الفرع العلمي
المستوى الرابع
التكامل

نهج التميز في الرياضيات

الأستاذ رامي السعدي

ماجستير الرياضيات

٠٧٩٩٧٨٢٢٣٣

الأستاذ رامي السعدي
0799782233

* الدرس الرابع: التكامل بالتعويض:

* مقدمة:

نعلم أن التكامل يوزع فقط على الجمع والطرح ولا يوزع على الضرب والقسمة، ولحل هذه المشكلة هنالك طرق عدة لحساب التكامل ومنها:

- التكامل بالتعويض
- التكامل بالأجزاء
- التكامل باللوغاريتمات
- التكامل بالاقتران الأسي.
- التكامل بالكسور الجزئية

* نستخدم التكامل بالتعويض غالباً عندما يكون هنالك علاقة بين مشتقة أحد الاقترانين والاقتران الآخر.

* أمثلة توضيحية:

- $\int \text{٢س}(\text{س}^{٢}+٥)^{٩} \cdot \text{ءس}$

مشتقة $(\text{س}^{٢}+٥) = \text{٢س}$

- $\int \dfrac{\text{٥س}^{٤}-٤}{\sqrt{\text{س}^{٥}-\text{٤س}+١}} \cdot \text{ءس}$

مشتقة $(\text{س}^{٥}-\text{٤س}+١) = \text{٥س}^{٤}-٤$

- $\int \text{جا}^{٥}\text{س}\ \text{جتا س} \cdot \text{ءس}$

مشتقة جا س = جتا س.

- $\int \text{٣س} \times \sqrt[٥]{\text{س}^{٢}-١} \cdot \text{ءس}$

مشتقة $(\text{س}^{٢}-١) = \text{٢س}$

* النوع الأول: مشتقة أحدهما تساوي الآخر

حيث نفرض ص = اقتران مشتقة تساوي الآخر.

مثال ١: أوجد قيمة التكاملات الآتية:

[١] $\int \text{س}^{٣}(\text{س}^{٤}+١)^{٥} \cdot \text{ءس}$

[٢] $\int \dfrac{\text{س}+١}{\sqrt{\text{س}^{٢}+\text{٢س}-٣}} \cdot \text{ءس}$

٣) $\int \frac{٢}{س^{٢}} \times \sqrt[٣]{١ + \frac{١}{س}} \; . \; دس$

٤) $\int \frac{(\sqrt{س} + ٤)^{٥}}{\sqrt{س}} \; . \; دس$

٥) $\int_{٠}^{٣} (٣ - ٦س) \times \sqrt[٥]{س^{٢} - س + ١} \; . \; دس$

* ملاحظة: اذا كان ما بداخل اكبر عدد صحيح ليس اقتران خطي فإن السؤال يحل على التكامل بالتعويض ونفرض ص = ما بداخل أكبر عدد صحيح.

٦) $\int_{١}^{٢} س \times [س^{٢} - ٣] \; . \; دس$

٧) $\int_{٠}^{\pi} جاس \, [١ - جتاس] \; . \; دس$

٨ $\int^{\frac{\pi}{٢}}$ جاس جتا^{٣}س . ءس

٩ $\int$ (٣ + قا^{٢}س) × ظا^{٢}س . ءس

١٠ $\int$ ظتا^{٩}س قتا^{٢}س . ءس

* ملاحظة: في الاقترانات الدائرية إذا لم تكن الزوايا اقترانات خطية فإن السؤال يحل على التكامل بالتعويض ونفرض:
ص = الزاوية.

١١ $\int$ (٢س − ١) قا^{٢}(س^{٢} − س + ٣) . ءس

١٢ $\int \frac{\text{س ظا}^{٢}\sqrt{\text{ع}+١}}{\sqrt{\text{ع}+١}}$. ءس

١٣ $\int$ جاس قتا^{2}(جاس) . دس

١٤ $\int$ س^{2} جاس^{3} جتاس^{3} ^{4} . دس

النوع الثاني :

* قاعدة :

$$\int (أس + ب)^{ن} . دس = \frac{(أس+ب)^{ن+1}}{أ(ن+1)} + جـ$$

حيث ن $\neq$ -١

- البرهان :

مثال : أوجد قيمة التكاملات الآتية :

١ $\int (٢س+١)^{٥}$. دس

٢ $\int (٤-٢س)^{-٤}$. دس

٣ $\int (٦س+١)^{\frac{٣}{٤}}$. دس

الأستاذ رامي السعدي

0799782233

$\boxed{٤}$ $\int \sqrt{\frac{٢}{٣}\text{س} - ١} \cdot \text{دس}$

$\boxed{٥}$ $\int \frac{٥}{(\text{س}^{٢} - ١)^{\frac{٤}{٣}}} \cdot \text{دس}$

$\boxed{٦}$ $\int \frac{-٣}{\sqrt[٥]{(٧ - \text{س}^{٢})^{٤}}} \cdot \text{دس}$

$\boxed{٧}$ $\int \frac{٥}{(\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٩)^{٤}} \cdot \text{دس}$

$\boxed{٨}$ $\int \text{س}^{٧} \left(١ + \frac{١}{\text{س}}\right)^{٧} \cdot \text{دس}$

النوع الثالث: تكامل بالتعويض ثم الرجوع للفرض:

مثال ٣: أوجد قيمة التكاملات الآتية:

$\boxed{١}$ $\int \text{س}^{٣} \sqrt{\text{س}^{٢} + ١} \cdot \text{دس}$

الأستاذ رامي السعدي
0799782233

٢) $\int س^{٥} \sqrt{س^{٢} - ١} \, . \, دس$

٣) $\int \frac{\sqrt{ظتاس}}{جا^{٢}س} \, . \, دس$

النوع الرابع: تحليل ثم استخدام التعويض:

مثال٤: أوجد قيمة التكاملات الآتية:

١) $\int \sqrt{س^{٢} + ٢س^{٤}} \, . \, دس$ ، حيث $س > ٠$.

٢) $\int_{-١}^{١} \sqrt{س^{٢} + ٢س^{٤}} \, . \, دس$

الأستاذ رامي السعدي
0799782233

$\boxed{٣}$ $\int \sqrt[٣]{س^٥ - ٤س^٣} \, . \, ءس$

$\boxed{٤}$ $\int (س^٥ - ٣س)^٣ \, . \, ءس$

$\boxed{٥}$ $\int \frac{(س+١)^٥}{س^٧} \, . \, ءس$

$\boxed{٦}$ $\int \frac{\sqrt{س - س^٤}}{س^٤} \, . \, ءس$ ، حيث $س > ٠$

$\boxed{٧}$ $\int \frac{(\sqrt{س}+٣)^{٧}}{س} . دس$ ، حيث $س > ٠$.

ملاحظة: لحل تكاملات تحتوي على جا ، جتا
نتبع خطة الحل التالية:

* $\int \underbrace{جاس}_{مفرد}$ والباقي بدلالة جتاس
ونفرض $ص = جتاس$.

أو $\int \underbrace{جتاس}_{مفرد}$ والباقي بدلالة جاس
ونفرض $ص = جاس$

* نحلل الأس الفردي الأصغر
* $جا^{٢}س = ١ - جتا^{٢}س$
$جتا^{٢}س = ١ - جا^{٢}س$

مثال: أوجد قيمة التكاملات الآتية:

$\boxed{١}$ $\int جا^{٣}س \, جتا^{٤}س . دس$

$\boxed{٢}$ $\int جتا^{٣}س \, جا^{٥}س . دس$

الأستاذ رامي السعدي
0799782233

$\boxed{3}$ $\int \text{جا}^{2}\text{س}\ \text{جتا}^{3}\text{س}\ .\ \text{دس}$

$\boxed{4}$ $\int \text{جتا}^{3}\text{س}\ .\ \text{دس}$

$\boxed{5}$ $\int \text{جا}^{5}\text{س}\ .\ \text{دس}$

$\boxed{6}$ $\int \dfrac{\text{جا}^{5}\text{س}}{\sqrt{\text{جتا س}}}\ .\ \text{دس}$

$\boxed{7}$ $\int \text{جا}^{3}\text{س}\ \text{جتا}^{7}\text{س}\ .\ \text{دس}$

$\boxed{8}$ $\int \dfrac{\text{جا س}}{\text{قا}^{5}\text{س}}\ .\ \text{دس}$

$\boxed{9}$ $\int \dfrac{1}{\text{جا}^{3}\text{س}\ \text{جتا}^{2}\text{س}}\ .\ \text{دس}$

الأستاذ رامي السعدي
0799782233

* ملاحظة: ∫ جا٤س . دس ، ∫ جتا٤س . دس

نحل على المتطابقات الآتية دون تعويض:

- جا٢س = ١/٢ (١ − جتا ٢س)
- جتا٢س = ١/٢ (١ + جتا ٢س)

[١٠] ∫ جا٤س . دس

* ملاحظة: لحل تكاملات تحتوي على ظا، قا:

∫ قا٢س والباقي بدلالة ظاس
ونفرض ص = ظاس.

أو ∫ قاس ظاس والباقي بدلالة قاس
ونفرض ص = قاس

* قا٢س = ١ + ظا٢س
* ظا٢س = قا٢س − ١

مثال ٦: أوجد قيمة التكاملات الآتية:

[١] ∫ قا٤س ظا٥س . دس

[٢] ∫ قا٤س . دس

[٣] ∫ قا٣س . دس

٤) $\int$ قا^{٧}س ظاس . دس

٥) $\int$ قا^{٣}س ظا^{٣}س . دس

٦) $\int$ قا^{ن}س ظاس . دس

٧) $\int \frac{\text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{جتا}^{٤}\text{س}}$. دس

٨) $\int \frac{\text{دس}}{\text{جتا}^{٢}\text{س} \times \sqrt{١ + \text{ظاس}}}$

٩) اذا كان ع$_{ن}$ = $\int$ ظا^{٢ن}س . دس فأثبت أن

$$\text{ع}_{ن} = \frac{\text{ظا}^{(٢ن-١)}\text{س}}{٢ن-١} - \text{ع}_{ن-١}$$

* ملاحظة : ما ينطبق على قا، ظا ينطبق على قتا، ظتا

10) $\int$ قتا^{٤} س ظتا^{٥} س . د س

11) $\int$ قتا^{٦} س ظتا س . د س

12) $\int \frac{1}{\text{جا}^{٢}\text{س ظا}^{٥}\text{س}}$. د س

مثال ٧ : اذا كان:

$\int_{٣}^{م-١}$ ه(س) . د س $= \int_{٢}^{٣}$ ٣ه(٣س-١) . د س

فأوجد قيمة الثابت م ؟

مثال ٨ : اذا كان ه(س) متصلاً على ح
وكان م عدداً ثابتاً، فأثبت أن:

$\int_{م}^{٢م}$ ه(س) . د س $= \int_{٠}^{م}$ ه(٣م - س) . د س

مثال ٩: إذا كان ق(٢) = ٣ ، ق(١) = ٥

فأوجد $\int_{1}^{\frac{1}{2}}$ ق'$\left(\frac{1}{س}\right) \times$ س$^{-2}$. دس .

* ملاحظة:

$\int$ ق'(س) . دس = ق(س) + ج

$\int$ ق'(مقدار غير س) . دس ⇐

حل بالتكامل بالتعويض ونفرض:

ص = المقدار بداخل القوس .

مثال ١٠: إذا كان $\int_{1}^{4}$ (ق(س) + ٢) . دس = ٨

أجد $\int_{2}^{1}$ س ق(س^2) . دس .

مثال ١١: إذا كان $\int_{ب}^{أ}$ س ق(س) . دس = ٦

فأوجد $\int_{-ب}^{-أ}$ (٢س + ٤) ق(س + ٢) . دس .

0799782233

ورقة عمل (٤)

س١ : ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة :

١) إذا كان $\int_{٢}^{٣} \text{س}\,\text{ق}(٥\text{س})\,.\,\text{دس} = ٥$
أوجد قيمة $\int^{١} (٣\text{س}+٦)\,\text{ق}(٥\text{س}+١٠)\,.\,\text{دس}$
أ) ٥ ب) ١٥ ج) ١٠ د) غير ذلك

٢) إذا كان $\int_{١}^{٣} \text{ق}(\text{س})\,.\,\text{دس} = ٤$
أوجد $\int_{٠}^{٢} \left(\text{ق}(\text{س}+١) - ٢\text{س} + ٣\right)\,.\,\text{دس}$
أ) ٣ ب) ٦ ج) ٧ د) ١٤

٣) إذا كان $\int_{٣}^{٧} \text{ق}(\text{س})\,.\,\text{دس} = \int_{٨}^{\text{ج}} \text{ق}(\text{س}-٥)\,.\,\text{دس}$
فما قيمة الثابت ج :
أ) ٢ ب) ٣ ج) ٤ د) ١٢

٤) إذا كان ق اقترانًا قابلاً للاشتقاق على ح
وكان ق(٩) = ٨ ، ق(٤) = ٣
فما قيمة $\int_{٢}^{٣} ٢\text{س}\,\text{ق}'(\text{س}^٢)\,.\,\text{دس}$:
أ) ٥ ب) ١٠ ج) ١١ د) ٢٢

٥) إذا كان $\text{ق}'(\text{س}) = \text{ق}(\text{س}) \neq ٠$
وكان $\text{ن} \neq ٠$ ، فإن $\int \text{ق}(\text{س})^{\text{ن}}\,.\,\text{دس} =$
أ) $\frac{\text{ق}(\text{س})^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١} + \text{جـ}$ ب) $\frac{\text{ق}(\text{س})^{\text{ن}-١}}{\text{ن}-١} + \text{جـ}$
ج) $\frac{\text{ق}(\text{س})^{\text{ن}}}{\text{ن}} + \text{جـ}$ د) $\text{ق}(\text{س}) + \text{جـ}$

٦) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}'(\text{هـ}(\text{س})) \times \text{هـ}'(\text{س})\,.\,\text{دس} =$
أ) ق(ب) − ق(أ)
ب) ق′(ب) − ق′(أ)
ج) ق(هـ(ب)) − ق(هـ(أ))
د) ق′(هـ(ب)) − ق′(هـ(أ))

س٢ : أوجد قيمة التكاملات الآتية :

١) $\int \frac{\text{دس}}{\sqrt{١-\sqrt{\text{س}}}}$ ٢) $\int \frac{\text{جا}^٤\text{س}}{\text{قتا}^٢\text{س}}\,.\,\text{دس}$

٣) $\int \frac{\text{ظا}^٣\text{س}}{\sqrt{\text{قا}\,\text{س}}}\,.\,\text{دس}$ ٤) $\int \text{س}^٥ \times \sqrt[٣]{\text{س}^٣+١}\,.\,\text{دس}$

٥) $\int \frac{\sqrt{\text{س}^٢-\text{س}^٤}}{\text{س}^٥}\,.\,\text{دس}$ حيث س > ٠

٦) $\int \text{س}^٢ \sqrt[٣]{\text{س}^٧-\text{س}^٣}\,.\,\text{دس}$

٧) $\int \text{س}^٢ \sqrt[٣]{\text{س}-١}\,.\,\text{دس}$ ٨) $\int_{١}^{٣} \frac{(\text{س}+١)^٧}{\text{س}^٩}\,.\,\text{دس}$

٩) $\int_{١} \sqrt{\text{س}^٢-١٠\text{س}+٢٥}\,.\,\text{دس}$

١٠) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} \frac{\text{جاس}\,\text{جتاس}}{\sqrt{١+\text{جا}^٢\text{س}}}\,.\,\text{دس}$

١١) $\int \text{قا}^٢(\text{س}+٤٥^\circ) \times \frac{١+\text{ظاس}}{١-\text{ظاس}}\,.\,\text{دس}$

الإجابات :

س١ : ١) ب ٢) ب ٣) د ٤) أ ٥) ج ٦) ج

س٢ : ١) $-٣\left(٢(١-\sqrt{\text{س}})^{\frac{١}{٢}} + \frac{٢}{٣}(١-\sqrt{\text{س}})^{\frac{٣}{٢}}\right) + \text{جـ}$
٢) $\frac{١}{٣}\,\text{جا}^٦\text{س} + \text{جـ}$
٣) $\frac{٢}{٣}\,\text{قا}^{\frac{٣}{٢}}\text{س} + ٢\,\text{قا}^{-\frac{١}{٢}}\text{س} + \text{جـ}$
٤) $\frac{١}{٣}\left(\frac{٣}{٧}(\text{س}^٣+١)^{\frac{٧}{٣}} - \frac{٣}{٤}(\text{س}^٣+١)^{\frac{٤}{٣}}\right) + \text{جـ}$
٥) $-\frac{١}{٣}\left(\text{س}^{-٢}-١\right)^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}$
٦) $\frac{٣}{١٦}\left(\text{س}^{٤}-١\right)^{\frac{٤}{٣}} + \text{جـ}$
٧) $\frac{٣}{١٠}(\text{س}-١)^{\frac{١٠}{٣}} + \frac{٦}{٧}(\text{س}-١)^{\frac{٧}{٣}} + \frac{٣}{٤}(\text{س}-١)^{\frac{٤}{٣}} + \text{جـ}$
٨) $-\frac{١}{٨}\left((\frac{٤}{٣})^٨ - (٢)^٨\right)$ ٩) $-٤,٥$ ١٠) $\sqrt{٢} - ١$
١١) $\frac{١}{٢}\,\text{ظا}^٢(\text{س}+٤٥^\circ) + \text{جـ}$

الدرس الخامس : التكامل بالأجزاء

* مقدمة :

يستخدم إذا كان لا يوجد علاقة بين مشتقة أحد الاقترانين والاقتران الآخر على العكس من التكامل بالتعويض.

أمثلة: $\int \text{س جتاس} \cdot \text{ءس}$

$\int (\text{٣س}-١)\ \text{جا٢س} \cdot \text{ءس}$

$\int \text{س}^{٤}\ \text{جتا٥س} \cdot \text{ءس}$

$\int (\text{٤س}-١) \times \sqrt[٣]{\text{٢س}+٥} \cdot \text{ءس}$

ملاحظة : إذا تحقق الشرطين التاليين فإن السؤال حل على الأجزاء .

١) أحد الاقترانين إذا بقيت تشتقه فإنه يعطي ثابتاً في النهاية .

٢) الاقتران الآخر تستطيع أن تكامله .

قاعدة التكامل بالأجزاء :

$$\int_{أ}^{ب} \text{ص} \times \text{ءهـ} = \text{ص} \times \text{هـ} \Big]_{أ}^{ب} - \int_{أ}^{ب} \text{هـ} \times \text{ءص}$$

النوع الأول : تكامل بالأجزاء مرة واحدة :

مثال : أوجد قيمة التكاملات الآتية :

$\boxed{١}$ $\int \text{٧س جتاس} \cdot \text{ءس}$

$\boxed{٢}$ $\int \frac{٧-\text{٣س}}{\text{قتا٤س}} \cdot \text{ءس}$

يجب أن تكون الإشارة بين الاقترانين ضرب

$\boxed{٣}$ $\int \frac{\text{س جاس}}{\text{قاس}} \cdot \text{ءس}$

$\boxed{٤}$ $\int \frac{\text{٣س}}{\sqrt{\text{٣س}+١}} \cdot \text{ءس}$

٥ $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}$ ٥س جتا٢س . دس

٦ $\int$ ٣س جا٤س . دس

٢ $\int \frac{\text{س}^{2}}{\text{قا}(\text{٤س} - 1)}$. دس

النوع الثاني: تكامل بالأجزاء لأكثر من مرة.

مثال ٢: أوجد قيمة التكاملات الآتية

١ $\int$ ٣س^{2} جاس . دس

النوع الثالث : التعويض والاجزاء :

مثال٣ : أوجد قيمة التكاملات الآتية :

$\boxed{١}$ $\int$ جا $\sqrt{س}$ دس

$\boxed{٢}$ $\int$ جتا $\sqrt{٢س+١}$ دس

$\boxed{٣}$ $\int \frac{\text{س جاس}}{\text{جتا}^{٣}\text{س}}$. دس

الأستاذ رامي السعدي
0799782233

٤) $\int$ جا ٧س جتا^{٣} ٧س . دس

أمثلة متنوعة :

مثال٤ : أوجد قيمة التكاملات الآتية:

١) $\int$ (س^{٩} قا^{٢} س + ٩ س^{٨} ظا س) . دس

الرياضيات

الأستاذ رامي السعدي
0799782233

$\boxed{٢}$ $\int \left(\frac{س\ جتا\ س - جا\ س}{س^٢}\right) .دس$ ، س $\neq$ ٠

مثال: اذا كان:

س ص$'$ + ص = جتا س

أوجد قاعدة ص(س)، علماً بأن:

ص$\left(\frac{\pi}{٦}\right) = \frac{٦}{\pi}$ ؟

الأستاذ رامي السعدي
0799782233

مثال ٦ : اذا كان $\int_{0}^{2}$ س ق(س) . دس = ١٢
حيث ق(٠) = ٣ ، ق(٢) = ٣
أوجد $\int_{0}^{2}$ س² قَ(س) . دس ؟

مثال ٧ : اذا كان $\int_{-1}^{2}$ ق(س) . دس = ٤
حيث ق(٢) = ٢ ، ق(-١) = -٢
ما قيمة $\int_{-\frac{1}{2}}^{1}$ س قَ(٢س) . دس ؟

مثال ٨ : أوجد قيمة
$\int_{1}^{7}$ س قً(س) . دس
علماً بأن
ق(١) = ٥ ، قَ(١) = ٣
قَ(٧) = ١٠ ، ق(٧) = ١٢

الأستاذ رامي السعدي
0799782233

الرياضيات

ورقة عمل (٥)

س١: ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة:

[1] اذا كان ق(١) = ٤ ، ق(٥) = ٢
$\int_{1}^{5}$ ق(س) . دس = ٨
فما قيمة $\int_{1}^{5}$ س ق′(س) . دس .
أ) −٨ ب) −٢ جـ) ٦ د) ١

[2] اذا كان ق(١) × هـ(١) = ٥
ق(٣) × هـ(٣) = ١٨ ، $\int_{1}^{3}$ ق . دهـ = ٨
فما قيمة $\int_{1}^{3}$ هـ . دق
أ) ١٣ ب) −٥ جـ) ٥ د) ١٠

س٢: اذا كان $\int_{1}^{2}$ ق(س) . دس = ٢
وكان: ق(٢) = ٤ ، ق(١) = ٥
ق′(٢) = ١ ، ق′(١) = ٥
فأوجد $\int_{1}^{2}$ س² ق″(س) . دس .

س٣: اذا كان:
$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ س جاس . دس = $\int_{1}^{2}$ (أس² + ٢س) . دس
فما قيمة الثابت أ ؟

س٤: اذا كان:
جا²س = $\frac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{س}}$ ، س ≠ صفر
فأوجد قاعدة ق(س) ؟ .

س٥: أوجد قيمة التكاملات الآتية:

[1] $\int \frac{\text{٣س} - ١}{\sqrt[٤]{\text{٢س} + ١}}$. دس

[2] $\int \frac{\text{دس}}{\text{قا}\sqrt{\text{س} + ١}}$

الإجابات:

س١: ١) ب ٢) جـ

س٢: −١١

س٣: أ = $\frac{-٩}{٨}$

س٤: ق(س) = $\frac{\text{س}}{٢}$(س − $\frac{١}{٢}$ جا٢س) − $\frac{١}{٢}$($\frac{\text{س}^٢}{٢}$ + $\frac{١}{٤}$ جتا٢س) + جـ

س٥:
١) $\frac{٢}{٣}$(٣س − ١)(٢س + ١)$^{\frac{٣}{٤}}$ − $\frac{٤}{٧}$(٢س + ١)$^{\frac{٧}{٤}}$ + جـ
٢) ٢$\sqrt{\text{س} + ١}$ جا$\sqrt{\text{س} + ١}$ + ٢جتا$\sqrt{\text{س} + ١}$ + جـ

الأستاذ رامي السعدي
0799782233

الدرس السادس:
اقتران اللوغاريتم الطبيعي (مشتقته وتكامله)

* أفكار الدرس:
- مقدمة
- مشتقة اقتران اللوغاريتم الطبيعي
- تكامل اقتران اللوغاريتم الطبيعي.

أولاً: مقدمة:

* مراجعة:

$\text{لو}_{\text{ب}}\text{أ} = \text{جـ} \Leftrightarrow \text{أ} = \text{ب}^{\text{جـ}}$

حيث: أ، ب > ٠ ، ب ≠ ١ ، جـ ∈ ح

* مثال: $\text{لو}_{٢}\,٨ = ٣$

$\text{لو}_{٤}\,١٦ = ٢$

$\text{لو}_{٥}\,\frac{١}{٢٥} = -٢$

$\text{لو}_{٣}\,٩ = ٢ \Leftarrow (٣)^{٢} = ٩$

$\text{لو}_{٧}\,\text{أ} = -١ \Leftarrow (٧)^{-١} = \text{أ}$

* قوانين اللوغاريتم:

١) $\text{لو}_{\text{أ}}\,١ = \text{صفر}$ لأن $\text{أ}^{\text{صفر}} = ١$

٢) $\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{أ} = ١$ لأن $\text{أ}^{١} = \text{أ}$

٣) $\text{لو}_{\text{ب}}\,\text{أ}^{\text{ن}} = \text{ن} \times \text{لو}_{\text{ب}}\,\text{أ}$

٤) $\text{لو}_{\text{جـ}}\,\text{أ}\times\text{ب} = \text{لو}_{\text{جـ}}\,\text{أ} + \text{لو}_{\text{جـ}}\,\text{ب}$ (توزيع الضرب على الجمع)

٥) $\text{لو}_{\text{جـ}}\,\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \text{لو}_{\text{جـ}}\,\text{أ} - \text{لو}_{\text{جـ}}\,\text{ب}$ (توزيع القسمة على الطرح)

٦) $\text{لو}_{\text{ب}}\,\text{أ} \times \text{لو}_{\text{جـ}}\,\text{ب} = \text{لو}_{\text{جـ}}\,\text{أ}$

٧) $\text{لو}_{\text{ب}}\,\text{أ} = \frac{١}{\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ب}}$

* اللوغاريتم الطبيعي يكون أساسه دائماً (هـ)
حيث هـ: العدد النيبيري، هـ ≈ ٢,٧

* تعريف:
اذا كان س > ٠ فإن:

$\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} = \int_{١}^{\text{س}} \frac{١}{\text{ع}}\,\text{دع}$.

مثال: $\int_{١}^{٣} \frac{١}{\text{ع}}\,\text{دع} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,٣$

$\text{لو}_{\text{هـ}}\,٨ = \int_{١}^{٨} \frac{١}{\text{ع}}\,\text{دع}$.

* نظرية:

١) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$ ، س > ٠ فإن:

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}}$

٢) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ل}(\text{س})$ وكان ل(س) قابلاً للاشتقاق، فإن:

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{ل}'(\text{س})}{\text{ل}(\text{س})}$ ، حيث ل(س) > ٠

ثانياً: مشتقة اقتران اللوغاريتم الطبيعي:

مثال ١: أوجد مشتقة كل من الاقترانات التالية:

١) ق(س) = لوهـ (٢س + ٥)

٢) ق(س) = لوهـ (٣س^٤ − ٥س)

٣) ص = لوهـ جا س

٤) ق(س) = س^٤ لوهـ س ، أوجد قَ(١) ؟

٥) ق(س) = لوهـ (٣ + ظا ٥س)

٦) ق(س) = لوهـ (س + √(س^٤ − ١))

٧) ص = لوهـ (٥س + جا^٣ ٢س)

٨) ق(س) = لوهـ |س| ، س ≠ ٠

٩) ق(س) = لوهـ |٤ − ٣س| ، س ≠ $\frac{٤}{٣}$

١٠) ص = لوهـ |جاس| ، جاس ≠ ٠

١١) ص = ظا (لوهـ س)

١٢) ص = لوهـ (لوهـ س)

١٣) س = لوهـ ص ، أوجد $\frac{دص}{دس}$

١٤) ص = لوهـ (س − ٣)^{٥}

١٥) ص = لوهـ $\frac{١}{(٢س + ١)^{٤}}$

١٦) $ص = لو_{هـ} \frac{1}{\sqrt[3]{(س+٢)^{٥}}}$

١٧) $ص = لو_{هـ} س^{٣}$

١٨) $ص = (لو_{هـ} س)^{٣}$

١٩) $ص = لو_{هـ} جا^{٣} ٢س$

٢٠) $ص = لو_{هـ} (س^{٤}+١)(٥س+٢)^{٣}$

٢١) $ص = لو_{هـ} \left(\frac{س}{١+س^{٤}}\right)$

٢٢) $ص = لو_{هـ} \left(\frac{س-٢}{س+١}\right)^{٦}$

٢٣) $ص = لو_{هـ} \frac{(س-٢)^{٥}}{(س+١)^{٦}}$

٢٤) $ص = لو_{هـ} س^{٤}+١ \times لو_{هـ} ٥$

الأستاذ رامي السعدي
0799782233

[٢٥] ص = $\frac{١}{\text{لو}_{\text{هـ}}}$

* ملاحظة:
عند الاشتقاق اذا كان الأس متغير ندخل اللوغاريتم على طرفي المعادلة ثم نشتقه بهدف فصل الأساس عن الأس.

لاحظ:
ص = $٢^{\text{س}}$ ⇐ $\text{لو}_{\text{هـ}}$ ص = $\text{لو}_{\text{هـ}}\, ٢^{\text{س}}$
⇐ $\text{لو}_{\text{هـ}}$ ص = س $\text{لو}_{\text{هـ}}\, ٢$

مثال: أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ لكل مما يلي:

[١] ص = $٥^{\text{٢س}}$

[٢] ص = $(٣)^{\text{س}^٢ - ٥\text{س}}$

[٣] $\text{ص}^٣$ = $(٤)^{\text{٢س}}$

[٤] ص = $(\text{س})^{\text{س}}$ ، س > ٠

الأستاذ رامي السعدي
0799782233

مثال ٣: اذا كان $ص = (أ)^{ق(س)}$

فأثبت أن:

$$\frac{دص}{دس} = ص \, لو_{هـ} أ \times ق'(س)$$

* ثالثاً: تكامل اقتران اللوغاريتم الطبيعي

* النوع الأول * مباشر على النظرية *

* تذكر:

نظرية: $\int \frac{ق'(س)}{ق(س)} . دس = لو_{هـ} |ق(س)| + جـ$

ملاحظة: اذا كان البسط يساوي مشتقة المقام

فإن التكامل = $لو_{هـ} |المقام| + جـ$

مثال ٤: اوجد قيمة التكاملات الآتية:

$\boxed{1}$ $\int \frac{٢س}{س^٢+٥} . دس$

$\boxed{2}$ $\int \frac{س}{س^٢+٥} . دس$

$\boxed{3}$ $\int \frac{٥س^٢}{س^٣+١} . دس$

$\boxed{4}$ $\int س^{-١} . دس$

$\boxed{5}$ $\int (٢س-١)^{-١} . دس$

$\boxed{6}$ $\int \frac{٥}{٤-٣س} . دس$

$\boxed{7}$ $\int_{هـ}^{هـ^٢} \frac{١}{٤س} . دس$

الرياضيات

الأستاذ رامي السعدي
0799782233

٨) $\int \frac{٤س+١}{٦س^{٢}+٣س+٢} \, ءس$

٩) $\int_{٢}^{٤} \frac{١}{٩-٢س} \, ءس$

١٠) $\int_{٠}^{هـ} \frac{ءس}{س+هـ}$

١١) $\int \frac{جا٣س}{١-جتا٣س} \, ءس$

١٢) $\int \frac{جتاس-جاس}{جتاس+جاس} \, ءس$

١٣) $\int \frac{جا٢س}{جا^{٢}س+١} \, ءس$

١٤) $\int \frac{٢+٢ظتا^{٢}س}{ظتاس+٥} \, ءس$

١٥) $\int \frac{١+لوهـس}{٣+س لوهـس} \, ءس$

١٦) $\int \frac{قاس ظاس-١}{قاس-س} \, ءس$

١٧) $\int \frac{جتا٢س}{جاس جتاس} \, ءس$

الأستاذ رامي السعدي
0799782233

مثال (مهم): أجد قيمة كل من التكاملات الآتية:

[١] ∫ ظاس . دس

[٢] ∫ ظا٥س . دس

[٣] ∫ قاس . دس

[٤] ∫ قتاس . دس

مثال ٦:

[١] اذا كان ق(س) = {
٢س − ٥ ، س ≥ ٣
$\frac{٧}{٢س+١}$ ، س < ٣

فما قيمة ∫ ق(س) . دس ؟

[٢] اذا كان ميل المماس لمنحنى ق(س) عند النقطة (س، ص) يساوي $\frac{١}{س+٣}$ جد معادلة هذا المنحنى علماً بأن المنحنى يمر بالنقطة (−٢، ٥) ؟

٣ اذا كان :

$\text{ق}^{(\text{ن})}(\text{س}) = ٢^{\text{ن}} \times \text{ق}(\text{س})$ ، حيث ن $\in$ ط*

فأوجد قاعدة ق(س) ؟

٢ $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{\text{س}}}{٥ - \text{س} - \sqrt[3]{\text{س}}} \cdot \text{د س}$

* الفرع الثاني * تعويض، اجزاء، لوغاريتم *

مثال ٧ : أوجد قيمة التكاملات الآتية:

١ $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\text{س}}}{\text{س}\sqrt{\text{س}} + ١} \cdot \text{د س}$

٣ $\displaystyle\int \frac{١}{\sqrt{\text{س}} + ٢\text{س}} \cdot \text{د س}$

الأستاذ رامي السعدي
0799782233

٤ $\int \frac{1}{س \, لو_{هـ} س} \cdot ءس$

٥ $\int ظا^{3} س \cdot ءس$

٦ $\int \frac{1}{\sqrt{س} + س} \cdot ءس$

٧ $\int س \, قا^{2} س \cdot ءس$

٨) $\int ٣^{س} \,.\, دس$

* ملاحظة:
$\int س^{ن} \times لو_{هـ} ل(س) \,.\, دس$ ، حيث $ن \neq -١$

هذا النمط من التكاملات يحل باستخدام طريقة التكامل بالأجزاء، حيث نفرض:

ص = $لو_{هـ} ل(س)$		دل = $س^{ن} \,.\, دس$

وإذا كانت ن = -١ يحل بالتعويض.

٩) $\int س\ لو_{هـ} س \,.\, دس$

١٠) $\int س\ لو_{هـ} س^{٣} \,.\, دس$

١١) $\int س^{ن} \times لو_{هـ} س \,.\, دس$ ، $ن \in ط$

الأستاذ رامي السعدي
0799782233

١٢) $\int \frac{لو_{هـ} س}{س^{٤}} \cdot دس$

١٣) $\int \frac{١}{\sqrt{س}} \times لو_{هـ} س \cdot دس$

١٤) $\int \frac{لو_{هـ} س^{٩}}{\sqrt[٥]{س^{٢}}} \cdot دس$

١٥) $\int \frac{س^{٢}}{لو_{س} هـ} \cdot دس$

الأستاذ رامي السعدي
0799782233

١٦ $\int_{1}^{\text{هـ}} \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \cdot \text{ءس}$

١٧ $\int (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{2} \cdot \text{ءس}$

١٨ $\int \text{س} \, (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{2} \cdot \text{ءس}$

١٩ $\int \text{قا}^{2}\text{س} \; \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظاس} \cdot \text{ءس}$

٢٠) ∫ قا⁴س لوهـ ظاس . دس

٢١) ∫ (لوهـ س) / س . دس

٢٢) ∫ من ١ إلى هـ (لوهـ س)² / س . دس

٢٣) ∫ (لوهـ(س−١)) × ١/(س−١) . دس

٢٤) ∫ لوهـ √(س+٢) / (س+٢) . دس

الرياضيات

الأستاذ رامي السعدي
0799782233

ورقة عمل (٦)

س١: ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة:

١) اذا كان $ق(س) = \text{لو}_{هـ}\left(\frac{س^{٤}+١}{س^{٤}}\right)^{٤}$
أوجد $ق'(١)$.

أ) ٤ ب) −٤ جـ) −١ د) غير ذلك

٢) $\frac{د}{دس}\left(\int_{١}^{هـ} \text{لو}_{هـ} س \, . دس\right)$ تساوي:

أ) ١ ب) صفر جـ) $\frac{١}{هـ} - ١$ د) $\frac{١}{هـ}$

٣) $\int_{٠}^{هـ-١} \frac{١}{س+١} \, . دس =$

أ) ١ ب) −١ جـ) $\text{لو}_{هـ}(هـ-١)$ د) صفر

٤) $\int \frac{-١}{س^{٢}} \times \text{لو}_{هـ}\left(\frac{١}{س}\right) . دس =$

أ) $\frac{١}{س} + جـ$ ب) $\text{لو}_{هـ}\frac{١}{س} + جـ$
جـ) $\frac{١}{س}\text{لو}_{هـ}\left(\frac{١}{س}\right) - \frac{١}{س} + جـ$ د) $\frac{-١}{س} + جـ$

٥) اذا كان $ق(س) = \frac{٥}{٣س+٢}$ ، فأوجد الاقتران البدائي لـ $ق(س)$ المتصل على $[٠،٤]$:

أ) $٥\,\text{لو}_{هـ}|٣س+٢| + جـ$ ب) $\frac{١}{٣}\text{لو}_{هـ}|٣س+٢| + جـ$
جـ) $\frac{٥}{٣}\text{لو}_{هـ}|٣س+٢| + جـ$ د) غير ذلك

س٢: أوجد قيمة التكاملات الآتية:

١) $\int \frac{دس}{س + س\,\text{لو}_{هـ} س}$

٢) $\int \frac{\text{لو}_{هـ}(\text{لو}_{هـ} س)}{س\,\text{لو}_{هـ} س} . دس$

٣) $\int \frac{١}{س} \text{جا}(\text{لو}_{هـ} س) . دس$

٤) $\int \sqrt{\frac{\text{لو}_{هـ}\left(س+\sqrt{١+س^{٢}}\right)}{١+س^{٢}}} . دس$

س٣: استخدم خاصية المقارنة في التكامل لإثبات أن:

$\frac{٢}{٣} < \text{لو}_{هـ} ٣ < ٢$

* الإجابات:

س١: ١) ب ٢) ب ٣) أ ٤) جـ ٥) جـ

س٢:

١) $\text{لو}_{هـ}|١+\text{لو}_{هـ} س| + جـ$

٢) $\frac{١}{٢}\left(\text{لو}_{هـ}(\text{لو}_{هـ} س)\right)^{٢} + جـ$

٣) $-\text{جتا}(\text{لو}_{هـ} س) + جـ$

٤) $\frac{٢}{٣}\left(\text{لو}_{هـ}\left(س+\sqrt{١+س^{٢}}\right)\right)^{\frac{٣}{٢}} + جـ$