الوحدة الثالثة تطبيقات التفاضل

الفرع الأدبي

المستوى الثالث

2017/2016

الأستاذ : عماد مسك

0795153669

التحـــدّي

* **التزايد والتناقص :-** اذا كان ق معرف على الفترة [أ، ب] وكان س١، س٢ ∈ [أ، ب]

فإن : ١) الاقتران متزايد في الفترة [أ، ب] إذا كان ق(س٢) > ق(س١) عندما س٢ > س١

٢) 〃 متناقصاً 〃 〃 〃 〃 ق(س٢) < ق(س١) عندما س٢ > س١

٣) 〃 ثابتاً 〃 〃 〃 〃 ق(س٢) = ق(س١) عندما س٢ > س١

* **خطوات ايجاد التزايد والتناقص :-**

١) نشتق الاقتران

٢) نساوي المشتقة بالصفر لإيجاد قيم س (القيم الحرجة)

٣) نضع قيم س الناتجة على خط الأعداد

٤) نختبر إشارة المشتقة الأولى فإذا كانت أ) موجبة ← تزايد

ب) سالبة ← تناقص

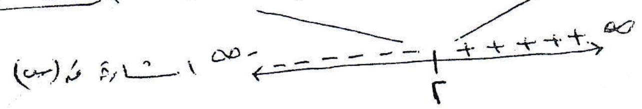
---

* **مثال :-** جد فترات التزايد والتناقص والقيم الحرجة للاقترانات التالية :

١) ق(س) = س² − ٤س + ٥

الحل : ق'(س) = ٢س − ٤ ⇐ ٢س − ٤ = ٠ ⇐ ٢س = ٤ ⇐ $\boxed{\text{س} = ٢}$

القيمة الحرجة $\boxed{\text{س} = ٢}$



فترات التناقص (−∞، ٢) فترات التزايد [٢، ∞)

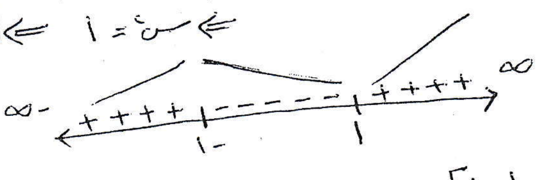
---

٢) ق(س) = س³ − ٣س + ٥

ق'(س) = ٣س² − ٣

٣س² − ٣ = ٠ ⇐ ٣س² = ٣

⇐ س² = ١ ⇐ $\boxed{\text{س} = −١ ، +١}$ القيم الحرجة



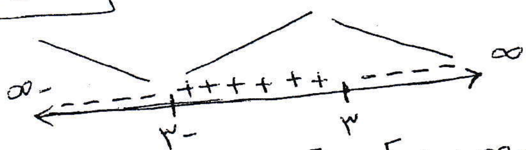
فترات التناقص [−١، ١]

فترات التزايد (−∞، −١] ∪ [١، ∞)

③ $ق(س) = ٩س - \frac{1}{3}س^{3}$

الحل: $ق'(س) = ٩ - س^{2}$ ⟸ $٩ - س^{2} = ٠$ ⟸ $٩ = س^{2}$

⟸ $\boxed{س = \pm ٣}$ القيم الحرجة



فترات التناقص (−∞، −٣] ∪ [٣، ∞)

" التزايد [−٣، ٣]

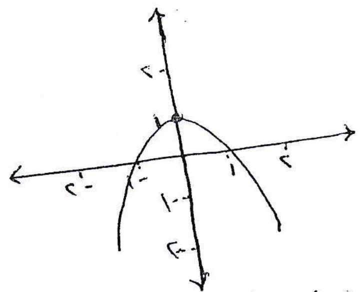
خطأ شائع: القيمة والنقطة

* القيمة هي عدد مثل س = ١ أو س = −٣
* النقطة هي العدد وصورته بالاقتران (مثال) مثل (٥، ق(٥)) ، (−٩، ق(−٩))

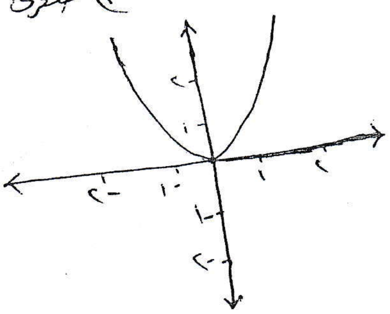
سؤال: أوجد فترات التزايد والتناقص للاقتران $ق(س) = \frac{1}{3}س^{3} - ٤س$

---

* القيم القصوى: هناك نوعان من القيم القصوى ① عظمى (قمة) ② صغرى (قاع)



نقطة عظمى عند (٠، ١)



نقطة صغرى عند (٠، ٠)

---

* خطوات إيجاد القيم العظمى والصغرى:

① نشتق الاقتران
② نساوي المشتقة بالصفر (القيم الحرجة)
③ نضع قيم س الناتجة على خط الأعداد
④ نختبر إشارة المشتقة الأولى ونرسمها

* تحول الاقتران من صعود إلى هبوط (قمة عظمى)
* تحول " " هبوط إلى صعود (قمة صغرى)

*أمثلة :- في الأمثلة التالية جد ① فترات التزايد والتناقص
② القيم الحرجة
③ النقط القصوى للاقترانات

① ق(س) = س^2 − ٨س + ٥

الحل : ق′(س) = ٢س − ٨ ⇐ ٢س − ٨ = ٠ ⇐ ٢س = ٨ ⇐ $\boxed{\text{س} = ٤}$

إشارة ق′(س) $-\infty$ − − − − − − − | + + + + + ∞
٤

① القيمة الحرجة $\boxed{\text{س} = ٤}$

② التناقص (−∞، ٤]   التزايد [٤، ∞)

③ يوجد قيمة صغرى عند س = ٤ وهي النقطة (٤، ق(٤)) = (٤، −١١)

---

② ق(س) = س^3 − ٣س + ٧

الحل : ق′(س) = ٣س^2 − ٣ ⇐ ٣س^2 = ٣ ⇐ $\boxed{\text{س} = \pm ١}$ القيم الحرجة

$-\infty$ + + + + + | − − − − − − − − | + + + + ∞
−١   ١

التناقص [−١، ١]
التزايد (−∞، −١] ∪ [١، ∞)
يوجد قيمة عظمى عند س = −١ والنقطة (−١، ٩)
〃 〃 صغرى 〃 س = ١ والنقطة (١، ٥)

---

③ ق(س) = $\frac{\text{س}^3}{٣}$ − $\frac{٥\text{س}^2}{٢}$ + ٦س

عبارة تربيعية

الحل : ق′(س) = $\frac{٣\text{س}^2}{٣}$ − $\frac{١٠\text{س}}{٢}$ + ٦ = س^2 − ٥س + ٦ = ٠

⇐ (س − ٣)(س − ٢) = ٠

$\boxed{\text{س} = ٣}$ أو $\boxed{\text{س} = ٢}$ القيم الحرجة

+ + + + + | − − − − − | + + + + +
٢   ٣

التناقص [٢، ٣]
التزايد (−∞، ٢] ∪ [٣، ∞)

يوجد قيمة عظمى عند س = ٢ والنقطة (٢، $\frac{١٤}{٣}$)
〃 〃 صغرى عند س = ٣ = (٣، $\frac{٩}{٢}$)

④ ق(س) = ٢س - ٥

الحل: قَ(س) = ٢ لا يمكن أن تساوي صفر

لا يوجد قيم حرجة ولا يوجد قيم قصوى

إشارة قَ(س) $-\infty$ + + + + + + + + + ∞

التزايد $(-\infty ، \infty)$ أو ق متزايد على ح

---

⑤ ق(س) = $س^٣ + ٥$

الحل: قَ(س) = $٣س^٢$ ⟸ $٣س^٢ = ٠$ ⟸ $س^٢ = ٠$ ⟸ $\boxed{س = ٠}$ قيمة حرجة

إشارة قَ(س) $-\infty$ + + + + + | + + + + ∞ (٠)

التناقص لا يوجد فترات تناقص

التزايد $(-\infty ، \infty)$ ، لا يوجد قيم قصوى

---

⑥ ق(س) = ١٠ - ٣س

الحل: قَ(س) = -٣ لا يمكن أن تساوي صفر

$-\infty$ - - - - - - - ∞

لا يوجد قيم حرجة ولا قيم قصوى

مجالات التناقص $(-\infty ، \infty)$ أو متناقص على ح

سؤال: أوجد القيم الحرجة وفترات التزايد والتناقص والقيم القصوى

١) ق(س) = ٨ - $س^٣$

٢) ق(س) = $س^٣ - ٣س^٢ - ٩س$

* **اختبار المشتقة الثانية :-**

١) نجد القيم الحرجة ولتكن القيمة الحرجة (جـ)

٢) نجد المشتقة الثانية للاقتران ق''(س) ثم نختبر إشارة القيمة الحرجة في المشتقة الثانية إذا:

أ) ق''(جـ) > ٠ (موجبة) هناك قيمة صغرى عند س = جـ

ب) ق''(جـ) < ٠ (سالبة) هناك قيمة عظمى عند س = جـ

جـ) ق''(جـ) = ٠ (صفر) يفشل الاختبار ونرجع إلى اختبار المشتقة الأولى

مثال: باستخدام اختبار المشتقة الثانية، جد القيم العظمى والصغرى (إن وجدت) للاقترانات التالية:

١) ق(س) = س² − ٨س + ٥

الحل: ق'(س) = ٢س − ٨ ⟸ ٢س − ٨ = ٠ ⟸ $\boxed{\text{س = ٤}}$ قيمة حرجة

ق''(س) = ٢ ⟸ ق''(٤) = ٢ موجبة

∴ هناك قيمة صغرى عند س = ٤ قيمتها (٤، ق(٤)) = (٤، −١١)

---

٢) ق(س) = س³ − ٣س²

الحل: ق'(س) = ٣س² − ٦س ⟸ ٣س² − ٦س = ٠ ⟸ ٣س (س − ٢) = ٠

٣س = ٠ ⟸ $\boxed{\text{س = ٠}}$ أو س − ٢ = ٠ ⟸ $\boxed{\text{س = ٢}}$

القيم الحرجة هي س = ٠، ٢

ق''(س) = ٦س − ٦

ق''(٠) = −٦ (سالبة) قيمة عظمى عند س = ٠ قيمتها (٠، ٠)

ق''(٢) = ٦(٢) − ٦ = ١٢ − ٦ = ٦ (موجبة) قيمة صغرى عند س = ٢ قيمتها (٢، −٤)

---

٣) ق(س) = $\frac{\text{س}^3}{3}$ − $\frac{\text{٧س}^2}{2}$ + ١٠س

الحل: ق'(س) = س² − ٧س + ١٠ ⟸ س² − ٧س + ١٠ = ٠

⟸ (س − ٥)(س − ٢) = ٠

إما س − ٥ = ٠ ⟸ $\boxed{\text{س = ٥}}$ أو س − ٢ = ٠ ⟸ $\boxed{\text{س = ٢}}$

القيم الحرجة س = ٥، ٢

ق''(س) = ٢س − ٧

ق''(٥) = ٢(٥) − ٧ = ٣ (موجبة) قيمة صغرى عند س = ٥

ق''(٢) = ٢(٢) − ٧ = −٣ (سالبة) قيمة عظمى عند س = ٢

* الرسم البياني لـ ق(س) :-

كيف يمكن الاعتماد على رسمة ق(س) لإيجاد التزايد والتناقص والقيم الحرجة والقيم القصوى

* الخطوات :- نسير في الرسم من اليسار إلى اليمين ونقرأ الفترة من محور السينات

١) صعود (طلوع) ← تزايد ، هبوط (نزول) ← تناقص ، خط مستقيم ← ثابت

٢) النقط الحرجة إما قمة أو قاع

٣) قمة ← (نقطة عظمى)

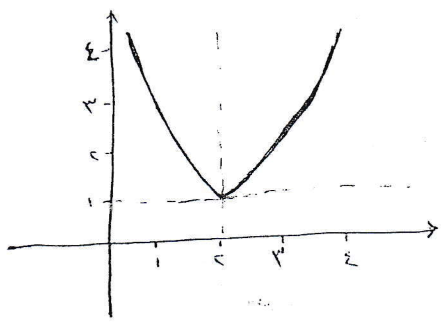
قاع ← (نقطة صغرى)

مثال : اعتمد الرسم التالي لـ ق(س) وأجب عن الأسئلة التي تليه :

جد : ١) فترات التزايد والتناقص

٢) القيمة الحرجة

٣) النقط القصوى



الحل ١) التناقص (-∞، ٢]   التزايد [٢، ∞)

٢) قيمة حرجة عند س = ٢ (قاع)

٣) نقطة صغرى (٢، ١)

مثال :-

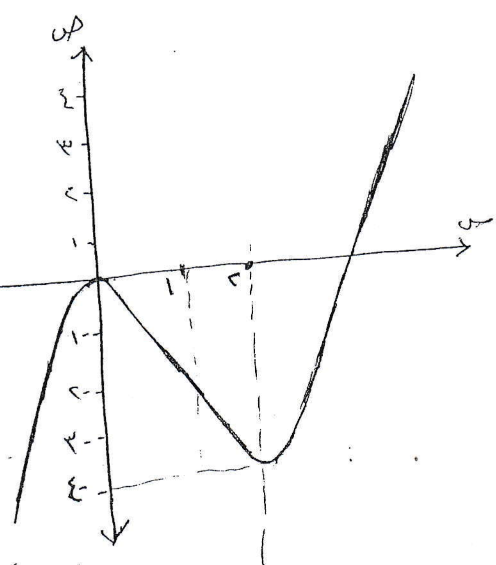
١) التزايد (-∞، ٠) ∪ [٢، ∞)

التناقص [٠، ٢]

القيم الحرجة س = ٠ ، ٢

نقطة عظمى (٠، ٠)

نقطة صغرى (٢، -٤)



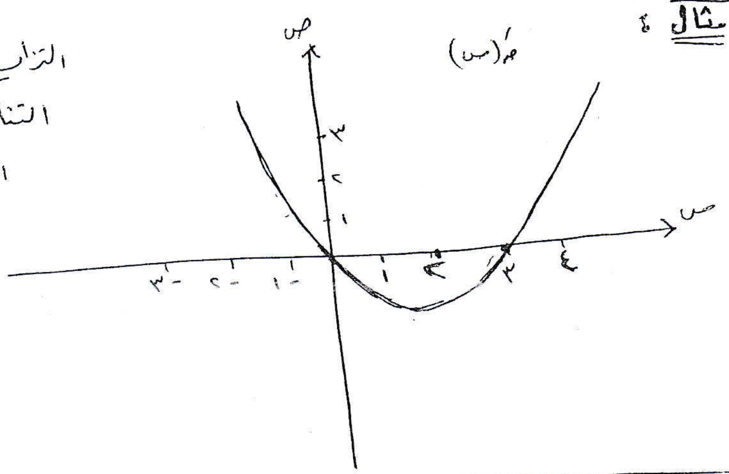
* الرسم البياني لـ ق'(س) :-

كيف يمكن الاعتماد على رسمة ق'(س) لإيجاد التزايد والتناقص والقيم الحرجة والقيم القصوى ؟

* الخطوات :- نسير مع الرسم من اليسار إلى اليمين ونقرأ الفترة من محور السينات !

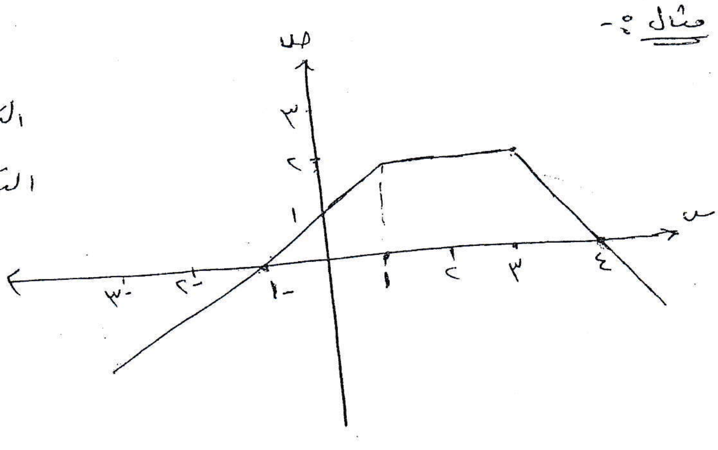
① فوق محور السينات ← تزايد ، تحت محور السينات ← تناقص
② النقط الحرجة نقاط التقاطع مع محور السينات
③ القيمة العظمى (تحول من فوق الى تحت)
④ القيمة الصغرى (= من تحت الى فوق)

مثال :



التزايد (-∞ ، ٠] ∪ [٣ ، ∞)
التناقص [٠ ، ٣]
القيم الحرجة عند س = ٠ ، ٣
القيمة العظمى عند س = ٠
القيمة الصغرى عند س = ٣

مثال :-



التزايد [-١ ، ٤]
التناقص (-∞ ، -١] ∪ [٤ ، ∞)
القيم الحرجة س = -١ ، ٤
القيمة الصغرى عند س = -١
القيمة العظمى عند س = ٤

* **تطبيقات على القيم القصوى :-** (لإيجاد أكبر ما يمكن ، أصغر ما يمكن)

* **خطوات الحل :-**

١) نذهب إلى كلمة أكبر ما يمكن أو أصغر ما يمكن لـ ...
٢) نكتب القانون الدال على المطلوب
٣) نجعل القانون في المتغيرات بمتغير واحد (عن طريق المعطيات)
٤) نشتق ونساوي المشتقة بالصفر ونجد القيم الحرجة (المطلوب)
٥) نختبر القيم الحرجة ونبين أنها قيمة قصوى باستخدام اختبار المشتقة الأولى أو الثانية.

مثال :- عددان موجبان مجموعهما ١٢ وحاصل ضربهما أكبر ما يمكن ؟؟

المعطيات : نفرض العدد الأول س
العدد الثاني ص

المطلوب : حاصل ضربهما أكبر ما يمكن

الحل : ع = س × ص   لكن من المعطيات س + ص = ١٢

⇐ $\boxed{\text{ص} = ١٢ - \text{س}}$

⇐ ع = س (١٢ − س) ⇐ ع = ١٢س − س^2 (نشتق)

$\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = ١٢ - ٢\text{س}$

١٢ − ٢س = صفر ⇐ ١٢ = ٢س ⇐ $\boxed{\text{س} = ٦}$ القيمة الحرجة (العدد الأول)

∞- + + + + + | − − − − − − ∞ (٦)   إشارة ع ، قيمة عظمى عند س = ٦

ص = ١٢ − ٦ = ٦ ⇐ ∴ العددان هما ٦ ، ٦

---

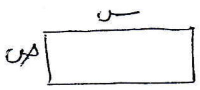
* **سؤال :-** عددان حاصل ضربهما (٣٦) ومجموعهما أقل ما يمكن ؟!

المعطيات : نفرض العدد الأول س
العدد الثاني ص

المطلوب : حاصل مجموعهما أقل ما يمكن (قيمة صغرى)

الإجابة — العددان هما ٦+ ، ٦+

*مثال ٥:- لوحة مستطيلة الشكل محيطها ١٠٠سم ، جد طولها لتكون المساحة أكبر ما يمكن ؟؟



المعطيات: مستطيل الطول (س) ، العرض (ص)

المطلوب: المساحة أكبر ما يمكن

الحل: م = س × ص　　لكن من المعطيات　　٢س + ٢ص = ١٠٠

٢ص = ١٠٠ - ٢س

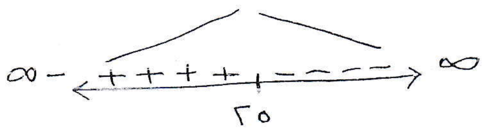
$\boxed{\text{ص = ٥٠ - س}}$

م = س(٥٠ - س)

⇐ م = ٥٠س - س^{٢}　(نشتق)

م' = ٥٠ - ٢س ⇐ ٥٠ - ٢س = ٠

٥٠ = ٢س ⇐ $\boxed{\text{س = ٢٥}}$

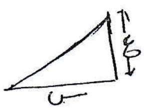


هناك قيمة عظمى عند س = ٢٥

قيمة ص = ٥٠ - ٢٥ = ٢٥

∴ أكبر مساحة ممكنة للمستطيل عندما يكون الطول ٢٥م والعرض ٢٥م (مربع)

مثال: مثلث قائم الزاوية مجموع ضلعي القائمة = ٦٠سم ، جد أكبر مساحة ممكنة للمثلث ؟؟



المعطيات: مثلث قائم الزاوية القاعدة (س) والارتفاع (ع)

المطلوب: أكبر مساحة ممكنة للمثلث

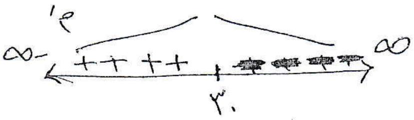
الحل: م = ½ × س × ع ⇐ م = س ع / ٢　　لكن من المعطيات

س + ع = ٦٠

⇐ $\boxed{\text{ع = ٦٠ - س}}$

⇐ م = س(٦٠ - س) / ٢ = (٦٠س - س^{٢}) / ٢　(نشتق)

م' = (٦٠ - ٢س) / ٢ ⇐ م' = ٣٠ - س ⇐ ٣٠ - س = ٠ ⇐ $\boxed{\text{س = ٣٠}}$

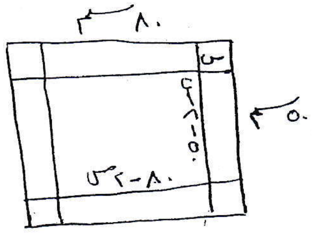


$\boxed{\text{قيمة عظمى عند س = ٣٠}}$

$\boxed{\text{قيمة ع = ٦٠ - ٣٠ = ٣٠}}$

∴ أكبر مساحة للمثلث عندما س = ٣٠م ، ع = ٣٠م

* مثال ٩: يراد عمل صندوق مفتوح من الأعلى من قطعة ورق مقوى مستطيلة الشكل أبعادها ٨٠ سم ، ٥٠ سم وذلك بقطع مربعات متساوية عند رؤوسها ثم ثني الأجزاء البارزة إلى الأعلى ، ما حجم أكبر صندوق يمكن صنعه بهذه الطريقة.



المعطيات: نفرض أن طول ضلع المربع المراد قطعه س

⟸ طول قاعدة الصندوق ٨٠ - ٢س

⟸ عرض قاعدة الصندوق ٥٠ - ٢س

الحل: شكل الصندوق متوازي مستطيلات

حجم متوازي المستطيلات = الطول × العرض × الارتفاع

ح = (٨٠ - ٢س)(٥٠ - ٢س)(س)

ح = (٤٠٠٠ - ٢٦٠س + ٤س^{٢})(س)

ح = ٤٠٠٠س - ٢٦٠س^{٢} + ٤س^{٣} (نشتق)

ح' = ٤٠٠٠ - ٥٢٠س + ١٢س^{٢}

ح' = ١٢س^{٢} - ٥٢٠س + ٤٠٠٠ (بالقسمة على ٤)

ح' = ٣س^{٢} - ١٣٠س + ١٠٠٠

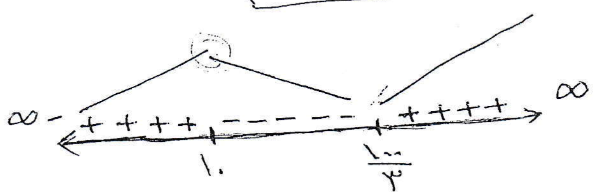
⟸ ٣س^{٢} - ١٣٠س + ١٠٠٠ = صفر

(٣س - ١٠٠)(س - ١٠) = صفر

٣س - ١٠٠ = صفر ⟸ ٣س = ١٠٠ ⟸ $\boxed{\text{س} = \frac{١٠٠}{٣}}$

أو س - ١٠ = صفر ⟸ $\boxed{\text{س} = ١٠}$

قيمة عظمى عند $\boxed{\text{س} = ١٠}$



∴ طول قاعدة الصندوق = ٨٠ - ٢(١٠) = ٦٠ سم

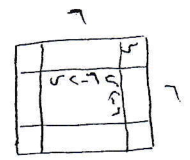
∴ عرض قاعدة الصندوق = ٥٠ - ٢(١٠) = ٣٠ سم

⟸ أكبر حجم متوازي المستطيلات = الطول × العرض × الارتفاع

= ٦٠ × ٣٠ × ١٠ = ١٨٠٠٠ سم^{٣}

مثال :- قطعة مربعة من الورق طول ضلعه ٦ سم ، إذا رفعت من أطرافها الأربعة مربعات متساوية ، طول كل ضلع منها س ، ثم ثنيت الجوانب بحيث أصبحت الورقة على شكل متوازي مستطيلات مفتوحة من الأعلى ، جد أكبر حجم لهذا الصندوق ؟

المعطيات :- نفرض أن طول ضلع المربع المراد قطعه س



∴ طول قاعدة الصندوق ٦ − ٢س

∴ عرض قاعدة الصندوق ٦ − ٢س (لأن القاعدة مربعة)

الحل: حجم متوازي المستطيلات = الطول × العرض × الارتفاع

ع = (٦ − ٢س)(٦ − ٢س) × (س)

. —— أكمل

---

* مثال :- صندوق قاعدته مربعة الشكل حجمه ٦٤ سم³ ، جد أكبر مساحة لأوجه الصندوق؟

المعطيات : نفرض أن طول القاعدة س

عرض القاعدة س

الارتفاع ع

الحل : مساحة متوازي المستطيلات الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين

م = ٤س ع + ٢س²

لاكن من المعطيات :

ح = س² ع

٦٤ = س² ع ⇐ $\boxed{\text{ع} = ٦٤ / \text{س}^2}$

م = ٤س (٦٤ / س²) + ٢س²

م = ٢٥٦ / س + ٢س² (نشتق)

⇐ م′ = −٢٥٦ / س² + ٤س ⇐ −٢٥٦ / س² + ٤س = ٠

⇐ −٢٥٦ = −٤س³ ⇐ س³ = ٦٤ ⇐ $\boxed{\text{س} = ٤}$

+ + + + + | − − − − −

٤

قيمة عظمى عند $\boxed{\text{س} = ٤}$

ع = ٦٤ / (٤)² = ٤

م = ٤ × ٤ × ٤ + ٢(٤)² = ٩٦ سم²

*مثال ٥:- صندوق قاعدته مربعة الشكل حجمه ١٠٨ سم³ ، جد اكبر مساحة لأوجه الصندوق بدون غطاء ؟؟

المعطيات: نفرض أن طول القاعدة س

عرض القاعدة س (لأنها مربعة)

الارتفاع = ع

الحل: مساحة متوازي المستطيلات الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة (بدون غطاء)

م = ٤س ع + س²

ومن المعطيات:

ح = س² × ع

١٠٨ = س² ع

$\boxed{ع = \frac{١٠٨}{س^٢}}$

م = ٤س $\left(\frac{١٠٨}{س^٢}\right)$ + س²

م = $\frac{٤٣٢}{س}$ + س² (نشتق)

⇐ م' = $-\frac{٤٣٢}{س^٢}$ + ٢س ⇐ $-\frac{٤٣٢}{س^٢}$ + ٢س = ٠ ⇐ $\frac{-٤٣٢}{س^٢}$ = -٢س

⇐ -٤٣٢ = -٢س³ ⇐ س³ = ٢١٦ ⇐ $\boxed{س = ٦}$

+ + + + + | - - - - -

٦

قيمة عظمى عند $\boxed{س = ٦}$

$\boxed{ع = \frac{١٠٨}{٣٦} = ٣}$

⇐ م = ٤ × ٦ × ٣ + (٦)² = ١٠٨ سم²

سؤال: اذا كانت مساحة أوجه صندوق قاعدته مربعة بدون غطاء ٤٨ سم²، جد اكبر حجم لهذا الصندوق ؟؟

المعطيات: طول القاعدة س

عرض القاعدة س

الارتفاع ع

ح = س × س × ع

ح = س² ع

لكن من المعطيات:

المساحة الكلية بدون غطاء

م = ٤س ع + س²

٤٨ = ٤س ع + س²

٤٨ - س² = ٤س ع

ع = $\frac{٤٨ - س^٢}{٤س}$

المساحة الكلية للمتوازي = ٢٤ العرض × ١ الارتفاع

* تطبيقات إقتصادية على التفاضل :-

مفاهيم اقتصادية : ① عدد القطع المنتجة س
② سعر القطعة الواحدة ع
③ التكلفة الكلية ك(س)
④ الايراد الكلي د(س)
⑤ الربح الكلي ر(س)

التكلفة الحدية ← ك/(س) (معدل التغير في التكلفة بالنسبة لعدد الوحدات المبيعة)
الايراد الكلي ← د(س) = التكلفة الكلية + الربح = ك(س) + ر(س)
الايراد الحدي ← د/(س) (معدل التغير في الايراد بالنسبة لعدد الوحدات المبيعة)
الربح الكلي ← ر(س) = د(س) - ك(س)
الربح الحدي ← ر/(س) (معدل التغير في الربح بالنسبة لعدد الوحدات المبيعة)

* ملاحظة :- اذا أعطيت في السؤال تكلفة قطعة واحدة أو ربح قطعة واحدة أو ايراد قطعة واحدة وطلب التكلفة الكلية ، الربح الكلي ، الايراد الكلي (نضرب في س ينتج الكلي)

مثال : مصنع ألبسة إذا كان اقتران التكلفة الكلية ك(س) = ١٠س واقتران الايراد الكلي د(س) = ٥٠س - س^٢ عند بيع س وحدة من منتج ما

١) جد التكلفة الحدية ٢) الايراد الحدي ٣) الربح الكلي ٤) الربح الحدي

الحل : ك(س) = ١٠س

١) التكلفة الحدية ك/(س) = ١٠

٢) الايراد الكلي د(س) = ٥٠س - س^٢
الايراد الحدي د/(س) = ٥٠ - ٢س

٣) الربح الكلي ر(س) = الايراد الكلي - التكلفة الكلية
= ٥٠س - س^٢ - ١٠س = ٤٠س - س^٢

٤) الربح الحدي ر/(س) = ٤٠ - ٢س

* **مثال**:- إذا كان سعر القطعة الواحدة $ع(س) = ٥س^{٣} + س^{٢}$ وتكلفة القطعة الواحدة $= ٤س + ٣$ جد الربح الحدي عند $\boxed{س = ١}$

الحل: الإيراد الكلي = عدد القطع × سعر القطعة الواحدة

$د(س) = س \times (٥س^{٣} + س^{٢}) = ٥س^{٤} + س^{٣}$

التكلفة الكلية = عدد القطع × تكلفة القطعة الواحدة

$ك(س) = س \times (٤س + ٣) = ٤س^{٢} + ٣س$

الربح الكلي $ر(س) = د(س) - ك(س)$

$ر(س) = (٥س^{٤} + س^{٣}) - (٤س^{٢} + ٣س)$

$= ٥س^{٤} + س^{٣} - ٤س^{٢} - ٣س$

الربح الحدي $ر'(س) = ٢٠س^{٣} + ٣س^{٢} - ٨س - ٣$

عند $\boxed{س = ١}$ $ر'(١) = ٢٠(١)^{٣} + ٣(١)^{٢} - ٨(١) - ٣ = ١٢$

---

* **مثال**: اذا كان سعر القطعة $ع(س) = ٣س^{٢} + ٤$ وتكلفة القطعة $= ٧س$ جد الربح الحدي عند $\boxed{س = ٢}$

الحل:- الايراد الكلي = عدد القطع × سعر القطعة الواحدة

$د(س) = س \times (٣س^{٢} + ٤) = ٣س^{٣} + ٤س$

التكلفة الكلية = عدد القطع × تكلفة القطعة الواحدة

$ك(س) = س \times ٧س = ٧س^{٢}$

الربح الكلي $= د(س) - ك(س)$

$ر(س) = (٣س^{٣} + ٤س) - ٧س^{٢}$

$= ٣س^{٣} + ٤س - ٧س^{٢}$

الربح الحدي $ر'(س) = ٩س^{٢} + ٤ - ١٤س$ وعند $\boxed{س = ٢}$

$ر'(٢) = ٩(٢)^{٢} + ٤ - ١٤(٢) = ٢٦$

* سؤال: اذا كان الربح الكلي ر(س) = ٥س² + ٣س ، والتكلفة الكلية ك(س) = ٧س − ٣ جد الإيراد الحدي عند $\boxed{\text{س} = ٢}$ ؟؟

---

* سؤال:- إذا كان الايراد الكلي د(س) = ٥س² + ٣س والتكلفة الكلية ك(س) = ٨س − ٥ جد الربح الحدي عند $\boxed{\text{س} = ٢}$ ؟؟

---

* كيفية ايجاد (أقل تكلفة ، أكبر ايراد ، أكبر ربح) :-

خطوات الحل: ١) س الكلي تبدأ (التكلفة الكلية ، الايراد الكلي ، الربح الكلي)

٢) نجد الحدي ونساويه بالصفر (تكلفة حدية ، ايراد حدي ، ربح حدي)

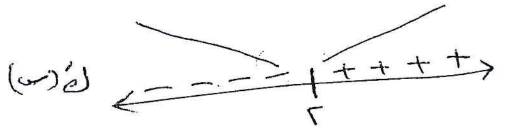
٣) نبحث إشارة الناتج في الحدي لإيجاد أكبر ما يمكن أو أصغر ما يمكن.

مثال:- اذا كانت تكلفة قطعة واحدة هي س − ٤ جد عدد القطع حتى تكون التكلفة أقل ما يمكن ؟؟

الحل:- التكلفة الكلية = عدد القطع × تكلفة القطعة الواحدة

ك(س) = س × (س − ٤) = س² − ٤س

التكلفة الحدية ك'(س) = ٢س − ٤ ⇐ ٢س − ٤ = ٠ ⇐ $\boxed{\text{س} = ٢}$



أقل تكلفة ممكنة عندما عدد القطع = ٢

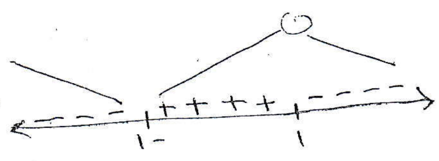
مثال:- اذا كان سعر القطعة الواحدة ع(س) = ٣ − س² جد عدد القطع حتى يكون الايراد أكبر ما يمكن ؟؟

الحل:- الايراد الكلي = عدد القطع × سعر القطعة الواحدة

د(س) = س × (٣ − س²) = ٣س − س³

الايراد الحدي د'(س) = ٣ − ٣س² ⇐ ٣ − ٣س² = ٠ ⇐ ٣س² = ٣ ⇐ س² = ١

⇐ س = ١ ، −١



أكبر ايراد ممكن عندما عدد القطع = ١

مثال: اذا كان الربح الكلي $ر(س) = \frac{س^{٣}}{٣} - \frac{٥س^{٢}}{٢} + ٦س$ جد عدد القطع حتى يكون الربح أكبر ما يمكن؟؟

الحل: الربح الحدي $ر'(س) = س^{٢} - ٥س + ٦ = ٠$

$(س - ٣)(س - ٢) = ٠$

$س = ٣ ، ٢$

ر'(س): + + + | ٢ | − − − − | ٣ | + + +

اكبر ربح ممكن عندما عدد القطع = ٢

مثال: اذا كان $ر(س) = ٣س + س^{٢}$ هو اقتران الربح الكلي الناتج عن بيع س وحدة من منتج ما ، $ك(س) = ١ - \frac{س^{٣}}{٣}$ هو اقتران التكلفة الكلية لهذا المنتج، أوجد قيمة س التي تجعل الإيراد اكبر ما يمكن؟؟

الحل: الايراد الكلي $د(س) = ك(س) + ر(س)$

$د(س) = ١ - \frac{س^{٣}}{٣} + ٣س + س^{٢}$

الايراد الحدي $د'(س) = -س^{٢} + ٣ + ٢س = ٠$ (بالقسمة على −١)

$د'(س) = س^{٢} - ٢س - ٣ = ٠$

$(س - ٣)(س + ١) = ٠$

$س = ٣ ، -١$

د'(س): − − − | −١ | + + + + | ٣ | − − − − − −

اكبر إيراد ممكن عندما عدد القطع = ٣

مثال: يبيع مصنع للأحذية س حذاء من منتجاته اسبوعياً بسعر القطعة (٨٠٠ − ٨، س) قرش فإذا كانت تكلفة س من الأحذية (٢٠٠س + ٨٠٠٠) فما عدد الأحذية التي يجب أن ينتجها المصنع أسبوعياً حتى يكون ربحه اكبر ما يمكن؟؟

الحل: سعر بيع س من الأحذية (الايراد الكلي) $= س \times (٨٠٠ - ٠{,}٨س) = ٨٠٠س - ٠{,}٨س^{٢}$

سعر تكلفة س من الأحذية (التكلفة الكلية) $= (٢٠٠س + ٨٠٠٠)$

الربح الكلي ر(س) = الايراد الكلي − التكلفة الكلية

$ر(س) = ٨٠٠س - ٠{,}٨س^{٢} - ٢٠٠س - ٨٠٠٠$

$ر(س) = ٦٠٠س - ٠{,}٨س^{٢} - ٨٠٠٠$

$ر'(س) = ٦٠٠ - ١{,}٦س = ٠ \Leftarrow ٦٠٠ = ١{,}٦س \Leftarrow س = ٣٧٥$

ر': + + + | ٣٧٥ | − − − − − −

يجب أن يبيع المصنع ٣٧٥ قطعة اسبوعياً ليكون الربح اكبر ما يمكن.