

الإدارة المعلوماتية ، الأدبي

المستوى الرابع

الأستاذ : عماد مسك

٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

التحدي

م (س) = س^١ + س^٢ + ... + س^{١٠٠} ← م (س) = س^١ + س^٢ + ... + س^{١٠٠}
 التكامل هو العملية العكسية للإشتقاق وتعني إيجاد الاقتران م (س) الذي
 مشتقته تساوي س^١ + س^٢ + ... + س^{١٠٠} وتكتب [س^١ + س^٢ + ... + س^{١٠٠} د س
 (و س) تعني أن التكامل بدلالة المتغير س

* $\{x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1\}$ = $x^n - 1$ = $(x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$.
جہاں $(x - 1)$ عدد ثابت ، یعنی ثابت التکامل غیر المحدود .

* قواعد التكامل غير المحدود :-

جواب: $p + sp = osp$ (1)

$$A + u_{s-} = u_{s-} \quad A + u_0 = u_{s0} \quad \therefore \text{જો}$$

$$A + u_{\frac{s}{4}} = u_{s \frac{s}{4}} \quad A + u_{\frac{1}{2}} = u_{s \frac{1}{2}} \quad \therefore \text{જો}$$

٥) $\int \frac{x^n}{1+x} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \int \frac{x^n}{1+x} dx$ حيث $n \neq -1$ (١) للأشهر ونقسم على x^{n+1} الجديد ونسعى بقاعدة التكامل الأساسية.

$$A + \frac{z}{z} = A + \frac{1+y}{1+y} = \text{or } 50\% \text{ } \left[\begin{array}{l} \text{مثال 2} \\ \text{مثال 3} \end{array} \right]$$

$$A + \frac{a}{q} = A + \frac{1 + \hat{a}}{1 + \lambda} = a s \hat{a} - 2$$

$$A + \frac{c_-}{s_-} = A + \frac{1 + \gamma_-}{1 + \gamma_-} = \omega s \gamma_- = \omega s \frac{1}{\gamma_0}$$

$$A + \frac{v}{c} \frac{c}{\lambda} = A + \frac{\frac{v}{c} c}{\frac{\lambda}{\gamma}} = A + \frac{1 + \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}} = 45 \frac{v}{c} \lambda$$

$$A + \frac{4}{5} \frac{C}{Y} = A + \frac{\frac{4}{5} C}{\frac{5}{5}} = A + \frac{1 + \frac{1}{5} C}{1 + \frac{1}{5}} = C^{\frac{1}{5}} C^{\frac{4}{5}} = C^{\frac{5}{5}} = C$$

(1)

$$u_s(u) \cdot 2 = u_s(u) \cdot 2 \quad (2)$$

$$A + \frac{u}{x} = A + \frac{u}{x} = A + \frac{u}{x} = u_s(u) \cdot 2 = u_s(u) \cdot 2$$

$$A + \frac{u}{x} = A + \frac{u}{x} = u_s(u) \cdot 2 = u_s(u) \cdot 2$$

$$A + \frac{u}{x} = A + \frac{u}{x} = u_s(u) \cdot 2 = u_s(u) \cdot 2$$

$$A + \frac{u}{x} = u_s(u) \cdot 2 = u_s(u) \cdot 2$$

$$(A + \frac{u}{x}) \cdot 2 = u_s(u) \cdot 2 + u_s(u) \cdot 2 = u_s(u) \cdot 2 + u_s(u) \cdot 2 \quad (3)$$

$$u_s(u) \cdot 2 + u_s(u) \cdot 2 = u_s(u) \cdot 2 + u_s(u) \cdot 2$$

$$A + \frac{u}{x} + \frac{u}{x} =$$

$$A + \frac{u}{x} + \frac{u}{x} =$$

$$A + \frac{u}{x} + \frac{u}{x} + \frac{u}{x} = u_s(u) \cdot 2 + u_s(u) \cdot 2 + u_s(u) \cdot 2$$

$$u_s(u) \cdot 2 + u_s(u) \cdot 2 + u_s(u) \cdot 2 = u_s(u) \cdot 2 + u_s(u) \cdot 2 + u_s(u) \cdot 2$$

$$A + \frac{u}{x} + \frac{u}{x} + \frac{u}{x} =$$

$$A + \frac{u}{x} + \frac{u}{x} + \frac{u}{x} =$$

$$A + \frac{u}{x} + \frac{u}{x} = u_s(u) \cdot 2 + u_s(u) \cdot 2 = u_s(u) \cdot 2 + u_s(u) \cdot 2$$

$$A + \frac{u}{x} = A + \frac{u}{x} = u_s(u) \cdot 2 = u_s(u) \cdot 2$$

$$\begin{aligned}
 s \frac{2}{s} &= \frac{s^1}{s^2} + \frac{s^0}{s^2} \quad \left[= s \frac{s^1 + s^0}{s^2} \right] * \\
 &= s \frac{s - 1 + s^0}{s^2} = \\
 s \frac{s^1 - 1 + s^0}{s^2} &= \\
 s \frac{s^1 - 1 + s^0}{s^2} &= s \frac{s^1 - 1 + s^0}{s^2} = \\
 A + \frac{2}{s} + s - 1 + s^0 &=
 \end{aligned}$$

⑤ إذا كان s (س) = لو اس s فإيه s (س) = $\frac{1}{s}$ لذلك فإيه s -

$$s \frac{1}{s} = s \frac{s^0}{s^1} = A + \frac{1}{s}$$

* إذا كان s (س) = s فإيه s (س) = s لذلك فإيه s -

$$s \frac{s}{s} = s \frac{s^1}{s^1} = A + s$$

مثال ٥ - * $s \frac{0}{s} = s \frac{s^0}{s^1} = A + \frac{0}{s}$

$$s \frac{1}{s^2} = s \frac{s^0}{s^2} = A + \frac{1}{s^2}$$

$$s \frac{s}{s^2} = s \frac{s^1}{s^2} = s \frac{s + 0}{s^2}$$

$$A + \frac{s + 0}{s} =$$

$$A + \frac{s}{s} + \frac{0}{s} = s \frac{s^1 + s^0}{s^1} *$$

ملاحظة ٥ - * $A + \frac{s^p}{s^p} = s \frac{s^p}{s^p}$

مثال ٥ - * $A + \frac{s^2}{s^2} = s \frac{s^2}{s^2}$

$$A + \frac{s^2}{s^2} = s \frac{s^2}{s^2}$$

٦) تكامل الاقترانات الدائرية :-

$$* \int \cos s \cos s = -\sin s + C \Leftrightarrow \int \cos p \cos s = -\sin s + C \quad \left[\frac{1}{p} \cos p \sin s - \frac{1}{p} \sin p \cos s \right]$$

$$* \int \sin s \cos s = \frac{1}{2} \sin 2s + C \Leftrightarrow \int \sin p \cos s = \frac{1}{2} \sin 2s + C \quad \left[\frac{1}{p} \sin p \cos s - \frac{1}{p} \cos p \sin s \right]$$

$$* \int \cos s \sin s = -\frac{1}{2} \cos 2s + C \Leftrightarrow \int \cos p \sin s = -\frac{1}{2} \cos 2s + C \quad \left[\frac{1}{p} \cos p \sin s - \frac{1}{p} \sin p \cos s \right]$$

مثال ٨- أوجد كلاً من التكاملات التالية :-

$$١) \int (\cos s + \sin s) \cos s = \int \cos^2 s + \sin s \cos s = \int \cos^2 s + \frac{1}{2} \sin 2s = \frac{1}{2} \left(\cos 2s + 1 \right) + \frac{1}{4} \sin 2s + C$$

$$٢) \int (\cos s + \sin s) \sin s = \int \cos s \sin s + \sin^2 s = \frac{1}{2} \sin 2s - \frac{1}{2} \cos 2s + C$$

$$٣) \int (\cos s + \sin s) \cos 2s = \int \cos s \cos 2s + \sin s \cos 2s = \frac{1}{2} \left(\cos 3s + \cos s \right) + \frac{1}{2} \left(\sin 3s - \sin s \right) + C$$

$$٤) \int (\cos s + \sin s) \sin 2s = \int \cos s \sin 2s + \sin s \sin 2s = \frac{1}{2} \left(\sin 3s - \sin s \right) - \frac{1}{2} \cos 3s + \frac{1}{2} \cos s + C$$

$$٥) \int (\cos s + \sin s) \cos 3s = \frac{1}{2} \left(\cos 4s + \cos 2s \right) + \frac{1}{2} \left(\sin 4s - \sin 2s \right) + C$$

مثال ٩- أوجد $\int (\cos s + \sin s) \cos s$ إذا كانت $\int (\cos s + \sin s) \sin s = \frac{1}{2} \sin 2s - \frac{1}{2} \cos 2s + C$

$$١) \int (\cos s + \sin s) \cos s = \frac{1}{2} \left(\cos 2s + 1 \right) + \frac{1}{4} \sin 2s + C$$

$$\text{الحل :-} ١) \int (\cos s + \sin s) \cos s = \frac{1}{2} \left(\cos 2s + 1 \right) + \frac{1}{4} \sin 2s + C = \frac{1}{2} \cos 2s + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sin 2s + C$$

$$٢) \int (\cos s + \sin s) \sin s = \frac{1}{2} \left(\sin 3s - \sin s \right) - \frac{1}{2} \cos 3s + \frac{1}{2} \cos s + C = \frac{1}{2} \sin 3s - \frac{1}{2} \sin s - \frac{1}{2} \cos 3s + \frac{1}{2} \cos s + C$$

* مثال ٥ :- جد : (٩) $u.s. \frac{9-u^2}{3-u}$ (٩) $u.s. \frac{u^2+u+5}{u+3}$ (٩) $u.s. \frac{1-2u}{2-u}$ (٩)

الحل :- (٩) $u.s. \frac{9-u^2}{3-u} = u.s. \frac{(3+u)(3-u)}{3-u} = u.s. \frac{9-u^2}{3-u}$
 $A + u + 3 + \frac{u}{3} =$

(٩) $A + \frac{u}{3} = u.s. u = u.s. \frac{(u+3)u}{u+3} = u.s. \frac{u^2+3u}{u+3}$

$A + u + 3 + \frac{u}{3} = u.s. \frac{(2+u+3)(u+3)}{u+3} = u.s. \frac{1-2u}{2-u}$ (٩)
 $A + u + 3 + \frac{u}{3} =$

* ملاحظة :- $A + (u)u = u.s. (u)u$

* مثال ٦ :- إذا كان $u.s. (u)u = u.s. (u)u + u + 5 = u.s. (u)u$ في (١) u ، (١) u

الحل :- $u.s. (u)u = u.s. (u)u + u + 5 = u.s. (u)u$ أي $u = (u)u$

$u + 5 = (u)u$

$1 = 0 + 1 + 0 = 0 + (1)1 + (1)1 = (1)u$

$2 = 1 + 1 = (1)1 + (1)1 = (1)u$

* مثال ٧ :- إذا كان $u.s. (u)u = u.s. (u)u - u + 3 = u.s. (u)u$ في (٤) u

الحل :- $u.s. (u)u = u.s. (u)u - u + 3 = u.s. (u)u$

$0 - u + 3 = (u)u$

$19 = 0 - (4)6 = (4)u$

* مثال ٢- إذا كان $x = \frac{c}{1-x}$ جـ $\frac{c}{1-x}$

الحل ٢- بما أنه x هو (x) $\Rightarrow \frac{c}{1-x} = \frac{c}{x}$

مثال ٣- $x = \frac{c+x}{2+x}$ جـ $\frac{c+x}{2+x}$

الحل ٣- $\frac{c}{2} = \frac{c+x}{2+x} \Rightarrow \frac{c}{2} = \frac{c+x}{2+x}$

مثال ٤- إذا كانت $x = \frac{c}{1-x}$ وكان $x = 1$ نجد $x = 1$

الحل ٤- $x = \frac{c}{1-x}$

$x = \frac{c}{1-x}$

$x = \frac{c}{1-x} \Rightarrow x(1-x) = c$

لدينا $x = 1$ نستفيد من $x = 1$

$x + 1 = 1 \Rightarrow x + 1(1) = 1$

$x = 1$

$x = \frac{c}{1-x}$

$x = \frac{c}{1-x} \Rightarrow x(1-x) = c$

* سؤال ٥- إذا كانت $x = \frac{c}{1-x}$ وكان $x = 1$ جـ $\frac{c}{1-x}$

الحل ٥- الجواب (٢٦)

مثال:- إذا كان ميل الطاس، المخرج، الاقتران م (س) عند النقطة (س، هـ) يساوي
 $3س + ٥$ وكان م يمر بالنقطة (٢، ١) نجد قاعدة الاقتران م (س).

الحل:- ميل الطاس = م (س) = $3س + ٥$

$$م (س) = [م (٢، ١) و س] = 3س + ٥ = ٥ + ٣س + ٥$$

لإيجاد م نستفيد من أنه م يمر بالنقطة (٢، ١) أي أن م (١) = ٢

$$٢ = ١ + ٥ + ٣(١) = ٩ \Rightarrow ٢ = ٩ - ٥ - ١ = ٢$$

$$\Rightarrow ٢ = ٩ - ٥ - ١ = ٢ \Rightarrow \boxed{٨ = ٩}$$

$$\therefore م (س) = ٣س + ٥ + ٨$$

* مثال:- يتحرك جسم بسرعة $٤س + ٥$ ، بعد المسافة المقطوعة بعد مرور
 ٤ ثواني علماً بأن ف (١) = ٣

$$\text{الحل:- ف} = [٤ و س] = ٤(١) + ٥ = ٩ \Rightarrow ٣ = ٩ - ٥ = ٣$$

$$\Rightarrow ٣ = ٩ - ٥ = ٣ \Rightarrow \boxed{٣ = ٩}$$

$$\therefore ٣ + ٥ + ٤ = ١٢$$

$$\text{ف (٤)} = ٤ + ٥ + ١٦ = ٢٥ = ٣ + ٤ + ١٦ = ٢٥$$

* سؤال:- يتحرك جسم بحيث أنه سرعته $٣س + ٨ + ٧$ ، بعد المسافة المقطوعة
 بعد ١٥ ثنتين علماً بأن ف (١) = ١٥

الاجابة ٤١

$$\begin{aligned} \text{مشتقة المسافة} &= \text{السرعة} \\ \text{مشتقة السرعة} &= \text{التسارع} \\ \text{السرعة} &= \text{المسافة} \\ \text{التسارع} &= \text{السرعة} \end{aligned}$$

مثال ٥:- يتحرك جسم بحيث أن تسارعه $t = 3 + 2t$ ، جد سرعة الجسم بعد ٥ ثواني علماً بأن $x(0) = 2$.

الحل ٥:- $x = \int (3 + 2t) dt = \frac{3}{1}t + \frac{2}{2}t^2 = 3t + t^2$

$x(0) = 2 \Rightarrow 2 = 3(0) + (0)^2 \Rightarrow 2 = 0$

$\boxed{2 = 0} \Leftarrow$

$\therefore 3 + 2t + t^2 = 0$

$7 = 0 + 10 + 5 = 0 + (0)^2 + (0)^2 = 0$

مثال ٦:- يتحرك جسم بحيث أن تسارعه $t = 6 + 2t$ ، جد المسافة المقطوعة بعد مرور ٣ ثواني علماً بأن $x(0) = 5$ ، $v(0) = 0$.

الحل ٦:- $x = \int (6 + 2t) dt = \frac{6}{1}t + \frac{2}{2}t^2 = 6t + t^2$

$x(0) = 5 \Rightarrow 5 = 6(0) + (0)^2 = 0$

$\boxed{5 = 0} \Leftarrow$

$\therefore 6 + 2t + t^2 = 0$

$x = \int (6 + 2t + t^2) dt = \frac{6}{1}t + \frac{2}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 = 6t + t^2 + \frac{1}{3}t^3$

$x(0) = 0 \Rightarrow 0 = 6(0) + (0)^2 + \frac{1}{3}(0)^3 = 0$

$\boxed{0 = 0} \Leftarrow$

$\therefore 0 + 2t + t^2 + t^3 = 0$

$0 + 12 + 18 + 27 = 0 + (3)^2 + (3)^2 + (3)^3 = 0$

$72 = 0$

الانواع

الامتلاك عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

* التكميل : المحدود :-

$$P \text{ م (ب) } = \text{م (ب) } - \text{م (ب) } (P)$$

مثال :- إذا كان م (ب) = ٥ ، م (ب) = ١٠ ، نجد م (ب) = ٥

الحل :- $P \text{ م (ب) } = \text{م (ب) } - \text{م (ب) } = ٥ - ١٠ = ٥$

مثال :- إذا كان م (ب) = ٢ ، م (ب) = ١٧ ، نجد م (ب) = ١٧

الحل :- $P \text{ م (ب) } = \text{م (ب) } - \text{م (ب) } = ١٧ - ٢ = ١٥$

$$١٧ = \text{م (ب) } + (٢) \Leftrightarrow \text{م (ب) } = ١٧ - ٢$$

$$\boxed{١٥ = \text{م (ب)}}$$

* قاعدة :- $P \text{ م (ب) } = \text{م (ب) } - \text{م (ب) } (P)$ حيث م (ب) ثابت

مثال :- إذا كان م (ب) = ٢ ، م (ب) = ٢ ، نجد م (ب) = ٢

$$٢٥ = \text{م (ب) } - \text{م (ب) } = ٢ - ٢ = ٠$$

$$٩ = \text{م (ب) } - \text{م (ب) } = ٢ - ١ = ١$$

مثال :- إذا كان م (ب) = ١٨ ، نجد م (ب) = ١٨

الحل :- $١٨ = \text{م (ب) } - \text{م (ب) } = ١٨ - ٠ = ١٨$

مثال :- إذا كان م (ب) = ٢ ، نجد م (ب) = ٢

الحل :- $٢ = \text{م (ب) } - \text{م (ب) } = ٢ - ٠ = ٢$

مثال ٥:- إذا كان $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$ فما قيمة P ؟؟

الحل:- $1 = (P-1) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Leftrightarrow 1 = P - 1$

$$\boxed{0 = P} \Leftrightarrow P = 0$$

* قاعدة ٨:- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+n} = 0$

مثال ٦:- جد التكاملات التالية:-

١) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

٢) $0 = 2 - 9 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

٣) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} =$$

$$3 = 0 + 2 =$$

٤) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

٥) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

٦) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

$$\textcircled{4} \quad \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \int_1^2 x^{-2} dx = \left[-x^{-1} \right]_1^2 = -\frac{1}{2} - \left(-1 \right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

مثال ٥:- إذا كان $\int_1^2 f(x) dx = 4$ ، $\int_1^2 g(x) dx = 9$ ، فجد $\int_1^2 (f(x) - g(x)) dx$

الحل:- $\int_1^2 (f(x) - g(x)) dx = \int_1^2 f(x) dx - \int_1^2 g(x) dx = 4 - 9 = -5$

مثال ٦:- إذا كان $\int_1^2 f(x) dx = 3$ ، $\int_1^2 g(x) dx = 5$ ، فجد $\int_1^2 (f(x) + g(x)) dx$

الحل:- $\int_1^2 (f(x) + g(x)) dx = \int_1^2 f(x) dx + \int_1^2 g(x) dx = 3 + 5 = 8$

$$\int_1^2 \sqrt{x} dx - \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \left[\frac{2}{3} x^{3/2} - 2x^{1/2} \right]_1^2 = \left(\frac{2}{3} \cdot 2^{3/2} - 2 \cdot 2^{1/2} \right) - \left(\frac{2}{3} \cdot 1^{3/2} - 2 \cdot 1^{1/2} \right)$$

$$= \left(\frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} \right) - \left(\frac{2}{3} - 2 \right) = \left(\frac{4\sqrt{2}}{3} - 2\sqrt{2} \right) - \left(\frac{2}{3} - 2 \right) = \frac{4\sqrt{2}}{3} - 2\sqrt{2} - \frac{2}{3} + 2 = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{6\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3} + \frac{6}{3} = \frac{-2\sqrt{2}}{3} + \frac{4}{3} = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{3}$$

مثال ٧:- إذا كانت $\int_1^2 f(x) dx = 3$ ، $\int_1^2 g(x) dx = 5$ ، فجد $\int_1^2 (f(x) - g(x)) dx$

الحل:- $\int_1^2 (f(x) - g(x)) dx = \int_1^2 f(x) dx - \int_1^2 g(x) dx = 3 - 5 = -2$

$$\int_1^2 (f(x) + g(x)) dx = \int_1^2 f(x) dx + \int_1^2 g(x) dx = 3 + 5 = 8$$

$$\left(\int_1^2 f(x) dx + \int_1^2 g(x) dx \right) - \left(\int_1^2 f(x) dx - \int_1^2 g(x) dx \right) =$$

$$(3 + 5) - (3 - 5) =$$

$$8 - (-2) =$$

$$10$$

(11)

* خواص التكامل المحدود :-

$$\textcircled{1} \int_a^b f(x) dx = \text{مرفوع} - \text{منخفض}$$

مثال :- $\int_1^2 (x^2 + \frac{1}{x}) dx = \text{مرفوع} - \text{منخفض}$

$$\int_1^2 (x^2 + \frac{1}{x}) dx = \left(\frac{x^3}{3} + \ln x \right) \Big|_1^2 = \text{مرفوع} - \text{منخفض}$$

$$\textcircled{2} \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

مثال :- إذا كان $\int_1^2 f(x) dx = 17$ فإذن $\int_2^1 f(x) dx = -17$

مثال :- إذا كان $\int_2^4 f(x) dx = 8$ فإذن $\int_4^2 f(x) dx = -8$

$$\textcircled{3} \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(u) du$$

مثال :- إذا كان $\int_1^2 f(x) dx = 15$ نجد ما يلي :-

$$\int_1^2 5f(x) dx = 5 \times 15 = 75$$

$$\int_1^2 \frac{1}{5} f(x) dx = \frac{1}{5} \times 15 = 3$$

$$\int_1^2 4f(x) dx = 4 \times 15 = 60$$

مثال :- أوجد التكاملات التالية :-

$$\int_1^2 (x^2 - \frac{1}{x}) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \ln x \right) \Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \ln 2$$

$$18 = 9 + 9 =$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \int_1^2 x^{-2} dx = \left(-x^{-1} \right) \Big|_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

$$18 = (2) \cdot 9 = (7 - 5) \cdot 9 =$$

مثال ٥:- إذا كان $\int_1^0 (x) dx = 1$ ، $\int_1^0 (x) dx = -1$ أو $\int_0^1 (x) dx = 1$:-

$$\textcircled{1} \int_1^0 (x) dx + \int_1^0 (x) dx = -1 - 1 = -2$$

$$\textcircled{2} \int_1^0 (x) dx - \int_1^0 (x) dx = 1 - (-1) = 2$$

$$\textcircled{3} \int_1^0 (x) dx + \int_0^1 (x) dx = 1 + (-1) = 0$$

$$\textcircled{4} \int_1^0 (x) dx - \int_0^1 (x) dx = 1 - 1 = 0$$

مثال ٦:- إذا كان $\int_1^0 (x) dx = 1$ ، $\int_1^0 (x) dx = -1$ أو $\int_0^1 (x) dx = 1$:-

$$\textcircled{1} \int_1^0 (x) dx + \int_1^0 (x) dx = 1 + (-1) = 0$$

$$(1 + (-1)) - (1 + (-1)) + 1 = 1$$

$$\textcircled{2} \int_1^0 (x) dx - \int_1^0 (x) dx = 1 - (-1) = 2$$

* خاصية الإضافة :-

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

مثال ٧:- إذا كان $\int_1^0 (x) dx = 1$ ، $\int_1^0 (x) dx = -1$ أو $\int_0^1 (x) dx = 1$:-

$$\textcircled{1} \int_1^0 (x) dx + \int_1^0 (x) dx = 1 + (-1) = 0$$

$$1 = 1 + 0$$

مثال ٥- إذا كان $\sum_{i=1}^n s(s) = 10$ ، $\sum_{i=1}^n s(s) = 11$ فجد $\sum_{i=1}^n s(s)$

الحل :- $\sum_{i=1}^n s(s) + \sum_{i=1}^n s(s) = \sum_{i=1}^n s(s)$

$$2- = 11 + 10 - =$$

$$15- = 3 \times 5- = \sum_{i=1}^n s(s)$$

مثال ٥- إذا كان $\sum_{i=1}^n s(s) = 10 + 5 + 5 = \sum_{i=1}^n s(s)$ فجد $\sum_{i=1}^n s(s)$

الحل :- $\sum_{i=1}^n s(s) = \sum_{i=1}^n s(s)$

$$(10 + 5 + 5) - (10 + 5 + 5) =$$

$$10 = 10 - 10 + 5 + 5 =$$

الاستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

سؤال ٥- أوجد كل من التكميلات التالية :-

الإجابة (١٤)

١) $\sum_{i=1}^n \frac{s(s)-s}{s-s} =$ فجد s - الإجابة $s=5$

٢) إذا كان $\sum_{i=1}^n s(s) = 10$ فجد $s(3) - s(1)$

الحل :- $\sum_{i=1}^n s(s) = s(3) - s(1)$ - أكل - الإجابة ٢٠

٣) $\sum_{i=1}^n s(s) = 10 + 5 + 5 = \sum_{i=1}^n s(s)$ فجد $\sum_{i=1}^n s(s)$ - الإجابة ٤٨

٤) $\sum_{i=1}^n s(s) = 10$ ، $s \geq 3$ ، $s \geq 4$ ، $s \geq 8$ فجد $\sum_{i=1}^n s(s)$

* التكامل بالتعويض :-

تستخدم طريقة التكامل بالتعويض عند وجود تكامل على الصورة $\int p(x) \cdot u(x) \cdot dx$ حيث $u(x)$ ثابت مضروب في المشتقة .

نفرض المقدار $u =$ وتكون $du =$ مشتقة ذلك المقدار

مثال ٢٠ جـ $\int (x^3 + 5x^2 + 6x + 7) \cdot x^4 \cdot dx$

الحل :- نفرض $u = x^3 + 5x^2 + 6x + 7$ $\Rightarrow du = 3x^2 + 10x + 6$

$\frac{du}{dx} = 3x^2 + 10x + 6$

$\int (x^3 + 5x^2 + 6x + 7) \cdot x^4 \cdot dx = \int \frac{1}{3} \cdot \frac{du}{dx} \cdot dx$

بإعادة ما فرضنا $= \frac{1}{3} \int (x^3 + 5x^2 + 6x + 7) \cdot x^4 \cdot dx$

جـ $\int \frac{x^3}{(x^3 + 5x^2 + 6x + 7)^4} \cdot dx$

الحل :- نفرض $u = x^3 + 5x^2 + 6x + 7$ $\Rightarrow du = 3x^2 + 10x + 6$

$\int \frac{x^3}{(x^3 + 5x^2 + 6x + 7)^4} \cdot dx = \int \frac{1}{u^4} \cdot \frac{1}{3} \cdot du$

$= \frac{1}{3} \int \frac{1}{u^4} \cdot du = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3u^3} \right) + C = -\frac{1}{9(x^3 + 5x^2 + 6x + 7)^3} + C$

سؤال ٢٠ جـ التكاملات التالية :-

جـ $\int \frac{1+x}{x^3 + 5x^2 + 6x + 7} \cdot dx$

جـ $\int (x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 7x) \cdot dx$

مسألة: - جرد التكاملات التالية:

$$(٤) \int \frac{1}{s^2(1+s^2)} ds$$

الحل: - نفرض $u = 1+s^2 \Rightarrow \frac{du}{ds} = 2s \Rightarrow \frac{du}{2} = s ds \Rightarrow \frac{du}{2s} = ds$

نقوم بتغيير الحدود: - عندما $s = 0 \Rightarrow u = 1+0 = 1$
وعندما $s = 1 \Rightarrow u = 1+1 = 2$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{s^2(1+s^2)} ds &= \int \frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{2s} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^2} du = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{u} \right) = -\frac{1}{2u} \\ &= -\frac{1}{2(1+s^2)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+s^2} \end{aligned}$$

$$(٥) \int \frac{1}{s^2(1+s^2)} ds = \int \frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{2s} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^2} du = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{u} \right) = -\frac{1}{2u}$$

الحل: - نفرض $u = 1+s^2 \Rightarrow \frac{du}{ds} = 2s \Rightarrow \frac{du}{2} = s ds \Rightarrow \frac{du}{2s} = ds$

عندما $s = 0 \Rightarrow u = 1+0 = 1$
عندما $s = 1 \Rightarrow u = 1+1 = 2$

$$\int \frac{1}{s^2(1+s^2)} ds = \int \frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{2s} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^2} du = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{u} \right) = -\frac{1}{2u}$$

$$\int \frac{1}{s^2(1+s^2)} ds = \int \frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{2s} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^2} du = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{u} \right) = -\frac{1}{2u}$$

$$= -\frac{1}{2(1+s^2)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+s^2}$$

* سؤال: - أوجد كل من التكاملات التالية:

$$(١) \int \frac{1}{s^2(1+s^2)} ds$$

$$(٢) \int \frac{1}{s^2(1+s^2)} ds$$

مثال ٢- اوجد كذا من انت املين لثابتة :-

$$I_1 = \int_0^1 (1-x)^2 dx$$

الحل :- نعرف ان $u = 1-x$ $\Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow du = -dx$ $\Rightarrow \frac{du}{-1} = dx$ $\Rightarrow -du = dx$

عندما $x=0 \Rightarrow u=1$
عندما $x=1 \Rightarrow u=0$

$$I_1 = \int_0^1 (1-x)^2 dx = \int_1^0 u^2 (-du) = \int_0^1 u^2 du = \left[\frac{u^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \left[\arctan x \right]_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}$$

الاجابة ١٦

نفرم $u = 1+x$ $\Rightarrow \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow du = dx$ $\Rightarrow \frac{du}{1} = dx$

الاجابة $\frac{1}{7} + \frac{(1+x)^7}{7} - \frac{(1+x)^4}{4}$

مثال ٣- اوجد $\int_0^1 (1+x)^2 dx$

الاجابة $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}x^3$

الاجابة $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}x^3$

مثال ٤- اوجد $\int_0^1 x^2 dx$

الحل :- نعرف ان $u = x$ $\Rightarrow \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow du = dx$ $\Rightarrow \frac{du}{1} = dx$

$$I_1 = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

$$I_2 = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

مثال: جـ ٢- $\int_0^1 (x^2 + x) dx$

الحل: نفرض $u = x^2 + x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x + 1 \Rightarrow \frac{du}{2x+1} = dx$

$$\int_0^1 (x^2 + x) dx = \int_0^1 \frac{du}{2x+1} = \frac{1}{2} \ln|2x+1| \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{1}{2} \ln 1 = \frac{1}{2} \ln 3$$

ب $\int_0^1 (1+x+x^2) dx$

الحل: نفرض $u = 1+x+x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 1+2x \Rightarrow \frac{du}{1+2x} = dx$

$$\int_0^1 (1+x+x^2) dx = \int_0^1 \frac{du}{1+2x} = \frac{1}{2} \ln|1+2x| \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{1}{2} \ln 1 = \frac{1}{2} \ln 3$$

$$A + \frac{1}{2} \ln 3 = A + C \Rightarrow \frac{1}{2} \ln 3 = C$$

ج $\int_0^1 (x^2 + x) dx$

الحل: نفرض $u = x^2 + x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x + 1 \Rightarrow \frac{du}{2x+1} = dx$

$$\int_0^1 (x^2 + x) dx = \int_0^1 \frac{du}{2x+1} = \frac{1}{2} \ln|2x+1| \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{1}{2} \ln 1 = \frac{1}{2} \ln 3$$

مثال: جـ ٣- $\int_0^1 (x^2 + x) dx$

الحل: نفرض $u = x^2 + x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x + 1 \Rightarrow \frac{du}{2x+1} = dx$

$$\int_0^1 (x^2 + x) dx = \int_0^1 \frac{du}{2x+1} = \frac{1}{2} \ln|2x+1| \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{1}{2} \ln 1 = \frac{1}{2} \ln 3$$

$$A + \frac{1}{2} \ln 3 = A + C \Rightarrow \frac{1}{2} \ln 3 = C$$

١٠) $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$

عندما $x = 1$ $y = 0$
عندما $x = 3$ $y = 1$

الحل: نفرض $y = \frac{1}{x}$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$

$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$
 $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$
 $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$

الاجابة $y = -\frac{1}{x} + C$

سؤال: اوجد $\int \frac{1}{x^2} dx$

مثال: اذا عرفت ان $y = \frac{1}{x}$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$

الحل: نفرض $y = \frac{1}{x}$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$

عندما $x = 1$ $y = 1$
عندما $x = 3$ $y = \frac{1}{3}$

$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$
 $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$
 $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$

مثال: اذا كان ميل المماس لمنحنى $y = \frac{1}{x}$ وكان $y = 1$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$

الحل: $y = \frac{1}{x}$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$

نفرض $y = \frac{1}{x}$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$

مثال: اذا كان $y = \frac{1}{x}$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$

الحل: نفرض $y = \frac{1}{x}$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$

عندما $x = 1$ $y = 1$
عندما $x = 3$ $y = \frac{1}{3}$

$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$
 $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$
 $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$

مثال ٥ - إذا كانت سرعة جسم هي $c = (1+n^2)^{1/2}$ وكانت
 فن (١) نجد المسافة المقطوعة بعد مرور ثانية واحدة .

الحل :- فن (١) $= \int_0^1 c \, dt = \int_0^1 (1+n^2)^{1/2} \, dt$

$$\frac{c}{n} = \frac{1}{n} \Rightarrow c = \frac{1}{n} \Rightarrow 1+n^2 = \frac{1}{n^2} \Rightarrow 1+n^2 = \frac{1}{n^2}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{n} \, dt = \int_0^1 \frac{1}{n} \, dt = \frac{1}{n} \int_0^1 1 \, dt = \frac{1}{n} [t]_0^1 = \frac{1}{n} (1-0) = \frac{1}{n}$$

$$A + \frac{1}{n} = A + \frac{1}{n} \cdot x = A + \frac{x}{n}$$

$$A + \frac{1}{n} (1+n^2) =$$

$$A + \frac{1}{n} (1+n^2) = A + \frac{1}{n} + n = A + \frac{1}{n} + n$$

$$A + 1 = A + \frac{1}{n} + n \Rightarrow A + \frac{1}{n} + n = A + 1 \Rightarrow \frac{1}{n} + n = 1$$

$$\boxed{A = 1} \Rightarrow$$

$$\therefore \frac{1}{n} + n = 1 \Rightarrow \frac{1}{n} + n = 1 \Rightarrow \frac{1}{n} + n = 1$$

وبعد مرور ثانية واحدة

$$\frac{1}{n} + n = 1 \Rightarrow \frac{1}{n} + n = 1 \Rightarrow \frac{1}{n} + n = 1$$

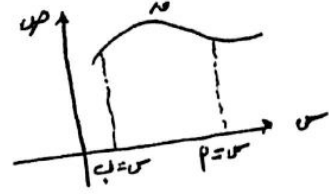
$$\frac{1}{n} + n = 1$$

$$\frac{1}{n} + n = 1$$

(٢٢)

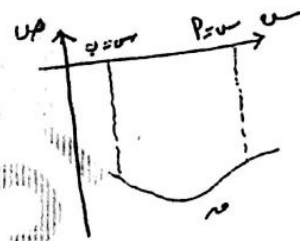
* المساحة :- هي أحد تطبيقات التكامل
 (١) إذا كان $f(x)$ واقعا فوق محور السينات فإن $\int_a^b f(x) dx$ يكون موجبا

ويكون $\int_a^b f(x) dx =$ المساحة المحصورة



(٢) إذا كان $f(x)$ واقعا تحت محور السينات فإن $\int_a^b f(x) dx$ يكون سالبا

ويكون المساحة $= \left| \int_a^b f(x) dx \right|$

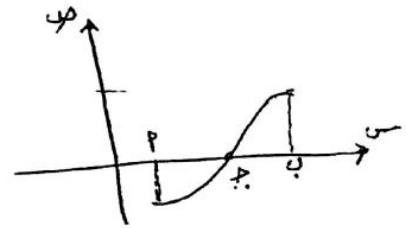


(٣) وإذا كان $f(x)$ يقطع محور السينات في $[a, b]$ فإننا نقوم بتجزئة التكامل جزئين :

$$\text{حيث: } \int_a^c f(x) dx = M_1$$

$$\int_c^b f(x) dx = M_2$$

$$\text{فمكون المساحة الكلية} = M_1 + M_2$$



مثال :- أوجد المساحة المحصورة بين $f(x) = x^2 + 4x - 5$ ومحور السينات والمستقيمين $x = -5$ ، $x = 1$

الحل :- لمعرفة نقاط تقاطع $f(x)$ مع محور السينات نضع $f(x) = 0$ حيث

$$x^2 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x - x - 5 = 0 \Leftrightarrow x(x+5) - 1(x+5) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+5) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ أو } x = -5 \quad \text{فالمساحة الكلية} = \int_{-5}^1 (x^2 + 4x - 5) dx = \left[\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 5x \right]_{-5}^1 = \left(\frac{1}{3} + 2 - 5 \right) - \left(-\frac{125}{3} - 50 + 25 \right) = -\frac{10}{3} - \left(-\frac{125}{3} - 25 \right) = -\frac{10}{3} + \frac{125}{3} + 25 = \frac{115}{3} + 25 = \frac{115 + 75}{3} = \frac{190}{3}$$

$$= (1 + 0) - (-125 + 25) = 1 - (-100) = 101$$

مثال ٥ - أوجد المساحة المحصورة بين $s = 3 + s^2$ ومحور السينات والمستقيمين $s = 1$ ، $s = 4$

الحل :- نجد نقاط التقاطع مع محور السينات
 $s = 0 \Rightarrow 3 + s^2 = 0 \Rightarrow s^2 = -3 \Rightarrow s = \pm \sqrt{-3}$ لا يوجد لها حل أي أنه s لا يقطع محور السينات

$$\begin{aligned} \leftarrow \text{مساحة} &= \int_1^4 (3 + s^2) ds = \left[3s + \frac{s^3}{3} \right]_1^4 = \left(12 + \frac{64}{3} \right) - \left(3 + \frac{1}{3} \right) = \frac{36}{3} + \frac{64}{3} - \frac{10}{3} = \frac{90}{3} = 30 \end{aligned}$$

مثال ٦ - أوجد المساحة المحصورة بين $s = (s-1)^2$ ومحور السينات والعمودات والمستقيم $s = 3$

الحل :- $s = 0 \Rightarrow (s-1)^2 = 0 \Rightarrow s-1 = 0 \Rightarrow s = 1$ لا يوجد لها حل أي أنه s لا يقطع محور السينات

$$\leftarrow \text{مساحة} = \int_1^3 (s-1)^2 ds = \left[\frac{(s-1)^3}{3} \right]_1^3 = \frac{(3-1)^3}{3} - \frac{(1-1)^3}{3} = \frac{8}{3} - 0 = \frac{8}{3}$$

مثال ٧ - أوجد المساحة المحصورة بين $s = (s-4)^2$ ومحور السينات والمستقيمين $s = 0$ ، $s = 9$

الحل :- $s = 0 \Rightarrow (s-4)^2 = 0 \Rightarrow s-4 = 0 \Rightarrow s = 4$ لا يوجد لها حل أي أنه s لا يقطع محور السينات

$$\leftarrow \text{مساحة} = \int_0^9 (s-4)^2 ds = \left[\frac{(s-4)^3}{3} \right]_0^9 = \frac{(9-4)^3}{3} - \frac{(0-4)^3}{3} = \frac{125}{3} - \frac{-64}{3} = \frac{189}{3} = 63$$

$$39 = 48 - 9 =$$

$$\therefore 39 = \left| \frac{(s-4)^3}{3} \right|_{s=0}^{s=9} = 63$$

الحل :- $s=6, \Rightarrow s=7 \Leftarrow s=8 \Leftarrow s=9 \Rightarrow [6,1]$
لذلك نقوم بتغيير

$$\Sigma = 0 + 9 = (7-1) - (11-9) = \int_1^7 (7-x) dx = \left[7x - \frac{x^2}{2} \right]_1^7 = 19$$

$$q = q_+ = (18-9) - (37-37) = 7 \quad 18-9 = 9 \quad 37-37 = 0 \quad 9-0 = 9$$

$$13 = 9 + 2 = 9 + 1 + 1 = 9^2$$

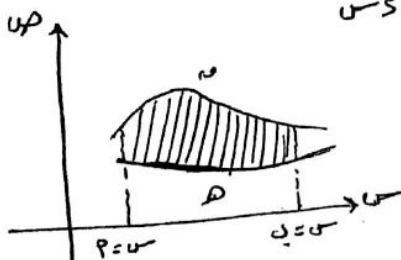
الحل: نقاط تقاطعه مع محور السينات $x=0$ و $x=7$

$$(.) - \left(\frac{r(T) - z(T)r}{r} \right) = \int_0^T \frac{r(T) - z(T)r}{r} - z(T)r = z(T)r - z(T)r = 0 \ll$$

* سؤال: أوجد المساحة المحصورة بين $y = \sin^{-1} x$ ومحور السينات

نقوم بإيجاد نقاط التقاطع بين المنحنين بوضع $m = 0$

$$\int_p ((u)_{\mathcal{O}} - (u)_{\mathcal{O}}^{\circ}) = \text{مقدار المساحة}$$



الاستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

مثال ٥ - أوجد المساحة المحصورة بين $(y) = 8 - x$ ، $(y) = x^2$ ،
الحل - لإيجاد نقاط التقاطع نضع $8 = x^2$

$$8 - x = x^2 \Rightarrow x^2 + x - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 32}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{2}$$

$$\int_{\frac{-1 - \sqrt{33}}{2}}^{\frac{-1 + \sqrt{33}}{2}} (8 - x - x^2) dx = \left[8x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{\frac{-1 - \sqrt{33}}{2}}^{\frac{-1 + \sqrt{33}}{2}}$$

$$= \left(\frac{16}{3} + 16 \right) - \left(\frac{16}{3} - 16 \right) = \frac{64}{3}$$

مثال ٦ - أوجد المساحة المحصورة بين منحنىي الأعداد $(y) = 1 - x$ ، $(y) = x^2$ ،
الحل - $1 - x = x^2 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$$\int_{\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}}^{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}} (1 - x - x^2) dx = \left[x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}}^{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}$$

$$= \left(\frac{5}{3} + 2 \right) - \left(\frac{5}{3} - 2 \right) = \frac{8}{3}$$

مثال ٧ - أوجد المساحة المحصورة بين $(y) = 9 - x^2$ ، $(y) = x^2$ ،
الحل - $9 - x^2 = x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{3}{\sqrt{2}}$

$$\int_{-\frac{3}{\sqrt{2}}}^{\frac{3}{\sqrt{2}}} (9 - x^2 - x^2) dx = \left[9x - \frac{2x^3}{3} \right]_{-\frac{3}{\sqrt{2}}}^{\frac{3}{\sqrt{2}}} = \left(\frac{27}{\sqrt{2}} + \frac{27}{\sqrt{2}} \right) - \left(\frac{27}{\sqrt{2}} - \frac{27}{\sqrt{2}} \right) = \frac{54}{\sqrt{2}}$$

$$= 18\sqrt{2}$$

سؤال ٨ - أوجد المساحة المحصورة بين $(y) = x^2 + 6$ ، $(y) = x^2 + 3$ ،
الإجابة - $\boxed{\frac{18}{5}}$

سؤال ٩ - أوجد المساحة المحصورة بين $(y) = x^2 + 6$ ، $(y) = x^2 + 3$ ،
الإجابة - $\boxed{\frac{18}{5}}$

$$\boxed{\frac{18}{5}}$$

مثال ٢: أوجد المساحة المحصورة بين $y = \sin x$ ، $y = \cos x$ من $x = 0$ إلى $x = \frac{\pi}{2}$

الحل: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx = 0$ $\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 0$
 $\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$

من $x = 0$ إلى $x = \frac{\pi}{2}$ فنحتاج إلى تكاملين

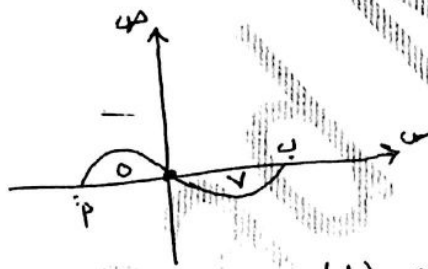
$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx = \left[-\cos x - \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = (-\cos \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2}) - (-\cos 0 - \sin 0) = (0 - 1) - (-1 - 0) = -1 + 1 = 0$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \sin x) dx = \left[\sin x + \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = (\sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2}) - (\sin 0 + \cos 0) = (1 + 0) - (0 + 1) = 1 - 1 = 0$$

$$\therefore I = I_1 + I_2 = 0 + 0 = 0$$

مثال ٣: اعمد الشكل التالي الذي يمثل منحنى $y = \sin x$ في الفترة $[0, \pi]$ لإيجاد:

(١) $\int_0^{\pi} \sin x dx$



(٢) $\int_0^{\pi} \cos x dx$

(٣) $\int_0^{\pi} \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx$

(٤) المساحة الكلية المحصورة بين $y = \sin x$ ومحور السينات في الفترة $[0, \pi]$

$$\text{المساحة الكلية} = 1 + 0 = 1$$

مثال ٤: معتمداً على الشكل التالي:

إذا كانت المساحة بين $y = \sin x$ ، $y = \cos x$ من $x = 0$ إلى $x = \frac{\pi}{2}$ وكانت:

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1$ ، فجد $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$

الحل: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx = 0$

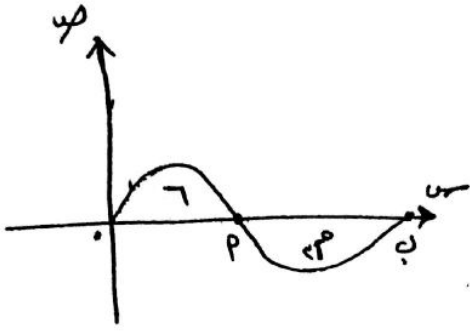
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 1 + 0 = 1$$

(٢٧)

* مثال: مستنداً على الشكل التالي:

إذا كان $\int_P^b f(x) dx = 2$ فجد:



$$1) \int_P^b f(x) dx = \int_P^7 f(x) dx + \int_7^b f(x) dx$$

$$10 = 2 - 7 =$$

$$2) \text{ المساحة } = \int_P^b f(x) dx - \int_P^7 f(x) dx = 10$$

$$3) \int_P^b f(x) dx = \int_P^7 f(x) dx - \int_7^b f(x) dx = 10$$

$$4) \int_P^b f(x) dx = 7 -$$

5) المساحة المحصورة بين $f(x)$ ومحور السينات هي $[0, 13]$

$$17 = 10 + 7 = 2 + 15 = 17$$

الإبداع

الاستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٣٦٦٩

* تطبيقات اقتصادية على التكامل :-

+ د (س) = د (س) دس أي أنه الإيراد الكلي يساوي تكامل الإيراد الحدي

+ مثال :- إذا كان الإيراد الحدي هو د (س) = $س^2 + ٥س + ٣$ فجد الإيراد الكلي ؟

الحل :- د (س) = د (س) $(س^2 + ٥س + ٣) دس = \frac{س^3}{٣} + \frac{٥س^2}{٢} + ٣س + ج$

ويكون د (٠) = ٠ $\Rightarrow ج = ٠$

$\Rightarrow د (س) = \frac{س^3}{٣} + \frac{٥س^2}{٢} + ٣س$

+ مثال :- جد الإيراد الكلي للإيراد الحدي د (س) حيث :-

(أ) د (س) = $٧س^٤ + ٣س$ (ب) د (س) = $٥٠ - ٣س$

* مثال :- إذا كان الإيراد الحدي هو د (س) = $٤س^٢ + ٦س + ٢$ فجد الإيراد الكلي الناتج عن بيع ١٠ قطعة .

الحل :- د (س) = د (س) $(٤س^٢ + ٦س + ٢) دس = \frac{٤س^3}{٣} + ٣س^٢ + ٢س$

$$د (١٠) = ١٠٠٠ + (١٠٠)٢ + ٢٠ = ١٢٢٠$$

* مثال :- إذا كان الإيراد الحدي هو د (س) = $٣ - ٢س$ فجد الإيراد الكلي الناتج عن بيع ١٥ قطعة ؟؟

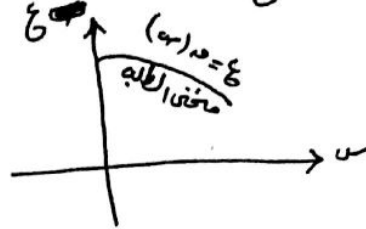
الحل :- د (س) = د (س) $(٣ - ٢س) دس = ٣س - ٢س^٢$

$$د (١٥) = (١٥)٣ - (١٥)٢ = ٢٢٥ - ٢٢٥ = ٠$$

$$٢٢٥ = ٢٢٥ - ٢٢٥ = ٠$$

* فائدتك المستهلك وفائدتك المنتج :-

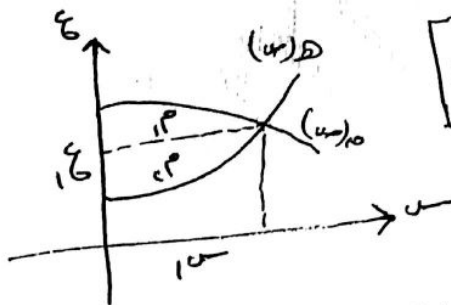
كلما زاد السعر قل الطلب ويسمى الاقدان $G = D(s)$ اقدانه (السعر - الطلب)
حيث s عدد وحدات الطلب.



وإذا كانت s تمثل عدد الوحدات التي ترغب الشركة في إنتاجها وعرضها بسعر G
فإنه الاقدان $G = D(s)$ يسمى اقدان (السعر - العرض) والسعر G الذي يكون
عنده $D(s) = D(s)$ يسمى سعر التوازن ويسمى s كمية التوازن بين العرض والطلب.



وهذه الشكل التالي تمثل المنطقة M ، التوزيع الكلي للمستهلك ويعطى برمز F_1 .



$$F_1 = \int_{s_1}^{\infty} (D(s) - G_1) ds = \int_{s_1}^{\infty} D(s) ds - G_1 s_1$$

وتمثل المنطقة M ، الخسائر الكلية للمنتج ويعرف هذا الخسائر بفائدتك المنتج ويعطى
الرمز F_2

$$F_2 = \int_{s_1}^{\infty} (G_1 - S(s)) ds = G_1 s_1 - \int_{s_1}^{\infty} S(s) ds$$

طريقك إلى
النجاح

* مثال: جود فاشفت المنيح ليعني السعر - العرض $ع = 7 - 0.5 + 0.5 = 6.5$

* الحل: نجد $\leftarrow C_1 = 0 + \frac{1}{2} \sqrt{1} \leftarrow C_2 = 0 + \frac{1}{2} \sqrt{1} \leftarrow C_3 = 0 + \frac{1}{2} \sqrt{1} \leftarrow$ نجد $C_4 = 0 + \frac{1}{2} \sqrt{1} \leftarrow$

دکتر _____ $\cos(0 + \frac{\pi}{2}) = 0$ $\frac{\pi}{2}$

الاجابة ٣٢

* مثال :- اذا كانه مخرجي اعر - اطلب هو د (ح) = ٥ - ٤ - ٣ - ٢ - ١ = ٥
هو د (ح) = ٢ + ٣ = ٥ فاجيب ما يلي :-

(أ) كمية التوازن وسعر التوازن
 (ب) قانون استهلاك
 (ج) فرض التناقص
 (د) الحصول على سعر (كمية التوازن) بوضع $Q_d = Q_s$ (د)

ويعتبر سعر التوازن هو $x = 2$ أو $x = 4$ $\Leftrightarrow 2 = 4 - 0.5 = 3.5 \Leftrightarrow 0 = \frac{2}{1} = 2 \Leftrightarrow 0 = 0$ $\boxed{0 = 0}$

(ب) فرض ہے $\int_0^{10} (x^2 - 5x + 10) dx = 100$
 $0 = 10 - (0 - 0) = 10 - 0 = 10$

$$\sigma_3(\sigma_1 + 1) \downarrow - (0 \times 3) = \sigma_3(\sigma_1) \downarrow - \sigma_1 = 2 \quad \textcircled{A}$$

$$\int_0^1 (e^x + e^{-x}) - 10 =$$

$$c_0 = K_0 - l_0 = ((1) - (c_0 + l_0)) - l_0 =$$

مثال: إذا كانه اقتزاه السر الطيب هو $٥(س) = ٢٠ - س$ من ١٠ ما قدرات السر العرف $٥(س) = \frac{س}{٣} + ٤$ فاحس ما يلي:

١) كمية التوازن وسعر التوازن ٢) فائض المستهلك ٣) فائض المنتج

الحل: ١) $٥(س) = ٥(س)$

$$٢٠ - س = \frac{س}{٣} + ٤ \quad \Leftrightarrow \quad ١٦ = \frac{س}{٣} + س \quad (\text{بالضرب في ٣})$$

$$٤٨ = س + ٣س \quad \Leftrightarrow \quad ٤٨ = ٤س \quad \Leftrightarrow \quad س = ١٢ \quad \boxed{س = ١٢}$$

$$٨ = ٢٠ - س = ٨$$

٢) فائض = $١٢ - ٢٠ = -٨$ $(١٢ \times ٨) - ٨$ $\boxed{\text{الاجابة } ٧٢}$

٣) فائض = $٨ - ٢٠ = -١٢$ $(٨ \times ١٢) - ١٢$ $\boxed{\text{الاجابة } ٨٤}$

ملحق
تدريبات

Canadian Jordanian schools



المدارس الأردنية للنظم الكندية

التاريخ:
اليوم:

الاسم:
الصف:

السؤال الأول:

أ) إذا كانت $2x^2 + 9x - 5 = 0$ فاحسب $x^2 + 3x - 5$

ب) إذا كانت $x^2 + 3x - 5 = 7$ فاحسب $x^2 + 3x - 5$

ج) إذا كان $x^2 + 3x - 5 = 7$ فاحسب $x^2 + 3x - 5$

د) إذا كانت $x^2 + 3x - 5 = 7$ فاحسب $x^2 + 3x - 5$

السؤال الثاني:

أ) احسب التكاملات التالية:

ب) احسب التكاملات التالية:

ج) احسب التكاملات التالية:

د) احسب التكاملات التالية:

السؤال الثالث:

أ) إذا كانت $x^2 + 3x - 5 = 7$ فاحسب $x^2 + 3x - 5$

ب) احسب التكاملات التالية:

الوحدة الأولى - متكامل

(مادة التعليم)

السؤال الثاني :-

جد كلاً من المتكاملات التالية :-

(١) $\int (7 + x) dx$	(١٤) $\int \frac{x^2 - 9}{x - 3} dx$	(٢٧) $\int \frac{x^2 - 1}{(x^2 + x + 1)^2} dx$
(٢) $\int x^3 (x^2 - 2) dx$	(١٥) $\int \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x} dx$	(٢٨) $\int (x^2 + x - 1)(1 - x) dx$
(٣) $\int (x^3 - x^2 + x + 5) dx$	(١٦) $\int \frac{x^3 + x^2 + x + 5}{x^2 + x + 1} dx$	(٢٩) $\int (x^2 + x - 1)(x^2 + x + 1) dx$
(٤) $\int (x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}) dx$	(١٧) $\int \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x + 1} dx$	(٣٠) $\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + x + 1} dx$
(٥) $\int (x^2 + x - 1)(x^2 + x + 1) dx$	(١٨) $\int \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x + 1} dx$	(٣١) $\int (x^2 + x - 1)(1 - x) dx$
(٦) $\int x^2 (\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}) dx$	(١٩) $\int \frac{x^2}{x^2 + x + 1} dx$	(٣٢) $\int \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + x + 1} dx$
(٧) $\int (x^2 - \frac{1}{x}) dx$	(٢٠) $\int \frac{x^2}{x^2 + x + 1} dx$	(٣٣) $\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + x + 1} dx$
(٨) $\int \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x + 1} dx$	(٢١) $\int \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x + 1} dx$	(٣٤) $\int \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + x + 1} dx$
(٩) $\int (x^2 - \frac{1}{x}) dx$	(٢٢) $\int \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x + 1} dx$	(٣٥) $\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + x + 1} dx$
(١٠) $\int (x^2 + x - 1)(x^2 + x + 1) dx$	(٢٣) $\int \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x + 1} dx$	(٣٦) $\int \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + x + 1} dx$
(١١) $\int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx$	(٢٤) $\int \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x + 1} dx$	(٣٧) $\int \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + x + 1} dx$
(١٢) $\int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx$	(٢٥) $\int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx$	(٣٨) $\int \frac{0 - x - 1}{x^2 + x + 1} dx$
(١٣) $\int (x^2 - \frac{1}{x}) dx$	(٢٦) $\int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx$	(٣٩) $\int \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + x + 1} dx$

← يتبع

[٢]

الوحدة الأولى: التطبيع

(٥٢) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران عند النقط (٥٥) يساوي (٤-٣) فأكتب قاعدة الاقتران في علمياً بأنه يمر بالنقط (٨٤١)	(٤٠) $\int_0^3 (1+u^2)(u+5) du$
(٥٣) إذا علمت أن ميل المماس لمنحنى في يساوي ٧ وكانت (٥٥) يمر بالنقط (٣٤٠) فحدد (٥٥)	(٤١) $\int_0^1 \frac{u^2-1}{u^2+u-6} du$
(٥٤) إذا كان (٥٥) = (١) و (٥٥) = (٥) فحدد (٥٥)	(٤٢) $\int_0^1 \frac{u}{u^2+1} du$
(٥٥) إذا علمت أن (٥٥) = (١) و (٥٥) = (٥) فحدد (٥٥)	(٤٣) $\int_0^1 \frac{u}{u^2+1} du$
(٥٦) إذا علمت أن (٥٥) = (١) و (٥٥) = (٥) فحدد (٥٥)	(٤٤) $\int_0^1 \frac{u}{u^2+1} du$
(٥٧) إذا علمت أن (٥٥) = (١) و (٥٥) = (٥) فحدد (٥٥)	(٤٥) $\int_0^1 \frac{u}{u^2+1} du$
(٥٨) إذا علمت أن (٥٥) = (١) و (٥٥) = (٥) فحدد (٥٥)	(٤٦) $\int_0^1 \frac{u}{u^2+1} du$
(٥٩) إذا علمت أن (٥٥) = (١) و (٥٥) = (٥) فحدد (٥٥)	(٤٧) $\int_0^1 \frac{u}{u^2+1} du$
(٦٠) إذا علمت أن (٥٥) = (١) و (٥٥) = (٥) فحدد (٥٥)	(٤٨) $\int_0^1 \frac{u}{u^2+1} du$
(٦١) إذا علمت أن (٥٥) = (١) و (٥٥) = (٥) فحدد (٥٥)	(٤٩) $\int_0^1 \frac{u}{u^2+1} du$
(٦٢) إذا علمت أن (٥٥) = (١) و (٥٥) = (٥) فحدد (٥٥)	(٥٠) $\int_0^1 \frac{u}{u^2+1} du$
(٦٣) إذا علمت أن (٥٥) = (١) و (٥٥) = (٥) فحدد (٥٥)	(٥١) $\int_0^1 \frac{u}{u^2+1} du$

(المعادن)

الوحدة الأولى: التكامل

$$(59) \text{ إذا كان } f(x) = \begin{cases} 3 + x & 0 \leq x \leq 1 \\ 3 & 1 < x \leq 3 \end{cases} \text{ فجد } \int_0^3 f(x) dx$$

$$(60) \text{ إذا كان } f(x) = \begin{cases} 7 + x & 0 \leq x \leq 4 \\ 4 & 4 < x \leq 7 \end{cases} \text{ فجد } \int_0^7 f(x) dx$$

$$(61) \text{ إذا كانت } f(x) \text{ هي مشتقة الدالة } f(x) \text{ المعرف على الفترة } [2, 4] \text{ فجد قيمه } f(2) - f(4)$$

$$(62) \text{ إذا كان } f(x) = \begin{cases} 4 & 0 \leq x \leq 3 \\ 5 & 3 < x \leq 5 \end{cases} \text{ فجد } \int_0^5 f(x) dx$$

$$(63) \text{ إذا كان } f(x) = \begin{cases} 8 & 0 \leq x \leq 1 \\ 4 + \frac{1}{x} & 1 < x \leq 3 \end{cases} \text{ فجد } \int_0^3 f(x) dx$$

$$\text{ فجد } \int_0^3 f(x) dx$$

$$(64) \text{ إذا كان } f(x) = \begin{cases} 3 & 0 \leq x \leq 3 \\ 36 & 3 < x \leq 6 \end{cases} \text{ فجد قيمه } \int_0^6 f(x) dx$$

$$(65) \text{ إذا كانت } f(x) = \begin{cases} 2 + x & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 & 1 < x \leq 3 \end{cases} \text{ فجد قيمه } \int_0^3 f(x) dx$$

$$(66) \text{ إذا كان } f(x) = \begin{cases} 9 - x & 0 \leq x \leq 9 \\ 10 & 9 < x \leq 10 \end{cases} \text{ فجد قيمه } \int_0^{10} f(x) dx$$

$$(67) \text{ إذا كان } f(x) = \begin{cases} 1 - x & 0 \leq x \leq 1 \\ 3 & 1 < x \leq 3 \end{cases} \text{ فجد قيمه } \int_0^3 f(x) dx$$

$$(68) \text{ إذا كان } f(x) = \begin{cases} 3 & 0 \leq x \leq 3 \\ 7 & 3 < x \leq 7 \end{cases} \text{ فجد قيمه } \int_0^7 f(x) dx$$

$$(69) \text{ إذا كان } f(x) = \begin{cases} 4 & 0 \leq x \leq 4 \\ 7 & 4 < x \leq 7 \end{cases} \text{ فجد قيمه } \int_0^7 f(x) dx$$

$$(70) \text{ إذا كان } f(x) = \begin{cases} 4 & 0 \leq x \leq 4 \\ 1 & 4 < x \leq 8 \end{cases} \text{ فجد قيمه } \int_0^8 f(x) dx$$

الاستاذ عماد مسك
٠٧٩٥١٥٢٦٦٩

تدریسات (المساحة)

الكل المتناهي في الجسيم المحدود بين منحنين عداسا
وعدد السطحات
لم هذه الجسيم يجب تعيينه حدود المنطقة الجراد اتحاد
ساقها وذلك من خلال اتحاد النقاط تقاطع
منحنين مع عدد السطحات يجعله (س) =
لا يكون ٢٠٠٠ من حيث تكون الجسيم تادي

$$M = \frac{1}{2} (S) \text{ و } S$$

في اصب ساهم المنطقة المغلقة المحدود بين
كل من المنحنيات الاستوائيات المتساوية وخطوط السطحات

$$\textcircled{1} (S) = A - S =$$

$$\textcircled{2} (S) = \sqrt{S} \quad S = 1, S = 2$$

$$\textcircled{3} (S) = 60 - S - 2 =$$

$$\textcircled{3} \text{ نه } (r) = \frac{r}{2} - 50$$

$$\textcircled{4} \text{ نه } (r) = \frac{r}{2} - 50$$

$$\textcircled{3} \text{ نه } (r) = \frac{r}{2} - 50$$

$$\textcircled{4} \text{ نه } (r) = \frac{r}{2} - 50$$

الاستاز عباد مسلك
0795153669



تدريبات
(المساحة)

٥) من (١٥) = ١٤ - ٢ - ١ (١٥) = ١٤ - ٢ - ١	الحل: المساحة المسماة بمحور منتهية
	من (١٥) = ١٤ - ٢ - ١
	١) نرسم مثلث منتهية منتهية منتهية
	منتهية منتهية منتهية
	٢) نجد نقاط المنتهية منتهية منتهية
	المنتهية منتهية منتهية منتهية منتهية
	٣ = ٢ (منتهية - منتهية) (منتهية)
	منتهية منتهية منتهية منتهية منتهية
	منتهية منتهية منتهية منتهية منتهية
	٦) من (١٥) = ١٤ - ٢ - ١

الاستاذ محمد مسك
0795153669

٣ = رقم القيد ٤ = رقم الملف ٥ = رقم الصفحة

٦ = رقم الملف ٧ = رقم الصفحة

تاریخات
(المسألة)

⑤ ن (١٧) - ٢ - ١٦ = ١٧ - ٢ = ١٥
⑥ ن (١٧) - ٢ - ١٦ = ١٧ - ٢ = ١٥

الاستاذ عبد الله
٧٩٥١٥٣٦٦٩

الاداء

٥) اذ هو لم يتم بحسب ما بينه وبينه
٧ = ٥ - ٥ / ٦ = ٥ - ٥

٦) ٧ = ٥ - ٥ / ٦ = ٥ - ٥

١) اسم سام المنطق المحيرة سيرة
نحوه (ب) = سيرة = سيرة
والتقييم هو سيرة = !