المملكة الأردنية الهاشمية
وزارة التربية والتعليم

مديرية التربية والتعليم للواء عين الباشا

مدرسة البقعة الثانوية للبنيـــــن

المبحث : الرياضيـــــات

الفرع العلمي

امتحان نهاية المستوى الثالث

٢٠١٦/٢٠١٧

مديرية التربية و التعليم للواء عين الباشا

امتحان نهاية الفصل الدراسي الأول للصف الثاني الثانوي العلمي لعام ٢٠١٧

المبحث : الرياضيات / المستوى الثالث — مدة الامتحان : ساعتان

الفرع : العلمي — التاريخ : / ١٢ / ٢٠١٦

السؤال الأول (٢١ علامة)

(أ) جد كلاً مما يأتي :

① $\lim_{س \to \frac{\pi}{3}} \frac{س\,ظا^2 س - ٣س}{٣س - \pi}$ (٧ علامات)

② $\lim_{س \to -٢} \frac{(س+١)^4 - ٢س - ٥}{٣س - (س^2 + ٢س + ١)^3 + ٧}$ (٦ علامات)

(ب) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \frac{س^2 \left[\frac{٣س+١}{٢} \right] - ١}{٢س - |١ - ٢س| - ٢} & ،\ س < ١ \\ ٣أ\,س \sqrt{س+٣} & ،\ س \geq ١ \end{cases}$

جد قيمة الثابت (أ) التي تجعل ق(س) متصلاً عند س = ١

(٨ علامات)

السؤال الثاني (٢١ علامة)

(أ) إذا كان ق(س) = $س^3 + ٢س^2$ ، هـ(س) = أ ظاس

وكان $(ق \circ هـ)'(\frac{\pi}{4}) = ٤$ ، جد قيمة (قيم) الثابت أ (٨ علامات)

(ب) إذا كانت ٢س − أص + ب = ٠ تمثل معادلة المماس لمنحنى

الاقتران ق(س) = $س^2 - ٦س + ١$ ، علماً بأن هذا

المماس يوازي المستقيم الذي معادلته ٢ص − س = ١ (٧ علامات)

جد قيمتي الثابتين أ ، ب .

(جـ) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \frac{جا^2(س-١)}{س^2-١} & ،\ س \neq ١ \\ صفر & ،\ س = ١ \end{cases}$ جد ق′(١)

(٦ علامات)

السؤال الثالث (19 علامة)

أ) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \sqrt{س} & ، س \geq 1 \\ \dfrac{-2}{س-3} & ، س < 1 \end{cases}$ (7 علامات)

جد ق$'$(1) باستخدام التعريف العام للمشتقة.

ب) إذا كانت سرعة جسم بدلالة المسافة (ف) تعطى بالعلاقة:

$ع^2 = \sqrt{ف} - 2ع$ ، ع $\neq$ 0 (ع: السرعة) ، ف > 0 ، جد تسارع الجسم عندما يقطع مسافة قدرها (9) م. (6 علامات)

ج) إذا كان ق(س) = جتا س ، وتغيرت قيمة س من (أ) إلى (π − أ) ، اثبت أن متوسط التغير في الاقتران ق(س) يساوي $\left(\dfrac{2\,جتا\,أ}{\pi}\right)$. (6 علامات)

السؤال الرابع (15 علامة)

أ) إذا كان |س| $\leq$ 2 ، اثبت باستخدام القيم القصوى أن:

$|3س - س^3| \leq 2$. (5 علامات)

ب) إذا كان:

$\sqrt{س}$ = ق($ص^2$ + 3ص) ، وكانت $\lim\limits_{س \to 10} \dfrac{ق(10) - ق(س)}{10 - س} = 8$

جد $\dfrac{دص}{دس}$ عندما ص = 2. (5 علامات)

ج) إذا كانت س + 1 = ظا ص ، اثبت أن:

ص$''$ − ص$'$ = قا ص (ظا ص قا ص − 1)

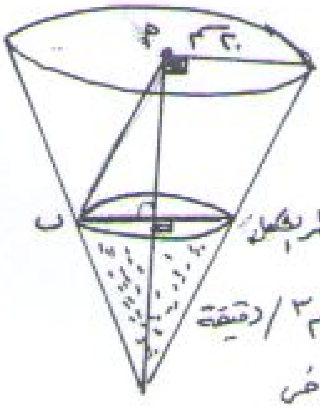
(5 علامات)

السؤال الخامس (٢٤ علامة)

أ) إذا كان ق(س) = { $\sqrt[3]{س^2 - ٢س}$ ، ٠ ≤ س < ٤ ؛ ١٠ - $س^2$ ، ٤ ≤ س < ٧ } (٨ علامات)

جد ① الفترة (الفترات) التي يكون فيها ق(س) متناقصاً.

② القيم القصوى المحلية والمطلقة وحدد نوعها للاقتران ق(س) (٨ علامات)



ب) إناء على شكل مخروط دائري قائم رأسه للأسفل وقاعدته للأعلى، طول نصف قطر قاعدته (٢٠) سم وارتفاعه ثلاثة أمثال طول نصف قطر قاعدته (انظر الشكل) يدخل إليه الماء من أعلى بمعدل ٢ $سم^3$/دقيقة جد معدل التغير في طول $\overline{أب}$ وذلك في اللحظة التي يكون فيها ارتفاع الماء في الإناء (١٠) سم. (٨ علامات)

جـ) قطاع دائري زاويته المركزية قياسها (هـ) راديان وطول نصف قطر دائرته ($\sqrt{٥٧}$) سم، حُوِّل إلى مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته (نق) وارتفاعه (ع)، جد قيمة (هـ) التي تجعل حجم المخروط أكبر ما يمكن.

(٨ علامات)

انتهت الأسئلة

لجنة الرياضيات

س١) أ) جد كلاً مما يأتي

١) $\displaystyle\lim_{\text{س}\to\frac{\pi}{3}} \frac{\text{س ظا}^2\text{س} - 3\text{س}}{3\text{س} - \pi}$ ، $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$= \displaystyle\lim_{\text{س}\to\frac{\pi}{3}} \frac{\text{س}\,(\text{ظا}^2\text{س} - 3)}{3\,(\text{س} - \frac{\pi}{3})}$

ظا $\frac{\pi}{3}$

$= \displaystyle\lim_{\text{س}\to\frac{\pi}{3}} \frac{\text{س}\,(\text{ظا س} + \sqrt{3})\,(\text{ظا س} - \sqrt{3})}{3\,(\text{س} - \frac{\pi}{3})}$

$= \frac{\pi}{3} \cdot \frac{(\text{ظا}\frac{\pi}{3} + \sqrt{3})}{3} \times \displaystyle\lim_{\text{س}\to\frac{\pi}{3}} \frac{\text{ظا س} - \text{ظا}\frac{\pi}{3}}{\text{س} - \frac{\pi}{3}}$

لكن : $\text{ظا}(\text{أ} - \text{ب}) = \frac{\text{ظا أ} - \text{ظا ب}}{1 + \text{ظا أ ظا ب}}$

بالضرب التبادلي :

$\text{ظا أ} - \text{ظا ب} = \text{ظا}(\text{أ} - \text{ب})\,(1 + \text{ظا أ ظا ب})$

$\Leftarrow \text{ظا س} - \text{ظا}\frac{\pi}{3} = \text{ظا}(\text{س} - \frac{\pi}{3})\,(1 + \text{ظا س ظا}\frac{\pi}{3})$

$\Leftarrow$

$= \frac{\pi}{3} \cdot \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{3})}{3} \times \displaystyle\lim_{\text{س}\to\frac{\pi}{3}} \underbrace{\frac{\text{ظا}(\text{س} - \frac{\pi}{3})}{\text{س} - \frac{\pi}{3}}}_{=1}\,(1 + \text{ظا س ظا}\frac{\pi}{3})$

$= \frac{\pi \times 2\sqrt{3}}{9} \times 1 \times (1 + \text{ظا}\frac{\pi}{3} \times \text{ظا}\frac{\pi}{3})$

$= \frac{2\pi\sqrt{3}}{9} \times (1 + \sqrt{3} \times \sqrt{3})$

$= \frac{2\pi\sqrt{3}}{9} \times (1 + 3)$

$= \frac{8\pi\sqrt{3}}{9}$

* هناك طرق أخرى للحل

٢) $\displaystyle\lim_{\text{س}\to -2} \frac{(\text{س}+1)^4 - 2\text{س} - 5}{3\text{س} - (\text{س}^2 + 2\text{س} + 1)^3 + 7}$

$= \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

نفرض أن ص = س + ١ $\Leftarrow$ س = ص − ١

س $\to -2 \Leftarrow$ ص $\to -1$

$= \displaystyle\lim \frac{\text{ص}^4 - 2(\text{ص} - 1) - 5}{3(\text{ص} - 1) - (\text{ص}^2)^3 + 7}$

حيث $\text{س}^2 + 2\text{س} + 1 = (\text{س} + 1)^2 = \text{ص}^2$

$= \displaystyle\lim_{\text{ص}\to -1} \frac{\text{ص}^4 - 2\text{ص} - 3}{-\text{ص}^6 + 3\text{ص} + 4}$

تركيبة :

ص^4	ص^3	ص^2	ص	ح	
1	.	.	−2	−3	$\boxed{-1}$
	−1	1	−1	3	
1	−1	1	−3	.	

$(\text{ص} + 1)\,(\text{ص}^3 - \text{ص}^2 + \text{ص} - 3)$

ص^6	ص^5	ص^4	ص^3	ص^2	ص	ح	
−1	.	.	.	.	3	4	$\boxed{-1}$
	1	−1	1	−1	1	−4	
−1	1	−1	1	−1	4	.	

$(\text{ص} + 1)\,(-\text{ص}^5 + \text{ص}^4 - \text{ص}^3 + \text{ص}^2 - \text{ص} + 4)$

$\displaystyle\lim_{\text{ص}\to -1} \frac{(\text{ص} + 1)\,(\text{ص}^3 - \text{ص}^2 + \text{ص} - 3)}{(\text{ص} + 1)\,(-\text{ص}^5 + \text{ص}^4 - \text{ص}^3 + \text{ص}^2 - \text{ص} + 4)}$

$= \frac{-1 - 1 - 1 - 3}{--1 + 1 --1 + 1 --1 + 4}$

$= \frac{-6}{1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 4}$

$= \frac{-6}{9}$

$= \frac{-2}{3}$

س٢ ب) إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{س^2 \left[\frac{٣س+١}{٢}\right] - ١}{٢س\,|١-٢س| - ٢} \text{ ، } س < ١ \\ ٣أ\,س\,\sqrt{س+٣} \text{ ، } س \geq ١ \end{cases}$$

جد قيمة أ التي تجعل ق متصلاً عند س = ١

الحل: $\left[\frac{٣س+١}{٢}\right]$ ؛ $س \to ١^-$

نفرض أن س ≈ ٠,٩ ⟸ $\left[\frac{٣ \times ٠,٩ + ١}{٢}\right]$

$= \left[\frac{٢,٧+١}{٢}\right] = \left[\frac{٣,٧}{٢}\right] = [١,٨٥] = ١$

$|١-٢س|$: $١-٢س = ٠$ ⟸ $س = \frac{١}{٢}$

$١-٢س$ ، $٢س-١$ ، $\frac{١}{٢}$ ، ١

متصل ⟸ $\lim\limits_{س \to ١^+} ق(س) = \lim\limits_{س \to ١^-} ق(س)$

$\lim\limits_{س \to ١^-} \frac{س^2 \times ١ - ١}{٢س(٢س-١) - ٢} = \lim \frac{س^2 - ١}{٤س^2 - ٢س - ٢}$

$= \lim \frac{(س-١)(س+١)}{(س-١)(٤س+٢)} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$

$\lim\limits_{س \to ١^+} (٣أ\,س\,\sqrt{س+٣}) = ٣أ \times \sqrt{٤} = ٦أ$

⟸ $\frac{١}{٣} = ٦أ$ ⟸ $أ = \frac{١}{١٨}$

س٣ أ) إذا كان ق(س) = $س^3 + ٢س^2$

ه(س) = أ ظا س ، وكان $(ق \circ ه)'(\frac{\pi}{٤}) = ٤$

فجد قيمة (قيم) الثابت أ

الحل: ق(س) = $٣س^2 + ٤س$ ، ق′(س) = ٦س + ٤

ه′(س) = أ قا²س

$(ق \circ ه)'(\frac{\pi}{٤}) = ق'(ه(\frac{\pi}{٤})) \times ه'(\frac{\pi}{٤})$

$= ق'(أ ظا \frac{\pi}{٤}) \times أ قا^2 \frac{\pi}{٤}$

$= ق'(أ) \times أ(\sqrt{٢})^2$

$= (٦أ + ٤) \times ٢أ = ٤$

$١٢أ^2 + ٨أ - ٤ = ٠$ ⟸ $٣أ^2 + ٢أ - ١ = ٠$

$(٣أ - ١)(أ + ١) = ٠$

⟸ $أ = \frac{١}{٣}$ ، $أ = -١$

س٢ ب) إذا كان ٢س − أص + ب = ٠

تمثل معادلة المماس لمنحنى الاقتران

ق(س) = س² − ٦س + ١ ، علماً بأن

هذا المماس يوازي المستقيم الذي

معادلته ٢ص − س = ١

جد قيمتي أ ، ب الثابتين.

الحل: ميل المستقيم: ٢ص − س = ١

$٢ص' - ١ = ٠$ ⟸ $م = \frac{١}{٢}$

ميل المماس: ٢س − أص + ب = ٠

$٢ - أص' = ٠$ ⟸ $م = \frac{٢}{أ}$

يوازي ⟸ ميل المماس = ميل المستقيم ⟸ $\frac{١}{٢} = \frac{٢}{أ}$

⟸ أ = ٤

ميل المماس = ق′(س₁) = $\frac{١}{٢}$

ق′(س₁) = ٢س − ٦ = $\frac{١}{٢}$

⟸ $س_1 = \frac{١٣}{٤}$

$ص_1 = ق(\frac{١٣}{٤}) = (\frac{١٣}{٤})^2 - ٦(\frac{١٣}{٤}) + ١$

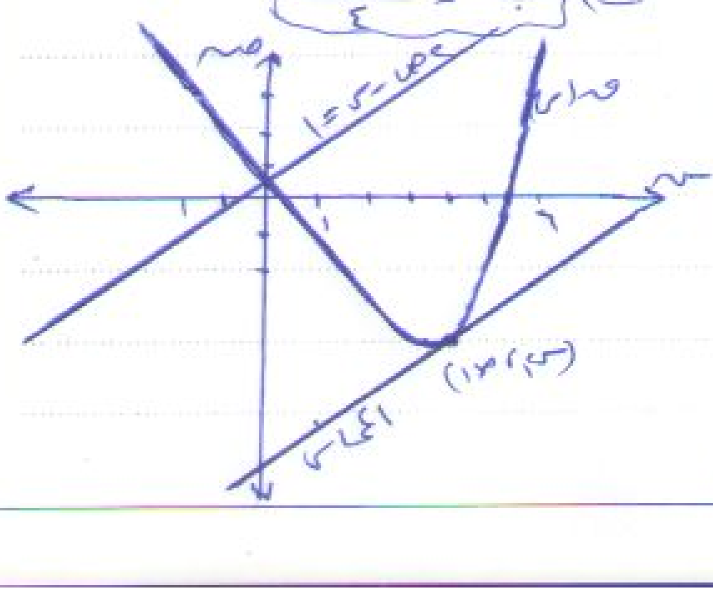
$ص_1 = \frac{-١٢٧}{١٦}$

⟸ نقطة التماس: $(\frac{١٣}{٤} ، \frac{-١٢٧}{١٦})$

نقطة التماس تحقق معادلة المماس

⟸ $٢ \times \frac{١٣}{٤} - ٤ \times \frac{-١٢٧}{١٦} + ب = ٠$

⟸ $ب = \frac{-١٥٣}{٤}$



٣

س٢) جـ) إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{جا^2(س-١)}{س^2-١} & ، س \ne ١ \\ صفر & ، س = ١ \end{cases}$$

جد $ق'(١)$

الحل: $ق(س)$ متصل عند $س = ١$ لأنه

$ق(١) = ٠$

$\underset{س\to١}{نها}\ ق(س) = \underset{س\to١}{نها} \dfrac{جا^2(س-١)}{س^2-١}$

$= \underset{س\to١}{نها} \dfrac{جا(س-١)}{(س-١)} \cdot \dfrac{جا(س-١)}{(س+١)} = \dfrac{جا٠}{٢} = صفر$

$ق'(١) = \underset{س\to١}{نها} \dfrac{ق(س) - ق(١)}{س-١}$

$= نها \dfrac{\dfrac{جا^2(س-١)}{س^2-١} - ٠}{س-١}$

$= \underset{س\to١}{نها} \dfrac{جا^2(س-١)}{(س^2-١)(س-١)}$

$= نها \dfrac{جا(س-١)}{(س-١)} \cdot \dfrac{جا(س-١)}{(س+١)(س-١)}$

$= \dfrac{١}{٢}$

س٢) أ) $ق(س) = \begin{cases} \sqrt{س} & ، س \ge ١ \\ \dfrac{٢}{٣-س} & ، س < ١ \end{cases}$

جد $ق'(١)$ باستخدام التعريف

الحل: $ق'_{+}(١) = \underset{س\to١^+}{نها} \dfrac{\sqrt{س}-١}{س-١} \times \dfrac{\sqrt{س}+١}{\sqrt{س}+١}$

$= نها \dfrac{\cancel{س-١}}{\cancel{(س-١)}(١+١)} = \dfrac{١}{٢}$

$ق'_{-}(١) = \underset{س\to١^-}{نها} \dfrac{\dfrac{٢}{٣-س} - ١}{س-١}$ ، $\dfrac{٢-٣+س}{(س-١)(٣-س)}$

$= نها \dfrac{\cancel{س-١}}{\cancel{(س-١)}(٣-س)} = \dfrac{١}{٣-١} = \dfrac{١}{٢}$

$ق'_{+}(١) = ق'_{-}(١) = \dfrac{١}{٢}$

س٣ ب) إذا كانت سرعة جسم تعطى بالعلاقة $ع^2 = \sqrt{ف} - ٢ع$ ، جد تسارع الجسم عندما يقطع مسافة قدرها (٩) م.

الحل: $٢ع\ ع' = \dfrac{ف'}{٢\sqrt{ف}} - ٢ع'$

$٢ع \times ت = \dfrac{ع}{٢\sqrt{ف}} - ٢ت$

عندما $ف = ٩$

$\Leftarrow ع^2 = \sqrt{٩} - ٢ع$

$ع^2 = ٣ - ٢ع$

$ع^2 + ٢ع - ٣ = ٠$

$(ع+٣)(ع-١) = ٠$

$ع = -٣$ ، $ع = ١$

$\boxed{ع = ١} \Leftarrow ٢ع \times ت = \dfrac{ع}{٢\sqrt{ف}} - ٢ت$

$٢ \times ١ \times ت = \dfrac{١}{٢\sqrt{٩}} - ٢ت$

$٢ت + ٢ت = \dfrac{١}{٢\times٣}$

$٤ت = \dfrac{١}{٦} \Leftarrow ت = \dfrac{١}{٢٤}$

$\boxed{ع = -٣}$ $٢ \times -٣ \times ت = \dfrac{-٣}{٢\sqrt{٩}} - ٢ت$

$-٦ت + ٢ت = \dfrac{-٣}{٦} \Leftarrow ت = \dfrac{١}{٨}$

س٣ جـ) إذا كان $ق(س) = جتا\ س$ وتغيرت س من (م) إلى $(م - \pi)$ أثبت أن متوسط التغير لـ $ق(س) = \dfrac{٢جتا م}{\pi}$

الحل: $م.ت = \dfrac{ق(م-\pi) - ق(م)}{م - \pi - م}$

$= \dfrac{جتا(م-\pi) - جتا م}{-\pi}$

$= \dfrac{جتا(-(\pi-م)) - جتا م}{-\pi} = \dfrac{جتا(\pi-م) - جتا م}{-\pi}$

$= \dfrac{-جتا م - جتا م}{-\pi} = \dfrac{\cancel{-}٢جتا م}{\cancel{-}\pi}$

س٤) أ) إذا كان $|س| \le ٢$

أثبت باستخدام القيم القصوى أن:

$|٣س - س^٣| \le ٢$

الحل: نفرض أن $ق(س) = ٣س - س^٣$

$س \in [-٢ ، ٢]$

$قَ(س) = ٣ - ٣س^٢ = ٠$

$\Leftarrow س = \mp ١ \in [-٢ ، ٢]$

قيم س الحرجة: $\mp ١ ، \mp ٢$ (٤ قيم)

$- - - \quad + + + + \quad - - -$

$-٢ \quad -١ \quad ١ \quad ٢$

$ق(-٢) = ٢$ ، $ق(١) = ٢$

$ق(٢) = -٢$ ، $ق(-١) = -٢$

∴ القيمة العظمى المطلقة للاقتران $ق(س)$ في $[-٢ ، ٢]$ هي (٢)

القيمة الصغرى المطلقة للاقتران $ق$ في $[-٢ ، ٢]$ هو (-٢)

$\Leftarrow ق(س) \ge -٢$ و $ق(س) \le ٢$

∴ $-٢ \le ق(س) \le ٢$

$\Leftarrow |ق(س)| \le ٢$

$|٣س - س^٣| \le ٢$

س٤) ب) إذا كان

$٧س = ق(ص^٢ + ٣ص)$ وكانت

$\lim_{س \to ١٠} \frac{ق(١٠) - ق(س)}{س - ١٠} = ٨$ ، فجد

$\frac{دص}{دس}$ عندما $ص = ٢$

الحل: $\lim_{س \to ١٠} -\left(\frac{ق(س) - ق(١٠)}{س - ١٠}\right) = ٨$

$\Leftarrow -قَ(١٠) = ٨ \Leftarrow قَ(١٠) = -٨$

$٧س = ق(ص^٢ + ٣ص)$

$٧ = قَ(ص^٢ + ٣ص)(٢ص \, صَ + ٣ صَ)$

عندما $ص = ٢ \Leftarrow ص^٢ + ٣ص = ٤ + ٦ = ١٠$

$٧ = قَ(١٠)(٢ \times ٢ صَ + ٣ صَ)$

$\cancel{٧} = -٨ \times \cancel{٧} صَ \Leftarrow صَ = \frac{-١}{٨}$

ج) إذا كانت $س + ١ = جا ص$

أثبت أن $صً - صَ = قا ص (ظا ص \, قا ص - ١)$

الحل: $١ = جتا ص \, صَ$

$صَ = \frac{١}{جتا ص} = قا ص$

$\boxed{صَ = قا ص}$

$صً = قا ص \, ظا ص \, صَ$

$= قا ص \, ظا ص \times قا ص$

$\boxed{صً = قا^٢ ص \, ظا ص}$

$صً - صَ = قا^٢ ص \, ظا ص - قا ص$

$= قا ص (قا ص \, ظا ص - ١)$

س٣) إذا كان

ق(س) = { ∛(س² − ٢س) ، ٠ ≤ س ≤ ٤
ق(س) = { ١٠ − س² ، ٤ < س < ٧

جد

١) الفترة (الفترات) التي يكون فيها ق(س) متناقصاً

٢) القيم القصوى المحلية والمطلقة وحدد نوعها للاقتران ق

الحل:

ق'(س) = { (٢س − ٢) / (٣ ∛(س² − ٢س)²) ، ٠ < س < ٤ − {٢}
ق'(س) = { −٢س ، ٤ < س < ٧
ق'(س) = { غ.م ، س = ٠، ٤، ٢

ق'(س) = ٠ ⟸ ٢س − ٢ = ٠ ⟸ س = ١

−٢س = ٠ ⟸ س = ٠ ∉ (٤، ٧)

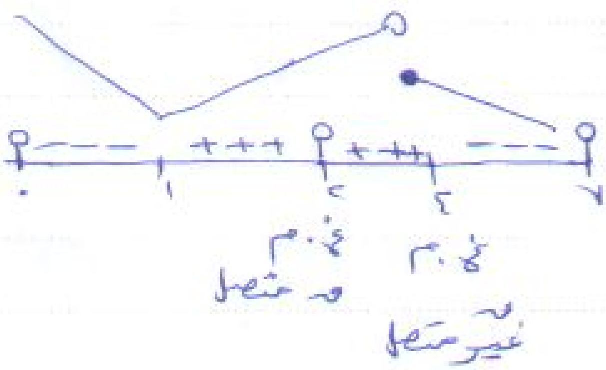
ق'(س) غ.م عند س = ٠، س = ٢، ٤

أصفار المقام: س² − ٢س = ٠

س(س − ٢) = ٠

س = ٠ ، س = ٢

قيم س الحرجة: ٠، ١، ٢، ٤



عند س = ٤

ق(٤) = ٢

نها ق(س) = ٦ (س ← ٤⁺) ، نها ق(س) = ٢ (س ← ٤⁻)

ق(س) غير متصل عند س = ٤

ق'(س) غ.م. عند س = ٤

١) ق متناقص في [٠، ١] ، [٤، ٧)

٢) س = ٠ ⟸ ق(٠) = صفر

س = ١ ⟸ ق(١) = −١

يوجد قيمة صغرى محلية عند س = ١

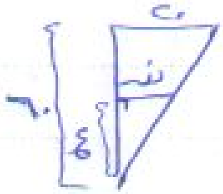
ولا يوجد قيم قصوى عند س = ٠

نها ق(س) = ٢ (س ← ٤⁻) ⟸ لا يوجد قيمة عظمى مطلقة عند س = ٤

نها ق(س) = ١٠ − ٤٩ = −٣٩ (س ← ٧⁻)

لا يوجد قيمة صغرى مطلقة عند س = ٧

س٢) إناء على شكل مخروط دائري قائم رأسه للأسفل، طول نصف قطر قاعدته ٢٠سم وارتفاعه ثلاثة أمثال طول نصف قطر قاعدته يصل إليه الماء من أعلى بمعدل ٣٠سم³/دقيقة جد معدل التغير في طول $\overline{\text{أب}}$ لحظة التي يكون فيها ارتفاع الماء في الإناء ١٠سم.



الحل: من التشابه

$\frac{\text{نق}}{\text{ع}} = \frac{20}{60}$

$\Leftarrow \text{نق} = \frac{1}{3}\text{ع}$

$\text{حجم الماء} = \frac{1}{3}\,\text{نق}^2\,\pi\,\text{ع}$

$= \frac{1}{3} \times (\frac{1}{3}\text{ع})^2\,\pi\,\text{ع} = \frac{\pi}{27}\text{ع}^3$

$\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = \frac{\pi}{9}\text{ع}^2\,\frac{\text{دع}}{\text{دن}}$

$30 = \frac{\pi}{9} \times (10)^2\,\frac{\text{دع}}{\text{دن}}$

$\Leftarrow \frac{\text{دع}}{\text{دن}} = \frac{9 \times 30}{100\pi} = \frac{27}{10\pi}$

$\text{أب} = \text{س}$ ، $(\text{أب})^2 = (\text{ل})^2 + \text{نق}^2$

$\text{س} = \sqrt{\text{ل}^2 + \text{نق}^2}$

$= \sqrt{(60-\text{ع})^2 + (\frac{1}{3}\text{ع})^2}$

$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \frac{2(60-\text{ع})(-\frac{\text{دع}}{\text{دن}}) + 2(\frac{1}{3}\text{ع}) \times \frac{1}{3}\frac{\text{دع}}{\text{دن}}}{2\sqrt{(60-\text{ع})^2 + (\frac{1}{3}\text{ع})^2}}$

$\text{ع} = 10$ ، $\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = \frac{27}{10\pi}$

$= \frac{2(50)(-\frac{27}{10\pi}) + 2(\frac{10}{3})(-\frac{27}{10\pi})}{2\sqrt{(50)^2 + (\frac{10}{3})^2}}$

$=$

٦

ج) قطاع دائري زاويته المركزية قياسها (هـ) راديان وطول نصف قطر دائرته ($\sqrt{75}$) م حُوّل إلى مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته (نق) وارتفاعه (ع) جد قيمة (هـ) التي تجعل حجم المخروط أكبر ما يمكن

الحل:

$\text{حجم المخروط} = \frac{1}{3}\,\text{نق}^2\,\text{ع}\,\pi$

$\text{نق}^2 + \text{ع}^2 = 75$

$\text{نق}^2 = 75 - \text{ع}^2$

$\text{ح} = \frac{\pi}{3}(75 - \text{ع}^2) \times \text{ع}$

$= \frac{\pi}{3}(75\text{ع} - \text{ع}^3)$

$\text{ح}' = \frac{\pi}{3}(75 - 3\text{ع}^2) = 0$

$75 = 3\text{ع}^2 \Leftarrow \text{ع}^2 = 25$

$\Leftarrow \text{ع} = 5$ م ، $\text{ع} = -5$ يهمل

+ + + | - - -

$\boxed{5}$

محيط قاعدة المخروط = طول قوس هـ

$2\pi\,\text{نق} = \sqrt{75} \times \text{هـ}$

لكن $\text{نق}^2 = 75 - \text{ع}^2 = 50 \Leftarrow \text{نق} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$2\pi \times 5\sqrt{2} = \sqrt{75}\,\text{هـ}$

$\text{هـ} = \frac{2 \times 5\sqrt{2}\,\pi}{\sqrt{75}}$

$= \frac{2 \times 5\sqrt{2}\,\pi}{5\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}\,\pi}{\sqrt{3}}$