الدرس الأول

مبدأ العد

ينص مبدأ العد العام على :-

اذا امكن اجراء عمل ما على خطوتين بحيث أن الخطوة الأولى تجري بطرق عددها (n_1) والخطوة الثانية تجري بطرق عددها (n_2) ، فيمكن إجراء العمل بطرق عددها يساوي $n_1 \times n_2$

مثال توضيحي ①

بكم طريقة يمكن ان نختار طالب وطالبة من بين المجموعتين التاليتين ؟ احمد ، محمد } ، { سحر ، مريم ، سناء }

الحل

الخطوات : العملية تتم على خطوتين

الخطوة الأولى : اختيار الطالب

الخطوة الثانية : اختيار الطالبة

عدد الطرق = ٢ × ٣ = ٦

رسم الشجرة التوضيحية

الخطوة الأولى: احمد، محمد

الخطوة الثانية: سحر، مريم، سناء

ملاحظة هامة

ترتيب المراحل لا يهم ، لكن التتابع والتوالي بعد إنهاء مرحلة ينتقل الى المرحلة الأخرى

مثال ②

دخل مالك محلاً لتناول وجبة الغداء يوجد امامه ثلاثة انواع من الشوربة ونوعين من اللحوم فبكم طريقة يمكنه اختيار وجبة

مكونة من نوع واحد من الشوربة ونوع واحد من اللحم.

الحل

الخطوات: العملية تتم على خطوتين

الخطوة الأولى: اختيار الشوربة

الخطوة الثانية: اختيار اللحم

عدد الطرق = ٣ × ٢ = ٦

مثال ③

اراد شخص شراء خضار وفواكه من السوق موجد امامه اربع اصناف خضار، وخمس اصناف من الفواكه. فاذا اراد شراء صنفاً واحداً من كل نوع، فبكم طريقة يمكن اختيار مشترياته.

الحل

الخطوات: العملية تتم على خطوتين

الخطوة الأولى: اختيار الخضار

الخطوة الثانية: اختيار الفواكه

عدد الطرق = ٥ × ٤ = ٢٠

مثال ④

بكم طريقة يمكن اختيار مدير ونائب له من بين ٨ معلمين بحيث لا يشغل المعلم اكثر من منصب؟

الحل

الخطوات: العملية تتم على خطوتين

الخطوة الأولى: اختيار المدير (تم اختياره من ٨ معلمين)

الخطوة الثانية: اختيار نائب له من الـ ٧ معلمين المتبقين

عدد الطرق = ٨ × ٧ = ٥٦

مثال ⑤

كم عدداً مؤلفاً من منزلتين يمكن تكوينه من مجموعة الارقام {٣، ٥، ٦، ٧}

(أ) اذا لم يسمح بالتكرار

(ب) اذا سمح بالتكرار

الحل

العملية تتم على خطوتين

← يتبع الحل

الخطوة الأولى : اختيار منزلة الاحاد من مجموعة الارقام

الخطوة الثانية : اختيار منزلة العشرات من الارقام المتبقية

عدد الطرق = ٣ × ٢ = ٦

① اذا سمح بالتكرار

العملية تتم على خطوتين :

الخطوة الأولى : اختيار منزلة الاحاد من مجموعة الارقام

الخطوة الثانية : اختيار منزلة العشرات من مجموعة الارقام نفسها

عدد الطرق = ٣ × ٣ = ٩

ملاحظة هامة

① يمكن استخدام الاسس وذلك اختيار عددين من ثلاثة ارقام مع التكرار (الارجاع)

عدد الطرق = $٣^{٢}$ = ٩

② الترتيب هو مجموعة من الاعداد المكونة من رقمين ٥٢ يختلف ٢٥

مثال ⑥ تدريب ① ص ١٩

اراد عثمان السفر من العقبة إلى دمشق مرورًا بعمان ، فاذا كان بامكانه السفر من العقبة إلى عمان بواسطة الطائرة أو السيارة وبامكانه السفر من عمان إلى دمشق بواسطة الطائرة أو السيارة أو القطار ، فكم طريقة أمام عثمان للسفر من العقبة الى دمشق مرورًا بعمان ؟

الحل

هناك طريقتين للسفر من العقبة الى عمان ، وهناك ثلاث طرق للسفر من عمان الى دمشق .

عدد الطرق = ن١ × ن٢

= ٢ × ٣ = ٦ طرق

مثال ⑦ تدريب ② ص ١٩

اذا كان عدد الجالسين في احدى المدارس (٢٠) معلمًا ، بكم طريقة يمكن تكوين لجنة ثلاثية مؤلفة من رئيس وامين سر وامين صندوق

الحل

العملية تتم على ثلاث خطوات

الخطوة الأولى: اختيار الرئيس

الخطوة الثانية: اختيار امين السر

من المتبقين الباقيين

الخطوة الثالثة: اختيار امين الصندوق

من بقية المعلمين

عدد الطرق = ن١ × ن٢ × ن٣

= ٢٠ × ١٩ × ١٨ = ٦٨٤٠

مثال (٨) سنة ١٩٩٨

دخل احد الزبائن محلاً ليبيع اجهزة الحاسوب موجد أمامه (٣) انواع من شاشات العرض و (٤) انواع للوحدات المعالجة و (٥) انواع لوحدات التشغيل (الصندوق) فكم طريقة يمكنه اختيار جهاز مكون من شاشة عرض ولوحة معالجة ووحدة تحكم ؟

الحل

عدد الطرق للاختيار = ن١ × ن٢ × ن٣

عدد طرق اختيار الجهاز = ٥ × ٤ × ٣ = ٦٠

مثال (٩)

بكم طريقة يمكن ان يجلس بها ٣ طلاب على ٦ مقاعد مرقمة ؟

الحل

العملية تتم على ثلاث خطوات

الخطوة الأولى: جلوس الطالب الأول

الخطوة الثانية: جلوس الطالب الثاني

الخطوة الثالثة: جلوس الطالب الثالث

عدد الطرق = ٦ × ٥ × ٤ = ١٢٠ طريقة

مثال (١٠)

كم طريقة يجلس بها (٣) رجال و (٣) نساء على (٦) مقاعد مرقمة (أو على استقامة واحدة) بحيث يجلس الرجال متجاورين والنساء متجاورات

الحل

المقعد الأول الثاني الثالث الرابع الخامس السادس

عدد الطرق ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١

الرجال النساء

عدد الطرق = ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١

= ٧٢٠ طريقة

يتبع ←

طريقة ④

عدد طرق جلوس الرجال = ٣ × ٢ × ١ = ٦

عدد طرق جلوس النساء = ٣ × ٢ × ١ = ٦

ويوجد طريقتين للترتيب هي جلوس الرجال ثم النساء أو جلوس النساء ثم الرجال

عدد الطرق = ٢ × ٦ × ٦ = ٧٢ طريقة

مثال (١١)

بكم طريقة يمكن الاجابة على ٣ اسئلة من نوع الصواب والخطأ ؟

الحل

عدد خيارات اجابة السؤال الواحد ٢ لأن الاجابة (ص ، خ)

عدد الطرق = ٢ × ٢ × ٢ = ٨

مثال (١٢) س ٤ ص ١٩٤

يتكون مجلس إدارة إحدى الشركات من خمسة اعضاء بكم طريقة يمكن اختيار رئيس ونائب رئيس من بين اعضاء مجلس الادارة

الحل

الترتيب مهم حدث بمناصب ودون تكرار وحسب مبدأ العد

عدد الطرق = ٥ × ٤ = ٢٠ طريقة

مثال (١٣) س ١ ص ٤٢ اختبار ذاتي

اذا اشترك اربعة رياضيين في المباراة النهائية للسباحة فما عدد الترتيب المختلفة لنتائج السباق

الحل

التكرار غير موجود ، الترتيب مهم

عدد الطرق = ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٢٤

مثال (١٤)

بكم طريقة يمكن الاجابة على ثلاث اسئلة من نوع الاختيار من متعدد اذا كان لكل سؤال اربعة خيارات للاجابة

الحل : التكرار موجود ، الترتيب مهم

عدد الطرق = ٤ × ٤ × ٤ = ٦٤

مثال (١٥)

كم كلمة من ٣ حروف مكونة من حروف كلمة (توجيهي) علماً بانه ليس من الضروري ان يكون للكلمة معنى وبدون تكرار اي حرف

الحل

عدد الطرق = ٦ × ٥ × ٤

= ١٢٠ طريقة

مثال (١٦)

كم كلمة مكونة من ٣ حروف مكونة من مجموعة الحروف م = {أ، ب، ج، د، هـ، و} علماً بأنه ليس من الضروري ان يكون للكلمة معنى

(أ) اذا سمح بالتكرار

(ب) اذا لم يسمح بالتكرار

الحل

عدد الحروف في المجموعة ٦ حروف

(أ) اذا سمح بالتكرار

عدد الطرق = ٦ × ٦ × ٦ = ٢١٦

(ب) اذا لم يسمح بالتكرار

عدد الطرق = ٦ × ٥ × ٤ = ١٢٠

مثال (١٧)

كم عدداً مكون من ٤ منازل مكونة من بين مجموعة الارقام م = {١، ٢، ٣، ٤} اذا

(أ) سمح بالتكرار (ب) لم يسمح بالتكرار

الحل

(أ) عدد الطرق = ٤ × ٤ × ٤ × ٤ = ٢٥٦

(ب) عدد الطرق = ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٢٤

ملاحظة هامة

في الاعداد الترتيب مهم

٢٤ تختلف عن ٤٢

مثال (١٨)

اذا كان لدينا مجموعة الحروف م = {أ، ب، ج} ومجموعة الأرقام م = {١، ٢، ٣، ٤} نريد تكوين لوحات تحوي كل منها حرفين متبوعين

ينتهي

ثلاث ارقام ، ما عدد اللوحات التي يمكن تكوينها اذا

(أ) لم يسمح بتكرار الأحرف والأرقام

(ب) لم يسمح بتكرار الأحرف وسمح بتكرار الأرقام

(ج) سمح بتكرار الأحرف ولم يسمح بتكرار الأرقام

الحل

أ) عدد الطرق = ٢٨ × ٢٧ × ٢٦ × ١٠ × ٩ × ٨

= ١٤٤ ٢٠٠

ب) عدد الطرق = ٢٨ × ٢٨ × ٢٨ × ١٠ × ١٠ × ١٠

= ٢١٩٥٢

ج) عدد الطرق = ٢٨ × ٢٨ × ٢٨ × ٩ × ٨ × ٧

= ١٣٨٢٤

مثال (١٩) ص ٩٤

اراد دائرة السير صنع لوحات معدنية للسيارات تحمل منها حرفاً من حروف الهجاء العربية متبوعاً بعدد من رقمين من مجموعة الارقام {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩}

فكم لوحة مختلفة يمكن صنعها اذا علمت ان عدد حروف الهجاء ٢٨

الحل

عدد الطرق = ٢٨ × ٩ × ٩

= ٢٢٦٨ لوحة

مثال (٢٠)

صندوق يحتوي على ثلاث كرات ملونة حمراء وصفراء وسوداء اذا تم سحب كرتان من الصندوق على التوالي فما عدد النواتج الممكنة اذا كان السحب

(أ) مع الارجاع (ب) بدون ارجاع

الحل

الترتيب مهم لأن السحب على التوالي (الواحدة وراء الأخرى)

(أ) مع الارجاع : الكرة ترجع الى الصندوق

عدد الطرق = ٣ × ٣ = ٩

(ب) بدون ارجاع : الكرة لا ترجع الى الصندوق

٣ × ٢ = ٦

مكتبة الوسام ALWSAM

مثال (٢١)

صندوق يحتوي على ٨ بطاقات متماثلة مرقمة بكم طريقة يمكن ان نسحب ٤ بطاقات على التوالي اذا كان

أ) السحب مع الارجاع ب) بدون ارجاع

الحل

أ) مع الارجاع $= ٨ \times ٨ \times ٨ \times ٨ = ٨^٤$

ب) بدون ارجاع $= ٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥$
$= ١٩٨٠$

مثال (٢٢)

بكم طريقة يمكن جلوس ٥ طلاب من بين ٨ طلاب على ٥ مقاعد مرقمة

الحل

الترتيب مهم ، المقاعد مرقمة

اذا كان غير مسموح

المقعد سوف يختار الطالب وليس العكس

عدد الطرق $= ٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مضروب العدد الصحيح غير السالب

المضروب:- هو ناتج ضرب العدد بنفسه ضمنيًا واحد في كل مره حتى نصل العدد (١) ويرمز له بالرمز (!) وعليه فإن كان (ن) عدد صحيح موجب فإن

$ن! = ن \times (ن-١) \times (ن-٢) \times \ldots \times ١$

وحالة خاصة $٠! = ١$

مضروب الصفر = ١

ويستخدم المضروب في ايجاد عدد الطرق الممكنه لعملية ما بالشكل لدي عدد طرق ترتيب (ن) من الأشياء في (ن) من الأماكن يساوي ن!

مثال ①

جد قيمة كل مما يلي

أ) ١! ب) ٣! ج) ٦!

الحل

أ) $١! = ١$ ب) $٣! = ٣ \times ٢ \times ١ = ٦$

ج) $٦! = ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٧٢٠$

مثال ②

جد قيمة ما يلي

أ) $١٣ + ١٤!$ ب) $١٣ \times ١٢!$

ج) $١ (٣+٢)!$ د) $١ (٨-٥)!$

الحل

أ) $١٣ + ١٤! = (١ \times ٢ \times ٣) + (١ \times ٢ \times ٣ \times ٤) = ٦ + ٢٤ = ٣٠$

ب) $١٣ \times ١٢! = (١ \times ٢ \times ٣) \times (١ \times ٢ \times ٣ \times ٤) = ٦ \times ٢ = ١٢$

ج) $١ (٣+٢)! = ١ (٥)! = ١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥ = ١٢٠$

د) $١ (٨-٥)! = ١ (٣)! = ١ \times ٢ \times ٣ = ٦$

مثال ③

اوجد قيمة ما يلي

أ) $(٥-٥)! \cdot ١$ ب) $١٦ - ٣ \times ١٢!$

ج) $٥ (٧-٢)!$ د) $٤ - (٣+٢)!$

يتبع الحل

الحل

(أ) $(٥-٥)! = ٠! = ١$

(ب) $٦! - ٤! \times ٣ = (١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥ \times ٦) - (٤ \times ٣ \times ١)$

$= ٧٢٠ - ٦ = ٧١٤$

(ج) $(٣+٢)! - ٤! = ٥! - ٤! = (١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥) - ٤$

$= ١٢٠ - ٤ = ١١٦$

(د) $٥ \times (٧-٣)! = ٥ \times ٤! = ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ١٢٠$

ملاحظة هامة

يمكن كتابة حاصل ضرب العدد بدلالة حاصل ضرب عدد أقل منه، ويمكن الاستفادة من هذه الطريقة في الاختصار

$ن! = ن(ن-١)!$

$ن! = ن(ن-١)(ن-٢)!$

$ن! = ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)!$

---- وهكذا

مثال توضيحي

$١٤! = ١٤ \times ١٣ \times ١٢ \times ١١!$

$١٤! = ١٤ \times ١٣ \times ١٢!$

$١٤! = ١٤ \times ١٣!$

$١٠! = ١٠ \times ٩ \times ٨ \times ٧!$

$١٥! = ١٥ \times ١٤ \times ١٣!$

مثال (٤)

اكتب كلاً مما يلي بأبسط صورة

(أ) $\frac{٨!}{١٥!}$ (ب) $\frac{١٩!}{(٢-٩)!}$

(ج) $\frac{٨!}{١٤!٣}$ (د) $\frac{١٠! \times ٨!}{١١! \times ١٦}$

الحل

(أ) $\frac{٨!}{١٥!} = \frac{٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥!}{١٥!} = ٣٣٦$

(ب) $\frac{١٩!}{(٢-٩)!} = \frac{١٩!}{٧!} = \frac{١٩ \times ١٨ \times ١٧ \times ١٦ \times ١٥ \times ١٤ \times ١٣ \times ١٢ \times ١١ \times ١٠ \times ٩ \times ٨ \times ٧!}{٧!} = ٢٧$

(ج) $\frac{٨!}{١٤!٣} = \frac{٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}{١٤ \times ١٣ \times ١٢ \times ١١ \times ١٠ \times ٩ \times ٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١} = ٨٠$

(د) $= \frac{١٠ \times ٩ \times ٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}{١١ \times ١٠ \times ٩ \times ٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١} = \frac{٥٦}{١١}$

مكتبة الوسام ALWESAM

مثال ⑤ $س^{3}_{194}$ ص

جد قيمة ما يأتي

ⓐ $\frac{٨!}{٦!}$ ⓑ $\frac{٦!}{٤!×٢!}$ ⓒ $\frac{٧!}{(٧-٢)!}$

الحل

ⓐ $\frac{٨!}{٦!} = \frac{٨×٧×٦!}{٦!} = ٥٦$

ⓑ $\frac{٦!}{٤!×٢!} = \frac{٦×٥×٤!}{٤!×٢} = ١٥$

ⓒ $\frac{٧!}{(٧-٢)!} = \frac{٧!}{٥!} = \frac{٧×٦×٥!}{٥!} = ٤٢$

مثال ⑥

اذا علمت أن $٧! = ٥٠٤٠$ جد ما يلي

ⓐ $٦!$ ⓑ $٨!$ ⓒ $٨×٧!$

الحل

ⓐ $٧! = ٥٠٤٠$

$٧×٦! = ٥٠٤٠$ بالقسمة على ٧

$٦! = ٧٢٠$

ⓑ $٨! = ٨×٧! = ٨×٥٠٤٠ = ٤٠٣٢٠$

ⓒ $٨×٧! = ١٠٠٨٠$

مثال ⑦

أكتب كل مما يلي بابسط صورة

ⓐ $\frac{ن!}{(ن-١)!}$ ⓑ $\frac{(ن+١)!}{(ن-١)!}$

الحل

ⓐ $\frac{ن!}{(ن-١)!} = \frac{ن(ن-١)!}{(ن-١)!} = ن$

ⓑ $\frac{(ن+١)!}{(ن-١)!} = \frac{(ن+١)ن(ن-١)!}{(ن-١)!} = ن(ن+١)$

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

ملاحظة هامة

اذا كانت (ن! = عدد معين) لايجاد (ن) نقوم بالضرب تصاعديا ببدأ من ١ × ٢ × ٣ × ٤ × ٥ ... إلى أن نصل الى العدد المطلوب فتكون (ن) تساوي آخر عدد.

مثال (٨)

جد قيمة (ن) لكل مما يلي

أ) ن! = ٢٤ ب) ن! = ٧٢٠

ج) ٣ (ن-١)! = ٣٦٠ د) (ن+٢)! = ٧٢٠

هـ) ن! - ١٤ = ٩٦ و) (٥ن)! = ١٢٠

ز) (ن+٣)! = ٥٠٤٠

الحل

أ) ن! = ٢٤

١ × ٢ × ٣ × ٤ = ٢٤ (نبدأ الضرب من ١ حتى الحصول على ٢٤)

٤! = ٢٤ ⇐ ن = ٤

ب) ن! = ٧٢٠

١ × ٢ × ٣ × ٤ × ٥ × ٦ = ٧٢٠

٦! = ٧٢٠ ⇐ ن = ٦

ج) ٣ (ن-١)! = ٣٦٠

يجب ان يكون المضروب لوحده لذلك بالقسمة على ٣

$\frac{٣(ن-١)!}{٣} = \frac{٣٦٠}{٣}$ ⇐ (ن-١)! = ١٢٠

١ × ٢ × ٣ × ٤ × ٥ = ١٢٠

٥! = ١٢٠ ⇐ ن = ٥

د) (ن+٢)! = ٧٢٠

١ × ٢ × ٣ × ٤ × ٥ × ٦ = ٧٢٠

٦! = ٧٢٠ ⇐ ن = ٦

⇐ ن + ٢ = ٦ (ما داخل المضروب)

ن = ٣ ← يتبع الحل

هـ) ن! - ١٤ = ٩٦

ن! = ٩٦ + ١٤

$\frac{ن!}{١٤+} = \frac{٩٦}{١٤+}$ ⇐ ن! = ١٢٠

١ × ٢ × ٣ × ٤ × ٥ = ١٢٠ ← ٥! = ١٢٠

ن = ٥

و) (٥ن)! = ٧٢٠

١ × ٢ × ٣ × ٤ × ٥ × ٦ = ٧٢٠

٦! = ٧٢٠ ⇐ ن = ٦

⇐ ٥ن = ٦ (ما داخل المضروب)

$\frac{٥ن}{٥} = \frac{٦}{٥}$

ن = ١,٢ ← يتبع الحل

مكتبة الوسام AL WESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

⑨ $(ن+٥)! = ١٢٠ \times (ن+٥)!$

$١٢٠ = ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١$ ⇐ $١٢٠ = !٥$

⇐ $\frac{ن+٥}{٥} = \frac{٥}{٥}$ ⇐ $ن = ١$

ز) $(ن+٣)! = ٥٠٤٠ \times !(ن+٣)$

$٥٠٤٠ = ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١$

$٥٠٤٠ = !٧$

$\frac{ن+٣}{-٣} = \frac{٧}{-٣}$ ⇐ $ن = ٤$

مثال ⑨ ص ١٩٤ ع

جد قيمة ن لكل مما يأتي

ا) $ن! = ٧٢٠$ ب) $٣(ن-١)! = ٢٦٠$

ج) $ن! - ١٤ = ٩٦$

الحل

ا) $٧٢٠ = ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١$

$ن! = ٧٢٠$ ⇐ $٦! = ٧٢٠$

⇐ $ن = ٦$

ب) $\frac{٣(ن-١)!}{٣} = \frac{٣٦٠}{٣}$ ⇐ $(ن-١)! = ١٢٠$

$١٢٠ = ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١$

$(ن-١)! = ١٢٠$ $ن-١ = ٥$

ج) $ن! - ١٤ = ٩٦ - ١ \times ٢ \times ٣ \times ٤$

$\frac{ن!}{٤!} - \frac{٤!}{٤!} = \frac{٩٦}{٤!}$

$ن! = ١٢٠$

$١٢٠ = ١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥$

$١٢٠ = !٥$ $ن = ٥$

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

ملاحظة هامة

يستخدم المضروب في ايجاد عدد الطرق الممكنة لعملية ما

اذا كان عدد طرق ترتيب (ن) من الأشياء في (ن) من الاماكن

$= ن!$

هنا يجب ملاحظة مايلي

١. الترتيب مهم

٢. التكرار غير مسموح

٣. عدد الاشياء = عدد الاماكن

مثال (١٠)

بكم طريقة يمكن ان يجلس ٣ أشخاص على ٣ مقاعد تقع على استقامة واحدة

الحل

عدد الاشخاص = عدد المقاعد

عدد الطرق $= ٣! = ٦$ طرق

مثال (١١) تدريب (٣) صـ١٩٢

بكم طريقة يمكن ترتيب (٤) كتب على رف المكتبة في صف واحد.

الحل

عدد الطرق $= ١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ = ١٤$

$= ٢٤$

مثال (١٢)

كم كلمة مكونة من ٥ حروف يمكن تكوينها باستخدام حروف كلمة (لحظات) وبدون تكرار اي حرف منها وليس من الضروري ان يكون للكلمة معنى

الحل

عدد الحروف ٥ = الكلمة من ٥ حروف

عدد الطرق $= ٥! = ١٢٠$

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

الدرس الثاني

التباديل والتوافيق

التباديل

في كثير من المسائل لا تهتم بنتائج عملية ما بقدر اهتمامنا بعدد نتائج تلك العملية ومن الطرق لمعرفة عدد تلك النتائج (مبدأ العدّ، التباديل، التوافيق)

مبدأ العدّ تعلمناه بالدرس السابق والآن سوف نتعلم كيف ومتى نستخدم التباديل والتوافيق ويمكن ان نلخص ذلك باستخدام المخطط التالي.

عدد طرق اختيار "ر" عنصر من "ن" من العناصر

- مع التكرار: (ن)^ر
- بدون تكرار
  - مع الترتيب (تباديل): ل(ن ، ر)
  - بدون ترتيب (توافيق): (ن ر)

هي عملية ترتيب لمجموعة من العناصر أو بعضها دون تكرار، ورمز التباديل ب (ل) وعليه فإن

ل(ن ، ر) = تعني عدد التباديل لمجموعة مكون من "ن" عنصر مأخوذة "ر" عنصر من كل مرة، بدون تكرار

$$ل(ن ، ر) = \frac{ن!}{(ن-ر)!} \quad \text{حيث } ر \le ن$$

ايضاً

$$ل(ن ، ر) = ن \times (ن-1) \times (ن-2) \times \dots \times (ن-ر+1)$$

عدد الحدود = ر

مثال ①

اوجد قيمة ما يلي

(أ) $ل(٦، ٢) = \frac{!٦}{!(٦-٢)}$

$= \frac{!٦}{!٤} = \frac{٦ \times ٥ \times ٤!}{!٤} = ٣٠$

نستطيع الحل بطريقة سريعة حسب القانون الثاني

$ل(٦، ٢) = ٦ \times ٥$

عدد الحدود $(٢ = ر)$

اي نزل منه بمقدار حدين

(ب) $ل(٣، ٣) = ١ \times ٢ \times ٣$

$= ٦$

يبدأ من العدد ٣ وننزل معها ٣ ارقام

(ج) $ل(٧، ٣) = ٧ \times ٦ \times ٥$

(د) $٣ ل(٥، ٢) = ٣ \times (٥ \times ٤)$

$= ٦٠$

مثال ②

اوجد قيمة ما يلي

(أ) $ل(٣، ٣) = \frac{!٣}{!(٣-٣)} = \frac{!٣}{!٣} = ١$

(ب) $ل(ن، ٢) = ن \times (ن-١)$

(ج) $ل(١٠، ١٠) = \frac{!١٠}{!(١٠-١٠)} = \frac{!١٠}{!٠}$

$= !١٠$

مثال ③ تدريب ① ص ١٩٧

جد قيمة كل مما يأتي

(أ) $ل(٧، ٣) = ٧ \times ٦ \times ٥ = ٢١٠$

(ب) $ل(٩، ١) = ٩$

(ج) $ل(٨، ٠) = \frac{!٨}{!(٨-٠)} = \frac{!٨}{!٨} = ١$

(د) $ل(٧، ٧) = \frac{!٧}{!(٧-٧)} = \frac{!٧}{!٠} = \frac{!٧}{١} = ١٧$

$= ١٧$

مثال ④ ص ٢٠٣

جد قيمة ما يلي

أ) $ل(١٠، ٥) = \frac{١٠!}{(١٠-٥)!} = \frac{١٠!}{٥!} = ١٥١$

ب) $ل(٢٥، ٢٠) = \frac{٢٥!}{(٢٥-٢٠)!} = \frac{٢٥!}{٥!} = ٢٠$

ج) $ل(٦، ٦) = \frac{٦!}{(٦-٦)!} = \frac{٦!}{٠!} = \frac{٦!}{١} = ٦!$

$= ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٧٢٠$

د) $ل(١٠، ٠) = ١$

هـ) $ل(٤٠، ٤) = \frac{٤٠!}{(٤٠-٤)!} = \frac{٤٠!}{٣٦!}$

$= \frac{٤٠ \times ٣٩ \times ٣٨ \times ٣٧}{١} = ٢٢٠٤٤٠$

و) $ل(٩، ٩)$

$= ٩ \times ٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١$

$= ٣٦٢٨٨٠$

ملاحظة هامة

بصورة عامة

١- $ل(ن، ٠) = ١$

٢- $ل(ن، ١) = ن$

٣- $ل(ن، ن) = ن!$

مثال ⑤

أوجد قيمة كل مما يلي

أ) $ل(٣، ٢) \times ل(٧، ١) + ل(٤، ٤)$

$= ٣ \times ٢ \times ٧ + ٤!$

$= ٤٢ + ٢٤ = ٦٦$

ب) $٢ل(٢، ٢) - ٥ل(٥، ١)$

$= ٢ \times ٢ - ٥ \times ١$

$= ٤ - ٥ = -١$

مكتبة الوسام
الوسام
الوسام
المعلم: ناجح الجمزاوي

حل المعادلات التي تحتوي على التباديل

معادلات تحتوي على ل(ن ، ر)

وصنفٌ حالتان

① ان تكون (ن) مجهولة

② ان تكون (ر) مجهولة

① اذا كانت (ن) مجهولة

(ر) معلومة وتمثل عدد المرات التي سوف ننزل بها من العدد (ن)

أي أن

نريد مجموعة من الاعداد المتتالية وعددها = ر ، وحاصل ضربها يعطينا المطلوب

مثال ⑥

اوجد قيمة (ن) التي تحقق كلا مما يلي

ⓐ ل(ن ، ٤) = ٢٠

نريد عددين متتاليين حاصل ضربهما ٢٠

٤ × ٥ = ٢٠

∴ ن = ٥ الصدد الأكبر

٢٠	٢
١٠	٥
٥	
١	

ⓑ ل(ن ، ٣) = ١٢٠

نريد ٣ اعداد متتالية حاصل ضربها ١٢٠

٤ × ٥ × ٦ = ١٢٠ ن = ٦ الصدد الأكبر

أو عليه الحل عبه طريقة كتابة الارقام من ١ — ١٠ ثم بنحث على ٣ اعداد حاصل ضربهما = ١٢٠

١ × ٢ × ٣ × ٤ × ٥ × ٦ × ٧ × ٨ × ٩ × ١٠

١٢٠ ن = ٦ الصدد الأكبر

ⓒ ل(ن ، ٣) = ٦٠

١ × ٢ × ٣ × ٤ × ٥ × ٦ × ٧ × ٨ × ٩ × ١٠

∴ ن − ١ = ٥ ← ن = ٦

+١ +١

ⓓ ٣ ل(ن ، ٢) = ٢١ بالقسمة ع ٣

$\frac{٣}{٣}$ ل(ن ، ٢) = $\frac{٢١}{٣}$ ← ل(ن ، ٢) = ٧

← ن = ٧ كذكر ان ل(ن ، ٢) = ن

← ينتج

مكتبة الوسام AlWesam

المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (٧) س ١ ص ٤١ الراجعه (ج)

حل المعادلات

١) $ل(ن\ ٥\ ،\ ٤) = ٢٠$

الحل $٥ \times ٤ = ٢٠ \Leftarrow ن = ٥$

$س^{٢} ص^{٣}$

$ل(ن\ ٥\ ،\ ٢) = ٥٦$

الحل $٨ \times ٧ = ٥٦ \Leftarrow ن = ٨$

مثال (٨)

جد قيمة كل مما يأتي

(ج) $ل(ن\ ٥\ ،\ ن-٢) = ٤$

الحل

$ل(ن\ ٥\ ،\ ن) = \frac{٤}{٢ \times ١}$

$ل(ن\ ٥\ ،\ ن) = ٦$ لكن $ل(ن\ ٥\ ،\ ن) = ن!$

$ن! = ١ \times ٢ \times ٣ = ٦$

$ن = ٣$

(أ) $ل(ن\ ٥\ ،\ ن) = ٧٢٠$

الحل

$ل(ن\ ٥\ ،\ ن) = ٧٢٠$

$ن! = ٧٢٠ = ١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥ \times ٦$

$ن = ٦$

ملاحظة هامة

اذا كان كل من طرفي المعادلة يحوي على التباديل فاننا نستفيد من القاعدة

$ل(ن\ ٥\ ،\ ر) = ن \times (ن-١) \times (ن-٢) \times \ldots \times (ن-ر+١)$

مثال (٩)

اوجد قيمة ن التي تحقق كل مما يلي

(أ) $ل(ن\ ٥\ ،\ ٣) = ٣٠\ ل(ن\ ٥\ ،\ ٢)$

$ن(ن-١)(ن-٢) = ٣٠ \times ن(ن-١)$

عدد الحدود ٣ | عدد الحدود ٢

نختصر المشابه

$ن - ٢ = ٣٠$

$ن = ٣٢$

(أ) $ل(ن+٥، ٦) = ٥ ل(ن+٣، ٦)$

الحل

$ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)(ن-٤) = ٥٦ (ن)(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)$

$\Leftarrow$

$(ن-٣)(ن-٤) = ٥٦$

$ن^٢ - ٣ن - ٤ن + ١٢ = ٥٦$

$ن^٢ - ٧ن + ١٢ - ٥٦ = ٠$

$ن^٢ - ٧ن - ٤٤ = ٠$

$(ن - ١١)(ن + ٤) = ٠$

$ن = ١١$ $ن = -٤$ مرفوض

(ب) $٤ ل(ن+١، ٦) = ل(ن+٣، ٦)$

الحل

$٤ \times \frac{ن!}{(ن-١)!} = \frac{ن!}{(ن-٢)!}$

$١٢ = (ن-١)(ن-٢)$

$\Leftarrow ن = ٥$ أي $ن$

$(٥-١)(٥-٢) = ٣ \times ٤ = ١٢$

أو حل آخر بطل الأقواس

$١٢ = ن^٢ - ٣ن + ٢$

$ن^٢ - ٣ن + ٢ - ١٢ = ٠$

$ن^٢ - ٣ن - ١٠ = ٠$

$(ن - ٥)(ن + ٢)$

$ن = ٥$ أو $ن = -٢$ مرفوض

(٢) إذا كانت (ر) مجهولة

(ن) معلومة حيث نبدأ من العدد ن ونتزل حتى نصل إلى المطلوب فتكون ر = عدد العدود.

مثال (١٠)

أوجد قيمة (ر) التي تحقق كل مما يلي

(أ) $ل(٥، ر) = ٦٠$

نبدأ من العدد ٥ ونتزل حتى نصل العدد ٦٠

$٥ \times ٤ \times ٣ = ٦٠$ عدد العدود $= ٣$

$\Leftarrow ر = ٣$

مكتبة الوسام ALWSAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

(ب) $ل(٦,٥) = ١٠$

$٧ \times ٦ \times ٧ = ٥ \times ١٠ \Leftarrow ر = ٣$

(ج) بتدريب ص ١٩٨

$٣ ل(٦,٥) = ٩٠$

اكل بالقسمة على ٣

$\frac{٣ ل(٦,٥)}{٣} = \frac{٩٠}{٣}$

$ل(٦,٥) = ٣٠$

$٦ \times ٥ = ٣٠ \quad ر = ٢$

(د) $ل(١,٢) = ١$

$\Leftarrow ر = ٠$ حيث $ل(١,٠) = ١$

(هـ) $ل(٥,٥) = ٥ \Leftarrow ر = ١$

لأن $ل(١,٥) = ٥$

(و) $ل(٥,٥) = !٥$

اكل $ل(٥,٥) = ٥ \times ٤ \times ٧ \times ٢ \times ١$

$= ١٥$

أما $٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ٧ = ١٢٠$ أو $٥ \times ٤ \times ٢ \times ٢ \times ١$

$ر = ٥$ أو $ر = ٤$

مثال (١١)

اذا علمت ان $ل(٩,٥) = ٠.٤$

فما قيمة $ل(٢ر + ١, ٤)$ ؟

الحل

نجد قيمة ر من المعطيات

$٩ \times ٨ \times ٧ = ٠.٤ \Leftarrow ر = ٣$

اذن

$ل(٢ر + ١, ٤) = ل(٢ \times ٣ + ١, ٤)$

$= ل(٧, ٤) = ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ = ٨٤٠$

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

ملاحظة هامة

تستخدم التباديل في الحالات التالية مع التأكد بعدم سماح التكرار

١. الاعداد التي تتكون من ارقام (منازل)
٢. الكلمات التي تتكون من احرف
٣. اذا حددت المراكز
٤. اذا حددت المراكز
٥. اذا وضعت مجموعة من الاشياء في صف واحد.
٦. الاماكن (المقاعد) مرتبة
٧. السحب على التوالي.

مثال (١٢)

كم عدد التباديل لمجموعة من سبعة عناصر مأخوذة خمسة في كل مرة؟

الحل

$$ل(٧،٥) = ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ =$$

مثال (١٣)

ما عدد تباديل مجموعة فيها ٣ عناصر

الحل

$$ل(٣،٣) = ٣ \times ٢ \times ١ = ٦$$

مثال (١٤)

كم عدد مؤلف من خمس ارقام يمكن تكوينه من مجموعة الارقام $\{٣، ٤، ٦، ٧، ٨\}$ اذا لم يسمح بتكرار أي رقم؟

الحل

التي سيتم حلها لا يسمح بالتكرار ← تباديل

اختيار ٥ رقمين من بين ٥ رقم ارقام

$$ل(٥،٥) = ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ١٢٠ \text{ عددا}$$

مثال (١٥)

كم عددا مختلفا عليه تكوينه من ارقام العدد (٧٣٥٤) اذا لم يسمح بتكرار الرقم

← يسمح الحل

عدد ارقام العدد = اربعة اعداد
المطلوب اختيار اربعة ارقام
من اربعة :
ل (٤ ، ٤) = ٤ ! = ٢٤

مثال (١٦) تدريب ص ١٩٧

كم كلمة مكونة من ثلاث حروف يمكن
تكوينها من مجموعة الاحرف
{ P ، U ، G ، A ، D } علما بان
ليس من الضروري ان يكون للكلمة
معنى (لا يسمح بالتكرار)

الحل

الترتيب مهم و التكرار غير مسموح
← بدايل
ل (٥ ، ٣) = ٥ × ٤ × ٣
= ٦٠

مثال (١٧)

بكم طريقة يمكنه اختيار رئيس
ونائب له من بين ٢٠ موظف ؟

الحل

الترتيب مهم و التكرار غير مسموح
← بدايل
ل (٢٠ ، ٢) = ٢٠ × ١٩
= ٣٨٠

مثال (١٨) س ٤ ص ٢٠٣

بكم طريقة يمكن اختيار مديرة
ومساعدة وسكرتيرة ومحاسبة وامينة
مختبر من بين (١٠) معلمات .

الحل

ل (١٠ ، ٥) = ١٠ × ٩ × ٨ × ٧ × ٦
= ٣٠٢٤٠

مثال (١٩)

عدد الطرق التي يمكن بها ظهور ٥ فرق
كرة سلة في المراكز الثلاث الأولى
الحل ل (٥ ، ٣) = ٥ × ٤ × ٣ = ٦٠

التوافيق

التوافيق : يعني اخذ مجموعة جزئية عدد عناصرها "ر" من مجموعة عدد عناصرها "ن" عنصر

ويرمز له $(\begin{smallmatrix}ن\\ر\end{smallmatrix})$ ويقرأ "ن فوق ر"

قانون التوافيق

$$(\begin{smallmatrix}ن\\ر\end{smallmatrix}) = \frac{ل(ن\ ،\ ر)}{ر!} \quad ،\ ر \le ن$$

أو

$$(\begin{smallmatrix}ن\\ر\end{smallmatrix}) = \frac{ن!}{(ن-ر)!\times ر!}$$

مثال ①

جد قيمة كل مما يلي :

ⓐ $(\begin{smallmatrix}٦\\٢\end{smallmatrix}) = \frac{ل(٦،٢)}{٢!} = \frac{٥\times ٦}{٢} = \frac{٣٠}{٢} = ١٥$

ⓑ $(\begin{smallmatrix}٥\\٣\end{smallmatrix}) = \frac{٥!}{٣!\times(٥-٣)!} = \frac{١٢٠}{٦\times ٢} = \frac{١٢٠}{١٢} = ١٠$

ⓒ $٣(\begin{smallmatrix}٦\\٤\end{smallmatrix}) = ٣\times\frac{٦!}{٤!\times ٢!} = \frac{٢١٦٠}{٢٤\times ٢} = \frac{٢١٦٠}{١٨٢٤} = ٤٥ = \frac{٩٠}{٢} = \frac{١٢\times٩\times١٠}{١٢\times ٢}$

ⓓ $(\begin{smallmatrix}٤\\٣\end{smallmatrix}) + (\begin{smallmatrix}٣\\٢\end{smallmatrix}) = \frac{٤!}{١!\times٣!} + \frac{٣!}{١!\times٢!} = \frac{٢٤}{٦} + \frac{٦}{٢} = ٤ + ٣ = ٧$

ⓔ $ل(ن،٢) = ٢٠$ مجد قيمة $(\begin{smallmatrix}ن\\٢\end{smallmatrix})$ ؟

الحل

$(\begin{smallmatrix}ن\\٢\end{smallmatrix}) = \frac{ل(ن،٢)}{٢!} = \frac{٢٠}{٢} = ١٠$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ② تدريب 4 ص 72

جد قيمة كل مما يأتي:

① $\binom{5}{4} = \frac{5!}{1! \times 4!} = \frac{5 \times 4!}{1 \times 4!} = 5$

② $\binom{6}{4} \times \binom{6}{3}$

$= \frac{6!}{4! \times 2!} \times \frac{6!}{3! \times 3!}$

$= \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2} \times \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 3 \times 2 \times 1}$

$= 15 \times 20 = 300$

مثال ③ س ص 243 اختبار ذاتي

اوجد قيمة المقدار $\binom{5}{3}$

الحل

$\binom{5}{3} = \frac{5!}{2! \times 3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2 \times 1 \times 3!} = 10$

مثال ④

جد قيمة ما يلي:

⑦ $\binom{5}{1} - L(165)$

الحل

$\binom{5}{1} = \frac{5!}{1! \times 4!} = \frac{5 \times 4!}{1 \times 4!} = 5$

$L(165) = 5$

$\binom{5}{1} - L(165) = 5 - 5 = 0 = \text{صفر}$

ن $\frac{\binom{6}{4}}{L(2567)}$

الحل

$= \frac{L(2567)}{L(2567)} = \frac{1}{1} = 1$

هـ $\frac{4 \, L(2567) \times 2 \binom{9}{3}}{18}$

$= \frac{4 \times 2 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times L(269)}{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 10^3}$

$= L(269) \times \frac{1}{8 \times 5 \times 2} \times \frac{9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3} = \frac{7}{10}$

مثال ⑤

جد قيمة ما يلي

① أ) $\binom{4}{1}$ ب) $\binom{11}{1}$

الحل

أ) $\binom{4}{1} = \frac{4!}{1!(4-1)!} = \frac{4!}{1!3!} = \frac{4}{1} = 4$

ب) $\binom{11}{1} = \frac{11!}{1!(11-1)!} = \frac{11!}{1!10!} = \frac{11}{1} = 11$

② أ) $\binom{6}{1}$ ب) $\binom{15}{1}$

الحل

$\binom{6}{1} = \frac{6!}{1!(6-1)!} = \frac{6 \times 5!}{1 \times 5!} = 6$

$\binom{15}{1} = \frac{15!}{1!(15-1)!} = \frac{15 \times 14!}{1 \times 14!} = 15$

③ أ) $\binom{9}{9}$ ب) $\binom{10}{10}$

الحل

$\binom{9}{9} = \frac{9!}{9!(9-9)!} = \frac{9!}{9!0!} = \frac{9!}{9!} = 1$

$\binom{10}{10} = \frac{10!}{10!(10-10)!} = \frac{10!}{10!0!} = \frac{10!}{10!} = 1$

ملاحظة هامة

$\binom{n}{0} = 1$

$\binom{n}{1} = n$

$\binom{n}{n} = 1$

مثال ⑥

أوجد قيمة كل مما يأتي

أ) $\binom{7}{3}\binom{49}{49} - \binom{5}{1}$

الحل

$= \frac{7!}{3!(7-3)!} \times 1 - 5$

$= \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3 \times 2 \times 1 \times 4!} - 5 = 35 - 5 = 30$

ب) $\binom{5}{2} \times 10 \times (265)$

$= \frac{5!}{2!3!} \times 4 \times 5 = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2 \times 1 \times 3!} \times 4 \times 5$

$= 10 \times 4 \times 5 = 200$

مكتبة الوسام Alwesam
الوسام . ناجح الجمزاوي

حل المعادلات التي تحتوي على توافيق

ملاحظة هامة

① $\binom{ن}{ر} = \binom{ن}{ن-ر}$

② اذا كان $\binom{ن}{ر} = \binom{ن}{س}$ فإن

$ر = س$ أو $ن = ر + س$

مثال ①

حل المعادلات الآتية

ⓐ $\binom{٨}{٣} = \binom{٨}{س}$ ⓑ $\binom{٦}{س} = \binom{٦}{٢}$

ⓒ $\binom{١٠}{س} = \binom{١٠}{٦}$ ⓓ $\binom{١٢}{٥} = \binom{١٢}{ع - ١}$

ⓔ $\binom{س}{٣} = \binom{س}{٢}$

الحل

ⓐ $س = ٣$ أو $س + ٣ = ٨$

$س = ٥$

$س = ٣ ، ٥$

ⓑ $س = ٢$ ، $س + ٢ = ٦$

$س = ٤$

$س = ٢ ، ٤$

ⓒ $٦ = ٢ ع + ٤$ ، $١٠ = ٦ + ٢ ع$

$٢ ع = ٢$ ، $٤ = ٢ ع$

$ع = ١$ ، $ع = ٢$

$س = ٢ ، ٣$

ⓓ $٥ = ع - ١$ ، $١٢ = ١ - ع + ٥$

$ع = ٦$ ، $١٧ = ع + ٤$

$س = ٣$ ، $ع = ١٣$

$س = ٣ ، ١٣$

ⓔ $س = ٢$ ، $س = ٥ + ٣ = ٨$

مكتبة العوسم AWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ⑧ $س^{٣}$ ص ق ٢

جد قيمة س في المعادلات الآتية

أ) $\binom{٩}{س} = \binom{٩}{٥}$

الحل $س = ٥$ ، $س + ٥ = ٩$

$س = ٩ - ٥$

$س = ٤$

$س = ٤$ ، ٥

ب) $\binom{س}{٣} = \binom{س}{٩}$

الحل $س = ٣ + ٩ = ١٢$

مثال ⑨ $س^{١}$ ص ٤ بالجمع

حل المعادلات الآتية

أ) $\binom{٨}{س ٤} = \binom{٨}{٦}$

الحل $س ٤ = ٦$ أو $س ٤ = ٨ - ٦$

$\frac{س ٤}{٤} = \frac{٦}{٤}$ ، $\frac{س ٤}{٤} = \frac{٢}{٤}$

$س = ١$ ، $س = ٣$

$س = ١$ ، ٣

ب) $\binom{س}{٣} = \binom{س}{٧}$

الحل

$٣ + ٧ = س \Leftarrow س = ١٠$

مثال ⑩

حل المعادلات الآتية

أ) $\binom{٥}{س} = ١$ الحل $س = ٠$ أو $س = ٥$

لأن $\binom{ن}{ن} = ١$ ، $\binom{ن}{٠} = ١$

ب) $\binom{١٠}{س} = ١٠$ الحل $س = ١$ أو $١٠ - س = ١$

لأن $\binom{ن}{١} = ن$ ، $س = ٩$

ج) $\binom{س}{١} = ٨$ الحل: $س = ٨$

لأن $\binom{ن}{١} = ن$

د) اذا كان $\binom{ن}{٣} = ١٠$ فجد

$ل(ن ، ٣)$ حيث ن

الحل $\binom{ن}{٣} = \frac{ل(ن ، ٣)}{ل ٣} = ١٠$

$ل(ن ، ٣) = ١٠ \times ٦ = ٦٠$ ضرب متباوي

$ل(ن ، ٣) = ٦٠ \Leftarrow ن = ٥$

$٢ \times ٤ \times ٥ =$

لأن $\binom{ن}{ر} = \frac{ل(ن ، ر)}{ر!}$

مثال (١١)

اذا كان $ن(_{٢}^{ن}) = ٢٨$ أوجد قيمة ن؟

الحل

$$(_{٢}^{ن}) = \frac{ن!}{(ن-٢)!\,٢!} = \frac{ن(ن-١)(ن-٢)!}{(ن-٢)!\,٢ \times ١}$$

$$\frac{ن(ن-١)}{٢} = ٢٨ \quad \text{ضرب تبادلي}$$

$$ن(ن-١) = ٥٦ \Leftarrow ن^{٢} - ن = ٥٦$$

$$(ن-٨)(ن+٧) = ٠$$

$$\Leftarrow ن = ٨ \quad ن = -٧ \text{ مرفوض}$$

وبدون ارجاع .

تستخدم التوافيق في الحالات التاليه مع التأكد بعدم حساب التكرار .

١. اختيار مجموعة أو لجنة دون تحديد المناصب

٢. سحب مجموعة (عفوا) أو دفعة واحدة

٣. عدد مباريات لمصفيات التي تجمع فريقين أو لاعبين

ملاحظة هامة

يستخدم التوافيق في المسائل التي يكون فيها الترتيب غير مهم والتكرار غير مسموح .

أي أن

اذا كان لدينا مجموعة عدد عناصرها (ن) واخترنا عينة منها مكونة من (ر) من العناصر مع عدم مراعاة الترتيب

مثال (١٢)

ما عدد التوافيق لمجموعة من ٥ عناصر ما خذ ٥ ٣ عناصر في كل مرة

الحل

$$(_{٣}^{٥}) = \frac{٥!}{٣!\,٢!} = \frac{١٢٠}{٦ \times ٢} = \frac{١٢ \times ١٠ \times ٥}{١٢ \times ٢}$$

$$= \frac{ع}{ع} = ١٠$$

مثال (١٣)

ما عدد التوافيق لمجموعة من ٦ عناصر

الحل:

$$\binom{٦}{٦} = ١$$

مثال (١٤)

ما عدد الطرق لاختيار لجنة رباعية من ١٠ طلاب؟

الحل

الترتيب غير مهم والتكرار غير مسموح

توافيق

$$\binom{١٠}{٤} = \frac{١٠!}{٤! \times ٦!} = \frac{١٠ \times ٩ \times ٨ \times ٧ \times ٦!}{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ \times ٦!}$$

$$= ٢١٠$$

مثال (١٥)

صندوق يحوي على ٥ كرات حمراء و ٧ كرات خضراء بكم طريقة يمكننا سحب كرتان منه الصندوق

أ) اذا كان السحب على التوالي مع الارجاع

ب) اذا كان السحب على التوالي بدون ارجاع

ج) اذا سحبت الكرتان معاً

الحل

عدد الكرات الكلي $= ٥ + ٧ = ١٢$

عدد الكرات المسحوبة $= ٢$

أ) مبدأ الترتيب مهم (على التوالي) مع الارجاع

عدد الطرق $= ١٢ \times ١٢ = ١٤٤$

أو $(١٢)^٢ = ١٤٤$

ب) مبدأ الترتيب مهم بدون ارجاع

$ل(١٢، ٢) = ١٢ \times ١١ = ١٣٢$

ج) توافيق الترتيب غير مهم (معاً) بدون ارجاع

$$\binom{١٢}{٢} = \frac{١٢!}{١٠! \times ٢!} = \frac{١٢ \times ١١ \times ١٠!}{١٠! \times ٢ \times ١}$$

$$= \frac{١٣٢}{٢} = ٦٦$$

مثال (١٦)

مجموعة من أوراق (ورق اللعب) تتكون من ٥٢ كرت بكم طريقة يمكن سحب ورقتان دفعة واحدة

الحل $= \binom{٥٢}{٢} = ١٣٢٦$

مكتبة الوسام ALWESAM

مثال (١٧)

بكم طريقة يمكن تشكيل فريق لكرة القدم مكون من ١١ لاعب من بين ١٥ لاعب ؟

الحل

الترتيب غير مهم ← التكوا عبر مجموع

$$\binom{15}{11} = \frac{15!}{11! \times 4!} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11!}{11! \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$= 15 \times 7 \times 13$$

مثال (١٨)

أ) ما عدد الطرق الممكنة للأجابة عن ثلاث اسئلة من نوع الاختيار من متعدد علمًا بان لكل سؤال اربعة بدائل مختلفة

ب) ما عدد الطرق الممكنة للاجابة عن سؤال من نوع صح أو خطأ بكون من بين خمس فقرات

الحل

أ) الترتيب مهم ويسمح بالتكرار

← عدد الطرق $= 4 \times 4 \times 4 = 64$

ب) الترتيب مهم ويسمح بالتكرار

عدد الطرق $= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$= 2^5 = 32$

مثال (١٨) بس ص ٢٠٣

ما عدد الطرق الممكنة للاختيار (٥) اسئلة للأجابة عنها في امتحان المكون من ١٧ سؤال ؟

الحل

الترتيب غير مهم ← التكوا عبر مجموع توافيقه

$$\binom{17}{5} = \frac{17!}{12! \times 5!} = \frac{17 \times 16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12!}{12! \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$= \frac{442}{2} = 221$$

مثال (١٩)

بكم طريقة يمكن تكوين اربعة احرف من مجموعة احرف الهجاء العربي وعددها (٢٨) بدون تكرار ؟

الحل الترتيب غير مهم ← دون تكرار

توافيقه عدد الطرق $= \binom{28}{4}$

ملاحظة هامة

بالنسبة للأعداد والحروف والكلمات

١. الاعداد التي تتكون من أرقام (خانات)

← الترتيب مهم ← تباديل

٢. اختيار مجموعة أرقام ←

الترتيب غير مهم ← توافيق

ملاحظة هامة

عند حساب عدد الطرق فإن

(و) تعني عملية الضرب (×)

(أو) تعني عملية الجمع (+)

الحل

(أ) $\binom{٥}{٣} \times \binom{٨}{٤} = \frac{!٥}{!٣ \times !٢} \times \frac{!٨}{!٤ \times !٤}$

$= \frac{١٢٠}{٦} \times \frac{٤٠٣٢٠}{٢٤ \times ٢٤}$

$= ٢٠ \times ٧٠ = ١٤٠٠$

توضيح

اختيار ٣ طلاب من ٥ و ٤ طالبات من ٨

$\binom{٥}{٣} \times \binom{٨}{٤}$

(ب) $\binom{٥}{٣} + \binom{٨}{٤} = \frac{١٢٠}{٦} + \frac{٦٧٢٠}{٢٤}$

$= ١٠ + ٧٠ = ٨٠$

مثال (٢)

مجموعة تكونه من ٥ طلاب ٨ طالبات

بكم طريقة يمكن

(أ) اختيار ٣ طلاب و ٤ طالبات

(ب) اختيار ٣ طلاب أو ٤ طالبات

مثال (٢١)

اذا كان عدد أفراد اسرة ١٠ أفراد كان

ضمنهم ٣ إناث، فما عدد الطرق اختيار

٣ ذكور وانثى للذهاب الى السوق

عدد الطرق $= \binom{٧}{٣} \times \binom{٣}{١}$

$= ١٠٥$

مثال (٢٢)

صندوق يحتوي على (٤) كرات حمراء و(٣) كرات بيضاء، ما عدد الطرق الممكنة

أ) لسحب كرة حمراء و كرة بيضاء

ب) لسحب كرة حمراء أو كرة بيضاء

الحل

أ) ٤ كرات حمراء ٣ كرات بيضاء

سحب كرة واحدة حمراء و كرة بيضاء

عدد الطرق $= ٤ \times ٣ = ١٢$

ب) عدد الطرق $= ٤ + ٣ = ٧$

مثال (٢٣)

كيس يحتوي على (٦) كرات بيضاء و(٥) كرات سوداء و(٢) حمراء، ما بكم طريقة يمكن اختيار ٦ كرات عشوائيا من الكيس بحيث يكون ثلاث منها بيضاء و واحدة سوداء وكرتان حمراء

الحل ٦ بيضاء ٥ سوداء ٢ حمراء

المطلوب ٣ و ١ و ٢

عدد الطرق $= \binom{6}{3} \times \binom{5}{1} \times \binom{2}{2}$

$= ٢٠ \times ٥ \times ١ = ١٠٠$

مثال (٢٤) س ٦ ص ٢٠٣

اذا كان عدد اعضاء مجلس ادارة احدى الشركات (١٠) اعضاء وكان من بينهم (٤) سيدات، ما عدد طرق اختيار رجلين وسيدة من الاعضاء لتمثيل الشركة في احدى المؤتمرات

الحل

٦ رجال ٤ سيدات

المطلوب رجلين و سيدة

عدد الطرق $= \binom{6}{2} \times \binom{4}{1}$

$= ١٥ \times ٤ = ٦٠$

مثال (٢٥) س ١ ص ٢٤٣ اختيار ذاتي

مجلس الاباء و المعلمين في احدى المدارس يتكون من (٥) من الاباء و(٣) من المعلمين، مرر المجلس اختيار لجنة واحدة (٢) من الاباء للمشاركة في احتفال ما بكم طريقة مختلفة يمكن ذلك

الحل ١٥ اباء ٣ معلمين

المطلوب ٢ و ١

عدد الطرق $= \binom{5}{2} \times \binom{3}{1}$

$= ١٠ \times ٣ = ٣٠$

مثال (٢٦)

اذا كان لدينا مجموعة من (٥) طلاب ومجموعة من (٦) معلمين بكم طريقة يمكنه اختيار طالبين للذهاب في بعثة ورئيس ومساعد رئيس من المعلمين لمرافقة البعثة ؟

٥ طلاب ، ٦ معلمين

المطلوب طالبان و معلمين (رئيس ومساعد)

الترتيب مهم الترتيب

عدد الطرق = $(^{5}_{2}) \times ل(٦,٢)$

عدد الطرق = $10 \times 6 \times 5$

$= 10 \times 3 = 30$

مثال (٢٧)

بكم طريقة يمكنه من خلالها اختيار اربعة كتب مختلفة من بين ستة كتب ثم ترتيبها على رف المكتبة

الحل

خطوات الحل: ① اختيار الكتب ② وترتيبها

٤ كتب من ٦ كتب و ترتيب الكتب وعددها ٤

عدد الطرق = $(^{6}_{4}) \times ١٤$

$= 15 \times 24 = 360$

مثال (٢٨)

مجموعة من الكتب مكونة من (٤) كتب باللغة العربية و (٥) كتب باللغة الانجليزية يراد اختيار مجموعة منها مكونة من ٣ كتب باللغة العربية وكتابان باللغة الانجليزية وترتيبها على رف في المكتبة

أ) ما عدد طرق اختيار مجموعة الكتب

ب) ما عدد طرق ترتيب الكتب على الرف

ج) ما عدد طرق اختيار الكتب وترتيبها على الرف

الحل

م) ٤ عربية ٥ انجليزي

المطلوب ٣ و ٢

عدد الطرق = $(^{4}_{3}) \times (^{5}_{2}) = 4 \times 10 = 40$

ب) عدد طرق ترتيب الكتب على الرف

عدد الكتب المختارة = $3 + 2 = 5$

عدد طرق ترتيبها = $5! = 120$

ج) عدد طرق اختيار الكتب وترتيبها على الرف

$= 40 \times 120 = 4800$ طريقة

مثال (٢٩)

مجموعة من ٦ كتب ، بكم طريقة يمكنه

(أ) اختيار ٤ كتب على الأقل

(ب) اختيار ٣ كتب على الأكثر

الحل

(أ) اختيار ٤ كتب على الأقل يعني

اختيار ٤ كتب أو ٥ كتب أو ٦ كتب

عدد الطرق $= \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6}$

$= 15 + 6 + 1 = 22$

(ب) اختيار ٣ كتب على الأكثر يعني

٣ كتب أو كتابان أو كتاب واحد أو لا كتب

عدد الطرق $= \binom{6}{3} + \binom{6}{2} + \binom{6}{1} + \binom{6}{0}$

$= 20 + 15 + 6 + 1 = 42$

مثال (٣٠)

مجموعة مكونة من ٣ معلمين و ٨ طلاب ، جد عدد الطرق التي يمكن بها تكوين لجنة ثلاثية منهم في كل حالة من الحالات الآتية

(أ) تتكون اللجنة من طالبان ومعلم واحد

(ب) تتكون اللجنة من معلمين على الأقل

(ج) تتكون اللجنة من معلم واحد على الأكثر

الحل

المطلوب تكوين لجنة ثلاثية لذلك يجب ان تتكون ٣ أشخاص

(أ) الطلاب (٨) المعلمين (٣)

٢ و ١

عدد الطرق $= \binom{8}{2} \times \binom{3}{1} = 28 \times 3$

$= 84$

(ب) الطلاب (٨) المعلمين (٣)

عدد طرق اختيار المعلمين والطلاب

عدد الطرق = معلمين وطالب أو ٣ معلمين

$= \binom{3}{1} \times \binom{8}{2} + \binom{3}{3}$

$= 3 \times 28 + 1 = 85$

(ج) معلم واحد على الأكثر

عدد الطرق $= \binom{3}{1} \times \binom{8}{2} + \binom{3}{0}$

معلم واحد وطالبان ٣ طلاب

$= 3 \times 28 + 56$

$= 84 + 56 = 140$

مثال (٢١) ص ٢٠٧

مجموعة مكونة من (٨) طلاب و (٣) معلمين، جد عدد الطرق التي يمكن تكوين لجنة رباعية منهم، في كل من الحالات الآتية:

(أ) تتكون اللجنة من ٣ طلاب ومعلم

(ب) تتكون من معلمين على الأقل

(ج) رئيس اللجنة ونائبه من المعلمين والباقي من الطلاب.

الحل

المطلوب تكوين لجنة رباعية لذلك يجب ان تحوي على اربعة اشخاص

٨ طلاب ٣ معلمين

(أ) المطلوب ٣ طلاب ومعلم

عدد الطرق = $(^{8}_{3}) \times (^{3}_{1})$

$= 56 \times 3 = 168$

(ب) المطلوب معلمين على الأقل

اللجنة معلمين وطالبين أو ٣ معلمين وطالب

عدد الطرق = $(^{3}_{2})(^{8}_{2}) + (^{3}_{3})(^{8}_{1})$

$= 3 \times 28 + 1 \times 8 = 84 + 8$

$= 92$

(ج) رئيس اللجنة ونائبه معلمين والباقي من الطلاب

اللجنة: ٢ من المعلمين و ٢ من الطلاب

رئيس بدون رئيس

$(^{3}_{2}) \times (^{8}_{2})$

$= 3 \times 28 = 84$

مثال (٢٢)

مجلس ادارة احدى الشركات يتكون من (٦) رجال و (٥) سيدات يريد تكوين لجنة من (٥) اشخاص منهم لحضور مؤتمر ما، جد عدد الطرق الممكنة لتكوين اللجنة في كل من الحالات الآتية:

(أ) ان يكون في اللجنة سيدة واحدة و ٤ رجال من بينهم رئيس ونائبه

(ب) ان تحوي اللجنة على رجل واحد فقط

(ج) جميع اللجنة من جنس واحد

يتبع الحل

الحل

المطلوب تكوين لجنة مجالس مكونة من ٥ اشخاص.

٦ رجال ٥ سيدات

(أ) ٤ رجال سيدة واحدة

رئيس ونائبه

الرئيس ونائبه رجلان أحران

$ل(٤،٢) \times \binom{٤}{٢} \times \binom{٥}{١}$

عدد الطرق $= ل(٤،٢) \times \binom{٤}{٢} \times \binom{٥}{١}$

$= ٣٠ \times ٦ \times ٥ = ٩٠٠$

(ب) رجل واحد فقط و ٤ سيدات

$\binom{٦}{١} \times \binom{٥}{٤} = ٦ \times ٥ = ٣٠$

(ج) اللجنة

واما ٥ رجال أو ٥ سيدات

$\binom{٦}{٥} + \binom{٥}{٥}$

$= ٦ + ١ = ٧$

مثال (٣٣)

صندوق يحتوي على ٤ كرات بيضاء و ٣ كرات سوداء ما عدد الطرق الممكنة

(أ) سحب كرتان بيضاء دفعة واحدة؟

(ب) سحب كرتان سوداء على التوالي دون ارجاع؟

(ج) سحب كرتان فما مختلفتا اللون؟

(د) سحب ٣ كرات فما اثنتان منها على الأقل سوداء.

الحل ٤ بيضاء ٣ سوداء

(أ) ٢ بيضاء المراد عدم سحبهم

$\binom{٧}{٢} = ٢١$

(ب) المطلوب ٢ سوداء المراد سحبهم

عدد الطرق $= ل(٣،٢) = ٦$

(ج) كرتان مختلفتا اللون (المراد عدم سحبهم) احدى الكرتان بيضاء والأخرى سوداء

عدد الطرق $= \binom{٤}{١} \times \binom{٣}{١} = ٤ \times ٣ = ١٢$

(د) المطلوب اثنتان على الأقل سوداء

٢ سوداء و واحدة بيضاء أو ٣ سوداء

$\binom{٣}{٢} \times \binom{٧}{١} + \binom{٣}{٣}$

$= ٣ \times ٧ + ١ = ٢٢$

ALWSAM

أسئلة الوزارة

(٢٠١٠) وزاري شتوي

١) كم طريقة مختلفة عليه اختيار لجنة مكونة من مدير ونائب له وامين سر من بين (٥) مرشحين

الحل

$$ل(٥،٣) = ٥ \times ٤ \times ٣$$

$$= ٦٠$$

٢) اذا كان $٣ \times ل(ن،٢) = ٤ ل(ن،٣)$

أوجد قيمة ن

الحل

بالقسمة على ٣

$$\frac{٣ \times ن!}{٣} = \frac{٤ ل}{٣}$$

$$ن! = ٤ ل$$

$$٤ ل = ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١$$

$$ن = ٤$$

(٢٠١٨) صيفي

① كم طريقة عليه اختيار (٣) معلمين وطالبين لتشكيل لجنة حيث احدى المدارس من بين (٥) معلمين و (٨) طلاب؟

الحل

٥ معلمين ٨ طلاب

المطلوب ٣ و ٢

عدد الطرق $= \binom{٥}{٣} \times \binom{٨}{٢}$

$$= ١٠ \times ٢٨ = ٢٨٠$$

② جد قيمة (ن) التي تحقق المعادلة

$$ل(ن،٣) = ٤ ل(ن،٢)$$

الحل

$$\frac{ن(ن-١)(ن-٢)}{ل} = ٤ \times \frac{ن(ن-١)}{ل}$$

$$ن - ٢ = ٤$$

$$+٢ \quad +٢$$

$$ن = ٦$$

مكتبة الوسام ALWSSAM
المعلم ناجح الجمزاوي

(٣) وزارة (٢٠٠٩) شتوية

١. كم عدداً مكوناً من خمس منازل يمكن تكوينه من مجموعة الارقام {١، ٢، ٣، ٥، ٦، ٧، ٩} التكرار غير مسموح

الحل

ل (٥، ٥) = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ١٢٠

٢. جد قيمة (ن) اذا علمت ان

ن ! = ل (٥، ٢) + (٤ / ١)

= ٤ + ٤ × ٥

ن ! = ٢٤

١ × ٢ × ٣ × ٤ = ٢٤

ن = ٤

٣. جد قيم س التي تحقق المعادلة

(٨ / س) = (٨ / ٦)

س = ٦ أو س + ٦ = ٨

س = ٢

(٤) وزارة (٢٠٠٩) صيفية

١. اوجد ل (٧، ٦)

الحل

ل (٧، ٦) = ٧ × ٦ = ٤٢

٢. في احدى الكليات اكاديمية (٢١) عضواً ارادت الادارة ان تختار منهم عميداً للكلية ونائباً للعميد اوجد عدد الطرق الممكنة

الحل

عدد الطرق = ل (٢١، ٢)

= ٢١ × ٢٠ = ٤٢٠

٣. اذا علمت ان (٨ / س) = (٨ / ٦)

اوجد قيم س

الحل

س = ٦ أو س + ٦ = ٨

س = ٣

س = ١

٣ + ١ = ٤

مكتبة الوسام ALWESAM المعلم: ناجح الجمزاوي

⑤ وزارة (٢٠١٠) شتوية

في احدى الاسواق يباع (٤) انواع من الخضار هي (بندورة، خس، ملفوف، باذنجان) و٣ انواع من اللحوم (ضاني، بقري، دجاج) أراد احمد ان يشتري نوعاً واحداً من الخضار ونوعاً واحداً من اللحم فما وجد عدد الطرق المختلفة التي يستطيع بها اختيار ذلك

الحل

عدد الطرق = ٤ × ٣ = ١٢

٢. اذا علمت ان $(ن-١)! = ٢٤$

فاوجد قيمة ن

الحل

$٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٢٤ = ٤!$

$ن - ١ = ٤$

$+١ \quad +١$

$ن = ٥$

٣. اوجد عدد التباديل الثلاثية لأحرف كلمة سداسية

الحل

$ل(٦، ٣) = ٤ \times ٥ \times ٦$

$= ١٢٠$

٤. اذا علمت ان

$ل(ن، ٣) = ٦ ل(ن، ٢)$

اوجد قيمة ن

الحل

$ن(ن-١)(ن-٢) = ٦ \times ن(ن-١)$

$ن - ٢ = ٦$

$+٢ \quad +٢$

$ن = ٨$

⑥ وزارة (٢٠١٠) صيفية

١. بكم طريقة يمكن اختيار ثلاثة طلاب من بين (١٠) طلاب لتشكيل لجنة للمشاركة في احدى المؤتمرات

الحل

توافيق $\binom{١٠}{٣} = \frac{١٠!}{٧! \times ٣!}$

$= \frac{١٠ \times ٩ \times ٨ \times ٧!}{٧! \times ٦} = \frac{٨ \times ٩ \times ١٠}{٦}$

$= ١٢٠$

٢. بكم طريقة يمكن اختيار رئيس ونائب من بين ٨ موظفين

الحل

$ل(٨، ٢) = ٧ \times ٨ = ٥٦$

٣. حل المعادلة الآتية

$ل(٩ ن) = ل(س ن)$

الحل

$س = ٩ ن + ن$

$س = ١٠ ن$

$س = ٧$

---

(٧) وزارة (٢٠١١) شتوية

١. كم عدد بدايل مجموعة من سبعة عناصر مأخوذة ثلاثة عناصر كل مرة

الحل

$ل(٧ ، ٣) = ٧ × ٦ × ٥ = ٢١٠$

٢. اوجد قيمة $\binom{٦}{٤}$

الحل

$\binom{٦}{٤} = \frac{٦!}{(٦-٤)! \times ٤!} = \frac{٦!}{٢! \times ٤!}$

$= \frac{٦ \times ٥ \times ٤!}{٢ \times ١ \times ٤!} = \frac{٣٠}{٢} = ١٥$

٣. اذا كان $ل(ن ، ٦) = ٦$

اوجد قيمة ن

الحل

$\frac{٤}{٤}$ $ل(ن ، ٦) = ٦$ $\frac{٤}{٤}$ بالقسمة

$ل(ن ، ٦) = ٣٠$

$ن × ٥ × ٦ = ٣٠$ ، $ن = ٤$

٤. جد قيمة $\binom{٧}{٥} ١٣!$

$= \frac{١٣! \times ٧!}{(٧-٥)! \times ١٣!}$

$= \frac{١٣! \times ٧ \times ٦ \times ٥!}{٢! \times ١٣!}$

$= \frac{٤٢}{٢} \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٦ \times ٢١$

$= ١٢٦$

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

⑧ وزارة (٢٠١١) صيفية

١. بكم طريقة يمكنه اختيار (٤) طلاب و (٣) طالبات لتشكيل لجنة في احدى الكليات من بين (١٠) طلاب و ٥ طالبات

الحل

١٠ طلاب ٥ طالبات

المطلوب ٤ ٣

الحل

عدد الطرق $= \binom{١٠}{٤} \times \binom{٥}{٣}$

٢. اذا كان $\binom{س}{٤} = \binom{س}{٥}$ اوجد قيمة س

$س = ٤ + ٥ = ٩$

٣. اذا كان $٣ ل(ن-١) + ١٢ = ٣٦٦$ اوجد قيمة ن

الحل $٣ ل(ن-١) + ١٢ \times ٢ = ٣٦٦$

$ل(ن-١) = ٣٦٦ - ٢٤ = ٣٤٢$ بالقسمة على ٣

$\frac{(ن-١)!}{(ن-٣)!} = ١٢٠$

$(ن-١)(ن-٢) = ١٢٠ = ١٠ \times ١٢$

$ن - ١ = ١٠ \Leftarrow ن = ١١$

⑨ وزارة (٢٠١٢) شتوية

١. كم عدد مكون من خمس خانات يمكن تكوينه من مجموعة الارقام {٦،٤،٣،٢،١} اذا لم يسمح بتكرار الارقام

الحل

$ل(٦،٣) = ٦ \times ٣ \times ٢ = ٣٦$

٢. اذا كان $ن ل ٢ = ٤٢$ فاوجد قيمة ن

الحل

$ن(ن-١) = ٤٢ \Leftarrow ن(ن-١) = ٧ \times ٦$

$ن = ٧$

٣. مجموعة مكونة من (٨) معلمين و (٤) اداريين اوجد عدد الطرق التي يمكن بها تكوين لجنة ثلاثية بحيث تتكون من معلم واحد على الأقل

الحل ٨ معلمين ٤ اداريين

اللجنة معلم ٢ اداريين أو معلمين واداري واحد أو ٣ معلمين

$= (٨) \times \binom{٤}{٢} + (٨) \times \binom{٤}{١} + \binom{٨}{٣}$

$= ٤٨ + ١١٢ + ٥٦ = ٢١٦$

(١٠) وزارة (٢٠١٢) صيفية

١. عدد توافيق (٦) عناصر مأخوذة (٣) عناصر في كل مرة

الحل

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{1\times2\times3\times4\times5\times6}{1\times2\times3\times1\times2\times3} = 20$$

٢. اصغر قيمة $1^{c} + 1^{3}$

$= 1\times2^{2} + 1\times2 = 8$

٣. يبيع احد المكيسات (٣) انواع من الاقلام و(٤) انواع من المحارة بكم طريقة يمكن لأحد الطلاب شراء قلم ومحاة

الحل

$$L(4,2) = 3\times4 = 12$$

٣. اذا كان $\frac{1}{3} L(n,3) = L(n,2)$

اوجد قيمة n

الحل

$$\frac{1}{3} \cancel{n(n-1)(n-2)} = \cancel{n(n-1)}$$

$$\frac{1}{3}(n-2) = 1 \quad \times 3$$

$$n-2 = 3 \Leftarrow n = 5$$

$+2 \quad +2$

(١١) وزارة (٢٠١٣) شتوية

١. اذا كان $L(n,3) = 60$ فاوجد $\binom{n}{3}$

الحل

$$\binom{n}{3} = \frac{L(n,3)}{3!} = \frac{60}{6} = 10$$

أو

$$\frac{60}{\cancel{2}\times\cancel{3}\times4} = 10$$

أو

نجد n من $L(n,3) = 6$

$$8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1$$

$n = 5$ ومنها

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{120}{2\times6} = 10$$

مكتبة الوسام
AL-WESAM
المعلم: عبد الله الوسام

٢. اوجد قيمة س التي تحقق المعادلة $\binom{س}{٣} = \binom{س}{٥}$

الحل $س = ٣ + ٥ = ٨$

٣. بكم طريقة يمكن اختيار (٣) معلمين وطالبين لتشكيل لجنة من بين (٥) معلمين و (٩) طلاب

الحل

٥ معلمين ٩ طلاب

المطلوب ٣ ٢

عدد الطرق $= \binom{٥}{٣} \times \binom{٩}{٢}$

(١٢) وزارة (٢٠١٢) صيفية

١. بكم طريقة يمكن اختيار كتابين من بين سبعة كتب مختلفة

الحل: $\binom{٧}{٢} = \frac{٧!}{٥! \times ٢!} = \frac{٧ \times ٦ \times ٥!}{٥! \times ٢ \times ١} = ٢١$

٢. اوجد مجموعة كل قيم س التي تحقق المعادلة $\binom{س}{٢} = \binom{١٢}{٨}$

الحل

$س = ٨$ أو $س + ٨ = ١٢$

$-٨ \quad -٨$

$س = ٨ \qquad س = ٤$

٤. جد قيمة ر التي تحقق المعادلة

$٣ ل(٦، ر) = ٣٦٠$

الحل

بالقسمة على ٣

$ل(٦، ر) = \frac{٣٦٠}{٣} = ١٢٠$

$٦ \times ٥ \times ٤ = ١٢٠$

$ن = ٦$

٢. جد قيمة ن التي تحقق المعادلة

$ن ل ٢ = ٢ \times \binom{ن}{٢} + ل(٥، ٦)$

الحل

$ن ل ٢ = ٢ \times \frac{ن!}{٢! \times (ن-٢)!} + ٥ \times ٦$

$= \frac{ن(ن-١)(ن-٢)!}{(ن-٢)!} + ٣٠ = ٣٠ + ٩ \times ١٠ = ١٢٠$

$ن ل ٢ = ١٢٠$

$ن(ن-١)(ن-٢)! = ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ \Leftarrow ١٢٠$

$ن! = ١٢٠ \Leftarrow ن = ٥$

مكتبة الوسام ALWSAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

(١٣) وزارة (٤، ١٤، ٢) شتوية

١. مجموعة مكونة من (٦) معلمين و(٨) طلاب جد عدد الطرق التي يمكن بها تكوين لجنة ثلاثية تتكون من معلمين اثنين على الأقل

الحل

اللجنة ثلاثية

٦ معلمين ٨ طلاب

اللجنة = معلمين وطالب أو ٣ معلمين

$= (^{6}_{2}) \times (^{8}_{1}) + (^{6}_{3})$

=

٢. جد قيمة ن التي تحقق المعادلة

$ل(ن، ٣) = ٦ \times (^{ن}_{2})$

الحل

$\frac{ن!}{(ن-2)!\,2!} \times 2 = ن(ن-1)(ن-2)$

$\frac{ن(ن-1)(ن-2)}{(ن-2)!} = 3 \times \frac{ن(ن-1)(ن-2)!}{2!(ن-2)!}$

$ن - 2 = 3$

$ن = 5 \Leftarrow ن + 2 \neq 0$

٣. بكم طريقة يمكن أن يجلس اربع طالبات على اربعة مقاعد موضوعة في صف واحد ؟

الحل

عدد الطرق = $4 \times 3 \times 2 \times 1$

$= 24$

(١٤) وزارة (٤، ١٤، ٢) صيفية

١. مجموعة مكونة من (٤) معلمين و (٦) طلاب جد عدد الطرق التي يمكن بها تكوين لجنة رباعية يكون فيها رئيس ونائب للرئيس من المعلمين وعضوين من الطلاب

الحل ٤ معلمين ٦ طلاب

رئيس و نائب رئيس

$ل(4 \times 3) \times (^{6}_{2})$

مكتبة الوسام ALWESAM
الوسام: ناجح الجمزاوي

٢. اذا كانت

$\binom{ن}{٣} = \frac{ل(ن، ٢)}{١٣!}$ اوجد قيمة ن

الحل

$\frac{ن!}{(ن-٣)!} = \frac{ن(ن-١)}{١٢}$

$\frac{ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)!}{(ن-٣)!} = \frac{ن(ن-١)}{١٢}$

$ن - ٢ = ١ \Leftarrow ن = ٣$

(١٥) وزارة (٢٠١٥) شتوية

١. اذا كان $ل(ن، ٣) = \binom{ن}{٤}$ اوجد قيمة ن

الحل

$\frac{ن!}{ن(ن-١)(ن-٢)} = \frac{ن!}{(ن-٤)! \times ١٤}$

$\frac{ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)(ن-٤)!}{ن(ن-١)(ن-٢)} = ١٤ \times (ن-٤)!$

$\frac{ن-٣}{٤} = ١ \Leftarrow \frac{ن-٣}{١ \times ٢ \times ٤} = ١$

$ن - ٣ = ٤ \Leftarrow ن = ٧$

٣. اذا كان

$ن! = ل(٥، ٣) + \frac{٤}{٣} ل(ن)$

اوجد قيمة ن

الحل

$ن! = ٥ \times ٤ \times ٣ + \frac{٤}{٣} \times \frac{١٠!}{١٨ \times ١٠}$

$= ٦٠ + \frac{٤}{٣} \times \frac{١٠ \times ٩ \times ٨!}{١٨ \times ١٠}$

$= ٦٠ + ٦٠ = ١٢٠$

$ن! = ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ١٢٠$

$ن = ٥$

٤. مجموعة مكونة من (٤) معلمين (٨) طلاب، جد عدد الطرق التي يمكن فيها تكوين لجنة ثلاثية منهم بحيث تتكون من معلم واحد على الأقل

الحل

٤ معلمين ٨ طلاب

اللجنة مكونة من ٣ اشخاص

$\Leftarrow$ تتبع الحل

مكتبة الوسام ALWSAM

اللجنة

معلم و٤ طلاب أو ٢ معلم و٣ طلاب أو ٣ معلم

عدد الطرق =

$(\frac{٤}{١}) \times (\frac{٧}{٤}) + (\frac{٧}{٢})(\frac{٤}{٢}) + (\frac{٤}{٣})$

$= ٤ + ٤٢ + ١٢٥$

$= ١٣٠$

٣. حيث ص ∈ ط حل

$(\frac{٩}{٣س}) = (\frac{٩}{٦})$

الحل

$٣س = ٦$ أو $٣س + ٦ = ٩$

$\frac{٣س}{٣} = \frac{٦}{٣}$ $\quad$ $\frac{٣س}{٣} = \frac{٣}{٣}$

$س = ٢$ $\quad$ $س = ١$

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

ورقة عمل

س١

دخلت سيدة محل للأقمشة فوجدت نوعان من القميص ٣ صوف ٥ قطن ومن كل نوع ٣ ألوان ٣ احمر ، اخضر ، اسود في فيلم طريقة امام السيدة لاختيار صنف واحد من القماش ولون واحد

س٢ يعمل في شركة مهندسين و٦ فنيين و٢٠ عاملاً فيلم طريقة يمكن تكوين فريق عمل مكون من مهندس و فني وعامل ؟

س٣ اراد ٤ أشخاص اخذ صورة جماعية يوقفهم معاً في صف واحد ، فيلم طريقة مختلفة يمكن ان يصطف فيها الاشخاص

س٤ لحديقة ٤ ابواب فيلم طريقة تستطيع الدخول للحديقة من احد الابواب والخروج من باب آخر

س٥ أكتب كل مما يلي بابسط صورة

أ) $\frac{١٠٠!}{١٤٧!}$ ب) $\frac{١٢٠! \times ١٥!}{١١٢ \times ١٢٠!}$

س٦ اوجد قيمة ن في كل مما يلي

أ) $٤ن! = ٤٨٠$

ب) $(ن+٢)! = ٧٢٠$

ج) $(٢ن+١)! = ٥٠٤٠$

س٧

اذا كان $\frac{ن!}{(ن-٢)!} = ٢٠$

اوجد قيمة ن

مكتبة الوسام AlWesam

المعلم: ناجح الجمزاوي

س٨ :

اذا كان لدينا مجموعة الارقام

{١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩}

أ) كم عدد مكون من ٤ منازل

عليه تكوينه من الارقام السابقه

بدون تكرار

ب) كم عدد مكون من ٤ منازل

عليه تكوينه من مجموعة الارقام

بدون تكرار

ج) كم عدد مكون من ٤ منازل يمكن

تكوينه من مجموعة الارقام اذا

سمح بالتكرار

د) بكم طريقه عليه اختيار ٥

ارقام من مجموعة الارقام

هـ) بكم طريقة عليه اختيار ٦

ارقام من مجموعة الارقام ثم

تكوين عدد من ٣ منازل

من الارقام المختاره

س٩ : عاهي عدد طرق تعليق

٨ صور على حائط اخي صف واحد

س١٠ اشترك ٦ متسابقين في

اولمبياد الرياضيات السنوي

بكم طريقه عليه ان تظهر نتيجه

السباق للمراكز الثلاثه الأولى

علما بانه لا يحق لاكثر من مركز نفسه

س١١ بكم طريقه عليه تشكيل

ثلاثة مجموعات من بين ١٨ طالب

بحيث تكون المجموعة الأولى

مكونه من ٣ طلاب والمجموعة

الثانيه مكون من ٤ طلاب

والمجموعة الثالثه مكونه من ٦ طلاب

س١٢ بكم طريقة عليه اختيار لجنه

تكونه من ٩ اعضاء من بين

٨ معلمين و ١١ اباء و ٦ طلاب

بحيث تتكون من ٣ معلمين و ٤ اباء

و طالبين ؟

س٣/ جد قيمة المجهول في كل مما يلي

أ) اذا كان $\binom{٧}{٣} = \binom{٧}{س}$

ب) اذا كان $\binom{٥}{س} = ١$

ج) اذا كان $\binom{س}{٢} = ٢٨$

د) اذا كان $\binom{١٢}{س} = \binom{١٢}{٣-ع}$

هـ) اذا كان $\frac{(ن+١)!}{(ن-١)!} = ٢٤$

و) اذا كان $(٤ن)! = ٤٢$

ز) $\binom{س}{٥} = \binom{س}{٧}$

ح) اذا كان $ل(ن،٥) = ٩×٨×٧×٦×٥$

ط) اذا كان $ل(لا،ر) = ٤٢$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

الدرس الثالث

المتغير العشوائي المنفصل وتوزيع ذات الحدين

المتغير العشوائي

هو اقتران معرّف من الفضاء العيني (س) إلى مجموعة جزئية من مجموعة الاعداد الحقيقية وتستخدم الرموز س ، ص ، ع للدلالة على المتغيرات العشوائية .

ملاحظة هامة

الفضاء العيني (س) : هو جميع الخيارات الممكنة للتجربة .

احتمال الحادث (ح) = عدد عناصر (ح) / عدد عناصر (س)

ل(ح) = ع(ح) / ع(س)

مثال ① توضيحي

أذا دل المتغير العشوائي (س) على عدد مرات ظهور كتابة في تجربة رمي قطعة نقد مرتين على الارض .

فالفضاء العيني يكون =

= {(ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك)}

عدد عناصر الفضاء العيني ع(س) = 4

القيم للمتغير العشوائي (س)

= {0 ، 1 ، 2} عدد مرات ظهور الكتابة .

0 : تعني عدم ظهور الكتابة أي (ص ، ص)

1 : تعني ظهور كتابة مرة واحدة (ص ، ك) ، (ك ، ص)

2 : تعني ظهور كتابة مرتين (ك ، ك)

ل(س = 0) : تعني احتمال عدم ظهور الكتابة

عدد مرات عدم ظهور كتابة

يتبع ←

أي ظهور (ص، ص) = ١

ل(س = ٠) = ع(ح) / ع(س) = ١/٤

ل(س = ١) : تعني ظهور كتابة مرة واحدة

وهي (ص، ك) ، (ك، ص) = ٢

ع(ح) = ٢

ل(س = ١) = ع(ح) / ع(س) = ٢/٤

ل(س = ٢) : تعني احتمال ظهور كتابة

مرتين وهي (ك، ك)

ع(ح) = ١

ل(س = ٢) = ع(ح) / ع(س) = ١/٤

س	٠	١	٢
ل(س)	١/٤	٢/٤	١/٤

يسمى هذا الجدول

جدول التوزيع الاحتمالي

وعليه كتابته على صورة أزواج مرتبة

{(٠، ١/٤) ، (١، ٢/٤) ، (٢، ١/٤)}

نلاحظ على الاحتمالات لقيم س

الشروط الآتية

١) ٠ ≤ ل(س) ≤ ١

الاحتمال لأي قيمة يتراوح بين صفر و١

٢) مج ل(س) = ١

أي مجموع الاحتمالات = ١

ويسمى ل اقتران احتمال للمتغير

العشوائي المنفصل س إذا حقق الشرطان

مثال ٢

إذا دل المتغير العشوائي س على

عدد الأطفال الذكور لدى عائلة

لديها طفلان وتم تسجيل النتائج

حسب الجنس وتسلسل الولادة

أ) أجد القيم الممكنة للمتغير العشوائي س

ب) أكتب جدول التوزيع الاحتمالي

الحل

فضاء العينة = {ذ ذ، ذ ب، ب ذ، ب ب}

س(ذ ذ) = ٢ ← ل(٢) = ١/٤

س(ذ ب) = س(ب ذ) = ١ ← ل(١) = ٢/٤

يتبع

س(ب ب) = ٠ ⟸ ل(٠) = $\frac{1}{4}$

م) المتغير العشوائي يأخذ القيم

م: ٠، ١، ٢}

ب) جدول التوزيع الاحتمالي

س	٠	١	٢
ل(س)	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

مثال (٣)

اذا دل المتغير العشوائي (س) على عدد مرات الصور، اذا لعب فريد كرة مدم ٣ مباريات، وكانت النتيجة صور أو خسارة فجد

م) الفضاء العيني لـ

ب) القيم الممكنة للمتغير العشوائي (س)

ج) جدول التوزيع الاحتمالي

الحل

م) ن = {ف ف ف، ف ف خ، (ف خ ف، ف خ خ)، (خ ف ف، خ ف خ)، (خ خ ف، خ خ خ)}

ب) قيم س الممكنة = {٠، ١، ٢، ٣}

ج - جدول التوزيع الاحتمالي

ع (س) = ٨

ل(س = ٠) = $\frac{1}{8}$ ل(س = ١) = $\frac{3}{8}$

ل(س = ٢) = $\frac{3}{8}$ ل(س = ٣) = $\frac{1}{8}$

س	٠	١	٢	٣
ل(س)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

مثال (٤) تدريب (١) ص ٢٠٦

اذا دل س المتغير العشوائي س على عدد مرات ظهور الصورة عند رمي قطعة نقود ٣ مرات فجد القيم الممكنة للمتغير العشوائي س، واكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س

الحل

س = {ص ص ص، ص ص ك، ص ك ص، ك ص ص، ك ك ص، ك ص ك، ص ك ك، ك ك ك}

ل ل ل ل

يتبع ←

مكتبة الوسام ALWESAM

حيث س الممكنه = {٠، ١، ٢، ٣}

ل(س=٠) = $\frac{١}{٨}$

ل(س=١) = $\frac{٣}{٨}$ ع(ح) = ٣ لأن ظهور الصورة مره واحدة = {ص ك ك، ك ص ك، ك ك ص}

ل(س=٢) = $\frac{٣}{٨}$

ل(س=٣) = $\frac{١}{٨}$

س	٠	١	٢	٣
ل(س)	$\frac{١}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{١}{٨}$

مثال ④

في تجربة رمي حجر نرد مرة واحدة، اذا دل المتغير س على عدد مرات ظهور ٣ فأكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س.

الحل

ك = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}

مج س هي = {٠، ١}

إما ان يظهر العدد ٣ أو لا يظهر

ل(س=٠) عدم ظهور العدد ٣

ح = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}

$= \frac{ع(ح)}{ع(س)} = \frac{٥}{٦}$

ل(س=١) ظهور العدد ٣

$= \frac{ع(ح)}{ع(س)} = \frac{١}{٦}$

س	٠	١
ل(س)	$\frac{٥}{٦}$	$\frac{١}{٦}$

مثال ⑤

عند رمي حجر نرد مرتين وتسجيل النتيجة الظاهرة على الوجهين اذا دل المتغير العشوائي س على عدد مرات ظهور الرقم (٥) فاكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س؟

الحل

ع(س) = ٣٦

مج س الممكنه = {٠، ١، ٢}

يتبع ←

مركز الوسام ALWESAM ناجح الجمزاوي

: ان لايظهر العدد ٥

ا : ان يظهر العدد ٥ مرة واحدة

٢ : ان يظهر العدد ٥ مرتين

ل(س=١) = (١،٥)، (٢،٥)، (٣،٥)، (٤،٥)، (٥،١)، (٥،٢)، (٥،٣)، (٥،٤)، (٥،٦)، (٦،٥)

$= \frac{١٠}{٣٦}$

ل(س=٢) = (٥،٥) $= \frac{١}{٣٦}$

وكما ان ل(س=٠)

مجموع الاحتمالات = ١

ل(٠) + ل(١) + ل(٢) = ١

$ل(٠) + \frac{١٠}{٣٦} + \frac{١}{٣٦} = ١$

$ل(٠) + \frac{١١}{٣٦} = ١$

$ل(٠) = \frac{٣٦}{٣٦} - \frac{١١}{٣٦} = \frac{٢٥}{٣٦}$

س	٠	١	٢
ل(س)	$\frac{٢٥}{٣٦}$	$\frac{١٠}{٣٦}$	$\frac{١}{٣٦}$

مثال (٧)

صندوق يحوي ٤ كرات حمراء و٣ كرات صفراء، ماذا سحبت من الصندوق كرتين على التوالي مع الارجاع وليكن (س) عدد الكرات الصفراء فكون جدول التوزيع الاحتمالي.

الحل

عدد الكرات = ٤ + ٣ = ٧

س = {٠، ١، ٢}

الحيز س الممكنة س = {٠، ١، ٢}

ل(س=٠) = ل(ح ح)

= الاولى حمراء والثانية حمراء مع الارجاع

$\frac{٤}{٧} \times \frac{٤}{٧} = \frac{١٦}{٤٩}$

ل(س=١) = ل(ح ص) + ل(ص ح)

$= \frac{٤}{٧} \times \frac{٣}{٧} + \frac{٣}{٧} \times \frac{٤}{٧}$

$= \frac{٢٤}{٤٩}$

يتبع الحل

مكتبة الوسام AlWesam
المعلم: ناجح الجمزاوي

ل(س=٢) = ل(ص، ص)

$= \frac{3}{7} \times \frac{2}{7} = \frac{9}{49}$

س	٠	١	٢
ل(س)	$\frac{16}{49}$	$\frac{24}{49}$	$\frac{9}{49}$

مثال (٨)

صندوق يحتوي على ٣ كرات حمراء وكرتين بيضاء، سحب من الصندوق ٣ كرات معاً

اذا دل المتغير العشوائي س على عدد الكرات البيضاء المسحوبة

فاكتب جدول التوزيع الاحتمالي لكل

قيم س المكنة هي {٠، ١، ٢}

لأنه لايمكن ان تكون ٣ كرات بيضاء (عدد الكرات البيضاء = ٢)

ع(س) = $\binom{5}{3}$ = ١٠

لأن الترتيب غير مهم السحب معاً

٥: عدد الكرات الكلي ٣: عدد الكرات المسحوبة

ع(٠) = ع(ح ح ح) = الكرات البيضاء حمراء

= $\binom{3}{3}$ = ١

ع(١) = ع(ب ح ح) = واحدة بيضاء و حمراء

= $\binom{2}{1} \times \binom{3}{2}$ = ٢ × ٣ = ٦

ع(٢) = ٢ بيضاء و احمر

= $\binom{2}{2} \times \binom{3}{1}$ = ١ × ٣ = ٣

س	٠	١	٢
ل(س)	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

تعريف

ليكن (ل) اقتران الاحتمال للمتغير العشوائي (س) اذا كان

① ل(س) ≥ صفر

② مجـ ل(س) = ١

مثال ⑨

عين الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س) اوجد قيمة ك؟

س	٠	١	٢
ل(س)	٠٫٣	ك	٠٫٥

الحل

مجـ ل(س) = ١

٠٫٣ + ك + ٠٫٥ = ١

٠٫٨ + ك = ١

← ك = ٠٫٢

مثال ⑩

اذا كان التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي معطى بالمجموعة

{(٠، ٣/١٤)، (١، ٥/١٤)، (٢، ب)}

اوجد قيمة ب؟

الحل

مجـ ل(س) = ١ مجموع الاحتمالات = ١

٣/١٤ + ٥/١٤ + ب = ١

٨/١٤ + ب = ١ ← ب = ١ − ٨/١٤

بوضع مقام

= ١٤/١٤ − ٨/١٤ = ٦/١٤

مثال ⑪

س١ ص٤٣ اختبار ذاتي

اذا كان التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي هو

{(-٢، ٠٫٣)، (٠، ٠٫٢)، (١، ٠٫٥)، (٢، ك)}

اوجد قيمة ك.

الحل

مجـ ل(س) = ١

٠٫٣ + ٠٫٢ + ٠٫٥ + ك = ١

٠٫٥ + ك = ١ ←

ك = ١ − ٠٫٥ = ٠٫٥

مكتبة الوسام ALWESAM

توزيع ذي الحدين

أساس التوزيع الاحتمالي لتوزيع ذي الحدين هو تجربة برنولي وهي تجربة عشوائية مكونة من محاولة واحدة فقط فضاءها العيني مكون من نتيجتين منفصلتين واحدة تسمى نجاحاً والأخرى تسمى فشلاً

النجاح : يعني وقوع الحادث

الفشل : يعني عدم وقوع الحادث

وبما ان تجربة برنولي ليس لها سوى نتيجتين منفصلتين هما النجاح والفشل فإن

احتمال النجاح + احتمال الفشل = ١

مثلاً

اذا كان احتمال الفوز في لعبة = لا، فإن احتمال الخسارة = ١ - لا، = ٢ل

واذا كرّر هذا النوع من التجارب عدداً معيناً من المرات ، بحيث تكون مستقلة ومتماثلة ، أي ان نتيجة احدى التجارب لا تؤثر في سواها ، وأن احتمال النجاح في كل مرة يبقى نفسه لجميع المحاولات الأخرى ، يسمى هذا النوع من التجارب " تجارب ذي الحدين "

مثلاً اذا اخذت تجربة القاء قطعة نقود مرات عديدة فإن احتمال ظهور الصورة في كل مرة يبقى ثابتاً ويساوي $(\frac{1}{2})$

ومن الامثلة على متغيرات تتبع توزيع ذي الحدين

١ : عدد المحليات التي محمد

٢ : عدد الحيوانات التي لا تطاير في احد

٣ : عدد الأشجار التي تصاب بمرض معين

قانون ذي الحدين

$$ل(س=ر)=\binom{ن}{ر}\,م^{ر}\,(1-م)^{ن-ر}$$

حيث

ن : عدد مرات تكرار التجربة

ر : عدد مرات النجاح حيث ر = ٠، ١، ٢، ... ، ن

م : احتمال النجاح في المرة الواحدة

1-م : احتمال عدم النجاح (الفشل)

ن ، م معالما المتغير العشوائي ذي الحدين

مثال ① تدريب ٣ ص ٢٠٩

اذا كان س متغيراً عشوائياً ذا الحدين ومعالماه ن = ٥ ، م = ٠٫٣

جد كلاً مما يأتي

① ل(س = ٢) ② ل(س ≤ ١)

③ ل(س ≥ ٤) ④ ل(١ < س ≤ ٤)

الحل

مدى س = {٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥}

حيث ن = ٥

① ل(س = ٢)

ر = ٢ ، ن = ٥ ، م = ٠٫٣ ، ١-م = ٠٫٧

$$ل(س=ر)=\binom{ن}{ر}\,م^{ر}\,(1-م)^{ن-ر}$$

$$ل(س=٢)=\binom{٥}{٢}\,(٠٫٣)^{٢}\,(٠٫٧)^{٣}$$

② ل(س ≤ ١) = ل(س = ٠) + ل(س = ١)

$$ل(س=٠)=\binom{٥}{٠}\,(٠٫٣)^{٠}\,(٠٫٧)^{٥}=(٠٫٧)^{٥}$$

$$=١\times١\times(٠٫٧)^{٥}=(٠٫٧)^{٥}$$

③ ل(س ≥ ٤) = ل(س = ٤) + ل(س = ٥)

$$=\binom{٥}{٤}(٠٫٣)^{٤}(٠٫٧)^{١}+\binom{٥}{٥}(٠٫٣)^{٥}(٠٫٧)^{٠}$$

④ ل(١ < س ≤ ٤) = ل(س = ٢) + ل(س = ٣) + ل(س = ٤)

$$=\binom{٥}{٢}(٠٫٣)^{٢}(٠٫٧)^{٣}+\binom{٥}{٣}(٠٫٣)^{٣}(٠٫٧)^{٢}+\binom{٥}{٤}(٠٫٣)^{٤}(٠٫٧)^{١}$$

مثال ② اذا كان س متغيراً عشوائياً يخضع للتوزيع ذي الحدين حيث ن = ٤ وكان $ل(س \geq ٣)=\frac{١٥}{١٦}$ فجد م ؟

← يتبع الحل

الحل

$\{0,1,2,3,4\} \leftarrow$ قيم $س = 4 \leftarrow ن$

$ل(س \geq 3) = ل(3) + ل(4) + ل(1)$

$+ ل(0)$

$= 1 - ل(4) = \frac{15}{16}$

لأن مجموع الاحتمالات $= 1$

$ل(4) = 1 - \frac{15}{16} = \frac{16}{16} - \frac{15}{16} = \frac{1}{16}$

$ل(4) = \binom{4}{4} (م)^4 (1-م)^0 = \frac{1}{16}$

$م^4 = \frac{1}{16}$ بأخذ الجذر الرابع

$م = \frac{1}{2}$

$س \sim ذ(4, \frac{1}{2})$ المعاصفة مثال ③

اذا كان $س$ متغيراً عشوائياً يخضع لتوزيع ذي الحدين حيث $ن = 3$

$ل(س \geq 1) = \frac{19}{27}$ حيث $ل$ احتمالي

④ قيمة $م$ ① $ل(س = 2)$

الحل

$ن = 3 \leftarrow$ قيم $س = \{0,1,2,3\}$

$ل(س \geq 1) = \frac{19}{27}$

$ل(س \geq 1) = ل(1) + ل(2) + ل(3)$

$= 1 - ل(0) = \frac{19}{27}$

$ل(0) = 1 - \frac{19}{27} = \frac{27}{27} - \frac{19}{27} = \frac{8}{27}$

$ل(0) = \frac{8}{27} \leftarrow \binom{3}{0} (م)^0 (1-م)^3 = \frac{8}{27}$

$(1-م)^3 = \frac{8}{27}$ بأخذ الجذر التكعيبي

$1 - م = \frac{2}{3} \leftarrow م = 1 - \frac{2}{3}$

$\leftarrow م = \frac{3}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

① $ل(س = 2) = \binom{3}{2} (\frac{1}{3})^2 (\frac{2}{3})^1$

مثال ④ $س \sim ذ(ن, م)$

اذا كان $س$ متغيراً عشوائياً ذا الحدين معاملاه $ن = 3$ ، $م = ؟$ ، $ع = ؟$ ، $ص = ؟$

④ قيم $س$ ① جدول التوزيع الاحتمالي

الحل

④ $ن = 3 \leftarrow$ قيم $س = \{0,1,2,3\}$

$\leftarrow$ يتبع الحل

ⓑ

ل(٠) = ل(٣) (٠٫٢)^٣ (٠٫٨)^٣ = ٠٫٥١٢

ل(١) = ل(٣) (٠٫٢)^١ (٠٫٨)^٢ = ٠٫٣٨٤

ل(٢) = ل(٣) (٠٫٢)^٢ (٠٫٨)^١ = ٠٫٠٩٦

ل(٣) = ل(٣) (٠٫٢)^٣ (٠٫٨)^٠ = ٠٫٠٠٨

= ١٫٠٠٠

س	٠	١	٢	٣
ل(س)	٠٫٥١٢	٠٫٣٨٤	٠٫٠٩٦	٠٫٠٠٨

مثال ⑤

لدى عائلة (٦) اطفال : ما احتمال ان يكون (٤) اطفال منهم ذكور

الحل

ن = ٦ ، ح = ٠٫٥ ، ق = ١ - ح = ٠٫٥

ح = ٠٫٥ لأنه احتمال ان يكون و من نسبة ؟ ولادة الى التجربة الواحدة = ١/٢

ل(س = ٤) = ل(٦ ، ٤) (٠٫٥)^٤ (٠٫٥)^٢

= ١٥ × (٠٫٥)^٤ (٠٫٥)^٢

مثال ⑥

من تجربة إلقاء قطعة نقد سبع مرات متتالية جد احتمال

ⓐ ظهور الصورة مرتين فقط

ⓑ ظهور الصورة في (٤) مرات

ⓒ ظهورة الصورة في جميع المرات

ⓓ ان لا تظهر الصورة .

الحل

س : عدد مرات ظهور الصورة

ن = ٧ ، س = ؟ {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧}

ح = احتمال ظهور الصورة في الرمية الواحدة = ١/٢

ق = ١ - ح = ١/٢

ⓐ ظهور الصورة مرتين فقط

ل(س = ٢) = ل(٧ ، ٢) (١/٢)^٢ (١/٢)^٥

ⓑ ظهور الصورة في (٤) مرات

ل(س = ٤) = ل(٧ ، ٤) (١/٢)^٤ (١/٢)^٣

ⓒ ن = ٧

ل(س = ٧) = ل(٧ ، ٧) (١/٢)^٧ (١/٢)^٠ = (١/٢)^٧

ⓓ س = ٠

ل(س = ٠) = ل(٧ ، ٠) (١/٢)^٠ (١/٢)^٧

= (١/٢)^٧

مثال ⑦

اذا كان احتمال نمو نوع من البذور عند زراعتها (٠٫٨٥) إذا تمت زراعة (٥) بذرات فأوجد

ⓐ احتمال ان تنمو ٤ بذرات

ⓑ احتمال ان تنمو بذره واحده على الأكثر

ⓒ احتمال ان تنمو (٤) بذرات على الأقل

الحل

ن = ٥ ، ح = ٠٫٨٥ ، ف = ١ − ح = ١ − ٠٫٨٥ = ٠٫١٥

س = {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥}

ⓐ ل(س = ٤) = $\binom{5}{4}$ (٠٫٨٥)^4 (٠٫١٥)^1

ⓑ ل(س ≤ ١) = ل(س = ٠) + ل(س = ١)

= $\binom{5}{0}$ (٠٫٨٥)^0 (٠٫١٥)^5 + $\binom{5}{1}$ (٠٫٨٥)^1 (٠٫١٥)^4

ⓒ ل(س ≥ ٤) = ل(س = ٤) + ل(س = ٥)

= $\binom{5}{4}$ (٠٫٨٥)^4 (٠٫١٥)^1 + $\binom{5}{5}$ (٠٫٨٥)^5 (٠٫١٥)^0

مثال ⑧

عند رمي حجر النرد ٤ مرات متتالية ما احتمال ظهور عدد فردي مره واحده على الأكثر

الحل

ن = ٤ ، احتمال ظهور عدد فردي = $\frac{2}{6}$ = $\frac{1}{3}$ = ح

س = عدد مرات ظهور عدد فردي

= {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤}

ل(س ≤ ١) = ل(١) + ل(٠)

= $\binom{4}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \binom{4}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^4$

= $4 \times \frac{1}{3} \times \frac{8}{27} + 1 \times 1 \times \frac{16}{81}$

= $\frac{32}{81} + \frac{16}{81} = \frac{48}{81}$

مثال ⑨

عائلة لديها ستة اطفال تم تصنيفهم حسب الجنس وتسلسل الولادة جد احتمال

ⓐ ان يكون لدى العائله ولدان فقط

ⓑ ان يكون لدى العائله خمسة اولاد على الأقل

ⓒ ان يكون عدد الأولاد أقل من عدد البنات

الحل

ن = ٦ س = عدد الأولاد

م = ١/٢ ١ - م = ١/٢

(أ) ل(٤) = $(٦_{٤})(\frac{١}{٢})^{٤}(\frac{١}{٢})^{٢}$

(ب) ل(س ≤ ٥) = ل(٥) + ل(٦)

= $(٦_{٥})(\frac{١}{٢})^{٥}(\frac{١}{٢})^{١} + (٦_{٦})(\frac{١}{٢})^{٦}(\frac{١}{٢})^{٠}$

(ج) عدد الأولاد = ٠ أو ١ أو ٢

= ل(٠) + ل(١) + ل(٢)

= $(٦_{٠})(\frac{١}{٢})^{٠}(\frac{١}{٢})^{٦} + (٦_{١})(\frac{١}{٢})^{١}(\frac{١}{٢})^{٥}$

+ $(٦_{٢})(\frac{١}{٢})^{٢}(\frac{١}{٢})^{٤}$

مثال (١١)

اذا كان احتمال نجاح عليه جراحيه يساوي ٩٠٪ اذا اجريت اربعة عمليات فاوجد احتمال ان لا تنجح اي عمليه.

الحل

م = ٩٠٪ ن = ٤ ١ - م = ا.

ل(س = ٠) = $(٤_{٠})(٩٠٠)^{٠}(ا٠٠)^{٤}$

مثال (١٢)

اذا كان احتمال ان يصيب شخص هدفا ما يساوي (٠٫٥) فاذا اطلقه (٥) طلقات على الهدف فما احتمال

(أ) اصابة الهدف ٣ مرات

(ب) ان يخطأ الهدف ثلاث مرات

(ج) عدم اصابة الهدف

(د) اصابة الهدف مره واحده على الأكثر

(هـ) اصابة الهدف مرة على الأقل

الحل

ن = ٥ م = ٠٫٥ ١ - م = ١ - ٠٫٥ = ٠٫٥

← يتبع الحل

مثال (١٣) س ~ ص(٤٣) فرع (٦) اختبارين رصد تقطع التيار الكهربائي لمدة ستة أيام متتالية فاذا كان احتمال ان ينقطع صو (٠٫٢) فما احتمال القطاعه لمدة يومين فقط

الحل

ن = ٦ م = ٠٫٢ ١ - م = ٠٫٨

ل(س = ٢) = $(٦_{٢})(٠٫٢)^{٢}(٠٫٨)^{٤}$

AlWsam
الوسام ناجح الجمزاوي

س = {٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥}

ⓐ ل(س=٣) = $\binom{5}{3}$ (٠٫٧٥)^{3} (٠٫٢٥)^{2}

ⓑ ان يخطأ الهدف ثلاث مرات اي اصابته مرتين.

ل(س=٢) = $\binom{5}{2}$ (٠٫٧٥)^{2} (٠٫٢٥)^{3}

ⓒ عدم اصابة الهدف = ل(س=٠)

= $\binom{5}{0}$ (٠٫٧٥)^{0} (٠٫٢٥)^{5}

ⓓ ل(س≥١) = ل(س=٠) + ل(١)

= $\binom{5}{0}$ (٠٫٧٥)^{0} (٠٫٢٥)^{5} + $\binom{5}{1}$ (٠٫٧٥)^{1} (٠٫٢٥)^{4}

ⓔ ل(س≥١) = ل(١) + ل(٢) + ل(٣) + ل(٤) + ل(٥)

= ١ − ل(٠)

= ١ − $\binom{5}{0}$ (٠٫٧٥)^{0} (٠٫٢٥)^{5}

= ١ − (٠٫٢٥)^{5}

مثال ⑬ ص ٢١٢

اذا كانت نسبة الانبات في بذور البندورة تساوي ٨٠٪ وتم زراعة (٥) بذرات في احدى الحدائق فما احتمال إنبات

ⓐ خمس بذرات

ⓑ ثلاث بذرات على الأقل.

الحل

ن = ٥ ، ح = ٠٫٨ ، ف = ١ − ح = ١ − ٠٫٨ = ٠٫٢

ⓐ ل(س=٥) = $\binom{5}{5}$ (٠٫٨)^{5} (٠٫٢)^{0}

ⓑ ل(س≥٣) = ل(٣) + ل(٤) + ل(٥)

= $\binom{5}{3}$ (٠٫٨)^{3} (٠٫٢)^{2} + $\binom{5}{4}$ (٠٫٨)^{4} (٠٫٢)^{1} + $\binom{5}{5}$ (٠٫٨)^{5} (٠٫٢)^{0}

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (١٤) سؤ ٤ ص٢١٢

اذا كان احتمال نجاح عمليه جراحيه يساوي ٨٠٪، فما احتمال نجاح عمليتين على الأقل اذا اجريت ثلاث عمليات

الحل

ن = ٣، P = ٠.٨ ← q = ١ - P = ١ - ٠.٨ = ٠.٢

احتمال نجاح عمليتين على الأقل

= ل(س ≥ ٢) = ل(٢) + ل(٣)

= (٣ ق ٢)(٠.٨)^٢ (٠.٢)^١ + (٣ ق ٣)(٠.٨)^٣ (٠.٢)^٠

مثال (١٥) س ص٢١٢

اذا كانت نسبة التالف في انتاج مصنع لأجهزة اكاسون ٠.٠١ واخذت عينة عشوائية حجمها (٥) اجهزة فما احتمال ان تكون جميعها صالحة

الحل

P = ٠.٩٩، q = ١ - P = ١ - ٠.٩٩ = ٠.٠١

س = عدد الاجهزة التالفة

ان تكون جميعها صالحة اي ان عدد التالف = صفر

ل(س = ٠) = (٥ ق ٠)(٠.٠١)^٠ (٠.٩٩)^٥

مثال (١٦) تدريب ص٢١١

وصنع ح(٥) الات من نوع واحد اذا كان احتمال ان تحتاج اي آله إلى اصلاح في السنه الخامسة من عمرها صو(٠.٢) فاحسب احتمال

١) الا تحتاج اي من الآلات إلى اصلاح

٢) ان تحتاج اثنتان فقط إلى اصلاح

٣) ان تحتاج اثنتان على الأكثر الى اصلاح

٤) ان تحتاج واحده على الأقل إلى اصلاح

الحل

ن = ٥ P = ٠.٢ ← q = ١ - P = ١ - ٠.٨ = ٠.٢

← يتبع الحل

س = عدد الآلات التي تحتاج إلى اصلاح.

① $ل(٠) = \binom{٥}{٠}(٠٫٢)^{٠}(٠٫٨)^{٥}$

$= (٠٫٨)^{٥}$

② $ل(٢) = \binom{٥}{٢}(٠٫٢)^{٢}(٠٫٨)^{٣}$

③ $ل(س \geq ٢) = ل(٢) + ل(١) + ل(٠)$

$= \binom{٥}{٢}(٠٫٢)^{٢}(٠٫٨)^{٣} + \binom{٥}{١}(٠٫٢)^{١}(٠٫٨)^{٤} + (٠٫٨)^{٥}$

④ $ل(س \geq ١)$

$= ل(١) + ل(٢) + ل(٣) + ل(٤) + ل(٥)$

$= ١ - ل(٠) = ١ - \binom{٥}{٠}(٠٫٢)^{٠}(٠٫٨)^{٥}$

$= ١ - (٠٫٨)^{٥}$

مثال (١٧) $س \sim ح(٣, ٠٫١)$

اذا كانت نسبة القطع المعيبة في انتاج احد المصانع ١٠٪ فأذا اخذت (٥) قطع من انتاج المصنع بطريقة عشوائية فما احتمال:

① ان لا تجد اي قطعة معيبة

② ان يكون بينها قطعة واحدة معيبة

③ ان لا يزيد عدد القطع المعيبة على قطعة واحدة.

الحل

$ن = ٥ ، ل = ٠٫١ ، ق = ١ - ل = ٠٫٩$

$س$ = عدد القطع المعيبة

① $ل(٠) = \binom{٥}{٠}(٠٫١)^{٠}(٠٫٩)^{٥} = (٠٫٩)^{٥}$

② $ل(١) = \binom{٥}{١}(٠٫١)^{١}(٠٫٩)^{٤}$

$= ٥ \times ٠٫١ \times (٠٫٩)^{٤}$

③ اي واحدة على الأكثر

$ل(س \leq ١) = ل(١) + ل(٠)$

$= \binom{٥}{١}(٠٫١)^{١}(٠٫٩)^{٤} + \binom{٥}{٠}(٠٫١)^{٠}(٠٫٩)^{٥}$

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (18) س ~ ح(٤١) المراجعه

اذا كانت نسبة القطع الصالحه من انتاج احد المصانع ٩٥٪ فما اذا اخذت (١٠) قطع من انتاج المصنع بطريقه عشوائيه فجد احتمال:

(أ) ان لا يكون بينها قطعه معيبه

(ب) ان لا يزيد عدد القطع المعيبه عن قطعه واحدة.

(ج) ان يكون بينها قطعه واحدة معيبه

الحل

ن = ١٠ س = القطع المعيبه

احتمال القطعه معيبه = ١ - ٩٥ و

ل = ٠٥ و

١ - ل = ٩٥ و

(أ) ل(٠) = $\binom{10}{0}$ (٠٥ و)^{0} (٩٥ و)^{10}

(ب) ل(١) = $\binom{10}{1}$ (٠٥ و)^{1} (٩٥ و)^{9}

(ج) ل(س ≤ ١) = ل(١) + ل(٠)

عن الفرعيه السابقه

مثال (19) س ~ ح(٦، ٩٢)

صندوق يحتوي على اربع كرات بيضاء وست كرات حمراء ٦ سحبت من الصندوق ثلاث كرات على التوالي مع الارجاع اذا دل المتغير العشوائي س على عدد الكرات البيضاء المسحوبه كون جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير س ؟

الحل

السحب على التوالي مع الارجاع.

ن = ٣ س: عدد الكرات البيضاء

س = {٠، ١، ٢، ٣}

ل = احتمال ان تكون الكره المسحوبه بيضاء

$= \frac{4}{10} = \frac{\text{عدد الكرات البيضاء}}{\text{مجموع الكرات}}$

ل = ٤ و. ← ١ - ل = ٦ و.

ل(٠) = $\binom{3}{0}$ (٤ و.)^{0} (٦ و.)^{3} = ٢١٦ و.

ل(١) = $\binom{3}{1}$ (٤ و.)^{1} (٦ و.)^{2} = ٤٣٢ و.

ل(٢) = $\binom{3}{2}$ (٤ و.)^{2} (٦ و.)^{1} = ٢٨٨ و.

ل(٣) = $\binom{3}{3}$ (٤ و.)^{3} (٦ و.)^{0} = ٠٦٤ و.

← يتبع الحل

جدول التوزيع الاحتمالي

س	٠	١	٢	٣
ل(س)	٠,٢١٦	٠,٤٣٢	٠,٢٨٨	٠,٠٦٤

مثال (٢٠) س ~ ص(٢٤٤) اختبار ذاتي

طائرة بها ٣ محركات من نوع واحد تعمل بشكل مستقل اذا كان احتمال تعطل المحرك خلال (٢٠٠٠) ساعة يساوي ١٠٪ ، اذا عرف المتغير العشوائي س بانه عدد المحركات التي يصيبها العطل ، أكتب التوزيع الاحتمالي للمتغير س ؟

الحل

ن = ٣ ، ح = ٠,١ احتمال تعطل المحرك

س : عدد المحركات المعطلة

س = {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣}

$ل(٠) = \binom{٣}{٠} (٠,١)^{٠} (٠,٩)^{٣} = ٠,٧٢٩$

$ل(١) = \binom{٣}{١} (٠,١)^{١} (٠,٩)^{٢} = ٠,٢٤٣$

$ل(٢) = \binom{٣}{٢} (٠,١)^{٢} (٠,٩)^{١} = ٠,٠٢٧$

$ل(٣) = \binom{٣}{٣} (٠,١)^{٣} (٠,٩)^{٠} = ٠,٠٠١$

س	٠	١	٢	٣
ل(س)	٠,٧٢٩	٠,٢٤٣	٠,٠٢٧	٠,٠٠١

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

اسئلة الوزارة

① وزارة (٢٠١٨،د٢) توزيع

١. اذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل (س) معطى بالجدول

س	٠	١	٢	٣
ل(س)	٢و٠	جـ	٣و	او٠

اوجد قيمة جـ

ك ل(س) = ١

٢و٠ + جـ + ٣و٠ + او٠ = ١

٦و٠ + جـ = ١

⇐ جـ = ١ - ٦و٠ = ٤و٠

٢. اذا كان (س) متغيرا عشوائيا ذو الحدين معاملاته ن = ٤، ل = ٣و٠

اوجد كلا مما يلي

١) ل(س = ٢) ٢) ل(س ≤ ٣)

الحل

ن = ٤ ، ل = ٣و٠ ، ١ - ل = ١ - ٣و٠ = ٧و٠

① ل(س = ٢) = $\binom{٤}{٢}$ (٣و٠)^{٢} (٧و٠)^{٢}

② ل(س ≤ ٣) = ل(٣) + ل(٤)

= $\binom{٤}{٣}$ (٣و٠)^{٣} (٧و٠)^{١} + $\binom{٤}{٤}$ (٣و٠)^{٤} (٧و٠)^{٠}

٣. سجلت احدى القابلات في احد المستشفيات ولادة ثلاثة اطفال في نفس اليوم حسب الجنس وتسلسل الولادة فاذا علمت ان الاطفال ولدوا من ثلاث امهات و أن احتمال ولادة الطفل ذكرا يساوي احتمال ولادته انثى

١) اذا دل المتغير العشوائي (س) على عدد الاطفال الذكور المحلين فاكتب قيم س

٢) فاحتمال ان يكون جميع المولودين من الاناث ⇐ متبع الحل

الحل

① س = المتغير العشوائي عدد الاطفال الذكور

= {٠، ١، ٢، ٣}

② جميع المواليد من الاناث

ان لا يكون هناك اي ذكر

$ل(س=٠) = (\frac{1}{2})^3 (\frac{1}{2})^0 (3^0) = \frac{1}{8}$

$= 1 \times 1 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$

---

② وزارة (٢٠١٨) صيفية

١. اذا كان احتمال نجاح زراعة التفاح في قطعة جرش (٠،٨)، زرع شخص (٣) شجرات تفاح في حديقة بيته ما احتمال نجاح زراعتها جميعا

الحل

$ن = ٣ \quad p = ٠،٨ \quad q = 1-p = ٠،٢$

$ل(٥) = \binom{5}{5} (٠،٨)^5 (٠،٢)^0$

$= (٠،٨)^5$

٢. اذا كانت نسبة القطع المعيب في انتاج مصنع ٥٪ اخذت (٤) قطع في انتاج المصنع بطريقة عشوائية ما احتمال ان يكون عدد القطع المعيب ثلاثة على الأكثر

الحل

س = عدد القطع المعيب

$ن = ٤ \quad p = ٠،٠٥ \quad q = 1-p = ٠،٩٥$

$ل(س \leq ٣) = ل(٣) + ل(٤)$

$= \binom{4}{3} (٠،٠٥)^3 (٠،٩٥)^1 + \binom{4}{4} (٠،٠٥)^4 (٠،٩٥)^0$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

(٣) وزارة (٢٠١٩) شتوي

اء اجريت ثلاث عمليات جراحيه في احد المستشفيات الاردنيه وكان احتمال نجاح العمليه الواحدة يساوي ٨٠٪

① اذا دل المتغير العشوائي س على عدد العمليات الجراحيه الناجحه فاكتب قيم س الممكنه

② ما احتمال نجاح عمليه جراحيه واحدة فقط

الحل

① س = عدد العمليات الجراحيه الناجحه

ح = ٠,٨ ⟸ ١ - ح = ١ - ٠,٨ = ٠,٢

قيم س الممكنه = {٠، ١، ٢، ٣}

② احتمال نجاح عمليه جراحيه واحدة

= ل(س = ١)

= $(٣_{١})(٠,٨)^{١}(٠,٢)^{٢}$

٢. اذا كان (س) متغيراً عشوائياً يخضع لتوزيع ذي الحدين حيث

ن = ٣

ل(س = ١) = ٧/٨ احسب قيمة ح

الحل

ل(س = ١) = ل(١) + ل(٢) + ل(٣)

١ - ل(٠) = ١ - $(٣_{٠})$ ح^{٠} (١-ح)^{٣}

١ - ١ × ١ × (١-ح)^{٣} = ٧/٨

(١-ح)^{٣} = ١ - ٧/٨

(١-ح)^{٣} = ١/٨ بأخذ الجذر التكعيبي

١ - ح = ١/٢ ⟸ ح = ١ - ١/٢ = ١/٢

مكتبة الوسام ALWESAM المعلم: ناجح الجمزاوي

④ وزارة (٢٠١٩) صيفية

١. اذا كانت نسبة القطع المعيبة في انتاج احد المصانع ١٠٪ فاذا اخذت (٤) قطع عشوائياً من انتاج المصنع فما احتمال ان تكون بينها قطعة واحدة على الاكثر معيبة

الحل

ن = ٤ ، ح = ٠,١ ، ١-ح = ١-٠,١ = ٠,٩

س = عدد القطع المعيبة

ل (س ≤ ١) = ل(١) + ل(٠)

$= \binom{4}{1}(0.1)^1(0.9)^3 + \binom{4}{0}(0.1)^0(0.9)^4$

على عدد الكرات الحمراء المسحوبة فاكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س).

الحل

س = {٠ ، ١ ، ٢}

$ل(٠) = ل(ن ، ن) = \frac{3}{7} \times \frac{3}{7} = \frac{9}{49}$

$ل(١) = ل(ن ، ح) + ل(ح ، ن)$

$= \frac{3}{7} \times \frac{4}{7} + \frac{4}{7} \times \frac{3}{7} = \frac{24}{49}$

$ل(٢) = ل(ح ، ح) = \frac{4}{7} \times \frac{4}{7} = \frac{16}{49}$

س	٠	١	٢
ل (س)	$\frac{9}{49}$	$\frac{24}{49}$	$\frac{16}{49}$

٢. يحوي صندوق (٤) كرات حمراء و(٣) كرات بيضاء، سحبت من الصندوق كرتان على التوالي مع الارجاع اذا دل المتغير العشوائي (س)

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

⑤ وزارة (٢٠١٠) شتوية

١. في تجربة رمي قطعة نقد مرتين اذا دلّ المتغير العشوائي (س) على عدد مرات ظهور الصورة

أ) أكتب فضاء العينة لهذه التجربة

ب) أكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س).

الحل

① س = { (ص، ص)، (ص، ك)، (ك، ص)، (ك، ك) }

س = { ٠، ١، ٢ }

س	٠	١	٢
ل(س)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

٢. اذا كان (س) متغيراً عشوائياً ذا الحدين معاملاه ن = ٣، ل = ٠,٣

أوجد ل(س ≥ ٢)

الحل

ن = ٣ ، ل = ٠,٣ ، ك = ١ - ل = ١ - ٠,٣ = ٠,٧

ل(س ≥ ٢) = ل(٢) + ل(٣)

$= {}^{3}_{2}(٠,٣)^{2}(٠,٧)^{1} + {}^{3}_{3}(٠,٣)^{3}(٠,٧)^{0}$

$= ٣ \times ٠,٠٩ \times ٠,٧ + ١ \times ٠,٠٢٧ \times ١$

$= ٠,١٨٩ + ٠,٠٢٧$

$= ٠,٢١٦$

⑥ وزارة (٢٠١٠) صيفية

١. اذا دلّ المتغير العشوائي (س) على عدد الاطفال الذكور في تجربة اختيار عشوائي لعائلة لديها (٣) اطفال وتسجيل الناتج هل هي الكتب وتسلسل الولادة فاوجد القيم الممكنة للمتغير العشوائي س

الحل

س = { ٠، ١، ٢، ٣ }

٦. اذا كان احتمال ان يصيب شخص ما هدفاً في كل طلقة يطلقها على الهدف يساوي (٠.٦) فاذا اطلق (٤) طلقات على الهدف فما احتمال ان يصيب الهدف مرة واحدة على الأقل

الحل

$ن = ٤ \quad P = ٠.٦ \quad q = 1 - P = 1 - ٠.٦ = ٠.٤$

احتمال ان يصيب الهدف مرة واحدة على الأقل $= ل(س \geq 1)$

$= ل(1) + ل(2) + ل(3) + ل(4)$

$= 1 - ل(0)$

$= 1 - (٤ق٠)(٠.٦)^{٠}(٠.٤)^{٤}$

$= 1 - (٠.٤)^{٤}$

⑦ وزارة (٢٠١١) شتوية

اذا كان س متغيراً عشوائياً ذا الحدين حيث $ن = ٢، \quad P = ٠.١$ أكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س

الحل

$ن = ٢ \quad P = ٠.١ \quad \Leftarrow q = 1 - P = 1 - ٠.١ = ٠.٩$

$س = \{٠، ١، ٢\}$

$ل(٠) = (٢ق٠)(٠.١)^{٠}(٠.٩)^{٢} = (٠.٩)^{٢} = ٠.٨١$

$ل(١) = (٢ق١)(٠.١)^{١}(٠.٩)^{١} = ٠.١٨$

$ل(٢) = (٢ق٢)(٠.١)^{٢}(٠.٩)^{٠} = ٠.٠١$

س	٠	١	٢
ل(س)	٠.٨١	٠.١٨	٠.٠١

⑧ وزارة (٢٠١١) صيفية

١٠. اذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س معطى بالمجموعة $\{(١، ٠.٢ك)، (٢، ٠.١ك)، (٣، ٠.٤ك)، (٤، ك)\}$ احسب قيمة ك

الحل

$\sum ل(س) = 1$

$٠.٢ك + ٠.١ك + ٠.٤ك + ك = 1$

$١.٧ك = 1 \Leftarrow ك = ٠.٣$

٢. اذا كان س متغيراً عشوائياً ذا الحدين حيث ن = ٣، م = ٦٠٪ أجد ل(س ≤ ٢)

الحل

ن = ٣ م = ٦٠٪ = ٠.٦ ، ١ - م = ١ - ٠.٦ = ٠.٤

ل(س ≤ ٢) = ل(٠) + ل(١) + ل(٢)

$= (\frac{3}{0})(0.6)^0(0.4)^3 + (\frac{3}{1})(0.6)^1(0.4)^2 + (\frac{3}{2})(0.6)^2(0.4)^1$

⑨ وزارة (٢٠١٢) شتوية

١. في تجربة رمي قطعة نقد (٣) مرات متتالية، اذا دل المتغير العشوائي س على عدد مرات ظهور الكتابة أكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س

الحل

س = {٠، ١، ٢، ٣}

ل(س = ٠) = $\frac{1}{8}$ أو عن طريق الحدين:

ل(س = ٠) = $(\frac{3}{0})(\frac{1}{2})^0(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$

ل(س = ١) = $(\frac{3}{1})(\frac{1}{2})^1(\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{8}$

ل(س = ٢) = $(\frac{3}{2})(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})^1 = \frac{3}{8}$

ل(س = ٣) = $(\frac{3}{3})(\frac{1}{2})^3(\frac{1}{2})^0 = \frac{1}{8}$

أو

س = {ص ص ص ، ص ص ك ، ص ك ص ، ك ص ص ، ص ك ك ، ك ص ك ، ك ك ص ، ك ك ك}

ل(س = ٠) = ل(ص ص ص) = $\frac{1}{8}$

ل(س = ١) = {ص ص ك ، ص ك ص ، ك ص ص}

$= \frac{3}{8}$

ل(س = ٢) = {ص ك ك ، ك ص ك ، ك ك ص}

$= \frac{3}{8}$

ل(س = ٣) = ل(ك ك ك) = $\frac{1}{8}$

س	٠	١	٢	٣
ل(س)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

(١٠) وزارة (٢٠١٢) صيفية

صندوق يحتوي على (٣) كرات بيضاء و(٧) كرات حمراء، سحبت من الصندوق كرتان على التوالي مع الإرجاع، اذا دل المتغير العشوائي س على عدد الكرات الحمراء المسحوبة، كون جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س.

الحل

س = عدد الكرات الحمراء المسحوبة

م = {٠، ١، ٢}

ل(س = ٠) = ل(ب ب)

$= \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{9}{100}$

ل(س = ١) = ل(ح ب) + ل(ب ح)

$= \frac{7}{10} \times \frac{3}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{7}{10}$

$= \frac{42}{100}$

ل(س = ٢) = ل(ح ح) $= \frac{7}{10} \times \frac{7}{10} = \frac{49}{100}$

وعليه حل السؤال على نظرية ذات الحدين:

ن = ٢ ، $p = \frac{7}{10}$ ، $q = 1 - p = \frac{3}{10}$

س	٠	١	٢
ل(س)	$\frac{9}{100}$	$\frac{42}{100}$	$\frac{49}{100}$

(١١) وزارة (٢٠١٣) شتوية

أ. اذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س يحقق المجموعة {(١، ٠.٤)، (٢، ٠.٥)، (٣، ب)} أوجد قيمة ب.

الحل

ك(س) = ١

٠.٤ + ٠.٥ + ب = ١

٠.٩ + ب = ١

ب = ١ − ٠.٩ = ٠.١

مكتبة الوسام ALWESAM المعلم: ناجح الجمزاوي

٢- اذا كان س متغيراً عشوائياً ذا حدين معاملاه ن = ٢ ، ل = ٣٠و ، جد :

① ق م س

② جدول التوزيع الاحتمالي

الحل

ن = ٢ ، ل = ٣٠و ← ١ - ل = ٧٠و

① س = {٠ ، ١ ، ٢}

② ل(٠) = $(\frac{2}{0})$ (٣٠و)^0 (٧٠و)^2 = ٤٩و

ل(١) = $(\frac{2}{1})$ (٣٠و)^1 (٧٠و)^1 = ٤٢و

ل(٢) = $(\frac{2}{2})$ (٣٠و)^2 (٧٠و)^0 = ٠٩و

س	٠	١	٢
ل(س)	٤٩و٠	٤٢و٠	٠٩و٠

③ وزاره (٢٠١٣) صيفية

زرع شخص ٣ شتلات في حديقة منزلية ، اذا مثل المتغير العشوائي (س) عدد الاشجار الناجحة وكان احتمال نجاح زراعة الشجرة الواحدة (٨٠و) فاجب عما يأتي :

① اكتب ق م س

② اكتب الجدول التوزيع الاحتمالي

الحل

① س = {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣}

② ل(س=٠) = $(\frac{3}{0})$ (٨٠و)^0 (٢٠و)^3

ل(س=١) = $(\frac{3}{1})$ (٨٠و)^1 (٢٠و)^2

ل(س=٢) = $(\frac{3}{2})$ (٨٠و)^2 (٢٠و)^1

س	٠	١	٢
ل(س)	٠٤٠و	٣٢و٠	٦٤و٠

مكتبة الوسام ALWESAM

(١٣) وزارة (٢٠١٤) شتوية

اذا دل المتغير العشوائي (س) على عدد الاطفال الذكور في تجربة اختيار عشوائي لعائلة لديها (٣) اطفال وسجل النتائج حسب جنس وتسلسل الولادة وان احتمال ولادة الطفل ذكرًا يساوي احتمال ولادة انثى اكتب جدول التوزيع الاحتمالي :

الحل

$ك = \{$ ووو، ووذ، وذو، وذذ، ذوو، ذوذ، ذذو، ذذذ $\}$

س = عدد الذكور

$= \{0, 1, 2, 3\}$

$ل(س=0) = ل(ذذذ) = \frac{1}{8}$

$ل(س=1) = ل\{$ووذ، وذو، ذوو$\} = \frac{3}{8}$

$ل(س=2) = ل\{$وذذ، ذوذ، ذذو$\} = \frac{3}{8}$

$ل(س=3) = ل(ووو) = \frac{1}{8}$

س	0	1	2	3
ل(س)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

عكس صل سؤال على ذي الجديد :

$ن = 3 \quad ح = \frac{1}{2} \quad ف = 1 - ح = \frac{1}{2}$

$س = \{0, 1, 2, 3\}$

$ل(س=0) = (3)(\frac{1}{2})^0(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$

$ل(س=1) = (3)(\frac{1}{2})^1(\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{8}$

$ل(س=2) = (3)(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})^1 = \frac{3}{8}$

$ل(س=3) = (3)(\frac{1}{2})^3(\frac{1}{2})^0 = \frac{1}{8}$

مكتبة الوسام ALWESAM المعلم: ناجح الجمزاوي

(١٤) وزارة (٢٠١٤) صيفية

اذا كان (س) متغيراً عشوائياً يخضع لتوزيع ذي الحدين، معاملاه ن = ٤ ، م وكان ل(س ≥ ١) = $\frac{١٥}{١٦}$

أجد

① قيمة م ② ل(س = ٣)

الحل

① ل(س ≥ ١) = ل(١) + ل(٢) + ل(٣) + ل(٤)

= ١ − ل(٠) = $\frac{١٥}{١٦}$

١ − $\binom{٤}{٠}$ (م)^{٠} (١−م)^{٤} = $\frac{١٥}{١٦}$

١ − (١−م)^{٤} = $\frac{١٥}{١٦}$

(١−م)^{٤} = ١ − $\frac{١٥}{١٦}$ = $\frac{١٦}{١٦}$ − $\frac{١٥}{١٦}$

(١−م)^{٤} = $\frac{١}{١٦}$ بأخذ الجذر الرابع

١ − م = $\frac{١}{٢}$ ⟸ م = $\frac{١}{٢}$

② ل(س = ٣) = $\binom{٤}{٣}$ $(\frac{١}{٢})^{٣}$ $(\frac{١}{٢})^{١}$

= ٤ × $\frac{١}{٨}$ × $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٤}$

(١٥) وزارة (٢٠١٥) شتوية

صدرت احدى شركات الاسبرين دفعة من اقراص مسكنة للصداع من انتاج مصنعها، اذا وجدت حبتان أو أكثر في عينة عشوائية مكونة من ٦ حبات، فإذا كانت نسبة العيب في انتاج الشركة المصنعة ١٠٪ فما احتمال قبول الشركة المستوردة الشحنة؟

الحل

ن = ٦ م = ٠.١ ١ − م = ٠.٩

احتمال قبول الشحنة

= ل(س ≤ ١)

= ل(٠) + ل(١)

= $\binom{٦}{٠}$ (٠.١)^{٠} (٠.٩)^{٦} + $\binom{٦}{١}$ (٠.١)^{١} (٠.٩)^{٥}

= ١ × ١ × (٠.٩)^{٦} + ٦ × ٠.١ × (٠.٩)^{٥}

= (٠.٩)^{٦} + ٠.٦ × (٠.٩)^{٥}

مكتبة الوسام ALWSAM
الوسام: ناجح الجمزاوي

الدرس الرابع

العلاقة المعيارية

اذا كانت علامة طالب في الرياضيات (٨٠) وعلامته في اللغة العربية (٧٠) فايهما افضل مستوى تحصيل الطالب في الرياضيات أم في اللغة العربية قد نعتقد ان تحصيل الطالب في الرياضيات افضل من تحصيله في اللغة العربية وقد يكون هذا ليس امرا مؤكدا، فقد يكون موقع علامته في اللغة العربية بالنسبة لعلامات الطلاب افضل منه في الرياضيات

ولكنه لنتمكن من الحكم أيهما أفضل بين العلامتين يجب ان يتوافر لدينا بعض المعلومات عن طبيعة توزيع علامات الصف الذي ينتمي اليه الطالب لكل من المبحثين مثل الوسط الحسابي والانحراف المعياري ثم نقارن

١. الوسط الحسابي: هو مجموع القيم (المشاهدات) مقسوما على عددها ويرمز له بالرمز ($\bar{س}$)

$$\bar{س} = \frac{\text{مجموع}}{ن}$$

٢. الانحراف المعياري: هو متوسط يباعد أو تشتت القيم (المشاهدات) عن الوسط الحسابي ويرمز له بالرمز (ع)

٣. العلامة المعيارية: وهي نسبة انحراف المشاهدة (س) عن الوسط الحسابي ($\bar{س}$) إلى الانحراف المعياري (ع) ويرمز لها بالرمز (ز)

قانون العلامة المعيارية

$$ز = \frac{س - \bar{س}}{ع} \quad ، ع \neq صفر$$

حيث

ز = العلامة المعيارية للمشاهدة س الخام

$\bar{س}$: الوسط الحسابي للمشاهدات جميعها

ع : الانحراف المعياري للمشاهدات جميعها

وتدل قيمة (ز) العددية على عدد الانحرافات المعيارية

وتدل اشارة (ز)

(+) قيمة المشاهدة أكبر (فوق) من الوسط الحسابي

(−) قيمة المشاهدة أقل (تحت) من الوسط الحسابي

فمثلاً

المشاهدة (٨) تنحرف فوق الوسط الحسابي ثلاث انحرافات معيارية

أي ان العلامة المعيارية ز = +٣

المشاهدة (٣) تنحرف تحت الوسط الحسابي انحرافين معياريين

اي ان العلامة المعيارية ز = −٢

مثال ①

اذا كانت علامة طالب في الرياضيات (٨٠) وعلامته في اللغة العربية (٧٠) وكان الوسط الحسابي لعلامات الصف في الرياضيات (٧٥) والانحراف المعياري (٥) والوسط الحسابي لعلامات الصف في اللغة العربية (٦٢) والانحراف المعياري (٤)، فأيهما أفضل تحصيل الطالب في الرياضيات أم اللغة العربية

الحل

الرياضيات: العلامة س = ٨٠ ، $\bar{س}$ = ٧٥

ع = ٥

اللغة العربية: س = ٧٠ ، $\bar{س}$ = ٦٢

ع = ٤

يتبع الحل ←

جامعة الوسام AL WESAM UNIVERSITY

المعلم ناجح الجمزاوي

العلامة المعيارية للرياضيات

$ز = \frac{س - \bar{س}}{ع} = \frac{٨٠ - ٧٥}{٥} = \frac{٥}{٥} = ١$

العلامة المعيارية للغة العربية

$ز = \frac{س - \bar{س}}{ع} = \frac{٧٠ - ٦٢}{٤} = \frac{٨}{٤} = ٢$

⇐ تحصيل الطالب في اللغة العربية افضل من تحصيله في الرياضيات وذلك بسبب ان علامة الطالب في الرياضيات هي فوق الوسط الحسابي بانحراف معياري واحد بينما علامة الطالب في اللغة العربية فوق الوسط الحسابي بانحرافين معياريين

مثال ②

اذا كان الوسط الحسابي لمجموعة من المشاهدات (٤٠) والانحراف المعياري (٥) فاحسب العلامة المعيارية للمشاهدات

٦٠ ، ٤٠ ، ٣٠

الحل

$\bar{س} = ٤٠$ ، $ع = ٥$

$ز_{٦٠} = \frac{س - \bar{س}}{ع} = \frac{٦٠ - ٤٠}{٥} = \frac{٢٠}{٥} = ٤$

$ز_{٤٠} = \frac{٤٠ - ٤٠}{٥} = \frac{٠}{٥} =$ صفر = المشاهدة = الوسط الحسابي

$ز_{٣٠} = \frac{٣٠ - ٤٠}{٥} = \frac{-١٠}{٥} = -٢$

مثال ③

اذا كان الوسط الحسابي لتوزيع ما يساوي (١٤) والانحراف المعياري يساوي (٢) فجد العلامات الاصلية للعلامات المعيارية الآتية

أ) -٣ ب) ٠,٥

الحل

$\bar{س} = ١٤$ ، $ع = ٢$

$ز_س = \frac{س - \bar{س}}{ع}$

أ) $-٣ = \frac{س - ١٤}{٢}$ ضرب تبادلي

$-٦ = س - ١٤ \Leftarrow س = ٨$

$+١٤ \quad +١٤$

ب) $٠,٥ = \frac{س - ١٤}{١}$ ضرب تبادلي

$٥ = س - ١٤ \Leftarrow س = ١٩$

$+١٤ \quad +١٤$

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم ناجح الجمزاوي

مثال ④

اذا كان الانحراف المعياري لعلامات طلاب في صحبة الاحصاء (٥) وعلامة المعيارية المقابلة للعلامة (٩٠) تساوي (٣) اوجد الوسط الحسابي لعلامات الطلبة في صحبة الاحصاء.

الحل

ع = ٥ ، س = ٩٠ ، ن = ٣

المطلوب س

$$ن = \frac{٩٠ - س}{٥} = ٣$$ ضرب بالمقلوب

٩٠ − س = ١٥ ⇐ س = ٧٥

مثال ⑤ تدريب ① ص ٢١٥

اذا كان الوسط الحسابي لعلامات صفوف في اللغة الانجليزية (٦٠) والانحراف المعياري لها (١٠) فجد :

① العلامة (س) التي قيمتها المعيارية (١,٥)

② القيمة المعيارية للعلامة (٥٥).

③ العلامة التي تنحرف فوق الوسط الحسابي انحرافاً معيارياً واحداً

④ العلامة التي تنحرف تحت الوسط الحسابي انحرافاً معيارياً واحداً

الحل

س = ٦٠ ، ع = ١٠

① ن = ١,٥ ، س = ؟؟

$$ن = \frac{س - س}{ع} \Leftarrow ١,٥ = \frac{س - ٦٠}{١٠}$$

⇐ ١٥ = س − ٦٠ ⇐ ١٠ × ١,٥ = س − ٦٠

س = ٦٠ + ١٥ = ٧٥

② س = ٥٥ ، ن = ؟؟

$$ن = \frac{٥٥ - ٦٠}{١٠} = \frac{-٥}{١٠} = -٠,٥$$

③ ن = +٢ ، س = ؟

$$٢ = \frac{س - ٦٠}{١٠} \Leftarrow ٢٠ = س - ٦٠ \Leftarrow س = ٦٠ + ٢٠$$

⇐ س = ٨٠

④ ن = −١ ، س = ؟

$$-١ = \frac{س - ٦٠}{١٠} \Leftarrow -١٠ = س - ٦٠ \Leftarrow س = ٦٠ - ١٠$$

⇐ س = ٥٠

مكتبة الوسام ALWESAM التعليم: ناجح الجمزاوي

مثال (٦) $\sum_{ص}^{ص_{17}}$ فرع (٤)

في توزيع تكراري اذا كانت قيم الحد الادنى للفئة الثالثة (٦٠) تقابل العلامة المعيارية (٣) وكان الوسط الحسابي (٥٨) فاوجد الانحراف المعياري

الحل

$$ز = \frac{س - \bar{س}}{ع}$$

$$\frac{٣}{١} = \frac{٦٠ - ٥٨}{ع}$$ ضرب تبادلي

$$٣ع = ٢ \Leftarrow ع = \frac{٢}{٣}$$

مثال (٧) $\sum_{ص}^{ص_{17}}$ فرع (١)

اذا كان الوسط الحسابي لمجموعة من القيم (٦٥) والانحراف المعياري لها (٤) فاوجد القيمة التي تخرج ثلاثة انحرافات معيارية تحت الوسط الحسابي

الحل

$$\frac{-٣}{١} = \frac{س - ٦٥}{٤} \Leftarrow -١٢ = س - ٦٥$$

$$\Leftarrow س = -١٢ + ٦٥$$

$$= ٥٣$$

مثال (٨)

اذا كان الوسط الحسابي للعلامات (٧) طلاب هو (٢٠) والانحراف المعياري (٤) فجد

(أ) العلامة التي تنحرف فوق الوسط الحسابي بمقدار ٣ انحرافات معيارية ؟

(ب) العلامة التي تنحرف تحت الوسط الحسابي انحراف معياري واحد

(ج) العلامة التي لها العلامة المعيارية = صفر

(د) عدد الانحرافات المعيارية للعلامات ١٢، ٦، ٢ عن الوسط الحسابي

الحل

$س = ٢٠$ $ع = ٤$

أ) $ز = \frac{س - \bar{س}}{ع}$ $٣ = \frac{س - ٢٠}{٤}$

$\Leftarrow ١٢ = س - ٢٠ \Leftarrow س = ٣٢$

ب) $ز = -١ \Leftarrow -١ = \frac{س - ٢٠}{٤}$

$\Leftarrow -٤ = س - ٢٠$

$\Leftarrow س = ٢٠ - ٤ = ١٦$

يتبع الحل

مركز الوسام ALWESAM الوسام . ناجح الجمزاوي

ⓐ $ز_{س} = صفر \Leftarrow$ العلامة = الوسط الحسابي

$س = ٢٠$

ⓑ $ز_{١٢} = \frac{١٢ - ٢٠}{٤} = \frac{-٨}{٤} = -٢$

$ز_{٢٦} = \frac{٢٦ - ٢٠}{٤} = \frac{٦}{٤} = ١٫٥$

سجبة المعلوماتية

$س = ٧٥$ ، $ع = ٥$ ، $س = ٦٥$

$ز_{٦٥} = \frac{٦٥ - ٧٥}{٥} = \frac{-١٠}{٥} = -٢$

$\Leftarrow -٢ < -١٫٥$

$\Leftarrow$ علامة طالب الادبي افضل

مثال ⑨ تدريب (٢) ص ٢١٦

اذا كان الوسط الحسابي لعلامات شعبة الادبي في الرياضيات (٧٠) ، والانحراف المعياري لها (٨) ، والوسط الحسابي لعلامات شعبة المعلوماتية (٧٥) والانحراف المعياري لها (٥) ، وكانت علامة احمد الطيب في شعبة الادبي في الرياضيات (٦٤) ، وعلامة احمد طالب شعبة المعلوماتية (٦٥) فأي العلامتين أفضل

الحل

شعبة الادبي

$س = ٧٠$ ، $ع = ٨$ $س = ٦٤$

$ز_{٦٤} = \frac{٦٤ - ٧٠}{٨} = \frac{-٦}{٨} = -٠٫٧٥$

مثال ⑩

في احد المصانع اذا كانت الأجره اليوميه لعاملين من عمال المصنع هي ١٠ ، ٢٠ دينار ، والعلامتين المعياريتين المقابلتين لهاتين الأجرتين هما -٣ ، ٢ على الترتيب فاوجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لأجور عمال المصنع

الحل

$س = ١٠ \Leftarrow ز = -٣$

$\Leftarrow -٣ = \frac{١٠ - س}{٥} \Leftarrow ٤٣ = ١٠ - س$

$س = ٢٠ \Leftarrow ز = ٢$

$\Leftarrow ٢ = \frac{٢٠ - س}{٥} \Leftarrow ٢٢ = ٢٠ - س$

$\Leftarrow$ يتبع الحل

مكتبة الوسام AWSAM الوسام ناجح الجمزاوي

نحل المعادلتين ① ، ②

$-3ع = -10 - س$

$+5ع = +2 + س$ بالطرح

$-ع = -10 \Leftarrow ع = \frac{10}{5} = 2$

نعوض بها في ①

$-3 \times 2 = -10 - س \Leftarrow -6 = -10 - س$

$س = 10 + 6 = 16$

مثال ⑪ $س_{17}$ ، $ص_{17}$ فرع (٣)

اذا كانت علامتا طالبتين من الصف نفسه في الرياضيات 85، 70، 80، 70 وللعلامتين المعياريتين المقابلتين للعلامتين 1، -2 على الترتيب خاصية الانحراف المعياري لعلامات الرياضيات

الحل

نحكيه حل السؤال بالعامود لباقي

$ع = \frac{\Delta س}{\Delta ز}$ = الفرق بين العلامتين الخام / الفرق بين العلامتين المعياريتين المقابلتين

$ع = \frac{س_2 - س_1}{ز_2 - ز_1} = \frac{85 - 70}{2 - (-1)} = \frac{15}{3}$

$ع = 5$

مثال ⑫ $س_{17}$ ، $ص_{17}$

صف مكون من (20) طالبة، فإذا كانت علامات الطالبات صديل، شروه عدي هي 6، 9، 8، 6، 3 على الترتيب وعلامتهن المعيارية هي: 3، 2، 6، -1 فما علامة عدي؟

الحل

① $ز_1 = 2 \Leftarrow 3 = \frac{90 - س}{ع} \Leftarrow$

$3ع = 90 - س$ ——— ①

② $ز_2 = 2 \Leftarrow 2 = \frac{80 - س}{ع} \Leftarrow$

$2ع = 80 - س$ ——— ②

وحل المعادلتين ① ، ② بالطرح

$-ع = 10 \Leftarrow$ وبتعويضها في ① $\Leftarrow$

$30 - 90 = -س \Leftarrow س = 60$

$ز_3 = -1 = \frac{60 - س}{10} \Leftarrow -10 = 60 - س$

$\Leftarrow س = 50$

مثال (١٣) س ٣ ص ٢١٧

اذا كانت العلامات الصيارية للطلبة احمد، جابر، وائل هي ٥، ٦، ١، ٢ على الترتيب، وكان الوسط الحسابي لعلامات الصف (٧٠) والفرق بين علامتي احمد وجابر يساوي ١٠ اوجد العلامة الحقيقية لكل طالب على حدة

$\bar{س} = ٧٠$

$س_١$: علامة احمد $ز_١$: العلامة المعيارية

$س_٢$: علامة جابر $ز_٢$: العلامة المعيارية

$س_٣$: علامة وائل $ز_٣$: العلامة المعيارية

نجد ع عن طريق العلاقتين

$ع = \frac{٥س}{٥ز} = \frac{س_٢ - س_١}{ز_٢ - ز_١} = \frac{١٠}{٢ - ١} = \frac{١٠}{١}$

$ع = ١٠$

$\Leftarrow ع = ١٠ ، \bar{س} = ٧٠$

$ز_١ = ٠,٥ = \frac{س_١ - ٧٠}{١٠} \Leftarrow س_١ - ٧٠ = ٦ \Leftarrow س_١ = ٧٦$

$ز_٢ = ١ - = \frac{س_٢ - ٧٠}{١٠} \Leftarrow س_٢ - ٧٠ = -١٠ \Leftarrow س_٢ = ٦٠$

$ز_٣ = -٢ = \frac{س_٣ - ٧٠}{١٠} \Leftarrow س_٣ - ٧٠ = -٢٠ \Leftarrow س_٣ = ٥٠$

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

اسئلة الوزارة

① وزارة (٢٠١٨) شتوية.

في توزيع تكراري اذا كانت العلامة الخام (٦٠) تقابل العلامة المعيارية (٣) وكان الوسط الحسابي (٥٤) اوجد الانحراف المعياري لهذا التوزيع

الحل

$z = \frac{س - \bar{س}}{ع} \Leftarrow 3 = \frac{60 - 54}{ع}$

$\Leftarrow 3ع = 6 \Leftarrow ع = \frac{6}{3} = 2$

② وزارة (٢٠١٨) صيفية

اذا كان الوسط الحسابي لمجموعة من القيم يساوي (٦٠) ، والانحراف المعياري لها يساوي (٤) اوجد القيمة التي تنحرف الخامس معيارية تحت الوسط الحسابي

الحل

$z = -2 = \frac{س - \bar{س}}{ع} = \frac{س - 60}{4}$

$\Leftarrow -8 = س - 60$

$\Leftarrow س = 60 - 8 = 52$

③ وزارة (٢٠١٩) شتوية.

اذا كان الوسط الحسابي لعلامات اللغة العربية (٦٠) والانحراف المعياري لها (٥) فاوجد العلامة المعيارية للعلامة (٥٨)

الحل

$z = \frac{س - \bar{س}}{ع} = \frac{58 - 60}{5}$

$= \frac{-2}{5} = -0.4$

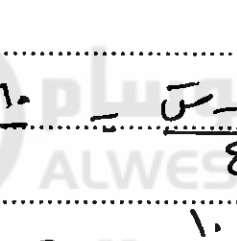
④ وزارة (٢٠١٠) صيفية

اذا كان الوسط الحسابي لعلامات طلبة أحد الصفوف في مبحث الرياضيات (٧٠) والانحراف المعياري (٥) اوجد العلامة المعيارية للعلامة (٦٠)

الحل

$z = \frac{س - \bar{س}}{ع} = \frac{60 - 70}{5}$

$= \frac{-10}{5} = -2$



المعلم: ناجح الجمزاوي

⑤ وزارة (٢٠١١) شتوية

اذا كان الوسط الحسابي لعلامات صف ما في مادة الرياضيات (٦٥)، والانحراف المعياري لها (٦) جد العلامة التي تنحرف فوق الوسط الحسابي انحرافين معياريين.

الحل

فوق الوسط انحرافين ⇐ ز = ٢

$ز = \frac{س - \bar{س}}{ع}$ ⇐ $٢ = \frac{س - ٦٥}{٦}$

⇐ ١٢ = س − ٦٥

⇐ س = ٦٥ + ١٢ = ٧٧

⑥ وزارة (٢٠١١) صيفية

اذا كان الوسط الحسابي لعلامات صف ما في مادة الرياضيات (٦٠) والانحراف المعياري لها (٤) وكانت العلامة المعيارية للطالب احمد (−٣)، جد علامته الفعلية التي حصل عليها

الحل

$\bar{س} = ٦٠$ ع = ٤ ز = −٣

المطلوب س

$ز = \frac{س - \bar{س}}{ع}$ $-٣ = \frac{س - ٦٠}{٤}$

⇐ س − ٦٠ = −١٢ ⇐ س = ٤٨

⑦ وزارة (٢٠١٢) شتوية

اذا كان الوسط الحسابي لمجموعة من القيم يساوي (٦٠) والانحراف المعياري لها (٣) جد العلامة التي تنحرف فوق الوسط الحسابي انحرافين معياريين.

الحل

فوق الوسط انحرافين ⇐ ز = ٢

$\bar{س} = ٦٠$ ، ع = ٣ س = ؟

$ز = \frac{س - \bar{س}}{ع}$

$٢ = \frac{س - ٦٠}{٣}$ ⇐ $٦ = س - ٦٠$

⇐ س = ٦٦

مكتبة الغسام ALWSAM المعلم: ناجح الجمزاوي

(٨) وزارة (٢٠١٢) صيفية

اذا كان الوسط الحسابي لعلامات طلبة في مادة الرياضيات (٦٠) والانحراف المعياري لها (٤) فاوجد العلامة المعيارية للعلامة (٥٦).

الحل

$س = ٦٠$ ، $ع = ٤$ ، $س = ٥٦$

$ز = \frac{س - س}{ع} = \frac{٥٦ - ٦٠}{٤}$

$= \frac{-٤}{٤} = -١$

---

(٩) وزارة (٢٠١٣) شتوية

اذا كان الوسط الحسابي لأعمار مجموعة من الاشخاص ٤٢ سنة، والانحراف المعياري لها (٤) فاوجد العمر الذي يخرج انحرافين معياريين تحت الوسط الحسابي

الحل

$ز =$ انحرافين تحت الوسط $= -٢$

$-٢ = \frac{س - س}{ع} \Leftarrow -٢ = \frac{س - ٤٢}{٤}$

$-٨ = س - ٤٢ \Leftarrow س = ٤٢ - ٨ = ٣٤$

(١٠) وزارة (٢٠١٣) صيفية

في توزيع تكراري اذا كانت العلامة الخام (٧٨) تقابل العلامة المعيارية (٣) وكان الوسط الحسابي للتوزيع (٦٠) اوجد الانحراف المعياري للتوزيع.

الحل

$س = ٧٨$ ، $س = ٦٠$ ، $ع = ؟؟$

$ز = ٣$

$ز = \frac{س - س}{ع} \Leftarrow ٣ = \frac{٧٨ - ٦٠}{ع}$

$\Leftarrow ٣ع = ١٨ \Leftarrow ع = \frac{١٨}{٣} = ٦$

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

(١١) وزارة (٢٠١٤) شتوية

اذا كان الوسط الحسابي لعلامات طلبة في احد الصفوف في مادة العلوم (٦٠) والانحراف المعياري لها (٦) اجب عن مايلي:

١) حدد العلاقة التي تخرج انحرافين معياريين فوق الوسط الحسابي

٢) اذا كان الفرق بين علامتي طالبين من الصف نفسه في مادة العلوم ٩ فما الفرق بين العلامتين المعياريتين المناظرتين لهاتين العلامتين

الحل

$س = ٦٠ \quad ع = ٦$

١) فرق الوسط الحسابي $\Leftarrow ز = ٢$

$ز = \frac{س - س}{ع} \Leftarrow ٢ = \frac{س - ٦٠}{٦}$

$\Leftarrow ١٢ = س - ٦٠$

$س = ٧٢$

٢) $ع = \frac{٥ س}{٥ ز}$

$\frac{٩}{٥ ز} = \frac{س_٢ - س_١}{٥ ز} = \frac{٦}{٢}$

ضرب تبادلي $\Leftarrow ٥ ز ٦ = ٩$

$٥ ز = \frac{٩}{٦} = \frac{٣}{٢} = ١,٥$

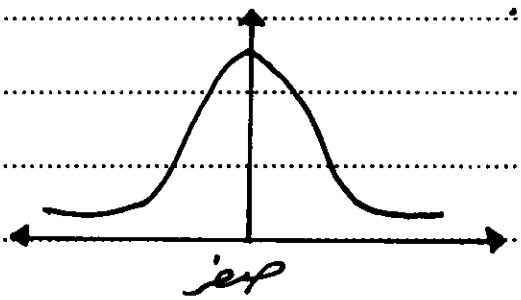
مكتبة الوسام ALWESAM المعلم: ناجح الجمزاوي

الدرس الخامس

التوزيع الطبيعي

التوزيع الطبيعي المعياري :

هو التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي (صفر) وانحرافه المعياري يساوي (١) ومتغيره العشوائي الدلالة المعيارية (ز).



خواص منحنى التوزيع الطبيعي المعياري

١) متماثل حول المحور الرأسي

٢) مساحة المنطقة تحت المنحنى الطبيعي المعياري تساوي (١)

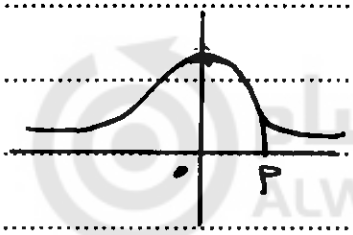
٣) التوزيع الطبيعي المعياري وسطه الحسابي (صفر) وانحرافه المعياري (١)

التوزيع الطبيعي

ويتم احتساب احتمال وقوع المتغير (س) تحت قيمة معينة أو فوقها أو محصورة بين قيمتين في التوزيع الطبيعي الذي متوسطه (μ) وانحرافه المعياري (σ) بتحويل المتغير العشوائي (س) إلى متغير عشوائي (ز) في التوزيع الطبيعي المعياري حسب القانون

$$ز = \frac{س - \mu}{\sigma} \qquad \mu = صفر$$

ويمثل قيمة (ز) الموقع النسبي (م) للمتغير (س)



وبالتالي احتساب الاحتمال من خلال الجدول الخاص بالتوزيع الطبيعي المعياري الوارد في نهاية الوحدة

مكتبة الوسام ALWESAM

كيفية استخدام الجدول

يتطلب استخدام الجداول لتحديد المساحة تحت المنحنى (اي قيمة الاحتمال) تحويل القيمة الحقيقية إلى قيمة معيارية، وبما ان قيمة (ز) بجدوله تتكون من خانتين عشريتين لذلك نقرب قيم (ز) إلى خانتين عشريتين

وتم استخدام جدول التوزيع الطبيعي الوارد في نهاية الكتاب لايجاد الاحتمالات لقيم (ز) الأقل من م أي أن

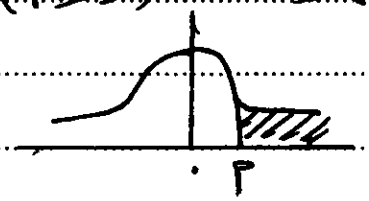
ل(ز ≤ م) حيث م ≤ صفر

أما الاحتمالات الباقية، أي على يسار قيم (ز) السالبة أو يمينها (الموجبة) فتتم استخدام خاصية التمثيل

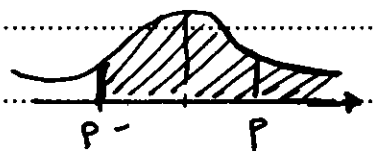
فاذا كانت (م > صفر) فإن

١) ل(ز ≥ م) من الجدول مباشرة

٢) ل(ز ≤ م) = ١ − ل(ز ≥ م)



٣) ل(ز ≤ −م) = ل(ز ≥ م)

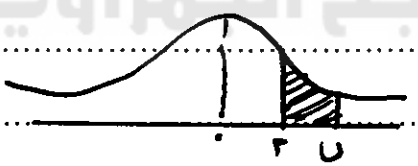


٤) ل(ز ≥ −م) = ل(ز ≤ م)

= ١ − ل(ز ≥ م)

٥) ل(م ≤ ز ≤ ن) = ل(ز ≥ م)

− ل(ز ≥ ن)



مكتبة الوسام AWSAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال توضيحي

لإيجاد قيمة ل(ز > أ) من الجدول

مثال ل(ز > ١٫٣٤)

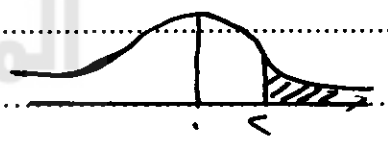
نبحث في العمود الأول للجدول عن السطر الذي يبدأ بالقيمة ١٫٣ ثم نتحرك في نفس السطر الى حيث الوصول الى نقطة التقاء العمود الذي يبدأ بالقيمة ٠٫٠٤ وتكون القيمة ٠٫٩٩

مثال ① تدريبي ص٢٢

اذا كان ز متغيراً عشوائياً طبيعياً معيارياً فجد كلاً مما يأتي

① ل(ز < ٢) = ١ - ل(ز > ٢)

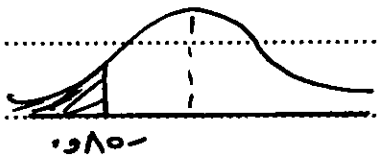
= ١ - ٠٫٩٧٧٢ = ٠٫٠٢٢٨



② ل(ز > -٠٫٨٥)

= ١ - ل(ز > ٠٫٨٥)

= ١ - ٠٫٨٠٢٣ = ٠٫١٩٧٧



③ ل(٠٫٠٩ < ز < ١٫٥)

= ل(ز > ١٫٥) - ل(ز > ٠٫٠٩)

= ٠٫٩٣٣٢ - ٠٫٥٣٥٩ = ٠٫٣٩٧٣

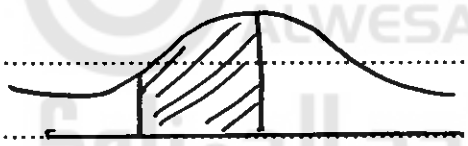
④ ل(-١٫٧ < ز < ٠ ، ز ضعف)

= ل(ز ضعف) - ل(ز < -١٫٧)

= ل(ز ضعف) - (١ - ل(ز > ١٫٧))

= ٠٫٥٠٠٠ - (١ - ٠٫٩٥٥٤)

= ٠٫٥٠٠٠ - ٠٫٠٤٤٦ = ٠٫٤٥٥٤



مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ② $س \sim ص(٢٢٦, \frac{1}{٢})$

ليكن ز متغيراً عشوائياً طبيعياً معيارياً استعمل جدول التوزيع الطبيعي المعياري لايجاد كل مما يأتي :

أ) ل(ز ≤ ٣٫٤٥) = ٠٫٩٩٧٩

جدول مباشر

ب) ل(ز ≤ ١) = ١ − ل(ز ≤ ١)

= ١ − ٠٫٨٤١٣ = ٠٫١٥٨٧

ج) ل(ز ≤ −٠٫٥٠٢)

= ١ − ل(ز ≤ ٠٫٥٠٢)

= ١ − ٠٫٩٧٩٨ = ٠٫٠٢٠٢

د) ل(ز ≤ −٠٫٦٥) = ل(ز ≤ ٠٫٦٥)

= ٠٫٧٤٢٢

هـ) ل(٠٫٨ ≤ ز ≤ ٢٫٥)

= ل(ز ≤ ٢٫٥) − ل(ز ≤ ٠٫٨)

= ٠٫٩٩٣٨ − ٠٫٨٥٩٩ = ٠٫١٣٣٩

و) ل(−٢ ≤ ز ≤ −١)

= ل(ز ≤ −١) − ل(ز ≤ −٢)

= ١ − ل(ز ≤ ١) − (١ − ل(ز ≤ ٢))

= (١ − ٠٫٨٤١٣) − (١ − ٠٫٩٧٧٢)

= ٠٫١٥٨٧ − ٠٫٠٢٢٨ = ٠٫١٣٥٩

ز) ل(−٣ ≤ ز ≤ ٢)

= ل(ز ≤ ٢) − ل(ز ≤ −٣)

= ل(ز ≤ ٢) − (١ − ل(ز ≤ ٣))

= ٠٫٩٧٧٢ − (١ − ٠٫٩٩٨٧)

= ٠٫٩٧٧٢ − ٠٫٠٠١٣ = ٠٫٩٧٥٩

ح) ل(ل ≤ ١٫٦ ≤ ز ≤ صفر)

= ل(ز ≤ صفر) − ل(ز ≤ −١٫٦)

= ل(ز ≤ صفر) − (١ − ل(ز ≤ ١٫٦))

= ٠٫٥٠٠٠ − (١ − ٠٫٩٤٥٢)

= ٠٫٥٠٠٠ − ٠٫٠٥٤٨ = ٠٫٤٤٥٢

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

* استعمال الجدول لإيجاد قيمة (P) اذا علمت المساحة

ايجاد قيمة (P) يتم بخطوتين

١- الخطوة الأولى: ايجاد اشارة (P)

+ و -

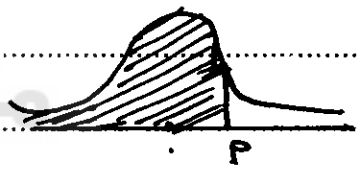
٢- الخطوة الثانية: ايجاد القيمة العددية لـ (P)

① الاشارة

① ل(ز ≥ P) = عدد ② أكبر من ٠.٥٠٠٠

P موجبة

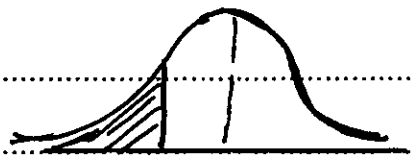
(أقل ، أكبر : موجب)



② ل(ز ≤ P) = عدد ② أقل من ٠.٥٠٠٠

P سالبة

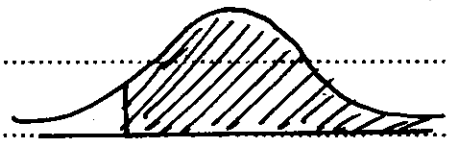
(أقل ، أقل : سالب)



٣- ل(ز ≤ P) = عدد ② أكبر من ٠.٥٠٠٠

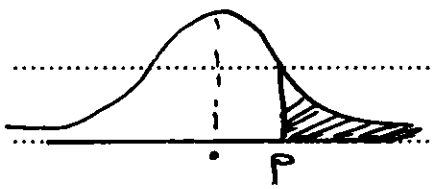
P : سالبة

(أكبر ، أكبر : سالب)



٤- ل(ز ≤ P) = عدد ② أقل من ٠.٥٠٠٠

P : موجبة (أكبر ، أقل : موجب)



نلاحظ اذا كان ① و ② متعاكسان (اشارة أقل مع عدد أكبر من ٠.٥٠٠٠) (P) موجبة ، أما اذا كان ① ، ② متشابهان (اشارة أقل مع عدد أقل أو اشارة أكبر مع عدد أكبر) (P) سالبة

يتبع

② القيمة العددية

١. اذا كان العدد أكبر من ٠,٥٠٠٠ مباشرة من الجدول

٢. اذا كان العدد أقل من ٠,٥٠٠٠ تصبح (١ - العدد) ثم من الجدول

مثال ①

استعمل جدول التوزيع الطبيعي المعياري لايجاد قيمة (P) في كل مما يأتي:

أ) ل(ز ≥ P) = ٠,٩٩٧٦

ب) ل(ز < P) = ٠,٢٨١

ج) ل(ز ≥ P) = ٠,٢٣

د) ل(ز < P) = ٠,٨٥٧٧

الحل

أ) ل(ز ≥ P) = ٠,٩٩٧٦ مباشرة من جدول العدد أكبر من ٠,٥٠٠٠

P = -٢,٨٢ أقل مع أكبر P موجبة

ب) ل(ز < P) = ٠,٢٨١

العدد أقل من ٠,٥٠٠٠

ل(ز ≥ P) = ١ - ل(ز < P)

ل(ز ≥ P) = ١ - ٠,٢٨١ = ٠,٧١٩

P = -٠,٥٨ أقل مع أكبر P موجبة

ج) ل(ز ≥ P) = ٠,٢٣

العدد أقل من ٠,٥٠٠٠

ل(ز < P) = ١ - ل(ز ≥ P)

١ - ٠,٢٣ = ٠,٧٦٧

من جدول P = ٠,٧٣ أقل مع أقل P سالبة

د) ل(ز < P) = ٠,٨٥٧٧

مباشرة من الجدول

P = ١,٠٥ أكبر مع أكبر سالبة

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ② تدريب ص٢٢٣

استعمل جدول التوزيع الطبيعي المعياري لايجاد قيمة (م) في كل الحالات الآتية

① ل(ز ≤ م) = ٠٫٦٧

② ل(ز ≤ م) = ٠٫٨٦٤٨

الحل

① ل(ز ≤ م) = ٠٫٦٧

أكبر من (٠٫٥٠٠٠) ← م موجبة

من الجدول م = ٠٫٤٤

② ل(ز ≤ م) = ٠٫٨٦٤٨

أكبر من (٠٫٥٠٠٠) م سالبة

من الجدول ← م = -٠٫٦٧

مثال ③ تدريب ص٢٢٣

اذا كان (س) متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي (٦٠) وانحرافه المعياري (٨) فجد

① ل(س ≥ ٧٦) ② ل(س ≤ ٤٨)

الحل

م = ٦٠ ، ع = ٨

① ل(س ≥ ٧٦)

ز = (س - م) / ع ← ز = (٧٦ - ٦٠) / ٨

= ١٦ / ٨ = ٢

ل(س ≥ ٧٦) = ل(ز ≥ ٢) ومن الجدول

= ٠٫٩٧٧٢

② ل(س ≤ ٤٨) = ل(ز ≤ (٤٨ - ٦٠) / ٨)

= ل(ز ≤ -١٢/٨) = ل(ز ≤ -١٫٥)

= ل(ز ≥ ١٫٥)

ومن الجدول = ٠٫٩٣٣٢

مكتبة الوسام AL WESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

مسائل عملية على التوزيع الطبيعي

مثال (١) تدريب (٤) ص٢٢٤

يخضع معامل الذكاء للطلبة المسجلين في احدى الجامعات لتوزيع طبيعي وسطه الحسابي (١٠٥) والانحراف المعياري (١٠)، فاذا تم اختيار احد الطلبة عشوائياً

① ما احتمال ان يكون من الطلبة الذين معامل ذكائهم أقل من (١١٠)

② ما احتمال ان يكون الطالب من الطلبة الذين معامل ذكائهم أكبر من (١١٠)

الحل

$\mu = ١٠٥$ ، $\sigma = ١٠$

① ل (معامل ذكاء الطالب اقل من ١١٠)

يساوي ل (س < ١١٠) = ل $\left(ز < \frac{١١٠ - ١٠٥}{١٠}\right)$

= ل (ز < ٠٫٥) = ٠٫٦٩١٥ من الجدول

② ل (معامل ذكاء الطالب أكبر من ١١٠)

= ل (س > ١١٠) = ل $\left(ز > \frac{١١٠ - ١٠٥}{١٠}\right)$

= ل (ز > ٠٫٥) = ١ − ل (ز < ٠٫٥)

= ١ − ٠٫٦٩١٥ = ٠٫٣٠٨٥

مثال (٢) تدريب (٥) ص٢٢٥

اذا كانت اوزان الاطفال عند الولادة تتبع توزيعاً طبيعياً وسطه الحسابي (٣٫٢) كغ، والانحراف المعياري (٠٫٤) كغ، اذا اختير طفل عشوائياً عند الولادة فما احتمال ان يكون وزنه أكبر من (٤ كغ)

الحل

$\mu = ٣٫٢$ ، $\sigma = ٠٫٤$

ل (ان يكون وزنه أكبر من ٤)

ل (س > ٤) = ل $\left(ز > \frac{٤ - ٣٫٢}{٠٫٤}\right)$

= ل $\left(ز > \frac{٠٫٨}{٠٫٤}\right)$ = ل (ز > ٢)

= ١ − ل (ز < ٢)

= ١ − ٠٫٩٧٧٢

= ٠٫٠٢٢٨

مكتبة الوسام AL WESAM
الوسام . ناجح الجمزاوي

مثال ③ $س \sim ح(٥٢, ١٠^2)$

تتخذ اعمار (٢٠٠٠٠) شخص شكل التوزيع الطبيعي بوسط حسابي يساوي (٥٢) سنة، وانحراف معياري يساوي (١٠) سنوات، اذا اختير شخص عشوائياً فما احتمال ان يكون ممن تتراوح اعمارهم بين (٤٦) سنة و (٥٨) سنة؟

الحل

$\mu = ٥٢ \quad \sigma = ١٠$

$ل(٤٦ \le س \le ٥٨)$

$= ل(\frac{٤٦-٥٢}{١٠} \le ز \le \frac{٥٨-٥٢}{١٠})$

$= ل(-\frac{٦}{١٠} \le ز \le \frac{٦}{١٠})$

$= ل(-٠.٦ \le ز \le ٠.٦)$

$= ل(ز \le ٠.٦) - ل(ز \le -٠.٦)$

$= ل(ز \le ٠.٦) - (١ - ل(ز \le ٠.٦))$

$= ٠.٧٢٥٧ - (١ - ٠.٧٢٥٧)$

$= ٠.٧٢٥٧ - ٠.٢٧٤٣$

$= ٠.٤٥١٤$

مثال ④ $س \sim ح(٦٥, ١٠^2)$

اذا كانت علامات (١٠٠٠) طالب تتخذ شكل التوزيع الطبيعي وكان الوسط الحسابي للعلامات (٦٥)، والانحراف المعياري لها (١٠)، وكان عدد الناجحين ٧٥٨ طالباً فما علامة النجاح.

الحل

العدد الكلي = ١٠٠٠ طالب

عدد الطلبة الناجحين = ٧٥٨

$\mu = ٦٥ \quad \sigma = ١٠$

$\text{نسبة النجاح} = \frac{\text{عدد الطلبة الناجحين}}{\text{العدد الكلي للطلاب}}$

$= \frac{٧٥٨}{١٠٠٠} = ٠.٧٥٨$

نفرض ان القيمة المعيارية لعلامة النجاح هي (م) فان

$ل(ز \le م) = ٠.٧٥٨$ الناجحين اما حصلوا علامة النجاح أو أكثر

← يتبع الحل

من الجدول $P = 0.7$

ولايجاد علامة النجاح نطبق القانون $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$

$-0.7 = \frac{x - 60}{10} \Leftarrow$

$-0.7 \times 10 = x - 60$

$-7 = x - 60 \Leftarrow x = 53$

علامة النجاح

ملاحظة هامة

نسبة الطلبة الناجحين = عدد الطلبة الناجحين / عدد الطلبة الكلي

عدد الطلبة الناجحين = نسبة النجاح × العدد الكلي

مثال ⑤ ص ع ص ٢٦

اذا كانت اوزان سبائك ذهبية تتخذ شكل التوزيع الطبيعي بوسط حسابي يساوي ٥٠ غرام، وانحراف معياري يساوي ١٠ غرام، اذا تم اختيار احدى السبائك فما احتمال ان يقل وزنها عن ٤٤٫٩ غرامًا

الحل

$\mu = 50 \quad \sigma = 10$

$P(x < 44.9)$

$= P\left(z < \frac{44.9 - 50}{10}\right) = P(z < -0.51)$

$= P(z > 0.51)$

$= 1 - P(z < 0.51)$ من الجدول

$= 1 - 0.6950 = 0.3050$

مثال ⑥ ص ع ص ٢٦

تخضع عبوات احدى المنتجات الزراعية لتوزيع طبيعي وسطه (٥٠) كغ، وانحرافه المعياري (٢) كغ اذا اختيرت احدى العبوات عشوائيًا فما احتمال أن

(أ) يزيد وزنها عن (٤٧) كغ

(ب) ينحصر وزنها بين (٤٨٫٥) كغ و (٥٣٫٥) كغ

← يتبع الحل

الحل

$\mu = 25$ $\quad \sigma = 2$

(أ) $ل(س > 27) = ل(ز > \frac{27-25}{2})$

$= ل(ز > \frac{2}{2}) = ل(ز > 1)$

$= 1 - ل(ز < 1)$

$= 1 - 0.8413 = 0.1587$

(ب) $ل(24.5 < س < 25.5)$

$= ل(\frac{24.5-25}{2} < ز < \frac{25.5-25}{2})$

$= ل(-0.5 < ز < 0.25)$

$= ل(-0.25 < ز < 0.25)$

$= ل(ز < 0.25) - ل(ز < -0.25)$

$= ل(ز < 0.25) - (1 - ل(ز < 0.25))$

$= 0.5987 - (1 - 0.5987)$

$= 0.1974$

مثال (7) ص 66

اذا كان رواتب (1000) معلم ومعلمة تتخذ شكل التوزيع الطبيعي بوسط حسابي (200) دينار وانحراف معياري يساوي (10) دنانير، فما عدد المعلمين والمعلمات الذين تنحصر رواتبهم بين (180) دينار و (210) دنانير؟

الحل

عدد المعلمين الكلي = 1000

$\mu = 200$ ، $\sigma = 10$

$ل(180 < س < 210)$

$= ل(\frac{180-200}{10} < ز < \frac{210-200}{10})$

$= ل(\frac{-20}{10} < ز < \frac{10}{10})$

$= ل(-2 < ز < 1)$

$= ل(ز < 1) - ل(ز < -2)$

$= ل(ز < 1) - (1 - ل(ز < 2))$

$= 0.8413 - (1 - 0.9772)$

$= 0.8413 - 0.0228 = 0.8185$

عدد المعلمين

= العدد الكلي × الاحتمال

$= 1000 \times 0.8185 = 818.5$

مثال (٨) ص ٤١ مراجعة

تقدم لامتحان شهادة الثانوية العامة الفرع الادبي (٤٠٠٠٠) طالب وطالبة وكان الوسط الحسابي لعلامات الطلبة (٦٢) والانحراف المعياري (١٥) جد عدد الطلبة الحاصلين على معدل (٩٠) و العلامات مقربة لأقرب علامة صحيحة وتتوزيع طبيعي

الحل

$\mu = 62 \quad \sigma = 15$

بما ان العلامة مقربة لأقرب علامة صحيحة إذن علامة الطالب تنحصر بين $89.5, 90.5$

$ل(89.5 \le س \le 90.5)$

$= ل\left(\frac{89.5-62}{15} \le ز \le \frac{90.5-62}{15}\right)$

$= ل(1.8 \le ز \le 1.9)$

$= ل(ز \le 1.9) - ل(ز \le 1.8)$

$= 0.9713 - 0.9641 = 0.0072$

عدد الطلبة $= 0.0072 \times 40000 = 288$

مثال (٩) ص ٤١

مدرسة فيها (٥٠٠) طالب، فاذا كانت اطوالهم تتبع التوزيع الطبيعي وكان الوسط الحسابي لهذه الاطوال يساوي (١٣٠) سم والانحراف المعياري لها (١٠ سم) جد

أ) نسبة الطلبة الذين اطوالهم أكثر من (١٤٠) سم

ب) نسبة الطلبة الذين تقل اطوالهم عن (١١٨) سم

ج) نسبة الطلبة الذين تنحصر اطوالهم بين $126, 138$ سم

الحل

$\mu = 130 \quad \sigma = 10$

أ) $ل(س \ge 140) = ل\left(ز \ge \frac{140-130}{10}\right)$

$= ل(ز \ge 1)$

$= 1 - ل(ز \le 1)$

$= 1 - 0.8413 = 0.1587$

يتبع الحل ←

ب) ل(س ≥ ١١٨) =

ل(ز ≥ (١١٨ − ١٢٠)/١٠) − ل(ز ≥ (١٢٠ − ١٢٠)/١٠)

= ل(ز ≥ −٠,٢)

= ١ − ل(ز ≥ ٠,٢) = ١ − ٠,٥٧٩٢ =

= ٠,٤٢٠٨

ج) ل(١٢٦ ≤ س ≤ ١٣٨)

= ل((١٢٦ − ١٢٠)/١٠ ≤ ز ≤ (١٣٨ − ١٢٠)/١٠)

= ل(٠,٦ ≤ ز ≤ ١,٨)

= ل(ز ≤ ١,٨) − ل(ز ≤ ٠,٦)

= ل(ز ≤ ١,٨) − (١ − ل(ز ≤ ٠,٦))

= ٠,٩٦٤١ − (١ − ٠,٧٢٥٧)

= ٠,٩٦٤١ − ٠,٢٧٤٣

= ٠,٦٨٩٨

مثال (١٠) س ~ ن(١٢٠، ١٠٠) اختبار ذكاء تقدم (١٠٠٠٠) طالب لامتحان وكان توزيع علاماتهم قريباً من التوزيع الطبيعي، فإذا كان الوسط الحسابي لهذه العلامات يساوي (٥٧)، والانحراف المعياري لها يساوي (١٠) وكان عدد الطلبة الذين علاماتهم فوق العلامة س وأقل من الوسط الحسابي (١٧٠٠) طالب فما قيمة العلامة س؟

الحل

العدد الكلي = ١٠٠٠٠، ن = ٥٧، ع = ١٠

عدد الطلبة الذين علاماتهم فوق س وأقل من الوسط الحسابي = ١٧٠٠

نسبة الطلبة = ١٧٠٠/١٠٠٠٠ = ٠,١٧٠٠

ل(س ≤ علامة الطالب ≤ الوسط الحسابي) = ٠,١٧٠٠

ل(م ≤ ز ≤ ٠) لأن ز = (س − ن)/ع

= ل(ز ≤ ٠) − ل(ز ≤ م) = ٠,١٧٠٠

يتبع الحل ⇐

مكتبة الوسام العلمية
المعلم: ناجح الجمزاوي

$\Leftarrow$ ٠٫٥٠٠٠ − ل(ز $\geq$ P) = ٠٫٦٧٠٠

$\Leftarrow$ ل(ز $\geq$ P) = ٠٫٥٠٠٠ − ٠٫٦٧٠٠

= ٠٫٣٣٠٠

١ − ٠٫٣٣٠٠ = ٠٫٦٧٠٠

P = ٠٫٤٤ من جدول

نجد س :

$\frac{س - ٥٧}{١٠}$ = ٠٫٤٤ −

٠٫٤٤ = س − ٥٧ $\Leftarrow$

س = ٠٫٤٤ + ٥٧ = ٥٧٫٦

مثال (١١)

اذا كان الوسط الحسابي لعلامات الطلبة في إحدى الثانوية العامة يساوي (٧٠) والانحراف المعياري يساوي (١٠) فاذا قررت وزارة التعليم العالي قبول الطلبة الذين يكون علاماتهم ضمن اعلى ٤٠٪ من العلامات في الجامعات الحكومية فما ادنى علامة تقبل في الجامعة

الحل

μ = ٧٠ ، σ = ١٠

نسبة الطلبة المقبولين = ٤٠٪

= ٠٫٤٠٠٠

ل(ز $\leq$ P) = ٠٫٦٠٠٠

نجد P

١ − ٠٫٤٠٠٠ = ٠٫٦٠٠٠

من جدول P = ٠٫٢٥ موجبة

$ز = \frac{س - \mu}{\sigma}$

$\frac{س - ٧٠}{١٠}$ = ٠٫٢٥ $\Leftarrow$ ٠٫٢٥ = س − ٧٠

$\Leftarrow$ س = ٠٫٢٥ + ٧٠ = ٧٢٫٥

اذن علامة قبلت

مثال (١٢)

تتوزع علامات طلبة توزيعاً طبيعياً بانحراف معياري يساوي (١٠) فاذا كانت علامات ٩٧٫٧٢٪ من الطلبة اقل من ٨٦ فما الوسط الحسابي لهذا التوزيع ؟

الحل

ل(س $\leq$ ٨٦) = ٠٫٩٧٧٢

ل(ز $\leq$ P) = ٠٫٩٧٧٢ من جدول P = ٢

$\frac{٨٦ - \mu}{١٠}$ = ٢ $\Leftarrow$ ٨٦ − μ = ٢٠

$\Leftarrow$ μ = ٨٦ − ٢٠ = ٦٦

اسئلة الوزارة

① وزارة (٢٠١٨) شتوية

اذا كانت اوزان طلبة احدى المدارس تتبع توزيعا طبيعيا وسطه الحسابي يساوي (٤٥) كغم والانحراف المعياري (٤) كغم واختير احد الطلبة عشوائياً، فما احتمال ان يكون من الطلبة الذين تتحصر اوزانهم بين (٤٣) كغم ، (٤٩) كغم.

الحل

$\mu = ٤٥$ $\quad \sigma = ٤$

$ل(٤٣ \leq س \leq ٤٩)$

$= ل(\frac{٤٣-٤٥}{٤} \leq ز \leq \frac{٤٩-٤٥}{٤})$

$= ل(\frac{-٢}{٤} \leq ز \leq \frac{٤}{٤}) = ل(-٠.٥ \leq ز \leq ١)$

$= ل(ز \leq ١) - ل(ز \leq -٠.٥)$

$= ل(ز \leq ١) - (١ - ل(ز \leq ٠.٥))$

$= ٠.٨٤١٣ - (١ - ٠.٦٩١٥)$

$= ٠.٨٤١٣ - ٠.٣٠٨٥ = ٠.٥٣٢٨$

② وزارة (٢٠١٨) صيفية

تقدم (٥٠٠٠) طالب لامتحان ما وكان توزيع نتائجهم يتخذ شكل التوزيع الطبيعي المعياري بوسط حسابي (٦٠) وانحراف معياري (٥)، وكانت علامة النجاح (٦٠) اختير احد الطلبة عشوائياً

١) ما احتمال ان يكون الطالب من بين الناجحين

٢) ما عدد الطلبة الناجحين في هذا الامتحان

الحل

١) $ل(\text{الطالب ناجح}) = ل(\text{من} \leq ٦٠)$

$= ل(ز \leq \frac{٦٠-٦٠}{٥}) = ل(ز \leq ٠) = ٠.٥$

٢) عدد الطلبة الناجحين

$= ٠.٩٧٧٢ \times ٥٠٠٠$

$= ٤٨٨٦$ طالب

(٣) وزارة (٢٠١٩) شتوية

اذا كانت اوزان الأطفال عند الولادة تتبع توزيعا طبيعيا وسطه الحسابي (٣,٥) كغ وانحرافه المعياري (٠,٤) كغ اختير احد الاطفال عشوائياً عند الولادة ما احتمال ان يكون وزنه أكثر من ٤ كغ

الحل مثال ② ص٩٩ (الدرسية)

(٤) وزارة (٢٠١٩) صيفية

تقدم لامتحان عام (٥٠٠٠) طالب وكانت علاماتهم تتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي (٤١)، وانحراف معياري (٦) حدد عدد الطلبة الناجحين في الامتحان علماً بأن علامة النجاح (٥٠)

الحل

العدد الكلي = ٥٠٠٠

$\mu = 41$ ، $\sigma = 6$

$P(x \geq 50) = P(z \geq \frac{50-41}{6})$

$= P(z \geq \frac{9}{6}) = P(z \geq 1.5)$

$= 1 - P(z \geq 1.5)$

$= 1 - 0.9332 = 0.0668$

العدد = العدد الكلي × النسبة

$= 5000 \times 0.0668$

$= 334$ طالب الناجحين

(٥) وزارة (٢٠١٠) شتوية

تقدم لامتحان الثانوية العامة في احدى السنوات (٢٠٠٠) طالب من طلبة احد الفروع المهنية، وكانت علاماتهم تتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي (٥٧) وانحراف معياري (١٦)، اذا علمت انه لا يسمح للطالب الذي معدله أقل من (٦٥) بتقديم طلبات للجامعات الحكومية حدد عدد طلبة ذلك الفرع الذين يحق لهم تقديم تلك الطلبات

← يتبع الحل

المعلم: ناجح الجمزاوي

الحل

$\mu = ٥٧ \quad \sigma = ١٦$

$ل(س \leq ٦٥) = ل(ز \leq \frac{٦٥-٥٧}{١٦})$

$= ل(ز \leq \frac{٨}{١٦}) = ل(ز \leq ٠.٥)$

$= ١ - ل(ز \leq ٠.٥)$

$= ١ - ٠.٦٩١٥ = ٠.٣٠٨٥$

عدد الطلبة الذين تحقق طلبهم تقديم

طلبات = العدد الكلي × الاحتمال

$= ٢٠٠٠ \times ٠.٣٠٨٥$

$= ٦١٧٠$ طالبا

---

(٦) وزارة (٢٠١٠) صيفية

اذا كانت علامات (١٠٠٠٠) طالب تتخذ شكل التوزيع الطبيعي، وكان الوسط الحسابي للعلامات (٥٥) والانحراف المعياري (١٠)، وكان عدد الناجحين (٥٣٩٨) طالباً فما علامة النجاح.

الحل

عدد الطلبة الناجحين ٥٣٩٨

نسبة النجاح = عدد الناجحين = ٥٣٩٨ / العدد الكلي ١٠٠٠٠

$= ٠.٥٣٩٨$

$ل(ز \leq م) = ٠.٥٣٩٨$

من الجدول

$م = ٠.١$

لايجاد علامة النجاح

$ز = \frac{س - \mu}{\sigma}$

$٠.١ = \frac{س - ٥٥}{١٠} \Leftarrow ١ = س - ٥٥$

$\Leftarrow س = ١ + ٥٥ = ٥٤$

---

(٧) وزارة (٢٠١١) شتوية

تتخذ اعمار ١٠٠٠٠ شخص شكل التوزيع الطبيعي بوسط حسابي (٥٢) سنة وانحراف معياري (٨) سنوات، ما عدد الاشخاص الذين تزيد اعمارهم عن ٦٠ سنة؟

الحل

$ل(س \leq ٦٠) = ١ - ل(س \leq ٦٠)$

$= ١ - ل(ز \leq \frac{٦٠-٥٢}{٨})$

$= ١ - ل(ز \leq ١) = ١ - ٠.٨٤١٣$

$= ٠.١٥٨٧$

العدد = العدد الكلي × الاحتمال

$= ١٠٠٠٠ \times ٠.١٥٨٧ = ١٥٨٧$

(٨) وزارة (٢٠١١) صيفية

اذا كانت اوزان الاطفال عند الولادة تتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي (٣,٥) كغ وانحراف معياري (٠,٥) كغ، اذا اختير طفل عشوائيا عند الولادة، ما احتمال ان يكون وزنه أكبر من (٣) كغ ؟

الحل

$\mu = 3.5$ ، $\sigma = 0.5$

$$ل(س \geq 3) = ل\left(ز \geq \frac{3 - 3.5}{0.5}\right)$$

$$= ل(ز \geq -1) = ل(ز \leq 1)$$

$$= 0.8413$$

(٩) وزارة (٢٠١٢) شتوية

اذا كانت اوزان ١٠٠٠ طالب تتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي (٤٥) كغ وانحراف معياري (٤) كغ ما عدد الطلبة الذين تزيد اوزانهم عن (٥٠) كغ

الحل

$\mu = 45$ ، $\sigma = 4$

$$ل(س \geq 50) = ل\left(ز \geq \frac{50 - 45}{4}\right)$$

$$= ل\left(ز \geq \frac{5}{4}\right) = ل(ز \geq 1.25)$$

$$= 1 - ل(ز \leq 1.25)$$

$$= 1 - 0.8944 = 0.1056$$

عدد الطلبة

= العدد الكلي × الاحتمال

$= 1000 \times 0.1056$

$= 105.6$ طالباً

(١٠) وزارة (٢٠١٢) صيفية

اذا كان رواتب (١٠٠٠٠) موظف في احدى الوزارات تتخذ شكل التوزيع الطبيعي بوسط حسابي (٢٠٠) دينار، وانحراف معياري (١٠) دنانير، ما عدد الموظفين الذين تتحصر رواتبهم بين ٢٨٠ دينار و ٣٢٠ دينار

الحل

$$ل(٢٨٠ \leq س \leq ٣٢٠)$$

$$= ل\left(\frac{280 - 300}{10} \leq ز \leq \frac{320 - 300}{10}\right)$$

$$= ل\left(-\frac{20}{10} \leq ز \leq \frac{20}{10}\right)$$

$$= ل(-2 \leq ز \leq 2)$$

يتبع الحل

= ل(ز < ج) − ل(ز < ب)

= ل(ز < ج) − (١ − ل(ز < ب))

= ٠,٩٩٧٢ − (١ − ٠,٩٩٧٢)

= ٠,٩٩٧٢ − ٠,٠٠٢٨

= ٠,٩٩٤٤

عدد الموظفين = ٠,٩٩٤٤ × ١٠٠٠٠٠

= ٩٩٤٤

= ل(ز < ٥٠)

= ٠,٦٩١٥

عدد الطلبة الناجحين

= العدد الكلي × الاحتمال

= ١٠٠٠٠٠ × ٠,٦٩١٥

= ٦٩١٥

(١١) وزارة (٢٠١٣) شهر

تقدم (١٠٠٠٠٠) طالب لامتحان عام وكانت علاماتهم تتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي (٥٤) وانحراف معياري (٨)، جد عدد الطلبة الناجحين في الامتحان اذا كانت علامة النجاح (٥٠).

الحل

ل(س ≥ ٥٠) = ل(ز ≥ (٥٠ − ٥٤)/٨)

= ل(ز ≥ −٤/٨)

= ل(ز ≥ −١/٢)

(١٢) وزارة (٢٠١٣) صيفية

تتخذ اوزان (٢٠٠٠٠) شخص شكل التوزيع الطبيعي بوسط حسابي (٧٥) كغ وانحراف معياري (٥) كغ، جد عدد الاشخاص الذين تقل اوزانهم عن (٧٢) كغ

الحل

ل(س < ٧٢) = ل(ز < (٧٢ − ٧٥)/٥)

= ل(ز < −٣/٥) = ل(ز < −٠,٦)

= ١ − ل(ز < ٠,٦)

= ١ − ٠,٧٢٥٧ = ٠,٢٧٤٣

عدد الاشخاص = ٢٠٠٠٠ × ٠,٢٧٤٣

= ٥٤٨٦ شخصاً

المعلم ناجح الجمزاوي

(١٣) وزارة (٢٠١٤) شتوية

اذا كانت علامات (١٠٠٠٠) طالب تتخذ شكل التوزيع الطبيعي وكان الوسط الحسابي (٦٢) والانحراف المعياري (١٠) ، وكان عدد الطلبة الناجحين (٥٧٩٣) طالباً فما علامة النجاح

الحل

نسبة النجاح = عدد الطلبة الناجحين / العدد الكلي

= ٥٧٩٣ / ١٠٠٠٠ = ٠٫٥٧٩٣

نفرض ان العلامة الحيادية لعلامة النجاح P

ل(ز ≤ P) = ٠٫٥٧٩٣

← من الجدول ← = ٠٫٢

ز = (س − س̄) / ع ← ٠٫٢ = (س − ٦٢) / ١٠

← س − ٦٢ = ٢

← س = ٦٢ + ٢ = ٦٤

(١٤) وزارة (٢٠١٤) صيفية

اذا كانت رواتب (١٠٠٠٠) موظف تتخذ شكل التوزيع الطبيعي وكان الوسط الحسابي لرواتبهم (٣٥٠) دينار والانحراف المعياري لها (٢٥) دينارًا فما عدد الموظفين الذين تتحصر رواتبهم بين (٣٢٥) دينارًا و (٤٠٠) دينارًا

الحل

ل(٣٢٥ ≤ س ≤ ٤٠٠)

= ل((٣٢٥ − ٣٥٠)/٢٥ ≤ ز ≤ (٤٠٠ − ٣٥٠)/٢٥)

= ل(−٥٠/٢٥ ≤ ز ≤ ٥٠/٢٥)

= ل(−٢ ≤ ز ≤ ٢)

= ل(ز ≤ ٢) − ل(ز ≤ −٢)

= ل(ز ≤ ٢) − (١ − ل(ز ≤ ٢))

= ٠٫٩٧٧٢ − (١ − ٠٫٨٤١٣)

= ٠٫٩٧٧٢ − ٠٫١٥٨٧ = ٠٫٨١٨٥

عدد الموظفين = العدد الكلي × الاحتمال

= ١٠٠٠٠ × ٠٫٨١٨٥

= ٨١٨٥ موظف

(١٥) وزارة التربية (٢٠١٥) سنويا تقدم (١٥٠٠٠) طالبا لامتحان ما وكانت نتائجهم تتخذ شكل التوزيع الطبيعي وكان الوسط الحسابي لعلاماتهم (٦٥) والانحراف المعياري (٥) وعلامة النجاح (٦٠) احسب عدد الطلبة الناجحين في الامتحان

الحل

$$ل(س \geq ٦٠) = ل(ص \geq \frac{٦٠-٦٥}{٥})$$

$$= ل(ص \geq \frac{-٥}{٥}) = ل(ص \geq -١)$$

$$= ل(ص \geq -١) = ٠.٨٤١٣$$

عدد الطلبة الناجحين

= العدد الكلي × الاحتمال

= ١٥٠٠٠ × ٠.٨٤١٣

= ١٢٦١٩

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

الدرس السادس

الارتباط وعامل الارتباط

في هذا الدرس سنتطرق الى دراسة العلاقة بين ظاهرتين ونوع العلاقة وقوتها وتمثيلها رياضيًا

الارتباط: هو علاقة بين متغيرين (ظاهرتين) (س، ص) أو أكثر

مثلاً

العلاقة بين عدد ساعات الدراسة (س) والتحصيل الدراسي (ص)، والعلاقة بين وزن المريض (س) والضغط (ص) والعلاقة بين الانفاق (س) والدخل العائلي (ص)

انواع الارتباط

١. ارتباط طردي (ايجابي):
اذا زاد احد المتغيرين زاد الآخر

٢. ارتباط عكسي (سلبي)
اذا زاد احد المتغيرين قل الآخر

وعكسه معرفة وجود العلاقة ونوعها واتجاهها وقوتها بطريقتين

١) التمثيل البياني لشكل الانتشار

٢) معامل ارتباط بيرسون

مكتبة الوسام ALWESAM
الوسام: ناجح الجمزاوي

رياض ومدارس جامعة الزرقاء

الثاني الثانوي الادارة | الوحدة الخامسة / الاحصاء والاحتمالات | ناجح الجمزاوي

0795656881 | 0788656057

شكل الانتشار

يمكن الحصول على شكل الانتشار من خلال تمثيل العلاقة باستخدام الازواج المرتبة من المتغيرين س، ص في المستوى الديكارتي ومن خلال شكل الانتشار يمكنه تحديد نوع الارتباط.

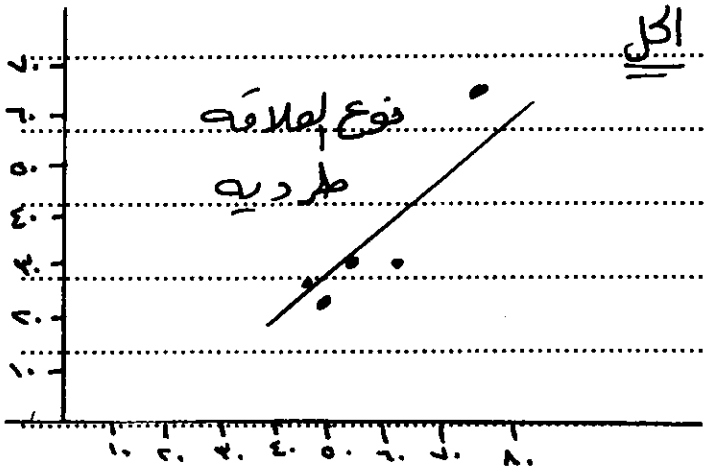
مثال (1) تدريب (1) ص ٢٠

يبين الجدول الآتي انتاج الاردن من القمح والشعير (بالألف طن) خلال السنوات ١٩٩٢ – ١٩٩٦م

السنه	١٩٩٢	١٩٩٣	١٩٩٤	١٩٩٥	١٩٩٦
انتاج القمح (س)	٧٥٫٥	١٫٥٧	٩٫٤٦	٥٫٥٨	١٫٤٢
انتاج الشعير (ص)	٦٨٫٩	٨٫٢١	٤٫٢٧	٧٫٣١	٢٫٢٩

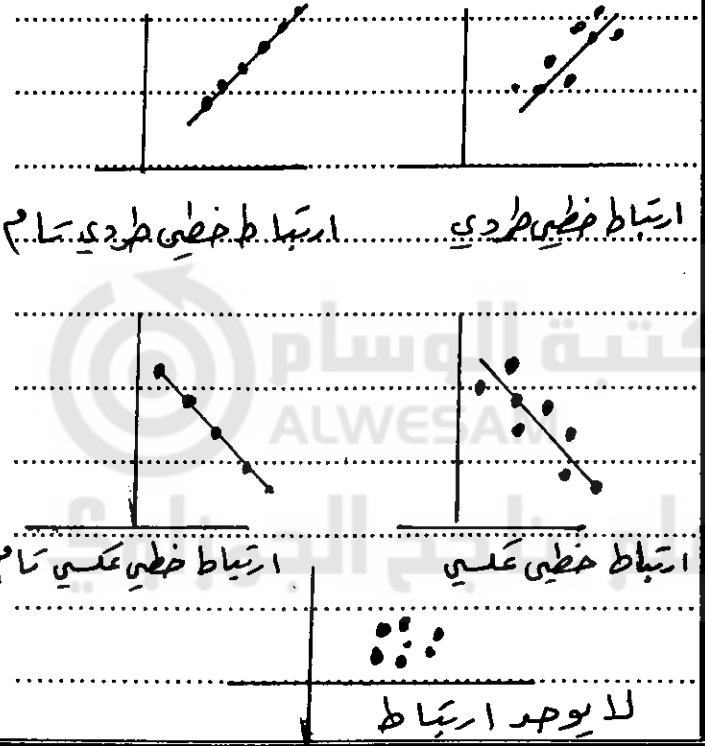
ارسم شكل انتشار المتغيرين س، ص وحدد نوع العلاقة؟

الحل



مثال (2)

ما نوع الارتباط بين المتغيرين س، ص في كل من اشكال الانتشار الآتية



مكتبة الوسام ALWESAM

مثال (٣) ص ٢٣٤

اذا مثلت العلاقة بين المتغيرين س، ص في اشكال الانتشار المجاورة فما وجه نوع العلاقة

① عكسية

② لا توجد علاقة

③ طردية

معامل ارتباط بيرسون

يستخدم لتحديد القيمة العددية لقوة الارتباط بين المتغيرين ويرمز له بالرمز (ر) ويتم ايجادها من خلال القانون

$$ر = \frac{\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sqrt{\sum (س - \bar{س})^2 \times \sum (ص - \bar{ص})^2}}$$

$\bar{س}$: الوسط الحسابي لقيم س

$\bar{ص}$: الوسط الحسابي لقيم ص

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (1) تدريب (2) ص 421

احسب معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س ، ص في الجدول الآتي

س	11	10	14	8
ص	4	10	6	9	11

الحل

نحسب الوسط الحسابي لكل من س ، ص

$\bar{س} = \frac{\sum س}{ن} = \frac{11+10+14+8}{5}$

$= \frac{55}{5} = 11$

$\bar{ص} = \frac{\sum ص}{ن} = \frac{14+10+6+9+11}{5}$

$= \frac{50}{5} = 10$

نكون جدولاً على النحو الآتي

س	ص	س − س̄	ص − ص̄	(س − س̄)(ص − ص̄)	(س − س̄)²	(ص − ص̄)²
11	14	0	4	0	0	16
10	10	−1	0	0	1	0
14	6	1	−4	−4	1	16
8	9	−3	−1	3	9	1
8	11	−3	1	−3	9	1
55	50	0	0	−10	20	34

نكتب قانون معامل ارتباط بيرسون

$ر = \frac{\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sqrt{\sum (س - \bar{س})^2 \times \sum (ص - \bar{ص})^2}}$

$= \frac{-10}{\sqrt{20 \times 34}} = \frac{-10}{\sqrt{680}}$

نلاحظ ان

الاشارة سالبة

⇐ ارتباط عكسي

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال (٢) $\overline{س}$ ، $\overline{ص}$ ، $ع_{س}^{٢}$ ، $ع_{ص}^{٢}$

اذا كان س ، ص متغيرين عدد قيم كل منهما (١٠) وكان

$\sum_{ر=١}^{١٠} (س - \overline{س})^{٢} = ٣٦$

$\sum_{ر=١}^{١٠} (ص - \overline{ص})^{٢} = ١٦٠٠$

$\sum_{ر=١}^{١٠} (س - \overline{س})(ص - \overline{ص}) = ١٨٠$

احسب معامل ارتباط بيرسون الخطي بين س ، ص .

الحل

$$ر = \frac{\sum (س - \overline{س})(ص - \overline{ص})}{\sqrt{\sum (س - \overline{س})^{٢} \times \sum (ص - \overline{ص})^{٢}}}$$

$$= \frac{١٨٠}{\sqrt{٣٦ \times ١٦٠٠}} = \frac{١٨٠}{\sqrt{٥٧٦٠٠}} = \frac{١٨٠}{٤٠ \times ٦} = \frac{٣}{٤} = ٠٫٧٥$$

مثال (٣) $\overline{س}$ ، $\overline{ص}$ ، $ع_{س}^{٢}$ ، $ع_{ص}^{٢}$

يبين الجدول الآتي عدد سنوات الخبرة (س) والاجر اليومي (ص) بالدينار لخمسة عمال في احدى الشركات في مدينة سحاب الصناعية

عدد سنوات الخبرة س	٥	٦	٧	٨	١٤
الاجر اليومي ص	٦	٧	٨	٩	١٠

احسب معامل ارتباط بيرسون الكل

س	ص	$س - \overline{س}$	$ص - \overline{ص}$	$(س - \overline{س})(ص - \overline{ص})$	$(س - \overline{س})^{٢}$	$(ص - \overline{ص})^{٢}$
٥	٦	-٣	-٢	٦	٩	٤
٦	٧	-٢	-١	٢	٤	١
٧	٨	-١	٠	٠	١	٠
٨	٩	٠	١	٠	٠	١
١٤	١٠	٦	٢	١٢	٣٦	٤
٤٠	٤٠	٠	٠	٢٠	٥٠	١٠

$\overline{س} = \frac{٤٠}{٥} = ٨$ ، $\overline{ص} = \frac{٤٠}{٥} = ٨$

نتبع القانون

$$ر = \frac{٢٠}{\sqrt{٥٠ \times ١٠}} = \frac{٢}{\sqrt{٥}}$$

ارتباط طردي قوية

رياض ومدارس جامعة الزرقاء

الثاني الثانوي الادارة | الوحدة الخامسة / الاحصاء والاحتمالات | ناجح الجمزاوي

0795656881 | 0788656057

مثال (٤) ص ٢٢٥

لبين الجدول الآتي معامل الذكاء (س) وعلامة الرياضيات (ص) لخمسة طلاب

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥
معامل الذكاء س	١٣٠	١٢٠	١١٥	١١٠	١٠٠
علامة الرياضيات ص	٩٥	٧٠	٨٥	٨٠	٥٠

احسب معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س، ص

الحل

س	ص	س - س̄	ص - ص̄	(س - س̄)(ص - ص̄)	(س - س̄)²	(ص - ص̄)²
١٣٠	٩٥	١٥	١٩	٢٨٥	٢٢٥	٣٦١
١٢٠	٧٠	٥	-٦	-٣٠	٢٥	٣٦
١١٥	٨٥	٠	٩	٠	٠	٨١
١١٠	٨٠	-٥	٤	-٢٠	٢٥	١٦
١٠٠	٥٠	-١٥	-٢٦	٣٩٠	٢٢٥	٦٧٦
٥٧٥	٣٨٠	٠	٠	٦٢٥	٥٠٠	١١٧٠

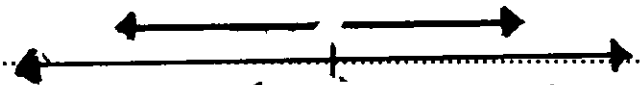
$\bar{س} = \frac{٥٧٥}{٥} = ١١٥$ $\quad \bar{ص} = \frac{٣٨٠}{٥} = ٧٦$

$$ر = \frac{\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sqrt{\sum (س - \bar{س})^2 \times \sum (ص - \bar{ص})^2}} = \frac{٦٢٥}{\sqrt{٥٠٠ \times ١١٧٠}}$$

$=$

ملاحظة هامة

١- قيمة معامل الارتباط تتحصر بين $[-١ ، ١]$.



١ طردي صفر عكسي -١

كلما ابتعدنا عن الصفر تزداد قوة العلاقة

٢- الاشارة تدل على نوع الارتباط (+) ارتباط طردي، (-) ارتباط عكسي

٣- القيمة العددية تدل على قوة الارتباط

معامل الارتباط	نوع العلاقة وقوتها
ر = ١	طردي تام
٠,٨ ≤ ر < ١	طردي قوي
٠,٥ ≤ ر < ٠,٨	طردي متوسط
٠ < ر < ٠,٥	طردي ضعيفا
ر = ٠	لا يوجد علاقة
-٠,٥ < ر < ٠	عكسي ضعيفا
-٠,٨ < ر ≤ -٠,٥	عكسي متوسط
-١ < ر ≤ -٠,٨	عكسي قوي
ر = -١	عكسي تام

مكتبة الوسام ALWESAM

مثال ⑤

+ ٠,٩٥ : تدل على ان الارتباط طردي قوي

- ٠,٩٥ : عكسي قوي

صفر : لا ارتباط

- ٠,١٥ : ارتباط عكسي ضعيف

١,٠ : ارتباط طردي ضعيف

مثال ⑥ $\sum س ص = ٢٤٤$ فرع (٨) اختبار ذاتي

اذا كان معامل الارتباط بين المتغيرين س، ص يساوي (- ٠,٩٥) فان الارتباط بين س، ص

الحل

نوع الارتباط : عكسي قوي

أثر التعديلات الخطية على معامل الارتباط

اذا كان معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س، ص يساوي (ر) وتم تعديل كل من متغير س، ص حسب العلاقة

$س^* = أ س + ب$ ، $ص^* = ج ص + د$

$أ \neq ٠$ ، $ج \neq ٠$

فان معامل الارتباط بين $س^*$، $ص^*$ يساوي

① (ر) اذا كانت اشارة أ، ج متشابهات $(+ +)$ ، $(- -)$

② (- ر) اذا كانت اشارة أ، ج مختلفات $(+ -)$ ، $(- +)$

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

مثال ⑦ تدريب ٣ ص ٢٣٣

اذا كان معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س ، ص هو (-٠.٨)
فجد معامل الارتباط بين $س'$ ، $ص'$ في كل مما يأتي .

١) $س' = ٢س - ٣$ ، $ص' = ص - ١$

٢) $س' = ٣ - ٢س$ ، $ص' = ٥ - ص$

٣) $س' = ١ - ٣س$ ، $ص' = -(٤ - ص)$

الحل

١) معامل س = + ، معامل ص = + } متشابهتان تتبعثر كما هي ← -٠.٨

٢) معامل س = - ، معامل ص = - } كما هي ← ر = -٠.٨

٣) معامل س = - ، معامل ص = + } تصبح ← ر = ٠.٨

مكتبة الوسام ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

الدرس السابع

الانحدار

١. معادلة خط الانحدار:

هي علاقة خطية تربط بين متغيرين وتستخدم في التنبؤ بقيمة احد المتغيرين اذا علمت قيمة معينة للمتغير الآخر

مثلاً

التنبؤ بمعدل الطالب اذا علم عدد ساعات الدراسة

٢. معادلة خط الانحدار

$\hat{ص} = ب + م س$

م: معامل س

ب: الحد الثابت

ولايجاد $\hat{ص}$ يجب معرفة قيمة م وقيمة ب

$م = \frac{ك(س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{ك(س - \bar{س})^2}$ حيث

$ب = \bar{ص} - م \bar{س}$

$\bar{س}$ الوسط الحسابي لقيم س

$\bar{ص}$ الوسط الحسابي لقيم ص

٣. الخطأ في التنبؤ = القيمة الحقيقية - القيمة المتنبأ بها

$= ص_ر - \hat{ص}_ر$

من الجدول من المعادلة

وهناك نوعان

موجب اذا كانت $ص_ر > \hat{ص}_ر$

سالب اذا كانت $ص_ر < \hat{ص}_ر$

مكتبة الوسام ALWESAM

مثال ①

اذا كان $\bar{س} = ٦$ ، $\bar{ص} = ١٨$

$\Sigma (س - \bar{س})(ص - \bar{ص}) = ٥٠$

$\Sigma (س - \bar{س})^٢ = ١٠$ جد معادلة الانحدار

الحل

$$ب = \frac{\Sigma (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\Sigma (س - \bar{س})^٢} = \frac{٥٠}{١٠} = \frac{٥}{٢}$$

$$ا = \bar{ص} - ب \bar{س}$$

$$= ١٨ - \frac{٥}{٢} \times ٦ = ١٨ - ١٥ = ٣$$

$\therefore$ معادلة الانحدار

$$\hat{ص} = ب س + ا$$

$$= \frac{٥}{٢} س + ٣$$

مثال ② بدريب ص ٣٩

يبين الجدول التالي عوامل الذكاء ومعدل التحصيل لستة طلاب

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥	٦
معدل الذكاء س	٩٥	١٠٦	١١٩	١١٣	١١٥	١٠٤
معدل التحصيل ص	٥٣	٦٢	٨٧	٧٥	٨٦	٩٣

١. جد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم ص اذا علمت قيم س

٢. قدّر معدل التحصيل المتنبأ به لطالب عامل ذكائه ١١٠

س	ص	$س - \bar{س}$	$ص - \bar{ص}$	$(س - \bar{س})(ص - \bar{ص})$	$(س - \bar{س})^٢$
٩٥	٥٣	١٧-	٢٣-	٣٩١	٢٨٩
١٠٦	٦٢	٦-	١٤-	٨٤	٣٦
١١٩	٨٧	٧	١١	٧٧	٤٩
١١٢	٧٥	١	١-	١-	١
١١٥	٨٦	٣	١٠	٣٠	٩
١٠٤	٩٣	١٢-	١٧	٢٠٤	١٤٤
٦٧٢	٤٥٦	٠	٠	٧٨٥	٥٢٨

$\bar{س} = \frac{٦٧٢}{٦} = ١١٢$ ، $\bar{ص} = \frac{٤٥٦}{٦} = ٧٦$

يتبع الحل ←

$$م = \frac{\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sum (س - \bar{س})^2}$$

$$= \frac{٧٨٥}{٥٢٨} = ١٫٥$$

$$ب = \bar{ص} - م\bar{س} = ٧٦ - ١٫٥ \times ١١٢$$

$$= ٧٦ - ١٦٨ = -٩٢$$

معادلة الانحدار هي

$$\hat{ص} = م س + ب$$

$$= ١٫٥ س - ٩٢$$

٢) معدل التحصيل المتنبأ به لطالب لعامل الذكاء ١١٠

عندما س = ١١٠ فان

$$ص = ١٫٥ \times ١١٠ - ٩٢ = ٧٣$$

مثال (٣) ص ، ع

يبين الجدول الاتي علامات خمس طلاب في مبحثي التاريخ والجغرافيا حيث النهاية العظمى للعلامة (٢٠) جد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم ص اذا علمت قيم س

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥
علامته في التاريخ س	١١	١٢	١٠	١٣	١٤
علامته في الجغرافيا ص	١٢	١٦	١٠	١٤	١٨

س	ص	س - س̄	ص - ص̄	(س - س̄)(ص - ص̄)	(س - س̄)²
١١	١٢	-١	-٢	٢	١
١٢	١٦	٠	٢	٠	٠
١٠	١٠	-٢	-٤	٨	٤
١٣	١٤	١	٠	٠	١
١٤	١٨	٢	٤	٨	٤
٦٠	٧٠	٠	٠	١٨	١٠

$$س̄ = \frac{٦٠}{٥} = ١٢ ، ص̄ = \frac{٧٠}{٥} = ١٤$$

$$م = \frac{\sum (س - س̄)(ص - ص̄)}{\sum (س - س̄)^2} = \frac{١٨}{١٠} = ١٫٨$$

$$ب = ص̄ - م س̄$$

$$= ١٤ - ١٫٨ \times ١٢ = ١٤ - ٢١٫٦$$

$$= -٧٫٦$$

معادلة الانحدار هي

$$\hat{ص} = م س + ب$$

$$= ١٫٨ س - ٧٫٦$$

مثال (٤) س٢ ص٤٢

يبين الجدول الآتي عدد المركبات المشتركة في حوادث السير في الاردن في الفترة ٢٠٠٠ - ٢٠٠٤ لكل ألف

السنة	٢٠٠٠	٢٠٠١	٢٠٠٢	٢٠٠٣	٢٠٠٤
رقم السنة (س)	١	٢	٣	٤	٥
عدد المركبات (ص)	٩٥	٩٦	٩٤	١١٧	١٣٣

أوجد

أ) معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم ص اذا علمت قيم س

ب) حد الخطأ في التنبؤ بعدد المركبات المشتركة في الحوادث اذا كان العدد الفعلي لعدد المركبات المشتركة في الحوادث (١١٧) الف مركبة

ج) استخدم معادلة خط الانحدار للتنبؤ بعدد المركبات المشتركة في الحوادث في الاردن عام ٢٠٠٦م

الحل

س	ص	س - س̄	ص - ص̄	(س - س̄)(ص - ص̄)	(س - س̄)٢
١	٩٥	-٢	-١٢	٢٤	٤
٢	٩٦	-١	-١١	١١	١
٣	٩٤	٠	-١٣	٠	٠
٤	١١٧	١	١٠	١٠	١
٥	١٣٣	٢	٢٦	٥٢	٤
١٥	٥٣٥	٠	٠	٩٧	١٠

س̄ = ١٥/٥ = ٣ ، ص̄ = ٥٣٥/٥ = ١٠٧

أ) ب = Σ(س - س̄)(ص - ص̄) / Σ(س - س̄)٢ = ٩٧/١٠ = ٩٫٧

أ = ص̄ - ب س̄ = ١٠٧ - ٩٫٧ × ٣ = ١٠٧ - ٢٩٫١ = ٧٧٫٩

معادلة خط الانحدار ص̂ = ٩٫٧ س + ٧٧٫٩

ب) عندما ص = ١١٧ ← س = ٤ من الجدول

ص̂ = ٩٫٧ × ٤ + ٧٧٫٩ = ١١٦٫٧

الخطأ في التنبؤ = ص - ص̂ = ١١٧ - ١١٦٫٧ = ٠٫٣

ج) عام ٢٠٠٦م تكون س = ٧

ص̂ = ٩٫٧ × ٧ + ٧٧٫٩ = ٦٧٫٩ + ٧٧٫٩ = ١٤٥٫٨

مثال ⑤ $\sum س^3$ $\sum ص^2$

اذا كان س، ص يمثلان رأس مال الشركة وأرباحها محددة بالاف الدنانير على الترتيب، وجمعت البيانات الاتية لخمس شركات:

$\sum س = ١٠$، $\sum ص = ١٢$، وكان

$\sum_{ر=١}^{٥} (س_ر - \bar{س})^2 = ١٠٠٠$

$\sum_{ر=١}^{٥} (س_ر - \bar{س})(ص_ر - \bar{ص}) = ٨٠$

أ) جد معادلة خط الانحدار الخطي البسيط للتنبؤ بقيم ص اذا علمت قيم س؟

ب) قدّر ربح شركة رأس مالها س = ١٠٠ الف دينار؟

الحل

$ب = \frac{\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sum (س - \bar{س})^2} = \frac{٨٠}{١٠٠٠}$

$= ٠٫٠٨$

$أ = \bar{ص} - ب\bar{س} = ١٢ - \frac{٨}{١٠٠} \times ١٠$

$= ١٢ - ٠٫٨ = ١١٫٢$

← معادلة الانحدار $\hat{ص} = ب س + أ$

$\hat{ص} = ٠٫٠٨ س + ١١٫٢$

ب) عندما س = ١٠٠ الف دينار

$\hat{ص} = \frac{٨}{١٠٠} \times ١٠٠ + ١١٫٢$

$= ٨ + ١١٫٢ = ١٩٫٢$ الف دينار

مثال ⑥ $\sum س^2$ $\sum ص^2$ المراجعة

يبين الجدول الآتي قيم المتغيرين س، ص

س	١	٢	٦	٧
ص	١٠	٨	٩	٥

جد

أ) معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س، ص

ب) معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم ص اذا علمت س؟

← يترك الحل

مكتبة الوسام ALWESAM

الحل

س	ص	س - س̄	ص - ص̄	(س - س̄)(ص - ص̄)	(س - س̄)²	(ص - ص̄)²
١	١٠	٣-	٢	٦-	٩	٤
٢	٨	٢-	٠	٠	٤	٠
٦	٩	٢	١	٢	٤	١
٧	٥	٣	٣-	٩-	٩	٩
١٦	٣٢	٠	٠	١٣-	٢٦	١٤

$\bar{س} = \frac{١٦}{٤} = ٤$ ، $\bar{ص} = \frac{٣٢}{٤} = ٨$

(أ) $ر = \frac{\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sqrt{\sum (س - \bar{س})^٢ \sum (ص - \bar{ص})^٢}}$

$= \frac{١٣-}{\sqrt{٢٦ \times ١٤}} = -٠.٩٥$

(ب) معادلة خط الانحدار $\hat{ص} = ب س + أ$

$ب = \frac{\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sum (س - \bar{س})^٢} = \frac{١٣-}{٢٦} = -٠.٥$

$أ = \bar{ص} - ب \bar{س}$

$= ٨ - (-٠.٥ \times ٤) = ٨ + ٢ = ١٠$

$\hat{ص} = -٠.٥ س + ١٠$

مثال (٧) $\hat{ص}$ ، $ص^٢$ المراجعة

توصل قسم الانتاج في مصنع ما إلى معادلة الانحدار الخطي البسيط للعلاقة بين عدد ساعات العمل اليومي (س) في المصنع ، وكمية الاستهلاك من الكهرباء بالكيلو واط/ساعة (ص) ، فكانت $\hat{ص} = ٠.٥ + ٣٠ س$ اعتمد على معادلة الانحدار في الاجابة عن الاسئلة الآتية :

(أ) استخرج من المعادلة قيم أ ، ب

(ب) قدر كمية الاستهلاك من الكهرباء اذا كانت ساعات العمل ليوم ما (٨) ساعات

الحل

أ) $\hat{ص} = ٠.٥ + ٣٠ س$

أ = الحد الثابت = ٠.٥

ب = معامل س = ٣٠

(ب) عندما عدد ساعات العمل = ٨

$\hat{ص} = ٠.٥ + ٣٠ \times ٨$

$= ٠.٥ + ٢٤٠ = ٢٤٩$

مثال (٨) س ٩ ص ٢٤٢

يبين الجدول الآتي نتائج دراسة اجريت لمعرفة تأثير عدد ساعات العمل المتواصل في دقة العمل ، من حيث الاخطاء التي يرتكبها الموظف

عدد ساعات العمل س	٨	٨	١٢	١٢	١٦	٢٠	٢٠	٢٤
عدد الاخطاء ص	٦	٦	٦	١٠	٨	١٢	١٠	١٦

أ) اسم شكل الانتشار بين المتغيرين س ، ص

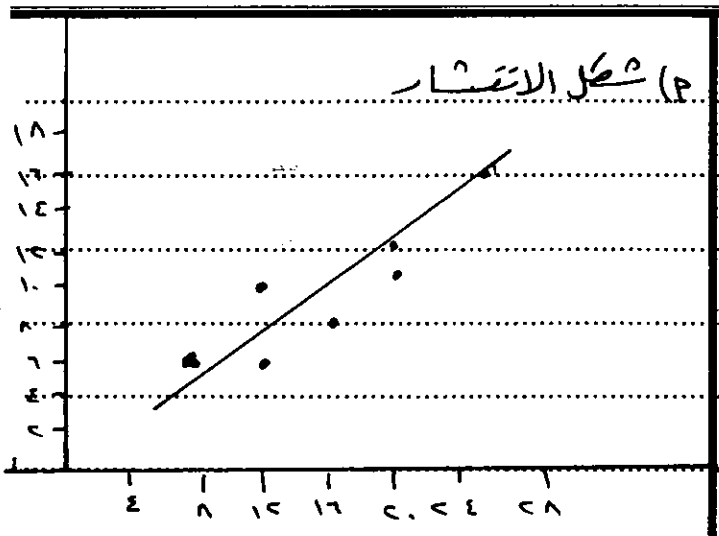
ب) هل تعتقد وجود علاقة خطية بين المتغيرين س ، ص ؟

ج) جد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم ص اذا علمت قيم س

د) قدّر عدد الاخطاء اذا كانت عدد ساعات العمل (١٠) ؟

هـ) جد الخطأ في التنبؤ لعدد ساعات العمل (١٦) ساعة .

أ) شكل الانتشار



ب) يوجد علاقة خطية وعلاقة طردية قوية

س	ص	س - س̄	ص - ص̄	(س - س̄)(ص - ص̄)	(س - س̄)²	(ص - ص̄)²
٨	٦	-٧	-٤	٢٨	٤٩	
٨	٦	-٧	-٤	٢٨	٤٩	
١٢	٦	-٣	-٤	١٢	٩	
١٢	١٠	-٣	٠	٠	٩	
١٦	٨	١	-٢	-٢	١	
٢٠	١٢	٥	٢	١٠	٢٥	
٢٠	١٦	٥	٦	٣٠	٢٥	
٢٤	١٦	٩	٦	٥٤	٨١	
١٢٠	٨٠	٠	٠	١٦٠	٢٤٨	

س̄ = ١٢٠ / ٨ = ١٥ ، ص̄ = ٨٠ / ٨ = ١٠

يتبع الحل

مكتبة السلام ALWSAM
المعلم ناجح الجمزاوي

$أ = \frac{\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sum (س - \bar{س})^2} = \frac{١٦٠}{٢٤٨} = ٠,٦٥$

$ب = \bar{ص} - أ \bar{س} = ١٠ - ٠,٦٥ \times ١٥$

$= ١٠ - ٩,٧٥ = ٠,٢٥$

معادلة الانحدار هي

$\hat{ص} = ٠,٦٥ س + ٠,٢٥$

د) عندما س = ١٠

فإن $\hat{ص} = ٠,٦٥ \times ١٠ + ٠,٢٥$

$= ٦,٥ + ٠,٢٥ = ٦,٧٥$

$\approx$ ٧ اخطاء

هـ) عندما س = ١٦

فإن $\hat{ص} = ٠,٦٥ \times ١٦ + ٠,٢٥$

$= ١٠,٤ + ٠,٢٥ = ١٠,٦٥$

الخطأ في التنبؤ = $ص - \hat{ص}$

$= ٨ - ١٠,٦٥ = -٢,٦٥$

مثال ⑨ س٤ ص٢٤٥ اختبار ذاتي

يبين الجدول الآتي عدد عقود البيع الشهرية (ص) التي أبرمها ستة من مندوبي مبيعات شركة ادوية وعدد خبرة كل منهم بالسنوات (س)

عدد سنوات الخبرة (س)	٤	٨	٥	٨	٧	١٠
عدد العقود المبرمة ص	٦	٦	٨	١٠	١٢	١٢

أ) جد معامل ارتباط بيرسون بين س، ص

ب) معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم ص اذا علمت س؟

ج) جد الخطأ في التنبؤ لعدد العقود المبرمة لمندوب مبيعات خبرته (١٠) سنوات

د) تنبأ بعدد العقود المبرمة لمندوب مبيعات خبرته (٧) سنوات

س	ص	$س - \bar{س}$	$ص - \bar{ص}$	$(س - \bar{س})(ص - \bar{ص})$	$(س - \bar{س})^2$	$(ص - \bar{ص})^2$
٤	٦	٣-	٣-	٩	٩	٩
٨	٦	١	٣-	٣-	١	٩
٥	٨	٢-	١-	٢	٤	١
٨	١٠	١	١	١	١	١
٧	١٢	٠	٣	٠	٠	٩
١٠	١٢	٣	٣	٩	٩	٩
٤٢	٥٤	٠	٠	١٨	٢٤	٣٨

مكتبة الوسام ALWESAM المعلم ناجي الجمزاوي

(أ) $ر = \frac{\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sqrt{\sum (س - \bar{س})^2 \times \sum (ص - \bar{ص})^2}}$

$= \frac{١٨}{\sqrt{٣٨ \times ٤٧}} = ٠٫٦$

(ب) معادلة الانحدار $\hat{ص} = ب س + ا$

$ب = \frac{\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sum (س - \bar{س})^2} = \frac{١٨}{٢٤} = ٠٫٧٥$

$ا = \bar{ص} - ب \bar{س} = ٩ - ٠٫٧٥ \times ٧$

$= ٩ - ٥٫٢٥ = ٣٫٧٥$

$\hat{ص} = ٠٫٧٥ س + ٣٫٧٥$

(ج) عندما $س = ١٠$

$\hat{ص} = ٠٫٧٥ \times ١٠ + ٣٫٧٥$

$= ٧٫٥ + ٣٫٧٥$

$= ١١٫٢٥$

(د) عندما $س = ٧$

$\hat{ص} = ٠٫٧٥ \times ٧ + ٣٫٧٥$

$= ٥٫٢٥ + ٣٫٧٥$

$= ٩$

مكتبة الوسام ALWESAM

المعلم: ناجح الجمزاوي

اسئلة الوزارة

① وزارة (٢٠٠٨) شتوية

١. يحصل باحث تربوي على معادلة الانحدار البسيط للعلاقة بين عدد ساعات الدراسة (س) والمعدل في الثانوية العامة (ص) فكانت

$\hat{ص} = ٣س + ٦٥$

ⓐ ما قيمة كل من $أ$ ، $ب$ ؟

ⓑ درست طالبة (٨) ساعات يوميًا وحصلت على معدل (٨٦) ، احسب الخطأ في التنبؤ للمعدل الذي حصلت عليه الطالبة وعلقت على معادلة خط الانحدار المحطاه

الحل

ⓐ $أ = ٣$ $\quad ب = ٦٥$

ⓑ $\hat{ص} = ٣س + ٦٥$

$= ٣ \times ٨ + ٦٥ = ٢٤ + ٦٥$

$= ٨٩$

الخطأ في التنبؤ = القيمة الحقيقية − القيمة المتنبأ بها

$= ٨٦ - ٨٩ = -٣$

٢.

اذا كان س ، ص متغيرين وعدد قيم كل منهما (٨) وكان

$\sum (س - \bar{س})^٢ = ١٢٨$ ، $\sum (ص - \bar{ص})^٢ = ٢٠٠$

$\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص}) = ١٢٠$

اوجد معامل ارتباط بيرسون

الحل

$$ر = \frac{\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sqrt{\sum (س - \bar{س})^٢ \times \sum (ص - \bar{ص})^٢}}$$

$$= \frac{١٢٠}{\sqrt{١٢٨ \times ٢٠٠}} = \frac{١٢٠}{١٦٠}$$

$= ٠,٧٥$

مكتبة الوسام AL WESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

② وزاره (٢٠٠٨) صيفيه

١. يمثل الشكل المجاور شكل الانتشار بين المتغيرين س ، ص

ما هي اقرب قيمة لمعامل الارتباط بين المتغيرين س ، ص

ا ، ب = ١ ، ٠.٨ - لا ، لا ، لا ،

٢. اذا كان س ، ص يمثلان متغيرين عدد قيم كل منهما (٥) وكان :

س = ٥ ، ص = ٧٥ ، م = ٣

① جد معادلة خط الانحدار

② جد الخطأ في التنبؤ اذا كانت س = ٨ وقيمة ص الحقيقية المناظرة لها (٨٤)

الحل

① م = ٣ ، ب = ص - م س

= ٧٥ - (٥ × ٣)

= ٧٥ - ١٥ = ٦٠

ص^ = ٣ س + ٦٠

② القيمة المتنبأ بها عندما س = ٨ هي

ص^ = (٣ × ٨) + ٦٠ = ٨٤

الخطأ في التنبؤ = القيمة الحقيقية - القيمة المتنبأ بها

= ٨٤ - ٨٤ = ٠

③ وزارة (٢٠٠٩) شتوية

يبين الجدول الآتي علامات خمسة طلاب في مبحثي الرياضيات (س) والعلوم (ص) في امتحان قصير نهايته العظمى (١٠)

① انقل الجدول الى دفترك ثم اكمل الاعمدة الواردة فيه

② معتمداً على الجدول احسب معامل ارتباط بيرسون

س	ص	س - س̄	ص - ص̄	(س - س̄)(ص - ص̄)	(س - س̄)²	(ص - ص̄)²
٦	٥	١	١	١	١	١
٧	٦	٢	٢	٤	٤	٤
٥	٤	٠	٠	٠	٠	٠
٢	١	-٢	-٣	٦	٤	٩
٤	٤	-١	٠	٠	١	٠
٢٥	٢٠	٠	٠	١١	١٠	١٤

← يتبع الحل

معامل ارتباط بيرسون = ر

$$= \frac{\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sqrt{\sum (س - \bar{س})^2 \times \sum (ص - \bar{ص})^2}}$$

$$= \frac{11}{\sqrt{14 \times 10}} = 0.93$$

(٤) وزارة (٢٠١٩) صيفية

١. معتمداً على المعلومات الواردة في الجدول الآتي حد معامل ارتباط بيرسون

س	ص	س - $\bar{س}$	ص - $\bar{ص}$	(س - $\bar{س}$)(ص - $\bar{ص}$)	$(س - \bar{س})^2$	$(ص - \bar{ص})^2$
٣	١٠	-٢	٢	-٤	٤	٤
٤	٩	-١	١	-١	١	١
٥	٧	٠	-١	٠	٠	١
٦	٨	١	٠	٠	١	٠
٧	٦	٢	-٣	-٤	٤	٤
				-٩	١٠	١٠

$$ر = \frac{\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sqrt{\sum (س - \bar{س})^2 \times \sum (ص - \bar{ص})^2}} = \frac{-9}{\sqrt{10 \times 10}}$$

$$= -0.9$$

٢. يبين الجدول الآتي علامات ٦ طلاب في امتحاني العلوم (س) والرياضيات (ص)، جد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم (ص) اذا علمت قيم (س)

س	ص	س - $\bar{س}$	ص - $\bar{ص}$	(س - $\bar{س}$)(ص - $\bar{ص}$)	$(س - \bar{س})^2$
٦	٩	١	٢	٢	١
٤	٨	-١	١	-١	١
٨	١٠	٣	٣	٩	٩
٧	٨	٢	١	٢	٤
٢	٥	-٣	-٢	٦	٩
٣	٢	-٢	-٥	١٠	٤
٣٠	٤٢			٢٨	٢٨

$$\bar{س} = \frac{30}{6} = 5 \qquad \bar{ص} = \frac{42}{6} = 7$$

$$ب = \frac{\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sum (س - \bar{س})^2} = \frac{28}{28} = 1$$

$$ا = \bar{ص} - ب\bar{س} = 7 - 1 \times 5 = 2$$

$$\hat{ص} = ب س + ا$$

$$= س + 2$$

⑤ وزارة (٢٠١٠) شتوية

١. اذا كانت س، ص متغيرين عدد قيم كل منهما (١٠)، وكان $\sum (س - ت)^2 = ٨١$

$\sum (ص - ص)^2 = ٤٠٠$

$\sum (س - ت)(ص - ص) = ١٣٥$

احسب معامل ارتباط بيرسون

الحل

$$ر = \frac{\sum (س - ت)(ص - ص)}{\sqrt{\sum (س - ت)^2 \times \sum (ص - ص)^2}}$$

$$= \frac{١٣٥}{\sqrt{٨١ \times ٤٠٠}} = \frac{١٣٥}{٩ \times ٢٠}$$

$$= ٠٫٧٥$$

٢. مجتمعاً الجدول التالي يبين (س) عدد ساعات الدراسة اليومية لخمسة طلاب (ص) علامة كل منهم في امتحان ما

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥
عدد ساعات الدراسة (س)	٣	٤	٧	٥	١
العلامة ص	١٤	١٦	٢٠	١١	٩

أكتب معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم (ص) اذا علمت قيم (س)

س	ص	س - ت	ص - ص	(س - ت)(ص - ص)	$(س - ت)^2$
٣	١٤	-١	٠	٠	١
٤	١٦	٠	٢	٠	٠
٧	٢٠	٣	٦	١٨	٩
٥	١١	١	-٣	-٣	١
١	٩	-٣	-٥	١٥	٩
٢٠	٧٠			٣٠	٢٠

$س = \frac{٢٠}{٥} = ٤$ ، $ص = \frac{٧٠}{٥} = ١٤$

$$ب = \frac{\sum (س - ت)(ص - ص)}{\sum (س - ت)^2} = \frac{٣٠}{٢٠} = ١٫٥$$

$أ = ص - ب س = ١٤ - ١٫٥ \times ٤ = ٨$

$ص = ب س + أ$

$= ١٫٥ س + ٨$

مكتبة الوسام العلمية Alwesam

⑥ وزارة (٢٠١٠) صيفية

اه يبين الجدول المجاور علامات (٥) طلاب في مبحثي الفيزياء والجغرافيا في امتحان وصية البداية العظمى له (١٠) احسب معامل ارتباط بيرسون

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥
الفيزياء (س)	٢	٥	٣	٦	٤
الجغرافيا (ص)	٥	٦	٣	٧	٩

س	ص	س - س̄	ص - ص̄	(س - س̄)(ص - ص̄)	(س - س̄)²	(ص - ص̄)²
٢	٥	-٢	-١	٢	٤	١
٥	٦	١	٠	٠	١	٠
٣	٣	-١	-٣	٣	١	٩
٦	٧	٢	١	٢	٤	١
٤	٩	٠	٣	٠	٠	٩
٢٠	٣٠			٧	١٠	٢٠

$\bar{س} = \frac{٢٠}{٥} = ٤$ ، $\bar{ص} = \frac{٣٠}{٥} = ٦$

$ر = \frac{٧}{\sqrt{١٠ \times ٢٠}} = \frac{٧}{\sqrt{٢٠٠}} = ٠.٥$

٧٠ في دراسة اجراها احد طلبة الدراسات العليا توصل الى معادلة خط الانحدار الخطي للعلاقة بين ساعات الدراسة (س) والمعدل التحصيلي (ص) لطلبة احدى الجامعات فكانت $\hat{ص} = ٥٣ + ٥س$ ، والمعدل معادلة خط الانحدار - اجب عما يأتي لهذه البيانات

① جد قيمة $\hat{ص}$ ، $\hat{س}$

② قدر معدل طالب اذا كانت ساعات الدراسة لهذا الطالب (٥) ساعات

③ اذا كانت معدل طالب $\hat{س}$ (٨) ساعات تقريبا جد (٩٥) جد الخطأ في التنبؤ.

الحل

① $ب = ٥$ ، $ا = ٥٣$

② $\hat{ص} = ٥٣ + ٥س$

$= ٥ \times ٥ + ٥٣ = ٧٨$

③ الخطأ في التنبؤ = القيمة الحقيقية - القيمة المتنبأ بها

القيمة المتنبأ بها $\hat{ص} = ٥ \times ٨ + ٥٣ = ٩٢$

الخطأ في التنبؤ $= ٩٥ - ٩٢ = ٣$

(٧) وزارة (٢٠١١) شتوية

١. يبين الجدول الآتي علامات ثلاثة طلاب في فحصي الرياضيات والعلوم في اختبار قصير. أكمل الجدول كما حصائل ارتباط بيرسون

س	ص	س - س̄	ص - ص̄	(س - س̄)(ص - ص̄)	(س - س̄)²	(ص - ص̄)²
٢	٤	٠	١	٠	٠	١
١	٢	-١	-١	١	١	١
٣	٣	١	٠	٠	١	٠
٦	٩	٠	٠	١	٢	٢

$$ر = \frac{\sum (س - س̄)(ص - ص̄)}{\sqrt{\sum (س - س̄)^2 \times \sum (ص - ص̄)^2}} = \frac{١}{\sqrt{٤ \times ٤}}$$

$$= \frac{١}{٤} = \frac{١}{٤}$$

٢. اذا علمت ان معادلة خط الانحدار البسيط للعلاقة بين عدد ساعات العمل اليومي (س) وعدد الأخطاء (ص) التي يرتكبها موظف في يوم واحد هي: $\hat{ص} = ٠.٦ س + ١$ ، احسب:

ملاك المعادلة اجب عما يأتي

① تنبأ بعدد الاخطاء التي يرتكبها موظف يعمل ١٠ ساعات في اليوم

② اذا كان عدد الاخطاء التي يرتكبها موظف يعمل (١٥) ساعة في اليوم هي (٦) اخطاء فجد الخطأ في التنبؤ

اكل

$\hat{ص} = ٠.٦ س + ١$

① $\hat{ص} = ٠.٦ \times ١٠ + ١ = ٦ + ١ = ٧$

② $\hat{ص} = ٠.٦ \times ١٥ + ١ = ٩ + ١ = ١٠$

القيمة المتنبأ بها

الخطأ في التنبؤ = ٦ - ١٠ = -٤

= القيمة الحقيقية - القيمة المتنبأ بها

مكتبة الوسام ALWESAM

⑧ وزاره (٢٠١١) صيفيه

١. الجدول الآتي يبين علامات خمسة طلاب في مبحثي الرياضيات (س) والتاريخ (ص) في امتحان ضمن النهايه العظمى لـ (١٠)، احسب معامل ارتباط بيرسون بين س، ص:

الرياضيات (س)	٨	٦	٤	٦	٦
التاريخ (ص)	٤	٥	٥	٧	٤

الحل

س	ص	$س - \bar{س}$	$ص - \bar{ص}$	$(س - \bar{س})(ص - \bar{ص})$	$(س - \bar{س})^2$	$(ص - \bar{ص})^2$
٨	٤	٢	-١	-٢	١	٤
٦	٥	٠	٠	٠	٠	٠
٤	٥	-٢	٠	٠	٤	٠
٦	٧	٠	٢	٠	٠	٤
٦	٤	٠	-١	٠	٠	١
٣٠	٢٥			-٢	٦	٨

$\bar{س} = \frac{٣٠}{٥} = ٦$ $\quad \bar{ص} = \frac{٢٥}{٥} = ٥$

$$ر = \frac{\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sqrt{\sum (س - \bar{س})^2 \times \sum (ص - \bar{ص})^2}}$$

$$= \frac{-٢}{\sqrt{٦ \times ٨}} = \frac{-٢}{\sqrt{٤٨}}$$

٢. اذا كان س، ص متغيرين عدد قيم كل منهما (٥)، وكان

$\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص}) = ٨٠$

$\sum (س - \bar{س})^2 = ٤٠$ ، $\bar{س} = ٦$ ، $\bar{ص} = ١٣$

جد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم ص اذا علمت قيم س

الحل

$$ب = \frac{\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sum (س - \bar{س})^2} = \frac{٨٠}{٤٠} = ٢$$

$$أ = \bar{ص} - ب \bar{س} = ١٣ - ٢ \times ٦$$

$$= ١٣ - ١٢ = ١$$

$$\hat{ص} = ب س + أ$$

$$= ٢ س + ١$$

⑨ وزارة (٢٠١٢) شتوية

١. أكمل الجدول الآتي لحساب معامل ارتباط بيرسون

س	ص	س − س̄	ص − ص̄	(س − س̄)(ص − ص̄)	(س − س̄)²	(ص − ص̄)²
٣	٦	−٢	−١	٢	٤	١
٥	٥	٠	−٢	٠	٠	٤
٦	٩	١	٢	٢	١	٤
٧	٨	٢	١	٢	٤	١
٤	٧	−١	٠	٠	١	٠
				٦	١٠	١٠

$$ر = \frac{\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sqrt{\sum (س - \bar{س})^2 \times \sum (ص - \bar{ص})^2}} = \frac{٦}{\sqrt{١٠ \times ١٠}} = \frac{٦}{١٠}$$

٢. استخدم المعلومات في الجدول الذي لإيجاد معادلة خط الانحدار الخطي البسيط بين المتغيرين س ، ص

س	ص	س − س̄	ص − ص̄	(س − س̄)(ص − ص̄)	(س − س̄)²
٥	٦	−٣	−٢	٦	٩
٦	٧	−٢	−١	٢	٤
٧	٨	−١	٠	٠	١
٨	٩	٠	١	٠	٠
١٤	١٠	٦	٢	١٢	٣٦
٤٠	٤٠	٠	٠	٢٠	٥٠

معادلة الانحدار: $\hat{ص} = ب + م س$

$$م = \frac{\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sum (س - \bar{س})^2} = \frac{٢٠}{٥٠} = \frac{٢}{٥} = ٠.٤$$

$$\bar{س} = \frac{٤٠}{٥} = ٨ \qquad \bar{ص} = \frac{٤٠}{٥} = ٨$$

$$ب = \bar{ص} - م \bar{س} = ٨ - \frac{٢}{٥} \times ٨ = \frac{٤٠}{٥}$$

المعادلة:

$$\hat{ص} = \frac{٢}{٥} س + \frac{٤٠}{٥}$$

مكتبة الوسام
AL WISSAM
المعلم ناجح الجمزاوي

(١٠) وزارة (٢٠١٢) دورة صيفية

١. أكمل الجدول المجاور لحساب معامل ارتباط بيرسون

س	ص	س - س̄	ص - ص̄	(س - س̄)(ص - ص̄)	(س - س̄)²	(ص - ص̄)²
٨	٦	١	٠	٠	١	٠
٧	٥	٠	-١	٠	٠	١
٦	٧	-١	١	-١	١	١
٩	٨	٢	٢	٤	٤	٤
٥	٤	-٢	-٢	٤	٤	٤
		٠		٧	١٠	١٠

$$\text{ر} = \frac{\sum (س - س̄)(ص - ص̄)}{\sqrt{\sum (س - س̄)^2 \times \sum (ص - ص̄)^2}}$$

$$= \frac{٧}{\sqrt{١٠ \times ١٠}} = \frac{٧}{١٠} = ٠.٧$$

٢. اذا كان س، ص يمثلان علامات ستة طلاب في مبحثي العلوم والرياضيات وكان س̄ = ٧، ص̄ = ٩ وكان

$\sum (س - س̄)(ص - ص̄) = ١٦$

$\sum (س - س̄)^2 = ٨$

نجد معادلة الانحدار الخطي البسيط للتنبؤ بقيم ص اذا علمت قيم س

الحل

$\hat{ص} = ب س + ا$

$ب = \frac{\sum (س - س̄)(ص - ص̄)}{\sum (س - س̄)^2} = \frac{١٦}{٨} = ٢$

$ا = ص̄ - ب س̄ = ٩ - ٢ \times ٧ = -٥$

المعادلة هي

$\hat{ص} = ٢ س - ٥$

مكتبة الوسام AL-WESAM المعلم ناجح الجمزاوي

(١١) وزارة (٢٠١٣) شتوية

١. اذا علمت ان معادلة الانحدار الخطي البسيط للعلاقة بين رأس مال (س) والارباح السنوية (ص) مقدرة بالاف الدنانير لمجموعة شركات هي $\hat{ص} = ٣و٠س + ١٠$، معتمداً على هذه المعادلة جد الخطأ في التنبؤ لارباح شركة رأس مالها (٦٠) الف دينار وارباحها السنوية (٤و٧) الف دينار

الحل نجد قيمة $\hat{ص}$ عند س = ٦٠

$\hat{ص} = ٣و٠ \times ٦٠ + ١٠ = ١٨ + ١٠$

$= ٢٨$

الخطأ في التنبؤ = القيمة الحقيقية − القيمة المتنبأ بها

$= ٤و٧ - ٢٨$

$= -٢٠٦$ الف دينار

٢. جد معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س ، ص في الجدول التالي

س	٧	٦	٩	١٠	٨
ص	٨	٧	١٠	٨	١٢

الحل

س	ص	س − س̄	ص − ص̄	(س − س̄)(ص − ص̄)	(س − س̄)²	(ص − ص̄)²
٧	٨	١-	١-	١	١	١
٦	٧	٢-	٢-	٤	٤	٤
٩	١٠	١	١	١	١	١
١٠	٨	٢	١-	٢-	٤	١
٨	١٢	٠	٣	٠	٠	٩
٤٠	٤٥			٤	١٠	١٦

س̄ = ٤٠/٥ = ٨ ، ص̄ = ٤٥/٥ = ٩

ر = ٤ / √(١٠ × ١٦) = ٤ / ١٢٦٤ = ١ / ٣ = ٠و٣

مكتبة الوسام AWSAM المعلم: ناجح الجمزاوي

(١٢) وزارة (٢٠١٣) صيفية

١. اذا كان س ، ص متغيرين عدد قيم كل منهما (١٢) وكانت $\bar{س} = ١٠$

$\bar{ص} = ١٥$

$\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص}) = ١٦$

$\sum (س - \bar{س})^٢ = ٢٠$

اوجد معادلة خط الانحدار

الحل

$\hat{ص} = ب س + ا$

$ب = \frac{\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sum (س - \bar{س})^٢} = \frac{١٦}{٢٠}$

$= \frac{٨}{١٠} = ٠.٨$

$ا = \bar{ص} - ب \bar{س} = ١٥ - ٠.٨ \times ١٠$

$= ١٥ - ٨ = ٧$

$\hat{ص} = ب س + ا$

$= ٠.٨ س + ٧$

٢. يبين الجدول الاتي علامات خمسة طلاب في مبحثي الرياضيات والعلوم حيث الدهاية العظمى للعلامة (٢٠) اجب فصائل ارتباط بيرسون

علامة الرياضيات (س)	١٠	١٦	١٢	١٤	٨
علامة العلوم (ص)	١٢	١٤	١٦	١٨	١٠

الحل

س	ص	$س - \bar{س}$	$ص - \bar{ص}$	$(س - \bar{س})(ص - \bar{ص})$	$(س - \bar{س})^٢$	$(ص - \bar{ص})^٢$
١٠	١٢	-٢	-٢	٤	٤	٤
١٦	١٤	+٤	٠	٠	١٦	٠
١٢	١٦	٠	٢	٠	٠	٤
١٤	١٨	٢	٤	٨	٤	١٦
٨	١٠	-٤	-٤	١٦	١٦	١٦
٦٠	٦٠	٠	٠	٢٨	٤٠	٤٠

$\bar{س} = \frac{٦٠}{٥} = ١٢$ $\quad \bar{ص} = \frac{٧٠}{٥} = ١٤$

$ر = \frac{٢٨}{\sqrt{٤٠ \times ٤٠}} = \frac{٢٨}{٤٠} = ٠.٧$

الوسام التعليمي AL WESAM

(١٣) وزارة (٢٠١٤) شتوية

١. اذا كان س ، ص متغيرين عدد قيم كل منهما (١٠) وكان

$\sum (س - \bar{س})^2 = ٦٤$

$\sum (ص - \bar{ص})^2 = ١٠٠$

$\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص}) = -٤٨$

اوجد معامل ارتباط بيرسون

الحل

$$ر = \frac{\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sqrt{\sum (س - \bar{س})^2 \times \sum (ص - \bar{ص})^2}}$$

$$= \frac{-٤٨}{\sqrt{١٠ \times ٦٤}} = \frac{-٤٨}{\sqrt{٦٤٠}} = \frac{-٤٨}{٨ \times ١٠} = -٠.٦$$

٢. اذا مثلت العلاقة بين المتغيرين س ، ص في شكل الانتشار المجاور حيث وقعت جميع النقاط على خط مستقيم أكتب قيمة معامل الارتباط

ر = ١ طردي تام

٣. يبين الجدول الآتي عدد سنوات الخبرة (س) والاجر اليومي (ص) بالدينار لعينة عمال في احدى الشركات الصناعية

عدد سنوات الخبرة (س)	٥	٦	٩	٧	٣
الاجر اليومي بالدينار (ص)	١٦	١٨	٢٢	١٣	١١

جد معادلة خط الانحدار

س	ص	$س - \bar{س}$	$ص - \bar{ص}$	$(س - \bar{س})(ص - \bar{ص})$	$(س - \bar{س})^2$
٥	١٦	-١	٠	٠	١
٦	١٨	٠	٢	٠	٠
٩	٢٢	٣	٦	١٨	٩
٧	١٣	١	-٣	-٣	١
٣	١١	-٣	-٥	١٥	٩
٣٠	٨٠			٣٠	٢٠

$\bar{س} = \frac{٣٠}{٥} = ٦$ $\quad \bar{ص} = \frac{٨٠}{٥} = ١٦$

$ب = \frac{\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sum (س - \bar{س})^2} = \frac{٣٠}{٢٠} = ١.٥$

$ا = \bar{ص} - ب\bar{س} = ١٦ - ١.٥ \times ٦$

$= ١٦ - ٩ = ٧$

$\hat{ص} = ا + ب س = ٧ + ١.٥ س$

(١٤) وزارة (٢٠١٤) صيفية

١. اذا كانت معادلة خط الانحدار البسيط للعلاقة بين عدد ساعات الدراسة اليومية (س) والمعدل التحصيلي (ص) لطلبة احدى الجامعات هي $\hat{ص} = ٤س + ٥٢$، فجد على ضوء المعادلة حد الخطأ في التنبؤ للمعدل الذي حصل عليه طالب درس (٦) ساعات يوميا وحصل على معدل (٧٨).

الحل

العلاقة المتنبأ بها $\hat{ص} = ٤ \times ٦ + ٥٢$

$= ٢٤ + ٥٢ = ٧٦$

الخطأ في التنبؤ

= العلامة الحقيقية - العلامة المتنبأ بها

$= ٧٨ - ٧٦ = ٢$

٢. يبين الجدول الآتي علامات خمسة طلاب في مبحث الرياضيات (س)، والعلوم (ص) في امتحان وصيي نهايته العظمى (٢٠) جد معامل ارتباط بيرسون (ر).

الرياضيات س	٦	١٥	٩	١٨	١٢
العلوم (ص)	١٢	١٤	٨	١٧	١٩

الحل

س	ص	$س - \bar{س}$	$ص - \bar{ص}$	$(س - \bar{س})(ص - \bar{ص})$	$(س - \bar{س})^2$	$(ص - \bar{ص})^2$
٦	١٢	-٦	-٢	$+١٢$	٣٦	٤
١٥	١٤	٣	٠	٠	٩	٠
٩	٨	-٣٠	-٦	$+١٨$	٩	٣٦
١٨	١٧	٦	٣	١٨	٣٦	٩
١٢	١٩	٠	٥	٠	٠	٢٥
٦٠	٧٠			٤٨	٩٠	١١٠

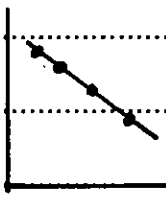
$\bar{س} = \frac{٦٠}{٥} = ١٢$ $\quad \bar{ص} = \frac{٧٠}{٥} = ١٤$

$$ر = \frac{\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sqrt{\sum (س - \bar{س})^2 \times \sum (ص - \bar{ص})^2}} = \frac{٤٨}{\sqrt{٩٠ \times ١١٠}}$$

$$= \frac{٤٨}{\sqrt{٩٩٠٠}} = \frac{٤٨}{١١٧}$$

(١٥) وزارة (٢٠١٥) شتوية

١. اذا مثلت العلاقة بين المتغيرين س ، ص في شكل الانتشار المجاور حيث وقعت النقاط جميعها على خط وتقيم البيانات حسب معامل الارتباط



الحل

ر = -١ (عكسي تام)

٢. يبين الجدول الآتي علامات (٥) طلاب في مبحثي الرياضيات (س) واللغة العربية (ص) حيث النهاية العظمى للعلامة تساوي (١٠) جد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم (ص) اذا علمت قيم س .

الرياضيات (س)	٦	٩	٧	٨	١٠
اللغة العربية (ص)	٨	١٠	٩	١٠	٨

الحل

س	ص	س - س̄	ص - ص̄	(س - س̄)(ص - ص̄)	(س - س̄)²
٦	٨	-٢	-١	٢	٤
٩	١٠	١	١	١	١
٧	٩	-١	٠	٠	١
٨	١٠	٠	١	٠	٠
١٠	٨	٢	-١	-٢	٤
٤٠	٤٥			١	١٠

س̄ = ٤٠/٥ = ٨ ، ص̄ = ٤٥/٥ = ٩

ب = ١/١٠ = ٠,١

أ = ص̄ - ب س̄ = ٩ - ٠,١ × ٨ = ٩ - ٠,٨ = ٨,٢

ص = ب س + أ = ٠,١ س + ٨,٢

٣. اذا كان س ، ص متغيرين عددقيم كل منهما (١٥) وكان مجـ (س - س̄)² = ٤٠

مجـ (ص - ص̄)² = ٩٠ ، مجـ (س - س̄)(ص - ص̄) = ٢٤

اوجد معامل ارتباط بيرسون

الحل : ر = ٢٤ / √(٤٠ × ٩٠) = ٢٤ / √٣٦٠٠ = ٢٤/٦٠

تمت

بحمد الله

٢٠١٤ / ٢٠١٥

مع تحيات

الاستاذ ناجح الجمزاوي

مكتبة الوسام
ALWESAM
المعلم: ناجح الجمزاوي

٠٧٨٨٦٥٦٠٥٧

٠٧٩٥٦٥٦٨٨١