الحل

$\lim_{س \to ٢} س هـ(س) - ٣ = \lim_{س \to ٢} س \times \lim_{س \to ٢} هـ(س)$

$= ٢ \times ٤ - ٣ = ٨ - ٣ = ٥$

③ وزارة (٢٠١٠)

اذا كانت $\lim_{س \to ٦} هـ(س) = ٤$ وكانت

$\lim_{س \to ٦} هـ(س) = ٣$ فاوجد قيمة

$\lim_{س \to ٦} (٣هـ(س) + ٥(س))$

الحل

$\lim_{س \to ٦} (٣هـ(س) + ٥(س))$

$= \lim_{س \to ٦} ٣هـ(س) + \lim_{س \to ٦} ٥(س)$

$= ٣ \times ٤ + ٣ = ١٢ + ٣ = ١٥$

④ وزارة ٥ (٢٠١١) صيفية

اذا كانت $\lim_{س \to ٣} هـ(س) = ٤$ فاوجد

$\lim_{س \to ٣} س هـ(س)$

الحل

$\lim_{س \to ٣} س هـ(س) = \lim_{س \to ٣} س \times \lim_{س \to ٣} هـ(س)$

$= ٣ \times ٤ = ١٢$

المعلم ناجح الجمزاوي

⑤ وزارة (٢٠١٠) صيفية

اذا كان $d(س)$ كثير حدود، وكانت $\lim_{س \to ٣} \frac{d(س) - ٥}{س - ٣} = ٢$ فاوجد

$\lim_{س \to ٣} \sqrt{٤ d(س)}$

الحل

من المعطيات ⇐

$\lim_{س \to ٣} d(س) - \lim_{س \to ٣} ٥ = ٣$

$\lim_{س \to ٣} d(س) - ٥ = ٣$

$٣ + ٥ + ٥ = \lim_{س \to ٣} d(س)$

$\lim_{س \to ٣} d(س) = ٨$ بتعويضها

حيث المطلوب

$= \sqrt{٤ \lim_{س \to ٣} d(س)} = \sqrt{٤ \times ٨}$

$= \sqrt{٣٢} = ٤$

⑥ وزارة (٢٠١٢) شتوية

اذا كانت $\lim_{س \to ٣} d(س) = ٢$ وكانت

$\lim_{س \to ٣} هـ(س) = ١$ فاوجد

$\lim_{س \to ٣} س\, d(س) + هـ^{٢}(س)$

الحل

$\lim_{س \to ٣} س\, d(س) + هـ^{٢}(س)$

$= \lim_{س \to ٣} س \times \lim_{س \to ٣} d(س) + \lim_{س \to ٣} هـ^{٢}(س)$

$= ٣ \times ٢ + ١^{٢}$

$= ٦ + ١ = ٧$

⑦ وزارة (٢٠١٣) شتوية

① اذا كانت $\lim_{س \to -١} (ل س^{٢} + ٣) = ٧$

فاوجد قيمة الثابت ل

الحل

بتعويض مباشر

$ل \times (-١)^{٢} + ٣ = ٧$

$ل \times ١ + ٣ = ٧$

$ل + ٣ = ٧$

$ل = ٤ - ٣$

$ل = ٤$

مكتبة الوسام AlwesAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

② اذا كانت $\text{نها}_{س \to -٢} \text{هـ}(س) = ٧$

$\text{نها}_{س \to -٢} \text{هـ}(س) = -٣$ فاوجد

$\text{نها}_{س \to -٢} (٢\text{هـ}(س) + (\text{هـ}(س))^٢ - س)$

الحل

$= ٢ \times \text{نها}_{س \to -٢} \text{هـ}(س) + (\text{نها}_{س \to -٢} \text{هـ}(س))^٢ - \text{نها}_{س \to -٢} س$

$= ٢ \times ٧ + (-٣)^٢ - (-٢)$

$= ١٤ + ٩ + ٢ = ٢٥$

③ اذا كانت $\text{نها}_{س \to ٥} \text{هـ}(س) = -٦$

$\text{نها}_{س \to ٥} \text{هـ}(س) = ٤$ فاوجد

$\text{نها}_{س \to ٥} (\text{قـ}(س) - ٢\text{هـ}(س) - س)$

الحل

توزيع النهايه

$(\text{نها}_{س \to ٥} \text{هـ}(س))^٢ - ٢\,\text{نها}_{س \to ٥} \text{هـ}(س) - \text{نها}_{س \to ٥} س$

$= (-٦)^٢ - ٢ \times ٤ - ٥$

$= ٣٦ - ٨ - ٥ = ٢٣$

⑧

دالة $د = \{(٣، ١٣)، (٤، ١٤)\}$ صمعيه

① اذا كان $ك$ عددا ثابتا وكانت

$\text{نها}_{س \to ١} (٨س + ٢ك) = ٦$

فاوجد قيمة $ك$

الحل

$٨ \times ١ + ٢ك = ٦$

$٨ + ٢ك = ٦$

$٢ك = -٢$ بالقسمه على ٢

$ك = -١$

دالة $د = \{(٣، ١٣)، (٤، ١٤)\}$ متصلة

اذا كانت $\text{نها}_{س \to ٢} \text{هـ}(س) = -٦$

$\text{نها}_{س \to ٢} \text{هـ}(س) = ٤$ فاوجد

$\text{نها}_{س \to ٢} (\text{قـ}(س) + (\text{هـ}(س) + ١) - ٣س)$

الحل

$(\text{نها}_{س \to ٢} \text{هـ}(س))^٢ + (\text{نها}_{س \to ٢} \text{هـ}(س) + ١) - ٣\,\text{نها}_{س \to ٢} س$

$= (-٦)^٢ + (٤ + ١) - (٣ \times ٢)$

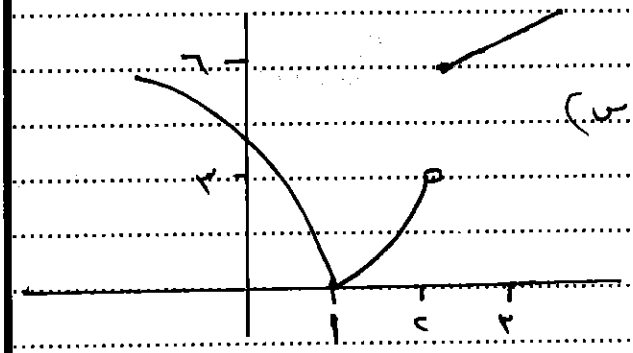
$= ٣٦ + ٥ - ٦ = ١٣$

(١٠) وزارة (٢٠١٤) صيفية

(١١) اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الدالة ق حيث ق(س) المعرف على مجموعة الاعداد الحقيقية

اوجد

$$\text{نهـا}_{س \leftarrow ١} \left((ق(س) - ٤) + \frac{٥س - ٣}{س - ١} \right)$$



الحل

من الرسمة $\text{نهـا}_{س \leftarrow ١} ق(س) =$ صفر

نجد المطلوب

$$= (\text{نهـا}_{س \leftarrow ١} ق(س) - ٤) + \frac{\text{نهـا}_{س \leftarrow ١} ٥س - ٣}{\text{نهـا}_{س \leftarrow ١} س}$$

$$= (٠ - ٤) + \frac{٥ \times ١ - ٣}{١}$$

$$= -٤ + \frac{٥ - ٣}{١} = -٤ + ٢$$

$$= -٢$$

(١٢) اذا كانت $\text{نهـا}_{س \leftarrow ٣} ق(س) = -٨$

فما $\text{نهـا}_{س \leftarrow ٣} هـ(س) = ٤$ فاوجد

$$\text{نهـا}_{س \leftarrow ٣} \left(\frac{ق(س)}{هـ(س)} - (هـ(س) + ٥س) \right)$$

الحل

$$= \frac{\text{نهـا}_{س \leftarrow ٣} ق(س)}{\text{نهـا}_{س \leftarrow ٣} هـ(س)} - (\text{نهـا}_{س \leftarrow ٣} هـ(س) + \text{نهـا}_{س \leftarrow ٣} ٥س)$$

$$= \frac{-٨}{٤} - (٤ + ٥ \times ٣)$$

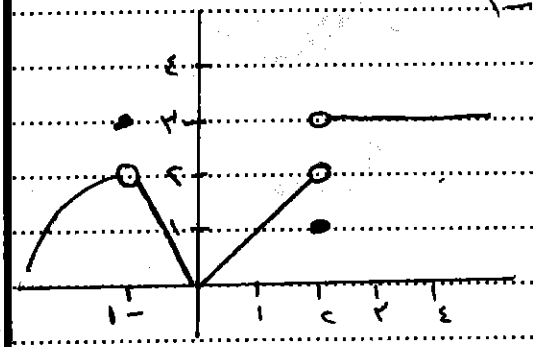
$$= -٢ - ١٥ + ١٦ = -٣$$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

(١١) وزارة (٢٠١٥) شتوية

① اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) أوجد

$\lim_{س \to -١} (ق(س))^{٢} = \frac{١}{٤}(س - ٧)$



الحل

من الرسمة $\lim_{س \to -١} ق(س) = ٢$

نجد المطلوب

$(\lim_{س \to -١} ق(س))^{٢} - \lim_{س \to -١} \frac{١}{٤}(س - ٧)$

$= ٢^{٢} - \frac{١}{٤}(-١ - ٧)$

$= ٤ - \frac{١}{٤} \times -٨$

$= ٤ + ٢ = ٦$

② اذا كانت $\lim_{س \to ٣} ق(س) = ٤$ فأوجد $\lim_{س \to ٣} ٨ - ق(س)$

$\lim_{س \to ٣} \sqrt{٢ق(س) - ق(س) + س ق(س)}$

الحل

نوزع النهاية

$\sqrt{\lim_{س \to ٣} ٢ق(س) - \lim_{س \to ٣} ق(س) + \lim_{س \to ٣} س \times \lim_{س \to ٣} ق(س)}$

$= \sqrt{٢ \times ٤ - ٨ + ٣ \times -٨}$

$= \sqrt{٨ + ٨ - ٢٤} = \sqrt{١٦ - ٢٤}$

$= ٤ - ٢٤ = -٢٠$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

(١٢) وزارة (٢٠١٥ د) صيفية

اذا كانت هـا (ق(س) − ٣) = ٢
س ← ٢

هـا ق(س) = ٦ اجب عن ما يأتي

أ) جد هـا (س² ق(س) − ٣ (ق(س) + ٥)
س ← ٢

ب) جد قيمة الثابت م التي تجعل

هـا ق(س) − م / ق(س) = ١
س ← ٢

الحل

بجهد المعطيات

هـا (ق(س) / ٣ + ٣) = ٢
س ← ٢

هـا ق(س) = ٥
س ← ٢

نعوضها في المطلوب

هـا س² ق(س) − ٣ (ق(س)) + ٥
س ← ٢

= هـا س² × هـا ق(س) − ٣ هـا ق(س) + هـا ٥
س ← ٢ س ← ٢ س ← ٢ س ← ٢

= ٤ × ٥ − ٣ × ٦ + ٥

= ٢٠ − ١٨ + ٥ = ٨٣

ب) هـا ق(س) − م² / ق(س) = ١
س ← ٢

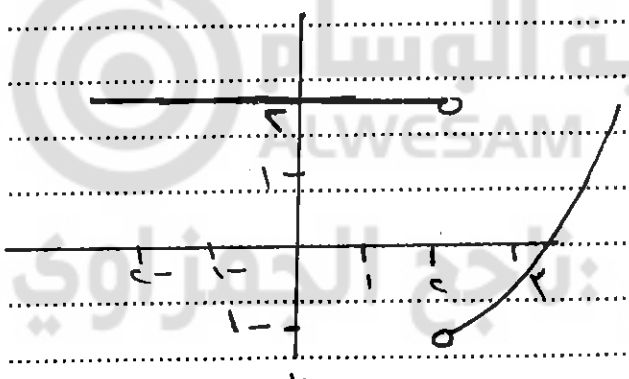
٥ − م / ٦ = ١ ← ضرب بادي

٥ − م = ٦ ← م = −١

(١٣) وزارة (٢٠١٦ د) شتوية

أ) اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) اعرف على مجموعة الاعداد الحقيقية

اوجد هـا (٣ ق(س) + ١/٤ س³)
س ← ٢



يتبع الحل ←

مكتبة الوسام ALWESAM
الاستاذ ناجح الجمزاوي

الحل

من الرسمة نها ق(س) = ٢
س ← -٢

نجد المطلوب

= نها ∛(٤ ق(س) + ١/٤ س³)
س ← -٢

= ∛(٤ نها ق(س) + نها ١/٤ س³)
س ← -٢ س ← -٢

= ∛(٤ × ٢ + ١/٤ × (-٢)³)

= ∛(٨ + ١/٤ × -٨) = ∛(٨ - ٢) = ∛٦ صفر

(٢) اذا كان ق(س) ، ه(س) كثيري حدود وكانت
نها ق(س) = ١٢ ، نها س ه(س) = ١٠
س ← ٢ س ← ٢

اوجد ما يلي

① جد نها (ق(س) / (س - ٢) + ٨ ه(س))
س ← ٢

② جد قيمة الثابت م التي تجعل
نها (م ه(س))² - ٦ ق(س)) = ٢٨
س ← ٢

الحل

نخرج المطلوب

نها س ه(س) = ١٠
س ← ٢

⇐ نها س × نها ه(س) = ١٠
س ← ٢ س ← ٢

٢ × نها ه(س) = ١٠
س ← ٢

نها ه(س) = ٥ نعوضها في المطلوب
س ← ٢

① نها ق(س) / نها (س - ٢) + ٨ نها ه(س)
س ← ٢ س ← ٢

= ١٢ / (٤ - ٢) + ٨ × ٥

= ١٢ / ٢ + ٤٠ = ٦ + ٤٠ = ٤٦

② م (نها ه(س))² - ٦ نها ق(س) = ٢٨
س ← ٢ س ← ٢

م × ٥² - ٦ × ١٢ = ٢٨

٢٥ م - ٧٢ = ٢٨

٢٥ م = ٢٨ + ٧٢

٢٥ م / ٢٥ = ١٠٠ / ٢٥

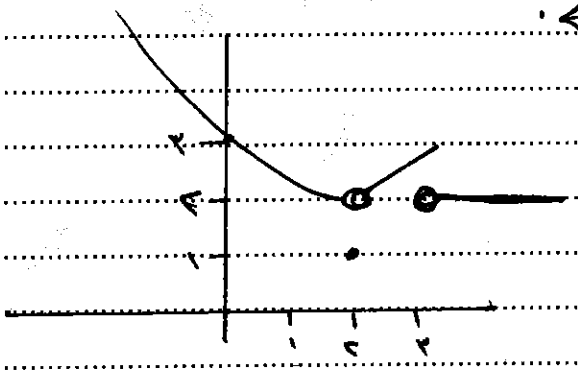
م = ٤

ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

(١٤) وزارة (٢٠١٦ ع) صيفية ②

① اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقترانين ق(س) ، ه(س) المعرف على مجموعة الاعداد الحقيقية أوجد

$$\text{نهـا}_{س \to ٠} \left(ق(س) \times ه(س) - \frac{٢س^٢ - ٨}{٢} \right)$$



الحل

من الرسم $\text{نهـا}_{س \to ٠} ه(س) = ٣$

نجد المطلوب

$$\text{نهـا}_{س \to ٠} ق(س) \times \text{نهـا}_{س \to ٠} ه(س) - \text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{٢س^٢ - ٨}{٢}$$

$$= ٣ \times ٢ - \frac{٠ - ٨}{٢} = ٦ - \frac{-٨}{٢}$$

$$= ٦ + ٤ = ١٠$$

مكتبة الوسام AlWeSAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

النهاية للجذور

$$\text{نها}_{س \to أ} \sqrt[ن]{\text{ق}(س)}$$

هنالك حالتان

الحالة الأولى: الجذور الفردية

في حالة الجذور الفردية $\sqrt[٣]{}$ ، $\sqrt[٥]{}$ ، ... يتم ايجاد النهاية بالتعويض المباشر وذلك لأنه يجوز ان يكون ما داخل الجذر الفردي عدد سالب أو عدد موجب

مثال ①

١) $\text{نها}_{س \to ٦} \sqrt[٣]{س+٢} = \sqrt[٣]{٦+٢} = \sqrt[٣]{٨} = ٢$

٢) $\text{نها}_{س \to ٤} \sqrt[٥]{٧س+٤} = \sqrt[٥]{٧×٤+٤} = \sqrt[٥]{٣٢} = ٢$

٣) $\text{نها}_{س \to ٤-} \sqrt[٥]{س+٣} = \sqrt[٥]{٤-+٣} = \sqrt[٥]{-١} = -١$

٤) $\text{نها}_{س \to ٥-} \sqrt[٣]{س-٣} = \sqrt[٣]{٥-٣-} = \sqrt[٣]{-٨} = -٢$

٥) $\text{نها}_{س \to ٥} \sqrt[٣]{س-٥} = \sqrt[٢]{٥-٥} = \sqrt[٣]{٠} = ٠$

٦) $\text{نها}_{س \to ٣-} \sqrt[٧]{٢س+٦} = \sqrt[٧]{٢×٣-+٦} = \sqrt[٧]{٠} = ٠$ = صفر

مثال ②

اذا علمت ان $\text{نها}_{س \to ٢} \text{ق}(س) = -١٦$

فاوجد قيمة $\text{نها}_{س \to ٢} \sqrt[٣]{\text{ق}(س)+٥س+١٤}$

الحل

$$= \sqrt[٣]{\text{نها}_{س \to ٢} \text{ق}(س) + \text{نها}_{س \to ٢}(٥س+١٤)}$$

$$= \sqrt[٣]{-١٦+(٥×٢+١٤)}$$

$$= \sqrt[٣]{-١٦+٢٤} = \sqrt[٣]{٨} = ٢$$

الحالة الثانية: الجذور الزوجية

يتم ايجاد النهاية للجذور الزوجية وذلك بالتعويض المباشر وهنالك ثلاث حالات

١) اذا كان ناتج التعويض موجب النهاية موجودة

٢) ناتج التعويض سالب النهاية غير موجودة

٣) اذا كان ناتج التعويض (صفر) هنا لابد تحديد المجال (دراسة اشارة ما داخل الجذر)

أولاً:-

ناتج التعويض داخل الجذور عدد موجب تكون النهاية موجودة.

مثال ①

أ) نهـا $\sqrt{س+٢} = \sqrt{٢+٢} = \sqrt{٤} = ٢$
$س \to ٢$

ب) نهـا $\sqrt{١-٢س} = \sqrt{١-٢\times-١} = \sqrt{١+٢} = \sqrt{٣}$
$س \to -١$

ج) نهـا $\sqrt[٤]{س+١١} = \sqrt[٤]{٥+١١} = \sqrt[٤]{١٦} = ٢$
$س \to ٥$

ثانياً:-

ناتج التعويض داخل الجذر الزوجي عدد سالب فتكون النهاية غير موجودة

مثال

أ) نهـا $\sqrt{س-٤} = \sqrt{١-٤} = \sqrt{-٣}$ غير موجودة
$س \to ١$

ب) نهـا $\sqrt{٢-٣س} = \sqrt{٢-٥\times٣} = \sqrt{٢-١٥}$
$س \to ٥$
$= \sqrt{-١٣}$ غير موجودة

ج) نهـا $(\sqrt{٣س} + س٤)$
$س \to -١$
$= \sqrt{٣\times-١} + (-١) = \sqrt{-٣} + ١$ غير موجودة

ثالثاً:-

اذا كان ناتج التعويض داخل الجذر الزوجي يساوي صفر فاننا ندرس اشارة المقدار حول النقطة التي تجعل ما داخل الجذر يساوي صفر ونقوم بتحديد المجال.

١) اذا كانت النقطة داخل المجال نعوض تعويض مباشر

٢) اذا كانت النقطة خارج المجال تكون النهاية غير موجودة بدون تعويض

داخل المجال ∴ النقطة موجبة
خارج المجال ∴ النقطة سالبة

٣) اذا كان ناتج التعويض يساوي صفر نحدد المجال ثم نحدد النهاية من اليمين والنهاية من اليسار لتلك العدد

مكتبة الوسام AlWeSAM المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ①

اذا كان $f(x) = \sqrt{x-5}$ أوجد

1) $\lim_{x \to 9} f(x)$ 2) $\lim_{x \to 1} f(x)$

3) $\lim_{x \to 5} f(x)$

الحل

1) $\lim_{x \to 9} \sqrt{x-5} = \sqrt{9-5} = \sqrt{4} = 2$

2) $\lim_{x \to 1} \sqrt{x-5} = \sqrt{1-4} = \sqrt{-3}$ سالبة

غير موجودة

3) $\lim_{x \to 5} \sqrt{x-5} = \sqrt{5-5} = \sqrt{0} = 0$

ناتج التعويض = صفر نحدد المجال

$x - 5 \geq 0$ ← $x = 5$

نفس اشارة x عكس اشارة x

+ + + + | − − − − −

المجال 5^+ ، 5^-

المجال = المنطقة الموجبة

① $\lim_{x \to 5^+} \sqrt{x-5} = \sqrt{5-5} = 0$ = صفر

$x \to 5^+$ داخل المجال

② $\lim_{x \to 5^-} \sqrt{x-5}$ = غير موجودة (خارج المجال)

$x \to 5^-$

الجواب $\lim_{x \to 5} \sqrt{x-5}$ غير موجودة

$x \to 5$

مثال ②

اوجد $\lim_{x \to 5} \sqrt{10-2x}$

الحل

ناتج التعويض $\sqrt{10-2\times5} = \sqrt{0}$

= صفر

تحديد المجال

$10 - 2x = 0$ ← $2x = 10$

$x = 5$

+ + + + | − − − −

5 المجال

$\lim_{x \to 5^+} \sqrt{10-2x}$ غير موجودة (خارج المجال)

$x \to 5^+$

$\lim_{x \to 5^-} \sqrt{10-2x} = \sqrt{10-10} = 0$ = صفر

$x \to 5^-$

← $\lim_{x \to 5} \sqrt{10-2x}$ غير موجودة

$x \to 5$

مثال ③

اوجد $\lim_{x \to 2} \sqrt{x^2-2x}$

$x \to 2$

الحل

ناتج التعويض $= \sqrt{2^2-2\times2}$

$= \sqrt{4-4} = 0$

تحدد المجال

$x^2 - 2x = x(x-2)$ = صفر

x = صفر أو $x = 2$

نفس اشارة س^{٢} | عكس اشارة س^{٢} | نفس اشارة س^{٢}

+ + + + + | − − − − | + + + + +

المجال ← ٠ | ٤ → المجال

$\lim_{س \to ٤} \sqrt{س^{٢} - ٤س} = \sqrt{٤^{٢} - ٤ \times ٤} = \sqrt{٠}$

= صفر (داخل المجال)

$\lim_{س \to ٠} \sqrt{س^{٢} - ٤س}$ غير موجودة خارج المجال

$\lim_{س \to ٢} \sqrt{س^{٢} - ٤س}$ غير موجودة

مثال ④

اوجد $\lim_{س \to ٣} \sqrt{٩ - س^{٢}}$

الحل

ناتج التعويض $= \sqrt{٩ - ٩} =$ صفر

نحدد المجال

$٩ - س^{٢} = ٠ \Leftarrow س^{٢} = ٩$

$س = \pm \sqrt{٩} = \pm ٣$

نفس اشارة س^{٢} | عكس اشارة س^{٢} | نفس اشارة س^{٢}

− − − − − | + + + + + | − − − − −

٣− ← المجال → ٣

$\lim_{س \to ٣^{+}} \sqrt{٩ - س^{٢}}$ غير موجودة (خارج المجال)

$\lim_{س \to ٣} \sqrt{٩ - س^{٢}} = \sqrt{٩ - ٣^{٢}} = \sqrt{٩ - ٩}$

= صفر

$\lim_{س \to ٣} \sqrt{٩ - س^{٢}}$ غير موجودة

مثال ⑤

اوجد $\lim_{س \to ١} \sqrt{س^{٢} - ٤س + ١}$

الحل

ناتج التعويض $= \sqrt{١ - ٤ + ١} = \sqrt{٠} = ٠$

نحدد المجال

$س^{٢} - ٤س + ١ = ٠$

$(س - ١)(س - ١) = ٠$

$س = ١$

+ + + + | + + + + +

$\lim_{س \to ١} \sqrt{س^{٢} - ٤س + ١} =$ صفر

ملاحظة:

الدومين لكل شيء الذي يوجد له جذر واحد تكون له اشارة واحدة فقط وهي اشارة س^{٢}

المعلم ناجح الجمزاوي

مثال ⑥

اوجد $\lim_{س \to -١} \sqrt{س^٢ - ١}$

الحل

ناتج التعويض $= \sqrt{(-١)^٢ - ١} = \sqrt{١ - ١} = \sqrt{٠} = ٠$

يلزم تحديد المجال

$س - ١ = ٠$

$(س - ١)(س + ١) = ٠$

$س = ١ ، س = -١$

المجال		المجال
+++++	١	+++++
	-١	

يبار العدد (-١) موجودة في المجال

$\lim_{س \to -١} \sqrt{س^٢ - ١}$

$= \sqrt{(-١)^٢ - ١} = \sqrt{١ - ١} = \sqrt{٠} = ٠$

مثال ⑦

اذا كان $ق(س) = \sqrt{٤س - ١٢}$

فجد قيمة $ل$ حيث $\lim_{س \to ل} ق(س)$ موجودة

$ل \leftarrow س$

الحل

نحدد المجال $٤س - ١٢ \geq ٠$

$٤س \geq ١٢ \Leftarrow س \geq \frac{١٢}{٤}$

$س \geq ٣$

	٣	
-----	٠	+++++

حتى تكون النهاية موجودة يجب ان تكون $ل \geq ٣$ اي $ل \in [٣ ، \infty)$

مثال ⑧

اذا كان $ق(س) = \sqrt{(٨ - ٢س)^٢}$

فاوجد ما يلي

١) $\lim_{س \to -١} ق(س)$ ٢) $\lim_{س \to ٥} ق(س)$

الحل

بالتعويض المباشر

١) $\lim_{س \to -١} \sqrt{(٨ - ٢س)^٢} = \sqrt{(٨ - ٢(-١))^٢}$

$= \sqrt{(١٠)^٢} = \sqrt{١٠٠} = ١٠$

٢) $\lim_{س \to ٥} \sqrt{(٨ - ٢س)^٢} = \sqrt{(٨ - ٢(٥))^٢}$

$= \sqrt{(-٢)^٢} = \sqrt{٤} = ٢$

٣) $\lim_{س \to ٤} \sqrt{(٨ - ٢س)^٢} = \sqrt{(٨ - ٢(٤))^٢} = ٠$

نحدد المجال

$(٨ - ٢س)^٢ \geq ٠ \Leftarrow ٨ - ٢س \geq ٠$

$-٢س \geq -٨ \quad س \leq ٤$

	٤	
+++++	٠	-----

$\lim_{س \to ٤} \sqrt{(٨ - ٢س)^٢} =$ صفر

مثال ⑨

اوجد هـا $\sqrt{(١-س)^{٣}}$

س ← ١

الحل :.

ناتج التعويض = صفر

$\sqrt{(١-١)^{٣}} = \sqrt{٠} = ٠$

تحديد المجال

$(١-س)^{٣} = ٠ \Leftarrow ١-س = ٠$

$\Leftarrow س = ١$

⓪

+ + + + + | − − − −

١

اعمال

هـا $\sqrt{(١-س)^{٣}}$ غير موجودة

س ← ١⁺

هـا $\sqrt{(١-س)^{٣}}$ = صفر

س ← ١⁻

هـا $\sqrt{(١-س)^{٣}}$ غير موجودة

س ← ١

مثال ⑩

هـا $\sqrt{س^{\frac{١}{٣}}-١}$ ـ ٢

س ← ٣ + $\frac{س^{٢}-٣}{}$

الحل تعويض مباشر

$= \frac{\sqrt{٣^{\frac{١}{٣}}-١}-٢}{٣^{٢}-٣}$

$= \frac{\sqrt{٠}-٢}{٩-٣}$

$= \frac{٠-٢}{٦}$

تحديد مجال $س^{\frac{١}{٣}}-١$

$\Leftarrow س^{\frac{١}{٣}} = ١ \Leftarrow س = ٣$

اعمال

− − − | + + + +

٣

$\Leftarrow$ س ∈]٣، ∞[

الكوان $= \frac{٠-٦}{٩-٣}$

$= \frac{-٦}{٦} = -١$

مكتبة الوسام AlWeSAM

المعلم ناجح الجمزاوي

تدريبات وتمارين الكتاب

① تدريب ④ ص ٢٧

جد نهاية كل من الاقترانات التالية إن وجدت

(أ) $\lim_{س \to ٢^-} \sqrt{٤ - س^٢}$ عندما $س \to ٢^-$

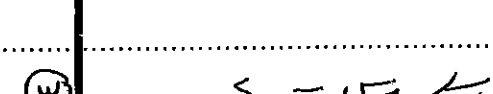
$+ ٢ \leftarrow س$

الحل

$\sqrt{٤ - ٢^٢} = \sqrt{٠} = ٠$ التعويض

تحديد المجال

$٤ - س^٢ = ٠ \leftarrow ٤ = س^٢ \leftarrow س = \pm ٢$



المجال $[-٢ ، ٢]$

$\lim_{س \to ٢^-} \sqrt{٤ - س^٢}$ داخل المجال

$= \sqrt{٤ - ٢ \times ٢} = \sqrt{٠} = ٠$

$\lim_{س \to ٢^+} \sqrt{٤ - س^٢}$ خارج المجال

غير موجودة

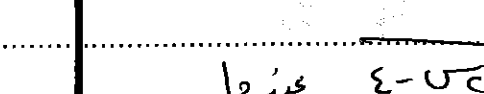
② جد $\lim_{س \to ٠} \sqrt{س^٢}$

الحل

ناتج التعويض $= \sqrt{(٠)^٢} =$ صفر

تحديد المجال

$س^٢ = ٠ \leftarrow س = ٠$



$\lim_{س \to ٠^+} \sqrt{س^٢} =$ صفر ، $\lim_{س \to ٠^-} \sqrt{س^٢} =$ صفر

$\lim_{س \to ٠} \sqrt{س^٢} =$ صفر

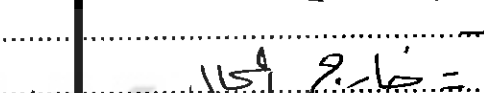
③ أوجد $\lim_{س \to ٠} \sqrt{-س^٢}$

الحل

ناتج التعويض $= \sqrt{-(٠)^٢} =$ صفر

تحديد المجال

$-س^٢ = ٠ \leftarrow س = ٠$



$\lim_{س \to ٠^+} \sqrt{-س^٢}$ غير موجودة

$\lim_{س \to ٠^-} \sqrt{-س^٢}$ غير موجودة

$\lim_{س \to ٠} \sqrt{-س^٢}$ غير موجودة

AlWesam
الوسام: ناجح الجمزاوي

س٨ ص٩٢ غامر بوسائل

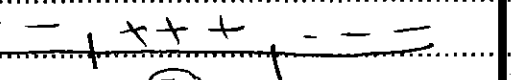
جد قيمة النهايات الاتية إن وجدت

أ) $\lim_{س \to 0^+} \sqrt{س}$

الحل

ناتج التعويض = ٠

تحدد المجال $س = ٠$



$\sqrt{س}$ داخل المجال

$\lim_{س \to 0^+} \sqrt{س} = \sqrt{٠} = ٠$

ب) $\lim_{س \to 1^-} \sqrt{١ - س}$

الحل

ناتج التعويض $١ - ١ = ٠$

تحدد المجال

$١ - س = ٠ \Leftarrow س = ١$

$\sqrt{١ - س}$ غير موجودة (خارج المجال)

$\lim_{س \to 1^+}$

$\sqrt{١ - س}$ = ٠ (داخل المجال)

$\lim_{س \to 1^-}$

$\sqrt{١ - س}$ غير موجودة

$\lim_{س \to 1}$

ج) $\lim_{س \to -2^-} \sqrt{٤ - س^٢}$

الحل

ناتج التعويض $= \sqrt{٤ - (-٢)^٢}$

$= صفر$

تحدد المجال

$٤ - س^٢ = ٠ \Leftarrow س^٢ = ٤$

$س = \pm\sqrt{٤} = \pm ٢$

$\sqrt{٤ - س^٢}$ داخل المجال

$\lim_{س \to -2^-}$

$= صفر$

مكتبة الوسام ALWESAM

الاستاذ: ناجح الجمزاوي

أسئلة الوزارة

① وزارة (٢٠١٢)

اذا كان $f(x) = \sqrt{x-3}$

فاوجد $\lim_{x \to 2} f(x)$

الحل

بالتعويض مباشر

$= \sqrt{2-3} = \sqrt{-1} = 4$

② وزارة (٢٠١٣) شتوية

اوجد $\lim_{x \to -1} \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 1 + x + 5}$

الحل

بالتعويض مباشر

$= \sqrt[3]{-1+3+1-1+5} = \sqrt[3]{7}$

③ وزارة (٢٠١٣) صيفية

اوجد $\lim_{x \to -1} \sqrt[3]{x^4 - 2x + 4}$

الحل

بالتعويض مباشر

$= \sqrt[3]{1+2+4} = \sqrt[3]{7}$

④ وزارة (٢٠١٤) شتوية

اوجد $\lim_{x \to -1} \sqrt[3]{x^5 - 3x^2 + 5x + 7}$

الحل

بالتعويض مباشر

$= \sqrt[3]{-1-3-5+7} = \sqrt[3]{-2}$

$= -2$

مكتبة الوسام AlWesam

المعلم: ناجح الجمزاوي

⑤ وزارة (٢٠١٤ ، ج) صيفية

جد $\lim_{س \to -٤} \left(\sqrt{٥ - س} + \frac{١}{٤ + س} \right)$

الحل

بالتعويض مباشر

$= \sqrt{٥ - (-٤)} + \frac{١}{٤ + (-٤)}$

$= \sqrt{٩} + \frac{١}{٨ \times ٠}$

$= ٣ + \frac{١}{٠}$

نوحد مقام

$= \frac{٤ + ٢}{٨} = \frac{١}{٨} = \frac{٣ \times ٢}{٨ \times ١}$

⑥ وزارة (٢٠١٥ ، ج) شتوية

اوجد $\lim_{س \to ٥} \sqrt[٣]{٣ - س} + \frac{س + ٥}{س^٢ - ٥س}$

الحل

$= \sqrt[٣]{٣ - ٥} + \frac{٥ + ٥}{٠}$

$= \sqrt[٣]{-٢} + \frac{١٠}{٠}$

$= -٢ + \frac{١٠}{٠}$

⑦ وزارة (٢٠١٥ ، ج) صيفية

اوجد $\lim_{س \to -٢} \left(\frac{س - ٤}{س} + \sqrt{٧ - س} \right)$

الحل

$= \frac{-٢ - ٤}{-٢} + \sqrt{٧ - (-٢)}$

$= \frac{-٦}{-٢} + \sqrt{٩} = ٣ + ٣ = ٦$

⑧ اوزارة (٢٠١٦ ، ج) صيفية

اوجد $\lim_{س \to ٦} \sqrt[٣]{س^٢ - ٣س - ٣} + \frac{س + ٦}{س^٢ + ٥س}$

الحل

$= \sqrt[٣]{٣٦ - ١٨ - ٣} + \frac{٦ + ٦}{(-٦)^٢ - ٦}$

$= \sqrt[٣]{١٥} + \frac{١٢}{٣٦ - ٦}$

$= \sqrt[٣]{١٥} + \frac{١٢}{٣٠}$

مكتبة الوسام AlWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

نهاية الأقترانات المتشعبة

مقدمة

الصورة العامة للأقتران المتشعب

$$\text{ق}(س) = \begin{cases} \text{ه}(س) & س \leq \text{أ} \\ \text{ل}(س) & س > \text{أ} \end{cases}$$

أو

$$\text{ق}(س) = \begin{cases} \text{ه}(س) & س \neq \text{أ} \\ \text{ل}(س) & س = \text{أ} \end{cases}$$

مثال ①

إذا كان $\text{ق}(س) = \begin{cases} س^2 & س \leq 1 \\ 3س + 1 & س > 1 \end{cases}$

أوجد

$\text{ق}(1) = 3 \times 1 + 1 = 1$

نعوض في القاعدة الثانية لأن العدد 1 أصغر من أو يساوي 1

$\text{ق}(3) = (3)^2 = 9$

نعوض في القاعدة الأولى لأن العدد 3 أكبر من العدد 1

مثال ②

$$\text{ق}(س) = \begin{cases} 3س + 1 & س \neq 5 \\ 9 & س = 5 \end{cases}$$

أوجد $\text{ق}(2) = 3 \times 2 + 1 = 7$

$\text{ق}(3) = 3 \times 3 + 1 = 10$

$\text{ق}(5) = 9$

ملاحظة

لرسم الأقتران المتشعب نرسم كل قاعدة على حدة

مثال

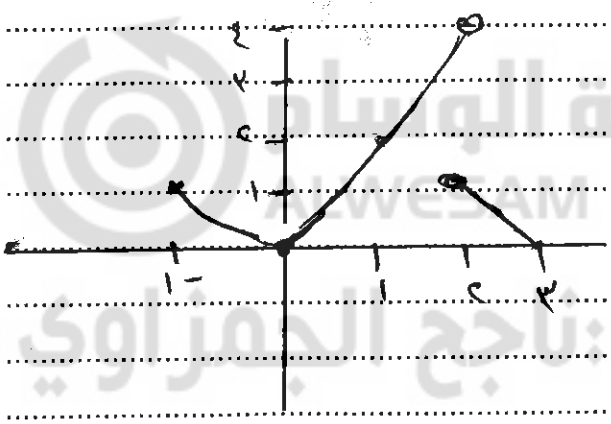
$$\text{ق}(س) = \begin{cases} س^2 - 1 & س < 2 \\ 3 - س & س \geq 2 \end{cases}$$

القاعدة الأولى $\text{ق}(س) = س^2 - 1$

س	-1	0	1	2
ق(س)	0	-1	0	3

القاعدة الثانية $\text{ق}(س) = 3 - س$

س	2	3
ق(س)	1	0



مكتبة الوسام
Alwesam
المعلم: ناجح الجمزاوي

ملاحظة :

① اذا كان $\text{هـ}(س)$ اقترانا متشعب حيث

$\text{هـ}(س) = \begin{cases} \text{قاعدة ①} & س \neq ب \\ \text{قاعدة ②} & س = ب \end{cases}$

لإيجاد النهاية للاقتران $\text{هـ}(س)$ فاننا نعوض قيم س في القاعدة التي تنتمي اليها س :

واذا كانت س نقطة تشعب مثل (ب) فاننا نجد النهاية من اليمين ومن اليسار حول العدد ب كما يلي

① $\text{نها}_{س \to ب^+} \text{هـ}(س)$: نعوض في القاعدة ①

$س \to ب^+ \quad س > ب$

② $\text{نها}_{س \to ب^-} \text{هـ}(س)$: نعوض في القاعدة ②

$س \to ب^- \quad س < ب$

واذا كانت

$\text{نها}_{س \to ب^-} \text{هـ}(س) = \text{نها}_{س \to ب^+} \text{هـ}(س)$

فان النهاية موجودة

② اذا كان $\text{هـ}(س) = \begin{cases} \text{قاعدة ①} & س \neq ب \\ \text{قاعدة ②} & س = ب \end{cases}$

فاننا نجد نهاية اي عدد فاننا نعوض في القاعدة الأولى $س \neq ب$ ولكن عند النهاية من اليمين واليسار فقط نعوض $س \to ب$

مثال ①

$\text{هـ}(س) = \begin{cases} س - ١ & س \leq ٤ \\ ٣س - ٩ & س > ٤ \end{cases}$

اوجد

١) $\text{نها}_{س \to ٢} \text{هـ}(س)$ = نعوض في القاعدة ①

$س \to ٢ \quad = ٢ - ١ = ١$

٢) $\text{نها}_{س \to ٥} \text{هـ}(س)$ = نعوض في القاعدة ②

$س \to ٥ \quad = ٣ \times ٥ - ٩$

$= ١٥ - ٩ = ٦$

③ $\text{نها}_{س \to ٤} \text{هـ}(س)$ (العدد ٤ نقطة تشعب) نجد النهاية من اليمين واليسار

$\text{نها}_{س \to ٤^+} \text{هـ}(س)$ = في القاعدة الثانية

$= ٣ \times ٤ - ٩ = ١٢ - ٩ = ٣$

$\text{نها}_{س \to ٤^-} \text{هـ}(س)$ = في القاعدة الأولى

$= ٤ - ١ = ٣$

$\text{نها}_{س \to ٤^+} \text{هـ}(س) = \text{نها}_{س \to ٤^-} \text{هـ}(س) \Leftarrow \text{نها}_{س \to ٤} \text{هـ}(س) = ٣$

مثال ②

$$\text{ه}(س) = \begin{cases} س^2 + 1 & س \neq 3 \\ 6 & س = 3 \end{cases}$$

اوجد

١) $\text{نها}_{س \to 3} \text{ه}(س) = 3^2 + 1 = 10$

٢) $\text{نها}_{س \to 4} \text{ه}(س) = 4^2 + 1 = 16 + 1 = 17$

٣) $\text{نها}_{س \to -2} \text{ه}(س) = (-2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5$

٤) $\text{ه}(3) = 6$

مثال ③

$$\text{ه}(س) = \begin{cases} س^2 & س \leq 2 \\ 4س & س > 2 \end{cases}$$

اوجد

١) $\text{نها}_{س \to -2} \text{ه}(س) = (-2)^2 = 4$

٢) $\text{نها}_{س \to 3} \text{ه}(س) = \text{نها}_{س \to 3} 4س = 4 \times 3 = 12$

٣) $\text{نها}_{س \to 2} \text{ه}(س)$ عند النهاية من اليمين واليسار

$\text{نها}_{س \to 2} \text{ه}(س) = \text{نها}_{س \to 2^+} 4س = 4 \times 2 = 8$

$\text{نها}_{س \to 2} \text{ه}(س) = \text{نها}_{س \to 2^-} س^2 = (2)^2 = 4$

$\text{نها}_{س \to 2^+} \text{ه}(س) = \text{نها}_{س \to 2^-} \text{ه}(س)$

$\Leftarrow \text{نها}_{س \to 2} \text{ه}(س) = 4$

مثال ④ سؤال (٦) الكتاب ص٢٨

$$\text{اذا كان ه}(س) = \begin{cases} 5س^2 - ل & س < 2 \\ ل س + 2 & س \geq 2 \end{cases}$$

وكانت $\text{نها}_{س \to 2} \text{ه}(س)$ موجودة فما

قيمة الثابت ل ؟

الحل

حتى تكون النهاية موجودة عند $س \to 2$ يجب ان تكون

$\text{نها}_{س \to 2^+} \text{ه}(س) = \text{نها}_{س \to 2^-} \text{ه}(س)$

$\text{نها}_{س \to 2^+} (ل س + 2) = \text{نها}_{س \to 2^-} (5س^2 - ل)$

$ل \times 2 + 2 = 5 \times 2^2 - ل$

$2ل + 2 = 20 - ل$

$3ل = 18 \Leftarrow 2 + ل + ل 2 = 20$

$ل = \frac{18}{3} = 6$

مثال ⑤ سؤال (٤) الكتاب ص٨٢

$$\text{ه}(س) = \begin{cases} س^2 + ٥ & س \geq ٣ \\ ١٧ & ٣ \geq س \geq ٦ \\ ٣س - ١ & س < ٦ \end{cases}$$

ما قيمة

أ) $\text{ها}_{\text{ه}}(س)$
$س \to ٣$

النقطة ٣ نقطة تشعب ندرس النهاية من اليمين ومن اليسار

$\text{ها}_{\text{ه}}(س) = \text{ها}_{١٧} = ١٧$
$س \to ٣^+ \quad س \to ٣^+$

$\text{ها}_{\text{ه}}(س) = \text{ها}_{س^2 + ٥}$
$س \to ٣^- \quad س \to ٣^-$
$= (٣)^2 + ٥ = ٩ + ٥ = ١٤$
$= ١٨ + ٥ = ٢٣$

$\text{ها}_{\text{ه}}(س) \neq \text{ها}_{\text{ه}}(س)$
$س \to ٣^+ \quad س \to ٣^-$

$\Leftarrow \text{ها}_{\text{ه}}(س)$ غير موجودة
$س \to ٣$

ب) $\text{ها}_{\text{ه}}(س)$ العدد ٦ نقطة تشعب
$س \to ٦$ نجد النهاية من اليمين واليسار

$\text{ها}_{\text{ه}}(س) = \text{ها}_{٣س - ١}$
$س \to ٦^+ \quad س \to ٦^+$
$= ٣ \times ٦ - ١ = ١٨ - ١ = ١٧$

$\text{ها}_{\text{ه}}(س) = \text{ها}_{١٧} = ١٧$
$س \to ٦^- \quad س \to ٦^-$

$\Leftarrow \text{ها}_{\text{ه}}(س) = \text{ها}_{\text{ه}}(س)$
$س \to ٦^+ \quad س \to ٦^-$

$\Leftarrow \text{ها}_{\text{ه}}(س) = ١٧$
$س \to ٦$

ج) $\text{ه}(٣) = ١٧$

مثال ⑥

$$\text{ه}(س) = \begin{cases} س^2 - ٣س & س \geq ١ \\ ٣س + ب & س < ١ \end{cases}$$

وكانت $\text{ها}_{\text{ه}}(س) = ٥$ أوجد ٦ ب
$س \to ١$

① $\text{ها}_{\text{ه}}(س) = ٥$
$س \to ١^+$

$\text{ها}_{س^2 - ٣ب} = ٥$
$س \to ١^+$

$\Leftarrow (١)^2 - ٣ب = ٥$

$١ - ٣ب = ٥$

$-٣ب = ٥ - ١$

$-٣ب = ٤$

$\Leftarrow ب = -\frac{٤}{٣}$

تابع الحل ⇐

مركز الوسام AlWessam
الاستاذ: ناجح الجمزاوي

② $\text{هـا}\, ق(س) = ٥$

$س \to ١^{-}$

$\text{هـا}\, ٣س + ب = ٥$

$س \to ١^{-}$

$٣ \times ١ + ب = ٥$

$٣ + ب = ٥ \Leftarrow ب = ٥ - ٣$

$ب = ٢$

مثال ⑦

إذا كان $ق(س) = \begin{cases} ١ - ب & س \to ب \\ ٣س - ٣ & س \to ب \end{cases}$

وكانت $\text{هـا}\, ق(س)$ موجودة فأوجد

$س \to ب$

قيمة الثابت ب ؟

الحل

$\text{هـا}\, ق(س)$ موجودة

$س \to ب$

$\text{هـا}\, ق(س) = \text{هـا}\, ق(س)$

$س \to ب^{+} \quad س \to ب^{-}$

$\text{هـا}\, (٣س - ٣) = \text{هـا}\, (١ - ب)$

$س \to ب^{+} \quad س \to ب^{-}$

$٣ب - ٣ = ١ - ب$

$٣ب \times ب - ٣ = ١ - ب$

$ب^{٢} - ٣ = ١ - ب$

$ب^{٢} - ٣ - ب + ١ = ٠$

$ب^{٢} - ب - ٢ = ٠$ تحلل

$(ب - ٢)(ب + ١) = ٠$

$ب = ٢ \quad ب = -١$

$ب \in \{٢، -١\}$

مثال ⑧ تمارين مراجعة ص٥٥

$ق(س) = \begin{cases} س^{٢} - ١ & س \to ٢ \\ ٥ & س = ٢ \\ \sqrt{س + ٧} & س > ٢ \end{cases}$

أوجد $\text{هـا}\, ق(س)$

$س \to ٢$

الحل

العدد ٢ نقطة تشعب

① $\text{هـا}\, ق(س) = \text{هـا}\, \sqrt{س + ٧}$

$س \to ٢^{+} \quad س \to ٢$

$= \sqrt{٢ + ٧} = \sqrt{٩} = ٣$

② $\text{هـا}\, ق(س) = \text{هـا}\, س^{٢} - ١ = ٢^{٢} - ١$

$س \to ٢^{-} \quad س \to ٢$

$= ٤ - ١ = ٣$

$\Leftarrow \text{هـا}\, ق(س) = \text{هـا}\, ق(س)$

$س \to ٢^{+} \quad س \to ٢^{-}$

$\Leftarrow \text{هـا}\, ق(س) = ٣$

$س \to ٢$

ALEW ESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ⑨

$$د(س) = \begin{cases} س^٣ + ٧س & س \neq ٤ \\ ٥ & س = ٤ \end{cases}$$

اوجد $\lim_{س \to ٤} د(س)$

الحل

$$\lim_{س \to ٤} د(س) = \lim_{س \to ٤} (س^٣ + ٧س)$$

$$= ٤^٣ + ٧(٤) = ٦٤ + ٢٨ = ٩٦$$

مثال ⑩

$$د(س) = \begin{cases} \sqrt{س + ٢} & س > -٢ \\ ٤ - س^٢ & س \leq -٢ \end{cases}$$

جد $\lim_{س \to -٢} د(س)$

الحل

العدد (-٢) نقطة تشعب

① $\lim_{س \to -٢^+} د(س) = \lim_{س \to -٢^+} \sqrt{س + ٢}$

$= \sqrث{٠} = ٠$

② $\lim_{س \to -٢^-} د(س) = \lim_{س \to -٢^-} (٤ - س^٢)$

$= ٤ - (-٢)^٢ = ٤ - ٤ = ٠$

$\therefore \lim_{س \to -٢^+} د(س) = \lim_{س \to -٢^-} د(س) = ٠$

$\therefore \lim_{س \to -٢} د(س) = ٠$

نحدد المجال

$س + ٢ = ٠ \leftarrow س = -٢$

	-٢	
	صفر	غير موجود
	+ + + +	- - - -

$\therefore$ عين العدد (-٢) يقع في المجال

$\therefore \lim_{س \to -٢} د(س) =$ صفر

② $\lim_{س \to -٢^-} د(س) = \lim_{س \to -٢^-} (٤ - س^٢)$

$= ٤ - (-٢)^٢ = ٤ - ٤ = ٠$

$\therefore \lim_{س \to -٢} د(س) = \lim_{س \to -٢} د(س) =$ صفر

$\therefore \lim_{س \to -٢} د(س) =$ صفر

مثال ⑪ سؤال (٥) ص٢٨ الكتاب

جد $\lim_{س \to ٣} د(س)$ حيث

$$د(س) = \begin{cases} س^٢ + ٥ & س \neq ٣ \\ ١٤ & س = ٣ \end{cases}$$

الحل

$\lim_{س \to ٣} د(س) = ٣^٢ + ٥$

$= ٩ + ٢ = ١١$

مكتبة الوسام ALWSAM

الاستاذ ناجح الجمزاوي

أسئلة الوزارة

① (٢٠١٠) صيفية

اذا كان $و(س) = \begin{cases} س^٢ + ٧ & س < ٣ \\ ٥ & س = ٣ \end{cases}$

أوجد $\lim_{س \to ٥} و(س)$ إن وجدت

الحل

$\lim_{س \to ٥} و(س) = ٥^٢ + ٧$

$= ٢٥ + ٧ = ٣٢$

② (٢٠١٠) شتوية

اذا كان $و(س) = \begin{cases} م س^٢ - ٥ & س < ٥ \\ ٢٠ & س = ٥ \\ ٨ س + ٥ & س > ٥ \end{cases}$

عامية الثابت م التي تجعل

$\lim_{س \to ٥} و(س)$ موجودة ؟

الحل

$\lim_{س \to ٥} و(س)$ موجود ٥ يعني ان

$\lim_{س \to ٥^+} و(س) = \lim_{س \to ٥^-} و(س)$

$\lim_{س \to ٥^+} م س^٢ - ٥ = \lim_{س \to ٥^-} ٨ س + ٥$

$م(٥)^٢ - ٥ = ٨ \times ٥ + ٥$

$٢٥ م - ٥ = ٤٠ + ٥$

$٢٥ م = ٤٥ + ٥$

$٢٥ م = ٥٠$

$م = ٢$

③ (٢٠١١) صيفية

اذا كان $و(س) = \begin{cases} ٧ & س < ٠ \\ ٥ & س = ٠ \\ ٣ & س > ٠ \end{cases}$

اوجد $\lim_{س \to ٠} و(س)$

الحل

$س = ٠$ نقطة تشعب

$\lim_{س \to ٠^+} و(س) = ٣$

$\lim_{س \to ٠^-} و(س) = ٧$

$\lim_{س \to ٠} و(س)$ غير موجود

ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

④ (٤،٠،٤) صيغة

اذا كان $f(س) = \begin{cases} س^2 & س \leq 2 \\ م س & س > 2 \end{cases}$

محايدة الثابت م التي تجعل

$\lim_{س \to 2} f(س)$ موجودة

الحل

بما ان النهاية موجودة عند $س = 2$

$\lim_{س \to 2^+} f(س) = \lim_{س \to 2^-} f(س)$

$م \times 2 = (2)^2$

$2م = 4 \Leftarrow م = 2$

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

الدرس الثالث

نهاية خارج قسمة اقترانين

مقدمة

لإيجاد نهاية قسمة اقترانين يتم التعويض المباشر وهناك ثلاث حالات.

(١) الحالة الأولى

اذا كان ناتج التعويض عدد تكون النهاية ذلك العدد.

مثال ①

$$\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٥}{س + ١} = \frac{٣^٢ - ٥}{٣ + ١} = \frac{٩ - ٥}{٤} = \frac{٤}{٤} = ١$$

مثال ②

$$\lim_{س \to ١} \frac{س - ١}{س^٢ - ٤} = \frac{١ - ١}{١ - ٤} = \frac{٠}{-٣} = ٠$$

مثال ③

$$\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ - ٤س + ٣}{٦س^٢} = \frac{٤ - ٨ + ٣}{٢٤} = \frac{-١}{١٢}$$

(٢) الحالة الثانية

اذا كان ناتج التعويض $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$ تكون النهاية غير موجودة

مثال ①

$$\lim_{س \to ١} \frac{س^٢ - ٣}{س - ١} = \frac{١ - ٣}{١ - ١} = \frac{-٢}{٠}$$

غير موجودة

مثال ②

$$\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ + ٣}{س^٢ - ٤} = \frac{٤ + ٣}{٤ - ٤} = \frac{٧}{٠}$$

غير موجودة

مثال ③

$$\lim_{س \to ٠} \frac{١}{س^٢} = \frac{١}{٠} = \frac{١}{٠}$$

غير موجودة

مكتبة الوسام AlWesam
الوسام: ناجح الجمزاوي

(٣) الحالة الثالثة (مرحة)

اذا كان ناتج التعويض = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

فهناك حيلة وحل هذه المشكلة باحد الطرق التالية :-

١- التحليل :-

وتضمن هذه الطريقة تحليل البسط أو تحليل المقام الى العوامل الأولية باستخدام

١- الفرق بين مربعين

$س^٢ - ص^٢ = (س - ص)(س + ص)$

٢- اخراج العامل المشترك وتستخدم اذا لم يوجد في كثير الحدود حد ثابت

٣- تحليل العبارة التربيعية باستخدام الأقواس

٤- الفرق بين مكعبين

$س^٣ - ص^٣ = (س - ص)(س^٢ + ص س + ص^٢)$

٥- مجموع مكعبين

$س^٣ + ص^٣ = (س + ص)(س^٢ - ص س + ص^٢)$

ملاحظة هامة

اذا كان ناتج التعويض = $\frac{٠}{٠}$

حلل ← اختصر ← عوض

أمثلة على التحليل :-

مثال ①

$\lim_{س \to ٠} \frac{س^٢ - ٢س}{٣س}$ ها التعويض = $\frac{٠}{٠}$

← التحليل ← نخرج من البسط س عامل مشترك

$= \lim_{س \to ٠} \frac{س(س - ٢)}{٣س}$ ها كل نختصر

$= \lim_{س \to ٠} \frac{س - ٢}{٣}$ ها نعوض

$= \frac{٠ - ٢}{٣} = -\frac{٢}{٣}$

مكتبة الوسام AlWesam

المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ②

$\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣}$ $= \frac{٣^٢ - ٩}{٣ - ٣} = \frac{٠}{٠}$

التحليل

$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{س - ٣}$ نختصر

$= \lim_{س \to ٣} س + ٣$ نعوض

$= ٣ + ٣ = ٦$

مثال ③

$\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ - س - ٢}{٢ - س}$

الحل

التعويض $= \frac{٢^٢ - ٢ - ٢}{٢ - ٢} = \frac{٠}{٠}$

التحليل

$= \lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(س + ١)}{-(س - ٢)}$ ①-

$= \lim_{س \to ٢} -١ (س + ١)$

$= -١ (٢ + ١) = -١ \times ٣ = -٣$

ملاحظه

عند اختصار $\frac{س - ٢}{٢ - س}$

يكون الناتج $= -١$

بشكل عام $\frac{س - م}{م - س} = -١$

مثال (٤)

اوجد $\lim_{س \to ٠} \frac{س^٤ + ٣س^٢}{س^٣ - ٤س^٢}$

الحل

التعويض $= \frac{٠^٤ + ٣(٠)^٢}{٠^٣ - ٤(٠)^٢} = \frac{٠}{٠}$

التحليل اخراج $س^٢$ عامل مشترك

$= \lim_{س \to ٠} \frac{س^٢ (س^٢ + ٣)}{س^٢ (س - ٤)}$ نختصر

$= \lim_{س \to ٠} \frac{س^٢ + ٣}{س - ٤}$ نعوض

$= \frac{٠^٢ + ٣}{٠ - ٤} = -\frac{٣}{٤}$

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (٥)

$$\text{نهـا}_{س\to -1} \frac{س+1}{س^3-س}$$

الحل

التعويض $= \frac{-1+1}{-1^3-(-1)} = \frac{0}{0}$

التحليل

$$\text{نهـا}_{س\to -1} \frac{س+1}{س(س^2-1)}$$

$$= \text{نهـا}_{س\to -1} \frac{س+1}{س(س-1)(س+1)}$$ مختصر

$$= \text{نهـا}_{س\to -1} \frac{1}{س(س-1)}$$

$$= \frac{1}{-1(-1-1)} = \frac{1}{-1\times -2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

مثال (٦)

$$\text{نهـا}_{س\to 2} \frac{س^3-8}{س^2-س}$$

الحل

التعويض $= \frac{2^3-8}{2^2-2} = \frac{8-8}{4-2} = \frac{0}{2}$

التحليل

$$\text{نهـا}_{س\to 2} \frac{(س-2)(س^2+2س+4)}{س(س-2)}$$ مختصر

$$= \text{نهـا}_{س\to 2} \frac{س^2+2س+4}{س}$$

$$= \frac{2^2+2\times 2+4}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

مثال (٧)

$$\text{نهـا}_{س\to 1} \frac{س^3-1}{س^2-1}$$ التعويض $= \frac{0}{0}$

$$= \text{نهـا}_{س\to 1} \frac{(س-1)(س^2+س+1)}{(س-1)(س+1)}$$

$$= \text{نهـا}_{س\to 1} \frac{س^2+س+1}{س+1}$$

$$= \frac{1^2+1+1}{1+1} = \frac{3}{2}$$

مكتبة الوسام AlWesam

الاستاذ: ناجح الجمزاوي

مثال (٨)

اوجد $\lim_{س \to -٢} \frac{س^٣ + ٨}{س^٢ - ٤}$

الحل

التعويض = $\frac{٠}{٠}$

التحليل

$= \lim_{س \to -٢} \frac{(س+٢)(س^٢ - ٢س + ٤)}{(س-٢)(س+٢)}$

$= \lim_{س \to -٢} \frac{س^٢ - ٢س + ٤}{س - ٢}$

$= \frac{(-٢)^٢ - ٢(-٢) + ٤}{-٢ - ٢} = \frac{٤ + ٤ + ٤}{-٤} = \frac{١٢}{-٤}$

$= -٣$

مثال (٩)

$\lim_{س \to -٤} \frac{س^٣ + س^٢ - ١٢س}{س^٢ + ٨س + ٨}$

الحل

التعويض = $\frac{٠}{٠}$

التحليل

$= \lim_{س \to -٤} \frac{س(س^٢ + س - ١٢)}{س(س+٤)(س+٤)}$

$= \lim_{س \to -٤} \frac{(س+٤)(س-٣)}{(س+٤)}$

$= \frac{-٤(-٤-٣)}{٢} = \frac{-٤ \times -٧}{٢} = \frac{٢٨}{٢} = ١٤$

مثال (١٠)

اوجد $\lim_{س \to ٥} \frac{(س-١)^٢ - ١٦}{س - ٥}$

الحل

التعويض = $\frac{صفر}{صفر}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{(س-١-٤)(س-١+٤)}{س - ٥}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{(س-٥)(س+٣)}{س - ٥}$

$= \lim_{س \to ٥} س + ٣$

$= ٥ + ٣$

$= ٨$

المعلم ناجح الجمزاوي

تمارين ومسائل الكتاب

① تدريب (١) ص ٣١

ما قيمة كل مما يأتي

١) $\lim_{س \to -١} \frac{٣س - ٤}{س^٢ + س - ٣}$

التعويض $= \frac{٣ \times -١ - ٤}{(-١)^٢ + -١ - ٣} = \frac{-٣ - ٤}{١ - ١ - ٣} = \frac{-٧}{-٣} = \frac{٧}{٣}$

٢) $\lim_{س \to ٣} \frac{س - ٣}{س^٢ - ١}$

التعويض $= \frac{٣ - ٣}{(٣)^٢ - ١} = \frac{صفر}{٨ - ٤}$

$=$ صفر

تدريب (٢) ص ٣١

ما قيمة $\lim_{س \to ٢} \frac{(٢س - ٥)^٢ - ١٦}{س - ٢}$

الحل

التعويض $= \frac{(٢ \times ٢ - ٥)^٢ - ١٦}{٢ - ٢}$

$= \frac{(٤ - ٥)^٢ - ١٦}{٤ - ٤} = \frac{(-١)^٢ - ١٦}{٥ -} = \frac{١ - ١٦}{٥ -} = \frac{١٥ -}{٥ -} = ٣+$

تدريب (٣) ص ٣٤

جد قيمة

١) $\lim_{س \to ١} \frac{س^٢ - ١}{س - ١}$

الحل

التعويض $= \frac{١ - ١}{١ - ١} = \frac{صفر}{صفر}$

التحليل $= \lim_{س \to ١} \frac{(س - ١)(س + ١)}{س - ١}$

$= \lim_{س \to ١} س + ١ = ١ + ١$

$= ٢$

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

ج) $\lim_{س \to -٣} \frac{س^٢ - ٩}{س^٣ + ٣س^٢ + ٩}$

الحل

١ التعويض $= \frac{(-٣)^٢ - ٩}{(-٣)^٣ + ٣(-٣)^٢ + ٩} = \frac{٩ - ٩}{-٢٧ + ٢٧ + ٩} = \frac{صفر}{صفر}$

التحليل

$= \lim_{س \to -٣} \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{(س + ٣)(س^٢ + ٣)}$

$= \lim_{س \to -٣} \frac{س - ٣}{س^٢ + ٣}$

$= \frac{-٣ - ٣}{٩ + ٣} = \frac{-٦}{١٢} = -\frac{١}{٢}$

ب) $\lim_{ص \to ١} \frac{٢ص^٢}{ص^٢ - ص + ٥}$

$= \frac{٢(١)^٢}{١^٢ - ١ + ٥} = \frac{٢}{٥}$

ح) $\lim_{ع \to ٣} \frac{ع^٢ - ٦}{ع^٢ + ٣ع + ٣}$

$= \frac{٣^٢ - ٦}{٣^٢ + ٣ \times ٣ + ٣} = \frac{٩ - ٦}{٩ + ٩ + ٣} = \frac{٣}{٢١}$

س٣ صفحة ٣٦

جد قيمة كل من النهايات الآتية

م) $\lim_{س \to -٤} \frac{س^٢ + ٣س - ٤}{س + ٤}$

الحل

١ التعويض $= \frac{(-٤)^٢ + ٣(-٤) - ٤}{-٤ + ٤} = \frac{١٦ - ١٢ - ٤}{٠} = \frac{صفر}{صفر}$

التحليل

$= \lim_{س \to -٤} \frac{(س + ٤)(س - ١)}{س + ٤}$

$= -٤ - ١ = -٥$

س٢ صفحة ٣٦

جد نهاية كل من الأقترانات الآتية عندما يقترب المتغير منها من أحد الأعداد المذكورة أزاء كل منها

م) $\lim_{س \to -٤} \frac{س^٢ + ٣س - ٤}{س + ٤}$

$= \frac{(-٤)^٢ + ٣(-٤) - ٤}{-٤ + ٤}$

$= \frac{١٦ - ١٢ - ٤}{٨} = \frac{٠}{٨} = ٠$

مركز الوسام AlWesam
المعلم ناجح الجمزاوي

ب) نها $\frac{٣س - ١٢}{س^{٢} - ١٦}$ ، $س \to ٤$

التعويض $= \frac{٣ \times ٤ - ١٢}{٤^{٢} - ١٦} = \frac{١٢ - ١٢}{١٦ - ١٦} = \frac{٠}{٠}$

التحليل نها $\frac{٣(س - ٤)}{(س - ٤)(س + ٤)}$ ، $س \to ٤$

$= نها \frac{٣}{س + ٤}$ ، $س \to ٤$ $= \frac{٣}{٤ + ٤} = \frac{٣}{٨}$

هـ) نها $\frac{س^{٤} + ٣س^{٢}}{س^{٣} - ٤س^{٢}}$ ، $س \to ٠$

التعويض $= \frac{٠}{٠}$

التحليل

نها $\frac{س^{٢}(س^{٢} + ٣)}{س^{٢}(س - ٤)}$ ، $س \to ٠$

$= \frac{٠ + ٣}{٠ - ٤} = \frac{٣}{-٤}$

س٤ صـ ٣٦

اذا كان $ه(س) = س^{٣}$

فجد نها $\frac{ه(س) - ه(٢)}{س - ٢}$ ، $س \to ٢$

الحل

$= نها \frac{س^{٣} - ٢^{٣}}{س - ٢}$ ، $س \to ٢$

التعويض $= \frac{٠}{٠}$

التحليل $= نها \frac{(س - ٢)(س^{٢} + ٢س + ٤)}{س - ٢}$ ، $س \to ٢$

$= نها (س^{٢} + ٢س + ٤)$ ، $س \to ٢$

$= ٤ + ٤ + ٤ = ١٢$

س٤ تمارين مراجعة صـ ٥٤

ب) نها $\frac{س + ٩}{س^{٢} - ١}$ ، $س \to ٢$ $= \frac{٢ + ٩}{٢^{٢} - ١} = \frac{١١}{٣}$

هـ) نها $\frac{٣ - س}{س^{٢} - ٢س - ٣}$ ، $س \to ٣$

التعويض $= \frac{٣ - ٣}{٣^{٢} - ٢ \times ٣ - ٣} = \frac{٠}{٠}$

نها $\frac{-(س - ٣)}{(س - ٣)(س - ١)}$ ، $س \to ٣$

$= \frac{-١}{٣ - ١} = \frac{-١}{٢}$

أسئلة الوزارة

① (٢٠٠٨) شتوية

$هـا \quad ٣س^٢ - ٦س$

$س \to ٢$

الحل

$\text{التعويض} = ٣(٢)^٢ - ٦(٢) = ٠$

$٢ - ٢$

التحليل

$هـا \quad \frac{٣س(س-٢)}{س-٢} = ٣(٢) = ٦$

$س \to ٢$

② (٢٠٠٩) شتوية

$جد \quad هـا \quad \frac{س^٢ - ٥س + ٦}{س - ٢}$

$س \to ٢$

الحل

$\text{التعويض} = \frac{٢^٢ - ٥(٢) + ٦}{٢ - ٢} = ٠$

التحليل

$هـا \quad \frac{(س-٣)(س-٢)}{س-٢}$

$س \to ٢$

$= هـا \quad س - ٣ = ٢ - ٣$

$س \to ٢$

$= -١$

③ (٢٠١٠) شتوية

$جد \quad هـا \quad \frac{س^٢ - ٣س + ٢}{س^٢ - ٢س}$

$س \to ٢$

الحل

$\text{التعويض} = \frac{٢^٢ - ٣(٢) + ٢}{٢^٢ - ٢(٢)} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

التحليل

$هـا \quad \frac{(س-٢)(س-١)}{س(س-٢)}$

$س \to ٢$

$= هـا \quad \frac{س-١}{س} = \frac{٢-١}{٢} = \frac{١}{٢}$

$س \to ٢$

④ (٢٠١١) شتوية

$جد \quad هـا \quad \frac{س^٣ + ٥س^٢ + ٦س}{س^٢ - ٤}$

$س \to -٢$

الحل

$\text{التعويض} = \frac{(-٢)^٣ + ٥(-٢)^٢ + ٦(-٢)}{(-٢)^٢ - ٤} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

التحليل

$هـا \quad \frac{س(س^٢ + ٥س + ٦)}{(س-٢)(س+٢)}$

$س \to -٢$

يتبع الحل

$= \text{هـا}_{س \to -٢} \frac{س(س+٣)(س+٢)}{(س-٢)(س+٢)}$

$= \frac{-٢(-٢+٣)}{-٢-٢} = \frac{-٢ \times ١}{-٤}$

$= \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

⑤ (٢٠١٤) صيفية

اوجد $\text{هـا}_{س \to ٥} \frac{س^٢ - ٢٥}{٣س^٢ - ١٥س}$

الحل

التعويض $= \frac{٥^٢ - ٢٥}{٣ \times ٥^٢ - ١٥ \times ٥} = \frac{٢٥-٢٥}{٧٥-٧٥} = \frac{٠}{٠}$

التحليل

$\text{هـا}_{س \to ٥} \frac{(س-٥)(س+٥)}{٣س(س-٥)}$

$= \text{هـا}_{س \to ٥} \frac{س+٥}{٣س}$

$= \frac{٥+٥}{٣ \times ٥} = \frac{١٠}{١٥} = \frac{٢}{٣}$

⑥ (٢٠١٣) شتوية

اوجد $\text{هـا}_{س \to ١} \frac{س^٢ - ٢س}{س^٢ + س - ٢}$

الحل

التعويض $= \frac{١^٢ - ٢ \times ١}{١+١-٢} = \frac{١-٢}{٠} = \frac{-١}{٠}$

التحليل

$\text{هـا}_{س \to ١} \frac{س(س-٢)}{(س+٢)(س-١)}$

$= \frac{-١}{٢} = \frac{-١}{٢}$

⑦ (٢٠١٣) صيفية

$\text{هـا}_{س \to -٢} \frac{٣س^٢ - ٦س}{س+٢}$

التعويض $= \frac{٠}{٠}$

التحليل

$\text{هـا}_{س \to -٢} \frac{٣س(س-٢)}{س+٢}$

$= ٣ \times -٢ = -٦$

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم ناجح الجمزاوي

⑧ (٢٠١٤) صيفية

$$\text{قا}(س) = \frac{٦ - ٣س}{س^{٢} + ٣س - ١٠}$$

اوجد $\lim_{س \to ٢}$ قا(س)

الحل

التعويض $= \frac{٦ - ٣×٢}{٢^{٢} + ٣×٢ - ١٠} = \frac{٠}{٠}$

$= \frac{(١)}{(س + ٥)(س - ٢)}$ ها $٣(٢ - س)$

$س \to ٢$

$= \frac{٣-}{٥ + ٢} = \frac{٣-}{٧}$

⑨ (٢٠١٥) شتوية

$$\text{ها} \frac{س^{٢} - ٣س - ٤}{١٢ - ٣س}$$

$س \to ٤$

التعويض $= \frac{٤^{٢} - ٤×٣ - ٤}{١٢ - ٣×٤} = \frac{صفر}{صفر}$

التحليل

$= \frac{(١)}{٣(٤ - س)}$ ها $(س - ٤)(س + ١)$

$س \to ٤$

$= \frac{-(٤ + ١)}{٣} = \frac{-٥}{٣}$

⑩ (٢٠١٦) شتوية

$$\text{ها} \left(\frac{س^{٢} + ١٠س + ٢٥}{س^{٢} + ٢٥} + س \right)$$

$س \to -٥$

الحل

التعويض $= \left(\frac{(-٥)^{٢} + ١٠×(-٥) + ٢٥}{٢٥ + ٢٥} + (-٥) \right)$

$= \left(\frac{١٠ + ١٠-}{٢٥ + ٢٥} - ٥ \right) = ٠ - ٥ = -٥$

⑪ (٢٠١٦) صيفية

$$\text{ها} \frac{س^{٢} - ٢س - ٣}{٤س - ١٢}$$

$س \to ٣$

الحل

التعويض $= \frac{٣^{٢} - ٢×٣ - ٣}{٤×٣ - ١٢} = \frac{٠}{٠}$

التحليل

$= \frac{(١)}{٤(س - ٣)}$ ها $(س - ٣)(س + ١)$

$س \to ٣$

$= \frac{١ + ٣}{٤} = \frac{٤}{٤} = ١$

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

الضرب بالمرافق

مقدمة

المقدار	المرافق	حاصل الضرب
$س - ٢$	$س + ٢$	$س^٢ - ٤$
$\sqrt{س} - ٢$	$\sqrt{س} + ٢$	$س - ٤$
$٢\sqrt{س} - ٢$	$٢\sqrt{س} + ٢$	$٤س - ٤$
$٢\sqrt{س} - ٢\sqrt{ص}$	$٢\sqrt{س} + ٢\sqrt{ص}$	$٤س - ٤ص$
$٢\sqrt{س} + ٢\sqrt{ص}$	$٢\sqrt{س} - ٢\sqrt{ص}$	$٤س - ٤ص$

امثلة

$س - ٤$ مرافقه $س + ٤$

حاصل الضرب $= س^٢ - ١٦$

$٢\sqrt{س} - ٣$ مرافقه $٢\sqrt{س} + ٣$

حاصل الضرب $= ٤س - ٩$

$٢\sqrt{س} - ٣\sqrt{٢}$ مرافقه $٢\sqrt{س} + ٣\sqrt{٢}$

حاصل الضرب $= ٤س - ١٨$

ملاحظه

يتم ضرب كل من البسط والمقام بالمرافق دائماً

يصبح المقدار المضروب في مرافقه لبادي (مربع الأول - مربع الثاني)

والمقدار الآخر سواء في البسط أو المقام يبقى كما هو

مثال

$$\frac{\sqrt{س} - ٤}{س - ١٦} \times \frac{\sqrt{س} + ٤}{\sqrt{س} + ٤} = \frac{س - ١٦}{(س - ١٦)(\sqrt{س} + ٤)} = \frac{١}{\sqrt{س} + ٤}$$

المرافق

مثال ①

اوجد $\lim_{س \to ٩} \frac{٢\sqrt{س} - ٣}{س - ٩}$

الحل

$$\lim_{س \to ٩} \frac{٢\sqrt{س} - ٣}{س - ٩} = \frac{٢\sqrt{٩} - ٣}{٩ - ٩} = \frac{٣}{٠}$$

الضرب بالمرافق

$$\frac{٢\sqrt{س} - ٣}{س - ٩} \times \frac{٢\sqrt{س} + ٣}{٢\sqrt{س} + ٣}$$

يتبع

$\Leftarrow$ هنا $\frac{س-٩}{س \to ٩} \frac{}{(\sqrt{س}-٣)(\sqrt{س}+٣)}$

$= \frac{١}{\sqrt{٩}+٣} = \frac{١}{٣+٣} = \frac{١}{٦}$

مثال ②

اوجد $\lim_{س \to ٧} \frac{\sqrt{س+٩}-٤}{س-٧}$

التعويض $= \frac{\sqrt{٧+٩}-٤}{٧-٧} = \frac{٤-٤}{٧-٧} = \frac{٠}{٠}$

الضرب بالمرافق

$\lim_{س \to ٧} \frac{\sqrt{س+٩}-٤}{س-٧} \times \frac{\sqrt{س+٩}+٤}{\sqrt{س+٩}+٤}$

$= \frac{(س+٩)-١٦}{(س-٧)(\sqrt{س+٩}+٤)}$

$= \frac{س-٩}{(س-٧)(\sqrt{س+٩}+٤)}$

$= \frac{١}{\sqrt{س+٩}+٤}$ ②

$= \frac{١}{\sqrt{٧+٩}+٤} = \frac{١}{٤+٤} = \frac{١}{٨}$

مثال ③

اوجد $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt[٣]{٣س-٦}}{س-٢}$

الحل

التعويض $= \frac{\sqrt[٣]{٦-٦}}{٢-٢} = \frac{٠}{٠}$

الضرب بالمرافق

$\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt[٣]{٣س-٦}}{س-٢} \times \frac{\sqrt[٣]{(٣س-٦)^{٢}}+\sqrt[٣]{٣س-٦}+٦}{\sqrt[٣]{(٣س-٦)^{٢}}+\sqrt[٣]{٣س-٦}+٦}$

$= \frac{(٣س-٦)-٣٦}{(س-٢)(\sqrt[٣]{(٣س-٦)^{٢}}+\sqrt[٣]{٣س-٦}+٦)}$

$= \frac{١٨س-٣٦}{(س-٢)(\sqrt[٣]{(٣س-٦)^{٢}}+\sqrt[٣]{٣س-٦}+٦)}$

$= \frac{١٨(س-٢)}{(س-٢)(\sqrt[٣]{(٣س-٦)^{٢}}+\sqrt[٣]{٣س-٦}+٦)}$

$= \frac{١٨}{٦+٦+٦} = \frac{١٨}{١٢} = \frac{٣}{٢}$

مكتبة الوسام ACWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

مثال ④

اوجد $\lim_{س \to ٥} \frac{٤ - \sqrt{٧ س^٢ - ٩}}{س^٢ - ٦ س + ٥}$

الحل

$= \frac{٠}{٠}$ التعويض

الضرب بالمرافق

$= \lim_{س \to ٥} \frac{٤ - \sqrt{٧ س^٢ - ٩}}{س^٢ - ٦ س + ٥} \times \frac{٤ + \sqrt{٧ س^٢ - ٩}}{٤ + \sqrt{٧ س^٢ - ٩}}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{١٦ - (٧ س^٢ - ٩)}{(س^٢ - ٦ س + ٥)(٤ + \sqrt{٧ س^٢ - ٩})}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{١٦ - ٧ س^٢ + ٩}{(س^٢ - ٦ س + ٥)(٤ + \sqrt{٧ س^٢ - ٩})}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{٢٥ - ٧ س^٢}{(س^٢ - ٦ س + ٥) \times (٤ + ٤)}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{(٥ - س)(٥ + س)}{(س - ٥)(س - ١) \times ٨}$

$= \frac{-(٥ + ٥)}{٨ \times (١ - ٥)} = \frac{-١٠}{-٣٢} = \frac{٥}{١٦}$

مثال ⑤

اوجد $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{٧ س - ١} - ٢}{\sqrt{٧ س + ٣} - ٢}$

الحل

$= \frac{٠}{٠}$ التعويض

ضدا الضرب بمرافق البسط ومرافق المقام

$= \lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{٧ س - ١} - ٢}{\sqrt{٧ س + ٣} - ٢} \times \frac{\sqrt{٧ س - ١} + ٢}{\sqrt{٧ س - ١} + ٢} \times \frac{\sqrt{٧ س + ٣} + ٢}{\sqrt{٧ س + ٣} + ٢}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{(س - ١)(\sqrt{٧ س + ٣} + ٢)}{(س + ٣ - ٤)(٧ س + ١)}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{(س - ١)(\sqrt{٧ س + ٣} + ٢)}{(س - ١)(٧ س + ١)}$

$= \frac{\sqrt{٧ + ٣} + ٢}{٧ + ١} = \frac{٤ + ٢}{٨} = \frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤}$

ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ⑥

اوجدها $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{٧ - س} - \sqrt{٧ س}}{س - ١}$

الحل

التعويض = صفر / صفر

$= \lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{٧ - س} - \sqrt{٧ س}}{س - ١} \times \frac{\sqrt{٧ - س} + \sqrt{٧ س}}{\sqrt{٧ - س} + \sqrt{٧ س}}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{٧ - س - ٧ س}{(س - ١)(\sqrt{٧ - س} + \sqrt{٧ س})}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{٧ - ٨ س}{(س - ١)(\sqrt{٧ - س} + \sqrt{٧ س})}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{-٨(س - ١)}{(س - ١)(\sqrt{٧ - س} + \sqrt{٧ س})}$

$= \frac{-٨}{\sqrt{٧ - ١} + \sqrt{٧}}$

$= \frac{-٨}{٢ + ٢١} = \frac{-٨}{٨} = -١$

تمارين ومسائل الكتاب

تدريب (٤) ص ٣٤

اوجد $\lim_{س \to ٨} \frac{س - ١٦}{\sqrt{١ + س} - ٣}$ ما امكن ذلك

الحل

التعويض = صفر / صفر

$= \lim_{س \to ٨} \frac{س - ١٦}{\sqrt{١ + س} - ٣} \times \frac{\sqrt{١ + س} + ٣}{\sqrt{١ + س} + ٣}$

$= \lim_{س \to ٨} \frac{(س - ١٦)(\sqrt{١ + س} + ٣)}{(١ + س) - ٩}$

$= \lim_{س \to ٨} \frac{(س - ١٦)(\sqrt{١ + س} + ٣)}{س - ٨}$

$= \lim_{س \to ٨} (س + ١٦)(\sqrt{١ + س} + ٣)$

$= ٢٤ (\sqrt{١ + ٨} + ٣)$

$= ٢٤ (٣ + ٣) = ٢٤ \times ٦$

$= ١٢$

مكتبة الوسام ALWESAM

الوسام: ناجح الجمزاوي

س٢ تمارين مراجعة ص٥٤

هـ) $\lim_{س \to ٠} \frac{س^٢}{\sqrt{س^٢+٤}-٢}$

الحل

المقدار $= \sqrt{٠+٤}-٢ = ٠$

الضرب بالمرافق

$\lim_{س \to ٠} \frac{س^٢}{\sqrt{س^٢+٤}-٢} \times \frac{\sqrt{س^٢+٤}+٢}{\sqrt{س^٢+٤}+٢}$

$\lim_{س \to ٠} \frac{س^٢(\sqrt{س^٢+٤}+٢)}{س^٢+٤-٤}$

$\lim_{س \to ٠} \frac{س^٢(\sqrt{س^٢+٤}+٢)}{س^٢}$

$= \sqrt{٠+٤}+٢$

$= ٢+٢ = ٤$

س٢ اختبار ذاتي ص٥٧

ح) $\lim_{هـ \to ٠} \frac{\sqrt{س+هـ}-\sqrt{س}}{هـ}$

الحل

المقدار $= ٠$

$\lim_{هـ \to ٠} \frac{\sqrt{س+هـ}-\sqrt{س}}{هـ} \times \frac{\sqrt{س+هـ}+\sqrt{س}}{\sqrt{س+هـ}+\sqrt{س}}$

$\lim_{هـ \to ٠} \frac{س+هـ-س}{هـ(\sqrt{س+هـ}+\sqrt{س})}$

$\lim_{هـ \to ٠} \frac{١}{\sqrt{س+هـ}+\sqrt{س}}$

$= \frac{١}{\sqrt{س}+\sqrt{س}} = \frac{١}{٢\sqrt{س}}$

مكتبة الوسام AlWesam

المعلم: ناجح الجمزاوي

س ٣ ص ٣٦

د) هـا $\frac{س-٩}{\sqrt{س}-٣}$

س ← ٩

الحل :- التعويض = $\frac{٠}{٠}$

هـا $\frac{س-٩}{\sqrt{س}-٣} \times \frac{\sqrt{س}+٣}{\sqrt{س}+٣}$

س ← ٩

هـا $\frac{(س-٩)(\sqrt{س}+٣)}{س-٩}$

س ← ٩

$= \sqrt{٩}+٣ = ٣+٣ = ٦$

و) هـا $\frac{ج-\sqrt{س+١}}{س-٣}$

س ← ٣

الحل : التعويض = $\frac{صفر}{صفر}$

هـا $\frac{ج-\sqrt{س+١}}{س-٣} \times \frac{ج+\sqrt{س+١}}{ج+\sqrt{س+١}}$

س ← ٣

هـا $\frac{ج^{٢}-(س+١)}{(س-٣)(ج+\sqrt{س+١})}$

س ← ٣

هـا $\frac{٤-س-١}{(س-٣)(ج+\sqrt{س+١})}$

س ← ٣

هـا $\frac{٣-س}{(س-٣)(ج+\sqrt{س+١})}$

س ← ٣

هـا $\frac{-١}{ج+\sqrt{س+١}}$

س ← ٣

$= \frac{-١}{٤}$

أسئلة الوزارة

① (٢٠٠٨) شتوية

جد هـا $\frac{س-٨}{\sqrt{س+١}-٣}$

س ← ٨

الحل التعويض = $\frac{صفر}{صفر}$

هـا $\frac{س-٨}{\sqrt{س+١}-٣} \times \frac{\sqrt{س+١}+٣}{\sqrt{س+١}+٣}$

س ← ٨

هـا $\frac{(س-٨)(\sqrt{س+١}+٣)}{س-٩}$

س ← ٨

هـا $\frac{(س-٨)(\sqrt{س+١}+٣)}{(س-٨)}$

س ← ٨

$= \sqrt{٩}+٣$

$= ٣+٣$

$= ٦$

المعلم ناجح الجمزاوي

② (٢٠٠٨) صيفية

جد $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{١+٢س} - ١}{س}$

الحل

التعويض = $\frac{صفر}{صفر}$

$\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{١+٢س} - ١}{س} \times \frac{\sqrt{١+٢س} + ١}{\sqrt{١+٢س} + ١}$

$\lim_{س \to ٠} \frac{١+٢س - ١}{س(\sqrt{١+٢س} + ١)}$

$= \frac{١}{\sqrt{١+٠} + ١} = \frac{١}{١+١} = \frac{١}{٢}$

③ (٢٠٠٩) صيفية

جد $\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{١+٢س} - ٢}{س - ٣}$

الحل

التعويض = $\frac{صفر}{صفر}$

$\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{١+٢س} - ٢}{س - ٣} \times \frac{\sqrt{١+٢س} + ٢}{\sqrt{١+٢س} + ٢}$

$\lim_{س \to ٣} \frac{١+٢س - ٤}{(س-٣)(\sqrt{١+٢س} + ٢)}$

$\lim_{س \to ٣} \frac{٢(س-٣)}{(س-٣)(\sqrt{١+٢س} + ٢)}$

$= \frac{٢}{\sqrt{٧} + ٢}$

④ (٢٠١٠) صيفية

جد $\lim_{س \to ٤} \frac{س - ٤}{\sqrt{س} - ٢}$

الحل

التعويض = $\frac{صفر}{صفر}$

$\lim_{س \to ٤} \frac{س - ٤}{\sqrt{س} - ٢} \times \frac{\sqrt{س} + ٢}{\sqrt{س} + ٢}$

$\lim_{س \to ٤} \frac{(س-٤)(\sqrt{س} + ٢)}{س - ٤}$

$= \sqrt{٤} + ٢$

$= ٢ + ٢ = ٤$

$\lim_{س \to ٣} \frac{س - ١ - ٣}{(س-٣)(\sqrt{١+٢س} + ٢)}$

$\lim_{س \to ٣} \frac{س - ٣}{(س-٣)(\sqrt{١+٢س} + ٢)}$

$= \frac{١}{\sqrt{١+٦} + ٢} = \frac{١}{٢+٢} = \frac{١}{٤}$

مكتبة الوسام AlWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

⑤ (٢٠١٢) شتوية

$$\text{نهـا}_{س\to ٥} \frac{\sqrt{٣س+١}-٤}{س^{٢}-٢٥}$$

الحل

$$\text{النهاية} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

$$\text{نهـا}_{س\to ٥} \frac{\sqrt{٣س+١}-٤}{س^{٢}-٢٥} \times \frac{\sqrt{٣س+١}+٤}{\sqrt{٣س+١}+٤}$$

$$\text{نهـا}_{س\to ٥} \frac{٣س+١-١٦}{(س^{٢}-٢٥)(\sqrt{٣س+١}+٤)}$$

$$\text{نهـا}_{س\to ٥} \frac{٣(س-٥)}{(س-٥)(س+٥)(\sqrt{٣س+١}+٤)}$$

$$= \frac{٣}{٨(٥+٥)} = \frac{٣}{٨٠}$$

⑥ (٢٠١٣) صيفية

$$\text{نهـا}_{س\to ١} \frac{\sqrt{٣س+١}-٢}{س-١}$$

$$\text{النهاية} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

$$\text{نهـا}_{س\to ١} \frac{\sqrt{٣س+١}-٢}{س-١} \times \frac{\sqrt{٣س+١}+٢}{\sqrt{٣س+١}+٢}$$

$$\text{نهـا}_{س\to ١} \frac{٣س+١-٤}{(س-١)(\sqrt{٣س+١}+٢)}$$

$$\text{نهـا}_{س\to ١} \frac{٣(س-١)}{(س-١)(\sqrt{٣س+١}+٢)}$$

$$= \frac{٣}{\sqrt{٣+١}+٢} = \frac{٣}{٢+٢} = \frac{٣}{٤}$$

⑦ (٢٠١٤) صيفية

$$\text{نهـا}_{س\to ٣} \frac{س-٣}{\sqrt{س+١}-٢}$$

$$\text{النهاية} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

$$\text{نهـا}_{س\to ٣} \frac{س-٣}{\sqrt{س+١}-٢} \times \frac{\sqrt{س+١}+٢}{\sqrt{س+١}+٢}$$

$$\text{نهـا}_{س\to ٣} \frac{(س-٣)(\sqrt{س+١}+٢)}{س+١-٤}$$

$$\text{نهـا}_{س\to ٣} \frac{(س-٣)(\sqrt{س+١}+٢)}{س-٣}$$

$$= \sqrt{٣+١}+٢ = ٢+٢ = ٤$$

المعلم ناجح الجمزاوي

⑧ (٢٠١٦) شتوية

$$\text{نهـا}_{س\to ٧}\ \frac{\sqrt{٣س+٤}-٥}{س^{٢}-٤٩}$$

الحل

$$\text{النعويض} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$$

$$\text{نهـا}_{س\to ٧}\ \frac{\sqrt{٣س+٤}-٥}{س^{٢}-٤٩}\times\frac{\sqrt{٣س+٤}+٥}{\sqrt{٣س+٤}+٥}$$

$$\text{نهـا}_{س\to ٧}\ \frac{٣س+٤-٢٥}{(س^{٢}-٤٩)(\sqrt{٣س+٤}+٥)}$$

$$\text{نهـا}_{س\to ٧}\ \frac{٣س-٢١}{(س^{٢}-٤٩)(\sqrt{٣س+٤}+٥)}$$

$$\text{نهـا}_{س\to ٧}\ \frac{٣(س-٧)}{(س-٧)(س+٧)(\sqrt{٣س+٤}+٥)}$$

$$= \frac{٣}{(٧+٧)(\sqrt{٢١+٤}+٥)}$$

$$= \frac{٣}{١٤\times(٥+٥)} = \frac{٣}{١٤٠}$$

توحيد المقامات

ملاحظة

$$\frac{ب}{ا}+\frac{د}{ج}=\frac{ب\times ج\pm د\times ا}{ا\times ج}$$

توحيد المقام

مثال

$$① \quad \frac{٣}{س}-\frac{٤}{س+١}=\frac{٣(س+١)-٤\times س}{س\times(س+١)}$$

$$② \quad \frac{١}{س+٢}+\frac{٣}{س}=\frac{١\times س+٣\times(س+٢)}{س\times(س+٢)}$$

مثال ①

$$\text{نهـا}_{س\to ٣}\ \frac{\frac{١}{س}-\frac{١}{٣}}{س-٣}$$

الحل النعويض $= \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

توحيد مقام

$$\text{نهـا}_{س\to ٣}\ \frac{\frac{٣-س}{٣س}}{س-٣}$$

$$= \text{نهـا}_{س\to ٣}\ \frac{٣-س}{٣س}\times\frac{١}{س-٣}$$

$$= \text{نهـا}_{س\to ٣}\ \frac{-(س-٣)}{٣س}\times\frac{١}{س-٣}$$

$$= \frac{-١}{٣\times٣} = \frac{-١}{٩}$$

ملاحظة

$\frac{\frac{أ}{ب}}{\frac{ج}{د}} = \frac{أ}{ب} \times \frac{د}{ج}$ ← مقلوب المقسوم عليه

مثال: $\frac{\frac{٣}{س}}{\frac{٤}{س+١}} = \frac{٣}{س} \times \frac{س+١}{٤}$

مثال: $\frac{\frac{١}{٤}}{٥} = \frac{١}{٤} \times \frac{١}{٥}$

مثال ①

أوجد $\lim_{س \to ٣} \frac{\frac{١}{س}-\frac{١}{٣}}{س-٣}$ توحيد المقام

$= \lim_{س \to ٣} \frac{\frac{٣-س}{٣س}}{س-٣}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{٣-س}{٣س(س-٣)}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{-(س-٣)}{٣س(س-٣)}$ تحويل القسمة الى ضرب

$= \lim_{س \to ٣} \frac{-١}{٣س}$

$= \frac{-١}{٣ \times ٣} = \frac{-١}{٩}$

مثال ②

أوجد $\lim_{س \to ٢} \frac{\frac{١٠}{س}-٥}{٢-س}$

الحل

المقاومين = ÷

$\frac{٥-\frac{١٠}{س}}{١} = \frac{٥س-١٠}{س}$ توحيد المقامات

$= \lim_{س \to ٢} \frac{٥س-١٠}{س(٢-س)}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{٥(س-٢)}{س(٢-س)}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{-٥}{س}$

$= \frac{-٥}{٢}$

مثال ③

أوجد $\lim_{س \to ٤} \frac{\frac{٣}{٤}-\frac{١٢}{٤س}}{\frac{١}{س^٢}-\frac{١}{س}}$

الحل

المقاومين = ÷

$= \lim_{س \to ٤} \frac{\frac{٣س-١٢}{٤س}}{\frac{١-س}{س^٢}}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{٣س-١٢}{٤س} \times \frac{س^٢}{١-س}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{٣(س-٤)}{٤س} \times \frac{س^٢}{-(س-١)}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{٣س(س-٤)}{-٤(س-١)}$

$= \frac{٣ \times ٤ \times (٤)}{-٤} = \frac{-٣ \times ٦٤}{٤}$

$= -١٦ \times ٣ = -٤٨$

المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ④ تدريب (٥) ص ٢٥ الكتاب

اوجد $\lim_{س \to ٠} \frac{\frac{٢}{س-٣} + \frac{٤}{س+٦}}{س}$

الحل

بالتعويض $= \frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٢(س+٦) + ٤(س-٣)}{(س-٣)(س+٦)}$ بتوحيد المقامات

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٢س+١٢+٤س-١٢}{(س-٣)(س+٦)} \times \frac{١}{س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٦س+٤س}{(س-٣)(س+٦)} \times \frac{١}{س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٦}{(س-٣)(س+٦)}$

$= \frac{٦}{(٠-٣)(٠+٦)} = \frac{٦}{-١٨} = -\frac{١}{٣}$

مثال ⑤

اوجد $\lim_{س \to ٦} \frac{\frac{س}{٣} - ٢}{س - ٦}$

الحل

بالتعويض $= \frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س \to ٦} \frac{\frac{١}{٣}س - ٢}{١(س-٦)}$

$= \lim_{س \to ٦} \frac{\frac{١}{٣}(س-٦)}{س-٦}$

$= \lim_{س \to ٦} \frac{١}{٣} = \frac{١}{٣}$

مثال ⑥ $م \in ح$ ، $م > ١$

اذا علمت ان $\lim_{س \to ٢} \frac{م س^{٢} - ٥س}{س - ٢}$ موجود و فاوجد قيمة $م$

ملاحظه

في النهايات اذا كانت النهايه موجوده وكان المقام $= صفر$ فان البسط $= صفر$

الحل

$م س^{٢} - ٥س = ٠$ عندما $س \to ٢$

$م(٢)^{٢} - ٥ \times ٢ = ٠$

$٤م - ١٠ = ٠ \leftarrow ٤م = ١٠$

$م = \frac{١٠}{٤} = \frac{٥}{٢}$

مركز الوسام AlWesam
المعلم: ناجح الجمزاوي

تمارين ومسائل الكتاب

س٣ ص٣٦

ج) $\text{هـا}_{س \to ٢} \dfrac{\frac{١}{٢} - \frac{١}{س}}{س - ٢}$

التعويض = $\frac{٠}{٠}$

$= \text{هـا}_{س \to ٢} \dfrac{\frac{س - ٢}{٢س}}{س - ٢}$

$= \text{هـا}_{س \to ٢} \dfrac{س - ٢}{٢س} \times \dfrac{١}{س - ٢}$

$= \dfrac{١}{٢ \times ٢} = \dfrac{١}{٤}$

س٥ ص٣٦

اذا كان $ق(س) = \dfrac{٣}{س + ١}$

فجد $\text{هـا}_{هـ \to ٠} \dfrac{ق(س + هـ) - ق(س)}{هـ}$

الحل

التعويض = $\frac{٠}{٠}$

$\text{هـا}_{هـ \to ٠} \dfrac{\frac{٣}{س + هـ + ١} - \frac{٣}{س + ١}}{هـ}$

$\text{هـا}_{هـ \to ٠} \dfrac{٣(س + ١) - ٣(س + هـ + ١)}{(س + هـ + ١)(س + ١)}$

$\text{هـا}_{هـ \to ٠} \dfrac{٣س + ٣ - ٣س - ٣هـ - ٣}{(س + هـ + ١)(س + ١)}$

$\text{هـا}_{هـ \to ٠} \dfrac{-٣هـ}{(س + هـ + ١)(س + ١)} \times \dfrac{١}{هـ}$

$= \dfrac{-٣}{(س + ١)(س + ١)} = \dfrac{-٣}{(س + ١)^{٢}}$

س٤ اختبار ذاتي ص٥٧

$\text{هـا}_{س \to ٤} \dfrac{\frac{س}{س - ٢} - \frac{س + ٢}{س - ١}}{س - ٤}$

الحل

التعويض = $\frac{٠}{٠}$ ← توحيد مقام

$\text{هـا}_{س \to ٤} \dfrac{س(س - ١) - (س + ٢)(س - ٢)}{(س - ٢)(س - ١)}$

$\text{هـا}_{س \to ٤} \dfrac{\quad}{س - ٤}$

يتبع الحل ←

مكتبة السلام ActiveSAM المعلم: ناجح الجمزاوي

$\Leftarrow$

$$\text{نهـا}_{س\to ٤} \frac{س^{٣}-س-(س^{٢}-٣س+١٢)(٤-س)}{(س-٣)(س-١)} \div (س-٤)$$

$$\text{نهـا}_{س\to ٤} \frac{س^{٣}-س-س^{٣}+٤س^{٢}+٣س^{٢}-١٢س+٤}{(س-٣)(س-١)} \times \frac{١}{س-٤}$$

$$\text{نهـا}_{س\to ٤} \frac{٤س^{٢}-١٣س+٤}{(س-٣)(س-١)} \times \frac{١}{س-٤}$$

$$\text{نهـا}_{س\to ٤} \frac{(٤س-١)(س-٤)}{(س-٣)(س-١)} \times \frac{١}{س-٤}$$

$$= \frac{(٤-٤)(٤-١)}{٢\times ٣} = \frac{١-}{٦}$$

أسئلة الوزارة

① وزارة (٢٠١١) شتوية

$$\text{نهـا}_{س\to ١} \frac{\frac{١}{س+١}-\frac{١}{٢س}}{س-١}$$

الحل

بالتعويض = $\frac{٠}{٠}$ بتوحيد مقامان

$$\text{نهـا}_{س\to ١} \frac{٢س-(س+١)}{٢س(س+١)} \div (س-١)$$

$$\text{نهـا}_{س\to ١} \frac{س-١}{٢س(س+١)} \times \frac{١}{س-١}$$

$$\text{نهـا}_{س\to ١} \frac{١}{٢س(س+١)} = \frac{١}{٢\times ٢}$$

$$= \frac{١}{٤}$$

مكتبة الوسام AlWesam
المعلم: ناجح الجمزاوي

② (٢٠١٤) شتوية

$$\text{نهـا}_{س\to ٣} \frac{\frac{١}{س+٣} - \frac{١}{٦}}{س-٣}$$

البسط = ب توحيد مقامات

$$\text{نهـا}_{س\to ٣} \frac{\frac{٦-(س+٣)}{٦(س+٣)}}{س-٣} = \text{نهـا}_{س\to ٣} \frac{٦-س-٣}{٦(س+٣)(س-٣)}$$

$$= \text{نهـا}_{س\to ٣} \frac{-(س-٣)}{٦(س+٣)(س-٣)} = \text{نهـا}_{س\to ٣} \frac{-١}{٦(س+٣)} = \frac{-١}{٦(٣+٣)} = \frac{-١}{٣٦}$$

③ (٢٠١٥) صيفية

$$\text{نهـا}_{س\to ١} \frac{\frac{١}{٣س} - \frac{١}{س+٢}}{س-١}$$

البسط = ب توحيد مقامات

$$\text{نهـا}_{س\to ١} \frac{س+٢-٣س}{٣س(س+٢)} \times \frac{١}{س-١}$$

$$\text{نهـا}_{س\to ١} \frac{-(س-١)}{٣س(س+٢)} \times \frac{١}{س-١}$$

$$= \frac{-٢}{٣\times٣} = \frac{-٢}{٩}$$

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

الاتصال

الاتصال عند نقطة

يكون الاقتران ق متصلاً عند س = م اذا تحققت الشروط الاتيه

١- ق(م) معرف عند م اي ان ق(م) عدد حقيقي (الصوره)

٢- نهـا ق(س) موجوده (النهايه) س ← م

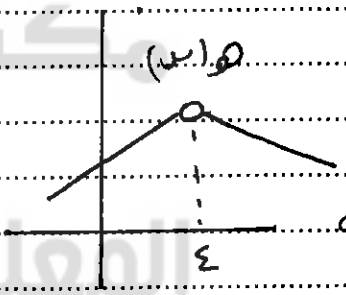
٣- نهـا ق(س) = ق(م) س ← م

النهايه = الصوره

مثال ①

بين سبب عدم اتصال الاقترانات التاليه عند س = ٤

أ)

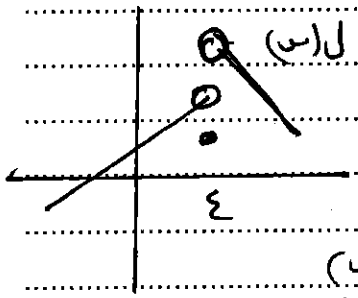


ق(س) غير معرف عند س = ٤

ق(٤) غير موجوده

← غير متصل

ب)

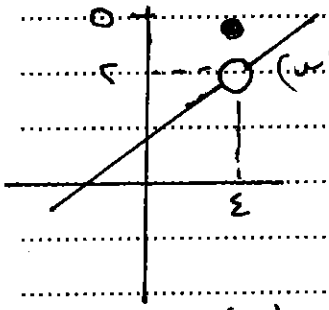


نهـا ل(س) س ← ٤+

لا تساوي نهـا ل(س) س ← ٤-

النهايه غير موجوده ← ل(س) غير متصل

ج)



ق(٤) = ٥

نهـا ق(س) = ٢ س ← ٤

نهـا ق(س) ≠ ق(٤) س ← ٤

غير متصل

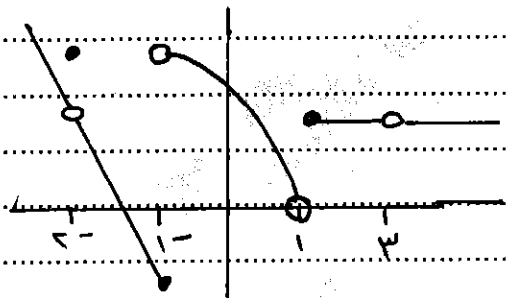
ملاحظه هامه

اذا أعطانا السؤال رسم وطلب ايجاد نقاط عدم الاتصال ننظر الى الحلقات والاقتران

ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (٢)

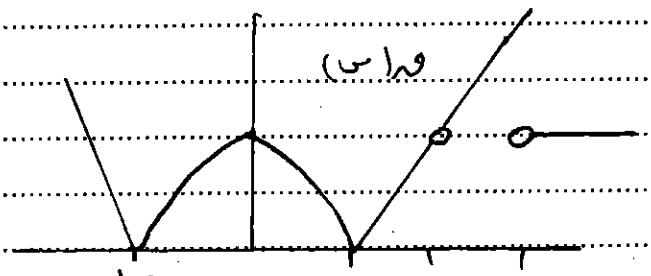
جد قيمة س التي يكون عندها الاقترانان غير متصلاً محققاً على الرسم المجاور



الحل : قيم س هي $\{-٢، -١، ١، ٣\}$

مثال (٣)

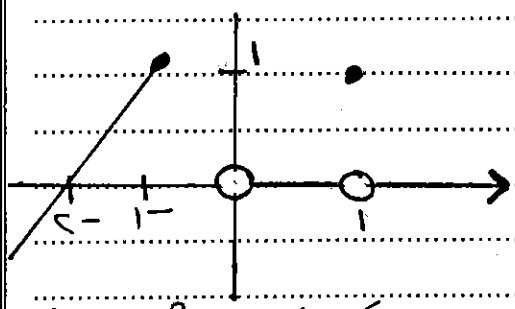
جد قيم س التي يكون عندها ق(س) غير متصلاً محققاً على الرسم المجاور



قيم س هي $\{-١، ٢، ٢\}$

مثال (٤)

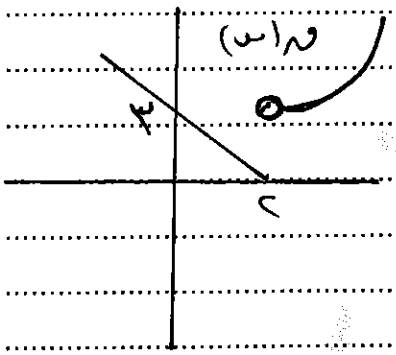
محققاً على الشكل الذي يمثل ق(س) اوجد نقاط عدم الاتصال



الحل نقاط عدم الاتصال هي $\{-١، ١\}$

مثال (٥)

محققاً على الشكل المجاور ادرس في اتصال الاقتران ق عند س = ٢



الحل

ق(٢) = صفر

$\lim_{س \to ٢^+}$ ق(س) = ٣

$\lim_{س \to ٢^-}$ ق(س) = صفر

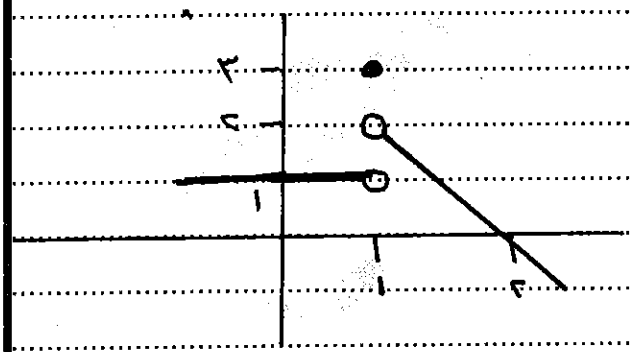
$\lim_{س \to ٢}$ ق(س) غير موجود

∴ ق(س) غير متصل عند س = ٢

مركز الوسام AlWesam
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ⑥

معتمداً على الرسم المجاور الذي يمثل منحنى $هـ(س)$ ابحث في اتصال $هـ(س)$ عند $س = ٢$ وعند $س = ١$



الحل

١) عند $س = ٢$

$هـ(٢) =$ صفر

$\lim_{س \to ٢} هـ(س) =$ صفر

$\lim_{س \to ٢} هـ(س) = هـ(٢) =$ صفر

$\therefore$ متصل عند $س = ٢$

٢) عند $س = ١$

$هـ(١) = ٣$

$\lim_{س \to ١^+} هـ(س) = ٢$ ، $\lim_{س \to ١^-} هـ(س) = ١$

$\lim_{س \to ١} هـ(س)$ غير موجود

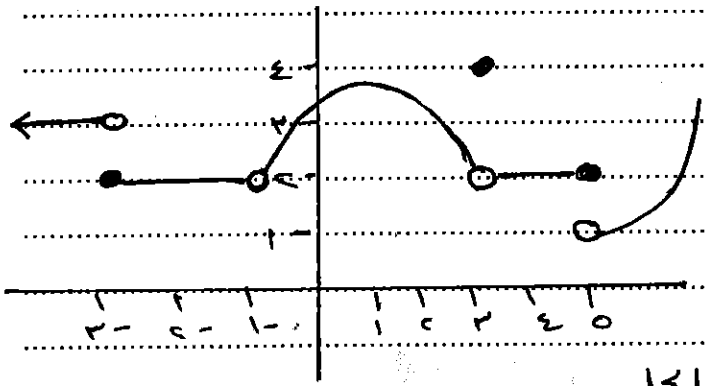
$\therefore هـ(س)$ غير متصل عند $س = ١$

مثال ⑦

اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران $هـ$ حيث $هـ$:

١) ما مجموعة ميم $م$ حيث $\lim_{س \to م} هـ(س)$ غير موجود.

٢) ما مجموعة ميم $ن$ حيث $هـ$ غير متصل عند $س = ن$



الحل

١) $م = \{-٣، ٠، ٣\}$

٢) $ن = \{-٣، -١، ٠، ٢، ٣\}$

عبد الوسام ALWESAM
الوسام: ناجح الجمزاوي

نظرية

اذا كان $ه(س)$ اقتران كثير حدود فهو متصل لكل الاعداد الحقيقية ح

مثال ⑧

ليكن $ه(س) = س^٥ - ٨س + ٣$

ابحث في اتصال $ه(س)$

الحل

$ه(س)$ متصل لأنه كثير حدود

مثال ⑨

$$ه(س) = \begin{cases} ٤س + ١ & س \geq ٢ \\ ٧ - س & س < ٢ \end{cases}$$

ابحث في اتصال $ه(س)$ عند $س = ٢$

الحل

① $ه(٢) = ٤ \times ٢ + ١ = ٩$

② $\lim_{س \to ٢^+} ه(س) = ٤ \times ٢ + ١ = ٩$

$\lim_{س \to ٢^-} ه(س) = ٧ - ٢ = ٥$

$\lim_{س \to ٢^+} ه(س) \neq \lim_{س \to ٢^-} ه(س)$

∴ $ه(س)$ غير متصل عند $س = ٢$

مثال ⑩

$$ه(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ - ٤}{س - ٢} & س \neq ٢ \\ ٤ & س = ٢ \end{cases}$$

الحل

① $ه(س)$ معرف عند $س = ٢$

$ه(٢) = ٤$

② $\lim_{س \to ٢} ه(س) = \lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ - ٤}{س - ٢}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(س + ٢)}{س - ٢} = ٢ + ٢ = ٤$

$\lim_{س \to ٢} ه(س) = ه(٢) = ٤$

∴ $ه(س)$ متصل عند $س = ٢$

مثال ⑪

$$ه(س) = \begin{cases} \sqrt{٧ - س} & س < -١ \\ \frac{٥}{س - ١} & س \geq -١ \end{cases}$$

ابحث في اتصال $ه(س)$ عند $س = -١$

① $ه(-١)$ غير معرف نلاحظ انه لا يوجد هنالك ما يساوي (=) في قاعدتي $ه(س)$

∴ $ه(س)$ غير متصل عند $س = -١$

ACWE-SAM
الموقع: ناجح الجمزاوي

مثال (١٢)

اذا كان $\lim_{س \to ٣} (ه(س) + ٤) = ٩$

وكانت $ه(٣) = ٥$ ابحث في اتصال $ه(س)$ عند $س = ٣$

الحل

① $ه(٣) = ٥$

② $\lim_{س \to ٣} ه(س)$ نجدها من المعطيات

$\lim_{س \to ٣} (ه(س) + ٤) = ٩$

$\lim_{س \to ٣} ه(س) + \lim_{س \to ٣} ٤ = ٩$

$\lim_{س \to ٣} ه(س) + ٤ = ٩$

$\lim_{س \to ٣} ه(س) = ٥$

③ $\lim_{س \to ٣} ه(س) = ه(٣) = ٥$

$\Leftarrow$ $ه$ متصل عند $س = ٣$

مثال (١٣)

اذا كانت $\lim_{س \to -١} (٢ه(س) + س^٢) = ٧$

وكان $ه(-١) = ٣$ ، ابحث في اتصال $ه(س)$ عند $س = -١$

الحل

① $ه(-١) = ٣$

② نجدها $\lim_{س \to -١} ه(س)$ من المعطيات

$\lim_{س \to -١} (٢ه(س) + س^٢) = ٧$

$= ٢ \lim_{س \to -١} ه(س) + \lim_{س \to -١} س^٢ = ٧$

$= ٢ \lim_{س \to -١} ه(س) + (-١)^٢ = ٧$

$= ٢ \lim_{س \to -١} ه(س) + ١ = ٧$

$= ٢ \lim_{س \to -١} ه(س) = ٦$

$\lim_{س \to -١} ه(س) = ٣$

③ $\lim_{س \to -١} ه(س) = ٣ = ه(-١)$

$\Leftarrow$ $ه(س)$ متصل عند $س = -١$

مكتبة الوسام AlwesamBook

المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (١٤)

اذا كان $هـ(س) = \begin{cases} أ س^2 - ب س & س < 2 \\ ب س - 4 & س \geq 2 \end{cases}$

اوجد قيمة ب حيث $هـ(س)$ متصل عند $س = 2$

الحل

بما ان $هـ(س)$ متصل عند $س = 2$

$\Leftarrow$ نها $هـ(س) =$ نها $هـ(س)$

$س \to 2^+$ $\quad$ $س \to 2^-$

$أ \times ب^2 - ب^3 = 4 - 2ب$

$2ب - 4 = 3ب - ب^2$

$\Leftarrow$

$-4 = 3ب - ب^2 - 2ب$

$+2$ $\quad$ $+2$

$\boxed{ب = -2}$

مثال (١٥)

اذا كان $هـ(س) = \begin{cases} أ س + 8 & س \leq ب \\ س^2 & س > ب \end{cases}$

وكان $هـ(س)$ متصل عند $س = ب$ اوجد قيمة ب

الحل

$هـ(س)$ متصل عند $س = ب$

$\Leftarrow$ نها $هـ(ب) =$ نها $هـ(س)$

$س \to ب^-$

$ب^2 = أ ب + 8$

$ب^2 - أ ب - 8 = 0$

$(ب - 4)(ب + 2) = 0$

$ب = 4 \quad ب = -2$

مثال (١٦)

$هـ(س) = \begin{cases} أ س^2 - 2 & س < -1 \\ 5 & س = -1 \\ س + ب & س > -1 \end{cases}$

حدد قيم أ، ب التي تجعل هـ متصلاً

الحل

① نها $هـ(س) =$ نها $هـ(-1)$

$س \to -1^+$

$-1 + ب = 5 \Leftarrow ب = 5 + 1 = 6$

② نها $هـ(س) = هـ(-1)$

$س \to -1^-$

$أ \times 1 - 2 = 5$

$أ - 2 = 5$

$أ = 5 + 2 = 7$

$\Leftarrow$

$أ = 7$

AL-YESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (١٧)

$$\text{ه}(س) = \begin{cases} س^{٢} - ب س + ٩ & س < ٠ \\ ٢(٩ + ب) & س = ٠ \\ -٢ & س > ٠ \end{cases}$$

جد قيمة $ب$ حيث ه متصل عند $س = ٠$

الحل

ملاحظة: دائماً نبدأ بالقاعدة الأعلى مجاصيل ان امكن ذلك

ه متصل عند $س = ٠$

① $\text{نها}_{س \to ٠^-}$ ه$(س)$ = ه(٠)

$(٠)^{٢} - ب(٠) + ٩ = -٢$

$٩ = -٢$

② $\text{نها}_{س \to ٠^+}$ ه$(س)$ = ه(٠)

$٢(٩ + ب) = -٢$

$٢(-٢ + ب) = -٢$ بالقسمة على ٢

$-٢ + ب = -١$

$+٢ \quad +٢$

$ب = ١$

مثال (١٨)

$$\text{ه}(س) = \begin{cases} ٤ س^{٣} + س + ٧ & س \geq -١ \\ ٩(س + ١) + ب - ١ & -١ < س < ٢ \\ ٣ س^{٢} + ب & س \geq ٢ \end{cases}$$

وكان ه$(س)$ متصل لجميع قيم $س$ فاوجد $ب$ ، $ب$؟

الحل

① ه$(س)$ متصل عند $س = -١$

نها ه$(س)$ = ه(-١)

$\text{نها}_{س \to -١^+}$

$٩(-١ + ١) + ب = ٤(-١)^{٣} + (-١) + ٧$

$٩ \times ٠ + ب = -٤ - ١ + ٧$

$ب = ٤$

② ه$(س)$ متصل عند $س = ٢$

نها ه$(س)$ = ه(٢)

$\text{نها}_{س \to ٢^-}$

نها $٩(س + ١) + ب = ٣(٢)^{٢} + ب$

$\text{نها}_{س \to ٢^+}$

$٩(٢ + ١) + ٤ = ٣ \times ٤ + ٤$

$٢٧ + ٤ = ١٢ + ٤$

$-٤ \quad -٤$

$٢٧ = ١٢$

$٩ = \frac{١٢}{٣} = ٤$

المعلم ناجح الجمزاوي

تمارين ومسائل الكتاب

تدريب (١) ص٤٨

اذا كان $هـ(س) = \begin{cases} س+٥ & س < ١ \\ ٩ - س & ١ \le س < ٢ \\ س^٢ - ٦ & س \ge ٢ \end{cases}$

اثبت ان $نها_{س \to ٣} هـ(س)$ غير موجودة

الحل

① $هـ(٣) = ٩ - ٣ \times ٢ = ٩ - ٦ = ٣$

② $نها_{س \to ٣^+} هـ(س) = ٣^٢ - ٦ = ٩ - ٦ = ٣$

$نها_{س \to ٣^-} هـ(س) = ٩ - ٣ \times ٢ = ٩ - ٦ = ٣$

③ $نها_{س \to ٣} هـ(س) = هـ(٣) = ٣$

$\Leftarrow$ هـ متصل عند $س = ٣$

ب ص٥٣

$هـ(س) = \begin{cases} س^٢ & س < ١ \\ ١ + ٣س & س \ge ١ \end{cases}$

اثبت ان هـ متصل عند $س = ١$

الحل

$هـ(١) = ١ + ٣ \times ١ = ٤$

ⓒ $نها_{س \to ١^+} هـ(س) = ١ + ٣ \times ١ = ٤$

$نها_{س \to ١^-} هـ(س) = ١^٢ = ١$

$نها_{س \to ١} هـ(س)$ غير موجود

$\Leftarrow$ هـ غير متصل عند $س = ١$

س ص٥٣

$هـ(س) = \begin{cases} س^٢ + ٧ & س < -٢ \\ ١ + ٣أ س & س \ge -٢ \end{cases}$

وكان هـ متصلاً عند $س = -٢$

فما قيمة الثابت أ ؟

الحل

بما ان هـ متصل عند $س = -٢$

$\Leftarrow نها_{س \to -٢^+} هـ(س) = هـ(-٢)$

$\Leftarrow ١ + ٣أ \times -٢ = (-٢)^٢ + ٧$

$-٦أ + ١ = ٤ + ٧ = ١١$

$-٦أ = ١٠$

$أ = -\frac{٥}{٣}$

س٣ ص٥٣

اذا كان $ه(س) = \begin{cases} \frac{س^3 - ١٢}{س - ٤} & س \neq ٤ \\ م & س = ٤ \end{cases}$

ما قيمة الثابت م التي تجعل ه متصلاً عند س = ٤ ؟

الحل

ه(س) متصل عند س = ٤

$\Leftarrow$ $\lim_{س \to ٤} ه(س) = ه(٤)$

$\lim_{س \to ٤} \frac{س^3 - ١٢}{س^2 - ٣س - ٤} = م$

$\lim_{س \to ٤} \frac{٣(س - ٤)}{(س - ٤)(س + ١)} = م$

$\frac{٣}{٤ + ١} = م$

$\frac{٣}{٥} = م$

س٤ ص٥٥ تمارين مراجعة

ما نقط عدم الاتصال للاقتران

ن) $(ن ه س) = \begin{cases} س^2 + ١ & س < ٤ \\ ٦ & س = ٤ \\ س + ٢ & س > ٤ \end{cases}$

الحل

بما أن $ه(س) = \begin{cases} س + ٤ & س < ٢ \\ ٤ & س = ٢ \\ س^2 + ٥ & س > ٢ \end{cases}$

$\lim_{س \to ٢^+} ه(س) = ٤ + ٢ = ٦$

$\lim_{س \to ٢^-} ه(س) = ٤^2 + ١ = ١٧$

$\lim_{س \to ٢}$ ه(س) غير موجود

س ≠ ٤

ه(س) غير متصل عند س = ٤

س٥ ص٥٥ تمارين مراجعة

اذا كان $ه(س) = \begin{cases} س^2 + ٥ & س < ٣ \\ ل & س \geq ٣ \end{cases}$

ما قيمة الثابت ل التي تجعل ه متصلاً

الحل

بما ان ه متصلاً $\Leftarrow$

$\lim_{س \to ٣} ه(س) = ه(٣)$

س $\to$ ٣

$٣^2 + ٥ = ل$

$ل = ٩ + ٥$

$ل = ١٤$

مكتبة الوسام AlWesAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

س١ فرع (٣) اختبار ذاتي

اذا كان هـ، هـ اقترانين متصلين
وكان هـ(٢) = ٥

هـا (هـ(س) + ٤ هـ(س)) = ٤١
س ← ٢

فاوجد هـ(٢)

الحل

هـا هـ(س) + ٤ هـا هـ(س) = ٤١
س ← ٢ س ← ٢

٥ + ٤ هـا هـ(س) = ٤١
س ← ٢

٤ هـا هـ(س) = ٣٦
س ← ٢

هـا هـ(س) = ٩
س ← ٢

ولأن هـ(س) متصل عند س = ٢

∴ هـا هـ(س) = هـ(٢)
س ← ٢

= ٩

س٣ ص٥٧ اختبار ذاتي

اذا كان هـ(س) = { ٢س٣ + ب ، س ≤ ٢
١٦ ، س = ٢
٣س٢ + ١ ، س > ٢

وكان هـ متصلاً عند س = ٢
فما قيمة كل من ٢، ب ؟

الحل

هـا هـ(س) = هـ(٢)
س ← ٢+

٣ × ٢٢ + ١ = ١٦

٣٦ + ١ = ١٦
١- ١-

٢أ = ١٥ ، أ = ٥/٢
٦ ٢

هـا هـ(س) = هـ(٢)
س ← ٢-

٣(٢)٢ + ب = ١٦

٤٢ + ب = ١٦

٤ × ٥/٢ + ب = ١٦

١٠ + ب = ١٦
١٠-

ب = ٦

Plugin AWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

أسئلة الوزارة

① وزارة (٢٠٠٨) شتوية

اذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٣س^{٢}+١ & س<-٢ \\ أس+ب & س \geq -٢ \end{cases}$

وكان ق متصلاً عند س = -٢

فجد قيمة أ

الحل

ق متصل عند س = -٢

$ق(-٢) = ق(-٢)$

$أ(-٢)+ب = ٣(-٢)^{٢}+١$

$-٢أ+ب = ١٢+١$

$-٢أ+ب = ١٣$

$+٢ \quad +٢$

$ب = ١٥+٢أ$

---

② وزارة (٢٠٠٩) شتوية

اذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٢س+١ & س<٢ \\ ٧ & س=٢ \\ ب س+أ & س>٢ \end{cases}$

فجد قيمة الثابت ب التي تجعل ق متصلاً عند س = ٢

الحل

ق متصل عند س = ٢

$ق(٢) = ق(٢)$

$٢ب+أ = ٢(٢)+١$

$٢ب+أ = ٥$

$-٢ \quad -٢$

$أ = ٣-٢ب$

$ب = ٢ \Leftarrow ب = ٤ \Leftarrow ٣ب = ١٢$

---

③ وزارة (٢٠١٠) شتوية

اذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^{٣}-٤ & س \leq ٢ \\ أس+٣ & س>٢ \end{cases}$

وكان ق متصلاً عند س = ٢

فما قيمة الثابت أ ؟

الحل

$ق(٢) = ق(٢)$

$٢أ+٣ = ٢^{٣}-٤$

$٢أ+٣ = ٨-٤$

$-٣ \quad -٣$

$٢أ = ٤$

$أ = ٢$

④ وزارة (٢٠١٤) شتوية

اذا كان q ، h اقترانين متصلين عند $س = ٣$ وكان $q(٣) = ١٢$

فما $\lim_{س \to ٣} (q(س) - ٤ h(س)) = ٢٠$

جد $h(٣)$

الحل

q متصل عند $س = ٣$

$\Leftarrow$ فما $\lim_{س \to ٣} q(س) = q(٣) = ١٢$

$\lim_{س \to ٣} q(س) - ٤ \lim_{س \to ٣} h(س) = ٢٠$

$١٢ - ٤ \lim_{س \to ٣} h(س) = ٢٠$

$-٤ \lim_{س \to ٣} h(س) = ٨$

$\lim_{س \to ٣} h(س) = -٢$

h متصل عند $س = ٣$

فما $h(س) = h(٣) = -٢$

$\lim_{س \to ٣}$

⑤ وزارة (٢٠١٥) شتوية

اذا كان $\begin{cases} ٢س^٣ + ٤ & س > -٢ \\ ٩س + ٦ & س \leq -٢ \end{cases}$ $= q(س)$

وكان q متصلاً عند $س = -٢$

فما قيمة الثابت $ب$ ؟

الحل

q متصل عند $س = -٢$

فما $\lim_{س \to -٢} q(س) = q(-٢)$

$\lim_{س \to -٢}$

$٢(-٢)^٣ + ٤ = ٩(-٢) + ٦$

$-١٦ + ٤ = -١٨ + ٦$

$-١٢ = -١٢ + ٦$

$-٦ \quad -٦$

$-٦ = -١٢$

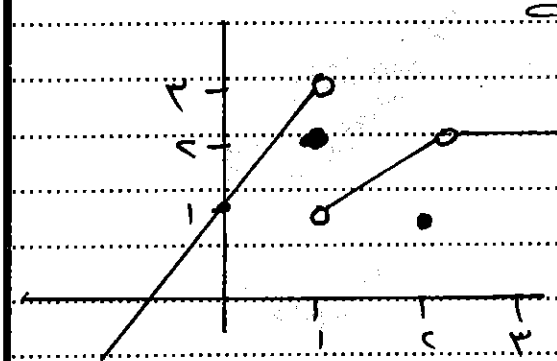
$ب = ٦$

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

⑥ وزارة ٢٠١٥ صيفية

اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى $f(x)$ المعرف على المجموعة الحقيقية



اكتب قيم x التي يكون عندها الأقتران f غير متصل

الحل قيم x هي $\{1, 2\}$

---

⑦ وزارة (٢٠١٦) شتوية

اذا كان

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + bx & x \geq 1 \\ 7 & x = 1 \\ x^2 - 4b - 6 & x < 1 \end{cases}$$

جد قيمة كل من الثابتين a, b التي تجعل الأقتران f متصلاً عند $x = 1$

الحل

f متصل عند $x = 1$

$\Leftarrow$ نهـا $f(x)$ = $f(1)$

$x \to 1^+$

$(1)^2 - 4b - 6 = 7$

$1 - 4b - 6 = 7$

$-4b - 5 = 7 \Leftarrow -4b = 12$

$\frac{-4b}{-4} = \frac{12}{-4}$

$b = -3$

$\Leftarrow$ نهـا $f(x)$ = $f(1)$

$x \to 1^-$

$2a(1)^2 + b = 7$

$2a - 3 = 7$

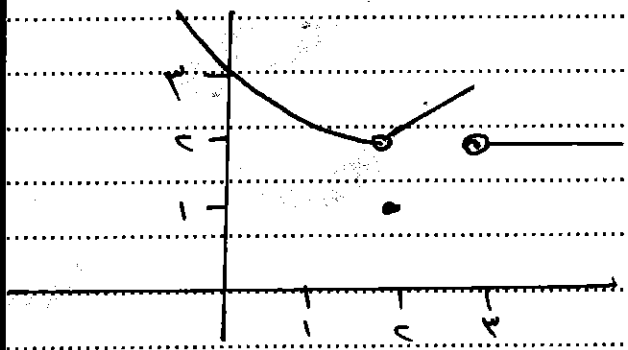
$\frac{2a}{2} = \frac{10}{2} \Leftarrow 2a = 10 \Leftarrow a = 5$

مكتبة الوسام AlWeSAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

(٨) وزارة (٢٠١٦ ج) صيفية

(١) اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س)

١- اعرف على مجموعة الاعداد الحقيقية



ألمتب ضم س التي يكون عندها الاقتران ق غير متصل

س = {٢ ، ٣}

(٢) اذا كان ق ، هـ اقترانين متصلين عند س = ٣ وكان ق(٣) = ١١

جد

(١) $\lim_{س \to ٣} س^{٣}$ ق(س) − ٨

الحل

ق متصل عند س = ٣

$\lim_{س \to ٣}$ ق(س) = ق(٣) = ١١

$\lim_{س \to ٣} س^{٣}$ ق(س) − $\lim_{س \to ٣}$ ٨

= ٣ × ١١ − ٨ = ٣٣ − ٨ = ٢٥

(٢) جد هـ(٣) التي تجعل

$\lim_{س \to ٣}$ (ق(س) − س) / (هـ(س))^{٣} = ١

الحل

$\lim_{س \to ٣}$ ق(س) − $\lim_{س \to ٣}$ س / $\lim_{س \to ٣}$ (هـ(س))^{٣} = ١

١١ − ٣ / (هـ(٣))^{٣} = ١

٨ / (هـ(٣))^{٣} = ١

(هـ(٣))^{٣} = ٨

هـ(٣) = ٢ (نأخذ الجذر التكعيبي)

هـ(٣) = ٢ لأن هـ(س) متصل عند س = ٣

$\lim_{س \to ٣}$ س ق(س) − $\lim_{س \to ٣}$ ٨

س ← ٣ س ← ٣

= ٣ × ١١ − ٨ = ٣٣ − ٨ = ٢٥

مكتب الوسام ADVISAM للمعلم ناجح الجمزاوي

اتصال الاقترانات النسبية

قاعدة

الأقتران النسبي $\frac{\text{ه}(س)}{\text{و}(س)}$ هو اقتران متصل على جميع الاعداد ماعدا اصفار المقام

مثال ①

اذا كان $\text{ه}(س) = \frac{٣س}{س^٢ - ٤}$

ابحث في اتصال ه(س) على مجموعة الاعداد الحقيقية

الحل

نجد اصفار المقام $س^٢ - ٤ = ٠$

$(س - ٢)(س + ٢) = ٠$

$س = ٢ \quad س = -٢$

ه(س) متصل على ح ماعدا

$\{-٢، ٢\}$

ونسمي $\{-٢، ٢\}$ نقط عدم الاتصال

أو نقط الانفصال

ملاحظة

في الأقتران النسبي نقط عدم الاتصال (الانفصال) هي قيم س التي تجعل المقام يساوي صفر

مثال ②

اوجد نقط عدم الاتصال للأقتران

$\text{ه}(س) = \frac{٣}{س^٢ - ٤س}$

الحل

نجعل المقام = صفر

$س^٢ - ٤س = ٠$ اخراج س عامل مشترك

$س(س - ٤) = ٠$

$س = ٠ \quad س = ٤$

نقط عدم الاتصال هي $\{٠، ٤\}$

مثال ③

اوجد نقط عدم الاتصال للأقتران

$\text{ه}(س) = \frac{س - ٣}{س^٢ + ٤}$

الحل

$س^٢ + ٤ = ٠$ لا يوجد نقط لا تجعل عدم اتصال

مثال ④

اذا علمت ان س = -١ هي نقطة انفصال للأقتران

$$\text{و}(س) = \frac{س^{٢} - ١}{س^{٢} - ب} \quad \text{مجهولة } ب$$

الحل

بما ان س = -١ هي نقطة انفصال

= صفر المقام

$$\leftarrow ب = ٢ \leftarrow ٠ = ب - ٢ \leftarrow ٠ = ب - ١ - ١ \times ٢$$

مثال ⑤

اذا علمت ان س = ٢ هي نقطة عدم اتصال للأقتران

$$\text{و}(س) = \frac{س^{٣} - ١}{ب س + ٣} \quad \text{مجهولة } ب$$

الحل

س = ٢ نقطة عدم اتصال

← هي صفر المقام

$$٠ = ٢ + ٢ ب \times ٢$$

$$٠ = ٢ + ٤ ب$$

$$\frac{-٢}{٤} = \frac{٤ ب}{٤}$$

$$ب = -١$$

ملاحظة

في الأقتران النسبي اذا كان المقام هو (س^{٢} + عدد) فانه لا توجد نقط عدم اتصال.

مثال ⑥

اوجد نقط عدم الاتصال للأقتران

$$\text{و}(س) = \frac{س^{٣} + ١}{س^{٢} - ٣ س - ٢٨}$$

الحل

المقام = صفر

$$س^{٢} - ٣ س - ٢٨ = ٠$$

$$(س - ٧)(س + ٤) = ٠$$

$$س = ٧ \quad س = -٤$$

نقط عدم الاتصال هي

$$\{-٤ ، ٧\}$$

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم ناجح الجمزاوي

تمارين وسائل الكتاب

تدريبيا ③ ص٥١

ما نقط عدم الاتصال للاقترانات التالية :

١) $q(س) = ٥$ لا يوجد نقط انفصال

٢) $q(س) = (س+٣)(س^٢-١٦)$

لديوجد نقط عدم اتصال

٣) $q(س) = \frac{س^٢-٩}{س+٥}$

المقام = صفر $س+٥=٠$

$س=-٥$

نقط عدم الاتصال $\{-٥\}$

٤) $q(س) = \frac{س}{س^٢-٣س-٢٨}$

المقام = صفر $س^٢-٣س-٢٨=٠$

$(س-٧)(س+٤)=٠$

$س=٧ \quad س=-٤$

نقط عدم الاتصال

$\{-٤، ٧\}$

س٤ ص٥٥ تمارين مراجعة

ما نقط عدم الاتصال للاقترانات التالية :

م) $q(س) = \frac{١-٤س}{س^٢+٩}$

المقام $\neq ٠$ $س^٢+٩$ لاكل

لا يوجد نقط عدم اتصال

ن) $هـ(س) = \begin{cases} س^٢+١ & س<٤ \\ ٦ & س=٤ \\ س+٢ & س>٤ \end{cases}$

$\lim_{س \to ٤^-} هـ(س) = ٤^٢+١ = ١٧$

$\lim_{س \to ٤^+} هـ(س) = ٤+٢ = ٦$

$\lim_{س \to ٤} هـ(س)$ غير موجود عند $س=٤$

ع) $ل(س) = \frac{١-٤س}{س^٢-١}$

$س^٢-١=٠ \quad س^٢=١$

$س = \pm\sqrt{١} = \pm ١$

نقط عدم الاتصال $\{-١، ١\}$

ك) $م(س) = \frac{١}{س} + \frac{س+١}{س^٢+٣س}$

$س=٠ \quad س+٣=٠ \quad س=-٣$

$\{-٣، ٠\}$

المعلم ناجح الجمزاوي

أسئلة الوزارة

① وزارة (٢٠٠٩) شتوية

اذا كان $d(س) = \frac{س^2 - ٩}{س + ٥}$ فاوجد

نقط عدم الاتصال

الحل

المقام = صفر $س + ٥ = ٠$

$س = -٥$

② وزارة (٢٠١٠) صيفية

اوجد قيم س التي عندها نقط عدم اتصال الاقتران

$d(س) = \frac{س}{(س+١)(س-٢)}$

المقام = ٠

$(س+١)(س-٢) = ٠$

$س = -١$ ، $س = ٢$

③ وزارة (٢٠١١) شتوية

اذا كان $d(س) = \frac{س - ١}{س - ٣}$ اوجد

نقط عدم الاتصال

المقام = ٠

$س - ٣ = ٠$ ، $س = ٣$

④ وزارة (٢٠١٢) شتوية

$d(س) = \frac{س - ٧}{س^2 - ٢س + ١}$

اوجد قيم س التي تجعل d غير متصل

الحل

المقام = صفر

$س^2 - ٢س + ١ = ٠$

$(س-١)(س-١) = ٠$

$س = ١$

⑤ وزارة (٢٠١٢) شتوية

$d(س) = \frac{س - ٣}{س^2 - ٤س + ٤}$ اوجد

قيم س التي تجعل d غير متصل

الحل

المقام = صفر

$س^2 - ٤س + ٤ = ٠$

$(س-٢)(س-٢) = ٠$

$س = ٢$

مركز الوسام ALWESAM المعلم: ناجح الجمزاوي

⑥ وزارة (٢٠١٣) صيفية

$$\text{ه}(س) = \frac{س^{٢}}{(س-١)(س+٥)}$$ اوجد جميع قيم س التي تجعل ه(س) غير متصل

الحل

المقام = صفر

$(س-١)(س+٥) = ٠$

$س = ١$ ، $س = -٥$

⑦ وزارة (٢٠١٤) صيفية

$$\text{ه}(س) = \frac{٦-٣س}{س^{٢}+٣س-١٠}$$

جد قيم س التي تجعل ه(س) غير متصل

الحل

$س^{٢}+٣س-١٠ = ٠$

$(س+٥)(س-٢) = ٠$

$س = -٥$ ، $س = ٢$

⑧ وزارة (٢٠١٦) شتوية

جد نقط عدم الاتصال للاقتران

$$\text{ه}(س) = \frac{١}{س+٢} + \frac{س-٣}{س^{٢}-٣س}$$

الحل

$س+٢ = ٠ \Leftarrow س = -٢$

$س^{٢}-٣س = ٠ \Leftarrow س(س-٣) = ٠$

$س = ٠$ ، $س = ٣$

النقط هي $\{-٢ ، ٠ ، ٣\}$

مكتبة الوسام AlWesam

المعلم: ناجح الجمزاوي

الاتصال على فترة

يكون الاقتران $هـ$ متصلاً على الفترة $[أ، ب]$ اذا كان

١. متصلاً من اليمين عند $س = أ$

أي أن

$\lim_{س \to أ^+} هـ(س) = هـ(أ)$

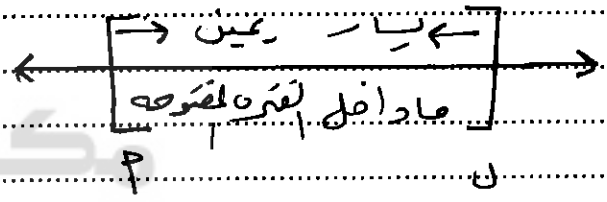
٢. متصلاً من اليسار عند $س = ب$

أي أن

$\lim_{س \to ب^-} هـ(س) = هـ(ب)$

٣. متصلاً عند جميع نقاط الفترة المفتوحة $(أ، ب)$

$\Leftarrow$ $هـ(س)$ متصل على $[أ، ب]$



طريقة البحث في الاتصال على فترة

١. الاقترانات كثيرات الحدود متصلة عند جميع الأعداد الحقيقية

٢. الاقترانات النسبية متصلة عند جميع الأعداد الحقيقية ما عدا اصفار المقام

٣. اقترانات الجذور التربيعية متصلة على ح

الجذر: متصلة عندما يكون ما داخل الجذر ≥ 0 وغير متصلة عندما يكون ما داخل الجذر سالب

٤. الاقترانات المركبة

(أ) ندرس اولاً القواعد الفردية المفتوحة

(ب) نقاط التشعب

(جـ) ندرس اطراف الفترة

أ من اليمين

ب من اليسار

مكتبة الوسام
ALWSAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ①

ابحث في اتصال $ق(س) = \frac{س}{س^2 - 9}$

في الفترة $[0, 1]$

الحل

بما ان $ق(س)$ اقتران نسبي فهو متصل على ح ماعدا اصفار المقام

اصفار المقام هي $س^2 - 9 = 0$

$س = 3$ ، $س = -3$

$ق(س)$ متصل على $[0, 1]$

ماعدا $\{3\}$

مثال ②

ابحث في اتصال $ق(س) = \sqrt{7س^2 - 8}$

على الفترة $[2, 3]$

الحل

نحل $7س^2 - 8 = 0$ ما داخل الجذر

$7س^2 = 8 \Leftarrow \frac{7س^2}{7} = \frac{8}{7}$

$س^2 = \frac{8}{7}$ $\quad س = \pm\sqrt{\frac{8}{7}} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$

	$-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$		$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$
اشارة	+	0	−
	ليس بمجال		مجال

$ق(س)$ ليس متصلاً على $[2, 3]$

مثال ③

$ق(س) = \begin{cases} س^2 - 1 & ، س < 2 \\ س^2 - س & ، س \geq 2 \end{cases}$

ابحث في اتصال $ق(س)$ على الفترة $[0, 3]$

الحل

① نبحث في اتصال كل قاعدة على مجالها

$س^2 - 1$ كثير حدود ← متصل على $(-\infty, 2)$

$س^2 - س$ كثير حدود ← متصل على $(2, \infty)$

② نبحث عند نقطة التشعب $س = 2$

$ق(2) = 2^2 - 2 = 4 - 2 = 2$

$\lim_{س \to 2^+} ق(س) = 2^2 - 2 = 4 - 2 = 2$

$\lim_{س \to 2^-} ق(س) = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$

$\lim_{س \to 2^+} ق(س) \neq \lim_{س \to 2^-} ق(س)$ ← غير موجود

← $ق(س)$ غير متصل عند $س = 2$

③ نبحث عند يمين البداية $س = -3^+$

$ق(-3^+) = (-3)^2 - 1 = 9 - 1 = 8$

$\lim_{س \to -3^+} ق(س) = (-3)^2 - 1 = 9 - 1 = 8$

← $ق(س)$ متصل عند $س = -3^+$

④ نبحث عند يسار نهاية الفترة $س = 5^-$

$ق(5) = 5^2 - 5 = 25 - 5 = 20$

$\lim_{س \to 5^-} ق(س) = 5^2 - 5 = 25 - 5 = 20$

← $ق(س)$ متصل عند $س = 5^-$

الجواب

$ق(س)$ متصل على الفترة $[-3, 5]$ ماعدا $\{2\}$

مثال ④

$$\text{هـ}(س) = \begin{cases} ٣س - ٢ & -١ \le س \le ١ \\ \dfrac{٥}{س - ٢} & ١ < س \le ٣ \end{cases}$$

ابحث في اتصال هـ(س) على الفترة $[-١ ، ٣]$

الحل

① $٣س - ٢$ متصل على $(-١ ، ١)$ لأنه كثير حدود

$\dfrac{٥}{س-٢}$ متصل على $(١ ، ٣)$ ماعدا $\{٢\}$

② عند $س = ١$ نقطة التشعب

$\text{هـ}(١) = ٣ \times ١ - ٢ = ٣ - ٢ = ١$

$\lim_{س \to ١^+} \text{هـ}(س) = \lim_{س \to ١^+} \dfrac{٥}{س-٢} = \dfrac{٥}{-١} = -٥$

$\lim_{س \to ١^-} \text{هـ}(س) = ٣ \times ١ - ٢ = ٣ - ٢ = ١$

$\therefore \lim_{س \to ١} \text{هـ}(س)$ غير موجود

$\therefore$ هـ(س) غير متصل عند $س = ١$

③ اطراف الفترة

① عند $س = -١^+$

$\text{هـ}(-١^+) = ٣ \times -١ - ٢ = -٥$

$\lim_{س \to -١^+} \text{هـ}(س) = \lim_{س \to -١^+} ٣س - ٢ = -٥$

$\therefore \lim_{س \to -١^+} \text{هـ}(س) = \text{هـ}(-١^+)$

$\therefore$ هـ متصل عند $س = -١^+$

② عند $س = ٣^-$

$\text{هـ}(٣^-) = \dfrac{٥}{٣-٢} = \dfrac{٥}{١} = ٥$

$\lim_{س \to ٣^-} \text{هـ}(س) = \lim_{س \to ٣^-} \dfrac{٥}{س-٢} = \dfrac{٥}{٣-٢} = ٥$

$\therefore \lim_{س \to ٣^-} \text{هـ}(س) = \text{هـ}(٣^-)$

$\therefore$ هـ متصل عند $س = ٣^-$

الجواب النهائي

هـ(س) متصل على الفترة $[-١ ، ٣]$ ماعدا $\{١ ، ٢\}$

مثال ⑤

$$\text{هـ}(س) = \begin{cases} ٤ - س^٢ & -١ \le س \le ٣ \\ ٢س + ١ & ٣ < س \le ٥ \end{cases}$$

ابحث في اتصال هـ(س) على $[-١ ، ٣]$

انتبه

① $٤ - س^٢$ متصل على $(-١ ، ٣)$ لأنه كثير حدود

② عند اطراف الفترة

① عند $س = -١^+$

$\text{هـ}(-١) = ٤ - (-١)^٢ = ٤ - ١ = ٣$

$\lim_{س \to -١^+} \text{هـ}(س) = \lim_{س \to -١^+} ٤ - س^٢ = ٣$

$\therefore \lim_{س \to -١^+} \text{هـ}(س) = \text{هـ}(-١^+)$

$\therefore$ هـ متصل عند $س = -١^+$

② عند $س = ٣^-$

$\text{هـ}(٣^-) = ٤ - ٣^٢ = ٤ - ٩ = -٥$

$\lim_{س \to ٣^-} \text{هـ}(س) = \lim_{س \to ٣^-} ٤ - س^٢ = -٥$

$\therefore \lim_{س \to ٣^-} \text{هـ}(س) = \text{هـ}(٣^-)$

$\therefore$ هـ متصل عند $س = ٣^-$

مكتبة الوسام AlWesam
المعلم ناجح الجمزاوي

نها د(س) = نها ٤ - س^٢
س ← -١^+ س ← -١^+

= ٤ - (-١)^٢ = ٤ - ١ = ٣

⇐ نها د(س) = د(-١)
س ← -١^+

⇐ د متصل عند س = -١^+

② عند س = -٣

د(-٣) = ٤ × ٢ + ١ = ٧

نها د(س) = نها (٤ - س^٢)
س ← -٣ س ← -٣

= ٤ - (-٣)^٢ = ٤ - ٩ = -٥

⇐ نها د(س) ≠ د(-٣)
س ← -٣

د غير متصل عند س = -٣

الجواب النهائي

د(س) متصل على الفترة [-١، -٣)

انتبه

مثال ⑦ تمارين ومسائل ص ٥٣ الكتاب

د(س) = { ٢ ، س = ٣ ؛ (س^٢ + ٣س + ١)/(س - ١) ، ٣ < س < ٥ ؛ ٤ ، س = ٥ }

اجب في اتصال د(س) على [٣، ٥]

الحل

① (س^٢ + ٣س + ١)/(س - ١) اقترن بشبه متصل على الفترة (٣، ٥) فاعد ا عند س = ١
لكن ١ ∉ (٣، ٥)

② اطراف الفترة [٣، ٥]

① عند س = ٣^+

د(٣^+) = ٢

نها د(س) = نها (س^٢ + ٣س + ١)/(س - ١) = (٣^٢ + ٣×٣ + ١)/(٣ - ١)
س ← ٣^+ س ← ٣^+

= (١ + ٩)/٢ = ١٠/٢ = ٥

نها د(س) ≠ د(٣) عند متصل
س ← ٣^+ عند س = ٣

② عند س = ٥^-

د(٥) = ٤

نها د(س) = نها (س^٢ + ٣س + ١)/(س - ١)
س ← ٥^- س ← ٥^-

= (١ + ٥×٣ + ١)/(٥ - ١) = ١٦/٤ = ٤

⇐ نها د(س) = د(٥) = ٤
س ← ٥^-

متصل عند س = ٥^-

الجواب النهائي

د(س) متصل على (٣، ٥]

مثال (٧)

$$\text{د}(س) = \begin{cases} س^3 - 2س + 1 & ، س < 2 \\ \dfrac{5س}{س^2 - 16} & ، س \geq 2 \end{cases}$$

اجب في اتصال د(س) على $[-2، 5]$

الحل

① $س^3 - 2س + 1$ متصل على $(-2، 2)$

لأنه كثير حدود

$\dfrac{5س}{س^2 - 16}$ متصل على $(2، 5)$

قاعدا اصفار المقام

$س^2 - 16 = 0 \Leftarrow س^2 = 16$

$س = \pm 4$

$س = 4$ ، $س = -4$ ليست في الفترة $(5، 2)$

② عند $س = 2$ نقطة تشعب

$\text{د}(2) = 2^3 - 2(2) + 1$

$= 8 - 4 + 1 = 5$

$\text{نها}_{س \to 2^+} \text{د}(س) = \text{نها}_{س \to 2^+} \dfrac{5س}{س^2 - 16} = \dfrac{5 \times 2}{2^2 - 16}$

$= \dfrac{10}{4 - 16} = \dfrac{10}{-12}$

$\text{نها}_{س \to 2^-} \text{د}(س) = \text{نها}_{س \to 2^-} س^3 - 2س + 1$

$= 2^3 - 2(2) + 1 = 5$

نها د(س) غير موجود

$س \to 2$

$\Leftarrow$ غير متصل عند $س = 2$

③ اطراف الفترة $[-2، 5]$

① عند $س = -2^+$

$\text{د}(-2) = (-2)^3 - 2(-2) + 1$

$= -8 + 4 + 1 = -3$

نها د(س) $= (-2)^2 - 2(-2) + 1$

$س \to -2^+$

$= 4 + 4 + 1 = 9$

متصل عند $س = -2^+$

② عند $س = 5^-$

$\text{د}(5) = \dfrac{5 \times 5}{5^2 - 16} = \dfrac{25}{25 - 16} = \dfrac{25}{9}$

نها د(س) $= \dfrac{5 \times 5}{5^2 - 16} = \dfrac{25}{25 - 16} = \dfrac{25}{9}$

$س \to 5^-$

متصل عند $س = 5^-$

الجواب النهائي

متصل على $[-2، 5]$

حاد $\{4، 2\}$

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ⑧ س ٤ ص ٥٣ الكتاب

$$\text{ه}(س) = \begin{cases} س^2 - 3س + 2 & س \geq -1 \\ س + 1 & س < -1 \end{cases}$$

ابحث في اتصال ه على مجموعة س الحقيقية

الحل

① $س^2 - 3س + 2$ متصل لأنه كثير حدود على س ≥ -1

$(-\infty ، -1)$

$س + 1$ متصل لأنه كثير حدود

على $س < -1$ $(-1 ، \infty -)$

② عند $س = -1$ نقطة تشعب

$\text{ه}(-1) = (-1)^2 - 3(-1) + 2$

$= 1 + 3 + 2 = 6$

$\text{ها ه}(س) = (-1)^2 - 3(-1) + 2 = 6$

$س \to -1^+$

$\text{ها ه}(س) = -1 + 1 = 0$

$س \to -1^-$

$\text{ها ه}(س) \neq \text{ها ه}(س)$

$س \to -1^+ \quad س \to -1^-$

ه غير متصل عند $س = -1$

الجواب

ه متصل على $ح - \{-1\}$

أسئلة الوزارة

① وزارة (٢٠١٠) صيفية

ليكن $\text{ه}(س) = \begin{cases} 9 - س^2 & س \leq 3 \\ 3 & س = 3 \end{cases}$

ابحث في اتصال ه(س) في $[-1 ، 3]$

الحل

① $9 - س^2$ متصل لأنه كثير حدود

على $(-1 ، 3)$

② نبحث عند أطراف الفترة $[-1 ، 3]$

① عند $س = -1^+$

$\text{ه}(-1) = 9 - (-1)^2 = 9 - 1 = 8$

$\text{ها ه}(س) = \text{ها}(9 - س^2)$

$س \to -1^+$

$= 9 - (-1)^2 = 9 - 1 = 8$

متصل عند $س = -1^+$

② عند $س = 3^-$

$\text{ه}(3) = 3$

$\text{ها ه}(س) = \text{ها}(9 - س^2)$

$س \to 3^-$

$= 9 - 3^2 = 9 - 9 = 0$

متصل عند $س = 3$

الجواب

ه متصل $[-1 ، 3]$

⑤ وزارة (٢٠١١) صيفية

اذا كان $هـ(س) = \begin{cases} ٩ - س^٣ & ، س < ٣ \\ ٤ - س & ، س \geq ٣ \end{cases}$

ابحث في اتصال $هـ(س)$ على $[١، ٢]$

الحل

① $٩ - س^٣$ متصل على $(١، ٢)$

لأنه كثير حدود

② اطراف الفترة $[١، ٢]$

① عند $س = ١^+$

$هـ(١) = ٩ - ١^٣ = ٩ - ١ = ٨$

كما $هـ(س) = ٩ - س^٣ = ٩ - ١^٣ = ٨$

$س \to ١^+$

متصل عند $س = ١^+$

② عند $س = ٢^-$

$هـ(٢) = ٤ - ٢ = ٢$

كما $هـ(س) = ٩ - س^٢ = ٩ - ٨ = ١$

$س \to ٢^-$

غير متصل عند $س = ٢^-$

الجواب

$هـ(س)$ متصل على $[١، ٢)$

⑥ وزارة (٢٠١٢) صيفية

اذا كان $هـ(س) = \begin{cases} س^٢ - ٣س + ٢ & ، س < ١ \\ س + ٧ & ، س \geq ١ \end{cases}$

ابحث في اتصال الاقتران $هـ$ على مجموعة الحقيقة

الحل

① $س^٢ - ٣س + ٢$ متصل على $س < ١$

$(-\infty، ١)$ لأنه كثير حدود

$س + ٧$ متصل على $س > ١$

$(١، \infty)$ لأنه كثير حدود

② عند $س = ١$ نقطة تشعب

$هـ(١) = (١)^٢ - ٣(١) + ٢ = ١ - ٣ + ٢ = ٠$

كما $هـ(س) = ١ + ٧ = ٨$

$س \to ١^+$

كما $هـ(س) = (١)^٢ - ٣(١) + ٢ = ١ - ٣ + ٢ = ٠$

$س \to ١^-$

متصل عند $س = ١$

الجواب

$هـ(س)$ متصل على $ح$

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

④ وزارة (١٣ : ٢) شتوية

اذا كان $q(س) = \begin{cases} ١٠ - ٢س & ، س \leq ٣ \\ ٦ & ، س = ٣ \end{cases}$

ابحث في اتصال q في الفترة $[١ ، ٣]$

الحل

① $١٠ - ٢س$ متصل على $(١ ، ٣)$

لأنه كثير حدود

② عند اطراف الفترة $[١ ، ٣]$

(١) عند $س = ١^+$

$q(١) = ١٠ - ٢ \times ١ = ٨$

$\lim_{س \to ١^+} q(س) = ١٠ - ٢ \times ١ = ٨$

$س \to ١^+$

متصل عند $س = ١$

(٢) عند $س = ٣^-$

$q(٣) = ٦$

$\lim_{س \to ٣^-} q(س) = ١٠ - ٢ \times ٣ = ٤$

$س \to ٣^-$

غير متصل عند $س = ٣$

الجواب

q متصل على $[١ ، ٣)$

⑤ وزارة (١٤ : ٢) صيفية

اذا كان $q(س) = \begin{cases} ٥ & ، س = ٣ \\ س^٢ - ١ & ، ٣ < س \leq ٧ \end{cases}$

ابحث في اتصال q في $[٣ ، ٧]$

الحل

① $س^٢ - ١$ متصل على $(٣ ، ٧)$

لأنه كثير حدود

② اطراف الفترة

(١) $س = ٣^+$

$q(٣) = ٥$

$\lim_{س \to ٣^+} q(س) = ٣^٢ - ١ = ٩ - ١ = ٨$

$س \to ٣^+$

q غير متصل عند $س = ٣^+$

(٢) $س = ٧^-$

$q(٧) = ٧^٢ - ١ = ٤٩ - ١ = ٤٨$

$\lim_{س \to ٧^-} q(س) = ٧^٢ - ١ = ٤٨$

$س \to ٧^-$

متصل عند $س = ٧^-$

الجواب

q متصل على $(٣ ، ٧]$

AtWesAM
العلم نافع لا محالة

نظرية

اذا كان كلاً من الاقترانين ق(س) ، ه(س) متصلاً عند س = p فإن

① ق(س) + ه(س) متصل عند س = p

② ق(س) − ه(س) متصل عند س = p

③ ق(س) × ه(س) متصل عند س = p

④ $\frac{ق(س)}{ه(س)}$ متصل عند س = p بشرط أن ه(p) ≠ صفر

ملاحظة هامة

① متصل (+ ، − ، × ، ÷) متصل ← متصل

② متصل (+ ، − ، × ، ÷) غير متصل يجب ايجاد (مجموع أو طرح أو ضرب) الاقترانين ثم بحث في الاتصال

③ غير متصل (+ ، − ، × ، ÷) غير متصل يجب ايجاد (مجموع أو طرح أو ضرب) الاقترانين ثم بحث في الاتصال

ملاحظة

اذا كان احد الاقترانين أو كلاهما غير متصل يجب ايجاد المجموع أو الطرح أو الضرب للاقترانين ثم بحث في الاتصال

مثال ①

اذا كان ق(س) = $س^3 - س$

وكان ه(س) = $\frac{س^2}{س^2 - 1}$

ابحث في اتصال ق(س) − ه(س) عند س = ٢

الحل

ق متصل كثير حدود

ه متصل ما عدا اصفار المقام

$س^2 - 1 = 0 \Leftarrow س^2 = 1$

$س = \pm 1$

العدد ٢ ليس صفراً للمقام

← ه(س) متصل عند س = ٢

ق(س) − ه(س) = متصل − متصل

= متصل

ALEWESAM
الاستاذ: ناجح الجمزاوي

مثال ②

ليكن $ه(س) = س - ٣$

$$و(س) = \begin{cases} س + ٣ & س \leq ٣ \\ س + ٤ & س > ٣ \end{cases}$$

وكان $ل(س) = ه(س) \times و(س)$

ابحث في اتصال $ل(س)$ عند $س = ٣$

الحل

① $ه(س)$ متصل لأنه كثير حدود

② نبحث في اتصال $و(س)$ عند $س = ٣$

$$\text{نها}_{س \to ٣^+} و(س) = ٣ + ٢ = ٥$$

$$\text{نها}_{س \to ٣^-} و(س) = ٣ + ٤ = ٧$$

$و(س)$ غير متصل

بما أن احد الاقترانين غير متصل

هنا لا بد من ايجاد قاعدة

الاقتران $ل(س) = ه(س) \times و(س)$

$$ل(س) = ه(س) \times و(س)$$

$$= (س - ٣) \times \begin{cases} س + ٢ & س \leq ٣ \\ س + ٤ & س > ٣ \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (س - ٣)(س + ٢) & س \leq ٣ \\ (س - ٣)(س + ٤) & س > ٣ \end{cases}$$

$$\text{نها}_{س \to ٣^+} ل(س) = (٣ - ٣)(٣ + ٢) = ٠ \times ٥ = \text{صفر}$$

$$\text{نها}_{س \to ٣^-} ل(س) = (٣ - ٣)(٣ + ٤) = ٠ \times ٧ = \text{صفر}$$

$$ل(٣) = (٣ - ٣)(٣ + ٢) = \text{صفر}$$

$$\Leftarrow \text{نها}_{س \to ٣} ل(س) = ل(٣)$$

$\Leftarrow ل(س)$ متصل عند $س = ٣$

مكتبة الوسام ALWESAM

الوسام: ناجح الجمزاوي

مثال ③

لتكن $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 0 \\ 3-x & x > 0 \end{cases}$

$g(x) = \begin{cases} x-1 & x \leq 0 \\ x+1 & x > 0 \end{cases}$

$L(x) = f(x) - g(x)$

ابحث حيث اتصال $L(x)$ عند $x = 0$

① بحثنا في اتصال $f(x)$ عند $x = 0$

$f(0) = 0 + 1 = 1$

كما $f(x) = 0 + 1 = 1$

$x \to 0^+$

كما $f(x) = 3 - 0 = 3$

$x \to 0^-$

f غير متصل

في هذه الحالة نجد قاعدة

$L(x) = f(x) - g(x)$

$L(x) = f(x) - g(x)$

$= \begin{cases} x+1 & x \leq 0 \\ 3-x & x > 0 \end{cases} - \begin{cases} x-1 & x \leq 0 \\ x+1 & x > 0 \end{cases}$

$= \begin{cases} x+1-x+1 & x \leq 0 \\ 3-x-x-1 & x > 0 \end{cases}$

$= \begin{cases} 2 & x \leq 0 \\ -2x+2 & x > 0 \end{cases}$

$L(0) = 2 + 0 = 2$

كما $L(x) = -0 + 2 = 2$

$x \to 0^+$

كما $L(x) = -2 \times 0 + 2 = 0$

$x \to 0^-$

$\Leftarrow$ كما $L(x) \neq L(0)$

$x \to 0$

$L(x)$ متصل عند $x = 0$

مكتبة الوسام ALWESAM

الوسام: ناجح الجمزاوي

تمارين ومسائل الكتاب

س١ تمارين ومسائل ص٥٣

ح) ل(س) = ح(س) + د(س)

اكتب حيث اتصال ل(س) عند س = ٣ اذا كان

ح(س) = ٥ + ٤س

د(س) = { س² - ٥ ، س ≥ ٣ ؛ س + ١ ، س < ٣ }

الحل

① ح(س) متصل عند س = ٣ لأنه كثير حدود

② د(٣) = ٣² - ٥ = ٩ - ٥ = ٤

هـ د(س) = هـ س + ١ = ٣ + ١ = ٤
س → ٣⁺ ، س → ٣⁺

هـ د(س) = هـ س² - ٥ = ٩ - ٥ = ٤
س → ٣⁻ ، س → ٣⁻

د(س) متصل عند س = ٣

ل(س) = ح(س) + د(س) متصل عند س = ٣

متصل + متصل = متصل

س٤ اختبار ذاتي ص٥٧

اذا كان هـ(س) = { ١ ، س > ٠ ؛ صفر ، س = ٠ ؛ -١ ، س < ٠ }

هـ(س) = س - ٥

وكان ل(س) = هـ(س) × هـ(س)

فبين ان ل(س) متصل عند س = ٥

الحل

هـا هـ(س) = -١
س → ٥⁺

هـ(س) غير متصل

هـا هـ(س) = ١ عند س = ٥
س → ٥⁻

ل(س) = هـ(س) × هـ(س)

ل(س) = { ١ ، س > ٠ ؛ صفر ، س = ٠ ؛ -١ ، س < ٠ } × (س - ٥)

ل(س) = { س - ٥ ، س > ٠ ؛ صفر ، س = ٠ ؛ -س + ٥ ، س < ٠ }

ل(٥) = صفر

هـا ل(س) = ٥ - ٥ = صفر
س → ٥⁺

هـا ل(س) = ٥ - ٥ = صفر
س → ٥⁻

هـا ل(س) = ل(٥)
س → ٥

ل(س) متصل عند س = ٥

ناجح الجمزاوي AGWESAM

أسئلة الوزارة

① وزارة (٢٠٠٨) صيفية

اذا كان $هـ(س) = ل(س) + د(س)$

حيث

$ل(س) = ٢س + ٥$

$د(س) = \begin{cases} س^٢ - ٥ & س \leq ٣ \\ س + ١ & س > ٣ \end{cases}$

ابحث في اتصال $هـ(س)$ عند $س = ٣$

الحل

① $ل(س)$ متصل عند $س = ٣$

لأنه كثير حدود

② $د(٣) = ٣^٢ - ٥ = ٩ - ٥ = ٤$

$\lim_{س \to ٣^+} د(س) = ٣ + ١ = ٤$

$\lim_{س \to ٣^-} د(س) = ٣^٢ - ٥ = ٤$

$\lim_{س \to ٣} د(س)$ موجود $= ٤$

$د(س)$ متصل عند $س = ٣$

$هـ(س) = ل(س) + د(س)$

متصل عند $س = ٣$

② وزارة (٢٠٠٩) صيفية

اذا كان $هـ(س) = س^٢$

$ه(س) = \begin{cases} س + ٥ & س \leq ٢ \\ ٣س^٢ - ٥ & س > ٢ \end{cases}$

وكان $ل(س) = هـ(س) \times ه(س)$

ابحث في اتصال $ل(س)$ عند $س = ٢$

الحل

① $هـ(س)$ متصل عند $س = ٢$ لأنه

كثير حدود

② $ه(٢) = ٢ + ٥ = ٧$

$\lim_{س \to ٢^+} ه(س) = ٢ + ٥ = ٧$

$\lim_{س \to ٢^-} ه(س) = ٣(٢)^٢ - ٥ = ١٢ - ٥ = ٧$

$\lim_{س \to ٢} ه(س) = ٧$

$\lim_{س \to ٢} ه(س) = ه(٢)$

$ه(س)$ متصل عند $س = ٢$

$ل(س) = هـ(س) \times ه(س)$

متصل عند $س = ٢$

مكتبة الوسام AlWesam
الوسام: ناجح الجمزاوي

(٣) وزارة (٢٠١١ د) شتوية

اذا كان $هـ(س) = \begin{cases} س^2 + ١ & س \geq ٢ \\ ٥ & س < ٢ \end{cases}$

$ل(س) = س$

وكان $و(س) = هـ(س) + ل(س)$

فبين ان $و(س)$ متصل عند $س = ٢$

الحل

① $ل(س) = س$ متصل عند $س = ٢$

لأنه كثير حدود

② $هـ(٢) = ٢^2 + ١ = ٥$

$\lim_{س \to ٢^+} هـ(س) = ٢^2 + ١ = ٥$

$\lim_{س \to ٢^-} هـ(س) = ٥$

$\lim_{س \to ٢} هـ(س)$

$\Leftarrow هـ(س)$ متصل عند $س = ٢$

$\Leftarrow و(س) = هـ(س) + ل(س)$

= متصل عند $س = ٢$

متصل + متصل = متصل

(٤) وزارة (٢٠١٢ د) شتوية

اذا كان $هـ(س) = س^2$

$و(س) = \begin{cases} ٢س + ١ & س \geq ٢ \\ س^3 - ٣ & س < ٢ \end{cases}$

اكتب مجال اتصال $هـ(س) \times و(س)$

عند $س = ٢$

الحل

① $هـ(س)$ متصل عند $س = ٢$ كثير حدود

② $و(٢) = ٢ \times ٢ + ١ = ٥$

$\lim_{س \to ٢^+} و(س) = ٢ \times ٢ + ١ = ٥$

$\lim_{س \to ٢^-} و(س) = ٢^3 - ٣ = ٨ - ٣ = ٥$

$\lim_{س \to ٢} و(س)$

$\Leftarrow و(س)$ متصل عند $س = ٢$

في هذه الحالة نجد ان

$هـ(س) \times و(س)$

$ل(س) = هـ(س) + و(س)$

$= س^2 \times \begin{cases} ٢س + ١ & س \geq ٢ \\ س^3 - ٣ & س < ٢ \end{cases}$

$\Leftarrow$ يتبع الحل

مكتبة الوسام ALWSAM

الاستاذ ناجح الجمزاوي

$$ل(س) = \begin{cases} ٤س^{٣} + س^{٣} & س \geq ٢ \\ س^{٥} - ٣س^{٢} & س < ٢ \end{cases}$$

$ل(٢) = ٤(٢)^{٣} + (٢)^{٣} = ٣٢ + ٨ = ٤٠$

$\text{نهـا}_{س \to ٢^+} ل(س) = ٤(٢)^{٣} + (٢)^{٣} = ٤٠$

$\text{نهـا}_{س \to ٢^-} ل(س) = (٢)^{٥} - ٣(٢)^{٢}$

$= ٣٢ - ١٢ = ٢٠$

$\therefore \text{نهـا}_{س \to ٢} ل(س) = ل(٢)$

$\therefore ل(س)$ متصل عند $س = ٢$

الحل

① $ل(س)$ متصل عند $س = ٢$ لأنه ليس صفرا

② $هـ(٢) = ٢ + ١ = ٣$

$\text{نهـا}_{س \to ٢^+} هـ(س) = ٢ + ١ = ٣$

$\text{نهـا}_{س \to ٢^-} هـ(س) = ٢^{٢} - ١ = ٤ - ١ = ٣$

$\therefore \text{نهـا}_{س \to ٢} هـ(س) = هـ(٢)$

$\therefore هـ(س)$ متصل عند $س = ٢$

$\therefore ه(س) = هـ(س) + ل(س)$

متصل عند $س = ٢$

---

⑤ دالة $(ح، ١٢، ٢)$ متصلة

إذا كان $هـ(س) = \begin{cases} س^{٢} - ١ & س > ٢ \\ س + ١ & س \leq ٢ \end{cases}$

وكان $ل(س) = ٣س + ٥$

$ه(س) = هـ(س) + ل(س)$

أبحث في اتصال $ه(س)$ عند

$س = ٢$

⑥ دالة $(ح، ١٤، ٢)$ متصلة

إذا كان $هـ(س) = ٤س^{٢}$

$ه(س) = \begin{cases} س + ٧ & س \leq ١ \\ ٣س^{٢} + ٥ & س > ١ \end{cases}$

وكان $ل(س) = هـ(س) \times ه(س)$

أبحث في اتصال $ل(س)$

عند $س = ١$ بنفس الحل

مكتبة الوسام AlWesam

الاستاذ: ناجح الجمزاوي

الحل

① $هـ(س)$ متصل عند $س = ١$
لأنه كثير حدود

② $هـ(١) = ١ + ٧ = ٨$

$\therefore \lim_{س \to ١^+} هـ(س) = ١ + ٧ = ٨$

$\lim_{س \to ١^-} هـ(س) = ٣(١)^٢ + ٥$
$= ٣ + ٥ = ٨$

$\therefore \lim_{س \to ١} هـ(س)$ متصل عند $س = ١$

$\therefore ل(س) = هـ(س) \times هـ(س)$
متصل عند $س = ١$
متصل × متصل = متصل

الحل

① $هـ(س)$ متصل عند $س = ٣$
لأنه كثير حدود

② $ل(٣) = ٣^٢ + ١ = ١٠$

$\therefore \lim_{س \to ٣^+} ل(س) = ٣^٢ + ١ = ١٠$

$\lim_{س \to ٣^-} ل(س) = ٤ \times ٣ - ٢ = ١٢ - ٢ = ١٠$

$\therefore \lim_{س \to ٣} ل(س) = ل(٣)$

$\therefore ل(س)$ متصل عند $س = ٣$

$\therefore هـ(س) = هـ(س) \times ل(س)$
متصل عند $س = ٣$

⑦ ونا ٥ (١٥، ٢٠١٤) صيغة

اذا كان $هـ(س) = ٤ - س^٢$

$ل(س) = \begin{cases} ٤س - ٢ & س > ٣ \\ س^٢ + ١ & س \leq ٣ \end{cases}$

وكان $و(س) = هـ(س) \times ل(س)$

ابحث في اتصال $و(س)$ عند
$س = ٣$

مكتبة الوسام ALWESAM
الوسام: ناجح الجمزاوي

⑧ وزارة (٢٠١٦ ج) صيفية

اذا كان هـ(س) = س٢ + ٦

$$ل(س) = \begin{cases} 3س^2 - س & س \geq 2 \\ س + 8 & س < 2 \end{cases}$$

وكان م(س) = هـ(س) - ل(س)

اجب عن ايصال الاقتران

م(س) عند س = ٢

الحل

① هـ(س) متصل عند س = ٢

لانه كثير حدود

② ل(٢) = ٣(٢)٢ - ٢

= ١٢ - ٢ = ١٠

نها ل(س) = ٢ + ٨ = ١٠

س ← ٢+

نها ل(س) = ٣(٢)٢ - ٢

س ← ٢-

= ١٢ - ٢

= ١٠

← نها ل(س) = ل(٢) = ١٠

س ← ٢

ل(س) متصل عند س = ٢

⇐ م(س) = هـ(س) - ل(س)

متصل عند س = ٢

متصل - متصل = متصل

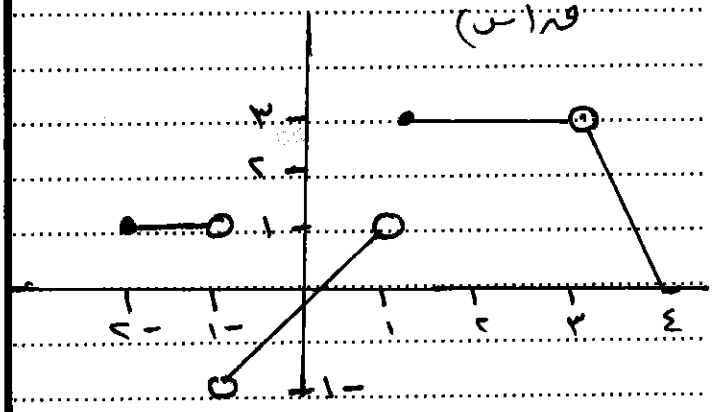
مكتبة الوسام AlWesam

المعلم: ناجح الجمزاوي

ورقة عمل " النهايات والاتصال "

السؤال الأول :-

أ- بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى $q(س)$ اوجد قيمة مايلي



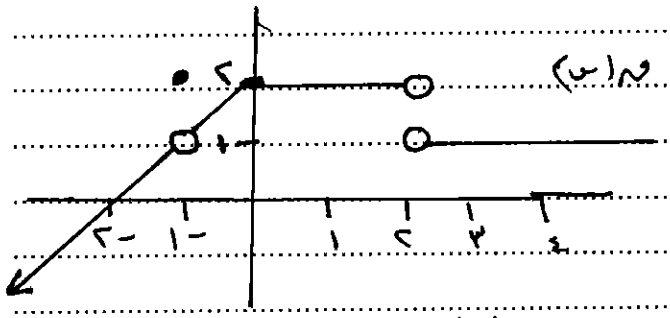
١- مجموع قيم م التي يكون عندها $\text{نها}_{س \to م} ق(س)$ غير موجودة

٢- $\text{نها}_{س \to ٣} ق(س)$ ، ٣. $\text{نها}_{س \to -١} ق(س)$

٤. قيم م التي يكون عندها $\text{نها}_{س \to م} ق(س) = ٣$

٥- قيم س التي يكون عندها $ق(س)$ غير متصل

ب- اعتماداً على الشكل المجاور



١) اوجد $\text{نها}_{س \to ٢} ق(س)$

٢) اوجد $\text{نها}_{س \to ٠} ٣ق(س) + \frac{١}{٢}(س-٤)^{٢}$

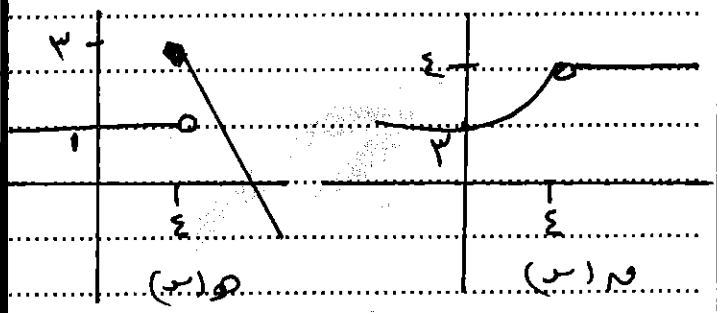
٣) $\text{نها}_{س \to ٣} \left((ق(س)-٣) + \frac{٣س-٥}{٢} \right)$

٤) اوجد قيم س التي يكون عندها $ق(س)$ غير متصل

٥) اوجد قيم م التي يكون عندها $\text{نها}_{س \to م} ق(س) = ٢$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

جـ) بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى $هـ(س)$ ، $و(س)$ جد كلاً مما يلي :



١) $\lim_{س \to ٤} ٣س \, هـ(س)$

٢) $\lim_{س \to ١} (٢هـ(س) \times ٣و(س) + س^{٤} - ٥)$

٣) $\lim_{س \to ٤^{+}} (هـ(س) + و(س))$

٤) $\lim_{س \to ٤^{-}} (هـ(س) + و(س))$

السؤال الثاني

أ) اذا كانت $\lim_{س \to ٣} ٣هـ(س) + ٤ = ٥$

فأوجد قيمة

$\lim_{س \to ١} (هـ^{٢}(س) + ٤س + ٣)$

ب) اذا كان $\lim_{س \to ٥} (٢هـ(س) + ٤س) = ٢٦$

فأوجد

$\lim_{س \to ٥} (هـ^{٣}(س) + ٤)$

جـ) اذا كانت $\lim_{س \to ٣} هـ(س) = ٤$

$هـ(٣) = ٢$ ، $\lim_{س \to ٣} (و(س) - ٢) = ١$

$و(٣) = ١$ اوجد قيمة ما يلي .

١. $\lim_{س \to ٣} (٣هـ(س) + ٢و(س) - س)$

٢. $\lim_{س \to ٣} \left(\frac{هـ(س) + ٢س}{١١ - ٣و(س)} \right)$

د) اذا كانت $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٣} - هـ(س)}{٢هـ(س)} = ١$

اوجد $\lim_{س \to ٣} هـ(س)$

هـ) اذا كانت

$\lim_{س \to ٣} هـ(س) = \lim_{س \to ١} س^{٢} + ٤س + ٥$

أوجد قيمة

$\lim_{س \to ٣} (هـ^{٢}(س) + ٤س)$

مكتبة الوسام
Alwesam.com
المعلم ناجح الجمزاوي

و) اذا كان

نها (٣ وه(س) − ٤س) = −٤
س ← −٢

وكانت نها (٢ و٣(س) + ٣س٢ + ٥) = ١
س ← −٢

اوجد ما يلي

١) نها (٢ وه٤(س) + س٢)
س ← −٢

٢) نها (و(س) + ٣س٢) / (٥ + ٢ وه(س))
س ← −٢

ز) اذا كان وه(س) = ٣ب س − ب

وكان

نها وه(س) = ١٢ ، نها وه(س) = ٨
س ← ٣ ، س ← −١

اوجد قيمة ب ، ب

السؤال الثالث

٩. اذا كانت نها وه(س) = ٣
س ← −١

نها و(س) = ٩ فاوجد ما يلي
س ← −١

١٠ نها (وه(س) × و(س) − ٧)
س ← −١

٢. نها (س٢ وه(س) − و(س) − ٨س)
س ← −١

١٣. نها √(٥ وه(س) + س٢)
س ← −١

١٤. نها ∛(٢ و(س) + ٣ وه(س))
س ← −١

١٥. نها (و(س) − ٦س) / وه(س)
س ← −١

١٦. اذا كانت

نها (٢ وه(س) + ٤س٢) = ٦
س ← ١

فجد قيمة

① نها وه٢(س) + ٥س / س − ١
س ← ١

② نها (وه(س) + ٥) + (س٢ − ١ / س − ١)
س ← ١

③ نها س٢ وه(س) − س٣ / س + ١
س ← ١

د. اذا كانت نها وه(س) + ٢ و(س) = ١١
س ← ١

وكانت نها و(س) = ٣ اوجد قيمة
س ← ١

نها (وه(س) − س)
س ← ١

مكتبة السمام ALWESAM
الاستاذ ناجح الجمزاوي

السؤال الرابع

ا- اذا كانت $\lim_{س \to ٤} \sqrt{أ س + ٥} = ٥$

اوجد قيمة أ ؟

ب- اذا كانت $\lim_{س \to ١} \frac{س^٢ + ٤س + أ}{س + ٣} = ٣$

اوجد قيمة أ ؟

جـ- هل $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{أ س - ١٢} - ٣}{أ + ١} = \frac{١}{٢}$

اوجد قيمة أ ؟

د) اذا كانت $و(س) = \begin{cases} ٤س^٢ + ١ & س \leq ١ \\ أ س + ج & س > ١ \end{cases}$

وكانت $\lim_{س \to ١} و(س)$ موجودة أوجد أ ، ج ؟

هـ) اذا علمت ان $و(س) = \begin{cases} ٤س^٢ - ٣أ & س \leq ٢ \\ أ + ٤س & س > ٢ \end{cases}$

وكانت $\lim_{س \to ٢} و(س)$ موجودة

أوجد قيمة أ

السؤال الخامس

أ- اذا كان $و(س) = \begin{cases} س^٢ + جـ & س \leq ١ \\ أ س + ٢ & س > ١ \end{cases}$

جد أ ، جـ حيث $\lim_{س \to ١} و(س)$ متصل عند $س = ١$

ب- اذا كان $و(س) = \begin{cases} أ س + ٢ & س \leq ٢ \\ س^٢ - ٢ب & ١ \leq س \leq ٤ \end{cases}$

وكانت $\lim_{س \to -١} و(س) = ٣$ اوجد قيمة أ ، ب ؟

جـ- $و(س) = \begin{cases} س^٢ + ب & س \geq ٣ \\ ١٠ & س = ٣ \\ أ س - ب & س < ٣ \end{cases}$

وكان و متصلا عند $س = ٣$ فما قيمة كل من أ ، ب ؟

د) $و(س) = \begin{cases} س^٢ + ب & س \leq ٢ \\ أ س - ٣ & س > ٢ \end{cases}$

فاذا كانت $\lim_{س \to ٢} و(س) = ٥$

اوجد قيمة أ ، ب

مكتبة الوسام ALWESAM

العلم ناجح الجمزاوي

السؤال السادس

٩- اذا كان $هـ(س) = \begin{cases} \sqrt{س+3} & س \leq 1 \\ \frac{س^2-1}{س-1} & س > 1 \end{cases}$

اوجد ان وجدت $نها_{س \to 1} هـ(س)$

٥- اذا كان $هـ(س) = \frac{س^4-16}{س^2-3س-10}$

١) جد قيم س التي يكون عندها $هـ(س)$ غير متصل

٢) جد $نها_{س \to 2} هـ(س)$

ج) اذا كان $هـ(س) = \frac{س^2-8}{س^2-2س}$

١) جد قيمة قيم (س) التي يكون عندها $هـ(س)$ غير متصل

٢) جد $نها_{س \to 2} هـ(س)$

السؤال السابع

اوجد قيمة النهايات التالية ان وجدت

١) $نها_{س \to -3} \sqrt{س-3}$

٢) $نها_{س \to 1} \sqrt{-2(س-1)}$

٣) $نها_{س \to 1} س^3+6س^2-7س$

٤) $نها_{س \to 0} \frac{(س-1)^2-1}{س}$

٥) $نها_{س \to 5} \frac{2-\sqrt{س-1}}{س^2-5س}$

٦) $نها_{س \to 6} \frac{س-6}{\sqrt{3+س}-3}$

٧) $نها_{س \to -3} \sqrt{س^2-2س+1}$

٨) $نها_{س \to 1} \frac{س-1}{\sqrt{5س-4}-\sqrt{س}}$

المعلم ناجح الجمزاوي

السؤال الثامن

اوجد قيمة النهايات ان وجدت

١) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٦س + ٩}{س - ٣}$

٢) $\lim_{س \to -٢} \frac{٢س^٢ + ٤س}{س^٣ + ٢س^٢}$

٣) $\lim_{س \to ١^+} \frac{\sqrt{س} - ١}{\sqrt{س - ١}}$ صاعده

$س = ١٠ \Rightarrow \sqrt{١٠} \times \sqrt{١٠ - ١}$

٤) $\lim_{س \to ٥} \frac{\sqrt{س} - \sqrt{٥}}{س^٢ - ٨س + ١٥}$

٥) $\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{٤س + ٣} - ٣}{س^٢ - ٤س + ٣}$

٦) $\lim_{س \to ١٠} \frac{\sqrt{س - ١٠} - ٣}{\sqrt{س - ٦} - ٢}$

٧) $\lim_{س \to ٣} \frac{س - ٣}{\sqrt{س} - \sqrt{٣}}$

٨) $\lim_{س \to \frac{٥}{٢}} \frac{٢س^٣ + ٣س^٢ - ٢س}{٢س - ٥}$

٩) $\lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{\sqrt{٣س - ٢} - \sqrt{س + ٢}}$

١٠) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٣ - ٢٧}{\sqrt{س^٢ + ٧} - ٤}$

١١) $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{س + ٧} - ٣}{\sqrt{س + ٣} - ٢}$

١٢) $\lim_{س \to ٨} \frac{\sqrt{س} - ٤}{\sqrt{٣س + ١} - ٥}$

١٣) $\lim_{س \to -\frac{٣}{٢}} \frac{٢س^٢ + ١١س + ١٣}{٢س + ٣}$

١٤) $\lim_{س \to ٥} \frac{\sqrt{س^٢ - ٩} - ٤}{س^٢ - ٢٥}$

١٥) $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س} - ١}{\sqrt{س + ٣} - ٢}$

١٦) $\lim_{س \to ٣} \sqrt{(س^٢ - ٦)^٢}$

مكتبة الوسام
Alwesam
المعلم: ناجح الجمزاوي

١٧) $\lim_{س \to ٢} \frac{\frac{١}{٤} - \frac{١}{س^٢}}{س - ٢}$

١٨) $\lim_{س \to ٥} \frac{س^٣ - ١٢٥}{س^٢ - ٢٥}$

١٩) $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{٤ - س} - س}{٢ - س}$

٢٠) $\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{٣ + س^٢} - ٣}{س^٢ - ٩}$

٢١) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٣ - ٣س^٢}{س^٢ - ٦س}$

٢٢) $\lim_{س \to ٢} \left(\frac{١}{٢} - \frac{١}{س}\right)\left(\frac{١}{٦ - ٣س}\right)$

٢٣) $\lim_{س \to ٣} \frac{\frac{٣}{١ + س} - \frac{٤}{٣س - ٣}}{س^٢ - ٤}$

٢٤) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ - ٨}{س^٢ - ٥س + ٦}$

٢٥) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ - ٨}{س^٢ - ٤}$

٢٦) $\lim_{س \to -٢} \frac{س^٢ - ٣س - ١٠}{س + ٢}$

٢٧) $\lim_{س \to ١} \frac{\frac{٦}{٣ + س} - \frac{٢}{س}}{س^٢ + ٢س - ٣}$

٢٨) $\lim_{س \to ٥} \frac{\sqrt{١ + ٣س} - ٤}{س - ٥}$

٢٩) $\lim_{س \to ٩} \frac{س^٢ - ٨١}{\sqrt{٤س} - ٦}$

٣٠) $\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{٢س^٢ - ٥} - ٧}{س^٢ - ٥س + ٦}$

٣١) $\lim_{س \to ٢} \left(\frac{١}{س - ٢} - \frac{٤}{س^٢ - ٤}\right)$ توحيد المقام

٣٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{\frac{٢}{س - ٣} + \frac{٢}{٣ + س}}{س}$

٣٣) $\lim_{س \to ٣} \frac{\frac{١}{١ + ٢س} - \frac{١}{٥}}{س - ٣}$

مكتبة الياسمين ALYASMEEN
المعلم ناجح الجمزاوي

٣٤) $\lim_{س \to ٣} \frac{\frac{١}{س+١} - \frac{١}{٣}}{س^٢ - ٤}$

٣٥) $\lim_{س \to ٢} \frac{\frac{١}{س+١} - \frac{١}{٢س-١}}{س^٣ - ٨}$

٣٦) $\lim_{س \to ١} \frac{(س+١)^٣ - ٨}{س^٢ - ١}$

٣٧) $\lim_{س \to ٢} \frac{(٤س-٥)^٢ - ١٦}{٤س^٢ - ٩}$

٣٨) $\lim_{س \to ١٠} \frac{س^٢ - ١٠٠}{س^٢ - ١٠س}$

٣٩) $\lim_{س \to ٠} \frac{س^٢ - ٣س + ٢}{س^٢ - ٢س}$

٤٠) $\lim_{س \to ٠^+} \sqrt{١ - س^٢}$

٤١) $\lim_{س \to ٣} \sqrt{٥س + ١} - ٤$ / $س^٢ - ٩$

٤٢) $\lim_{س \to ٣} \left(\frac{س^٢ + ٧س + ١٢}{س + ٣} + \sqrt{س + ٤} \right)$

السؤال التاسع

اوجد نقط عدم الاتصال (الانفصال) لدالة القرارات التالية

١) $ق(س) = \frac{س}{س^٢ - ٣٦}$

٢) $ق(س) = \frac{س^٢ - ٤}{س^٢ + ٤}$

٣) $ق(س) = \frac{س^٢ + ٩}{س^٢ - ٥س + ٦}$

٤) $ق(س) = \frac{٥}{س} + \frac{س}{س - ١}$

٥) $ق(س) = \begin{cases} س^٢ - ٣ & س \neq -٣ \\ ١٢ & س = -٣ \\ ٣ - س^٢ & س < -٣ \end{cases}$

٦) $ق(س) = \begin{cases} \frac{س - ١}{س^٢ - ٢٥} & س^٢ \neq ١ \\ ١ & س^٢ = ١ \end{cases}$

مكتبة الوسام ALWSAM

المعلم ناجح الجمزاوي

٧. $هـ(س) = \begin{cases} \frac{1}{س+1} & س \neq -1 \\ 5 & س = -1 \end{cases}$

٨. $هـ(س) = \frac{-2س}{4-س^2}$ ، س ∈ [٥،١]

٩. $هـ(س) = \sqrt{س+1}$

١٠. $هـ(س) = \sqrt[4]{12-3س}$

١١. $هـ(س) = \frac{3س}{س^2-1}$ ، س ∈ [٥،٠]

١٢. $هـ(س) = \frac{س^2-4}{(2س+6)(س-1)}$

١٣. $هـ(س) = \frac{س^2-16}{س^2-4س}$

١٤. $هـ(س) = \frac{س}{س^2-3س-28}$

١٥. $هـ(س) = \frac{1}{س} + \frac{س+1}{س+3}$

السؤال الخامس

٩- اذا كان هـ ، ه دالتين متصلتين وكان $هـ(3) = 4$

فها $(2هـ(س) + 5ه(س)) = 38$

$س^2 + 1 \quad س < 3$

فجد قيمة ه(٣)

١٠- $هـ(س) = \begin{cases} \frac{2س-6}{س^2-3س-4} & س \neq 3 \\ م & س = 3 \end{cases}$

فما قيمة الثابت م التي تجعل هـ متصلاً عند س = ٣

١١- اذا كان $هـ(س) = \begin{cases} \frac{\frac{1}{س} - \frac{1}{5}}{س-5} & س \neq 5 \\ -\frac{1}{25} & س = 5 \end{cases}$

أبحث في اتصال هـ(س) عند س = ٥

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال الحادي عشر

أ- اذا كان

$$هـ(س) = \begin{cases} \frac{س^2-16}{س-4} & س \neq 4 \\ 7 & س = 4 \end{cases}$$

اجب عن اتصال هـ(س) عند س = ٤

$$ل - هـ(س) = \begin{cases} \frac{25-س}{5-\sqrt{س}} & س \neq 25 \\ 10 & س = 25 \end{cases}$$

اجب عن اتصال هـ(س) عند س = ٢٥

$$هـ - هـ(س) = \begin{cases} 9-2س & -1 \leq س < 3 \\ 8 & س = 3 \end{cases}$$

اجب عن اتصال هـ(س) عند

الفترة [-١، ٣]

$$ك - \text{اذا كان } هـ(س) = \begin{cases} 4 & س = 2 \\ 3س^2-8 & 2 < س \leq 4 \end{cases}$$

اجب عن اتصال هـ(س) عند

الفترة [٢، ٤]

$$و - \text{اذا كان } هـ(س) = \begin{cases} \frac{س^2+1}{س-3} & 1 \leq س < 4 \\ 15 & س = 4 \end{cases}$$

اجب عن اتصال هـ(س) عند

الفترة [١، ٤]

$$ز - هـ(س) = \begin{cases} س+2 & س \leq 5 \\ 3 & \\ س^2 & س > 5 \end{cases}$$

$هـ(س) = (س-5)^2$

$ل(س) = هـ(س) \times هـ(س)$ اجب

عن اتصال ل(س) عندما

س = ٥

مركز الوسام ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

السؤال الثاني عشر

٩- $ه(س) = \begin{cases} ٤س + ٧ & س < -١ \\ س^{٢} + ٢ & -١ \leq س < ١ \end{cases}$

$و(س) = ٤س^{٢} + ٥س$

اجب عن اتصال $ه(س) - و(س)$ عند $س = -١$

١٠- $ه(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٣ & س < ٤ \\ ٥س - ١ & س \geq ٤ \end{cases}$

اذا كان $ه(س) = و(س)$

$و(س) = ٣س^{٢} - س$

اجب عن اتصال $ه(س) + و(س)$ عند $س = ٤$

١١- $ه(س) = \begin{cases} ١ & س \neq ٥ \\ صفر & س = ٥ \end{cases}$

$و(س) = س - ٥$

$ل(س) = ه(س) \times و(س)$

اجب عن اتصال $ل(س)$ عند $س = ٥$

١٢- $ه(س) = \begin{cases} س + ١ & س < ١ \\ ٤ - س & س \geq ١ \end{cases}$

$و(س) = \begin{cases} ٤س^{٢} + ١ & س < ١ \\ ٦ - س & س \geq ١ \end{cases}$

اجب عن اتصال $ل(س) = ه(س) \times و(س)$

عند $س = ١$

١٣- $ه(س) = \begin{cases} ٤س + ٢ & س < ٢ \\ ٤ - س & س \geq ٢ \end{cases}$

$و(س) = \begin{cases} ٤س & س < ٢ \\ ٣س + ٥ & س \geq ٢ \end{cases}$

اجب عن اتصال $ل(س)$ حيث

$ل(س) = ه(س) + و(س)$

عند $س = ٢$

مكتبة الوسام AlWesam

الوسام: ناجح الجمزاوي

تمت بحمد الله

مع تحيات

ناجح الجمزاوي

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم :ناجح الجمزاوي

مهارات في الرياضيات

MATHEMATICS

ملحق الاجابات

إعداد المعلم :

ناجح الجمزاوي

مكتبة الوسام
ALWESAM tawjihi Center & service store
موقع مكتبة الوسام التعليمي www.alwesam.info

الحلول النموذجية ورقة عمل النهايات والاتصال

السؤال الأول

(أ) ① $P = \{-1، 1، 2، 3، 4\}$

② $\lim_{س \to 3} هـ(س) = 3$

③ $\lim_{س \to -1} هـ(س) = 1$

④ $P = (1، 3)$

⑤ $P = \{-1، 1، 3، 4\}$

(ب) ① $\lim_{س \to 2^+} هـ(س) = 1$ ، $\lim_{س \to 2^-} هـ(س) = 2$

$\Leftarrow \lim_{س \to 2} هـ(س)$ غير موجودة

② $= 3(\lim_{س \to 1} هـ(س))^2 + \frac{1}{2}(\lim_{س \to 1} هـ(س) - 4)$

$= 3(2)^2 + \frac{1}{2}(-1 - 4) = 10$

③ $= (\lim_{س \to 2} هـ(س) - 3)^2 + \frac{\lim_{س \to 3} 3س - 5}{2}$

$= (-1 - 3)^2 + \frac{9 - 5}{2} = 4 + 2 = 6$

④ $س = \{-1، 2\}$

⑤ $P = [0، 2)$

السؤال الثاني

(أ) ① $\lim_{س \to 4} (هـ(س) \times \lim_{س \to 4} 3س$

② $\lim_{س \to 3} هـ(س) \times 2 + \lim_{س \to 3} (س - 5)$

$= 4 \times 2 + 1 \times 3 - 5 = 4$

③ $\lim_{س \to 4} هـ(س) + \lim_{س \to 4} هـ(س) = 4 + 3 = 7$

④ $\lim_{س \to 4} هـ(س) + \lim_{س \to 4} هـ(س) = 4 + 1 = 5$

(ب) ① $2 \lim_{س \to 1} هـ(س) + 4 = -5$

$\Leftarrow 3 \lim_{س \to 1} هـ(س) = -9 \Leftarrow \lim_{س \to 1} هـ(س) = -3$

الجواب

$(\lim_{س \to 1} هـ(س))^2 + \lim_{س \to 1} (4ك + 3)$

$= (-3)^2 + 4 \times -3 + 2 = 1$

② $\lim_{س \to 5} هـ(س) + 4 \times 5 = 26$

$\Leftarrow \lim_{س \to 5} هـ(س) = 6 \Leftarrow \lim_{س \to 5} هـ(س) = 3$

$= (\lim_{س \to 5} هـ(س))^3 + 4 = 3^3 + 4$

$= 27 + 4 = 31$

الحلول النموذجية ورقة عمل النهايات والاتصال

السؤال الثاني (تابع)

(د) $\lim_{س \to ٢} هـ(س) = ٤ \Leftarrow \lim_{س \to ٢} هـ(س) = \lim_{س \to ٣} هـ(س) = ٤$

$\lim_{س \to ٣} هـ(س) = ٣$

(ا) $\lim_{س \to ٣} ٣هـ(س) + ٢هـ(س) - ٣$

$= ٣ \times ٢ + ٢ \times ٣ - ٣ = ٦ + ٦ - ٣ = ٩$

(و) $\frac{\lim_{س \to ٣} هـ(س) + ٢ \times ٢}{\lim_{س \to ٣} ١١ - ٣هـ(س)}$

$= \frac{٦ + ٢}{١١ - ٣ \times ٣} = \frac{٨}{٢} = ٤$

(ه)

توزيع الدالة

$\frac{\lim_{س \to ٣} س^{٣} - \lim_{س \to ٣} هـ(س)}{\lim_{س \to ٣} ٢هـ(س)} = ١$

$\frac{\lim_{س \to ٣} هـ(س) - ٢٧}{\lim_{س \to ٣} ٢هـ(س)}$ ضرب بيادي

$\lim_{س \to ٣} هـ(س) - ٢٧ = \lim_{س \to ٣} ٢هـ(س)$

$\frac{٢٧}{٢} = \frac{\lim_{س \to ٣} ٣هـ(س)}{٢} \Leftarrow \lim_{س \to ٣} هـ(س) = ٩$

(هـ)

$\lim_{س \to ٣} هـ(س) = (١)^{٢} + ٤ \times ١ + ٥ = ١٠$

$(\lim_{س \to ٣} هـ(س))^{٢} + ٤ \times ٣ = ١٠^{٢} + ١٢$

$= ١١٢$

(و) تجهيز

$\lim_{س \to -٢} ٢هـ(س) - \lim_{س \to -٢} ٤س = -٤$

$\lim_{س \to -٢} ٣هـ(س) = -٨ = -٤$

$\lim_{س \to -٢} ٣هـ(س) = -١٢ \Leftarrow \lim_{س \to -٢} هـ(س) = \frac{-١٢}{٣} = -٤$

$(\lim_{س \to -٢} هـ(س))^{٣} + ٣ \times (-٢)^{٢} + ٥ = ١$

$٢(\lim_{س \to -٢} هـ(س))^{٢} + ١٢ + ٥ = ١$

$٢(\lim_{س \to -٢} هـ(س))^{٢} + ١٧ = ١$

$٢(\lim_{س \to -٢} هـ(س))^{٢} = -١٦$

$(\lim_{س \to -٢} هـ(س))^{٢} = -٨$

اخذ الجذر للطرفين

$\lim_{س \to -٢} هـ(س) = -٢$

(ا) $٢(\lim_{س \to -٢} هـ(س))^{٣} + ٤ = ٢ \times -٤ + ٤$

$-٨ + ٤ = -٤$

(ج) $\frac{\lim_{س \to -٢} هـ(س) + ٣(-٢)}{\lim_{س \to -٢} ١٥ + ٢هـ(س)} = \frac{-٢ + ١٢}{-٤ \times ٢ + ١٥}$

$= \frac{١٠}{٧}$

الحلول النموذجية ورقة عمل النهايات والاتصال

السؤال الثاني ضرع (ز)

$\lim_{س \to 3} هـ(س) = 12$ المعوض

① $3 \times 9 - 3ب = 12 \Leftarrow 3 \times 9 - ب = 12$

$27 - ب = 12 \Leftarrow ب = 15$

$\lim_{س \to -1} هـ(س) = 8 \Leftarrow$

② $3 \times 1 - (-1) - ب = 8 \Leftarrow 3 - ب = 8 \Leftarrow ب = -5$

نحل النظام بالحذف

$9 - ب = 12$ بالطرح

$3 + ب = 8$

$12 = 4$

$\frac{1}{3} = \frac{4}{12} = ب$

المعوض في ①

$11 = ب \Leftarrow 12 = ب + 1$

$ب = -11$

السؤال الثالث

(أ)

① $\lim_{س \to -1} هـ(س) \times \lim_{س \to 2} هـ(س) - 7$

$= 3 \times 9 - 7 = 27 - 7$

$= 20$

② $\lim_{س \to -1} س \times \lim_{س \to -1} هـ(س) - \lim_{س \to -1} هـ(س) \cdot \lim_{س \to -1} س$

$= (-1) \times 2 - 9 - 2 \times 8$

$= 1 \times 3 - 9 - 8 = 3 - 9 - 8 = -14$

③ $= \sqrt{5 \lim_{س \to -1} هـ(س) + \lim_{س \to -1} هـ(س)}$

$= \sqrt{5 \times 2 + (-1)} = \sqrt{10 + 1} = \sqrt{11} = 4$

④ $\sqrt[3]{\lim_{س \to -1} هـ(س) + 3 \lim_{س \to -1} هـ(س)}$

$= \sqrt[3]{2 \times 3 + 9 \times 3} = \sqrt[3]{27} = 3$

⑤ $= \frac{\lim_{س \to -1} هـ(س) - \lim_{س \to -1} 6س}{\lim_{س \to -1} هـ(س)}$

$= \frac{9 - 2 \times 6}{3} = \frac{15}{3} = 5$

① بتجزيء $\lim_{س \to 1} هـ(س) + \lim_{س \to 1} هـ(س) = 6$

$\lim_{س \to 1} هـ(س) + 4 = 6 \Leftarrow \lim_{س \to 1} هـ(س) = 2$

$\lim_{س \to 1} هـ(س) = 1 \Leftarrow$

② $\frac{(\lim_{س \to 1} هـ(س))^2 + 5 \times 1}{1 - 1 \times 2} = \frac{1 + 5}{1 - 2}$

$ع = \frac{6}{-1} = -6$

← يتبع الحل

مكتبة الوسام العربية
الوسام: ناجح الجمزاوي

الحلول النموذجية ورقة عمل النهايات والاتصال

⑤ $\lim_{س\to 1} ق(س) + ٥ = \lim_{س\to 1} \frac{س^٤ - ١}{س - ١}$

$\lim_{س\to 1} ق(س) + ٥ = \lim_{س\to 1} \frac{(س-١)(س+١)(س^٢+١)}{س-١}$

$١ + ٥ + \lim_{س\to 1} ق(س) = ٨$

$\lim_{س\to 1} ق(س) = ٢$

④ $\frac{\lim_{س\to 1} س^٢ \times \lim_{س\to 1} ق(س) - \lim_{س\to 1} س^٢}{\lim_{س\to 1} ق(س+١)}$

$= \frac{١^٢ \times ٢ - ١^٢}{٢} = \frac{٢-١}{٢} = \frac{١}{٢}$

⑥ تجهيز نعوض $\lim_{س\to 1} ق(س) = ٢$

لايجاد في $\lim_{س\to 1} ق(س)$

$\lim_{س\to 1} ق(س) + ٢ \lim_{س\to 1} ق(س) = ١١$

$\lim_{س\to 1} ق(س) + ٢ \times ٣ = ١١$

$\lim_{س\to 1} ق(س) = ٥$

اكمل $\lim_{س\to 1} ق(س) - \lim_{س\to 1} س = ٥ - ١ = ٤$

السؤال الرابع

④ $\lim_{س\to ٤} \sqrt{٩س + ٥} = ٥$

تربيع الطرفين $٩س + ٥ = ٢٥$

$٩س = ٢٠$

$س = \frac{٢٠}{٩}$

⑤ $\lim_{س\to ٢} \frac{س^٢ + ٤س + ٩}{س + ٢} = ٢$

$\frac{(١)^٢ + ٤ \times ١ + ٩}{١ + ٢} = ٢$

$\frac{١ + ٤ + ٩}{٤} = ٢ \Leftarrow ٩ + ٩ = ١٢$

$٩ = ٧$

⑥ النهاية موجودة تعني ان

$\lim_{س\to ٣^-} ق(س) = \lim_{س\to ٣^+} ق(س)$

$٤(١)^٢ + ١ = ٩ \times ١ + ج$

$٥ = ٩ + ج$

$ج = -٤$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

الحلول النموذجية ورقة عمل النهايات والاتصال

⑤
$\lim_{س \to -٢^+} هـ(س) = \lim_{س \to -٢^-} هـ(س)$

$٤ + ٤أ = ٢أ - ٤$

$٨ + ٤أ = ٢أ - ٨$

$٤أ = -١٦ \Leftarrow أ = -٤$

⑥
$\lim_{س \to ١^+} هـ(س) = ٣$

$\lim_{س \to ١^-} هـ(س) = ٢$

$ب + ١ = ٢ \Leftarrow ب = ١$

نعوضها في ①

$-٥ = أ \Leftarrow ٥ = -أ \Leftarrow ٢ = ٢ - أ$

السؤال الخاص

④ $هـ(س)$ متصل عند $س = أ$

$\Leftarrow$ النهاية موجودة

$\lim_{س \to أ^+} هـ(س) = \lim_{س \to أ^-} هـ(س)$

$أ^٢ + ٢أ - ١ = -٢$

$أ^٢ + ٢أ - ١ + ٢ = ٠$

$أ^٢ + ٢أ + ١ = ٠$

$(أ + ١)(أ + ١) = ٠$

$أ + ١ = ٠ \Leftarrow أ = -١$

⑤
$\lim_{س \to ٢^+} هـ(س) = ١٥$

$٤ + ب = ١٥$

$ب = ١١$

$\lim_{س \to ٣^+} هـ(س) = ١٥$

$٣أ - ب = ١٥$

$٣أ - ١١ = ١٥$

$٣أ = ٢٦$

$أ = \frac{٢٦}{٢} = ١٣$

⑤
$\lim_{س \to ٢^+} هـ(س) = ٣$

$\lim_{س \to ٢^-} هـ(س) = ٢$

$ب + ٤ = ٢$

$ب + ١ = ٣ \Leftarrow ب = ٢$

نعوضها في ①

$-أ + ٢ = ٢ \Leftarrow -أ = ٠ \Leftarrow أ = ٠$

⑤
$\lim_{س \to -١^+} هـ(س) = ٢$

$ب + ٤(-١) = ٢$

$ب + ١ = ٣ \Leftarrow ب = ٢$

نعوضها في ①

$-أ + ٢ = ٣ \Leftarrow -أ = ١ \Leftarrow أ = -١$

⑤
$\lim_{س \to ٢^+} هـ(س) = ٣$

$هـ$ متصل عند $س = ٢$

$\lim_{س \to ٣^+} هـ(س) = هـ(٣)$

$٢ب + ٤ = ١٥$

$٢ب + ٩ = ١٥$

$ب = ٦$

$\lim_{س \to ٣^+} هـ(س) = ١٥$

$٣أ - ب = ١٥$

$٣أ - ٦ = ١٥$

$٣أ = ٢١$

$أ = \frac{٢١}{٣} = ٧$

⑤
$\lim_{س \to ٣^+} هـ(س) = ٣$ تعني ان

$\lim_{س \to -١^+} هـ(س) = ٢$

$٣ = ب - ٣أ$ ---- ①

مكتبة القسام AL-QASAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

الحلول النموذجية ورقة عمل النهايات والاتصال

(S)

$\lim_{س \to ٢} د(س) = ٥$ تعني ان

$\lim_{س \to ٢^+} د(س) = ٥$

$ب \times ٢^٢ - ٢ = ٥ \leftarrow ٤ب - ٢ = ٥$

$٤ب = ٨ \leftarrow ب = ٢$

$\lim_{س \to ٢^-} د(س) = ٢ + ٤ج = ٥$

$٢ + ٤ج = ٥$

$٤ج = ٣$

$ج = \frac{٣}{٤}$

السؤال السادس

(أ) $\lim_{س \to ١^+} د(س) = \lim_{س \to ١^+} ٣س + ١$

$= ٣ + ١ = ٤$

$\lim_{س \to ١^-} د(س) = \lim_{س \to ١^-} \frac{س^٢ - ١}{س - ١}$

$= \lim_{س \to ١^-} \frac{(س - ١)(س + ١)}{س - ١} = ٢$

$\lim_{س \to ١} د(س)$ غير موجودة

(ب) ① $د(٢) = ٠$

$س^٢ - ٣س + ٢ = ٠ \leftarrow (س - ١)(س - ٢) = ٠$

$س = ١ \quad س = ٢$

$\{١، ٢\}$

② $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٤ - ١٦}{س^٢ - ٣س + ٢}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{(س^٢ - ٤)(س^٢ + ٤)}{(س - ١)(س - ٢)}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(س + ٢)(س^٢ + ٤)}{(س - ١)(س - ٢)}$

$= \frac{(٤)(٤)(٨)}{١} = \frac{١٢٨}{١} = ١٢٨$

(ج) ① $د(٢) = ٠$

$س^٣ - ٨ = ٠ \leftarrow (س - ٢)(س^٢ + ٢س + ٤) = ٠$

$س = ٢ \quad س = \frac{-٢ \pm \sqrt{٤ - ١٦}}{٢}$

② $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ - ٨}{س^٢ - ٤}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(س^٢ + ٢س + ٤)}{(س - ٢)(س + ٢)}$

$= \frac{١٢}{٤} = ٣$

الحلول النموذجية ورقة عمل النهايات والاتصال

السؤال السابع

① $\lim_{س \to 3^+} \frac{1}{س-3}$ = صفر داخل المجال

② $\lim_{س \to 1} \frac{1}{(س-1)(س-2)}$

$= \frac{1}{(1-1)(1-2)} = \frac{1}{0} = \infty$ صفر داخل المجال

③ $\lim_{س \to 1} \frac{س^3+6س^2-7س}{س^4+2س-3}$ التعويض $= \frac{0}{0}$

$= \lim_{س \to 1} \frac{س(س^2+6س-7)}{س^4+2س-3}$

$= \lim_{س \to 1} \frac{س(س+7)(س-1)}{(س+3)(س-1)}$

$= \frac{1 \times (1+7)}{1+3} = \frac{8}{4} = 2$

④ $\lim_{س \to 0} \frac{(س-1)^2-1}{س}$ التعويض $= \frac{0}{0}$ مزدوجة بين مربعين

$= \lim_{س \to 0} \frac{(س-1-1)(س-1+1)}{س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{(س-2)س}{س}$

$= 0-2 = -2$

⑤ $\lim_{س \to 5} \frac{\sqrt{س-1}-2}{س-5}$ الضرب بالمرافق

$\lim_{س \to 5} \frac{\sqrt{س-1}-2}{س-5} \times \frac{\sqrt{س-1}+2}{\sqrt{س-1}+2}$

$\lim_{س \to 5} \frac{(س-1)-4}{(س-5)(\sqrt{س-1}+2)}$

$= \lim_{س \to 5} \frac{س-5}{(س-5)(\sqrt{س-1}+2)}$

$= \frac{1}{\sqrt{5-1}+2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

الحلول النموذجية ورقة عمل النهايات والاتصال

⑥ نها $\frac{س-٦}{\sqrt{س+٣}-٣}$ التعويض = صفر
س ← ٦ الضرب بالمرافق

نها $\frac{س-٦}{\sqrt{س+٣}-٣} \times \frac{\sqrt{س+٣}+٣}{\sqrt{س+٣}+٣}$
س ← ٦

نها $\frac{(س-٦)(\sqrt{س+٣}+٣)}{س+٣-٩}$
س ← ٦

= نها $\frac{(س-٦)(\sqrt{س+٣}+٣)}{س-٦}$
س ← ٦

= $\sqrt{٦+٣}+٣ = ٣+٣ = ٦$

---

⑦ نها $\frac{\sqrt{س^{٤}-٢س+١١}-٤}{س-٢}$ = نها $\frac{س^{٤}-٢س+١١-٤+٤}{س-٢}$
س ← ٢

= نها $\frac{س^{٤}-٢س+٩}{س-٢}$

= ٣

---

⑧ نها $\frac{س-١}{\sqrt{٥س-٤}-\sqrt{س}}$ الضرب بالمرافق
س ← ١

نها $\frac{س-١}{\sqrt{٥س-٤}-\sqrt{س}} \times \frac{\sqrt{٥س-٤}+\sqrt{س}}{\sqrt{٥س-٤}+\sqrt{س}}$
س ← ١

نها $\frac{(س-١)(\sqrt{٥س-٤}+\sqrt{س})}{٥س-٤-س}$
س ← ١

نها $\frac{(س-١)(\sqrt{٥س-٤}+\sqrt{س})}{٤س-٤}$
س ← ١

= نها $\frac{(\cancel{س-١})(\sqrt{٥س-٤}+\sqrt{س})}{٤(\cancel{س-١})}$
س ← ١

= $\frac{(\sqrt{٥-٤}+\sqrt{١})}{٤} = \frac{١+١}{٤} = \frac{٢}{٤}$

$= \frac{١}{٢}$

السؤال الثامن

① نها $\frac{س^{٣}-٦س+٩}{س^{٣}-٩س}$
س ← ٣

الحل

نها $\frac{(س-٣)(س-٣)}{س(س^{٢}-٩)}$
س ← ٣

= نها $\frac{(\cancel{س-٣})(س-٣)}{س(\cancel{س-٣})(س+٣)}$
س ← ٣

= $\frac{٣-٣}{٣(٣+٣)}$ = صفر

---

② نها $\frac{س^{٤}+٤س}{س^{٣}+٤س^{٢}}$
س ← ٠

الحل

نها $\frac{س(س^{٣}+٤)}{س^{٢}(س+٤)}$ = نها $\frac{س^{٣}+٤}{س(س+٤)}$
س ← ٠ س ← ٠

= $\frac{٤}{٠}$ غير موجودة

الحلول النموذجية ورقة عمل النهايات والاتصال

← تابع السؤال الثامن

③ نهـا $\frac{\sqrt{س}-1}{\sqrt{س-1}}$ ، س ← 1^+

الضرب بالمرافقه

نهـا $\frac{\sqrt{س}-1}{\sqrt{س-1}} \times \frac{\sqrt{س}+1}{\sqrt{س}+1}$ ، س ← 1^+

= نهـا $\frac{س-1}{\sqrt{س-1}(\sqrt{س}+1)}$ ، س ← 1^+

= نهـا $\frac{(\sqrt{س}-1)(\sqrt{س}+1)}{\sqrt{س-1}(\sqrt{س}+1)}$ ، س ← 1^+

= $\frac{صفر}{(\sqrt{1}+1)}$ = صفر

من اليمين 1^+

④ نهـا $\frac{\sqrt{٥س}-\sqrt{٥٠-س}}{س^2+٨س-١٥}$ ، س ← ٥

ضرب بالمرافقه

نهـا $\frac{\sqrt{٥س}-\sqrt{٥٠-س}}{س^2+٨س-١٥} \times \frac{\sqrt{٥س}+\sqrt{٥٠-س}}{\sqrt{٥س}+\sqrt{٥٠-س}}$ ، س ← ٥

= نهـا $\frac{٥س-(٥٠-س)}{(س^2+٨س-١٥)(\sqrt{٥س}+\sqrt{٥٠-س})}$

⑤ نهـا $\frac{\sqrt{٣+س}-٣}{س-٣}$ ، س ← ٣ الضرب بالمرافقه

نهـا $\frac{\sqrt{٣+س}-٣}{س-٣} \times \frac{\sqrt{٣+س}+٣}{\sqrt{٣+س}+٣}$ ، س ← ٣

= نهـا $\frac{-٩}{(س-٣)(\sqrt{٣+س}+٣)}$ ، س ← ٣

= نهـا $\frac{-٩}{(س-٣)(\sqrt{٣+س}+٣)(س+١)(س+٣)}$ ، س ← ٣

= نهـا $\frac{-٦}{(س-٣)(\sqrt{٣+س}+٣)(س+١)(س+٣)}$ ، س ← ٣

= نهـا $\frac{-٦(س-٣)}{(س-٣)(\sqrt{٣+س}+٣)(س+١)(س+٣)}$ ، س ← ٣

= $\frac{-٦}{(٣+٣)\times٤} = \frac{-٦}{٢٤} = \frac{-١}{١٢}$

مكتبة الوسام ALWESAM
للعلم: ناجح الجمزاوي

الحلول النموذجية ورقة عمل النهايات والاتصال

(٦) نهـا $\frac{\sqrt{س-١}-٣}{\sqrt{س-٦}-٤}$ ضرب مرافق البسط والمقام

س ← ١٠

نهـا $\frac{\sqrt{س-١}-٣}{\sqrt{س-٦}-٤} \times \frac{\sqrt{س-١}+٣}{\sqrt{س-١}+٣} \times \frac{\sqrt{س-٦}+٤}{\sqrt{س-٦}+٤}$

س ← ١٠

نهـا $\frac{(س-١)-٩)(\sqrt{س-٦}+٤)}{(س-٦-٤)(\sqrt{س-١}+٣)}$

س ← ١٠

نهـا $\frac{(س-١٠)(\sqrt{س-٦}+٤)}{(س-١٠)(\sqrt{س-١}+٣)}$

س ← ١٠

$= \frac{\sqrt{١٠-٦}+٤}{\sqrt{١٠-١}+٣} = \frac{٤+٤}{٣+٣} = \frac{٤}{٦}$

---

(٧) نهـا $\frac{س-٣}{\sqrt{س}-\sqrt{٣}}$

س ← ٣

نهـا $\frac{س-٣}{\sqrt{س}-\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{س}+\sqrt{٣}}{\sqrt{س}+\sqrt{٣}}$

س ← ٣

$= $ نهـا $\frac{(س-٣)(\sqrt{س}+\sqrt{٣})}{س-٣}$

س ← ٣

$= \sqrt{٣}+\sqrt{٣} = ٢\sqrt{٣}$

(٨) نهـا $\frac{٤س^{٣}+٣س^{٢}-٥س}{س^{٢}-٥س}$

س ← ٠

الحل

نهـا $\frac{س(٤س^{٢}+٣س-٥)}{س^{٢}-٥س}$

س ← ٠

نهـا $\frac{س(٤س-٥)(س+١)}{س(س-٥)}$

س ← ٠

$= $ نهـا $(٤س+١)(س+١) = ١ \times ١ = ١$

$= $ نهـا $(٤س+٥)(س+١) = ٥ \times ١ = ٥$

---

(٩) نهـا $\frac{س-٢}{\sqrt{٣س-٢}-\sqrt{س+٤}}$

س ← ٢

$= $ نهـا $\frac{س-٢}{\sqrt{٣س-٢}-\sqrt{س+٤}} \times \frac{\sqrt{٣س-٢}+\sqrt{س+٤}}{\sqrt{٣س-٢}+\sqrt{س+٤}}$

$= \frac{(س-٢)(\sqrt{٣س-٢}+\sqrt{س+٤})}{٣س-٢-س-٤}$

$= \frac{(س-٢)(\sqrt{٣س-٢}+\sqrt{س+٤})}{٢س-٦}$

$= \frac{(س-٢)(\sqrt{٣س-٢}+\sqrt{س+٤})}{٢(س-٣)}$

$= \frac{\sqrt{٣(٢)-٢}+\sqrt{٢+٤}}{٢} = \frac{٤+٢}{٢} = ٣$

الحلول النموذجية ورقة عمل النهايات والاتصال

(١٠) نهـا $\frac{س^{٣}-٧س-٦}{\sqrt{س^{٢}+٧}-٤}$
س ← ٣

الكل
نهـا $\frac{س^{٣}-٧س-٦}{\sqrt{س^{٢}+٧}-٤} \times \frac{\sqrt{س^{٢}+٧}+٤}{\sqrt{س^{٢}+٧}+٤}$
س ← ٣

= نهـا $\frac{(س^{٢}-٧س-٦)(\sqrt{س^{٢}+٧}+٤)}{س^{٢}+٧-١٦}$
س ← ٣

= نهـا $\frac{(س^{٣}-٧س-٦)(٨)}{س^{٢}-٩}$
س ← ٣

= نهـا $\frac{(س+١)(س-٣)(س^{٢}+٣س+٩)(٨)}{(س+٣)(س-٣)}$
س ← ٣

$= \frac{٨(٩+٣×٣+٩)}{٦}$

$= \frac{٨^{٤} \times ٩}{٦^{٢}} = ٣٦$

---

(١١) نهـا $\frac{\sqrt{س+٧}-٢}{\sqrt{س+٤}-٢}$
س ← ٠

راجعه الضبط والاتمام

الكل
نهـا $\frac{\sqrt{س+٧}-٣}{\sqrt{س+٤}-٢} \times \frac{\sqrt{س+٧}+٣}{\sqrt{س+٧}+٣} \times \frac{\sqrt{س+٤}+٢}{\sqrt{س+٤}+٢}$
س ← ٠

= نهـا $\frac{(س+٧-٩)(\sqrt{س+٤}+٢)}{(س+٤-٤)(\sqrt{س+٧}+٣)}$
س ← ٠

= نهـا $\frac{(س+٤)\times ٤}{(س+٤)\times ٦} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$
س ← ٠

---

(١٢) نهـا $\frac{\sqrt{س+٨}-٤}{\sqrt{٣س+١}-٥}$
س ← ٨

الكل
نهـا $\frac{\sqrt{س+٨}-٤}{\sqrt{٣س+١}-٥} \times \frac{\sqrt{س+٨}+٤}{\sqrt{س+٨}+٤} \times \frac{\sqrt{٣س+١}+٥}{\sqrt{٣س+١}+٥}$
س ← ٨

= نهـا $\frac{(س+٨-١٦)(\sqrt{٣س+١}+٥)}{(٣س+١-٢٥)(\sqrt{س+٨}+٤)}$
س ← ٨

= نهـا $\frac{(س-٨)\times ١٠}{٣(س-٨)\times ٨}$
س ← ٨

= نهـا $\frac{١٠}{٢٤}$

الحلول النموذجية ورقة عمل النهايات والاتصال

(١٣) نهـا $\frac{٢س^{٣}+١١س+١٢}{س+٣}$ ، س ← $-\frac{٣}{٢}$

الحل

نهـا $\frac{(٢س+٣)(س+٤)}{(٢س+٣)}$ ، س ← $-\frac{٣}{٢}$

$= -\frac{٣}{٢}+٤ = -\frac{٢}{٢}+\frac{٨}{٢} = \frac{٥}{٢}$

(١٤) نهـا $\frac{\sqrt{س^{٢}-٩}-٤}{س^{٢}-٥س}$ ، س ← ٥

الحل

نهـا $\frac{\sqrt{س^{٢}-٩}-٤}{س^{٢}-٥س} \times \frac{\sqrt{س^{٢}-٩}+٤}{\sqrt{س^{٢}-٩}+٤}$ ، س ← ٥

$= نهـا \frac{س^{٢}-٩-١٦}{(س^{٢}-٥س)(\sqrt{س^{٢}-٩}+٤)}$ ، س ← ٥

$= نهـا \frac{س^{٢}-٥س}{(س^{٢}-٥س)(٨)}$ ، س ← ٥

$= \frac{١}{٨}$

(١٥) نهـا $\frac{\sqrt{س}-١}{\sqrt{س+٣}-٢}$ ، س ← ١

الحل

نهـا $\frac{\sqrt{س}-١}{\sqrt{س}+١} \times \frac{\sqrt{س}+١}{\sqrt{س+٣}-٢} \times \frac{\sqrt{س+٣}+٢}{\sqrt{س+٣}+٢}$ ، س ← ١

$= نهـا \frac{(س-١)(س+٣)}{(س+٣-٤)(س+١)}$ ، س ← ١

$= نهـا \frac{(س-١)(س+٣)}{(س-١)(٢)(س+١)} = \frac{٤}{٢} = ٢$ ، س ← ١

(١٦) نهـا $\sqrt{(س-٦)}$ ، س ← ٣

نحدد إشارة المقدار بالتعويض = ٠

س − ٦ = ٠ ⇒ س = ٦

+	+	+	+
	٣		٦

$= نهـا \sqrt{(س-٦)} = \sqrt{-٣} = ٠$ ، س ← ٣

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

الحلول النموذجية ورقة عمل النهايات والاتصال

(١٧) $\lim_{س \to ٤} \frac{\frac{١}{٤} - \frac{١}{س}}{٤ - س}$ توحيد المقام

$= \lim_{س \to ٤} \frac{\frac{س - ٤}{٤س}}{٤ - س}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{س^{٢} - ٤}{٤س^{٢}(٤ - س)}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{(س - ٢)(س + ٢)}{٤س^{٢}(٤ - س)} \times \frac{١}{س + ٢}$

$= \frac{٤}{٤ \times ٤} = \frac{١}{٤}$

(١٨) $\lim_{س \to ٥} \frac{س^{٣} - ١٢٥}{س^{٢} - ٢٥}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{(س - ٥)(س^{٢} + ٥س + ٢٥)}{(س - ٥)(س + ٥)}$

$= \frac{٢٥ + ٢٥ + ٢٥}{١٠} = \frac{٧٥}{١٠}$

(١٩) $\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{٤ - س} - \sqrt{س}}{٤ - س}$

الحل

$\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{٤ - س} - \sqrt{س}}{٤ - س} \times \frac{\sqrt{٤ - س} + \sqrt{س}}{\sqrt{٤ - س} + \sqrt{س}}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{٤ - س - س}{(٤ - س)(\sqrt{٤ - س} + \sqrt{س})}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{٤ - ٢س}{(٤ - س)(\sqrt{٤ - س} + \sqrt{س})}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{(٢ - س)(٢ + س)}{(٤ - س)(\sqrt{٤ - س} + \sqrt{س})}$

$= \frac{٤}{٢ + ٢} = \frac{٤}{٤} = ١$

(٢٠) $\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{٣ + س} - ٣}{س^{٢} - ٩}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{٣ + س} - ٣}{(س - ٣)(س + ٣)} \times \frac{\sqrt{٣ + س} + ٣}{\sqrt{٣ + س} + ٣}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{٣ + س - ٩}{(س - ٣)(س + ٣)(\sqrt{٣ + س} + ٣)}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{س - ٦}{(س + ٣)(\sqrt{٣ + س} + ٣)}$

$= \frac{-٣}{٦ \times ٦} = \frac{-١}{١٢}$

مكتبة الجمزاوي ALWAEAM
المعلم ناجح الجمزاوي

الحلول النموذجية ورقة عمل النهايات والاتصال

(١) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٣ - ٣س^٢}{٦ - ٢س}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{س^٢(س-٣)}{-٢(س-٣)}$

$= \frac{٩}{-٢}$

(٢) $\lim_{س \to ٠} \left(\frac{١}{٢} - \frac{١}{س}\right)\left(\frac{١}{٦-٣س}\right)$

$= \lim_{س \to ٠} \left(\frac{س-٢}{٢س}\right) \times \frac{١}{٣(س-٢)}$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢ \times ٦} = \frac{١}{١٢}$

(٣) $\lim_{س \to ٢} \frac{\frac{٣}{س+١} - \frac{٤}{٦-٣س}}{س^٢ - ٤}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{٦ - ٣س - ٤ - ٤س}{(س+١)(٣-س)(س-٢)(س+٢)}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{-٧س + ٢}{(س+١)(٣-س)(س-٢)(س+٢)}$

$= \frac{-١٢}{٣ \times ٣ \times ٤ \times ٤} = \frac{-١٢}{١٤٤} = \frac{-١}{١٢}$

(٤) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ - ٨}{س^٢ - ٥س + ٦}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{(س-٢)(س^٢ + ٢س + ٤)}{(س-٣)(س-٢)}$

$= \frac{١٢}{-١} = -١٢$

(٥) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ - ٨}{س^٢ - ٤}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{(س-٢)(س^٢ + ٢س + ٤)}{(س+٢)(س-٢)}$

$= \frac{٤+٤+٤}{٤} = \frac{١٢}{٤} = ٣$

(٦) $\lim_{س \to ٠} \frac{٥(س+٢)}{(س+١)(٣-٢س)(٤+س)(٢+س)}$

$= \frac{٥}{(١)(٣)(٤)(٢)} = \frac{٥}{٢٤}$

الحلول النموذجية ورقة عمل النهايات والاتصال

(٢٦) $\text{نها}_{س \to -٢} \frac{س^٢ - ٣س - ١٠}{س + ٢}$

$= \text{نها}_{س \to -٢} \frac{(س+٢)(س-٥)}{س+٢}$

$= -٢ - ٥ = -٧$

(٢٧) $\text{نها}_{س \to ١} \frac{\frac{٦}{س+٢} - \frac{٢}{س}}{س^٢ + ٢س - ٣}$

$= \text{نها}_{س \to ١} \frac{\frac{٦س - ٢س - ٤}{س(س+٢)}}{س^٢ + ٢س - ٣}$

$= \text{نها}_{س \to ١} \frac{٤ - ٤س}{س(س+٢)} \times \frac{١}{س^٢ + ٢س - ٣}$

$= \text{نها}_{س \to ١} \frac{٤(١-س)}{س(س+٢)} \times \frac{١}{(س+٣)(س-١)}$

$= \frac{-٤}{١(٢+١)(٢+١)}$

$= \frac{-٤}{١٢} = -\frac{١}{٣}$

(٢٨) $\text{نها}_{س \to ٥} \frac{\sqrt{١+٣س} - ٤}{س - ٥}$

$= \text{نها}_{س \to ٥} \frac{\sqrt{١+٣س} - ٤}{س-٥} \times \frac{\sqrt{١+٣س} + ٤}{\sqrt{١+٣س} + ٤}$

$= \text{نها}_{س \to ٥} \frac{(١+٣س) - ١٦}{(س-٥)(\sqrt{١+٣س} + ٤)}$

$= \text{نها}_{س \to ٥} \frac{٣س - ١٥}{٨(س-٥)}$

$= \text{نها}_{س \to ٥} \frac{٣(س-٥)}{٨(س-٥)}$

$= \frac{٣}{٨}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

الحلول النموذجية ورقة عمل النهايات والاتصال

(٢٩) $\text{نها}_{س \to ٩} \dfrac{س^{٤} - ٨١}{\sqrt{٤س} - ٦}$

$= \text{نها}_{س \to ٩} \dfrac{س^{٤} - ٨١}{\sqrt{٤س} - ٦} \times \dfrac{\sqrt{٤س} + ٦}{\sqrt{٤س} + ٦}$

$= \text{نها}_{س \to ٩} \dfrac{(س^{٢} - ٩)(س^{٢} + ٩)(\sqrt{٤س} + ٦)}{٤س - ٣٦}$

$= \text{نها}_{س \to ٩} \dfrac{(س - ٣)(س + ٣)(س^{٢} + ٩)(\sqrt{٤س} + ٦)}{٤(س - ٩)}$

$= \dfrac{(٦)(١٨)(٩٠)}{٤} = ٣٢٤$

(٣٠) $\text{نها}_{س \to ٣} \dfrac{س^{٣} - ٥س + ٦}{٥ - ٢س - س^{٢}}$

اكمل

$\text{نها}_{س \to ٣} \dfrac{س^{٣} - ٥س + ٦}{٥ - ٢س - س^{٢}} \times \dfrac{٥ + ٢س - س^{٢}}{٥ + ٢س - س^{٢}}$

$= \text{نها}_{س \to ٣} \dfrac{(٣ - س)(٢ - س)(٥ + ٢س - س^{٢})}{(٥ - ٢س + س^{٢})(٣ - س)(٣ + س)}$

$= \dfrac{(-١)(-٢)(٥ + ٢س - س^{٢})}{(٥ - ٢س + س^{٢})(٦)}$

$= \dfrac{٢(٥ + ٢س - س^{٢})}{٦(٥ - ٢س + س^{٢})}$

$= \dfrac{١ - س^{٢}}{٤(س^{٢} - ٥س + ٦)}$

$= \dfrac{(١ - س)(١ + س)}{٤(س - ٣)(س - ٢)}$

$= \dfrac{(١ + س)}{٤(س - ٣)} = \dfrac{-٢}{-١٦} = \dfrac{١}{٨}$

(٣١) $\text{نها}_{س \to ٢} \left(\dfrac{١}{س - ٢} - \dfrac{٤}{س^{٣} - ٨} \right)$

اكمل بتوحيد المقام

$= \text{نها}_{س \to ٢} \left(\dfrac{١ \times (س^{٢} + ٢س + ٤)}{(س - ٢)(س^{٢} + ٢س + ٤)} - \dfrac{٤}{س^{٣} - ٨} \right)$

$= \text{نها}_{س \to ٢} \dfrac{س + ٢}{س^{٣} - ٨} - \dfrac{٤}{س^{٣} - ٨}$

$= \text{نها}_{س \to ٢} \dfrac{س + ٢ - ٤}{س^{٣} - ٨}$

$= \text{نها}_{س \to ٢} \dfrac{س - ٢}{(س - ٢)(س^{٢} + ٢س + ٤)}$

$= \dfrac{١}{١٢ + ٤} = \dfrac{١}{٤}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

الحلول النموذجية ورقة عمل النهايات والاتصال

(٣٣) $\lim_{س \to 0} \frac{\frac{ج}{س-٣} + \frac{ج}{س+٣}}{س}$

الحل

$= \lim_{س \to 0} \frac{٦ ج}{(س-٣)(س+٣)} \times \frac{١}{س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{٤ س}{(س-٣)(س+٣)} \times \frac{١}{س}$

$= \frac{٤}{-٣ \times ٣} = -\frac{٤}{٩}$

(٣٤) $\lim_{س \to ٢} \frac{\frac{١}{س+١} - \frac{١}{٣}}{س^٢ - ٤}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{٣ - س - ١}{٣(س+١)} \times \frac{١}{(س-٢)(س+٢)}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{٢ - س}{٣(س+١)} \times \frac{١}{-(س-٢)(س+٢)}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{-١}{٣(س+١)(س+٢)}$

$= \frac{-١}{٣ \times ٤ \times ٤} = -\frac{١}{٤٨}$

(٣٥) $\lim_{س \to ٣} \frac{\frac{١}{س+١} - \frac{١}{٤س-١}}{س^٢ - ٨}$

الحل

$= \lim_{س \to ٣} \frac{٤ - س - ١}{(س+١)(٤س-١)} \times \frac{١}{س^٢ - ٨}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{-(س-٣)}{(س+١)(٤س-١)(س^٢+٢س+٤)(س-٢)}$

$= \frac{-١}{٤ \times ٧ \times ١٩} = -\frac{١}{٥٤٦}$

(٣٦) $\lim_{س \to ٠} \frac{\frac{ج}{س-٣} + \frac{ج}{س+٣}}{س}$

الحل

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٦ ج}{(س-٣)(س+٣)} \times \frac{١}{س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٤ س}{(س-٣)(س+٣)} \times \frac{١}{س}$

$= \frac{٤}{-٣ \times ٣} = -\frac{٤}{٩}$

(٣٧) $\lim_{س \to ٠} \frac{\frac{١}{١+٢ج} - \frac{١}{٥}}{٣س - ٦}$

الحل

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٥ - ٢ج - ١}{٥(١+٢ج)} \times \frac{١}{٣س - ٦}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٤ - ٢ج}{٥(١+٢ج)} \times \frac{١}{٣س - ٦}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{-(س-٠)ج}{٥(١+٢ج)} \times \frac{١}{٣(س-٠)}$

$= \frac{-ج}{٥ \times ٧} \times \frac{١}{٣} = \frac{-ج}{١٥}$

الحلول النموذجية ورقة عمل النهايات والاتصال

(٣٦) $\text{نها}_{س\to 1} \frac{(س+1)^3 - 8}{س^2 - 1} = \frac{0}{0}$

الحل

$\text{نها}_{س\to 1} \frac{(س+1-2)((س+1)^2+2(س+1)+4)}{(س-1)(س+1)}$

$\text{نها}_{س\to 1} \frac{(س-1)((س+1)^2+2(س+1)+4)}{(س-1)(س+1)}$

$= \frac{(1+1)^2+2(1+1)+4}{1+1}$

$= \frac{4+4+4}{2} = \frac{12}{2} = 6$

(٣٧) $\text{نها}_{س\to 2} \frac{(3س-5)^2 - 16}{9 - 3س^2}$

بالتعويض مباشر

$\frac{(3\times 2-5)^2 - 16}{9 - 3\times 2^2}$

$= \frac{(1-)^2 - 16}{9 - 12} = \frac{15-}{3-} = 5$

$= \frac{1 - 16}{3-} = 5$

(٣٨) $\text{نها}_{س\to 10} \frac{س^2 - 100}{س^2 - 10س} = \frac{0}{0}$

$= \text{نها}_{س\to 10} \frac{(س-10)(س+10)}{س(س-10)}$

$= \frac{10+10}{10} = \frac{20}{10} = 2$

(٣٩) $\text{نها}_{س\to 2} \frac{س^2 - 3س + 2}{س^2 - 2س} = \frac{0}{0}$

الحل

$\text{نها}_{س\to 2} \frac{(س-2)(س-1)}{س(س-2)}$

$= \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$

(٤٠) $\text{نها}_{س\to 1^+} \sqrt{1-س^2}$

$1-س^2 = 0$ كيف مجال

$1-س^2 = 0 \Rightarrow س^2 = 1 \Rightarrow س = \pm 1$

$---+++---$

$-1 \quad 1$

$+1$ لاتتمي للمجال

النهاية في هذه الحالة $= 0$

مكتبة العلم ALWESAM المعلم: ناجح الجمزاوي

الحلول النموذجية ورقة عمل النهايات والاتصال

(٤١) هنا $\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{٥س+١} - ٤}{س^٢ - ٩}$

العوض = ÷

أكمل

هنا $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{٥س+١} - ٤}{س^٢ - ٩} \times \frac{\sqrt{٥س+١} + ٤}{\sqrt{٥س+١} + ٤}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{٥س + ١ - ١٦}{(س^٢ - ٩)(\sqrt{٥س+١} + ٤)}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{٥س - ١٥}{(س^٢ - ٩)(\sqrt{٥س+١} + ٤)}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{٥(س - ٣)}{(س - ٣)(س + ٣)(\sqrt{٥س+١} + ٤)}$

$= \frac{٥}{(٣+٣)(\sqrt{٢٥+١} + ٤)}$

$= \frac{٥}{٦ \times (٤+٤)}$

$= \frac{٥}{٦ \times ٨} = \frac{٥}{٤٨}$

(٤٢) هنا $\lim_{س \to -٣} \left(\frac{س^٢ + ٧س + ١٢}{س + ٣} + \sqrt{س + ٤} \right)$

$= \lim_{س \to -٣} \left(\frac{(س^٢ + ٧س + ١٢)}{س + ٣} \right) + \lim_{س \to ٣} \sqrt{س + ٤}$

العوض ÷ ، العوض $= \sqrt{٧}$

$= \lim_{س \to -٣} \frac{(س + ٤)(س + ٣)}{س + ٣} + ١$

$= -٣ + ٤ + ١ = ١ + ١ = ٢$

السؤال التاسع

(أ) المقام = ٠

$س^٢ - ٣٦ = ٠$ ، $س^٢ = ٣٦$

$س = \pm \sqrt{٣٦} = \pm ٦$

نقط الانفصال $\{-٦ ، ٦\}$

(ب) $هـ(س) = \frac{س^٢ - ٤}{س + ٤}$

$س + ٤ = ٠$

لا يحل

لانوجد نقط عدم اتصال

مكتبة الوسام AlWesam
المعلم: ناجح الجمزاوي

الحلول النموذجية ورقة عمل النهايات والاتصال

③ $ق(س) = \frac{س^2+٧س+٩}{س^2-٥س+٦}$

$س^2-٥س+٦=٠$

$(س-٣)(س-٢)=٠$

$س=٢$ ، $س=٣$

نقط الانفصال $= \{٢، ٣\}$

④ $ق(س) = \frac{٥}{س} + \frac{٥}{س-١}$

$س=٠$ $س=١+١=٠$

$س=١$

نقط الانفصال $\{٠، ١\}$

⑤ نبحث في اتصال $ق(س)$ عند $س=-٣$

$ق(-٣) = ٢(-٣)^2-٦(-٣)$

$س \to -٣^+$ $= ١٨+٦=٢٤$

$ق(-٣) = ٢(-٣)^2-٦(-٣)$

$س \to -٣^-$ $= ١٨-٩٢=-٢$

غير متصل

نقط الانفصال $= \{-٣\}$

⑥ ① $\frac{س-١}{س^2-٢٥}$ نأخذ المقام = صفر

$س^2-٢٥=٠$

$س^2=٢٥ \Leftarrow س=\pm\sqrt{٢٥}$

$=\pm٥$

② نبحث عند $س=٥$

$\frac{س-١}{(س-٥)(س+٥)} = \frac{٤}{٠} = \frac{١}{٥}$

$س \to ٥^+$

$س \to ٥^-$

غير متصل

نقط الانفصال $\{-٥، ٥، -١\}$

⑦ $س+١=٠$ $س=-١$

عند $س=-١$ غير متصل

⑧ $ق(س) = \frac{س^2-٤}{س-٤}$ $[٥، ١]$

$س-٤=٠ \Leftarrow س=٤$

$س=\pm\sqrt{٤}=\pm٢$

$س=٢ \Leftarrow ٢ \notin [٥، ١]$

نقط الانفصال $\{١، ٢، ٥\}$

نهاية وبداية فترة

الحلول النموذجية ورقة عمل النهايات والاتصال

٩) $و(س) = \sqrt{س+١}$

$س+١ = ٠ \Leftarrow س = -١$

	$-\infty$		-١		$+\infty$
إشارة $س+١$		−	٠	+	

نقط الانفصال $(-\infty, -١]$

لأنه غير معرف عندها.

١٠) $و(س) = \sqrt[٤]{١٢ - ٣س}$

$١٢ - ٣س = ٠ \Leftarrow ٣س = ١٢ \Leftarrow س = \frac{١٢}{٣}$

$س = ٤$

	$-\infty$		٤		$+\infty$
إشارة $١٢ - ٣س$		+	٠	−	

غير متصل $[٤, \infty)$ يعرف

١١) $و(س) = \frac{٣س}{س^٢ - ١}$ $[٥, ٠]$

$س^٢ - ١ = ٠ \Leftarrow س^٢ = ١$

$\Leftarrow س = \pm\sqrt{١} = \pm ١$

بما أن $١ \notin$ الفترة

نقط الانفصال $\{٠, ١, ٥\}$

١٢) $\frac{س^٢ - ٤}{(س+٦)(س-١)}$

$س - ١ = ٠$ | $س^٢ + ٢س = ٠$

$س = ١$ | $س(س+٢) = ٠$

$س = ٠$ أو $س = -٢$

نقط الانفصال $\{-٢, ٠, ١\}$

١٣) $و(س) = \frac{س^٢ - ١٦}{س^٢ - ٧س}$

$س^٢ - ٧س = ٠ \Leftarrow س(س-٧) = ٠$

$س = ٠ \Leftarrow س = ٠ + ٧ن$

$س = ٧$

نقط الانفصال $\{٠, ٧\}$

١٤) $و(س) = \frac{س}{س^٣ - ٣س^٢ - ٤س}$

$س^٣ - ٣س^٢ - ٤س = ٠$

$(س-٤)(س+١) = ٠$

$س = ٤$ أو $س = -١$

نقط الانفصال $\{-١, ٠, ٤\}$

١٥) $\frac{١}{س} \Leftarrow س = ٠$ نقط الانفصال

$\frac{س+١}{س+٣} \Leftarrow س+٣ = ٠$

$س = -٣$ $\{-٣, ٠\}$

مكتبة الوسام ALwesam
المعلم: ناجح الجمزاوي Software

الحلول النموذجية ورقة عمل النهايات والاتصال

السؤال الثاني

(أ) عبارة عن كثيرة حدود

(ب) م متصل

(ج) $\lim_{س \to ٣} هـ(س) = هـ(٣) = ٤$

$\lim_{س \to ٣} (هـ(س) + ٥) = ٣٨$

$\lim_{س \to ٣} (هـ(س) + ٥) = ٣٨$

$\lim_{س \to ٣} (هـ(س) + ٥) = ٣٨$

$\lim_{س \to ٣} هـ(س) = ٣٨ - ٥ = ٣٣$

$\lim_{س \to ٣} (هـ(س) + ٥) = ٣٣ + ٥ = ٣٨$

$\lim_{س \to ٣} (هـ(س) + ٥) = ٣٨ \times ١٠ = ٣٨٠$

$\lim_{س \to ٣} ٥ هـ(س) = ٣٨٠ - ٤ = ٣٧٦$

$\lim_{س \to ٣} هـ(س) = \frac{٣٧٦}{٥}$

بما أن هـ متصل $\lim_{س \to ٣} هـ(س) = هـ(٣)$

$= \frac{٣٧٦}{٥}$

(د) م متصل

$\lim_{س \to ٣} هـ(س) = م(٣)$

$\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٦س}{س - ٣} = م$

$\lim_{س \to ٣} \frac{س(س-٦)}{(س-٣)(س+١)} = م$

$\frac{-٣}{٣+١} = م$

$م = -\frac{٣}{٤}$ ⟸ $٣ = -٤م$

$\frac{ج}{د} = \frac{-١}{٤}$

(هـ) $هـ(٥) = \frac{-١}{٥}$

$\lim_{س \to ٥} هـ(س) = \lim_{س \to ٥} \frac{-١}{س}$

$= \frac{-١}{٥}$

$\lim_{س \to ٥} هـ(س) = هـ(٥)$

متصل عند $س = ٥$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم ناجح الجمزاوي

الحلول النموذجية ورقة عمل النهايات والاتصال

السؤال الحادي عشر

(ب) $د(٤) = ٧$

$\text{نها}_{س \to ٤} \frac{س^٤ - ١٦}{س - ٤} = \text{نها}_{س \to ٤} \frac{(س-٤)(س+٤)}{س-٤}$

$= \text{نها}_{س \to ٤} (س+٤) = ٨$

$\text{نها}_{س \to ٤} د(س) \neq د(٤)$

غير متصل عند $س = ٤$

(ج) $د(٥) = ١٠$

$\text{نها}_{س \to ٥} \frac{٥ - س}{٥ + ٥س} \times \frac{٥ + ٥س}{٥ + ٥س}$

$= \text{نها}_{س \to ٥} \frac{(٥ - س)(٥ + ٥س)}{٥ - ٥س}$

$= ٥ + ٥ = ١٠$

$\text{نها}_{س \to ٥} د(س) = د(٥)$

متصل عند $س = ٥$

(د)

الكل

$٩ - ٢س$ متصل ع $(-١، ٣)$

كثير حدود.

عند $س = ٣$

$د(٣) = ٨$ $\quad$ $\text{نها}_{س \to ٣} د(س) = ٩ - ٢(٣)$

$س \to ٣$ $\quad$ $= ٩ - ٦$

$= ٣$

غير متصل

عند $س = -١$

$د(-١) = ٩ - ٢(-١) = ١١$

$\text{نها}_{س \to -١} د(س) = ٩ - ٢(-١) = ١١$

$س \to -١$

متصل عند $س = -١$

اكبر ما يمكن

متصل $[-١، ٣]$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

الحلول النموذجية ورقة عمل النهايات والاتصال

(٤) $3س^2 - 8$ متصل على $(-\infty, 4]$
كثير حدود

عند $س = 4^+$
$د(4) = 4$ ، $هـ(س) = 3(4)^2 - 8$
$س \leftarrow 4^+$ $= 48 - 8$
$= 40$

متصل عند $س = 4^+$

عند $س = 4^-$
$د(4) = 3(4)^2 - 8 = 48 - 8 = 40$
$هـ(س) = 3(4)^2 - 8 = 40$
$س \leftarrow 4^-$ متصل

الجواب متصل على $(-\infty, 4]$

---

(٥) $س^3 - 9$ متصل لما $س \in ح$
كثير حدود

$5س + 2$ متصل على $س < 2$
كثير حدود

عند $س = 2$
$هـ(س) = 5(2) + 2$
$س \leftarrow 2^+$ $= 18$

$هـ(س) = س^3 - 9 = 8 - 9 = -1$
$س \leftarrow 2^-$ $= 18$

متصل عند $س = 2$

الجواب متصل على $ح$.

(٦) $\frac{س^2 + 1}{س - 2}$ متصل لما $س \in ح$ ما عدا $(س = 2)$ المقام يساوي صفر عندها

$س = 1^+$ $د(1) = \frac{1^2 + 1}{1 - 2} = \frac{2}{-1} = -2$

$هـ(س) = -1$ متصل عند $س = 1^+$
$س \leftarrow 1^+$

عند $س = 4^-$
$د(4) = 15$
$هـ(س) = \frac{س^2 - 1}{س - 2} = \frac{16 - 1}{4 - 2} = \frac{15}{1} = 15$
$س \leftarrow 4^-$ متصل عند $س = 4^-$

الجواب
متصل على $[4, \infty) - \{2\}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

الحلول النموذجية ورقة عمل النهايات والاتصال

(أ)

نجد ق(س) = ص(س) ÷ و(س) (وهي الأقواس)

ل(س) = ق(س) × و(س) =

$$\begin{cases} 3(س-5)^2 & س \geq 5 \\ 3 & س = 5 \\ (س-5)^2 \times س^2 & س < 5 \end{cases} = \begin{cases} (س+2)(س-5)^3 & س > 5 \\ 3(س-5)^2 & س = 5 \\ (س-5)^2 \times س^2 & س < 5 \end{cases}$$

ل(5) = 3(5-5)² = صفر

نهـا ل(س) = (5-5)³ (5+2) = 0 × 7 = 0
س ← 5⁺

نهـا ل(س) = (5-5)² (5+2) = 0 × 7 = 0
س ← 5⁻

نهـا ل(س) = ل(5) = صفر
س ← 5

ل(س) متصل عند س = 5

(ب)

نجد ق(س) = ص(س) ÷ و(س) وهي الأقواس

$$ق(س) = \begin{cases} 4س+7 & س < -1 \\ س^2+2 & س \geq -1 \end{cases} \div (-(4س^2+5س))$$

$$ل(س) = \begin{cases} -(4س+7)(4س^2+5س) & س < -1 \\ -(س^2+2)(4س^2+5س) & س \geq -1 \end{cases}$$

ل(-1) = -(1+2)(4-5) = -(3)(-1) = 3

نهـا ل(س) = -(4+7)(4-5) = -(11)(-1) = 11
س ← -1⁻

نهـا ل(س) = -(1+2)(4-5) = -(3)(-1) = 3
س ← -1⁺

نهـا ل(س) = 3
س ← -1

نهـا ل(س) = -(4+7)(4-5) = -(11)(-1) = 11
س ← -1

ل(س) متصل عند س = -1

إذن نهـا ل(س) = ل(-1)
س ← -1

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

الحلول النموذجية ورقة عمل النهايات والاتصال

(أ) دمج ٢ قتران

$$ل(س) = \begin{cases} س^٤ + ٢ + ٣س^٢ - س & س < ٤ \\ ٣ + س - ٢س^٢ = ٤ & \\ ٥س - ١ + ٣س^٢ - س & س > ٤ \\ ٤س + ٣س^٢ - ١ & \end{cases}$$

$$ل(٤) = ٥ \times ٤ - ١ + ٣(٤)^٢ - ٤$$
$$= ٢٠ - ١ + ٤٨ - ٤$$
$$= ١٩ + ٤٨ - ٤$$
$$= ٦٢$$

$$\text{نها}_{س \to ٤^+} ل(س) = ٤(٤) + ٣(٤)^٢ - ١$$
$$= ١٦ + ٤٨ - ١$$
$$= ٦٢$$

$$\text{نها}_{س \to ٤^-} (س) = ٤(٤)^٣ - ٤ + ٣$$
$$= ٦٤ - ٤ + ٣$$
$$= ٦٣$$

$$\Leftarrow \text{نها}_{س \to ٤} (س) = ل(٤)$$

متصل عند س = ٤

(ب) دمج ٢ قتران

$$ل(س) = ه(س) \times هـ(س)$$

$$= \begin{cases} ١ \times (٥ - س) & س < ٥ \\ \text{صفر} (س - ٥) & س = ٥ \\ -١ (٥ - س) & س > ٥ \end{cases}$$

$$ل(٥) = \text{صفر} \times (٥ - ٥) = \text{صفر}$$

$$\text{نها}_{س \to ٥^+} ل(س) = -١ (٥ - ٥)$$
$$= -١ \times ٠ = \text{صفر}$$

$$\text{نها}_{س \to ٥^-} (س) = ١ \times (٥ - ٥) = \text{صفر}$$

$$\Leftarrow \text{نها}_{س \to ٥} (س) = ل(٥)$$

متصل عند س = ٥

مكتبة المعلم ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

الحلول النموذجية ورقة عمل النهايات والاتصال

(5) الحل

$$\text{ل}(س) = \begin{cases} (س+1)(\sqrt{س}+1) & س \geq 1 \\ (س-4)(\sqrt{س}-1) & س < 1 \end{cases}$$

$$\text{ل}(1) = (1+1)(\sqrt{1}+1) = 4$$

$$\text{نهـا}_{س \to 1^+} \text{ل}(س) = (1+1)(\sqrt{1}+1) = 4$$

$$\text{نهـا}_{س \to 1^-} \text{ل}(س) = (1-4)(\sqrt{1}-1) = -3 \times 0 = 0$$

النهاية غير موجودة

ل(س) غير متصل عند س = 1

(6) ندرس الاتصال

$$\text{ل}(س) = \begin{cases} \sqrt{س}+2+س & س \geq 2 \\ \sqrt{س}-1+\sqrt{س}+5 & س < 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sqrt{س}+2 & س \geq 2 \\ 2\sqrt{س}+4 & س < 2 \end{cases}$$

$$\text{ل}(2) = \sqrt{2}+2 = 4$$

$$\text{نهـا}_{س \to 2^+} \text{ل}(س) = \sqrt{2}+2 = 4$$

$$\text{نهـا}_{س \to 2^-} \text{ل}(س) = 2\sqrt{2}+4 = 4$$

$$\Leftarrow \text{نهـا}_{س \to 2} \text{ل}(س) = \text{ل}(2) = 4$$

متصل عند س = 2

$$\text{ل}(س) = \text{ق}(س) + \text{و}(س)$$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي