في الرياضيات

م4

للمرحلة الثانوية (أدبي ، إدارة ، والصناعي)

[[[التكامل]]]

شرح مفصل . أمثله محلوله . تمارين وأسئلة إضافيه

معا لنتميز في الرياضيات

أ . بشّار أبو العمّاش
0772578035


وقل رب زدني علما

الدرس الأول : التكامل غير المحدود .

- عزيزي الطالب ، لو طلب منك إيجاد اشتقاق الاقتران ق(س) = س^3 + 3س^2 ، لكان اشتقاقه كما مر معك في المستوى الثالث (3س^2 + 6س)
- لكن لو قلت لك ما هي قاعدة الاقتران الذي مشتقته (3س^2 + 6س) ؟. لكانت الاجابة ... س^3 + 3س^2 – 5 أو س^3 + 3س^2 + 4 ، ....الخ . فنلاحظ انه يختلف فقط في الحد الثابت (جـ) وهذا ما يسمى بالتكامل .
- اذا مما سبق يتبين ان التكامل ويرمز له بالرمز $\int$ ويقرأ (تكامل دس) ، هو عملية عكسية للاشتقاق .
- تحذف اشارة التكامل مع الاشتقاق ومثال ذلك ..

1 -جد ق´(س) = $\int$ 2س^3 + 3س . دس .

نلاحظ بالمثال السابق انه طلب اشتقاق مع وجود تكامل ، لذا في هذه الحالة نأخذ الاقتران كما هو ، فيكون جواب المثال السابق (2س^3 + 3س) .

2 -اذا كانت ق(س) = $\int$5س – 3 ، جد ق´ (2) .

كما قلنا سابقا ، عند وجود تكامل مع اشتقاق نرجع للاقتران الاصلي (5س – 3) فيكون حل السؤال السابق هو (5 × 2 – 3) = 7 .

3 -اذا كان ق(س) = س^2 – 4 ، فجد ق´ (3) .

4 -ق(س) = $\sqrt{\text{س}}$ - 5 ، فجد ق´(4) .

تذكر ....
عند وجود تكامل مع مشتقة ناخذ الاقتران كما هو .

قواعد التكامل غير المحدود ....

القاعدة الاولى : $\int$ أ . دس = أ س + جـ

حيث (أ) اي عدد حقيقي .

أمثلة :

1 -$\int$ 7 . دس = 7 س + جـ .

2 -$\int$ -4 . دس = - 4 س + جـ .

3 -$\int$ $\sqrt{4}$. دس = $\sqrt{4}$ س + جـ .

- (لاحظ وجود (جـ) نهاية كل تكامل مما سبق ويدل على أي عدد ثابت ، لذا من الضروري وضع (جـ) في نهاية كل تكامل غير محدود .
- جد التكاملات التالية :

1 -$\int$ -4 . دس .

2 -$\int$ دس . $\longleftarrow$ (هنا الحد الثابت =1)

3 -$\int$ $\frac{5}{13}$ دس.

القاعدة الثانية :

$$\int \text{س}^{\text{ن}} = \frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{جـ} \ .$$

اي نضيف (1) للاس ونضع الاس بعد الاضافة في المقام .

أمثلة للتوضيح :

1 -جد ∫ س . دس . أولا نلاحظ ان الاس وهي قيمة (ن) = (1) لذا نضيف له (1) ثم نضعه في المقام

كالتالي .. $\frac{\text{س}^{1+1}}{1+1} = \frac{\text{س}^{2}}{2} + \text{جـ}$

2 -جد ∫ س^5 . دس . أولا قيمة (ن) = 5 فيكون الناتج

كالتالي ... $\frac{\text{س}^{5+1}}{5+1} = \frac{\text{س}^{6}}{6} + \text{جـ}$

3 -∫ $\sqrt{\text{س}}$. دس. (عزيزي الطالب هنا يجب تجهيز المقدار اولا ، اي وضع الجذر التربيعي على شكل اس ثم نجري عملية التكامل) . فيصبح

المقدار ∫ $\text{س}^{\frac{1}{2}}$. دس فيكون الناتج =

$$\frac{\text{س}^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{\text{س}^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\,\text{س}^{\frac{3}{2}}$$

قواعد مهمة ...

1) $\frac{1}{\text{س}^{\text{م}}} = \text{س}^{-\text{م}}$ مثال : $\frac{1}{\text{س}^{3}} = \text{س}^{-3}$

2) $\sqrt[\text{م}]{\text{س}^{\text{ن}}} = \text{س}^{\frac{\text{ن}}{\text{م}}}$ مثال: $\sqrt{\text{س}^{5}} = \text{س}^{\frac{5}{2}}$

3) $\frac{\text{س}^{\text{م}}}{\text{س}^{\text{ن}}} = \text{س}^{\text{م}-\text{ن}}$ مثال : $\frac{\text{س}^{6}}{\text{س}^{2}} = \text{س}^{6-2} = \text{س}^{4}$

جد ما يلي :

1 - ∫ $\frac{1}{\text{س}^{4}}$. دس

2 - ∫ $\sqrt{\text{س}^{3}}$. دس

3 -∫ $\sqrt[3]{\text{س}^{5}}$. دس

تذكر ..

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} + 1 = \frac{\text{أ} + \text{ب}}{\text{ب}}$$

أي $\frac{\text{البسط + المقام}}{\text{المقام}}$

القاعدة الثالثة :

$\int أ\, ق(س) = أ \int ق(س)\, .\, دس$.

أي عند وجود ثابت يتم استخراجه خارج التكامل واجراء التكامل ثم نضرب الثابت بالناتج من عملية التكامل .

أمثلة ....

1 - $\int 6\, س^2\, .\, دس$ .... $= 6 \int س^2\, .\, دس$ (لاحظ اننا استخرجنا الثابت خارج التكامل) =

$6 \left[\frac{س^{2+1}}{2+1} \right] = \cancel{6}^{2} \left[\frac{س^3}{\cancel{3}_1} \right] = 2س^3 +$ جـ

عملية اختصار (العامل المشترك الاكبر بين 6 و 3)

2 - $\int \frac{2}{\sqrt[3]{س}}\, دس$

(تذكر انه يجب تجهيز المقدار على شكل ($س^{ن}$) قبل اجراء عملية التكامل)

$\sqrt[3]{س} = س^{\frac{1}{3}}$

$\frac{2}{\frac{2}{3}} = \frac{2 \times 3}{2}$

الاول × مقلوب الثاني

$\int \frac{2}{\sqrt[3]{س}} = \frac{2 \times س^{\frac{-1}{3}+1}}{\frac{-1}{3}+1} = \frac{2 \times س^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} = 3\, س^{\frac{2}{3}} +$ جـ

تذكر انه يجب توحيد المقامات

تذكر عزيزي الطالب أن

$\frac{أ}{\sqrt[ن]{س^{م}}} = أ \times س^{\frac{-م}{ن}}$

جد ما يلي :

1 - $\int 2\, س\, .\, دس$

2 - $\int \frac{3}{\sqrt[3]{س}}\, دس$

القاعدة الرابعة :

$\int ق(س) \pm هـ(س) = \int ق(س) \pm \int هـ(س)$

أي ان التكامل يوزع في حال الجمع والطرح .

أمثلة :

1 - $\int 2س^2 + 3\, .\, دس =$

$\int 2س^2 + \int 3\, .\, دس = \frac{3}{2}\, س^{\frac{2}{3}} + 3س +$ ج

2 - $\int 4س^3 - 6س\, .\, دس =$

$\int 4س^3 - \int 6س\, .\, دس = س^4 + 3س^2 +$ جـ

حل الأمثلة التالية : -

1 - $\int 3س^2 - 2س\, .\, دس$

2 - $\int \frac{1}{س^2} + \sqrt{س}\, .\, دس$

كلما كبر الله في قلبك ..
كلما صغر كل شيء

القاعدة الخامسة :

$\int$ ق(س) × هـ(س) (يتم ايجاد عملية الضرب اولا ثم نجري التكامل ونفس الحال في عملية القسمة .

أمثلة : -

1- جد $\int$ س (س^{2} + 2) . دس (نفك الأقواس قبل اجراء عملية التكامل) .

$\int$ س (س^{2} + 2) = $\int$ س^{3} + 2س . دس (أكمل الحل)

2- $\int$ (3س – 2)^{2} . دس (فك التربيع قبل إجراء عملية التكامل حسب القاعدة....

(أ – ب)^{2} = أ^{2} - 2 أ ب + ب^{2} ... أي

(الحد الأول تربيع – 2 × الحد الاول × الحد الثاني + الحد الثاني تربيع)

و عليه فإن $\int$ (3س – 2)^{2} =

$\int$ 9س^{2} – 12 س + 4 . دس (لا تنسى توزيع التكامل)

= 3س^{3} – 6س2 + 4س + جـ

3- $\int \dfrac{6\text{س}^{3} - 8\text{س}^{2} - 4}{\text{س}^{2}}$ (يتم اولا توزيع المقام على البسط)

$= \int \dfrac{6\text{س}^{3}}{\text{س}^{2}} - \dfrac{8\text{س}^{2}}{\text{س}^{2}} - \dfrac{4}{\text{س}^{2}}$

$= \int$ 6س + 8 – 4س$^{-2}$ (أكمل الحل)

الجواب (3س^{2}+ 8س + $\dfrac{4}{\text{س}}$+جـ)

تذكر أن $\dfrac{\text{س}^{ن}}{\text{س}^{م}}$ = س$^{ن-م}$

القاعدة السادسة :

$\int$ جا س : لها حالتان :

الأولى اذا كان معامل س (1) فيكون تكاملها – جتا س + جـ ، مثال ...

$\int$ جاس = - جتاس + جـ

الثانية اذا كان معامل س غير الـ (1) فيكون تكاملها - $\dfrac{1}{أ}$ جتا أ س + جـ ، مثال

$\int$ جا2س = - $\dfrac{1}{2}$ جتا2س + جـ

$\int$ جتا س : لها حالتان :

الأولى اذا كان معامل س (1) فيكون تكاملها جا س + جـ ، مثال ...

$\int$ جتاس = جاس + جـ

الثانية اذا كان معامل س غير الـ (1) فيكون تكاملها $\dfrac{1}{أ}$ جا أ س + جـ ، مثال

$\int$ جتا2س = $\dfrac{1}{2}$ جا2س + جـ

$\int$ قا^{2}س لها حالتان :

الأولى اذا كان معامل س (1) فيكون تكاملها ظا + جـ ، مثال ...

$\int$ قا^{2}س = ظا س+ جـ

الثانية اذا كان معامل س غير الـ (1) فيكون تكاملها $\dfrac{1}{أ}$ ظا أ س + جـ ، مثال

$\int$ قا^{2} 2س = $\dfrac{1}{2}$ ظا2س + جـ

أمثلة : -

1 - $\int$جا س . دس = - جتاس + جـ .

2 - $\int$ 4قا^{2} 3 س + 2س . دس = ¾ ظاس3س + س^{2} +جـ

3 - $\int$ 2 جتا س + جا 5س – 4س^{2} . دس (اكمل حل السؤال)

4 - $\int$جتا س ظاس . دس (اكمل حل السؤال)

5 - $\int$- قاس جتاس . دس

تذكر أن :

قا س = $\dfrac{1}{\text{جتا س}}$

ظا س = $\dfrac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$

القاعدة السابعة :

$$\int \frac{1}{س} \, دس = لو_{هـ}|س| + ج$$

لاحظ ان اس (س) = 1

أمثلة :-

$$\int \frac{2}{س} \, دس = 2لو_{هـ}|س| + جـ$$

القاعدة الثامنة :

$\int هـ^{س} = هـ^{س} + جـ$ الحالة الاولى اذا كان معامل س = 1

$\int هـ^{أس} = \frac{1}{أ} هـ^{أس} + جـ$ الحالة الثانية اذا كان معامل س ≠ 1

مثال :

$$\int هـ^{3س} = \frac{1}{3} هـ^{3س} + جـ$$

✓ لايجاد قاعدة الاقتران ، نجد التكامل ونعوض النقطة المعطاه لايجاد قيمة (جـ) .

✓ أمثلة ...

مثال .يتحرك جسيم بخط مستقيم حيث ان سرعته بعد (ن) ثانية تُعطي بالعلاقة ع(ن)= $2ن^2$ – 2ن جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد (ن) ثانية علما بأن موقعه الابتدائي = 5م .

الحل . عزيز الطالب نلاحظ بالمثال السابق انه طلب قاعدة الاقتران لسرعة الجسيم بعد (ن) ثانية ، واعطانى موقعه الابتدائي أي ف(0) = 5 ، ومن هذه المعلومة نجد أولا التكامل ثم نعوض ف(0) لايجاد قيمة الثابت جـ ، كالتالي ...

- أولا ناخذ التكامل للاقتران .

$\int 2ن^2 - 2ن \, . \, دس = ن^3 - ن^2 + جـ$ (أخذنا التكامل مباشرة)

- ثانيا نعوض ف(0) = 5 في $ن^3 - ن^2 + جـ$ لايجاد قيمة جـ .

ف(0) = $ن^3 - ن^2 + جـ = 5$

= $0^3 - 0^2 + جـ = 5$ ؛ جـ ... = 5

- ثالثا نكتب قاعدة الاقتران كما طلب السؤال . قاعدة الاقتران لسرعة الجسيم بعد(ن) ثانية هي : = $ن^3 - ن^2 + 5$ وهو المطلوب .

مثال .اذا كان ميل المماس لمنحى الاقتران ق(س) عند النقطة (س ، ص) = 6 – 2س ، فجد قاعدة الاقتران عند النقطة (1 ، 2) .

الحل . $\int 6 - 2س \, . \, دس = 6س - س^2 + جـ$

نحن تعرف ان النقطة (1 ، 2) تعني ان ق(1) = 2 ، ومنه نجد قيمة جـ .. (اكمل الحل) .

قاعدة الاقتران = $6س - س^2 - 3$

مثال- يتحرك جسيم بسرعة مُعطى بالعلاقة :
ع(ن) = 3ن^2 – 2ن م/ث . جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور (3) ثواني من بدء الحركة علما بأن موقعه الابتدائي = 5 م .

الحل . ∫ 3ن^2 – 2ن . دس = ن^3 – ن^2 + جـ .

موقعه الابتدائي = 5 م ؛ اذا فـ(0) = 5 منها نجد جـ

فـ(0) = 3ن^2 – 2ن + جـ = 5 ——— جـ = 5

(لكن السؤال طلب السرعة بعد 3 ثواني ؛ اذا بعد كتابة قاعدة الاقتران نعوض (3) فيها لنجد مسافته بعد هذا الزمن . فـ (3) = 3ن^2 – 2ن + 5) لاحظ هنا اننا عوضنا مكان (جـ) قيمتها التي هي (5) .

وبعد التعويض يكون فـ(3) = 23 م . وهو الطلوب .

مثال : يتحرك جسيم بخط مستقيم بتسارع ثابت = ت(ن) = - 6 م/ث^2 ؛ جد المسافة التي يقطعها بعد مرور ثانية واحدة من بدء الحركة علما بأن السرعة الابتدائية للجسيم ع (0) = 5 م / ث ، وموقعه الابتدائي فـ(0) = 6 م .

الحل . عزيزي الطالب في مثل هذه الاسئلة سوف نعتمد على هذه القاعدة للحل وهي ..

في هذا الاتجاه تكامل

ت(ن) التسارع ⇄ ع(ن) السرعة ⇄ فـ(ن) المسافة

في هذا الاتجاه اشتقاق

من المخطط السابق نلاحظ ان ∫ التسارع يعطينا سرعة ، و ∫ السرعة يعطينا مسافة :-

اذا نجد أولا تكامل التسارع لنجد قاعدة السرعة من خلال ع (0) = 6 كالتالي ...

∫ -6 . د س = - 6 ن + جـ ..... ع (0)=5

ع (0)= - 6 ن + ج = 5 ..... اذا (ج) = 5 .

ومنه قاعدة السرعة لهذا الجسيم = -6س +5 .

نجد الان تكامل السرعة لنجد قاعدة المسافة....

∫ -6ن +5 . . دس = -3س^2 + 5س + جـ .

من السؤال فـ (0) = 6 ... لنجد قيمة (جـ)

فـ(0) = -3ن^2 + 5ن + جـ = 6 ومنه جـ = 6

اذا قاعدة الاقتران للمسافة = -3ن^2 + 5ن + 6 .

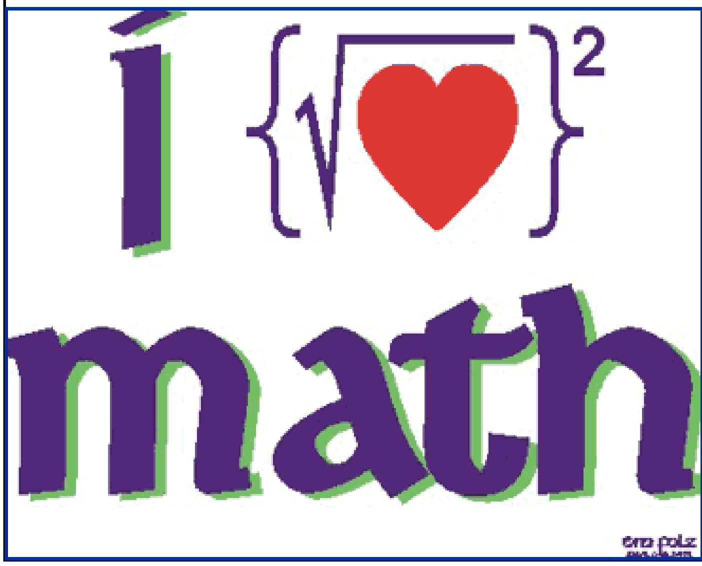
عزيزي الطالب لا تنسى مطلوب السؤال (جد المسافة التي يقطعها بعد مرور ثانية واحدة من بدء الحركة)

اذا نعوض قيمة(1) في اقتران المسافة ....

فـ(1) = -3ن^2 + 5ن + 6 = 8 م . وهو المطلوب .

سؤال : يتحرك جسيم بتسارع ثابت مُعطى بالعلاقة ت(ن) = 8م/ث^2 ؛ جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور (ن) ثانية من بدء الحركة علما بأن السرعة الابتدائية ع(0) = 2 م/ث ، وموقعه الابتدائي فـ(0) = 10 م .

تذكر أن وحدات القياس ...
المسافة (ف) .... م
الزمن (ن) ..... ث
السرعة (ع) ... م / ث
التسارع (ت) .... م / ث^2



الدرس الثاني : التكامل المحدود .

القاعدة الأولى ...

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ك . دس} = \text{ك (ب – أ)}$$ (حيث ك عدد ثابت) .

حيث (ب) يمثل الحد العلوي ،و(أ) يمثل الحد السفلي

مثال1 :

$$\int_{2}^{4} 3 \text{ . دس} = 3 (4 - 2) = 6 .$$

مثال2 :

$$\int_{-3}^{2} 4 \text{ . دس} = 4 (2 - -3) = 20 .$$

مثال3 : اذا كانت $\int_{1}^{\text{م}} 3 \text{ . دس} = -6$ فجد قيمة (م) .

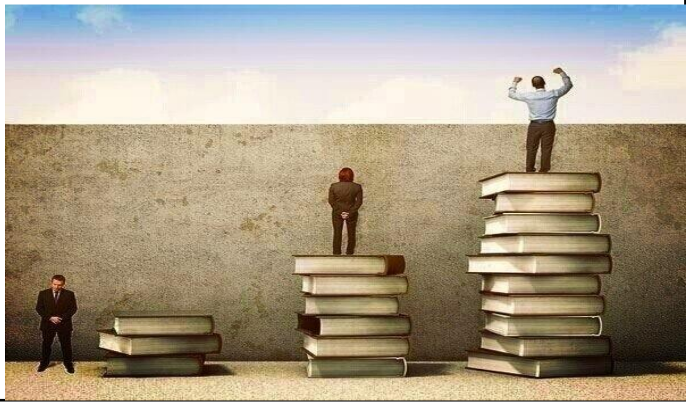
الحل :

٣(م – ١) = - ٦ (توزيع ٣ على داخل القوس)

٣ م – ٣ = - ٦ (جمع ٣ للطرفين)

٣ م = - ٦ (بقسمة ٣ على الطرفين)

م = -١



القاعدة الثانية :

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{س}^{\text{ن}} \text{ . دس} = \left. \frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} \right|_{\text{أ}}^{\text{ب}} = \frac{\text{ب}^{\text{ن}+1} - \text{أ}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1}$$ حيث ن ≠ صفرا

وبلغة أخرى نأخذ التكامل ثم نطرح $\dfrac{\text{ق (أ) – ق (ب)}}{\text{ن} + 1}$

ملاحظة . يمكن حل الامثلة (2+1) على قانون ق(أ) – ق(ب) . فمثلا حل مثال 1 كالتالي :

ق(4) – (2) = (3×4) – (3×2) = 12 – 6 = 6

مثال : اذا كان ق(٢) = ٥ ؛ ق(١) = ٢ فما قيمة $\int_{1}^{2} \text{هـ}'(\text{س}) \text{ . دس}$

الحل :

$$\left[\text{هـ(س)} \right]_{1}^{2} = \text{ق(٢)} - \text{(١)} = ٥ - ٢ = ٣$$

مثال :

اذا كان ق(٢) = ٥ ؛ ق(١) = ٢ فما قيمة $\int_{0}^{1} \text{ق}'(\text{س}+1) \text{ . دس}$

الحل :

$$\left[\text{ق(س+١)} \right]_{0}^{1} = \text{ق(١)} - (0) = \text{ق(١+١)} - (0+1)$$

$$= \text{ق(٢)} - (1) = ٥ - ٢ = ٣$$

تذكر ان اشتقاق مع تكامل ترجع للمقدار الاصلي وهو س+١

مثال :

جد $\int_{2}^{5} \frac{10}{س^{2}}\, دس$ تذكر يجب تجهيز على صورة $س^{ن}$ المقدار قبل اجراء التكامل

الحل : $\int_{2}^{5} \frac{10}{س^{2}}\, دس = \int_{2}^{5} 10\, س^{-2}\, دس$

$$= \left[\frac{10\, س^{-2+1}}{-2+1} \right]_{2}^{5}$$

$$= \left[\frac{-10}{س} \right]_{2}^{5}$$

$$= \frac{-10}{5} - \frac{-10}{2} = -2 + 5 = 3$$

مثال :

جد $\int_{0}^{3} 6\, هـ^{2س+1}\, دس$

الحل : $\left[\frac{6}{2}\, هـ^{2س+1} \right]_{0}^{3}$ يمكن ايجاد ق(3) لوحدها وق(0) لوحده ثم تطبيق القانون

$ق(3) = 3\, هـ^{2\times3+1} = 3\, هـ^{7}$

$ق(0) = 3\, هـ^{2\times0+1} = 3\, هـ^{1}$

$= ق(3) - ق(0)$

$= 3\, هـ^{7} - 3\, هـ^{1}$ (اخراج 3 عامل مشترك)

$= 3(هـ^{7} - هـ^{1})$

مثال :

اذا علمت ان $\int_{3}^{م} 3س^{2}\, دس = -35$ فجد قيمة الثابت (م)

الحل :

$$\left[\frac{3س^{2+1}}{2+1} \right]_{3}^{م} = -35$$

$$\left[\frac{\cancel{3}س^{3}}{\cancel{3}} \right]_{3}^{م} = -35$$

$ق(م) = م^{3}$

$ق(3) = (3)^{3} = 27$

اذا ق(م) − (3) = −35

$م^{3} - 27 = -35$ (جمع 27 للطرفين)

$م^{3} = -8$ (الجذر التكعيبي لـ −8 = −2)

$م = -2$

الدرس الثالث : خواص التكامل المحدود.

الخاصية الاولى :

$$\int_{أ}^{ب} \text{جـ ق (س) دس} = \text{جـ} \int_{أ}^{ب} \text{ق(س)} \quad .$$ حيث جـ عدد ثابت

بمعنى انه نستطيع إخراج الحد الثابت خارج التكامل ثم إجراء عملية التكامل .

مثال : جد $\int_{1}^{3} 3\text{س}^2 \text{ . دس}$

الحل : $3\left(\frac{\text{س}^{2+1}}{2+1}\right) = 3\left[\frac{\text{س}^3}{3}\right]_{1}^{3}$

$= 3 \times \left(\frac{27}{3} - \frac{1}{3}\right) = 26$

$\text{ق}(3) = \frac{3^3}{3} = \frac{27}{3}$

$\text{ق}(1) = \frac{1^3}{3} = \frac{1}{3}$

الخاصية الثانية

$$\int_{أ}^{أ} \text{ق (س) دس} = \text{صفر}$$

مثال : جد $\int_{1}^{1} 3\text{س}^2 \text{ . دس} = \text{صفرا}$.

لاحظ عزيز الطالب ان الحد العلوي = الحد السفلي فالناتج دائما في هذه الحالة = صفرا

الخاصية الثالثة

$$\int_{أ}^{ب} \text{ق (س) دس} = -\int_{ب}^{أ} \text{ق (س) دس}$$

أي عند قلب حدود التكامل فقط نقلب الإشارة التكامل الأصلي

مثال : اذا كان $\int_{3}^{6} \text{ق (س) . دس} = 3$. فإن $\int_{6}^{3} \text{ق (س) . دس} = -3$

لاحظ عزيز الطالب انه في هذا المثال قمنا فقط بعكس اشارة ناتج التكامل الاصلي لاننا قمنا بعكس حدود التكامل

مثال : اذا كان $\int_{-3}^{4} 2\text{ ق (س) . دس} = 10$. فإن $\int_{4}^{-3} \text{ق (س) . دس} = \text{............}$

عزيزي الطالب في هذا المثال لاحظ ان تكامل ق (س) مضروب في العدد (2) ، لذا يجب ان تتخلص من العدد 2 اي جعل معامل ق(س) = 1 ، وذلك بقسمة الطرفين على 2 ، ثم نقلب شارة الناتج أي تصبح كالتالي...

$\frac{\int_{-3}^{4} 2\text{ ق (س) . دس}}{2} = \frac{10}{2}$ ومنه $\int_{-3}^{4} \text{ق (س) . دس} = 5$ وعليه فإن $\int_{4}^{-3} \text{ق (س) . دس} = -5$

مثال : اذا كان $\int_{2}^{4} \text{ق (س) . دس} = 3$. فإن $\int_{4}^{2} -2\text{ ق (س) . دس} = \text{............}$

في هذا المثال نلاحظ ان المضروب في العدد -2 هو معكوس حدود التكامل ، لذا نأخذ اولا عكس اشارة ناتج التكامل الاصلي ثم نضرب الناتج في -2

$\int_{4}^{2} -2\text{ ق (س) . دس} = 6$

لاحظنا ان ناتج هذا السؤال بدون معامل ق(س) هو -3 ، وبعد ضرب الناتج في معامل ق(س) وهنا -2 يكون الناتج -3 × -2 = 6

الخاصية الرابعة اذا كانت (أ ب جـ) أعداد حقيقية ، حيث أ < ب < جـ فإن ...

$$\int_{أ}^{جـ} \text{ق (س)}\, \text{دس} = \int_{أ}^{ب} \text{ق (س)}\, \text{دس} + \int_{ب}^{جـ} \text{ق (س)}\, \text{دس}$$

التأكد من صحة الخاصية .

1) $\int_{2}^{4} \text{2س دس} = [\text{س}^2]_{2}^{4} = 4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12$

2) $\int_{4}^{5} \text{2س دس} = [\text{س}^2]_{4}^{5} = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$

3) $\int_{2}^{5} \text{2س دس} = [\text{س}^2]_{2}^{5} = 5^2 - 2^2 = 25 - 4 = 21$

نلاحظ ان

1 + 2 = 3

12 + 9 = 21

مثال :

اذا كانت $\int_{١}^{٣} \text{ق(س) دس} = ٦$ و $\int_{٥}^{٣} \text{ق(س) دس} = ٢$ فجد قيمة $\int_{١}^{٥} \text{ق(س) دس}$

عزيزي الطالب قبل البدء بعملية الحل ، عليك ان ترتب حدود التكامل من الاصغر الى الاكبر كالتالي :

$$\int_{١}^{٥} = \int_{١}^{٣} + \int_{٣}^{٥}$$ ثم بعد ذلك نبدأ بتطبيق خصائص التكامل الباقية

؟؟ = ٦ + $\boxed{٢-}$ ← عكسنا الاشارة لان حدود التكامل معكوسة

ومنه $\int_{١}^{٥} \text{ق(س) دس} = ٤$ وهو المطلوب

مثال :

اذا كانت $\int_{١}^{٤} \text{٢ق(س) دس} = ٦$ فجد قيمة $\int_{٤}^{١} \text{ق(س) +٣ دس}$

تذكر ان من خواص التكامل توزيع الجمع والطرح لذا فإن مثل هذه الامثلة نقوم بتوزيع الجمع او الطرح على عملية التكامل وفي هذا المثال ...

$$\int_{٤}^{١} \text{ق(س)} + \int_{٤}^{١} \text{٣ دس}$$

$\int_{٤}^{١} \text{ق(س)} = ٣-$ ← قلب حدود التكامل

لان $\int_{١}^{٤} \text{٢ق(س) دس} = ٦$ (قسمة الطرفين على ٢)

$\int_{١}^{٤} \text{ق(س) دس} = ٣$

$\int_{٤}^{١} \text{٣ دس} = ٣(١-٤) = ٩-$

ومنه $\int_{٤}^{١} \text{ق(س) +٣ دس} = ٣- + ٩- = ١٢-$

مثال

اذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٥ & ، ٠ < س < ٢ \\ ٢س - ٣ & ، ٢ < س < ٤ \end{cases}$ فجد $\int_{٣}^{١} ٢ق(س) \, دس$

$\int_{١}^{٢} ٥ = ٥(٢ - ١) = ٥$

$\int_{٢}^{٣} ٢س - ٣ = \left[س^{٢} - ٣س \right]_{٢}^{٣} = ق(٣) - ق(١)$

$= ٠ - - ٢ = ٢$

نلاحظ ان $\int_{١}^{٣} = \int_{١}^{٢} + \int_{٢}^{٣}$

ومنه $\int_{١}^{٣} = \int_{١}^{٢} + \int_{٢}^{٣}$

$؟؟ = ٥ + ٢$

لكن السؤال طلب $\int_{٣}^{١} ٢ق(س) \, دس$ اي خاصية المعكوس بالاضافة الى $x٢$

وعليه فإن $\int_{٣}^{١} ٢ق(س) \, دس = - ٧ \times ٢ = -١٤$

تحديد أوقات الاستراحة

كل من يتعب له الحق أن يستريح بل أن الاستراحة هي واجب حتى يستطيع الطالب أن يتابع مهماته بنشاط وكفاءة وبعض الطلاب ينسون حقهم في الاستراحة فيرتكبون أحد الأخطاء التالية : -

1 – بعض الطلاب يذاكرون على حساب علاقاتهم الاجتماعية فلا أصدقاء لهم ولا زيارات اجتماعية يقومون بها و هذا قد يسبب لهم مشكلات في التكيف الاجتماعي مستقبلا

2 – بعض الطلاب يذاكرون لمدة خمس ساعات و هذا إرهاق ويمكن أن تتخذ الاستراحة أشكالا متنوعة منها : -

أ – إن تناول وجبة الطعام وهو شكل من أشكال الاستراحة من المذاكرة

ب – إن أداء الصلاة هو أيضا استراحة من المذاكرة

ج – إن الاستحمام هو أيضا استراحة من المذاكرة

د – إن الاستماع الى كل ما هو مفيد سواء من الإذاعة أو عن طريق التلفاز يعد من أشكال الاستراحة

هـ – إن ممارسة الرياضة هي أيضا استراحة من

تدريب .

اذا كانت $ق(س) = \begin{cases} -٦ & ، ١ < س < ٣ \\ -٢ & ، ٣ < س < ٦ \\ ٤ & ، ٦ < س < ٨ \end{cases}$ فجد $\int_{٨}^{١} \frac{-١}{٢} ق(س) \, . دس$ ؟

مثال :

اذا كان $\int_{١}^{ج} ٢س + ٣ \, دس = ٦$ ، فجد قيمة جـ

الحل : $\int_{١}^{ج} ٢س + ٣ \, دس$

$= \left[س^{٢} + ٣س \right]_{١}^{ج} = ٦$

$ق(ج) = ج^{٢} + ٣ج$

$ق(١) = (١)^{٢} + ٣ \times ١ = ٤$

ومنه

$ق(ج) - ق(١) = ٦$

$ج^{٢} + ٣ج - ٤ = ٦$ (بطرح ٦ من الطرفين)

$ج^{٢} + ٣ج - ١٠ =$ صفر (بتحليل العبارة التربيعية)

$(ج + ٥)(ج - ٢) =$ صفر

وعليه فان مجموعة الحل (٢ ، -٥)

الدرس الرابع : التكامل بالتعويض

- نتذكر معا ان التكامل يوزع في حال الجمع والطرح ولا يوزع في حال الضرب والقسمة .
- الذي يميز هذا التكامل وجود اقتران مرفوع لقوة او مقسوم على مشتقة اقتران ، وان أحد الاقترانيين يكون مشتقة الاخر .
- خطوات الحل بهذا التكامل .

1 -نفرض ان ص = الاقتران أي ص = ع(س)

2 -نجد مشتقة ص وهي ع$'$(س)

3 -نجد دس بدلالة دص .

4 -الرجوع الى التكامل الاصلي ونعوض ص مكان ع(س) ونختصر .

5 -كتابة التكامل بدلالة ع(س) اي نعوض قيمة ص في التكامل في النهاية .

تذكر ان $\text{دس} = \dfrac{\text{دص}}{\text{المشتقة}}$

لا تنتظر أن يأتيك النجاح
بل إبحث عنه
و لكن ....
قبل أن تبحث عنه حولك
إبحث عنه فى داخلك
فإنك لا تعلم حجم القدرات
التى وهبها الخالق لك

محمد الفقى

حالات التكامل بالتعويض .

* الحالة الاولى .

$$\boxed{(\text{مشتقة اقتران})\,(\text{اقتران})^{\text{ن}}}$$

مثال :-

$$\text{جـ}\int (٣\text{س}^{٢})(\text{س}^{٣}+٢)^{٣}\,\text{دس}$$

لاحظ ان الاقتران المرفوع لقوة (س٣+٢)هو مشتقة الاقتران الاول

خطوات الحل :

اولا نفرض ان $\boxed{\text{ص} = \text{س}^{٣}+٢}$

ثانيا : نجد مشتقة ص = ٣س^{٢}

ثالثا نجد دس بدلالة دص $\boxed{\text{دس} = \dfrac{\text{دص}}{٣\text{س}^{٢}}}$

رابعا نعوض ص في $\int (٣\text{س}^{٢})(\text{س}^{٣}+٢)^{٣}\,\text{دس}$ كالتالي :

$$\int (\cancel{٣\text{س}^{٢}})(\text{ص})^{٣}\,\frac{\text{دص}}{\cancel{٣\text{س}^{٢}}} \qquad (\text{حذف } ٣\text{س}^{٢})$$

خامسا نجري عملية التكامل

$$\int \text{ص}^{٣}\,\text{دس} = \frac{\text{ص}^{٤}}{٤} + \text{جـ}$$

وفي النهاية نعوض قيمة ص في ناتج التكامل النهائي $\dfrac{(\text{س}+٢)^{٤}}{٤} + \text{جـ}$

*** الحالة الثانية :**

$$\frac{\text{مشتقة اقتران}}{(\text{اقتران})^{ن}}$$

مثال :

جد $\int \frac{٢س + ٥}{(س^{٢} + ٥س + ١٠)}$ دس. لاحظ ان البسط مشتقة المقام

الحل :- نفرض أن $\boxed{ص = س^{٢} + ٥س + ١٠}$

نجد مشتقة دص $\frac{دص}{دس} = ٢س + ٥$ اذا $دس = \frac{دص}{٢س + ٥}$

نرجع للتكامل الاصلي ونعوض ص

$$\int \frac{\cancel{٢س + ٥}}{(ص)} \times \frac{دص}{\cancel{٢س + ٥}} \text{ دس.} \longleftarrow \int \frac{١}{ص} \text{ دس.}$$

$= لو|ص| + جـ$ (نعوض قيمة ص) $= لو|س^{٢} + ٥س + ١٠| + جـ$

*** الحالة الثالثة :-**

(مشتقة اقتران) × (جتا (اقتران الزاوية))

الفرض دائما في هذه الحالات ان ص = اقتران الزاوية

$\boxed{\text{ما ينطبق على جتا ينطبق على جا الزاوية وقا}^{٢}\text{ للزاوية}}$

مثال :

جد $\int (٢س) \times جتا (س^{٢} - ٣)$ دس.

الحل :

نفرض ان جتا الزاوية هو ص

$\boxed{ص = س^{٢} - ٣}$

مشتقة ص $\longleftarrow \frac{دص}{دس} = ٢س$ ؛ ومنه $دس = \frac{دص}{٢س}$

$$= \int \cancel{٢س} \text{ جتا س} \times \frac{دص}{\cancel{٢س}} \text{ دس.}$$

= جاص + جـ (نعوض قيمة ص)

$\boxed{= جا(س^{٢} - ٣) + جـ}$

مثال :

$$\text{جد } \int (\text{س}) \times (\text{جا}(\text{س}^2 - ٣)) \,.\text{دس}$$

الحل :

نفرض ان جا الزاوية هو ص

$$\boxed{\text{ص} = \text{س}^2 - ٣}$$

$$\text{مشتقة ص} \longleftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\text{س} \text{ ؛ ومنه دس } = \frac{\text{دص}}{٢\text{س}}$$

$$= \int \cancel{\text{س}} \text{ جا س} \times \frac{\text{دص}}{٢\cancel{\text{س}}} \,.\text{دس} \quad (\text{اختصار س مع س})$$

$$= \int \frac{١}{٢} \text{جاص} = \frac{-١}{٢} \text{جتاص} + \text{جـ}$$

$$\boxed{= \frac{-١}{٢} \text{جتا}(\text{س}^2 - ٣) + \text{جـ}} \quad (\text{نعوض قيمة ص})$$

مثال :

$$\text{جد } \int \frac{٢\text{س} + ٣}{\text{جتا}^2(\text{س}^2 + ٣\text{س})} \,.\text{دس}$$

الحل

$$\text{نفرض ان } \boxed{\text{ص} = \text{س}^2 + ٣\text{س}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\text{س} + ٣ \longleftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{٢\text{س} + ٣}$$

$$\int \frac{\cancel{٢\text{س} + ٣}}{\text{جتا}^2(\text{ص})} \times \frac{\text{دص}}{\cancel{٢\text{س} + ٣}} \,.\text{دس}$$

$$\int \frac{١}{\text{جتا}^2(\text{ص})} \,.\text{دس}$$

$$= \int \text{قا}^2\text{ص} \,.\text{دس} = \text{ظا ص} + \text{جـ}$$

$$= \text{ظا}(\text{س}^2 + ٣\text{س}) + \text{جـ}$$

$$\boxed{\text{نذكر ان قا}^2 = \frac{١}{\text{جتا}^2}}$$

مهارات قراءة أسئلة الاختبارات النهائية

أصدِقائيَ الأعِزّاءُ: السّلامُ عليكُم ورحمةُ الله وبركاتُه.

الاختبارُ يا أحبائي يحتاج إلى تركيز وهدوء وثقة بالنفس، وللأسف نجدُ بعض الطلاب يجتهدونَ ويحفظونَ الدروس عن ظهرِ قلب، ولكنّهم يرتبكون في أثناءِ تقديمِ الاختبار ويضطربون، ويتسرّعونَ في الإجابةِ فيمضي الوقتُ قبلَ أن يُكملوا حلّ الأسئلة. لذا آملُ أن تنتبهوا إلى هذه النّصائح المفيدة، وتعملوا بها:

١ سَمّوا الله، وتوكّلوا عليهِ، وكونوا واثِقينَ من أنفسكم.
٢ اقرؤوا السؤال بتمعُّن وتركيز، واقرؤوه أكثرَ من مرّة لتفهَموا المطلوبَ منه، ولا تَكتفوا بقراءةِ جُزءٍ من السؤال.
٣ انتَبهوا لعلاماتِ التّرقيم لأنها تساعدُ على فهم السؤال (الفاصلة– النقطة– إشارة الاستفهام– إشارة التعجُّب– النُّقطتان الرأسيتان بعد القول).
٤ انتبهوا لضبط أواخر الكلمات، والكلمات المتشابهة (إنسان– أسنان– فلاح– فلّاح– ذَهَبْ– ذَهبَ).
٥ التأكد من الكلمة الرئيسية في السؤال (عرِّف– علِّل– اشرَح– اذكر السبب– عَدِّد– اخترَ الإجابة الصحيحة).
٦ أعيدوا قراءة ما كَتبتُموه، وتأكّدوا أن ما كتبتموه مقروءًا وصحيحا من الناحية الإملائية.

أتمنى لكم النجاح والتوفيق

الحالة الرابعة :

$\int$ (مشتقة اقتران) $\text{هـ}^{\text{ق(س)}}$

نفرض في هذه الحالة ان ص = ق(س)

مثال :

جد $\int ٦\text{س}\ \text{هـ}^{\text{س}^٢}\ .\text{دس}$

الحل :

نفرض أن $\boxed{\text{ص} = \text{س}^٢}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\text{س} \Longleftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{٢\text{س}}$

$\int \cancel{٦\text{س}}^{\,٣}\ \text{هـ}^{\text{ص}}\ \frac{\text{دص}}{\cancel{٢\text{س}}}$

$\int ٣\,\text{هـ}^{\text{ص}}\ .\text{دس} = ٣\ \text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ}$ (نضع قيمة ص)

$\boxed{= ٣\ \text{هـ}^{\text{س}^٢} + \text{جـ}}$

الحالة الخامسة :

$\int$ (اقتران من الدرجة الاولى $)^{\text{ن}}$.دس

نفرض ان ص = الاقتران

مثال :

جد $\int (٥\text{س} + ٢)^٧\ .\text{دس}$

نفرض ان $\boxed{\text{ص} = ٥\text{س} + ٢}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٥ \Longleftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{٥}$

$\int \text{ص}^٧ \times \frac{\text{دص}}{٥}\ .\text{دس} = \frac{\text{ص}^٨}{٥ \times ٨} + \text{جـ}$

$= \frac{١}{٤٠}\text{ص}^٨ + \text{جـ}$ (نكتب قيمة ص)

$\boxed{= \frac{١}{٤٠}(٥\text{س} + ٢)^٨ + \text{جـ}}$

قاعدة عامة عندما $\int (\text{أ س} + \text{ب})^{\text{ن}} \, \text{دس}$

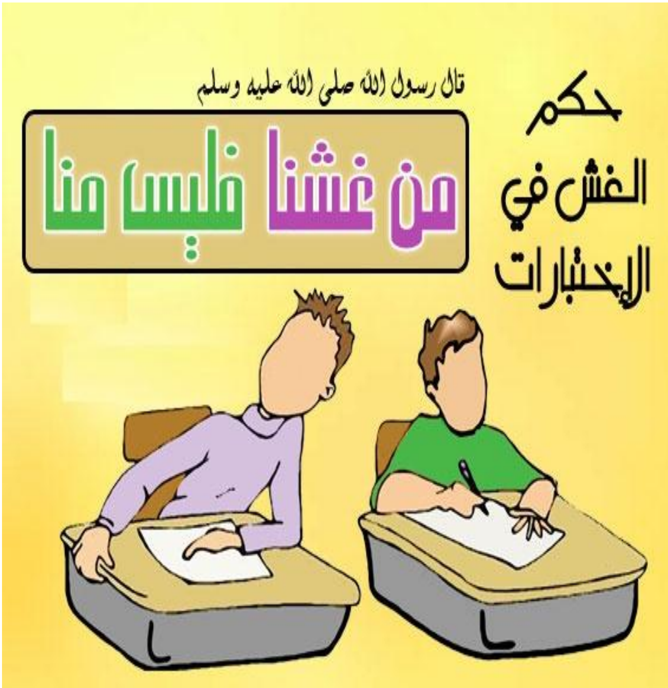
$$= \frac{(\text{أ س} + \text{ب})^{\text{ن}+1}}{\text{أ} \times (\text{ن} + 1)} + \text{جـ}$$

مثال على هذه القاعدة :

$$\text{جد} \int (5\,\text{س} + 3)^{3} \, \text{دس}$$

$$= \frac{(5\,\text{س} + 3)^{4}}{20} + \text{جـ}$$

ملاحظة .
لا تستخدم هذه القاعدة الا للتأكد من الحل او عندما يكون المطلوب خيار متعدد .



التكامل بالتعويض عند وجود حدود تكامل

* هناك طريقتين لتعويض حدود التكامل ...

الطريقة الاولى : اجراء التكامل بخطواته السابقة الذكر ثم بعد كتابة بدلالة (س) نعوض حدود التكامل كالمعتاد .

مثال :

$$\text{جد} \int_{0}^{1} 6\,\text{س} \, (\text{س}^2 + 2)^{2} \, . \, \text{دس}$$

نفرض ان $\boxed{\text{ص} = \text{س}^2 + 2}$

$$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{المشتقة}} = \frac{\text{دص}}{2\,\text{س}}$$

$$\int_{0}^{1} \cancel{6}^{\,3} \cancel{\text{س}} \, (\text{ص})^{2} \times \frac{\text{دص}}{\cancel{2\,\text{س}}} \, . \, \text{دس}$$

$$\int_{0}^{1} 3\,(\text{ص}^2) \, . \, \text{دس} = \text{ص}^3 \Big|_{0}^{1} \quad (\text{نعوض ص بدلالة س})$$

$$= (\text{س}^2 + 2)^{3} \Big|_{0}^{1} = \text{ق}(1) - \text{ق}(0) = (1^2 + 2)^{3} - (0^2 + 2)^{3} = 27 - 8 = 19$$

(لاحظ عزيزي الطالب انه اتممنا عملية التكامل كما هو الحال في التكامل غير المحدود ثم بعد كتابة ص بدلالة س عوضنا حدود التكامل) .

الطريقة الثانية :

نجري خطوات التكامل كما هي ، لكن قبل كتابة ص بدلالة س نجد حدود التكامل الجديدة اي نعوض الحد السفلي من التكامل بقانون ص ، (فرض (ص) ، ونعوض كذلك الحد العلوي كما هو الحال في الحد السفلي لنحصل على حدود جديدة للتكامل ، ولنحل المثال السابق بهذه الطريقة كالتالي .

$$\text{جد } \int_{0}^{1} 6\text{س}\,(\text{س}^2 + 2)^2 \,.\, \text{دس}$$

نفرض ان $\boxed{\text{ص} = \text{س}^2 + 2}$

$$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{المشتقة}} = \frac{\text{دص}}{2\text{س}}$$

نعوض حدود التكامل .

الحد السفلي (٠) . ص = س + ٢ = ٠ + ٢ = ٢

الحد العلوي (١) . ص = س + ٢ = ١ + ٢ = ٣

حدود التكامل الجديدة . السفلي = ٢ ، العلوي = ٣

$$\int_{2}^{3} \cancel{6}^{\,3}\,\cancel{\text{س}}\,(\text{ص})^2 \times \frac{\text{دص}}{\cancel{2\text{س}}} \,.\, \text{دس}$$

$$\int_{2}^{3} 3\,(\text{ص}^2) \,.\, \text{دس} = \Big[\text{ص}^3\Big]_{2}^{3}$$ (لاحظ هنا اننا كتبنا حدود التكامل الجديدة)

$$= \text{ق}(3) - \text{ق}(2) = 3^3 - 2^3 = 27 - 8 = 9$$

(في هذه الطريقة بعد ايجاد التكامل عوض مباشرة حدود التكامل الجديدة مكان ص بدون ان تكتب ص بدلالة س)

تدريب 1.

$$\text{جد } \int_{-2}^{2} (3\text{س}^3 + 5)^8\, \text{س}^2 \,.\, \text{دس}$$

تدريب 2

$$\text{جد } \int_{2}^{10} 3\,(5\text{س} - 1)^{-\frac{1}{2}} \,.\, \text{دس}$$

الدرس الخامس : تطبيقات التكامل (المساحات)

- سوف نقوم بتقسيم الدرس الى عدة حالات .

الحالة الأولى .

مساحة المنطقة المحصورة بين اقتران ومحور السينات ومستقيمين س$_1$ = أ ، س $_2$ = ب ، حيث ان الاقتران لا يقطع محوسر السينات بين العددين أ و ب فتكون مساحة المنطقة المحصورة هي ...

$$\text{م} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق (س) . دس}$$

مثال : أحسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحى الاقتران ق(س) = 3س^2 ومحور السينات خلال الفترة [1 ، 3] .

الحل .

أولا : نرى ان الاقتران ق(س) لا يقطعه خلال الفترة المحددة [1 ، 3] ، من خلال ق(س) = صفر أي...

3س^2 = صفر ومنه س = صفر .

نلاحظ ان الصفر لا يقع ضمن الفترة [1 ، 3] اذا الاقتران لا يقطعه .

ثانيا نأخذ تكامل الاقتران ق(س) وحدود التكامل تكون الفترة المحددة في السؤال كالتالي ...

$$\text{م} = \int_{1}^{2} \text{٣س}^2\text{. دس}$$

$$= \Big[\text{س}^3\Big]_{1}^{2} = \text{ق (٢) – ق (١)} = 2^3 - 1^3 = 7$$

ومنه المساحة المطلوبة = ٧ وحدات

مثال : احسب المساحة المحصورة بين منحى الاقتران ق(س) = 2س – 4 ، ومحور السينات والمستقيمين س$_1$ = -1 ، س$_2$ = 2 .

الحل : ..

2س – 4 = صفر ؛ 2س = 4 ؛ س = 2 ؛ اذا المنحنى لا يقطع ق(س) .

$$\text{م} = \int_{-1}^{2} \text{ق(س) . دس}$$

$$= \int_{-1}^{2} \text{٢س - ٤ . دس}$$

$$= \Big[\text{س}^2 - \text{٤س}\Big]_{-1}^{2} = \text{ق(٢) – ق(-١)}$$

$$= (٤-٨) – (١ +٤) = -٩$$

$$= |-٩| = ٩ \text{ وحدات}$$

ملاحظة : اذا كان الجواب سالبا للمساحة نأخذ القيمة المطلقة لان المساحة ≠ سالب .

الحالة الثانية :

مساحة المنطقة المحصورة بين ق(س)

والمستقيمين س 1 = أ ؛ س 2 = ب ، والاقتران ق(س) يقطع محور السينات بين العددين أ ،ب ، اي عندما نعمل ق(س) =صفر ، تكون قيمة س تقع بين العددين أ ، ب .

$$\text{م} = \int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{ق(س)} + \int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} \text{ق(س)} \, . \text{دس}$$

مثال : اذا كان ق(س) = 4 – 2س ، فأحسب المساحة المحصورة بين ق(س) ومحور السينات خلال الفترة [-1 ، 3] .

الحل :

- ق(س) = صفر ... 4 – 2س = صفر ؛ اذا س =2

نلاحظ (2) تقع ضمن الفترة [- 1 ، 3] ، اذا الاقتران يقطع محور السينات لذا يكون الحل على فترتين الاولى من - 1 لـ 2 ، والثانية من 2 لـ 3

كالتالي :

$$\text{م} = \underbrace{\int_{-1}^{2} \text{ق(س)}}_{\text{م}_1} + \underbrace{\int_{2}^{3} \text{ق(س)}}_{\text{م}_2} \, . \text{دس}$$

$$\text{م}_1 = \int_{-1}^{2} 4 - 2\text{س} \, . \text{دس} = \Big[4\text{س} - \text{س}^2 \Big]_{-1}^{2} = (8-4) - (-4-1) = 9$$

$$\text{م}_1 = \int_{2}^{3} 4 - 2\text{س} \, . \text{دس} = \Big[4\text{س} - \text{س}^2 \Big]_{2}^{3} = (12-9) - (8-4) = |-1| = 1$$

المساحة الكلية = م١ + م٢

= ٩+ ١ = ١٠ وحدات

تدريب :

جد المساحة المحصورة بين ق(س) = 2س-6

والمستقيم س$_1$ = 0 ، س$_2$ = 5 .

تدريب

احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحى الاقتران ق(س) = س – 4 ، ومحور السينات خلال الفترة [1 ، 3] .

النجاح

الحالة الثالثة .

المساحة المحصورة بين اقتران ومحور السينات ،

اي نجد نقاط تقاط الاقتران مع محور السينات عن طرق جعل ق(س) = صفر ، ومنه نجد س$_1$ و س$_2$

م = $\int_{س_1}^{س_2}$ ق(س) . دس

مثال : اذا كان ق(س) = 9 – س^2 ، فأحسب المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ومحور السينات .

الحل :

- أولا نجد س$_1$ و س$_2$ من خلال جعل ق(س) = صفر

9 –س^2 = صفر .   9 = س^2 ، اذا النقطة [3 ،-3]

اذا المساحة = $\int_{-3}^{3}$ ق(س) . دس

م = $\int_{-3}^{3}$ ٩ – س^٢ .دس = ٩س - $\left[\frac{س^٣}{٣}\right]_{-3}^{3}$

م = ق(٣) – ق(-٣) = (٢٧-$\frac{٢٧}{٣}$) – (-٢٧ - -$\frac{٢٧}{٣}$)

م = ١٨ - - ١٨ = ٣٦ وحدة

مثال : احسب المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س)=س^2 – 4س +3 ، ومحور السينات .

الحل :

ق(س) = صفر .

س^2 -4س+3 = صفر ⟵ (س-1) (س-3) =صفر

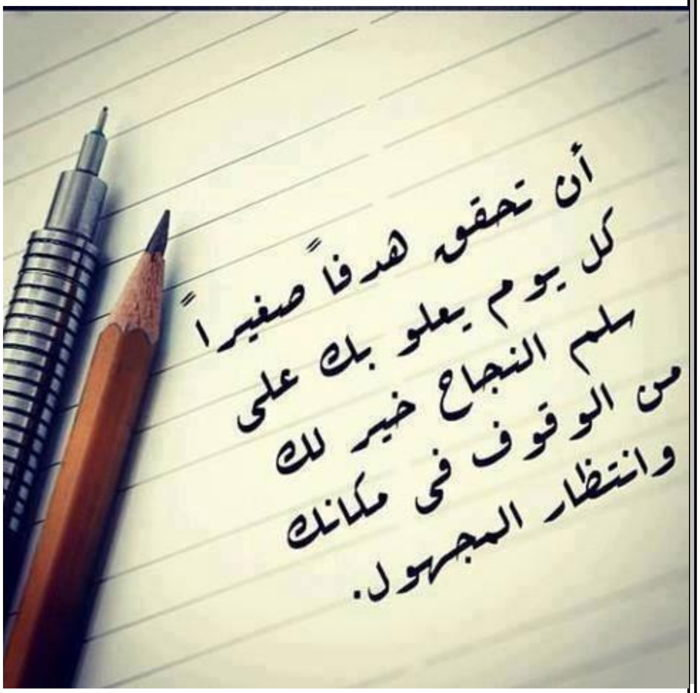
ومنه س$_1$ = 1 ، س$_2$ = 3 .

اذا المساحة = $\int_{1}^{3}$ ق(س) . دس

م = $\int_{1}^{3}$ س^٢ – ٤ س +٣ .دس

م = $\left[\frac{س^٣}{٣} - ٢س^٢ + ٣س\right]_{1}^{3}$ = ق(١) – ق(٣)

= $\frac{-٤}{٣}$ = $\frac{٤}{٣}$ وحدة .



الحالة الرابعة :

المساحة المحصورة بين اقترانين ق(س) و هـ(س)

نجد اولا نقطة تقاطع الاقترانين بجعل ....

ق(س) = هـ(س) فتكون المساحة هي : -

$$م = \int_{س_١}^{س_٢} ق(س) - هـ(س) \, .دس$$

أو

$$م = \int_{س_١}^{س_٢} هـ(س) - ق(س) \, .دس$$

مثال : جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س) = 3 – $س^2$ ، و هـ(س) = 2س .

الحل :

أولا نساوي ق(س) مع هـ(س) لايجاد $س_1$ و $س_2$.

ق(س) = هـ(س)

3 – $س^2$ = 2س ومنه ... $س^2$ + 2س -3 = 0

اذا (س+3) (س – 1) = 0 ومنه $س_1$ = -3 ؛ $س_2$=1

$$م = \int_{-٣}^{١} ق(س) - هـ(س) \, .دس$$

$$= \int_{-٣}^{١} س^٢ + ٢س - ٣ \, .دس$$

$$= \left[\frac{س^٣}{٣} + س^٢ - ٣س \right]_{-٣}^{١} = ق(١) - ق(-٣)$$

$$= \left| \frac{-٣٢}{٣} \right| = \frac{٣٢}{٣} \text{ وحدة}$$

تدريب :

جد مساحة المنقطة المغلقة بين منحنيي الاقترانين

ق(س) = $س^2$- س ، هــ (س) = 2س .

تدريب :

جد مساحة المنقطة المحصورة بين الاقترانين

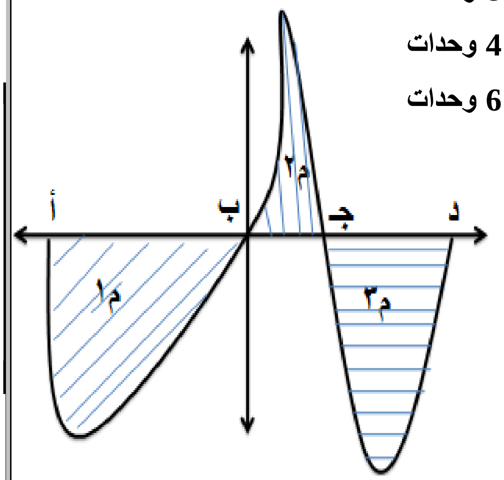
ق(س)= 3$س^2$ ، هــ (س) = 6س .

ايجاد التكامل من خلال الرسم .

- دائما التكامل فوق محور السينات موجب .
- دائما التكامل تحت محور السينات سالب .

مثال : بالاعتماد على الشكل التالي جد ما يلي

حيث : - م1 = 8 وحدات
- م2 = 4 وحدات
- م3 = 6 وحدات



١ـ $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) . دس}$

٢ ـ $\int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) . دس}$

٣ـ $\int_{\text{د}}^{\text{ب}} \text{ق(س) . دس}$

٤ـ $\int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{ق(س) . دس}$

٥ـ م$\int_{\text{أ}}^{\text{د}} \text{ق(س) . دس}$

الحل :

١- $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) . دس} = -٨$ (لانه تحت محور السينات)

٢ - $\int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) . دس} = -٤$ (خاصية المعكوس) لان $\int_{\text{ب}}^{\text{جـ}} \text{ق(س) . دس} = ٤$

٣- $\int_{\text{د}}^{\text{ب}} \text{ق(س) . دس} = \text{م}٢ + \text{م}٣ = \int_{\text{ب}}^{\text{جـ}} \text{ق(س) . دس} + \int_{\text{جـ}}^{\text{د}} \text{ق(س) . دس}$

$\int_{\text{ب}}^{\text{د}} \text{ق(س) . دس} = ٤ - ٦ = -٢$ (خاصية المعكوس) اذا $\int_{\text{د}}^{\text{ب}} \text{ق(س) . دس} = ٢$

٤- $\int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{ق(س) . دس} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) . دس} + \int_{\text{ب}}^{\text{جـ}} \text{ق(س) . دس} = \underbrace{-٨}_{\text{لانه تحت محور السينات}} + ٤ = -٤$

٥ـ م$\int_{\text{أ}}^{\text{د}} \text{ق(س) . دس}$ (لاحظ هنا انه طلب مساحة)

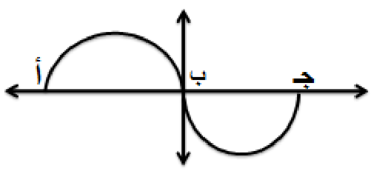
م$\int_{\text{أ}}^{\text{د}} \text{ق(س) . دس} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) . دس} + \int_{\text{ب}}^{\text{جـ}} \text{ق(س) . دس} + \int_{\text{جـ}}^{\text{د}} \text{ق(س) . دس}$

$= |-٨| + ٤ + |-٦| = ١٨$ وحدة

(لاحظ اننا اخذنا القيمة المطلقة لانها مساحة)

مثال :

معتمدا على الشكل المجاور والذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) خلال الفتـــــرة [أ ، جـ] ، فاذا علمت ان المساحة المغلقة خلال الفترة [أ ، جـ] = ١٤ وحدة مربعة ، وكان $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) ءس = ٦ فما قيمة $\int_{ب}^{جـ}$ ق(س) ءس ؟



الشكل أ

الحل :

$\int_{أ}^{جـ} = \int_{أ}^{ب} + \int_{ب}^{جـ}$

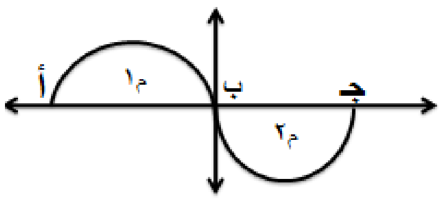
١٤ = ٦ + $\int_{ب}^{جـ}$ ومنه

$\int_{ب}^{جـ}$ = ٨ (لكن لاحظ ان $\int_{ب}^{جـ}$ تحت محور السينات)

$\boxed{\int_{ب}^{جـ} = -٨}$ لانها تحت محور السينات

تدريب :

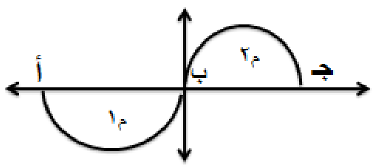
بالاعتماد على الشكل ب الذي يبيّن المنطقة المغلقة بين منحنى الاقتران ق(س) في الفترة [أ ، جـ] ، فاذا علمت ان م١ = ٩ وحدات و م٢ = ٤ وحدات ، فما قيمة $\int_{أ}^{جـ}$ ق(س) ءس



الشكل ب

تدريب :

بالاعتماد على الشكل جـ الذي يبيّن المنطقة المغلقة بين منحنى الاقتران ق(س) في الفترة [أ ، جـ] ، فاذا علمت ان م١ = ـ ٥ وحدات و م٢ = ٣ وحدات ، فما قيمة المساحة خلال الفترة من [أ ، جـ] .



الشكل جـ

الدرس السادس : تطبيقات اقتصادية .

- تعلم عزيزي الطالب ان العلاقة بين التكامل والاشتقاق عسكية ، لذا فان الايراد الكلي = ∫ الايراد الحدي . يمعنى اذا طلب السؤال الايراد الكلي وكان مُعطى في السؤال الايراد الحدي فما عليك سوى ان تأخذ ∫ الايراد الحدي .

مثال : اذا كان الايراد الحدي لبيع (س) حقيبة مدرسية هو دَ(س) = 3س^2 – 8س + 2 ، فما هو الايراد الكلي الناتج عن بيع هذه القطع ؟

الحل :

تذكر ان الايراد الكلي = ∫ الايراد الحدي .

د (س) = ∫ 3س^2 – 8س + 2 .دس

= س^3 – 4س + 2 . وهو المطلوب .

* لاحظ في الايراد الكلي لا نضع (جـ) لان عند بيع صفر قطعة فإن د (0) = 0 ؛ لذا لا نضع جـ

مثال : اذا كان الايراد الحدي لبيع س هاتف هو دَ(س)= 3س^2 + 2 . فجد الايراد الحدي الناتج عن بيع 3 هواتف .

الحل :

د (س) = ∫ دَ(س)

= ∫3س^2 + 2 . دس

= س^3 + 2 س .

- الايراد الكلي الناتج عن بيع 3 هواتف =

د (3) = س^3 + 2 س .

= $3^3 + 2 \times 3$

= 27 + 6 = 33 دينار .

(عندما يطلب السؤال ايراد كلي عن بيع س قطعة ، فعليك ان تأخذ ∫ الايراد الحدي أولا ثم تعوض س فيها لتحصل على الايراد الكلي عنها)

تدريب :

اذا كان الايـــــــراد الحـــدي لبيع س تلفزيون هو دَ(س)= س^2 + 2س + 7 . فجد الايراد الكلي الناتج عن بيع 6 تلفزيونات .

الدرس السادس : تطبيقات اقتصادية .

- معلومات اقتصادية ...

1- ع : السعر .

2- س : عدد وحدات الطلب .

3- $س_1$: كمية التوازن .

4- $ع_1$: سعر التوازن .

5- ع = ق(س) : منحنى (السعر – الطلب)

6- ع = هـ (س) : منحنى (السعر – العرض)

- (السعر – الطلب) تعني كلما زاد سعر سعلة قل عدد الوحدات المباعة أي قل إقبال المستهلك عليها . .

- (السعر – العرض) تعني كلما زاد سعر سلعة زاد عدد الوحدات المنتجة . اي زادت كمية الانتاج منها ليزيد الربح .

* فائض المستهلك = $\int_{0}^{س_1}$ ق (س) – $ع_1$. دس

*عندما يطلب السؤال فائض المستهلك عليك اولا ان تجد $س_1$(كمية التوازن) و $ع_1$ (سعر التوازن).

- كيفية ايجاد $س_1$ (كمية التوازن) وذلك من خلال جعل ق (س) = هـ (س) وهي الحالة الأولى. مثال :

اذا كان منحنى (السعر – الطلب) هـو ق(س) = 50- 4 س ، ومنحنى (السعر – العرض) هو هـ (س) = 20 + 2س ، فجد كمية التوازن .

الحل : لايجاد كمية التوازن نجعل ....

ق(س) = هـ(س)

50 – 4س = 20 + 2س . (**نحل المعادلة لايجاد س**)

30 = 6س ومنه س = 5

اذا كمية التوازن ($س_1$) = 5

والحالة الثانية لايجاد كمية التوازن س $_1$ اذا اعطانا السؤال ع 1 و ق(س) ، فإننا نساوي ق(س) = ع لايجاد قيمة $س_1$.

مثال : اذا كان $_ع$ = ق(س) = 70 – 4س تمثل معادلة (السعر – الطلب) حيث ع السعر بالدينار ، وكانت ع $_1$ = 10 فجد كمية التوازن .

الحل : لايجاد كمية التوازن في هذه الحالة نجعل ق(س) = ع .

70 – 4س = 10 . (بحل المعادلة) $س_1$ = 15

اذا كمية التوازن $س_1$ = 15

الدرس السادس : تطبيقات اقتصادية .

* كيفية إيجاد $ع_1$ وذلك بالتعويض $س_1$ في ق(س)

ومثال ذلك : اذا كانت ق(س) = 8 - 2س تمثل معادلة (السعر – الطلب) ، وكانت كمية التوازن $س_1 = 2$ ، فجد سعر التوازن .

الحل : لايجاد سعر التوازن نعوض $س_1$ في ق(س) .

ق(2) = 8 – 2س

= 8 – 2 × 2 = 4 .

اذا سعر التوازن $ع_1 = 4$.

مثال : اذا كان ع = ق(س) = 60 – 2س يمثل اقتران (السعر – الطلب) حيث ع السعر بالدينار ، س عدد الوحدات المنتجة ، وكان السعر ثابتا عند $ع_1 = 10$ فجد فائض المستهلك ؟.

الحل :

نجد أولا $س_1$ بجعل ق(س) = $ع_1$

60 – 2س = 10 (بحل المعادلة) $س_1 = 25$

$ف_ك = \int_0^{س_1} ق(س)\,.دس - ع_1 \times س_1$

$ف_ك = \int_0^{25} 60 - 2س - 10 \times 25$ (أكمل الحل)

الحل النهائي = 625

فائض المنتج = $ع_1 \times س_1 - \int_0^{س_1} هـ(س)\,.دس$.

مثال : اذا منحنى (السعر – الطلب) لمنتج معين معطى بالعلاقة ع = هـ (س) = 5 + 2س ، حيث ع العسر بالدنيار و س عدد الوحدات المنتجة ، وكانت كمية التوازن $س_1 = 8$ ، فجد فائض المنتج ؟.

الحل :

نجد اولا سعر التوزان ع1 من خلال تعويض $س_1$ في هـ (س) .

هـ (8) = 5 + 2س

= 5 + 2 × 8 = 21 . اذا $ع_1 = 21$

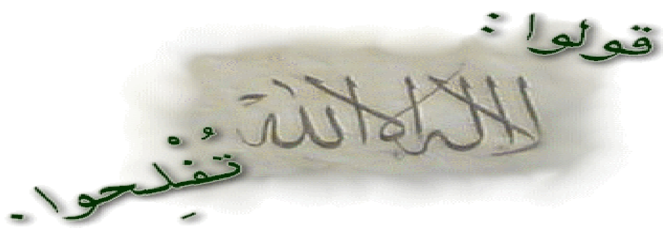
$ف_ج = ع_1 \times س_1 - \int_0^{س_1} هـ(س)\,.دس$.

$= 21 \times 8 - \int_0^{8} 5 + 2س\,.دس$

$= 168 - \left[(5س + س^2) \right]_0^8$

اذا $ف_ج = 64$. وهو المطلوب

* تذكر ان في فائض المستهلك نستخدم ق (س) ، بينما في فائض المنتج نستخدم هـ (س) .



الدرس السادس : تطبيقات اقتصادية .

مثال : - اذا كان ع = ق(س) = 16 – 2س ، تمثل معادلة (السعر – الطلب) ،
وكان ع = هـ (س) = 6 + 8س ، حيث ع السعر بالدينار ، س عدد الوحدات المنتجة فجد :

أ - كمية التوازن .
ب -سعر التوازن .
ت -فائض المستهلك عند سعر التوازن .
ث فائض المنتج عند سعر التوازن .

الحل :

أ - لايجاد كمية التوازن نجعل ق(س) = هـ (س)

16 – 2س = 6 + 8س

16 – 6 = 8 س + 2 س

10 = 10 س ومنه $\text{س}_1 = 1$

اذا كمية التوازن $\text{س}_1 = 1$

ب -لايجاد سعر التوازن نعوض س_1 في ق (س) أو في هـ (س) . (لنحل على ق(س) و هـ (س)

ق(1) = 16 – 2 × 1 = 14

هـ (1) = 6 + 8 × 1 = 14

اذا سعر التوازن = 14 (لاحظ انه عند تعوض س_1 في ق(س) أو عوضنها في هـ (س) في الحالتين نحصل على ع_1 .

ج- فائض المستهلك عند سعر التوازن

$$\text{ف}_\text{ك} = \int_0^{\text{س}_1} \text{ق(س)} .\text{دس} - \text{ع}_1 \times \text{س}_1$$

$$= \int_0^{1} 16 - 2\text{س} .\text{دس} - 14 \times 1$$ (اكمل الحل)

الحل النهائي $\text{ف}_\text{ك} = 1$

د- فائض المنتج عند سعر التوازن .

$$\text{ف}_\text{ج} = \text{ع}_1 \times \text{س}_1 - \int_0^{\text{س}_1} \text{هـ (س)} . \text{دس}$$

$$= 14 \times 1 - \int_0^{1} 6 + 8\text{س} . \text{دس}$$

$$= 14 - \left(6\text{س} + 8\text{س} \right)\Big|_0^1$$

ومنه ف ج = 14 – (6 + 4) = 4 وهو المطلوب .

تدريب : اذا كان ع = ق(س) = 20 - س ، تمثل معادلة (السعر – الطلب) ،
وكان ع = هـ (س) = 10 + س ، حيث ع السعر بالدينار ، س عدد الوحدات المنتجة فجد :

أ - كمية التوزان .
ب سعر التوزان .
ت فائض المستهلك عند سعر التوزان .
ث فائض المنتج عند سعر التوازن .

اختبار الوحدة