الرياضيات

العلمي والصناعي

المستوى الثالث

مراجعة مكثفة (أسئلة متوقعة)

مع الحل

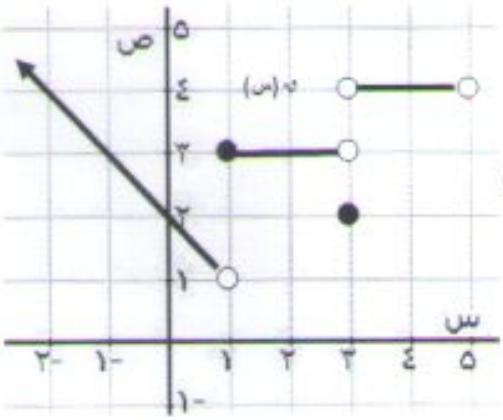
٢٠١٦ / ٢٠١٧

الصيفية

المعلم : عبدالقادر الحسنات

078 531 88 77

س١) معتمدا الشكل المجاور والذي يمثل منحنى ق (س) جد:



١) $\lim_{س \to -٢}$ ق (س)

٢) $\lim_{س \to ٦}$ ق (س)

٣) $\lim_{س \to ٠}$ (٣ق (س) – ٧)

٤) $\lim_{س \to -٣}$ (ق (س) – ٢س)

٥) نقاط عدم الاتصال للاقتران ق

٦) مجموعة قيم أ حيث $\lim_{س \to أ}$ ق (س) غير موجودة

٧) مجموعة قيم أ حيث $\lim_{س \to أ}$ ق (س)=٣

س٢) أ) إذا كان هـ(س) كثير حدود وكانت $\lim_{س \to ١} \frac{هـ(س) - ٦}{س - ١}$ = ٢ فجد $\lim_{س \to ١}$ ($\frac{١}{٢}$ هـ(س) – ٧س - ٢)

ب) إذا كانت $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٣} + م س - أ}{س - ٢}$ = ٨ فجد قيم الثابتين أ ، م

ج) إذا كانت $\lim_{س \to -١} \frac{س^{٤} + م س^{٢} + ٢س + ٣}{س + ١}$ موجودة ، فجد قيمة م

س٣) جد قيمة النهايات الكسرية الآتية :

أ) $\lim_{س \to ٢} \frac{|س - ٣| - ١}{س^{٢} - ٨}$

ب) $\lim_{س \to -٣} \frac{س^{٢} - ٩}{|٢س + ٦| - س - ٣}$

ج) $\lim_{س \to \frac{٣}{٢}} \frac{[٣س] - ٣س}{٩س^{٢} - ٤}$

د) $\lim_{س \to ٣} \frac{[س] - س}{٢س - ٢}$

هـ) $\lim_{س \to ٢} \frac{١}{س - ٢} \left(\frac{س}{س - ٤} + \frac{٣}{س + ١} \right)$

و) $\lim_{س \to ١} \frac{١ - س^{٢} \sqrt{س}}{٢س - ٢}$

ز) $\lim_{س \to ٢} \frac{س + \sqrt{س + ٢} - ٥}{٢س - ٦}$

ح) $\lim_{س \to ٥} \frac{\sqrt[٣]{س + ٣} - ٢}{٣ - \sqrt{٢س - ١}}$

ط) $\lim_{س \to -٣} \frac{(س + ٥)^{٢} - ٤}{(س + ١)^{٢} + ٨}$

ي) $\lim_{س \to -\frac{١}{٣}} \frac{\sqrt{٩س^{٢} + ٦س + ١}}{٣س + ١}$

عبد القادر الحسنات 078 531 88 77
عبدالقادر الحسنات 078 531 88 77
عبد القادر الحسنات 078 531 88 77

٢

س٤) جد قيمة النهايات الدائرية الآتية :

أ) $\lim_{س \to 0} \frac{جا^2س + جتا^2س - جتا^3س}{1 - جتا^2س}$

ب) $\lim_{س \to 0} \frac{1 - جتاس}{جتا2س - 1}$

ج) $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{جتاس - جاس}{1 - ظاس}$

د) $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{جاس - جتاس}{جا2س - جتا2س - 1}$

هـ) $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - جاس}{(\frac{\pi}{4} - س)^2}$

و) $\lim_{س \to 0} \frac{1 - جتا6س - 2جا^2س}{5س^2}$

ز) $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - جتا4س}{1 - جاس}$

ح) $\lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{قاس - 1}}{س}$

ط) $\lim_{س \to 0} \frac{س جا\frac{\pi}{س}}{س - 1}$

ي) $\lim_{س \to \frac{\pi}{3}} \frac{2جتاس - 1}{\frac{\pi}{3} - س}$

ك) $\lim_{س \to \frac{\pi}{3}} \frac{ظا^2 س - 3}{\pi - 3س}$

عبدالقادر الحسنات 078 531 88 77

س٥) إذا كان ه(س) = $\frac{2س - 6}{س^2 + 2س + م}$ متصلاً على ح فجد قيمة م

س٦) إذا كان ه(س) = $\begin{cases} أ س^2 - م س + 1 & ، س < 2 \\ 6 & ، س = 2 \\ س^2 - أ س + م & ، س > 2 \end{cases}$ فجد قيم أ ، م التي تجعل ه متصلاً عند س=٢

س٧) إذا كان ه(س) = $\begin{cases} [س] + أ & ، س \leq 3 \\ أ س + 1 & ، س > 3 \end{cases}$ فجد قيم أ التي تجعل ه متصلاً عند س=٣

س٨) إذا كان ه(س) = $\begin{cases} \frac{1}{2}س^2 - س & ، س > 2 \\ س - 2 & \\ \frac{5س - 8}{س} & ، س \leq 2 \end{cases}$ فابحث في اتصال ه (س) عند س=٢

س٩) إذا كان م (س)= (س-٣)^3 ، هـ(س) = [س + ٢] فابحث في اتصال ه (س)= م (س)×هـ(س) عند س=٣

س١٠)إذا كان ه(س) = $\begin{cases} |2س - 1| & ، -1 \leq س \leq 1 \\ [س + 1] & ، 1 < س \leq 3 \end{cases}$ فابحث في اتصال ه (س) على [-١ ، ٣]

عبد القادر الحسنات 078 531 88 77

٣

س١١)إذا كان ق(س) = جاس+ ٢جتاس ، فجد متوسط التغير للاقتران ق(س) في الفترة [٠ ، $\frac{\pi}{٣}$]

س١٢)إذا كان متوسط تغير هـ(س) في [-٢،١] يساوي (٨) وكان متوسط تغير ق (س) = أ س^{٢} - هـ(س) في [-٢،١] يساوي (٢) فجد قيمة الثابت أ

س١٣)إذا كان هـ(س)= ق (س) + س^{٢} وكان متوسط تغير هـ(س) في [١، ٣] يساوي (٦) وكان ق (١)=٤ فجد ق (٣)

س١٤) باستخدام التعريف العام للمشتقة ، جد المشتقة الأولى للاقترانات الآتية :

أ) ق(س) = س^{٢} +$\sqrt{٧س}$ ب) ق(س) = س^{٢} جاهس ج) ق(س) = ٧ + $\frac{٣}{\sqrt{س}-٢}$ ، عند س =٩

س١٥) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \frac{٣}{س-١}+٤ & ، س \leq ٢ \\ ٢س+٣ & ، س > ٢ \end{cases}$ فابحث في قابلية ق(س) للاشتقاق باستخدام التعريف العام للمشتقة (أو : جد قَ(س)، (أو قَ(٢)) باستخدام التعريف العام للمشتقة)

س١٦)إذا كان ق(س) = $\begin{cases} [س+٤] & ، ١ \leq س < ٢ \\ |س-٣| & ، ٢ \leq س \leq ٤ \end{cases}$ فابحث في قابلية ق(س) للاشتقاق على مجاله

س١٧)إذا كان ق(س) = $\frac{س^{٢}+١}{م(س)-٢}$ وكان قَ(٢)=٣ ، ق(٢)= ٥ فجد م(٢)

عبد القادر الحسنات
078 531 88 77

س١٨)إذا كان ق(س)= س^{٣}+ ب س^{٢} - م س +٤ ، وكان قَ(٣)= ١٣ ، قَ(٢)=١٨ فجد قيم ب ، م

س١٩)إذا كان ق(س)= $\begin{cases} ٢م س^{٢}+ب س & ، س \leq ١ \\ م س^{٢}+٥ب س - ١٢ & ، س > ١ \end{cases}$ وكانت قَ(س) موجودة فجد قيم م ، ب

س٢٠)إذا كان (ق ٥ هـ)(س)= $\frac{س^{٢}+م}{س-١}$ ، س ≠ ١ وكان قَ(س) = $\sqrt{س^{٢}+٥}$ وكانت هـَ(٢) =٥ ،هـ(٢) = ٢ فجد قيمة م

س٢١)إذا كان س^{٢} + جاص – قا^{٢}س = ص^{٢} فجد $\frac{ع ص}{ع س}$

س٢٢)إذا كان س = جا ص ، فاثبت أن : ص^{ص} = ظا ص قا^{٢} ص

س٢٣)إذا كان ص =(ظاس + قاس)^{ن} ، ن عدد صحيح موجب ، بين أن $\frac{ع ص}{ع س}$ = ن ص قاس

س٢٤)إذا كان ق(س)= ٤س^{ن} ، وكان ق$^{(٣)}$(س) = م س^{٢} فجد قيمة م

عبد القادر الحسنات
078 531 88 77

س٢٥) إذا كانت ص = ق^{٣}(س^{٢} + س) وكانت قَ(٢) = ق(٢) = -٣ فجد $\frac{ع ص}{ع س}$ عندما س= - ٢

س٢٦) إذا كان ق(جا٢س) = ظتا٢س ، س ∈ (٠ ، $\frac{\pi}{٣}$) فجد قَ($\frac{\pi}{٦}$)

س٢٧)إذا كان ص = جا^{٣}(٥ع^{٢}) ، ع = $\sqrt{٣س^{٢}+٥}$ ، فجد $\frac{ع ص}{ع س}$

٤

س٢٨) جد معادلة المماس المرسوم من النقطة (٠ ، ٦) لمنحنى العلاقة س^{٢} + ص^{٢} =١٨

س٢٩) جد النقط على منحنى العلاقة س^{٢} + ص^{٢} =٨ والتي يكون المماس عندها موازياً للمستقيم : ص + س =٤
ثم جد معادلة المماس عند تلك النقط

س٣٠) جد مساحة المثلث المكون من المماس والعمودي على المماس لمنحنى ق (س)= $\frac{١}{س}$ ومحور السينات عند النقطة (٢، $\frac{١}{٢}$)

س٣١) يتحرك جسم على خط مستقيم وفق العلاقة ف (ن) = ٢ن^{٣} - ٨ ن^{٢} +٦ن+١٠، جد سرعة الجسم عندما يقطع مسافة ١٠ م

س٣٢) قذف جسم عمودياً إلى أعلى حسب العلاقة ف (ن) = أ ن - ٥ن^{٢} ، جد سرعة الجسم عندما يكون على ارتفاع ٤٠ م علماً بان أقصى ارتفاع وصل إليه الجسم كان ٤٥ م

س٣٣) يتحرك جسم وفق العلاقة ف^{٣} = ع^{٢}+٢ ، جد تسارع الجسم عندما تكون سرعته ٥ م/ث

س٣٤) يتحرك جسيم على خط مستقيم وفقاً للاقتران ف (ن) = ٢ن^{٣} - م ن^{٢} +٢ ، حيث ن الزمن بالثواني ، ف المسافة التي يقطعها الجسيم بالأمتار ، عندما كانت سرعة الجسم ١٢ م/ث كان تسارعه ١٨ م/ث^{٢} ، جد قيمة م حيث م > ٠

س٣٥) يتساقط الرمل بمعدل ٤سم^{٣} / د ليصبح كومة على شكل مخروط دائري قائم...نصف قطر قاعدته مثلي ارتفاعه دائماً
جد معدل التغير في ارتفاع كومة الرمل عندما يكون نصف قطر قاعدة المخروط ١٠ سم

س٣٦) أسطوانة من الجليد نصف قطرها يساوي نصف ارتفاعها بدأت بالذوبان محافظة على شكلها ، فإذا كان معدل النقصان في نصف قطرها يساوي ٢سم / س فجد معدل التغير في حجمها ومساحتها الجانبية عندما يكون ارتفاعها ٢٠سم

س٣٧) تتحرك نقطة على منحنى الاقتران ق (س) = $\sqrt{س^{٢}+٣}$ بحيث يزداد الإحداثي السيني بمعدل ٣سم/ث جد معدل التغير في المسافة بين هذه النقطة والنقطة (٥، ٠) عندما تكون س=٤

س٣٨) مربع تتمدد أضلاعه بمعدل ٢سم / د ، رسمت دائرة داخل المربع وأخذت تتمدد معه بحيث تبقى ملامسة لأضلاعه ، جد معدل التغير في مساحة المنطقة المحصورة بين المربع والدائرة عندما يكون طول ضلع المربع ١٠ سم

س٣٩) انطلق صاروخ راسياً إلى أعلى حيث تم رصده من قبل رادار على سطح الأرض من قاعدة تبعد ٢٠٠٠ م عن نقطة انطلاق الصاروخ ، إذا كانت سرعة انطلاق الصاروخ ٤٠٥م/ث جد معدل التغير في زاوية ارتفاع الصاروخ لكي يبقى ظاهراً على شاشة الرادار وهو على ارتفاع ١٢٠٠م عن سطح الأرض

س٤٠) بالون كروي الشكل قطره ٨سم ، بدأ الهواء يتسرب منه بمعدل ١٠ سم^{٣} /د جد معدل التغير في مساحة سطحه الخارجي في اللحظة التي يكون نصف قطره ٢سم

س٤١) بدأت النقطتان م ، ب الحركة من نقطة الأصل (و) بحيث تتحرك النقطة (ب) على محور السينات الموجب مبتعدة عن نقطة الأصل وبسرعة ٤سم/د ، بينما تتحرك النقطة (م) على منحنى الاقتران ق(س) = س^{٢} بحيث يبقى طول و م يساوي طول م ب دائماً
جد معدل التغير في مساحة المثلث م ب و ومعدل التغير في الزاوية م ب و بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة

س٤٢) إذا كان ق (س) = س^{٣} -١٢س + ٣ فجد

أ) فترات التزايد والتناقص للاقتران ق ب) النقط الحرجة ج) القيم القصوى المحلية وحدد نوعها

س٤٣) إذا كان ق (س) = $\sqrt[٣]{(س^{٢}-٤س)^{٢}}$ فجد

أ) فترات التزايد والتناقص للاقتران ق ب) النقط الحرجة ج) القيم القصوى المحلية وحدد نوعها

س٤٤) إذا كان ق (س) = { س^{٢} ، -٢ ≤ س < ١ ; ٢-س ، ١ ≤ س < ٣ ; ٢س ، ٣ ≤ س ≤ ٤ } فجد أ) فترات التزايد والتناقص للاقتران ق ب) النقط الحرجة ج) القيم القصوى المحلية وحدد نوعها

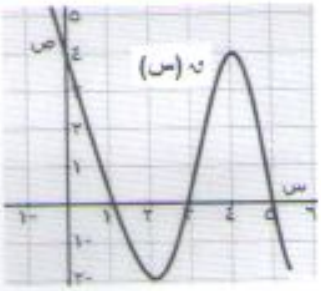
عبدالقادر الحسنات 078 531 88 77

س٤٥) إذا كان ق (س) = جا^{٢}س ، س ∈ [٠ ، π] فجد

أ) فترات التزايد والتناقص للاقتران ق ب) النقط الحرجة ج) القيم القصوى المحلية وحدد نوعها

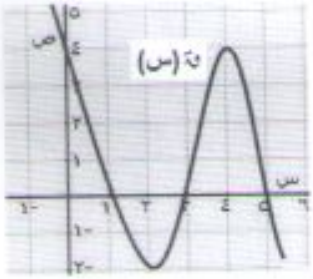
٥

س٤٦)معتمداً الشكل المجاور والذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) ، جد



١) النقاط الحرجة
٢) فترات التزايد والتناقص
٣) القيم القصوى للاقتران ق
٤) ق(٤)

س٤٧)معتمداً الشكل المجاور والذي يمثل منحنى الاقتران ق' (س) ، جد



عبدالقادر الحسنات
078 531 88 77

١) النقاط الحرجة
٢) فترات التزايد والتناقص
٣) القيم القصوى للاقتران ق
٤) ق'(٤)
٥) ق''(٢)

س٤٨) إذا كان ق(س) = س^{٣} + م س^{٢} + ب س، وكان للاقتران ق نقطتين حرجتين عند س= -١ ، س=٢ فجد قيم الثابتين م ، ب

س٤٩) إذا كان ق(س) = س^{٣} +٣م س^{٢}-٥ب س +١ وكانت ق'(-١) =٢، ق''(-٢) = ٦ فجد قيم الثابتين م ، ب

س٥٠) إذا كان مجموع ثلاثة أمثال عدد مع عدد آخر يساوي ٦٠ ،فجد العددين بحيث يكون حاصل ضربهما أكبر ما يمكن

س٥١) عددان مجموعهما ٤٠ ، جد العددين بحيث يكون مجموع مربع الأول ومثلي الثاني أقل ما يمكن

س٥٢) قطعة أرض مستطيلة الشكل مساحتها (١٢٨ م^{٢}) يُراد عمل مسبح داخلها مع ترك ممرات على جوانبها الأربع ، فإذا كان عرض كل ممر في جانبين متوازيين هو ٢م وعرض كل ممر في الجانبين الآخرين يساوي ١م ،جد بعدي القطعة بحيث تكون مساحة المسبح أكبر ما يمكن

س٥٣) ورقة مستطيلة الشكل يراد طباعة إعلان عليها بحيث يكون عرض كل من الهامشين في رأس الورقة وأسفلها ٤سم وفي كل من الجانبين ١ سم، إذا كانت مساحة المنطقة المطبوعة تساوي ٤٠٠ سم^{٢} ،جد بعدي الورقة بحيث تكون مساحتها أصغر ما يمكن وتكفي لطباعة الإعلان

س٥٤) أوجد أكبر حجم لمخروط يمكن وضعه في كرة نصف قطرها ١٨سم ورأسه على سطح الكرة ويمس محيط قاعدته سطح الكرة.

س٥٥) كرة خشبية مصمتة نصف قطرها ١٠ سم يراد تحويلها إلى منشور رباعي قائم قاعدته مربعة ، جد أبعاد المنشور التي تجعل حجمه أكبر ما يمكن

س٥٦) أ ب ج مثلث فيه أ ج =٦سم ، ب ج = ٨سم ،جد قياس الزاوية ج الذي يجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن

س٥٧) جد النقطة على منحنى الاقتران ق(س)= ٣س التي تكون أقرب ما يمكن للنقطة (٤ ، ٢)

س٥٨) جد معادلة المستقيم الذي يمر في النقطة (٢ ، ٣) ويقطع من الربع الأول من المستوى الديكارتي مثلثاً مساحته أصغر ما يمكن

س٥٩)نافذة على شكل مستطيل يعلوه مثلث متساوي الساقين ارتفاعه مثلي طول ضلع قاعدته، فإذا كان محيط النافذة ١٠ متر فاحسب أبعاد النافذة بحيث تكون مساحتها أكبر ما يمكن

س٦٠) جد أبعاد أسطوانة دائرية قائمة يمكن وضعها داخل كرة نصف قطرها ٣√٦ سم بحيث تكون المساحة الجانبية للأسطوانة أكبر ما يمكن

عبد القادر الحسنات
078 531 88 77

ب) ١) ٤ ج) ١

٣) $3 \times 2 - 7 = 1 -$

٤) $3 - 2 \times 3 = 3 - 6 = 3 -$

٥) $س = 1، 3، 5$

٦) $ص \in \{1، 3، 5\}$

٧) $ص \in (1، 3) \cup \{-1\}$.

ج) ص عندما $س = 1$ المقام $= 0$ ومجـ $= 0$ ⟸ يوجد $= 0$

بما أن $ص(س) - 6 = 0$ ⟸ بما أن $س = 3$ فإن $ص = 6$

⟸ $\frac{1}{2} \times 6 - 7 \times 1 + ب \times 2 = 3 - 7 - ب 2 = 6 -$

د) تركيب هـ: $س^3$ $س^2$ $س$ ثابت

	1	2	م	-8
4		4	$4 + م 4$	$8 + م 4$
	1	2	$4 + م$	$8 - م 2$

الباقي $= 0$

$(س^2 + 2س + م + 4)(س - 2)$

بما أن $ص(س)$ يقبل القسمة على $(س - 2)$ فإن $ص(2) = 0$

$4 + 4 + م + 4 = 0$ ⟸ $م = -4$

الباقي $= 0$ ⟸ $0 = 8 + م 2 - 4$ ⟸ $م = 0$

و) تركيب: $س^4$ $س^3$ $س^2$ $س$ ثابت

	1	0	م	2	3
-1		-1	1	$-م - 2$	$م + 1$
	1	-1	$م + 1$	$-م - 3$	$م + 4$

الباقي $= 0$ ⟸ $م + 4 = 0$ ⟸ $م = -4$

ز) لأنه مجهول واحد.

التكوين إذا المقام $=$ صفر ⟸ التكوين إذا البسط $=$ صفر

⟸ $(-1)^3 + م(-1)^2 + 2(-1) + 3 = 0$

$1 + م - 2 + 3 = 0$

$م + 2 = 0$ ⟸ $م = -2$

ح) صفر / صفر

$|س - 3| = 0$: $س - 3 = 0$ ⟸ $س = 3$

بما $= \frac{-(س - 3) - 1}{س^2 - 8} = \frac{-س + 3 - 1}{س^2 - 8}$

بما $= \frac{-1}{(س - 2)(س + 2)(س^2 + 4)} = \frac{-1}{4 \times 4 \times 4} = \frac{-1}{64}$

ط) صفر / صفر

$|2س + 6|$: $2س + 6 = 0$ ⟸ $س = -3$

-3 نقطة تشعب إذاً يجب أن يحتوي كل من البسط والمقام على $(س + 3)$

بما $= \frac{س^2 - 9}{س^3 - 6س + 2س^2} = \frac{(س + 3)(س - 3)}{س(س + 3)(س - 2)} = -6$

بما $= \frac{س^2 - 9}{س^3 - 6س - 2س^2} = \frac{(س + 3)(س - 3)}{س(س + 3)(س - 2)} = +6$

⟸ غير موجودة

ي) صفر / صفر : $[س^2]$: $س^2 = 0$ ⟸ $س = 0$

$س = \frac{1}{2}$ نقطة تشعب

بما $= \frac{2 - س^2}{(2 + س)(2 - س)} = \frac{س^2 - 2}{س^2 - 4} = \frac{-1}{4}$

بما $= \frac{1 - 2س}{4 - 4س^2}$ ⟸ $\frac{1}{2}$ ⟸ غير موجودة

ك) $[س]$: $س = 0$ ⟸ $س = 0$

$س = 1$ نقطة تشعب وعندها $[س] = 1$

بما $= \frac{س - [س]}{س^3 - س}$ ، بما $= \frac{س - 1}{س^3 - س}$

بما $= \frac{1}{(س - 1)س} = \frac{1}{س^2 - س} = \frac{1}{2}$

٧

ه) $\lim_{س\to ٠} \frac{\text{جتا}س}{س} = \lim_{س\to ٠} \left(\frac{١}{س} + \frac{٠}{س}\right)$

$= \lim_{س\to ٠} \frac{س^٢ + ٢س - ٢س - ٤ + ٤ - ٢س + ٢}{(س-٤)(س-٢)(س+١)}$

$= \lim_{س\to ٠} \frac{س^٢ - ٢}{(س-٤)(س-٢)(س+١)}$

$= \frac{٢}{(-٤)(-٢)(١)} = \frac{٢}{٨} = \frac{١}{٤}$

و) $\lim_{س\to ١} \frac{\text{جا}(س-١)}{س^٢ - ٢س + ١} = \lim_{س\to ١} \frac{\text{جا}(س-١)}{(س-١)^٢}$

$= \lim_{س\to ١} \frac{\text{جا}(س-١)}{س-١} \times \lim_{س\to ١} \frac{١}{س-١}$

$= ١ \times \frac{١}{٠}$ غير معرفة

ز) $\lim_{س\to ٠} \frac{\text{ظا}٣س}{\text{جا}٥س} = \lim_{س\to ٠} \frac{\text{ظا}٣س}{٣س} \times \frac{٥س}{\text{جا}٥س} \times \frac{٣س}{٥س}$

$= ١ \times ١ \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٥}$

ح) $\lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{\text{ظا}٥س} = \lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{٣س} \times \frac{٥س}{\text{ظا}٥س} \times \frac{٣س}{٥س}$

$= ١ \times ١ \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٥}$

ط) $\lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{\text{جا}٥س} = \lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{٣س} \times \frac{٥س}{\text{جا}٥س} \times \frac{٣س}{٥س}$

$= ١ \times ١ \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٥}$

ي) $\lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{\text{جا}٥س} = \lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{٣س} \times \frac{٥س}{\text{جا}٥س} \times \frac{٣س}{٥س}$

$= ١ \times ١ \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٥}$

ك) $\lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{\text{جا}٥س} = \lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{٣س} \times \frac{٥س}{\text{جا}٥س} \times \frac{٣س}{٥س}$

$= ١ \times ١ \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٥}$

ل) $\lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{\text{جا}٥س} = \lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{٣س} \times \frac{٥س}{\text{جا}٥س} \times \frac{٣س}{٥س}$

$= ١ \times ١ \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٥}$

م) $\lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{\text{جا}٥س} = \lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{٣س} \times \frac{٥س}{\text{جا}٥س} \times \frac{٣س}{٥س}$

$= ١ \times ١ \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٥}$

ن) $\lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{\text{جا}٥س} = \lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{٣س} \times \frac{٥س}{\text{جا}٥س} \times \frac{٣س}{٥س}$

$= ١ \times ١ \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٥}$

س) $\lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{\text{جا}٥س} = \lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{٣س} \times \frac{٥س}{\text{جا}٥س} \times \frac{٣س}{٥س}$

$= ١ \times ١ \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٥}$

ع) $\lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{\text{جا}٥س} = \lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{٣س} \times \frac{٥س}{\text{جا}٥س} \times \frac{٣س}{٥س}$

$= ١ \times ١ \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٥}$

ف) $\lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{\text{جا}٥س} = \lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{٣س} \times \frac{٥س}{\text{جا}٥س} \times \frac{٣س}{٥س}$

$= ١ \times ١ \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٥}$

ص) $\lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{\text{جا}٥س} = \lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{٣س} \times \frac{٥س}{\text{جا}٥س} \times \frac{٣س}{٥س}$

$= ١ \times ١ \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٥}$

ق) $\lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{\text{جا}٥س} = \lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{٣س} \times \frac{٥س}{\text{جا}٥س} \times \frac{٣س}{٥س}$

$= ١ \times ١ \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٥}$

ر) $\lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{\text{جا}٥س} = \lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{٣س} \times \frac{٥س}{\text{جا}٥س} \times \frac{٣س}{٥س}$

$= ١ \times ١ \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٥}$

ش) $\lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{\text{جا}٥س} = \lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{٣س} \times \frac{٥س}{\text{جا}٥س} \times \frac{٣س}{٥س}$

$= ١ \times ١ \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٥}$

ت) $\lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{\text{جا}٥س} = \lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{٣س} \times \frac{٥س}{\text{جا}٥س} \times \frac{٣س}{٥س}$

$= ١ \times ١ \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٥}$

ث) $\lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{\text{جا}٥س} = \lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{٣س} \times \frac{٥س}{\text{جا}٥س} \times \frac{٣س}{٥س}$

$= ١ \times ١ \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٥}$

خ) $\lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{\text{جا}٥س} = \lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{٣س} \times \frac{٥س}{\text{جا}٥س} \times \frac{٣س}{٥س}$

$= ١ \times ١ \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٥}$

ذ) $\lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{\text{جا}٥س} = \lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{٣س} \times \frac{٥س}{\text{جا}٥س} \times \frac{٣س}{٥س}$

$= ١ \times ١ \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٥}$

ض) $\lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{\text{جا}٥س} = \lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{٣س} \times \frac{٥س}{\text{جا}٥س} \times \frac{٣س}{٥س}$

$= ١ \times ١ \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٥}$

ظ) $\lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{\text{جا}٥س} = \lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{٣س} \times \frac{٥س}{\text{جا}٥س} \times \frac{٣س}{٥س}$

$= ١ \times ١ \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٥}$

غ) $\lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{\text{جا}٥س} = \lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{٣س} \times \frac{٥س}{\text{جا}٥س} \times \frac{٣س}{٥س}$

$= ١ \times ١ \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٥}$

أ) $\lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{\text{جا}٥س} = \lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{٣س} \times \frac{٥س}{\text{جا}٥س} \times \frac{٣س}{٥س}$

$= ١ \times ١ \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٥}$

ب) $\lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{\text{جا}٥س} = \lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{٣س} \times \frac{٥س}{\text{جا}٥س} \times \frac{٣س}{٥س}$

$= ١ \times ١ \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٥}$

ج) $\lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{\text{جا}٥س} = \lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{٣س} \times \frac{٥س}{\text{جا}٥س} \times \frac{٣س}{٥س}$

$= ١ \times ١ \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٥}$

د) $\lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{\text{جا}٥س} = \lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{٣س} \times \frac{٥س}{\text{جا}٥س} \times \frac{٣س}{٥س}$

$= ١ \times ١ \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٥}$

هـ) $\lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{\text{جا}٥س} = \lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{٣س} \times \frac{٥س}{\text{جا}٥س} \times \frac{٣س}{٥س}$

$= ١ \times ١ \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٥}$

و) $\lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{\text{جا}٥س} = \lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{٣س} \times \frac{٥س}{\text{جا}٥س} \times \frac{٣س}{٥س}$

$= ١ \times ١ \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٥}$

ز) $\lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{\text{جا}٥س} = \lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{٣س} \times \frac{٥س}{\text{جا}٥س} \times \frac{٣س}{٥س}$

$= ١ \times ١ \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٥}$

ح) $\lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{\text{جا}٥س} = \lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{٣س} \times \frac{٥س}{\text{جا}٥س} \times \frac{٣س}{٥س}$

$= ١ \times ١ \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٥}$

ط) $\lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{\text{جا}٥س} = \lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{٣س} \times \frac{٥س}{\text{جا}٥س} \times \frac{٣س}{٥س}$

$= ١ \times ١ \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٥}$

ي) $\lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{\text{جا}٥س} = \lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{٣س} \times \frac{٥س}{\text{جا}٥س} \times \frac{٣س}{٥س}$

$= ١ \times ١ \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٥}$

ك) $\lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{\text{جا}٥س} = \lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{٣س} \times \frac{٥س}{\text{جا}٥س} \times \frac{٣س}{٥س}$

$= ١ \times ١ \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٥}$

ل) $\lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{\text{جا}٥س} = \lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{٣س} \times \frac{٥س}{\text{جا}٥س} \times \frac{٣س}{٥س}$

$= ١ \times ١ \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٥}$

م) $\lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{\text{جا}٥س} = \lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{٣س} \times \frac{٥س}{\text{جا}٥س} \times \frac{٣س}{٥س}$

$= ١ \times ١ \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٥}$

ن) $\lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{\text{جا}٥س} = \lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{٣س} \times \frac{٥س}{\text{جا}٥س} \times \frac{٣س}{٥س}$

$= ١ \times ١ \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٥}$

س) $\lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{\text{جا}٥س} = \lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{٣س} \times \frac{٥س}{\text{جا}٥س} \times \frac{٣س}{٥س}$

$= ١ \times ١ \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٥}$

ع) $\lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{\text{جا}٥س} = \lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{٣س} \times \frac{٥س}{\text{جا}٥س} \times \frac{٣س}{٥س}$

$= ١ \times ١ \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٥}$

ف) $\lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{\text{جا}٥س} = \lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{٣س} \times \frac{٥س}{\text{جا}٥س} \times \frac{٣س}{٥س}$

$= ١ \times ١ \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٥}$

ص) $\lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{\text{جا}٥س} = \lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{٣س} \times \frac{٥س}{\text{جا}٥س} \times \frac{٣س}{٥س}$

$= ١ \times ١ \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٥}$

ق) $\lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{\text{جا}٥س} = \lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{٣س} \times \frac{٥س}{\text{جا}٥س} \times \frac{٣س}{٥س}$

$= ١ \times ١ \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٥}$

ر) $\lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{\text{جا}٥س} = \lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{٣س} \times \frac{٥س}{\text{جا}٥س} \times \frac{٣س}{٥س}$

$= ١ \times ١ \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٥}$

ش) $\lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{\text{جا}٥س} = \lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{٣س} \times \frac{٥س}{\text{جا}٥س} \times \frac{٣س}{٥س}$

$= ١ \times ١ \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٥}$

ت) $\lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{\text{جا}٥س} = \lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{٣س} \times \frac{٥س}{\text{جا}٥س} \times \frac{٣س}{٥س}$

$= ١ \times ١ \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٥}$

ث) $\lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{\text{جا}٥س} = \lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{٣س} \times \frac{٥س}{\text{جا}٥س} \times \frac{٣س}{٥س}$

$= ١ \times ١ \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٥}$

خ) $\lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{\text{جا}٥س} = \lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{٣س} \times \frac{٥س}{\text{جا}٥س} \times \frac{٣س}{٥س}$

$= ١ \times ١ \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٥}$

ذ) $\lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{\text{جا}٥س} = \lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{٣س} \times \frac{٥س}{\text{جا}٥س} \times \frac{٣س}{٥س}$

$= ١ \times ١ \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٥}$

ض) $\lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{\text{جا}٥س} = \lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{٣س} \times \frac{٥س}{\text{جا}٥س} \times \frac{٣س}{٥س}$

$= ١ \times ١ \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٥}$

ظ) $\lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{\text{جا}٥س} = \lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{٣س} \times \frac{٥س}{\text{جا}٥س} \times \frac{٣س}{٥س}$

$= ١ \times ١ \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٥}$

غ) $\lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{\text{جا}٥س} = \lim_{س\to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{٣س} \times \frac{٥س}{\text{جا}٥س} \times \frac{٣س}{٥س}$

$= ١ \times ١ \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٥}$

٨

ج) $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}}$ $\frac{\text{جتا}س - \text{جا}س}{\text{جتا}٢س}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{(\text{جتا}س - \text{جا}س)(\text{جتا}س + \text{جا}س)}{(\text{جتا}س - \text{جا}س)(\text{جتا}س + \text{جا}س)}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\text{جتا}س + \text{جا}س}$

$= \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

د) $\lim_{س \to ٠}$ $\frac{\text{جا}٣س}{\text{جا}(-٢س)}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{-\text{جا}٢س} \times \frac{س}{س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا}٣س}{س} \times \frac{-٢س}{\text{جا}(-٢س)}$

$= \frac{٣}{٢} \times \frac{-٢}{-١} = \frac{٣}{١}$

هـ) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}}$ $\frac{\text{جتا}س}{\text{جا}(\frac{\pi}{٢} - س)}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جتا}س}{\text{جتا}س} = ١$

و) $\lim_{س \to ٠}$ $\frac{\text{جتا}٢س - \text{جتا}س}{س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{\text{جتا}٢س - \text{جتا}س}{س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{-\text{جا}٣س \times \text{جا}(-س)}{س \times س}$

$= \frac{٣}{١} \times \frac{١}{١} \times \frac{٣}{٥} = \frac{٩}{٥}$

ز) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}}$ $\frac{\text{جتا}٢س}{١ - \text{جا}س}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{١ - (١ - ٢\text{جا}^٢س)}{١ - \text{جا}س} = \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{٢\text{جا}^٢س}{١ - \text{جا}س}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{٢\text{جا}^٢س}{١ - \text{جا}س} \times \frac{١ + \text{جا}س}{١ + \text{جا}س}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{٢\text{جا}^٢س (١ + \text{جا}س)}{١ - \text{جا}^٢س}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{٢(\text{جا}س)^٢ \times ٢}{\text{جتا}^٢س}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{٢(٢\text{جا}س\text{جتا}س)^٢ \times ٢}{\text{جتا}^٢س}$

$= \frac{٢ \times ٤\text{جا}^٢س \times ٢}{١} = ١٦ \times \frac{١}{٢} = ٨$

ح) $\lim_{س \to ٠}$ $\frac{\sqrt{\text{ظا}س + ١} - ١}{س}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{\text{ظا}س + ١} - ١}{س} \times \frac{\sqrt{\text{ظا}س + ١} + ١}{\sqrt{\text{ظا}س + ١} + ١}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{\text{ظا}س}{س(\sqrt{\text{ظا}س + ١} + ١)}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا}س}{\text{جتا}س} \times \frac{١}{س} \times \frac{١}{\sqrt{\text{ظا}س + ١} + ١}$

$= \frac{١}{١ + ١} = \frac{١}{٢}$

ط) $\lim_{س \to ٠}$ $\frac{\text{ظا}س - \text{ظا}س}{س^٣}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{\text{ظا}س(١ - \text{ظا}^٢س)}{س^٣}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{\text{ظا}س}{س} \times \frac{١ - \text{ظا}^٢س}{س^٢}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{\text{ظا}س}{س} \times \lim_{س \to ٠} \frac{١ - \text{ظا}^٢س}{س^٢}$

$= ١ \times \lim_{س \to ٠} \frac{١ - \text{ظا}^٢س}{س^٢}$

$\lim_{س \to ٠^+} \frac{١ - \text{ظا}^٢س}{س^٢} = +\infty$

$\lim_{س \to ٠^-} \frac{١ - \text{ظا}^٢س}{س^٢} = -\infty$ ⟸ غير موجودة

ي) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}}$ $\frac{\text{جا}س - \text{جتا}س}{\text{جا}٢س}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جا}س - \text{جتا}س}{٢\text{جا}س\text{جتا}س}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جا}س - \text{جتا}س}{٢\text{جا}س\text{جتا}س} \times \frac{\text{جا}س + \text{جتا}س}{\text{جا}س + \text{جتا}س}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جا}^٢س - \text{جتا}^٢س}{٢\text{جا}س\text{جتا}س(\text{جا}س + \text{جتا}س)}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{-\text{جتا}٢س}{\text{جا}٢س(\text{جا}س + \text{جتا}س)}$

$= \frac{-١}{١(١ + ٠)} = -١$

ط) $\frac{ص}{ص}$

$جا\frac{\pi}{س} = جا(\pi - \frac{\pi}{س})$

$\lim_{س\to1} \frac{س\, جا(\pi - \frac{\pi}{س})}{س-1} = \lim \frac{س\, جا\pi(1-\frac{1}{س})}{س-1}$

$= \lim_{س\to1} \frac{س\, جا\pi(\frac{س-1}{س})}{\frac{س-1}{س} \times س} = \pi$

$= \pi$

ي) $\frac{ص}{ص} \Leftarrow \lim_{س\to\frac{\pi}{3}} \frac{2جتاس - 1}{س - \frac{\pi}{3}}$

$= \lim_{س\to\frac{\pi}{3}} \frac{2(جتاس - \frac12)}{س - \frac{\pi}{3}}$; $\frac12 = جتا\frac{\pi}{3}$

$\Leftarrow \lim \frac{2(جتاس - جتا\frac{\pi}{3})}{س - \frac{\pi}{3}}$

$= \lim_{س\to} \frac{2(-2)\, جا\frac{س+\frac{\pi}{3}}{2} \times جا\frac{س-\frac{\pi}{3}}{2}}{س-\frac{\pi}{3}}$

$= \frac12$

$= 4 \times -2\, جا((س+\frac{\pi}{3}) \times \frac12) \times \frac{1}{4}$

$= -2\, جا(\frac12 \times \frac{2\pi}{3})$

$= -2\, جا\frac{\pi}{6} = -2 \times \frac12 = -1$

$= -2\, جا\frac{\pi}{3} = -2 \times \frac{\sqrt3}{2} = -\sqrt3$

ك) $\frac{ص}{ص} \Leftarrow \lim_{س\to\frac{\pi}{3}} \frac{(ظاس - \sqrt3)(ظاس + \sqrt3)}{3(س - \frac{\pi}{3})}$

$= \lim_{س\to\frac{\pi}{3}} \frac{ظاس - \sqrt3}{س - \frac{\pi}{3}} \times \lim \frac{ظاس + \sqrt3}{3}$

$\sqrt3 = ظا\frac{\pi}{3}$

$\Leftarrow \lim \frac{ظاس - ظا\frac{\pi}{3}}{س - \frac{\pi}{3}} \times (\frac{\sqrt3 + \sqrt3}{3})$

$= \frac{2\sqrt3}{3} \times \lim_{س\to\frac{\pi}{3}} \frac{ظاس - ظا\frac{\pi}{3}}{س - \frac{\pi}{3}}$

٩

لكن $ظا(س-ص) = \frac{ظاس - ظاص}{1 + ظاس\, ظاص}$

بالضرب التبادلي

$ظاس - ظاص = ظا(س-ص)(1 + ظاس\, ظاص)$

$\Leftarrow$

$ظاس - ظا\frac{\pi}{3} = ظا(س - \frac{\pi}{3})(1 + ظاس \times ظا\frac{\pi}{3})$

$= \frac{2\sqrt3}{3} \lim \frac{ظا(س - \frac{\pi}{3})(1 + ظاس\, ظا\frac{\pi}{3})}{س - \frac{\pi}{3}}$

$= 1$

$= \frac{2\sqrt3}{3} \times 1 \times (1 + ظا\frac{\pi}{3} \times ظا\frac{\pi}{3})$

$= \frac{2\sqrt3}{3} \times (1 + \sqrt3 \times \sqrt3)$

$= \frac{2\sqrt3}{3} \times (1+3) = \frac{8\sqrt3}{3}$

٥) متصل ⟸ لهما ≠ ٠
المميز > ٠ ⟸ ب٢ – ٤أجـ > ٠
(م)٢ – ٤ × ٤ × م < ٠ ⟸ م٢ – ١٦ < ٠
⟸ م < ١

٦) بما (م س٣ – م س٢ + ١) = ٦
س = ٢
٨م – ٤م + ١ = ٦ ⟸ ٨م – ٤م – ٥ = ٠
بما (س٢ – ٣س + م) = ٦
س = ٢
٤ – ٦ + م = ٦ ⟸ م – ٢ = ٠

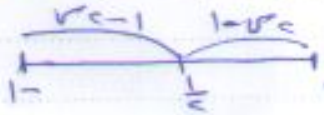
⟸ –٨ + ٤م + ٨ = ٨م
٨م – ٤م = ٠ ⟸ ٤م = ١٣
م = ١٣/٤

٧) [٣] = أ + ٣ب = ٣ + ١
٣ + أ – ٣ب = ١ ⟸ أ = ١

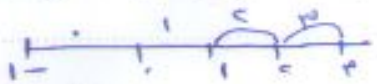
٨) ق(٢) = (٥ × ٢ – ٨)/٢ = ٢/٢ = ١
بما ق متصل عند س = ٢
ج → ٢+ : (٥ × ٢ – ٨)/٢ = ١
ج → ٢– : (١/٢ × ٤ – ج)/(ج – ٢) يجب أن يساوي ١
ب = (ق(س) – ق(٢))/(س – ٢) = (١/٢ س – ١)/(س – ٢) = ١/٢
⟸ ق متصل عند س = ٢

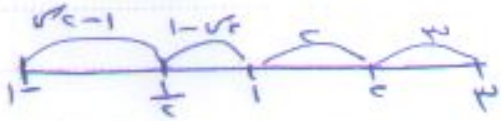
٩) [س + ٢] : س = ج
ق(س) = { (س – ٣)٣ × ٥ ، س ≤ ٣
(س – ٣)٣ × ٤ ، س > ٣
ق(٣) = (٠)٣ × ٥ = ٠
بما ق متصل عند س = ٣
٣+ : ٠ × ٥ = ٠
٣– : ١ – ٣ = ٠ ⟸ ج = ٤ × ٠ = ٠
⟸ ق متصل عند س = ٣

١٠) أ) |س – ١| = ١ – س ⟸ س – ١ ≤ ٠ ⟸ س = ١/٢



[س + ١] : س = ١ أو س = ج أو س = ٢ أو س = ٣





ق متصل على (–∞، ١/٢) ، (١، ج)
لأنه كثير حدود
ق متصل على (١/٢، ١) ، (ج، ٢)
لأنه ثابت

الأطراف:
س = –١ : ق(–١) = ١ – (–١) = ٢
بما ق متصل + بما ق = ٢ ⟸ ق متصل عند س = –١
س = ٣ : ق(٣) = [٣ + ١] = [٤] = ٤
بما ق = ٣
س ≠ ٣ ⟸ غير متصل عند س = ٣

نقاط التشعب:
س = ١/٢ : ق(١/٢) = |١/٢ ج – ١| = |١ – ١| = ٠
بما ق متصل + : ١/٢ ج – ١ = ٠
بما ق متصل – : ١ – ١/٢ ج = ٠
⟸ ق متصل عند س = ١/٢

س = ١ : ق(١) = |ج – ١| = |١ – ١| = ٠
بما ق متصل + : ١ – ج = ٠
بما ق متصل – : ج – ١ = ٠
⟸ غير متصل عند س = ١

س = ٢ : ق(٢) = [٢ + ١] = [٣] = ٣
بما ق متصل + : ٣ = ٣
بما ق متصل – : ج = ٣
⟸ ق غير متصل عند س = ٢

القرار: ق متصل ل [–١، ٣] – {١/٢، ١، ٢، ٣}
أو متصل ل [–١، ٣) – {١/٢، ١، ٢}.

11

(١١) $م.ت = \frac{ق(\frac{\pi}{12}) - ق(0)}{\frac{\pi}{12} - 0}$

$= \frac{(جا\frac{\pi}{4} + 2جتا\frac{\pi}{4}) - (جا0 + 2جتا0)}{\frac{\pi}{12}}$ (قاعدة)

$= \frac{\sqrt{2} + 2\times\frac{1}{\sqrt{2}} - 0 - 2}{\frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\frac{\pi}{12}}$

(١٢) $م.ت_{[-1,3]}(ق) = م.ت_{[-1,3]}(أس^2) - م.ت_{[-1,3]}(ق(س))$

$2 = \frac{أ3^2 - أ(-1)^2}{3-(-1)} - \frac{ق(3)-ق(-1)}{3-(-1)}$

$2 = \frac{9أ}{4} - 8$

$2+8 = \frac{9أ}{4} \Leftarrow أ = 10$

(١٣) $م.ت_{[1,3]}(ق) = م.ت_{[1,3]}(س^3) + م.ت_{[1,3]}(س^2)$

$6 = \frac{ق(3)-ق(1)}{3-1} + \frac{(3)^3-(1)^3}{3-1}$

$6 = \frac{ق(3)-4}{2} + \frac{9-1}{2}$

$6 = \frac{ق(3)-4}{2} + 4$

$2 = \frac{ق(3)-4}{2}$

$\Leftarrow ق(3) = 4+4 \Leftarrow ق(3) = 8$

(١٤) أ) $ق'(س) = \lim_{ع\to س} \frac{ق(ع)-ق(س)}{ع-س}$

$= \lim_{ع\to س} \frac{ع^3 + 2\sqrt{2}ع - س^3 - 2\sqrt{2}س}{ع-س}$

$= \lim_{ع\to س} \frac{ع^3-س^3}{ع-س} + \lim_{ع\to س} \frac{2\sqrt{2}(ع-س)}{ع-س} \times \frac{ع+س+2\sqrt{2}}{ع+س+2\sqrt{2}}$

$= \lim_{ع\to س} \frac{(ع-س)(ع^2+ع س+س^2)}{ع-س} + \lim_{ع\to س} \frac{(ع-س)(2\sqrt{2}ع+2\sqrt{2}س+8)}{ع-س}$

$= \lim_{ع\to س} (ع^2+ع س+س^2) + \lim_{ع\to س} (2\sqrt{2}ع+2\sqrt{2}س+8)$

$= 3س^2 + 4\sqrt{2}س + 8$

ب) $ق'(س) = \lim_{ع\to س} \frac{ع^2 جا ع - س^2 جا س}{ع-س}$

$= \lim_{ع\to س} \frac{ع^2 جا ع - س^2 جا ع + س^2 جا ع - س^2 جا س}{ع-س}$

$= \lim_{ع\to س} جا ع \frac{(ع^2-س^2)}{ع-س} + \lim_{ع\to س} س^2 \frac{(جا ع - جا س)}{ع-س}$

$= \lim_{ع\to س} جا ع (ع+س) + \lim_{ع\to س} س^2 \frac{2جتا(\frac{ع+س}{2}) جا(\frac{ع-س}{2})}{ع-س}$

$= جا س (س+س) + س^2 \times 1 \times جتا س$

$= 2س جا س + س^2 جتا س$

ج) $ق'(س) = \frac{أ جتا س - 3}{\sqrt{س}}$ ، $ق'(\frac{\pi}{2}) = ؟$

$ق'(\frac{\pi}{2}) = \frac{أ جتا\frac{\pi}{2} - 3}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$

$-4 = \frac{أ\times 0 - 3}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$

$-4\sqrt{\frac{\pi}{2}} = -3$

$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{4}$

$\frac{\pi}{2} = \frac{9}{16}$

$\pi = \frac{9}{8}$

(١٥) $ق'(س) = \lim_{ع\to س} \frac{ق(ع)-ق(س)}{ع-س}$

$= \lim_{ع\to س} \frac{ع^3 + 2\sqrt{2}ع - س^3 - 2\sqrt{2}س}{ع-س}$

$= \lim_{ع\to س} \frac{ع^3-س^3}{ع-س} + \lim_{ع\to س} \frac{2\sqrt{2}(ع-س)}{ع-س} \times \frac{ع+س+2\sqrt{2}}{ع+س+2\sqrt{2}}$

$= \lim_{ع\to س} \frac{(ع-س)(ع^2+ع س+س^2)}{ع-س} + \lim_{ع\to س} \frac{(ع-س)(2\sqrt{2}ع+2\sqrt{2}س+8)}{ع-س}$

$= \lim_{ع\to س} (ع^2+ع س+س^2) + \lim_{ع\to س} (2\sqrt{2}ع+2\sqrt{2}س+8)$

$= 3س^2 + 4\sqrt{2}س + 8$

(١٦) $ق'(س) = \lim_{ع\to س} \frac{ق(ع)-ق(س)}{ع-س}$

$= \lim_{ع\to س} \frac{ع^3 + 2\sqrt{2}ع - س^3 - 2\sqrt{2}س}{ع-س}$

$= \lim_{ع\to س} \frac{ع^3-س^3}{ع-س} + \lim_{ع\to س} \frac{2\sqrt{2}(ع-س)}{ع-س} \times \frac{ع+س+2\sqrt{2}}{ع+س+2\sqrt{2}}$

$= \lim_{ع\to س} \frac{(ع-س)(ع^2+ع س+س^2)}{ع-س} + \lim_{ع\to س} \frac{(ع-س)(2\sqrt{2}ع+2\sqrt{2}س+8)}{ع-س}$

$= \lim_{ع\to س} (ع^2+ع س+س^2) + \lim_{ع\to س} (2\sqrt{2}ع+2\sqrt{2}س+8)$

$= 3س^2 + 4\sqrt{2}س + 8$

(١٧) $ق'(س) = \lim_{ع\to س} \frac{ق(ع)-ق(س)}{ع-س}$

$= \lim_{ع\to س} \frac{ع^3 + 2\sqrt{2}ع - س^3 - 2\sqrt{2}س}{ع-س}$

$= \lim_{ع\to س} \frac{ع^3-س^3}{ع-س} + \lim_{ع\to س} \frac{2\sqrt{2}(ع-س)}{ع-س} \times \frac{ع+س+2\sqrt{2}}{ع+س+2\sqrt{2}}$

$= \lim_{ع\to س} \frac{(ع-س)(ع^2+ع س+س^2)}{ع-س} + \lim_{ع\to س} \frac{(ع-س)(2\sqrt{2}ع+2\sqrt{2}س+8)}{ع-س}$

$= \lim_{ع\to س} (ع^2+ع س+س^2) + \lim_{ع\to س} (2\sqrt{2}ع+2\sqrt{2}س+8)$

$= 3س^2 + 4\sqrt{2}س + 8$

(١٨) $ق'(س) = \lim_{ع\to س} \frac{ق(ع)-ق(س)}{ع-س}$

$= \lim_{ع\to س} \frac{ع^3 + 2\sqrt{2}ع - س^3 - 2\sqrt{2}س}{ع-س}$

$= \lim_{ع\to س} \frac{ع^3-س^3}{ع-س} + \lim_{ع\to س} \frac{2\sqrt{2}(ع-س)}{ع-س} \times \frac{ع+س+2\sqrt{2}}{ع+س+2\sqrt{2}}$

$= \lim_{ع\to س} \frac{(ع-س)(ع^2+ع س+س^2)}{ع-س} + \lim_{ع\to س} \frac{(ع-س)(2\sqrt{2}ع+2\sqrt{2}س+8)}{ع-س}$

$= \lim_{ع\to س} (ع^2+ع س+س^2) + \lim_{ع\to س} (2\sqrt{2}ع+2\sqrt{2}س+8)$

$= 3س^2 + 4\sqrt{2}س + 8$

(١٩) $ق'(س) = \lim_{ع\to س} \frac{ق(ع)-ق(س)}{ع-س}$

$= \lim_{ع\to س} \frac{ع^3 + 2\sqrt{2}ع - س^3 - 2\sqrt{2}س}{ع-س}$

$= \lim_{ع\to س} \frac{ع^3-س^3}{ع-س} + \lim_{ع\to س} \frac{2\sqrt{2}(ع-س)}{ع-س} \times \frac{ع+س+2\sqrt{2}}{ع+س+2\sqrt{2}}$

$= \lim_{ع\to س} \frac{(ع-س)(ع^2+ع س+س^2)}{ع-س} + \lim_{ع\to س} \frac{(ع-س)(2\sqrt{2}ع+2\sqrt{2}س+8)}{ع-س}$

$= \lim_{ع\to س} (ع^2+ع س+س^2) + \lim_{ع\to س} (2\sqrt{2}ع+2\sqrt{2}س+8)$

$= 3س^2 + 4\sqrt{2}س + 8$

١٢

١٥) عندما $س \to ٢$

$ق(س) = \frac{٣}{س-٣} + ٤$

$ق'(س) = \frac{ق(س) - ق(٤)}{س - ٤}$ حيث $س \neq ٤$

$= \frac{\frac{٣}{٤-٣} - ٤}{س - ٤}$

$= \frac{\frac{٣}{١-س} - ٤}{س - ٤}$

$= \frac{٣ - ٤(١-س)}{(١-س)(س-٤)}$

$= \frac{٣ - ٤ + ٤س}{(١-س)(س-٤)}$

$= \frac{٤س - ١}{(١-س)(س-٤)}$

$ق'(٣) = \frac{٤(٣) - ١}{(١-٣)(٣-٤)} = \frac{١١}{٢}$

عندما $س < ٤$ ، $ق(س) = ٣س + ٢$

$ق'(س) = \frac{ق(س) - ق(٤)}{س - ٤}$

$= \frac{(٣س+٢) - ١٤}{س - ٤}$

$= \frac{٣س - ١٢}{س - ٤}$

$= \frac{٣(س-٤)}{س-٤} = ٣$

عندما $س = ٤$

$ق'(٤) = \lim_{س \to ٤^+} \frac{ق(س) - ق(٤)}{س - ٤}$

$= \lim_{س \to ٤^+} \frac{\frac{٣}{س-٣} + ٤ - ١٤}{س - ٤}$

$= \lim_{س \to ٤^+} \frac{\frac{٣}{س-٣} - ١٠}{س - ٤}$

$= \lim_{س \to ٤^+} \frac{٣ - ١٠(س-٣)}{(س-٣)(س-٤)}$

$= \lim_{س \to ٤^+} \frac{٣ - ١٠س + ٣٠}{(س-٣)(س-٤)}$

$= \lim_{س \to ٤^+} \frac{-١٠س + ٣٣}{(س-٣)(س-٤)}$

$= \lim_{س \to ٤^+} \frac{-١٠(س - ٣.٣)}{(س-٣)(س-٤)}$

$= \lim_{س \to ٤^+} \frac{-١٠}{س-٣} = -١٠$

$ق'(٤) = ق'(٤^+) = -١٠$

$ق'(٤^-) = ٢$

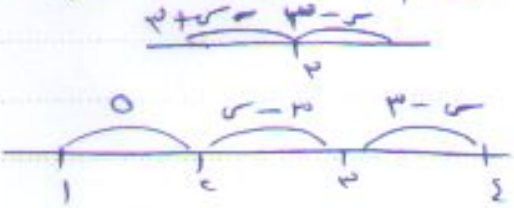
$ق'(٤^+) \neq ق'(٤^-)$ ⟹ $ق'(٤)$ غير موجودة

$ق'(س) = \begin{cases} ٣ & ، س < ٤ \\ -١٠ & ، س = ٤ \\ ٢ & ، س > ٤ \end{cases}$

١٦) $ق(س) = |س - ٣| + ٤$ في $(١، ٥)$

قيمتها (٥).

$|س - ٣| = ٠ \Leftarrow س = ٣$



$ق(س) = \begin{cases} ٥ & ، ١ \leq س \leq ٢ \\ ٣ - س & ، ٢ < س < ٣ \\ س - ٣ & ، ٣ \leq س \leq ٤ \end{cases}$

$ق(٣)$ غير موجودة، لأن نهايتها عندها مختلفتان

عند $س = ٢$: نهاية $ق(س)$ عندما $س \to ٢^+$ هي $س - ٣$

نهاية $ق(س)$ عندما $س \to ٢^-$ هي $٣ - س$

$١ \neq ٠$

$\Leftarrow$ $ق$ غير متصلة عند $س = ٢$

$\Leftarrow$ $ق'(٢)$ غير موجودة

عند $س = ٣$: $ق(٣) = ٤$.

نهاية $ق(س)$ عندما $س \to ٣^+$ هي $س - ٣$

نهاية $ق(س)$ عندما $س \to ٣^-$ هي $٣ - س$

$٠ = ٠$ ⟹ $ق$ متصلة عند $س = ٣$

$ق'(س) = \begin{cases} ٠ & ، ١ < س < ٢ \\ -١ & ، ٢ < س < ٣ \\ ١ & ، ٣ < س < ٤ \end{cases}$

$ق'(٣)$ غير موجودة، لأن $ق'(٣^+) = ١$ ، $ق'(٣^-) = -١$

$ق'(٣^+) \neq ق'(٣^-)$

$ق'(س) = \begin{cases} -٣ & ، س < ٢ \\ ٤ & ، س > ٢ \\ \text{غير معرفة} & ، س = ٢ \end{cases}$

أ) $ق$ غير متصلة عند $س = ٢$

⟹ $ق'(٢)$ غير موجودة

١٧) $ف(س) = \frac{س^2+1}{م(س)-ج}$

$ف'(س) = \frac{(2س)(م(س)-ج) - م'(س)(س^2+1)}{(م(س)-ج)^2}$

لكنه $م(ج)$ غير معلومة :

$ف(ج) = \frac{(ج)^2+1}{م(ج)-ج}$

$0 = \frac{5}{م(ج)-ج}$ ⟸

$5م(ج) - 10 = 0$ ⟸ $م(ج) = \frac{10}{5} = 2$

⟸ $3 = \frac{4(2-ج) - م'(ج)(4+1)}{(2-ج)^2}$

$3 = 4 - 5م'(ج)$

⟸ $م'(ج) = \frac{3-4}{-5} = \frac{1}{5}$

١٨) $ف(س) = \frac{س^2+1}{م(س)-2}$

$ف(س) \times م(س) - ف(س) = س^2+1$

$م(س) = \frac{ف(س)+س^2+1}{ف(س)}$

$م'(س) = \frac{(ف'(س)+2س)ف(س) - ف'(س)(ف(س)+1)}{(ف(س))^2}$

$= \frac{(3+4)\times 5 - 3(4+5+1)}{(5)^2}$

$= \frac{35-30}{25} = \frac{1}{5}$

١٩) $ف(س) = \begin{cases} 6م س^2+ب & س \le 1 \\ 3م س + 5ب & س > 1 \end{cases}$

$ف'_+(1) = ف'_-(1)$ ⟸ $6م + ب = 3م + 5ب$

⟸ $3م - 4ب = 0$ ⟸ $م = ب$

$ف(س)$ موجودة ⟸ $ف$ متصل ⟸ النهاية موجودة

$6م(1)^2 + ب(1) = م(1)^2 + 5ب(1) - 12$

$6م + ب = م + 5ب - 12$

لكنه $م = ب$ ⟸

$6م + م = م + 5م - 12$

$3م - 6م = -12$

$-3م = -12$ ⟸ $م = 4$

⟸ $ب = 4$

ج) $\left(\frac{س^2+م}{س-1}\right)'_{س=2} = (ف \circ ه)'(2)$

$ف'(ه(2)) \times ه'(2) = \frac{2(2)(2-1) - 1(2^2+م)}{(2-1)^2}$

$\sqrt{ه(2)^2+5} \times \sqrt{ه(2)+4} = \frac{4-4-م}{(1)^2}$

$\sqrt{4+5} \times \sqrt{4+4} = -م$

$3 \times 2 = -م$ ⟸ $م = -6$

٢٠) $س^2 + حاص - قتاس = ص^2$

$2س + جتاص ص' - 2ص ص' قاس ظاس$

$= 2ص ص'$

$ص' جتاص - 2ص ص' = -2 قاس ظاس - س$

$ص' (جتاص - 2ص) = -2 قاس ظاس - س$

$ص' = \frac{-2 قاس ظاس - س}{جتاص - 2ص}$

$= \frac{2 قاس ظاس + س}{2ص - جتاص}$

١٣

١٨) $ف(س) = 3س^2 + ب س - م$

$ف(2) = 12 + 6ب - م = 13$ ☆

$ف(س) = 6س + ب$

$ف(2) = 12 + ب = 18$ ☆

$ب = \frac{18-12}{2}$ ⟸ $ب = 3$

بالتعويض : $12 + 6 \times 3 - م = 13$

$م = 35 - 13$ ⟸ $م = 22$

س٤٢) $س = جا ص$

$1 = جتا ص \, ص'$

$ص' = \frac{1}{جتا ص} \in ص' = قا ص$

$ص'' = قا ص ظا ص \, ص'$

$= قا ص ظا ص \times قا ص$

$ص'' = قا^2 ص ظا ص$

س٤٣) $ص = (ظا س + قا س)^{ن}$

$ص' = ن (ظا س + قا س)^{ن-1} (قا^2 س + قا س ظا س)$

$= ن (ظا س + قا س)^{ن} \times \frac{1}{(ظا س + قا س)} (قا^2 س + قا س ظا س)$

$= ن ص \times \frac{قا^2 س + قا س ظا س}{ظا س + قا س}$

$= ن ص * \frac{قا س (قا س + ظا س)}{ظا س + قا س}$

$= ن ص \times قا س$

س٤٤) $و(س) = ٤ - س^{ن}$

$و'(س) = ٤ ن س^{ن-1}$

$و''(س) = ٤ ن (ن-1) س^{ن-2}$

$و''(٣) = ٤ ن (ن-1) (ن-2) ٣^{ن-3}$

$= م ٣^{ن-3}$

$\Leftarrow ن - 3 = ٠ \Leftarrow ن = ٣$

$\Leftarrow م = ٤ \times ٣ (٣-1) (٣-2)$

$= ١٢ \times ٣ \times ٢ \Leftarrow م = ٩٦$

س٤٥) $ص = (و(س^2 + س + ١))^{٣}$

$\frac{ك ص}{ك س} = ٣ (و(س^2 + س + ١))^{٢} \times و'(س^2 + س + ١) \times (٢ س + ١)$

$ص'(-٢) = ٣ (و(٤ - ٢))^{٢} \times و'(٤ - ٢) \times (-٤ + ١)$

$= ٣ (-٣)^{٢} \times (-٣) \times (-٣)$

$= ٢٧ \times ٩ = ٢٤٣$

س٤٦) $و(ظا س) = قتا^2 س$

$و'(ظا س) \times جتا^2 س = -$ ✗ $قتا^2 س ظتا س$

$ظا س = \frac{1}{٢} \in س = ٣٠^{\circ}$ أو $\frac{\pi}{٦}$

$س = ١٥^{\circ}$ أو $\frac{\pi}{١٢}$

$و'(\frac{1}{٢}) \times جتا^2 \frac{\pi}{٦} = - قتا^2 \frac{\pi}{١٢} ظتا \frac{\pi}{١٢}$

$و'(\frac{1}{٢}) \times \frac{1}{٤} = - \frac{1}{(\frac{\sqrt{٣}}{٢})^2} \times \frac{جتا \frac{\pi}{١٢}}{جا \frac{\pi}{١٢}}$

$و'(\frac{1}{٢}) = - ٢ \times \frac{جتا \frac{\pi}{١٢}}{جا \frac{\pi}{١٢}} \times \frac{جتا \frac{\pi}{١٢}}{جا \frac{\pi}{١٢}}$

$= - ٢ \times \frac{جتا^2 \frac{\pi}{١٢}}{جا^2 \frac{\pi}{١٢}} \times \frac{جا^2 \frac{\pi}{١٢}}{جتا^2 \frac{\pi}{١٢}} = - ٤$

س٤٧) $ص = جا^3 (٥ هـ^{٢ س})$

$ص = (جا (٥ هـ^{٢ س}))^{٣}$

$\frac{ك ص}{ك هـ} = ٣ (جا (٥ هـ^{٢ س}))^{٢} \times جتا (٥ هـ^{٢ س}) \times ١٠ هـ^{٢ س}$

$هـ = \sqrt{٣ س + ٥}$

$\frac{ك هـ}{ك س} = \frac{٣ س^2}{٢ \sqrt{٣ س^3 + ٥}}$

$\frac{ك ص}{ك س} = \frac{ك ص}{ك هـ} \times \frac{ك هـ}{ك س}$

$= ٣٠ هـ^{٢ س} جا^2 (٥ هـ^{٢ س}) جتا (٥ هـ^{٢ س}) \times \frac{٣ س^2}{٢ \sqrt{٣ س^3 + ٥}}$

$= ٣٠ جا (٥ هـ^{٢ س}) جتا (٥ هـ^{٢ س}) \times \frac{٣ س^2 هـ^{٢ س}}{\sqrt{٣ س^3 + ٥}}$

$= ١٥ جا (١٠ هـ^{٢ س}) \times \frac{٣ س^2 هـ^{٢ س}}{\sqrt{٣ س^3 + ٥}}$

٢٨) $س^2 + ص^2 = 18$

$(0,6) : (0)^2 + (6)^2 \neq 18$

$\Leftarrow$ لا تقع على الدائرة

$\Leftarrow$ نجد نقطة التماس $(س_1, ص_1)$

$م = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$

$م = \frac{1 - 6}{3 - 0}$

نكتب الميل على صورة مشتقة كما يلي:

$2س + 2ص \cdot ص' = 0 \Leftarrow ص' = \frac{-س}{ص}$

$\Leftarrow \frac{-س}{ص} = \frac{6 - ص}{-س}$

$\Leftarrow س^2 = 6ص - ص^2$

نكتب $س^2 = 18 - ص^2$

$18 - ص^2 = 6ص - ص^2$

$18 = 6ص \Leftarrow ص = 3$

$ص = 3 \Leftarrow س^2 = 6 \times 3 - 3^2$

$= 9$

$\Leftarrow س = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

$\Leftarrow$ هنالك نقطتا تماس

① $(3, 3)$ وعندها المعادلة

$ص - ص_1 = م(س - س_1)$

$ص - 3 = \frac{-3}{3}(س - 3)$

$ص - 3 = -1(س - 3)$

② $(-3, 3)$ $\Leftarrow$

$ص - 3 = \frac{-3}{3}(س - (-3))$

$ص - 3 = 1(س + 3)$

10

٢٩) يوازي $ص$ $\Leftarrow$ تساوي صفر

ميل المستقيم: $ص' + 1 = 0 \Leftarrow ص' = -1$

ميل المماس: $2س + 2ص \cdot ص' = 0$

$ص' = \frac{-س}{ص}$

$م_1 = م_2 \Leftarrow \frac{-س}{ص} = -1 \Leftarrow س = ص$

$س^2 + ص^2 = 8 \Leftarrow س^2 + س^2 = 8$

$2س^2 = 8 \Leftarrow س^2 = 4 \Leftarrow س = \pm 2$

نقطتا التماس $\Leftarrow (2, 2)$ و $(-2, -2)$

① عند $(2, 2)$: $م = \frac{-2}{2} = -1$

$ص - 2 = -1(س - 2)$

② عند $(-2, -2)$ و $م = \frac{-(-2)}{-2} = -1$

$ص - (-2) = -1(س - (-2))$

$ص + 2 = -(س + 2)$

٣٠) نجد ميل:

ميل $(س) = \frac{-1}{س^2}$

$م$ ميل $(2) = \frac{-1}{4}$

معادلة المماس: $ص - \frac{1}{4} = \frac{-1}{4}(س - 2)$

المقطع السيني: $ص = 0 \Leftarrow \frac{-1}{4} = \frac{-1}{4}(س - 2)$

$\times 4 \Leftarrow 2 = س - 2 \Leftarrow س = 4$

معادلة العمودي: الميل $= -(\frac{2}{-1}) = 4$

$ص - \frac{1}{4} = 4(س - 2)$

المقطع السيني: $ص = 0 \Leftarrow -\frac{1}{4} = 1 - 8\sqrt{4}$

$\times 8 \Leftarrow -1 = 8س - 16 \Leftarrow س = \frac{15}{8}$

طول قاعدة المثلث $= 4 - \frac{15}{8}$ ، $\frac{32 - 15}{8} = \frac{17}{8}$

ارتفاع المثلث $= ص = \frac{1}{4}$

مساحة المثلث $= \frac{1}{2} \times$ القاعدة $\times$ الارتفاع

$= \frac{1}{2} \times \frac{17}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{17}{32}$

١٦

(٣٣) ف = $\frac{٣}{٤}$ ن^{٢} − ٨ ن^{٢} + ٦ ن + ١٠

ع = ٦ ن^{٢} − ١٦ ن + ٦

العلاقة = ١٠ ⇐ ف = ١٠

$\frac{٣}{٤}$ ن^{٣} − ٨ ن^{٢} + ٦ ن + ١٠ = ١٠

ن ($\frac{٣}{٤}$ ن^{٢} − ٨ ن + ٦) = ٠

$\frac{١}{٤}$ ن (ن − ٣) (ن − ٨) = ٠

ن = ٠ ⇐ ع = ٦

ن = ٣ ⇐ ع = ٥٤ − ٨٤ + ٦ = −١٦

ن = ٨ ⇐ ع = ٣٨٤ − ٦٤ + ٦

= ١٢ م/ث

(٣٤) ف = ٣ ن^{٢} − ٥ ن^{٣}

بفرض ف أولاً :

أقصى ارتفاع ⇐ ع = ٠

ع = ف′ = ٦ ن − ١٥ ن^{٢} = ٠

ن (٦ − ١٥ ن) = ٠

ن = ٠ ⇐ ف = ٠

ن = $\frac{٦}{١٥}$ = $\frac{٢}{٥}$ ⇐ ف = ٣ × $\frac{٤}{٢٥}$ − ٥ × $\frac{٨}{١٢٥}$

= $\frac{١٢}{٢٥}$ − $\frac{٨}{٢٥}$

= $\frac{٤}{٢٥}$ م

(٣٥) ف = ٣ ن^{٢} − ٥ ن^{٣}

بفرض ف أولاً :

أقصى ارتفاع ⇐ ع = ٠

ع = ف′ = ٦ ن − ١٥ ن^{٢} = ٠

ن (٦ − ١٥ ن) = ٠

ن = ٠ ⇐ ف = ٠

ن = $\frac{٦}{١٥}$ = $\frac{٢}{٥}$ ⇐ ف = ٣ × $\frac{٤}{٢٥}$ − ٥ × $\frac{٨}{١٢٥}$

= $\frac{١٢}{٢٥}$ − $\frac{٨}{٢٥}$

= $\frac{٤}{٢٥}$ م

(٣٦) ف^{٣} = ع^{٢} + ٢

٣ ف^{٢} × ف′ = ٢ ع × ع′

٣ ف^{٢} × ع = ٢ ع × ت

ت (ن) = $\frac{٣}{٢}$ ف^{٢}

السرعة = ٥ ⇐ ف^{٣} = (٥)^{٢} + ٢

⇐ ف^{٢} = ٢٧

ف = ٣

ت (ن) = $\frac{٣}{٢}$ × (٣)^{٢} = $\frac{٨١}{٢}$

(٣٤) ف = ٢ ن^{٣} − م ن^{٢} + ٢

ع = ٦ ن^{٢} − ٢ م ن

ت = ١٢ ن − ٢ م

ع = ١٢ ⇐ ٦ ن^{٢} − ٢ م ن = ١٢ ... (١)

ت = ١٨ ⇐ ١٢ ن − ٢ م = ١٨ ... (٢)

(٢) ⇐ ٦ ن − م = ٩ ⇐ م = ٦ ن − ٩

(١) ⇐ ٦ ن^{٢} − ٢ ن (٦ ن − ٩) = ١٢

٦ ن^{٢} − ١٢ ن^{٢} + ١٨ ن = ١٢

− ٦ ن^{٢} + ١٨ ن − ١٢ = ٠

ن^{٢} − ٣ ن + ٢ = ٠

(ن − ١) (ن − ٢) = ٠

ن = ١ ⇐ م = ٦ − ٩ = −٣

ن = ٢ ⇐ م = ١٢ − ٩

= ٣

عندما ن = ١ : م = ٦ − ٩ = −٣

م = −٣

ن = ٢ : م = ١٢ − ٩

= ٣

م = ٣

(٣٥) $ح = \frac{1}{3} \pi نق^2 ع$

المطلوب : $\frac{د ع}{د ن}$

المعطى هو الحجم : $ح = ٤$

التغير في نصف القطر غير معلوم لذلك نشتق نق بـ ع .

(نق = ٢ع نصف قطر الكرة)

$ح = \frac{1}{3} \pi (٢ع)^2 ع$

$ح = \frac{٤}{٣} \pi ع^3$

$\frac{د ح}{د ن} = \frac{٤}{٣} \pi \times ٣ ع^2 \times \frac{د ع}{د ن}$

$٤ = ٤ \pi (٥)^2 \times \frac{د ع}{د ن}$

$\frac{د ع}{د ن} = \frac{1}{٢٥ \pi}$

* نق = ١٠ ⟸ ٢ع = ١٠ ⟸ ع = ٥

(٣٦) $ح = \pi نق^2 ع$

نق = $\frac{1}{2}$ ع ⟸ ع = ٢ نق

$\frac{د نق}{د ن}$ معلومة ، $\frac{د ح}{د ن}$ مجهول

⟸ نشتق بدلالة نق (ع = ٢ نق)

$ح = \pi نق^2 (٢ نق) = ٢ \pi نق^3$

$\frac{د ح}{د ن} = ٦ \pi نق^2 \frac{د نق}{د ن}$

$= ٦ \times \pi \times (١٠)^2 \times (-٢)$

$= -١٢٠٠ \pi$

* المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

$م = ٢ \pi نق \times ع$

$= ٢ \pi نق (٢ نق) = ٤ \pi نق^2$

$\frac{د م}{د ن} = ٨ \pi نق \frac{د نق}{د ن}$

$= ٨ \pi \times ١٠ \times (-٢)$

$= -١٦٠ \pi$

١٧

(٣٧) $ف = \sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$

$ف = \sqrt{(س - ٥)^2 + (ص - ٠)^2}$

$ف = \sqrt{(س - ٥)^2 + ص^2}$

لكنه $ص = \sqrt{س + ٣} \Leftarrow ص^2 = س + ٣$

$ف = \sqrt{(س - ٥)^2 + س + ٣}$

$\frac{د ف}{د س} = \frac{٢(س - ٥) \times ١ + ١}{٢ \sqrt{(س - ٥)^2 + س + ٣}}$

$= \frac{٣ \times ٤ + ٣ \times (٥ - ٤)}{\sqrt{(٤ - ٥)^2 + (٤) + ٣}} = \frac{٩}{٢ ف}$

(٣٨) م = م. المربع - م. الدائرة

$م = (٢ نق)^2 - \pi نق^2$

$\frac{د م}{د ن}$ معطى لكنه $\frac{د نق}{د ن}$ مجهول

$⟸ م = ٤ س^2 - \pi س^2$

$\frac{د م}{د ن} = ٨ س \frac{د س}{د ن} - ٢ \pi س \frac{د س}{د ن}$

$= ٨ \times ٥ \times ٢ - ٢ \times ٥ \times \pi ٢$

$= ٨٠ - ٢٠ \pi$

(٣٩) نجد علاقة بين الزاوية

والكمية المتغيرة (ص)

$ظا هـ = \frac{ص}{٤٠٠}$

$قا^2 هـ \frac{د هـ}{د ن} = \frac{1}{٤٠٠} \times \frac{د ص}{د ن}$

نجد السرعة : $(السرعة)^2 = (٤٠٠)^2 + (٣٠٠)^2$

أو الأفضل : $ظا هـ = \frac{٣٠٠}{٤٠٠} = \frac{٣}{٤}$

$\frac{جا هـ}{جتا هـ} = \frac{٣}{٤} \Leftarrow جا هـ = \frac{٣}{٥}$ جتا هـ

$جا^2 هـ + جتا^2 هـ = ١ \Leftarrow \frac{٩}{٢٥}$ جتا^2 هـ + جتا^2 هـ = ١

$⟸ جتا^2 هـ = \frac{٩}{٣٤} \Leftarrow قا^2 هـ = \frac{٣٤}{٩}$

$⟸ \frac{٣٤}{٩} \times \frac{د هـ}{د ن} = \frac{1}{٤٠٠} \times ٥٤٠$

$\frac{د هـ}{د ن} = \frac{٥}{٤٠٠} \times \frac{٩}{٣٤} = \frac{٩}{٢٤٠}$

(٤٠) حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}\pi نق^٣$

مساحة سطحها = $٤\pi نق^٢$

$م = ٤\pi نق^٢$

$\frac{ح م}{ح ن} = ٨\pi نق \times \frac{ح نق}{ح ن}$

$\frac{ح نق}{ح ن}$ مجهولة : نجدها من الحجم

$ح = \frac{٤}{٣}\pi نق^٣$

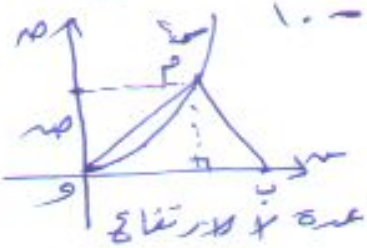
$\frac{ح ح}{ح ن} = ٤\pi نق^٢ \times \frac{ح نق}{ح ن}$

$-١٠ = ٤ \times \pi (٢)^٢ \times \frac{ح نق}{ح ن}$

$\frac{ح نق}{ح ن} = \frac{-١٠}{١٦\pi}$

$\frac{ح أ}{ح ن} = \frac{ح م}{ح ن} = ٨ \times \pi \times ٤ \times \frac{-١٠}{١٦\pi} = -١٠$

(٤١)



المساحة = $\frac{١}{٢}$ القاعدة × الارتفاع

سرعة $(ن) = ٤$ ، بعد ٢ ثانية $\Leftarrow$ ٨

$م = \frac{١}{٢} \times ٨ \times ص$

$م = ٤ص = ٤ س^٢$

$\frac{ح م}{ح ن} = ٨ س \frac{ح س}{ح ن} = ٨ \times ٨ \times ٤$

$= ٦٤ \times ٢$

$= ٥٦$

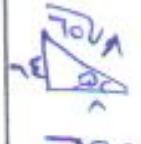
معدل تغير زاوية م ب و = ؟

$ظا هـ = \frac{المقابل}{المجاور} = \frac{ص}{\frac{١}{٢}س}$

$ظا هـ = \frac{س^٢}{\frac{١}{٢}س} = ٢س$

$قا^٢ هـ \times \frac{ح هـ}{ح ن} = ٢ \times \frac{ح س}{ح ن}$

بعد ٢ ثانية : $س = ٨$ ، $ص = ٦٤$



$ظا هـ = \frac{٨}{٦٤} = \frac{١}{٨} \Leftarrow قا^٢ هـ = ٦٥$

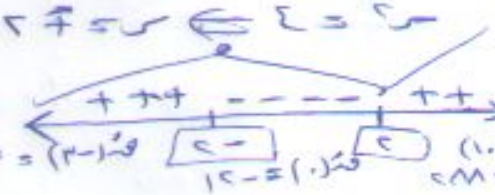
$٦٥ \times \frac{ح هـ}{ح ن} = ٢ \times ٨ \Leftarrow \frac{ح هـ}{ح ن} = \frac{١٦}{٦٥}$

١٨

(٤٢) م) $ق(س) = س^٣ - ٣س + ٢$

$ق'(س) = ٣س^٢ - ٣ = ٠$

$س^٢ = ١ \Leftarrow س = \pm ١$



ب) النقاط الحرجة : $س = ١$ ، $س = -١$

م) متزايدة في $(-\infty, -١] \cup [١, \infty)$

متناقصة في $[-١, ١]$

ج) يوجد قيمة عظمى محلية عند $س = -١$

وقيمتها $ق(-١) = (-١)^٣ - ٣(-١) + ٢$

$= -١ + ٣ + ٢ = ٤$

يوجد قيمة صغرى محلية عند $س = ١$

وقيمتها $ق(١) = ٠$

(٤٣) $ق'(س) = \frac{٣\sqrt{٢}(س^٢ - ٤س)(٢س - ٤)}{٤(٢س^٢ - ٤س)^{\frac{٣}{٤}}} = ٠$

$٢س^٣ - ٤س^٢ - ٨س^٢ + ١٦س = ٠$

$٢س^٣ - ١٢س^٢ + ١٦س = ٠$

$س^٣ - ٦س^٢ + ٨س = ٠$

$س(س^٢ - ٦س + ٨) = ٠$

$س(س - ٢)(س - ٤) = ٠$

$س = ٠$ ، $س = ٢$ ، $س = ٤$

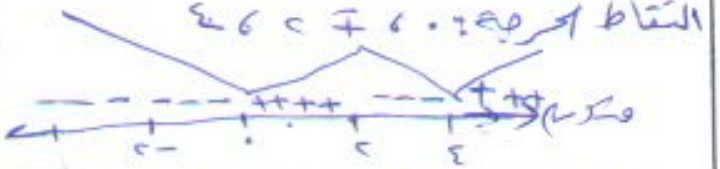
$ق(س)$ غير معرفة عندما المقام = صفر

$س^٢ - ٤س = ٠$

$س(س - ٤) = ٠$

$س = ٠$ ، $س = ٤$

النقاط الحرجة : $٠ ، ٢ ، ٤$



متزايدة في $[-٢, ٠] \cup [٢, ٤]$

متناقصة في $(-\infty, -٢] \cup [٠, ٢] \cup [٤, \infty)$

القيم الصغرى المحلية : $(٠, ٠)$ ، $(٤, -٣٢\sqrt[٣]{٤})$

عظمى محلية $= (٢, ٦\sqrt[٣]{١٦})$.

(٤٤) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & , -2 \le x < 1 \\ 2 - x & , 1 \le x < 3 \\ x & , 3 \le x \le 4 \end{cases}$

الاتصال: f متصل عند $x = 1$ لأن

$f(1) = \lim_{x \to 1} f(x) = 1$

f غير متصل عند $x = 3$ لأن

$f(3) = 6$ ، $\lim_{x \to 3} f(x)$ غير موجودة

$f'(x) = \begin{cases} 2x & , -2 < x < 1 \\ -1 & , 1 < x < 3 \\ 2 & , 3 < x < 4 \end{cases}$

ق.م $x = -2, 1, 3, 4$

$f'(x) = 0 \Leftarrow x = 0$ $\quad x = 0$

$f'(x)$ غير موجودة عند:

$x = -2$ طرفا فترة

$x = 1$ لأن $f'_-(1) \neq f'_+(1)$

$x = 3$ لأن f غير متصل عند $x = 3$

النقاط الحرجة عند $x = -2, 0, 1, 3, 4$

f متزايد في $[-2, 0]$ ، $[1, 3]$ ، $[3, 4]$

متناقص في $[0, 1]$ ، $[3, 4]$

$f(1) = 1$ ، $f(-2) = 4$ ، $f(4) = 8$

$f(1) = 1$ عظمى محلية

$f(4) = 8$ عظمى مطلقة

$f(0) = 0$ صغرى محلية ومطلقة

$f(3) = 6$ ، $\lim_{x \to 3} f(x) = -1$ لذلك لا يوجد صغرى

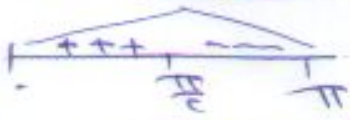
(١٩)

(٤٥) $f(x) = x + \sin x$

$f'(x) = 1 + \cos x = 0$

$\cos x = -1$

$x = \pi$ $\quad x = 0$



الحرجة: $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$

متزايد في $[0, \frac{\pi}{2}]$ ، متناقص في $[\frac{\pi}{2}, \pi]$

$f(0) = 0$ ، $f(\pi) = \pi$

صغرى محلية ومطلقة

$f(\frac{\pi}{2}) = 1$ عظمى محلية ومطلقة

(٤٦) أ) التقاط الحرجة: $x = 2, 3, 4$

ب) متزايد في $[2, 3]$ ، $[4, \infty)$

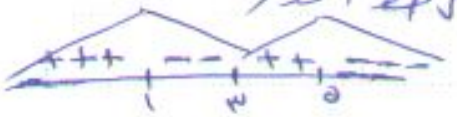
متناقص في $(-\infty, 2]$ ، $[3, 4]$

صغرى محلية عند $x = 2$ وقيمتها $f(2)$

عظمى محلية عند $x = 3$ $\quad f(3)$

ج) $f(4) =$ صغرى (أصغر / السبّاع)

(٤٧) أ) نحوّله إلى خط أعداد



ب) الحرجة: $x = 1, 3, 5$

ج) متزايد في $(-\infty, 1]$ ، $[3, 5]$

متناقص في $[1, 3]$ ، $[5, \infty)$

د) عظمى محلية عند $x = 5$ وقيمتها $f(5)$

" " " $x = 1$ وقيمتها $f(1)$

صغرى محلية عند $x = 3$ وقيمتها $f(3)$

٤٨) $ق(س) = س^3 + م س^2 + ب س$

$ق'(س) = 3س^2 + 2م س + ب$

$ق'(-1) = 3 - 2م + ب = 0$

$ق'(2) = 12 + 4م + ب = 0$

نطرح

$-9 - 6م = 0$

$م = \frac{9}{-6} \Leftarrow$ **$م = -\frac{3}{2}$**

$3 - 2 \times -\frac{3}{2} + ب = 0$

$ب = -6$

٤٩) $ق(س) = س^3 + 3م س^2 - 15س + 1$

$ق'(س) = 3س^2 + 6م س - 15$

$ق'(-1) = 3 - 6م - 15 = 2$

$\boxed{6م - 15 = 1}$

$ق''(س) = 6س + 6م$

$ق''(-2) = -12 + 6م = 6$

$6م = 18 \Leftarrow$ **$م = 3$**

$\Leftarrow 6 \times 3 - 15 = 1 \Leftarrow$ **$ع = \frac{17}{5}$**

٥٠) المطلوب هو أصغر بعدين

$ح = س \times ص$

$ح = س(60 - \sqrt{3}س)$ ، $ص = 60 - \sqrt{3}س$ ، $2س + \sqrt{3}ص = 60$

$ح = 60س - \sqrt{3}س^2$

$ح' = 60 - 2\sqrt{3}س = 0$

$2\sqrt{3} = 60$

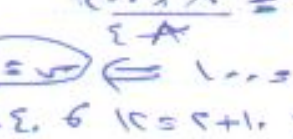
$س = 10$

$ص = 60 - 10 \times \sqrt{3}$

$ص = 30$

البعدان هما: 10 و 30

التأكد:



٥١) مجموعة مربع الأول وصلي الثاني

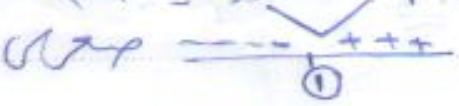
$م = س^2 + ص^2$

$س + ص = 40 \Leftarrow ص = 40 - س$

$م = س^2 + (40 - س)^2 = 2س^2 - 80س + 1600$

$م' = 4س - 80 = 0 \Leftarrow$ **$س = 20$**

العدد الأول: 20 والثاني 20



٥٢)

مساحة المستطيل أكبر ما يمكن

$م = (س - 4)(ص - 2)$

$م = س ص - 2س - 4ص + 8$

$س ص = 128 \Leftarrow$ **$ص = \frac{128}{س}$**

$م = 128 - 2س - 4 \times \frac{128}{س} + 8$

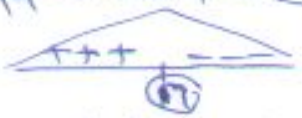
$م' = 0 - 2 - 4 \times \frac{-128}{س^2} + 0 = 0$

$\frac{1}{2} \times 2 = \frac{1}{2} \times \frac{4 \times 128}{س^2}$

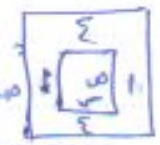
$س^2 = 256 \Leftarrow س = \pm 16$

$س = -16$ مرفوضة

$س = 16 \Leftarrow ص = \frac{128}{16} \Leftarrow$ **$ص = 8$**



٥٣)



مساحة الورقة أصغر ما يمكن

$م = (س + 4)(ص + 8)$

$= س ص + 8س + 4ص + 32$

$س ص = 400 \Leftarrow ص = \frac{400}{س}$

$م = 400 + 8س + \frac{1600}{س} + 32$

$م' = 0 + 8 - \frac{1600}{س^2} = 0$

$8 = \frac{1600}{س^2} \times \frac{1}{8}$

$س^2 = 100 \Leftarrow$ **$س = 10$** $\Leftarrow$ **$ص = 40$**

أبعاد الورقة: $10 + 2 = 12$ و $40 + 8 = 48$

(٥٤) $ح = \frac{1}{3} \pi نق^2 ع$

فيثاغورس :

$(١٨)^2 = نق^2 + (ع-١٨)^2$

$٣٢٤ = نق^2 + ع^2 - ٣٦ع + ٣٢٤$

$نق^2 = (٣٦ع - ع^2)$

$ح = \frac{\pi}{3} (٣٦ع - ع^2) \times ع$

$ح = \frac{\pi}{3} (٣٦ع^2 - ع^3)$

$ح' = \frac{\pi}{3} (٧٢ع - ٣ع^2) = ٠$

$\frac{\pi}{3} ع (٧٢ - ٣ع) = ٠$

$ع = ٠$ أو $(ع = ٢٤)$

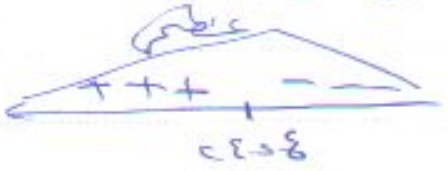
مرفوضة

$\therefore نق^2 = ٣٦ \times ١٦ - ٢٤^2$

$= ٢٤ (٣٦ - ٢٤)$

$نق^2 = ٢٤ \times ١٢$

$نق^2 = ٢٨٨$



أكبر حجم $= \frac{1}{3} نق^2 \pi ع$

$= \frac{1}{3} \times ٢٨٨ \times \pi \times ٢٤$

$= ٢٣٠٤ \pi$

(٥٥) قطر الكرة = قطر المكعب

قطر الكرة = $ب ج$

$ص^2 + ص^2 = م^2$

$ب ج^2 = ب م^2 + ج م^2$

$ب ج^2 = ع^2 + ع^2 + ع^2$

$ب ج^2 = ٣ ع^2$

حجم المكعب $= ص^3 \times ع$

$ص = \frac{ب ج - ع}{٢}$

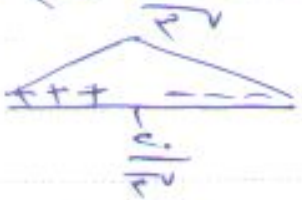
$ح = \left(\frac{ب ج - ع}{٢}\right)^3 \times ع$

$ح = \frac{ب ج^3 - ع^3}{٨} \times ع$

$ح' = \frac{٣ ب ج^2}{٨} - ٣ ع^2 = ٠$

$ع^2 = \frac{ب ج^2}{٨}$

$ع = \frac{ب ج}{٢٧}$ ⟸ $ع = \frac{ب ج}{٢\sqrt{٢}}$



$ص = \frac{ب ج}{٢} - \frac{ب ج}{٢\sqrt{٢}} = \frac{ب ج}{٢} - \frac{ب ج \sqrt{٢}}{٤}$

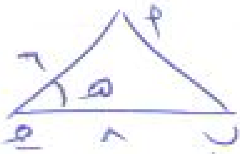
$ص^3 = \frac{ب ج}{٢} - ب ج \times \frac{١}{٢}$

$ص^3 = ب ج - \frac{ب ج}{٢}$ ⟸ $ص = \frac{ب ج}{٢\sqrt{٢}}$

$ص = \frac{ب ج}{٢\sqrt{٢}}$

المكعب عبارة عن مكعب

س٥٦) مساحة المثلث = ½ × حاصل ضرب
أي ضلعين × جيب الزاوية بينهما



م = ½ × ٨ × ٦ × جا هـ

م = ٢٤ جا هـ

م' = ٢٤ جتا هـ = ٠

⇐ هـ = π/٢ أو ٩٠°

س٥٧)

ف = √((س − س١)² + (ص − ص١)²)

ف = √((س − ٤)² + (ص − ٢)²)

= √((س − ٤)² + (٣س − ٢)²)

ف' = [٢(س − ٤) + ٢(٣س − ٢) × ٣] / [٢√((س − ٤)² + (٣س − ٢)²)] = ٠

٢س − ٨ + ١٨س − ١٢ = ٠

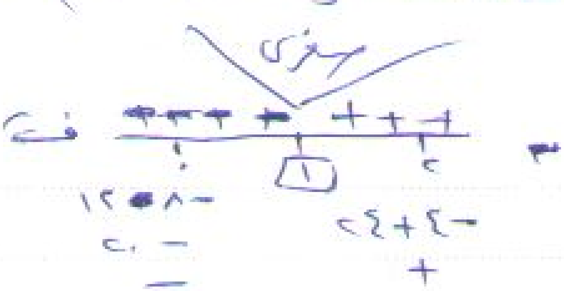
٢٠س − ٢٠ = ٠

⇐ س = ١

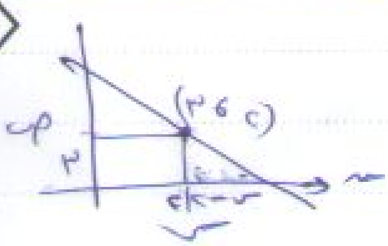
ص = ٣س

ص = ٣

النقطة هي (١ ، ٣)



س٥٨)



م = ½ × س × ص

٣/ص = (س − ٢)/س ⇐ ص = ٣س/(س − ٢)

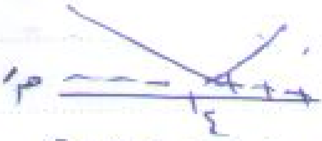
م = ½ س × ٣س/(س − ٢) = ٣س²/(٢س − ٤)

م' = [(٢س − ٤)٦س − ٢(٣س²)] / (٢س − ٤)² = ٠

١٢س² − ٢٤س − ٦س² = ٠

٦س² − ٢٤س = ٠ ⇐ س = ٠ ، ٤

س = ٠ ✗



س = ٤

المستقيم يمر بـ (٤ ، ٠) ، (٢ ، ٣)

ميله = (٣ − ٠)/(٢ − ٤) = −٣/٢

ص − ٠ = −٣/٢ (س − ٤) .

٩٥)

الارتفاع = ٢ × قاعدة

ع = ٢ ص

ك = ع ص

ك² = ص² + ع² = ص² + ١٦ ص²

ك² = ١٧ ص² ⇐ ك = √١٧ ص

المحيط = ١٠

طول الحبل = ٢ × ك + ٢ ص + ك + ك = ١٠

٢ ص + ٢ س + ٣ ك = ١٠

ص + س + ك = ٥

ص + س + √١٧ ص = ٥

س = ٥ − ص − √١٧ ص

المساحة = مساحة المستطيل + مساحة المثلث

م = ٢ س × ٢ ص + ٢ ص × ع

= ٢ ص (٥ − ص − √١٧ ص) + ص × ٤ ص

م = ١٠ ص − ٢ ص² − ٢ √١٧ ص² + ٤ ص²

م = ١٠ ص + ٢ ص² − ٢ √١٧ ص²

م' = ١٠ + ٤ ص − ٤ √١٧ ص = ٠

ص = ١٠ / (٤ √١٧ − ٤)

ع = ٤ × ١٠ / (٤ √١٧ − ٤)

س = ٥ − ١٠ / (٤ √١٧ − ٤) − √١٧ × ١٠ / (٤ √١٧ − ٤)

٦٠)

مركز الكرة المحيطة = م منتصف ع

م ن² + (ع/٢)² = نق²

م ن² + ١/٤ ع² = (٢ √٧)²

م ن² + ١/٤ ع² = ٢٨

م ن² = ٢٨ − ١/٤ ع²

ح = م ن² π − ع

= (٢٨ − ١/٤ ع²) π − ع

= ٢٨ π − ١/٤ ع² − ع

ح' = ٢٨ π − ١/٢ π ع − ١ = ٠

ع = ٢٨ π / (١/٢ π) = ٥٦

ع = ٤ √٧

م ن² = ٢٨ − ١/٤ (٤ √٧)²

م ن² = ٢٨ − ١/٤ × ٤ × ٧

م ن² = ٢٨ − ٧ = ٢١

م ن = √٢١ وهو نصف قطر الكرة

نصف قطرها √٧٤ وارتفاعها ٤ √٧