

دوسية الإبداع في الرياضيات م ٤ (أدبي)

(نسخة ٢٠١٧)

Math may not teach us how
to add love or subtract hate
but it gives us hope that
every problem has a
solution.

الأستاذ فيصل السعدون

اسم الطالب/الطالبة :



الفهرس

الصفحة	الموضوع	الوحدة
٢٠ - ٥	أولاً : التكامل غير المحدود	الوحدة الأولى
٢٩ - ٢١	ثانياً : التكامل المحدود	
٤١ - ٢٩	ثالثاً : خواص التكامل المحدود	
٦٠ - ٤٢	رابعاً : التكامل بالتعويض	
٧٥ - ٦٠	خامساً : تطبيقات التكامل	
٨٣ - ٧٦	سادساً : تطبيقات اقتصادية	
٨٩ - ٨٥	أولاً : مبدأ العدّ	الوحدة الثانية
٩٩ - ٩٠	ثانياً : التباديل و التوافيق	
١١١ - ١٠٠	ثالثاً : المتغير العشوائي المنفصل و توزيع ذات الحدين	
١١٨ - ١١١	رابعاً : العلامة المعيارية	
١٢٨ - ١١٨	خامساً : التوزيع الطبيعي	
١٣٨ - ١٢٩	سادساً : الارتباط و معامل الارتباط	
١٤٦ - ١٣٨	سابعاً : الانحدار	



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

الوحدة الأولى التكامل و تطبيقاته

ملاحظات مهمة :

- ١- الملاحظات الموجودة في الدوسية (في الدروس) مهمة جداً .
- ٢- تحتوي الدوسية على أسئلة متنوعة من الكتاب و على أسئلة وزارية سابقة .
- ٣- الدوسية شاملة المادة ١٠٠% (ليست ملخص) .

بالتوفيق يا مبدعين ☺



مراجعة عامة (مهم جدا)

* التحليل الى العوامل :

(١) إخراج العامل المشترك :

$$٣س^٢ - ١٢س = ٣س(س - ٤) ، \quad ٦س^٢ + ١٨س = ٦س(س + ٣)$$

(٢) الفرق بين مربعين : القاعدة : $س^٢ - ٢س = (س - ٢)(س + ٢)$

$$س^٢ - ٩ = (س - ٣)(س + ٣) ، \quad ٣٦س^٢ - ٦ = ٦(٦س - ١)$$

(٣) العبارة التربيعية : القاعدة : $س^٢ + ٢س + ب = (س + ج)$

ملاحظة : * اذا كانت إشارة الحد الأخير (+) تكون إشارة القوسين نفس إشارة الحد الأوسط .
* اذا كانت إشارة الحد الأخير (-) تكون إشارة القوسين عكس بعض .

$$س^٢ + ٥س + ٦ = (س + ٢)(س + ٣) ، \quad س^٢ - ٥س - ٦ = (س - ٢)(س + ٣)$$
$$س^٢ - ٣س - ١٠ = (س - ٥)(س + ٢) ، \quad س^٢ + ٢س - ١٥ = (س - ٣)(س + ٥)$$

(٤) فرق و جمع عددين مكعبين :

$$القاعدة : \quad س^٣ - ٢س^٢ = (س - ٢)(س^٢ + ٢س + ٤) ، \quad س^٣ + ٢س^٢ = (س + ٢)(س^٢ - ٢س + ٤)$$

$$س^٣ - ٦٤ = (س - ٤)(س^٢ + ٤س + ١٦) ، \quad س^٣ - ٢٧ = (س - ٣)(س^٢ + ٣س + ٩)$$

$$س^٣ + ١ = (س + ١)(س^٢ - س + ١) ، \quad س^٣ + ٨ = (س + ٢)(س^٢ - ٢س + ٤)$$

* ملاحظة : تذكر أن $س^٢ = \sqrt{س^٤}$ ، $س^{-٢} = \frac{١}{س^٢}$ ، $س^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{س}$ ، $س^{\frac{١}{٣}} = \sqrt[٣]{س}$

الدرس الأول :
التكامل غير المحدود

*** المقدمة :**

إذا كان $ق (س) = س^٣$ فإن المشتقة $ق' (س) = ٣س^٢$
و إذا اردنا إيجاد قاعدة الاقتران الذي مشتقته $س^٣$ فسوف نجد عدد لانهائي من الاقترانات
مثل : $س^٢ + ١$, $س^٢ + ٢$, $س^٢ + ٣$, الخ

سوف نلاحظ ان الفرق بين هذه الاقترانات هو عدد ثابت و نعبر عنه بـ (ج)
و يمكن التعبير عن مجموعة الاقترانات بالصورة العامة : $س^٢ + ج$

*** الاستنتاج :** عملية إيجاد قاعدة الاقتران تسمى تكامل غير محدود و هو علاقة عكسية بينه و بين الاشتقاق .

* نرسم للتكامل غير المحدود بـ (\int)

* وبصورة عامة : $ق (س) = ق' (س) د س$

*** مثال :**

إذا كان $ق (س) = (س^٣ + ٤) د س$, فجد $ق' (س)$

الحل : $ق' (س) = س^٣ + ٤$

$$ق' (س) = س^٣ + ٤ = ١٦$$

* أسئلة :

$$(1) \text{ اذا كان ق (س) = } \left[\text{جاس + جتاس} \right] \text{ دس , فجد ق (س)}$$

$$(2) \text{ اذا كان ق (س) = } \left[\text{اس - ٥} \right] \text{ دس , فجد ق (٤)}$$

❖ قواعد التكامل غير المحدود :

$$❖ \text{ قاعدة (١) = } \left[\text{أ دس} = \text{أس} + \text{ج} \right] \text{ , حيث (أ) عدد حقيقي}$$

* أمثلة :

$$(1) \left[٧ \text{ دس} = ٧\text{س} + \text{ج} \right] \quad (2) \left[١١\sqrt{١١} \text{ دس} = ١١\sqrt{١١} \text{س} + \text{ج} \right]$$

- أسئلة :

$$(1) \left[٦ - \text{دس} = \right]$$

$$(2) \left[\text{دس} = \right]$$

❖ قاعدة (٢) : $\left[s^n \text{ دس} = \frac{s^{1+n}}{1+s} + \right]$ ، حيث (أ) عدد حقيقي

- أمثلة :

$$(1) \left[s \text{ دس} = \frac{s^2}{2} + \right]$$

$$(2) \left[s^3 \text{ دس} = \frac{s^4}{4} + \right]$$

- أسئلة :

$$(1) \left[s^2 \text{ دس} = \right]$$

$$(2) \left[s^{-1} \text{ دس} = \right]$$

* تابع لقاعدة (٢) : شرح الأسس في صفحة المراجعة رقم (٤)

$$\text{* خاصية (١) : } \left[\frac{1}{s^n} \text{ دس} = \left[s^{-n} = \frac{s^{1-n}}{1+s} + \right] \right]$$

✓ ملاحظة : إذا كانت $n = 1$ نستخدم قاعدة رقم (٣) ، سيتم شرحها لاحقاً ..

- أمثلة :

$$(1) \left[\frac{1}{2} \text{ دس} = \left[\text{س} \frac{1}{2} \right] \text{ دس} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right] \rightarrow$$

$$(2) \left[\frac{1}{3} \text{ دس} = \left[\text{س} \frac{1}{3} \right] \text{ دس} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right] \rightarrow$$

- أسئلة :

$$(1) \left[\frac{1}{4} \text{ دس} = \right]$$

$$(2) \left[\frac{1}{6} \text{ دس} = \right]$$

* خاصية (٢) : $\left[\text{س} \frac{1}{2} \right] \text{ دس} = \left[\text{س} \frac{1}{2} \right] \text{ دس} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

- أمثلة :

$$(1) \left[\frac{1}{2} \text{ دس} = \left[\text{س} \frac{1}{2} \right] \text{ دس} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right] \rightarrow$$

$$(2) \left[\frac{2}{3} \text{ دس} = \left[\text{س} \frac{2}{3} \right] \text{ دس} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right] \rightarrow$$

- أسئلة :

$$(1) \left[\frac{3}{2} \right]_{\text{دس}} =$$

$$(2) \left[\frac{6}{4} \right]_{\text{دس}} =$$

$$(3) \left[\frac{1}{2} \right]_{\text{دس}} =$$

* خاصية (3) : $\left[\frac{ل}{س} \right]_{\text{دس}} = \left[\frac{ل-ل}{س} \right]_{\text{دس}}$

- أمثلة :

$$(1) \left[\frac{4}{3} \right]_{\text{دس}} = \left[\frac{1}{3} \right]_{\text{دس}} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}$$

$$(2) \left[\frac{2}{2} \right]_{\text{دس}} = \left[\frac{1-1}{2} \right]_{\text{دس}} = \left[\frac{1}{2} \right]_{\text{دس}}$$

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} =$$

- أسئلة :

$$(1) \left[\frac{س^0}{س^3} \right] دس =$$

$$(2) \left[\frac{س^2}{س^4} \right] دس =$$

$$(3) \left[\frac{س^3}{س^7} \right] دس =$$

$$(4) \left[\frac{س^2}{س} \right] دس =$$

* خاصية (٤) : $\left[أ ق (س) دس = أ ق (س) دس \right]$, حيث (أ) عدد حقيقي

- أمثلة :

$$(1) \left[٥ س^٩ دس = ٥ س^٩ دس \right] = ٥ \frac{س^{١٠}}{١٠} + \frac{س^{١٠}}{٢} + \frac{س^{١٠}}{٢} = ٥ \frac{س^{١٠}}{١٠} + \frac{س^{١٠}}{٢} + \frac{س^{١٠}}{٢}$$

$$(2) \left[٤ س^٣ دس = ٤ س^٣ دس \right] = ٤ \frac{س^٣}{٢} + \frac{س^٣}{٢} + \frac{س^٣}{٢} = ٤ \frac{س^٣}{٢} + \frac{س^٣}{٢} + \frac{س^٣}{٢}$$

$$\frac{س^٣}{٢} + \frac{س^٣}{٢} =$$

- أسئلة :

$$(1) \left[3س^{\circ} دس = \right]$$

Blank dashed box for answer to question 1.

$$(2) \left[2س^{\frac{1}{2}} دس = \right]$$

Blank dashed box for answer to question 2.

* خاصية (٥) : $\left[(ق (س) \pm هـ (س)) دس = \right]$ $\left[هـ (س) \pm دس (س) \right]$

- أمثلة :

$$(1) \left[4س - 2س^{\frac{2}{2}} = دس + 4س \right]$$

$$(2) \left[2س^3 - 3س^2 دس = دس + 2س^{\frac{2}{2}} - \frac{4س^{\frac{4}{4}}}{4} \right]$$

$$(3) \left[\frac{6}{3س} دس = دس \left[6س^3 - 2س^{\frac{2}{2}} \right] = دس + 3س^3 - 2س^{\frac{2}{2}} \right]$$

$$= دس + \frac{3س^3}{2}$$

- أسئلة :

$$(1) \quad] 4س^3 - 3س^2 \text{ دس} =$$

$$(2) \quad] 3س^3 - 7 + 3س^2 \text{ دس}$$

$$(3) \quad] (3س + 2) \text{ دس}^2$$

$$(4) \quad] \frac{3س^2 + 3}{س} \text{ دس}$$

❖ قاعدة (٣) : * $\left[\frac{1}{س} \right] دس = لوس + ج$

* $\left[هس \right] دس = ه + ج$

- أمثلة :

(١) $\left[\frac{٤}{س} \right] دس = ٤ \left[\frac{1}{س} \right] دس = ٤لوس + ج$

(٢) $\left[ه٣س \right] دس = ٣ \left[هس \right] دس = ٣ه + ج$

- أسئلة :

(١) $\left[\frac{٧}{س} \right] دس =$

(٢) $\left[\frac{٣}{هس} \right] دس =$

(٣) $\left[ه٣س - \frac{٢}{س٣} \right] دس =$

$$(٤) \left[\frac{٢}{١٣س} + ٣ه + دس \right]$$



❖ قاعدة (٤) : الاقتانات المثلثية

$$* \left[\text{جاس} \text{ دس} = - \text{جتاس} + \text{ج} \right]$$

$$* \left[\text{جتاس} \text{ دس} = \text{جاس} + \text{ج} \right]$$

$$* \left[\text{قا٣س} \text{ دس} = \text{ظاس} + \text{ج} \right]$$

ملاحظة :

$$* \text{ قاس} = \frac{١}{\text{جتاس}}$$

$$* \text{ قا٣س} = \frac{١}{\text{جتا٣س}}$$

$$* \text{ ظاس} = \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$$

- أمثلة :

$$(١) \left[\text{جاس} + \text{جتاس} \text{ دس} = - \text{جتاس} + \text{جاس} + \text{ج} \right]$$

$$(٢) \left[\frac{٣}{\text{جتا٣س}} \text{ دس} = \frac{١}{\text{جتا٣س}} \right] \left[٣ = \text{دس} \right] \left[٣ \text{ قا٣س} \text{ دس} = ٣ \text{ ظاس} + \text{ج} \right]$$

- أسئلة :

$$(1) \left[\text{جتاس} + \text{قا}^2 \text{س} = \text{دس} \right]$$

$$(2) \left[\text{جتاس}^3 + \text{قا}^2 \text{س} = \text{دس} \right]$$

$$(3) \left[\text{جتاس} \text{ظاس} = \text{دس} \right]$$

$$(4) \left[\text{جتاس}^2 + \frac{\text{قا}^2 \text{س}}{3} = \text{دس} \right]$$

$$(5) \left[\text{جتاس}^5 + 6 = \text{دس} \right]$$

إيجاد قاعدة الاقتران ق (س) عند النقطة (س_١، ص_١)

* مثال : اذا كان $ق(س) = ٣س^٢ - ١٠س$ ، فجد قاعدة الاقتران (ق) ، علماً بأن النقطة (٢ ، ٣) تقع على منحنى الاقتران (ق) .

الحل :

$$ق(س) = ٣س^٢ - ١٠س$$

$$٣س^٢ - ١٠س = ٣س^٢ - ١٠س + ٤س - ٨س + ١٥ = ٣س^٢ - ٦س + ١٥$$

$$٣ = ٣(٢)^٢ - ٦(٢) + ١٥$$

$$١٥ = ٣ - ٦(٢) + ١٥$$

$$١٥ = ٣س^٢ - ٦س + ١٥$$

- أسئلة :

(١) اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق (س) عند النقطة (س_١، ص_١) يساوي (٣س^٢ - ٧) ، جد قاعدة الاقتران علماً بأن منحنى الاقتران يمر بالنقطة (٢ ، ٧) ؟

٢) اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق (س) عند النقطة (س١، ص١) يساوي (هـ س) ،
و كان المنحنى يمر بالنقطة (٠، ٢-) ، فجد قاعدة الاقتران (ق) ؟

Blank area for the answer to question 2.

٣) اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق (س) عند النقطة (س١، ص١) يساوي (٤س٢ + ٦س - ٣) ،
جد قاعدة الاقتران علماً بأن منحنى الاقتران يمر بالنقطة (٠، ٢-) ؟

Blank area for the answer to question 3.

التفسير الفيزيائي للتكامل غير المحدود

* للتذكير :

- ن <<< الزمن (ث)
- ع <<< السرعة (م / ث)
- ف <<< المسافة (م)
- ت <<< التسارع (م / ث^٢)

* القواعد :

- التسارع ت (ن)
- السرعة ع (ن) = ت (ن) دن
- المسافة ف (ن) = ع (ن) دن

* أمثلة :

(١) يتحرك جسيم في خط مستقيم بحيث تكون سرعته (ع) معطاه بالعلاقة $ع = ٤ + ٢ن$ م/ث ،
جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور (٣) ثواني من بدء الحركة ،
علماً بأن الموقع الابتدائي للجسيم ف (٠) = ٦ م .

الحل :

$$* ف(ن) = ٤ + ٢ن \quad د \quad \underline{ع = ٤ + ٢ن + ج}$$

$$* ف(٠) = (٠) = ٤ + (٠)٢ + ج = ٦ \quad <<< \quad ج = ٦$$

$$* ف(ن) = ٤ + ٢ن + ٦$$

$$* ف(٣) = ٦ + ١٢ + ٩ = ٢٧ \quad م$$

(٢) تتحرك نقطة مادية في خط مستقيم بتسارع ثابت (ت) مقداره ت (ن) = ١٢ م/ث^٢ ،
جد سرعتها بعد زمن قدره (ن) ثانية ، غلماً بأن سرعتها الابتدائية ع (٠) = ٧ م/ث ،
ثم جد سرعتها بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة .

الحل :

$$* ع(ن) = ١٢ \quad د \quad \underline{ع = ١٢ + ج}$$

$$* ع(٠) = (٠) = ١٢ + ج = ٧ \quad <<< \quad ج = ٧$$

$$* ع(ن) = ١٢ + ٧$$

$$* ع(٢) = (٢) = ١٢ + (٢)١٢ = ٧ + ٢٤ = ٣١ \quad م/ث$$

* أسئلة :

(١) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث إن سرعته بعد (ن) ثانية تساوي $v = 4n + 8$ م / ث ،
جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد (ن) ثانية ، علماً بأن موقعه الابتدائي $x = 3$ م ؟



(٢) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث إن تسارعه بعد (ن) ثانية تساوي $a = 2n + 8$ م / ث ،
جد السرعة التي يقطعها الجسيم بعد مرور ثانية واحدة من بدء الحركة علماً بأن سرعة الجسيم
كانت (٣) م / ث بعد (٢) ثانية ؟



٣) يتحرك جسم على خط مستقيم بحيث يكون تسارعه معطاه بالعلاقة $a = 6 \text{ م/ث}^2$ ،
جد المسافة التي يقطعها الجسم بعد مرور (n) ثانية من بدء الحركة ،
علماً بأن السرعة الابتدائية للجسم $v_0 = 2 \text{ م/ث}$ ، و موقعه الابتدائي $s_0 = 5 \text{ م}$.

Blank area for solving the problem.

٤) يتحرك جسم على خط مستقيم بحيث تكون سرعته بعد (n) ثانية معطاه بالعلاقة
 $v = (n + 2) \text{ م/ث}$ ، جد المسافة التي يقطعها الجسم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة ،
علماً بأن الموقع الابتدائي للجسم $s_0 = 5 \text{ م}$ ؟

Blank area for solving the problem.

الدرس الثاني : التكامل المحدود

يعبر عن التكامل المحدود بـ :

$$\int_a^b f(x) dx = \text{دس} \quad \text{ق (ب) - ق (أ)}$$

حيث أ = الحد السفلي للتكامل المحدود ، ب = الحد العلوي للتكامل المحدود

❖ قاعدة (١) : اذا كان ج عدداً ثابتاً فإن $\int_a^b f(x) dx = \text{دس} = \text{ج} (ب - أ)$

* أمثلة :

$$(1) \int_1^4 x dx = \text{دس} = \frac{1}{2} (4^2 - 1^2) = \frac{1}{2} (16 - 1) = \frac{15}{2}$$

$$(2) \int_0^5 \sqrt{x} dx = \text{دس} = \frac{2}{3} (5^{3/2} - 0^{3/2}) = \frac{2}{3} (5\sqrt{5}) = \frac{10\sqrt{5}}{3}$$

$$(3) \int_{-2}^4 \frac{1}{x^2} dx = \text{دس} = \left[-\frac{1}{x} \right]_{-2}^4 = \left(-\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{-2} \right) \right) = \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) = -\frac{3}{4}$$

* أسئلة :

$$(1) \int_1^8 x dx = \text{دس}$$

$$(2) \int_{-2}^3 \sqrt{x} dx = \text{دس}$$

$$(3) \int_{-2}^2 \frac{1}{x^2} dx = \text{دس}$$

❖ إيجاد الثوابت : تابع لقاعدة (١)

(١) $\begin{matrix} \text{ك} \\ | \\ \text{دس} \\ | \\ \text{ك} \end{matrix} = ٢١$, أوجد قيمة (ك) ؟

الحل : $\text{ك} = (٢ - ٥) = ٢١$ <<< $٣\text{ك} = ٢١$ <<< $\text{ك} = ٧$

(٢) $\begin{matrix} \text{ك} \\ | \\ \text{دس} \\ | \\ \text{ك} \end{matrix} = ٤٨ -$, أوجد قيمة (ك) ؟

الحل : $\text{ك} = (١ - ٥) = ٤٨ -$ <<< $٤\text{ك} = ٤٨ -$ <<< $\text{ك} = ١٢ -$

* أسئلة :

(١) $\begin{matrix} \text{ك} \\ | \\ \text{دس} \\ | \\ \text{ك} \end{matrix} = ٢٨$, أوجد قيمة (ك) ؟

(٢) $\begin{matrix} \text{ب} \\ | \\ \text{دس} \\ | \\ \text{ب} \end{matrix} = ٢٤$, أوجد قيمة (ب) ؟

(٣) $\left[\begin{matrix} ٣ \\ ٣ \end{matrix} \right]_{٣} = ٢٧$ ، أوجد قيمة (ل) ؟



❖ قاعدة (٢) : $\left[\begin{matrix} ٣ \\ ٣ \\ ٣ \end{matrix} \right]_{٣} = \left[\begin{matrix} ٣ \\ ٣ \\ ٣ \end{matrix} \right]_{٣} = \frac{٣-٣-٣}{٣} = ٣$ ، $٣ \in \mathbb{N}$ ، $٣ \neq ١$ ، $٣ \in \mathbb{C}$

ملاحظة :
 * ل_١ = صفر
 * ه_١ = ١

* أمثلة :

$$(١) \left[\begin{matrix} ٢ \\ ٢ \\ ٢ \end{matrix} \right]_{٢} = \left[\begin{matrix} ٢ \\ ٢ \\ ٢ \end{matrix} \right]_{٢} = \frac{٢-٢-٢}{٢} = -١$$

$$(٢) \left[\begin{matrix} ٢ \\ ١ \\ ١ \end{matrix} \right]_{٢} = \left[\begin{matrix} ٢ \\ ١ \\ ١ \end{matrix} \right]_{٢} = \frac{٢-١-١}{١} = ٠$$

$$(٣) \left[\begin{matrix} ٢ \\ ١ \\ ١ \end{matrix} \right]_{٣} = \left[\begin{matrix} ٢ \\ ١ \\ ١ \end{matrix} \right]_{٣} = \frac{٢-١-١}{٣} = ٠$$

$$\frac{٤}{٩} = \frac{٨}{١٨} = \frac{١}{٢} + \frac{١}{١٨} = \frac{١}{٣} - \frac{١}{٣} = \left[\begin{matrix} ١ \\ ٢ \\ ٣ \end{matrix} \right]_{٣} = \left[\begin{matrix} ٢ \\ ٢ \\ ٣ \end{matrix} \right]_{٣} = \frac{٢-٢-٣}{٣} = -١$$

$$(٤) \left[\begin{matrix} ١ \\ ٢ \\ ٢ \end{matrix} \right]_{٢} = \left[\begin{matrix} ١ \\ ٢ \\ ٢ \end{matrix} \right]_{٢} = \frac{١-٢-٢}{٢} = -١$$

$$(٥) \left[\begin{matrix} ١ \\ ٢ \\ ٢ \end{matrix} \right]_{٣} = \left[\begin{matrix} ١ \\ ٢ \\ ٢ \end{matrix} \right]_{٣} = \frac{١-٢-٢}{٣} = -١$$

* أسئلة :

$$(1) \int_{-2}^2 x^2 dx =$$

$$(2) \int_{-1}^1 x^2 dx =$$

$$(3) \int_{-1}^1 x^4 dx =$$

$$(4) \int_{-1}^1 x^2 dx =$$

(٥) اَسْ = دس

(٦) اَسْ = دس

(٧) اَسْ = دس

$$(8) \int \frac{1}{s^3} ds =$$

Blank space for the solution of problem 8.

$$(9) \int (3s^2 - 2s) ds =$$

Blank space for the solution of problem 9.

$$(10) \int \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} \right) ds =$$

Blank space for the solution of problem 10.

(٢) $\int_2^L s^2 \text{ دس} = \frac{19}{3}$ ، أوجد قيمة (ل) ؟

(٣) إذا كان ق (٣-) = ١٥ ، ق (١-) = ٨ ، فجد $\int_{-3}^{-1} (س) \text{ دس}$ ؟

(٤) إذا كان ق (٥-) = ٣ ، ق (٢) = ٢ ،
أوجد (أ) $\int_2^0 (س) \text{ دس}$ (ب) $\int_0^2 (س) \text{ دس}$

٥) اذا كان $\int (s) ds = s^{\frac{2}{3}} + c$ ، أوجد $\int_{-1}^1 (s) ds$

٦) اذا كان $h(s) = s^6$ ، هي مشتقة الاقتران $h(s)$ المعروف على الفترة $[-2, 3]$ ،
 اوجد $h(3) - h(-2)$ ؟

الدرس الثالث : خواص التكامل المحدود

❖ خاصية (١) :

$$* \int_a^b c \times f(s) ds = c \int_a^b f(s) ds$$

$$* \int_a^b (f(s) \pm g(s)) ds = \int_a^b f(s) ds \pm \int_a^b g(s) ds$$

* أمثلة :

$$(1) \quad \left[\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right]_{س} = \text{دس} = \left[\begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right] \times 6 = \left(\frac{1}{2} - \frac{9}{2} \right) \times 6 = \frac{1}{2} \times 6 = 3$$

$$(2) \quad \left[\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right]_{س} = \text{دس} = \left[\begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix} \right] \times 3 = \left[\begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix} \right] = 3 - 3 = 0$$

$$(3) \quad \left[\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right]_{س} - \left[\begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix} \right]_{س} = \text{دس}$$

$$\left[\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right]_{س} \times 2 - \left[\begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix} \right]_{س} = \left[\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right]_{س} - \left[\begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix} \right]_{س} = \text{دس}$$

$$\left[\begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix} \right]_{س} - \left[\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right]_{س} = \left[\begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix} \right]_{س} - \left[\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right]_{س} = \text{دس}$$

$$(4) \quad \left[\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right]_{س} + \left[\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right]_{س} = \text{دس} \left(\frac{1}{س} + \frac{1}{س} \right)$$

$$\left[\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right]_{س} + \left[\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right]_{س} =$$

$$\left(\frac{1}{س} + \frac{1}{س} \right) = \left(\frac{1}{س} + \frac{1}{س} \right) = \frac{2}{س}$$

* أسئلة :

$$(1) \quad \left[\begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix} \right]_{س} = \text{دس}$$

$$(2) \int_2^0 \frac{7-s}{s} ds =$$

$$(3) \int_1^3 (3s^2 + 4s) ds =$$

$$(4) \int_1^2 (4s^3 + \frac{3}{s} - 2) ds =$$

$$(٥) \left[٢س - \frac{٣}{٢} \sqrt{س} \right] = دس$$

❖ خاصية (٢): $\left[٢س \right] = دس - \left[٢س \right]$

* أمثلة :

(١) إذا كان $\left[٢س \right] = دس = ١٢$ ، أوجد $\left[٢س \right]$ دس

الحل : $\left[٢س \right] = دس - ١٢ =$

(٢) إذا كان $\left[٢س \right] = دس = ١٢$ ، أوجد $\left[٢س \right]$ دس

الحل : $\left[٢س \right] = دس = ١٢ <<< \left[٢س \right] = دس = ٦$

اذن $\left[٢س \right] = دس = ٦ -$

* أسئلة :

(١) إذا كان $\left[\begin{matrix} ٤ \\ ٣ \end{matrix} \right] (س) دس = ٥$ ، أوجد $\left[\begin{matrix} ٣ \\ ٤ \end{matrix} \right] (س) دس$ ؟

(٢) $\left[\begin{matrix} ٨ \\ ٣ \end{matrix} \right] \frac{١}{٢} (س) دس = ٤$ ، أوجد $\left[\begin{matrix} ٣ \\ ٨ \end{matrix} \right] (س) دس$

(٣) $\left[\begin{matrix} ٢ \\ ١ \end{matrix} \right] (٢-س) دس = ٨$ ، أوجد $\left[\begin{matrix} ١ \\ ٢ \end{matrix} \right] (س) دس$

❖ خاصية (٣) : $\overset{ب}{\underset{ا}{\text{أ}}} (س) دس = \overset{ب}{\underset{ا}{\text{أ}}} (س) دس + دس \overset{ب}{\underset{ا}{\text{أ}}} (س)$ (خاصية الإضافة)

* أمثلة :

(١) إذا كان $\overset{ا}{\underset{ب}{\text{أ}}} (س) دس = ١٢$ ، $\overset{ا}{\underset{ب}{\text{أ}}} (س) دس = ٥$

أوجد : (أ) $\overset{ا}{\underset{ب}{\text{أ}}} (س) دس$ (ب) $\overset{ا}{\underset{ب}{\text{أ}}} (س) دس$

الحل : (أ) $\overset{ا}{\underset{ب}{\text{أ}}} (س) دس = \overset{ا}{\underset{ب}{\text{أ}}} (س) دس + دس \overset{ا}{\underset{ب}{\text{أ}}} (س) دس = ١٢ + ٥ = ١٧$

(ب) $\overset{ا}{\underset{ب}{\text{أ}}} (س) دس = ١٧ - دس \overset{ا}{\underset{ب}{\text{أ}}} (س) دس$

(٢) إذا كان $\overset{ب}{\underset{ا}{\text{أ}}} (س) دس = ٥ -$ ، $\overset{ب}{\underset{ا}{\text{أ}}} (س) دس = ٨ -$

أوجد $\overset{ب}{\underset{ا}{\text{أ}}} (س) دس$ ؟؟

الحل : $\overset{ب}{\underset{ا}{\text{أ}}} (س) دس = \overset{ب}{\underset{ا}{\text{أ}}} (س) دس + دس \overset{ب}{\underset{ا}{\text{أ}}} (س) دس$

$\overset{ب}{\underset{ا}{\text{أ}}} (س) دس + ٥ - = ٨ - + دس \overset{ب}{\underset{ا}{\text{أ}}} (س) دس = ١٣ -$

$$(3) \text{ إذا كان } \begin{bmatrix} ٢ \\ ٤ \\ ٥ \end{bmatrix} (س) \text{ دس} = ٥ - ، \quad \begin{bmatrix} ٦ \\ ٤ \\ ٨ \end{bmatrix} (س) \text{ دس} = ٨$$

أوجد : $\begin{bmatrix} ٦ \\ ٤ \\ ٥ \end{bmatrix} (س) \text{ دس} ???$

$$\text{الحل : } \begin{bmatrix} ٢ \\ ٤ \\ ٥ \end{bmatrix} (س) \text{ دس} = ٥ - \lll \begin{bmatrix} ٦ \\ ٤ \\ ٨ \end{bmatrix} (س) \text{ دس} = ١ -$$

$$\begin{bmatrix} ٦ \\ ٤ \\ ٨ \end{bmatrix} (س) \text{ دس} = ٨ = \lll \begin{bmatrix} ٦ \\ ٤ \\ ٢ \end{bmatrix} (س) \text{ دس} = ٢ =$$

$$\begin{bmatrix} ٦ \\ ٤ \\ ٨ \end{bmatrix} (س) \text{ دس} = \begin{bmatrix} ٦ \\ ٤ \\ ٢ \end{bmatrix} (س) \text{ دس} + \begin{bmatrix} ٢ \\ ٤ \\ ١ \end{bmatrix} (س) \text{ دس}$$

$$١ - = ٢ + ١ -$$

$$(4) \text{ إذا كان } \left. \begin{array}{l} \begin{bmatrix} ٤ \\ ٢ \end{bmatrix} (س) \\ \begin{bmatrix} ٢ \\ ٤ \end{bmatrix} (س) \end{array} \right\} = (س) \text{ دس}$$

أوجد (١) $\begin{bmatrix} ٢ \\ ٤ \\ ٥ \end{bmatrix} (س) \text{ دس}$ (٢) $\begin{bmatrix} ٦ \\ ٤ \\ ٨ \end{bmatrix} (س) \text{ دس}$ (٣) $\begin{bmatrix} ٦ \\ ٤ \\ ٢ \end{bmatrix} (س) \text{ دس} ???$

$$\text{الحل : (١) } \begin{bmatrix} ٢ \\ ٤ \\ ٥ \end{bmatrix} (س) \text{ دس} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٤ \\ ٥ \end{bmatrix} \left[\frac{٢}{٢} س \right] = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٤ \\ ٥ \end{bmatrix} [٢ س] = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٤ \\ ٥ \end{bmatrix} (٢ س) = (٢ س) \begin{bmatrix} ٢ \\ ٤ \\ ٥ \end{bmatrix} = ٨ = (٤)٢ = (٢٠ - ٢٢)٢ =$$

$$(٢) \begin{bmatrix} ٦ \\ ٤ \\ ٨ \end{bmatrix} (س) \text{ دس} = \begin{bmatrix} ٦ \\ ٤ \\ ٨ \end{bmatrix} \left[\frac{٢}{٢} س \right] = \begin{bmatrix} ٦ \\ ٤ \\ ٨ \end{bmatrix} [٢ س] = \begin{bmatrix} ٦ \\ ٤ \\ ٨ \end{bmatrix} (٢ س) = (٢ س) \begin{bmatrix} ٦ \\ ٤ \\ ٨ \end{bmatrix} = ١٢ = ٤ - ١٦ = ٢٢ - ٢٤ =$$

$$(٣) \begin{bmatrix} ٦ \\ ٤ \\ ٨ \end{bmatrix} (س) \text{ دس} = \begin{bmatrix} ٦ \\ ٤ \\ ٢ \end{bmatrix} (س) \text{ دس} + \begin{bmatrix} ٢ \\ ٤ \\ ١ \end{bmatrix} (س) \text{ دس}$$

$$٢٠ = ١٢ + ٨ =$$

* أسئلة :

(١) اذا كان $\int_{-2}^2 (س) دس = ٥$ ، $\int_{-2}^2 (س) دس = ٤$

أوجد : (أ) $\int_{-2}^2 (س) دس$ (ب) $\int_{-2}^2 (س) دس$ ؟؟

(٢) اذا كان $\int_{-1}^2 (س) دس = ١٦$ ، $\int_{-1}^2 (س) دس = ٨$

أوجد : $\int_{-1}^2 (س) دس$ ؟؟

٣) اذا كان $\begin{matrix} ٢ \\ ١ \\ ٤ \end{matrix}$ (س) دس = ٤ ، $\begin{matrix} ١ \\ ٣ \\ ٤ \end{matrix}$ (س) دس = ٦ ،

أوجد : أ) $\begin{matrix} ١ \\ ٢ \\ ٢ \end{matrix}$ (س) دس ب) $\begin{matrix} ٢ \\ ١ \\ ١ \end{matrix}$ (س) دس

٤) اذا كان $\begin{matrix} ١ \\ ٣ \\ ١ \end{matrix}$ (س) دس = ١٢ - ، $\begin{matrix} ١ \\ ٣ \\ ٣ \end{matrix}$ (س) دس = ٨ - ،

أوجد قيمة $\begin{matrix} ٣ \\ ١ \\ ١ \end{matrix}$ (س) دس ؟؟؟

٥) اذا كان $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} (س) دس = ٤$ ، $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} (س) دس = ٧$

أوجد قيمة $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} (س) دس + ٧$

Blank area for solving the problem.

٦) اذا كان $\begin{pmatrix} 5 - ٥س \\ ٣س \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ ٣ \end{pmatrix}$ ، $١ > س > ٣$ ، $٥ > س > ٣$ ،

أوجد : أ) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} (س) دس$ ب) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} (س) دس$ ج) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} (س) دس$

Blank area for solving the problem.

$$\left. \begin{array}{l} ٢ \geq ١ \text{ س } \geq ١, \\ ٢ \geq ٢ \text{ س } \geq ٢, \end{array} \right\} = \text{اذا كان ق (س)}$$

أوجد : $\int_{١}^{٢} (س) دس$

$$\left. \begin{array}{l} ٣ > ١ \text{ س } > ١, \\ ٦ > ٣ \text{ س } > ٣, \\ ٨ > ٦ \text{ س } > ٦, \end{array} \right\} = \text{اذا كان ق (س)}$$

أوجد : $\int_{٨}^{١} ٢ - (س) دس$ ؟؟؟

٩) اذا كان $\left[\begin{matrix} ٢ \\ ٣ \end{matrix} \right]_{\text{دس}} = \text{صفر}$ ، أوجد قيم الثابت (ج) ؟؟

Blank area for solving question 9.

١٠) اذا كان $\left[\begin{matrix} ٩ \\ ٢ \end{matrix} \right]_{\text{دس}} = ٢١$ ، أوجد قيمة الثابت (ج) ؟؟

Blank area for solving question 10.

١١) اذا كان $\left[\begin{matrix} ٢ \\ ٤ \end{matrix} \right]_{\text{دس}} - ٤ = ١٥$ ، أوجد قيمة الثابت (ب) ؟؟

Blank area for solving question 11.

(١٢) اذا كان $\int_1^2 (2x - (x)) dx = 8$ ، أوجد $\int_1^2 x(x) dx$ دس ؟؟

(١٣) اذا كان $\int_1^3 x(x) dx = 6$ ، $\int_1^2 \frac{x(x)}{2} dx = 5$ -

أوجد : (أ) $\int_1^2 (4x - (x)) dx$ دس (ب) $\int_1^3 (6x^2 - 3x + 2) dx$ دس

❖ خاصية (٤) : $\int_1^1 x(x) dx = \underline{\text{صفر}}$

* أمثلة :

(١) $\int_2^2 \frac{3}{2} + x^2 dx = \underline{\text{صفر}}$ (٢) $\int_4^4 x^4 + 5x^2 - 2 dx = \underline{\text{صفر}}$

(٣) $\int_2^2 \frac{3}{4} + \frac{1}{x} - s^0 dx = \underline{\text{صفر}}$

الدرس الرابع : التكامل بالتعويض

بالرموز : $\int \frac{ص}{ع} \times (ع(س))^{\text{ن}} دس$

حيث : $ص = ع(س)$ ، $ع(س) = \frac{ص}{س}$ ، $دس = \frac{ص}{ع(س)}$

* يستخدم التكامل بالتعويض في حال وجود :

- (١) اقتران مرفوع لقوة (٢) اقتران كسري (٣) اقتران مثلثي (٤) اقتران أسّي

❖ حالة (١) : $\int (مشتقة\ اقتران) \times (اقتران)^{\text{ن}} دس$ ، حيث $ص = (الاقتران)$

* أمثلة :

(١) $\int ٣س٣ (٢+٣س)^٢ دس$

الحل : $ص = ٢+٣س$ ، $\frac{ص}{س} = ٣$ ، $دس = \frac{ص}{٣س}$

$$\int ٣س٣ (٢+٣س)^٢ دس = \int \frac{ص}{٣س} (ص)^٢ دس = \int \frac{ص^٣}{٣س} دس = \int \frac{ص^٣}{٣} \times \frac{١}{س} دس = \int \frac{ص^٣}{٣} \times \frac{١}{٣س} دص = \int \frac{ص^٣}{٩} دص = \frac{ص^٤}{٤ \times ٩} + ج = \frac{ص^٤}{٣٦} + ج = \frac{(٢+٣س)^٤}{٣٦} + ج$$

(٢) $\int (٣-٤س)^٠ دس$

الحل : $ص = ٣-٤س$ ، $\frac{ص}{س} = ٤$ ، $دس = \frac{ص}{٤}$

$$\int (٣-٤س)^٠ دس = \int (ص)^٠ \times \frac{١}{٤} دص = \int \frac{ص^٠}{٤} دص = \frac{ص^١}{١ \times ٤} + ج = \frac{ص}{٤} + ج = \frac{٣-٤س}{٤} + ج$$

$$= \frac{٣-٤س}{٤} + ج$$

$$(3) \quad \sqrt[3]{(س^2 + 1)س^3 + 3س + 5} \text{ دس}$$

الحل : ص = $س^2 + 3س + 5$ ، $\frac{ص}{س} = 3س^2 + 3 + \frac{5}{س}$ ، دس = $\frac{ص}{3س^2 + 3 + \frac{5}{س}}$

$$= \left[\frac{ص}{(س^2 + 1)س^3} (ص)^{\frac{1}{3}} \right] \frac{1}{3} = \frac{ص}{(س^2 + 1)س^3} \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \left(\frac{ص}{(س^2 + 1)س^3} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \sqrt[3]{(س^2 + 1)س^3 + 3س + 5} = \frac{1}{4} \sqrt[3]{(س^2 + 1)س^3 + 3س + 5}$$

* أسئلة : جد كلاً من التكاملات التالية :

$$(1) \quad \int (س^2 + 2س + 2)س^2 \text{ دس} =$$

$$(2) \quad \int (س + 3)س^3 \text{ دس} =$$

$$= \text{دس } \left[\begin{array}{l} (3) \\ \text{س} (3 \text{ س}^2 + 2) \end{array} \right] \text{ دس } =$$

Blank area for solving the first problem.

$$(4) \left[\begin{array}{l} (1 + 2 \text{ س}) \\ \sqrt{\text{س}^2 + \text{س} - 4} \end{array} \right] \text{ دس}$$

Blank area for solving the second problem.

$$(5) \left[\begin{array}{l} (5) \\ \sqrt[3]{(5 - 3 \text{ س})} \end{array} \right] \text{ دس} =$$

Blank area for solving the third problem.

❖ حالة (٢) : مشتقة اقتران
(اقتران) مرفوع لقوة دس ، حيث ص = (الاقتران)
* أمثلة :

$$(١) \left[\text{دس} \frac{٥ + س٢}{١٠ + س٥ + س٢} \right]$$

الحل : ص = س٢ + س٥ + ١٠ ، $\frac{ص}{س} = ٥ + س٢$ ، $\frac{ص}{س} = ٥ + س٢$ ، دس = $\frac{ص}{٥ + س٢}$

$$= \left[\frac{ص}{٥ + س٢} \frac{٥ + س٢}{ص} \right] = \frac{١}{ص} = \text{لور} + ج$$

$$= \text{لور} (س٢ + س٥ + ١٠) + ج$$

$$(٢) \left[\text{دس} \frac{٣ - س٢}{٣ (١٠ + س٣ - س٢)} \right]$$

الحل : ص = س٢ - س٣ + ١٠ ، $\frac{ص}{س} = ٣ - س٢$ ، $\frac{ص}{س} = ٣ - س٢$ ، دس = $\frac{ص}{٣ - س٢}$

$$= \left[\frac{ص}{٣ - س٢} \frac{٣ - س٢}{ص} \right] = \frac{١}{٣} = \text{لور} + ج$$

$$= \text{لور} (٣ - س٢ + ١٠) + ج$$

* أسئلة : جد كلاً من التكاملات التالية :

$$(١) \left[\text{دس} \frac{٥ - س١٠}{٣ (٥ + س - س٢)} \right]$$

$$(2) \left[\frac{6-4s}{1+s^3-2s^2} \right] \text{ دس} =$$



❖ حالة (3) : $\left[\frac{\text{عدد ثابت}}{\text{اقتران}} \right] \text{ دس}$ ، حيث $\text{ص} = (\text{الاقتران})$

* أمثلة :

$$(1) \left[\frac{1}{1+s} \right] \text{ دس}$$

الحل : $\text{ص} = 1+s$ ، $\frac{\text{ص}}{\text{ص}} = \frac{1+s}{1+s}$ ، $\frac{\text{ص}}{\text{ص}} = \text{دس}$ ، $\frac{\text{ص}}{\text{ص}} = \frac{1}{1+s}$

$$\left[\frac{1}{1+s} = \frac{\text{ص}}{\text{ص}} \right] \times \frac{1}{\text{ص}} = \frac{1}{\text{ص}} + \text{ج}$$

$$= \frac{1}{\text{ص}} + (1+s) \text{ج}$$

$$(2) \left[\frac{1}{(s^3-3)s^4} \right] \text{ دس}$$

الحل : $\text{ص} = s^3-3$ ، $\frac{\text{ص}}{\text{ص}} = \frac{s^3-3}{s^3-3}$ ، $\frac{\text{ص}}{\text{ص}} = \text{دس}$ ، $\frac{\text{ص}}{\text{ص}} = \frac{1}{(s^3-3)s^4}$

$$= \left[\frac{1}{(s^3-3)s^4} = \frac{\text{ص}}{\text{ص}} \right] \times \frac{1}{\text{ص}} = \frac{1}{\text{ص}} + \text{ج} = \frac{1}{(s^3-3)s^4} + \text{ج}$$

$$= \frac{1}{(s^3-3)s^4} + \text{ج}$$

* أسئلة : جد كلاً من التكاملات التالية :

$$(1) \int \frac{3}{1-s^3} ds$$

Blank area for the solution of question (1).

$$(2) \int \frac{2-s}{1+s} ds$$

Blank area for the solution of question (2).

$$(3) \int \frac{3}{12-s^3} ds$$

Blank area for the solution of question (3).

$$(٤) \left[\frac{1}{(١+س)^2} \right] دس$$



❖ حالة (٤) : $\left[\text{مشتقة اقتران} \right] \times \text{جا (اقتران)} دس$

حيث $ص = (\text{الاقتران})$ ، (ينطبق على جا وجتا وقا^٢)

* أمثلة :

$$(١) \left[٢س \times \text{جتا}(س^٢ - ٣) \right] دس$$

الحل : $ص = س^٢ - ٣$ ، $\frac{ص}{س} = ٢س$ ، $دس = \frac{ص}{س}$

$$= \left[٢س \times \text{جتا} \frac{ص}{س} \right] = \left[\text{جتا} ص دص = \text{جا}(س^٢ - ٣) + ج \right]$$

$$(٢) \left[\text{جا}(س^٢ + ٣) \right] دس$$

الحل : $ص = س^٢ + ٣$ ، $\frac{ص}{س} = ٢$ ، $دس = \frac{ص}{٢}$

$$= \left[\text{جا} \frac{ص}{٢} = \frac{١}{٢} \right] \text{جا} ص دص = \frac{١}{٢} \text{جتا}(س^٢ + ٣) + ج$$

* أسئلة : جد كلاً من التكاملات التالية :

(١) $\int (س^٢ - ١) جا(س^٣ - ٣) دس$

(٢) $\int س \times قا^٢ (س^٢ + ٨) دس$

(٣) $\int س^٢ جا(س - ٤) دس$

٤] جتا (٦ + ٢) دس

٥] جا (٣ - ٤) دس

٦] قا^٢ (٨ - ٥) دس

(٧) جتا (س) دس

❖ حالة (٥) : * [مشتقة اقتران (هـ) مرفوع لاقتران دس

* [(هـ) مرفوع لاقتران دس

حيث ص = الاقتران

* أمثلة :

(١) [٣س ٢هـ ٢+٣س دس

الحل : ص = ٢ + ٣س ، $\frac{٣س}{٢س} = \frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٣س}{٢س} = \frac{٣}{٢}$ ، دس = $\frac{٣س}{٢س}$

$$= [\frac{٣س}{٢س} ٢هـ + ٢ + ٣س] = ٣هـ + ٢ + ٣س$$

(٢) [٥س ٢هـ دس

الحل : ص = ٢ + ٥س ، $\frac{٥س}{٥س} = ١$ ، دس = $\frac{٥س}{٥س}$

$$= [\frac{٥س}{٥س} ١هـ + ٢ + ٥س] = ١هـ + ٢ + ٥س$$

$$(3) \quad 2s + 3 = ds$$

الحل: $ص = س + ٢$ ، $١ = \frac{ص}{س}$ ، $دس = \frac{ص}{١} = ص$

$$= \left[2s + 3 = ds \right]$$

* أسئلة: جد كلاً من التكمالات التالية:

$$(1) \quad \left[(1 - 2s) \times 3s - 2s = ds \right]$$

$$(2) \quad \left[2s^2 = ds \right]$$

(٣) [سه ٣-٢ س ٢-٣ دس]

(٤) [ه ٣-٩ س ٣-٩ دس]

(٥) [ه ٥ س ٥ دس]

❖ استخدام التكامل بالتعويض في حالة التكامل المحدود

* أمثلة :

$$(1) \int_{\frac{1}{2}}^1 (2 + \frac{1}{s}) ds$$

الحل : $ص = 2 + \frac{1}{س} \Rightarrow \frac{دص}{دس} = 2 + \frac{1}{س^2}$ ، $س = 2 + \frac{1}{س} \Rightarrow \frac{دس}{دس} = 2 + \frac{1}{س^2}$ ، $\frac{دص}{دس} = 2 + \frac{1}{س^2}$

$$س = 2 + \frac{1}{س} \Rightarrow 3 = 2 + \frac{1}{س} \Rightarrow \frac{1}{س} = 3 - 2 = 1$$

$$س = 2 + \frac{1}{س} \Rightarrow 2 = 2 + \frac{1}{س} \Rightarrow \frac{1}{س} = 2 - 2 = 0$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 (2 + \frac{1}{س}) ds = \int_{\frac{1}{2}}^1 (3 - 2 + \frac{1}{س}) ds = \int_{\frac{1}{2}}^1 (3 - 2 + \frac{1}{س}) ds$$

$$19 = 8 - 27 = (3 \cdot 2 - 2 \cdot 3) = 2 \cdot [3 - 2] =$$

$$(2) \int_{\frac{1}{2}}^1 (س - 2) ds$$

الحل : $ص = س - 2 \Rightarrow \frac{دص}{دس} = 1 - 2 = -1$ ، $س = س - 2 \Rightarrow \frac{دس}{دس} = 1 - 2 = -1$ ، $\frac{دص}{دس} = 1 - 2 = -1$

$$س = 2 - 2 = 0 \Rightarrow 3 = 2 - 2 = 1$$

$$س = 2 - 2 = 0 \Rightarrow 2 = 2 - 2 = 0$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 (س - 2) ds = \int_{\frac{1}{2}}^1 (1 - 2) ds = \int_{\frac{1}{2}}^1 (-1) ds =$$

* أسئلة : جد قيمة التكاملات التالية :

$$(1) \int_0^1 (3s^2 + 2) ds$$

$$(2) \int_2^3 (3s - 6) ds$$

$$(3) \int_{-1}^1 (4s - 1) \sqrt{2s^2 - s - 2} \, ds$$

A large dashed rectangular box with rounded corners, intended for the student to show their work for problem (3).

$$(4) \int_{-1}^2 \frac{s + 1}{(s^2 + 2s + 1)^2} \, ds$$

A large dashed rectangular box with rounded corners, intended for the student to show their work for problem (4).

(٥) اِسْمُكَ س ١-٢ د س



(٦) اِسْمُكَ س ٢-٤ د س



سؤال : اذا علمت أن ق (٤) = ١٢ ، ق (١) = - ٨ ، فاحسب قيمة $\left[\frac{٢س١}{١س١} - (س٢) \right]$ دس .

سؤال : اذا كان $\left[س(س) - دس \right] = ه١س١ + ٤ه٢$ ، وكان $س(١) = -٢٢$ ، $أ \neq ٠$ ،
فأوجد قيمة (قيم) الثابت (أ) ؟؟

❖ إيجاد قاعدة الاقتران :

* أسئلة :

١) اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران (ق) عند النقطة (س ، ص) يساوي (هـ-٣ س) ،
فاكتب قاعدة الاقتران (ق) علماً بأنه يمر بالنقطة (١ ، ٣) ؟

Blank area for the answer to question 1.

٢) اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران (ق) عند النقطة (س ، ص) يساوي (٤س - ٢) ،
فاكتب قاعدة الاقتران (ق) علماً بأنه يمر بالنقطة (١ ، ٨)

Blank area for the answer to question 2.

* سؤال :

يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث تكون سرعته بعد (ن) ثانية معطاه بالعلاقة
 $v = (n + 1)^2$ م / ث ، جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة ،
 علماً بأن الموقع الابتدائي للجسيم ف (٠) = ١ م ؟

الدرس الخامس : تطبيقات التكامل

❖ حالة (١) : حساب المساحة المحصورة بين اقتران و محور السينات
 ((الاقتران لا يقطع محور السينات))

* أمثلة :

(١) اذا كان ق (س) = س - ١ ، فاحسب المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران و محور السينات
 و المستقيمين س = ١ ، س = ٥

الحل : س - ١ = ٠ <<< س = ١ (اذن الاقتران لا يقطع محور السينات)

$$m = \int_1^5 (s) ds = \int_1^5 (s-1) ds$$

$$= \left[\frac{s^2}{2} - s \right]_1^5 = \left(\frac{25}{2} - 5 \right) - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = 10 - \frac{1}{2} = 9\frac{1}{2}$$

وحدات مربعة

(٢) اذا كان ق (س) = ٢ + س٢ ، فاحسب المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران و محور السينات و المستقيمين س = ١ ، س = ٣ .

الحل : $٢ + س٢ = ٠$ <<< $٢ = س٢$ <<< $١ = س$ <<< $١ = س$
(اذن الاقتران لا يقطع محور السينات)

$$م = \int_{١}^٣ (س) دس = \int_{١}^٣ (٢ + س٢) دس$$

$$= [٢س + \frac{١}{٣}س٣]_{١}^٣ = (٦ + ٩) - (٢ + ١) = ١٥ - ٣ = ١٢ \text{ وحدة مربعة}$$

* أسئلة :

(١) اذا كان ق (س) = ٢س - ٤ ، فاحسب المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران و محور السينات و المستقيمين س = ١ ، س = ٢

(٢) اذا كان ق (س) = ٥ ، فاحسب المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران و محور السينات و المستقيمين س = ٤ ، س = ٢

٣) اذا كان ق (س) = ٢ - س ، فاحسب المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران و محور السينات
و المستقيمين س = ٢ ، س = ٦

٤) اذا كان ق (س) = ٢س - ١ ، فاحسب المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران و محور السينات
و المستقيمين س = ٢ ، س = ١

❖ حالة (٢) : حساب المساحة المحصورة بين اقتران و محور السينات
((الاقتران يقطع محور السينات))

* أمثلة :

(١) اذا كان ق (س) = ٤ - ٢س ، فاحسب المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران و محور السينات
و المستقيمين س = ١ ، س = ٣

الحل : ٤ - ٢س = ٠ <<< ٤ = ٢س <<< ٢ = س
(اذن الاقتران يقطع محور السينات)

$$١م = \int_{١}^{٢} (٤ - ٢س) دس = \int_{١}^{٢} (٤ - ٢س) دس$$

$$= [٤س - س^٢]_{١}^{٢} = (٨ - ٤) - (٤ - ١) = ٤ - ٣ = ١ = ١ وحدة مربعة$$

$$٢م = \int_{٢}^{٣} (٤ - ٢س) دس = \int_{٢}^{٣} (٤ - ٢س) دس$$

$$= [٤س - س^٢]_{٢}^{٣} = (١٢ - ٩) - (٨ - ٤) = ٣ - ٤ = -١ = ١ وحدة مربعة$$

$$م = ١م + ٢م = ١ + ١ = ٢ وحدات مربعة$$

(٢) اذا كان ق (س) = ٦ - ٢س ، فاحسب المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران و محور السينات
في الفترة [٠ ، ٥] .

الحل : ٦ - ٢س = ٠ <<< ٦ = ٢س <<< ٣ = س
(اذن الاقتران يقطع محور السينات)

$$١م = \int_{٠}^{٣} (٦ - ٢س) دس = \int_{٠}^{٣} (٦ - ٢س) دس$$

$$= [٦س - س^٢]_{٠}^{٣} = (١٨ - ٩) - (٠ - ٠) = ٩ - ٠ = ٩ وحدات مربعة$$

$$٢م = \int_{٣}^{٥} (٦ - ٢س) دس = \int_{٣}^{٥} (٦ - ٢س) دس$$

$$= [٦س - س^٢]_{٣}^{٥} = (٣٠ - ٢٥) - (١٨ - ٩) = ٥ - ٩ = -٤ = ٤ وحدات مربعة$$

$$م = ١م + ٢م = ٩ + ٤ = ١٣ وحدة مربعة$$

* أسئلة :

(١) اذا كان ق (س) = $4س - ٨$ ، فاحسب المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران و محور السينات في الفترة [١ ، ٣] .

(٢) اذا كان ق (س) = $٣س^٢$ ، فاحسب المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران و محور السينات في الفترة [١ - ، ٣] .

٣) اذا كان ق (س) = ٨ - ٢س ، فاحسب المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران و محور السينات في الفترة [١ ، ٦] .

٤) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = س^٢ ، و المستقيم س = ١- ، و محور السينات .

❖ حالة (٣) : حساب المساحة المحصورة بين اقتران و محور السينات
(بدون ذكر الفترة)

* أمثلة :

(١) اذا كان ق (س) = ٩ - س^٢ ، فاحسب المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران و محور السينات .

الحل :

$$٩ - س^٢ = ٠ \lll ٩ = س^٢ \lll ٣ = س \lll ٣ = -س$$

$$م = \int_{٣-}^{٣} (س) دس = \int_{٣-}^{٢} (٩ - س^٢) دس$$

$$= \int_{٣-}^{٣} [٩ - س^٢] دس = (٩ - ٢٧) - (٩ - ٢٧) = ١٨ + ١٨ = ٣٦ \text{ وحدة مربعة}$$

(٢) اذا كان ق (س) = س^٢ - ٤س + ٣ ، فاحسب المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران و محور السينات .

الحل :

$$س^٢ - ٤س + ٣ = ٠ \lll (س - ١)(س - ٣) = ٠ \lll ١ = س \lll ٣ = س$$

$$م = \int_{١}^{٣} (س) دس = \int_{١}^{٣} (س^٢ - ٤س + ٣) دس$$

$$= \int_{١}^{٣} [س^٣ - ٢س^٢ + ٣س] دس = (٩ - ١٨ + ٩) - (١ - ٢ + ١) = ٠$$

$$= (٠) - (١ + \frac{١}{٣}) = -\frac{٤}{٣} \text{ وحدة مربعة}$$

* أسئلة :

(١) اذا كان ق (س) = س^٢ - ٢س ، فاحسب المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران و محور السينات .

(٢) اذا كان ق (س) = س^٢ - ٢س - ٣ ، فاحسب المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران و محور السينات .

٣) اذا كان $ع(س) = ٥ - ٥س^٢$ ، فاحسب المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران و محور السينات .

٤) اذا كان $ص = س - س^٣$ ، فاحسب المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران و محور السينات .

٥) اذا كان ك = س^٢ - ٢٥ ، فاحسب المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران و محور السينات .



٦) اذا كان ق = س^٢ - ٤س ، فاحسب المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران و محور السينات .



(٢) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقترانين ق (س) = $\frac{1}{4}س^2$ ، هـ (س) = $س^2$.

الحل : ق (س) = هـ (س)

$$\frac{1}{4}س^2 = س^2 \quad (\text{نضرب بـ } 4) \quad 0 = س^2 - س^4$$

$$س (س - 4) = 0 \quad \lll \quad س = 0 , 4$$

نختار عدد من ضمن الفترة و نعوضه في الاقترانين

$$ق (2) = 2 , \quad هـ (2) = 4 \quad \text{اذن هـ (س) } \leq \text{ ق (س)}$$

$$م = \int_{2}^{4} (س - \frac{1}{4}س^2) دس$$

$$= \left[\frac{س^2}{2} - \frac{س^3}{12} \right]_{2}^{4} = \left(\frac{16}{2} - \frac{64}{12} \right) - \left(\frac{4}{2} - \frac{8}{12} \right) = \frac{32}{3} - \frac{16}{3} = \frac{16}{3} \quad \text{وحدات مربعة}$$

* أسئلة :

(١) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق (س) = $س^2$ و المستقيم ص = 9 .

٢) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقترانين ق (س) = ٣س^٢ و هـ (س) = ٦س .



٣) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق (س) = ٤س^٢ - ٤س و المستقيم ص = ٥ .

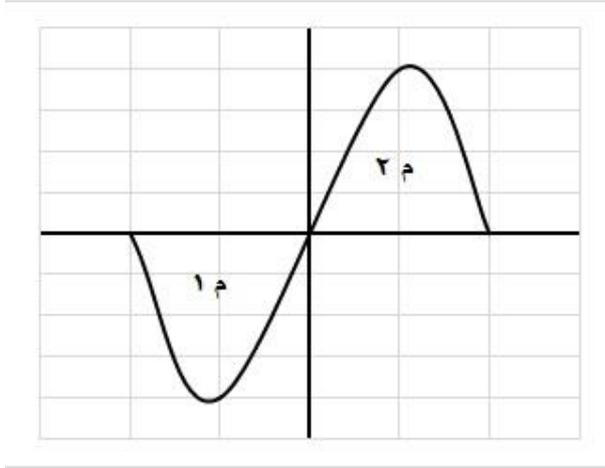


٤) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنىي الاقترانين ق (س) = ٢س - ٣ ،
ع (س) = ٢س - ٢س .

٥) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنىي الاقترانين ص = ٦ - س ، ص = ٢س

❖ استخدام الرسم البياني :

* مثال :



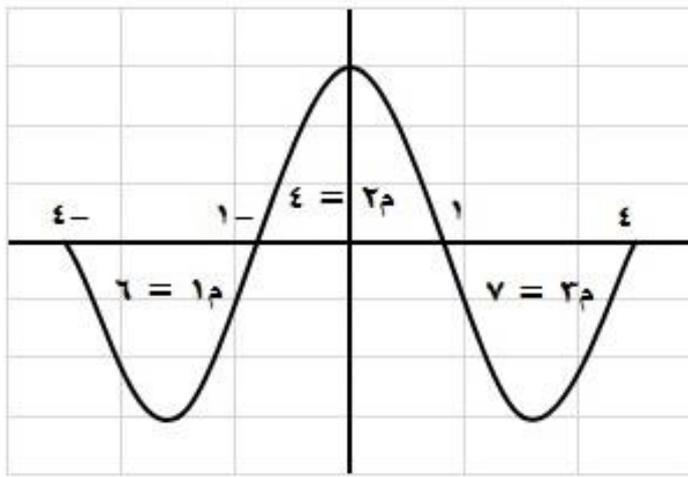
يمثل الشكل المجاور المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى ق (س) و محور السينات في الفترة [أ ، ب] ، فإذا علمت :
أن مساحة م = ٤ وحدات مربعة ، ومساحة م = ٣ وحدات مربعة .

* احسب $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س)} \text{ دس}$ ؟؟

الحل : $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س)} \text{ دس} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س)} \text{ دس} + \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س)} \text{ دس}$

$$١- = ٣ + ٤ - =$$

* أسئلة :



اعتماداً على الشكل المجاور أجب عما يلي :

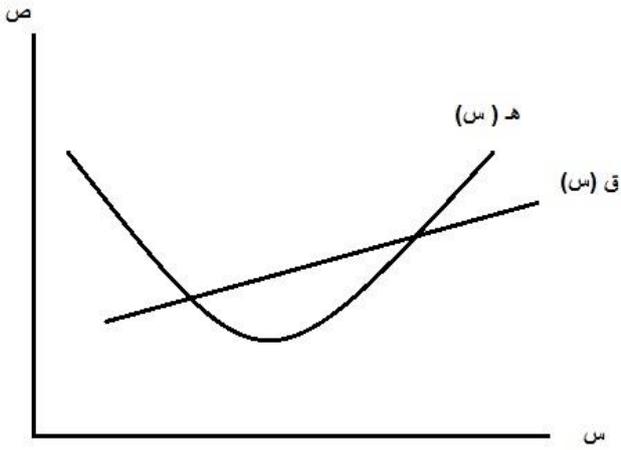
$$* \int_{-٤}^١ \text{ق(س)} \text{ دس} =$$

$$* \int_{-١}^٤ \text{ق(س)} \text{ دس} =$$

$$* \int_{-٤}^١ \text{ق(س)} \text{ دس} =$$

$$* \int_{-٤}^٤ \text{ق(س)} \text{ دس} =$$

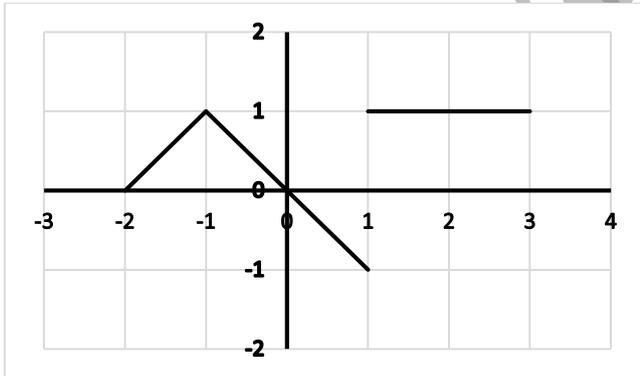
* إذا كانت م = م + م ، أوجد قيمة (م) ؟؟



(٢) يمثل الشكل المجاور منحنيي الاقترانين
ق (س) ، هـ (س) ،
إذا عملت أن المساحة
المغلقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين
(٣) وحدات مربعة ، وكان :

$$\int_a^b (س) دس = ٢٤$$

$$\int_a^b هـ(س) دس = ??$$



(٣) يمثل الشكل المجاور منحنى الاقتران
ق (س) المعروف على الفترة $[-٢, ٣]$
اعتماداً على الشكل :

$$* \text{ أوجد } \int_{-٢}^٣ (س) دس$$



الدرس السادس : تطبيقات اقتصادية

❖ الإيراد الكلي :

* ملاحظة :

ثابت التكامل (ج) في اقتران
الإيراد الكلي = صفر ،
لأنه عند بيع صفر وحدة سوف يكون
الإيراد د (٠) = صفر

$$* \text{الإيراد الكلي} = \int \text{الإيراد الحدي}$$

$$* \text{د (س)} = \int \text{د (س)}$$

* أمثلة :

(١) إذا كان الإيراد الحدي لـ (س) من الوحدات التي ينتجها مصنع هو $\text{د (س)} = 4\text{س}^3 + 3\text{س}^2 + 3$ ،
أوجد الإيراد الكلي الناتج عن بيع هذه الوحدات ؟

$$\text{الحل : د (س)} = \int 4\text{س}^3 + 3\text{س}^2 + 3 \text{ د س}$$

$$= \text{س}^4 + 3\text{س}^3 + 3\text{س} + \text{ج} \lll \text{س}^4 + 3\text{س}^3 + 3\text{س}$$

(٢) إذا كان الإيراد الحدي لـ (س) ثلاجة التي ينتجها مصنع هو $\text{د (س)} = 3\text{س}^3 - 8\text{س} + 20$ ،
أوجد الإيراد الكلي الناتج عن بيع (٢٠) ثلاجة ؟

$$\text{الحل : د (س)} = \int 3\text{س}^3 - 8\text{س} + 20 \text{ د س}$$

$$\text{س}^4 - 4\text{س}^2 + 20\text{س} + \text{ج} \lll \text{س}^4 - 4\text{س}^2 + 20\text{س}$$

$$\text{د (٢٠)} = (٢٠)^4 - 4(٢٠)^2 + 20(٢٠) = 16000 - 1600 + 400 = 14800$$

* أسئلة :

(١) اذا كان الايراد الحدي لـ (س) من الوحدات التي ينتجها مصنع هو $د(س) = ٥ + ٢س$ ،
أوجد الايراد الكلي الناتج عن بيع هذه الوحدات ؟

Blank area for the solution to question 1.

(٢) اذا كان الايراد الحدي لـ (س) لعبة من لعب الأطفال التي ينتجها مصنع هو
 $د(س) = ٣س - ٢س + ٨$ ، أوجد الايراد الكلي الناتج عن بيع هذه اللعب ؟

Blank area for the solution to question 2.

(٣) اذا كان الايراد الحدي لـ (س) لعبة من الحقايب المدرسية التي ينتجها مصنع هو
 $د(س) = ٧ + ٢س - ٢س$ ، أوجد الايراد الكلي الناتج عن بيع (٦) حقايب ؟

Blank area for the solution to question 3.

٤) اذا كان الايراد الحدي لـ (س) علبة من البسكويت التي ينتجها مصنع هو
 $د(س) = ٢س^٢ - ٤س + ٢٥$ ، فجد الايراد الكلي الناتج عن بيع (٩) علب ؟

❖ السعر و العرض و الطلب :

* ١ع <<< سعر التوازن (ق (س) = هـ (س))
 * ١س <<< كمية التوازن

$$* \text{فائض المستهلك} = ١م = \int_{١س}^{١ع} (س) دس - ١ع \times ١س$$

$$* \text{فائض المنتج} = ٢م = ١ع \times ١س - \int_{١س}^{١ع} (س) دس$$

 * أمثلة :

١) اذا كان $ع = ق (س) = ٨ - ٢س$ ، يمثل اقتران (السعر _ الطلب) ، حيث (ع) : السعر بالدينار ،
 و (س) : عدد الوحدات المنتجة ، و كانت كمية التوازن (س) = ٢ ، أوجد فائض المستهلك ف ه ؟؟

$$\text{الحل : } ١ع = ق (٢) = ٨ - (٢)٢ = ٤$$

$$\text{فائض المستهلك} = ١م = \int_{١س}^{١ع} (س) دس - ١ع \times ١س$$

$$\text{ف ه} = \int_{١س}^{١ع} (٨ - ٢س) دس - ٢ \times ٤$$

$$= [٨س - س^٢]_{١س}^{١ع} = ٨(٤) - (٤)^٢ - (٨(٢) - (٢)^٢) = ٨ - (٤ - ١٦) = ٨ - ٤ = ٤ \text{ دنانير}$$

٢) اذا كان ع = ق (س) = ٧٠ - ٤س ، يمثل اقتران (السعر _ الطلب) ، حيث (ع) : السعر بالدينار ،
و (س) : عدد الوحدات المنتجة ، و كان سعر التوازن (١٤) = ١٠ ، أوجد فائض المستهلك ف ه ؟؟

الحل :

$$١س \lll ١٠ = ٧٠ - ٤س \lll ١٠ = ٧٠ - ٤س$$

$$١٥ = ١س \lll ١٤ = ٦٠$$

$$\text{فائض المستهلك} = ١٥ = \int_{١٤}^{١٥} (١٥ - ٤س) دس - ١٤ \times ١٥$$

$$\text{ف ه} = \int_{١٤}^{١٥} (١٥ - ٤س) دس - ١٥ \times ١٥$$

$$[٧٠س - ٢س^٢]_{١٤}^{١٥} = ١٥٠ - (١٥٠ - ١٠٥٠) - (١٥٠ - ١٠٥٠) = ١٥٠ - ١٠٥٠ = ٤٥٠ \text{ دينار}$$

٣) اذا كان ع = ه (س) = ٦س - ٢ ، يمثل اقتران (السعر _ العرض) ، حيث (ع) : السعر بالدينار ،
و (س) : عدد الوحدات المنتجة ، و كانت كمية التوازن (١) = ٢ ، أوجد فائض المنتج ف ج ؟؟

الحل :

$$١٥ = ٦س - ٢ = ٢ - ٢ = ١٥$$

$$\text{فائض المنتج} = ٢ = \int_{١}^{٢} (٦س - ٢) دس - ١ \times ١٥$$

$$\text{ف ج} = \int_{١}^{٢} (٦س - ٢) دس - ٢ \times ١٥$$

$$= [٣س^٢ - ٢س]_{١}^{٢} - ٢٠ = (١٢ - ٤) - ٢٠ = ٨ - ٢٠ = ١٢ \text{ دينار}$$

٤) اذا كان ع = هـ (س) = ٤س - ١٢ ، يمثل اقتران (السعر _ العرض) ، حيث (ع) : السعر بالدينار ،
و (س) : عدد الوحدات المنتجة ، و كان سعر التوازن (١٤) = ٤ ، أوجد فائض المنتج ف ج ؟؟

الحل : س <<< ١٢ - ٤س = ٤ <<< ١٢ + ٤ = ٤س

٤ = ٤س <<< ١٦ = ٤س

فائض المنتج = ٢م = ١٤ × س - ١٢س

ف ج = ٤ × ٤ - ١٢س

= -١٦ = [٢س - ١٢] - ١٦ = (٤٨ - ٣٢) - ١٦ = ١٦ + ١٦ = ٣٢ دينار

* أسئلة :

١) اذا كان ع = ق (س) = ١٦ - ٢س ، يمثل اقتران (السعر _ الطلب) ، حيث (ع) : السعر بالدينار ،
و (س) : عدد الوحدات المنتجة ، و كان السعر ثابتاً عند (١٤) = ١٠ ، أوجد فائض المستهلك ف ك ؟؟

٢) اذا كان $ع = ق (س) = ١٦ - \frac{س}{٤}$ ، يمثل اقتران (السعر _ الطلب) ، حيث (ع) : السعر بالدينار ،

و (س) : عدد الوحدات المنتجة ، و كان السعر ثابتاً عند $(١٤) = ١٢$ ، أوجد فائض المستهلك ف ج ؟؟

٣) اذا كان $ع = هـ (س) = ٥ + ٣س^٢$ ، يمثل اقتران (السعر _ الطلب) ، حيث (ع) : السعر بالدينار ،

و (س) : عدد الوحدات المنتجة ، و كان السعر ثابتاً عند $(١٤) = ٥٣$ ، أوجد فائض المنتج ف ج ؟؟

٤) اذا كان ع = ق (س) = ٤٨ - ٣س ، يمثل اقتران (السعر _ الطلب) ،

و كان ع = هـ (س) = ١٣ + ٢س ، يمثل اقتران (السعر _ العرض)

فأوجد :

ب) سعر التوازن

أ) كمية التوازن

د) فائض المنتج عند سعر التوازن

ج) فائض المستهلك عند سعر التوازن

٥) اذا كان $ع = ق (س) = ٢٠ - س^٢$ ، يمثل اقتران (السعر _ الطلب) ،

و كان $ع = هـ (س) = ٢ + س^٢$ ، يمثل اقتران (السعر _ العرض)

فأوجد :

ب) سعر التوازن

أ) كمية التوازن

د) فائض المنتج عند سعر التوازن

ج) فائض المستهلك عند سعر التوازن



الوحدة الثانية

الإحصاء و الاحتمالات

ملاحظات مهمة :

- ١- الملاحظات الموجودة في الدوسية (في الدروس) مهمة جداً .
- ٢- تحتوي الدوسية على أسئلة متنوعة من الكتاب و على أسئلة وزارية سابقة
- ٣- الدوسية شاملة المادة ١٠٠% (ليست ملخص) .

بالتوفيق يا مبدعين ☺



الدرس الأول : مبدأ العد

* أمثلة :

١) مطعم ما يقدم (٤) أنواع من الساندويتشات و (٦) أنواع من المشروبات ،
أوجد عدد الطرق التي يمكن لزبون معين أن يتناول بها وجبة مكونة من ساندويتش و مشروب ؟

الحل : $٤ \times ٦ = ٢٤$ طريقة

٢) أراد فيصل السفر من اربد الى العقبة مروراً بعمان ، فإذا كان أمامه طريقتان للسفر من اربد الى الطفيلة
و هما السيارة أو الباص ، و ثلاثة طرق من عمان الى العقبة و هما السيارة أو الباص أو الطائرة ،
فكم طريقة أمام فيصل للسفر من اربد الى العقبة مروراً بعمان ؟

الحل : $٢ \times ٣ = ٦$ طرق

٣) كم عدد من ثلاث منازل يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } ؟

أ) اذ سُمح بتكرار الأرقام ؟

ب) اذا لم يُسمح بتكرار الأرقام ؟

الحل :

أ) $٤ \times ٤ \times ٤ = ٦٤$ عدد

ب) $٤ \times ٣ \times ٢ = ٢٤$ عدد

* أسئلة :

١) أراد أحد الطلبة شراء قلم و مسطرة و دفتر من إحدى المكتبات ، حيث وجد فيها ثلاثة أنواع مختلفة من الأقلام ، و نوعين من المساطر ، وأربعة أنواع من الدفاتر ، فبكم طريقة يمكن للطلاب شراء قلم و مسطرة و دفتر ؟

٢) أراد خالد السفر من العقبة الى دمشق مروراً بعمان ، فإذا كان أمامه طريقتان للسفر من العقبة الى عمان و هما السيارة أو الطائرة ، و ثلاثة طرق من عمان الى دمشق و هما السيارة أو القطار أو الطائرة ، فكم طريقة أمام خالد للسفر من العقبة الى دمشق مروراً بعمان ؟

٣) اذا كان عدد المعلمين في إحدى المدارس ١٥ معلماً ، فبكم طريقة يمكن تكوين لجنة ثلاثية مؤلفة من رئيس و أمين سر و أمين صندوق ؟

٤) أرادت دائرة السير صنع لوحات معدنية للسيارات تحمل كل منها حرفاً من حروف الهجاء العربية متبوعاً بعدد من رقمين (خانتين) من مجموعة الأرقام { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٩ } ، فبكم لوحة مختلفة يمكن صنعها اذا علمت أن عدد حروف اللغة العربية (٢٨) حرفاً ؟

٥) يتكون مجلس إدارة إحدى الشركات من خمسة أعضاء ، كم طريقة يمكن بها اختيار رئيس و نائب الرئيس من بين أعضاء مجلس إدارة الشركة ؟

٦) ما هي عدد الطرق التي يمكن أن يجلس بها شخصان في خمسة مقاعد مختلفة و موضوعة في صف واحد (على استقامة واحدة) ؟

٨) دخل أحد الزبائن محلاً لبيع أجهزة الحاسوب ، فوجد أمامه (٣) أنواع مختلفة لشاشات العرض ، و (٤) أنواع للوحات المفاتيح ، و (٥) أنواع لوحات التشغيل (الصندوق) ، فبكم طريقة يمكنه اختيار جهاز مكون من شاشة العرض و لوحة المفاتيح و وحدة التشغيل ؟

❖ المضروب : يرمز له ن !

* القاعدة : $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1$

* للتوضيح :

$$0! = \text{صفر} = 1 \quad 1! = 1 \quad 2! = 1 \times 2 = 2 \quad 3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$$

$$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24 \quad 5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$$

$$6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$$

* أمثلة :

١) ما هي عدد الطرق التي يمكن أن يجلس بها خمسة أشخاص في خمسة مقاعد و موضوعة في صف واحد (على استقامة واحدة) ؟

الحل : $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$ طريقة

(٢) جد قيمة كل مما يلي :

$$(أ) \quad ٧٢٠ = ١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥ \times ٦ = !٦ = !(٣ \times ٢)$$

$$(ب) \quad ١٢٥ = ١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥ = !٥ = !(٣ + ٢)$$

$$(ج) \quad ٥٦ = ٧ \times ٨ = \frac{!٨ \times ٧ \times ٨}{!٧} = \frac{!٨}{!٦}$$

* أسئلة :

(١) بكم طريقة يمكن ترتيب (٤) كتب على رف المكتبة في صف واحد ؟

(٢) جد قيمة كل مما يلي :

$$(أ) \quad =!(٤ \times ١)$$

$$(ب) \quad =!٣ \times !٢$$

$$(ج) \quad =!٠ - !٣$$

$$(د) \quad = \frac{!٧}{!(٢-٧)}$$

$$(هـ) \quad = \frac{!٦}{!٤ \times !٢}$$

$$= ! (٤ - ٤) (و)$$

$$= ! ٣ \times ! (٣ - ٤) (ي)$$

٣) جد قيمة (ن) لكل مما يلي :

$$(أ) ن ! = ٧٢٠$$

$$(ب) ٣٠ = (ن !) ٥$$

$$(ج) ٣ (ن !) = ٣٦٠$$

$$(د) ن ! - ٤ ! = ٩٦$$

الدرس الثاني : التبادل و التوافق

❖ التباديل : (الترتيب مهم وله معنى)

$$* \text{ الصورة العامة للتباديل : } ل (ن، ر) = \frac{ن!}{(ن-ر)!}$$

حيث ن = عدد العناصر ، ر = عدد الحدود

$$* \text{ حالات خاصة : } ل (ن، ن) = ن! ، ل (ن، ١) = ن ، ل (٠، ن) = ١ ، ل (ن، ن) = ن!$$

* أمثلة :

(١) كم عدد تباديل مجموعة من ستة عناصر مأخوذة ثلاثة عناصر كل مرة ؟

$$\text{الحل : } ل (٦، ٣) = ٦ \times ٥ \times ٤ = ١٢٠$$

(٢) جد قيمة كل مما يلي :

$$(أ) ل (٧، ٤) = ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ = ٨٤٠$$

$$(ب) ل (٨، ٣) = \frac{٨ \times ٧ \times ٦}{١ \times ٢ \times ٣} = \frac{٦ \times ٧ \times ٨}{١ \times ٢ \times ٣} = ٥٦$$

$$(ج) ل (٥، ١) = ٥$$

$$(د) ل (٤، ٠) = ١$$

$$(هـ) ل (٣، ٣) = ٣! = ٦$$

* أسئلة :

(١) كم كلمة مكونة من ثلاثة حروف يمكن تكوينها من مجموعة الأحرف { أ، ب، ج، د، هـ } ،
علماً بأنه ليس ضرورياً أن يكون للكلمة معنى ؟

(٢) جد قيمة كل مما يلي :

ل (أ) $= (٧, ٢)$

ل (ب) $= (٩, ٣)$

ل (ج) $= (٨, ٠)$

ل (د) $= (٩, ١)$

هـ $= (٧, ٧)$

ل (و) $= \frac{(٣٤٦)}{!٣}$

ل (ي) $= \frac{(٤٤٠)}{(٣٤٨)}$

* أمثلة :

(١) اذا كان ل (٦ ، ر) = ١٢٠ ، أوجد قيمة (ر) ؟؟

الحل : نبدأ بالعدد الأول ثم نطرح (١) حتى نصل الى أن حاصل ضربهم = القيمة المعطاة

$$١٢٠ = ٤ \times ٥ \times ٦$$

(٢) اذا كان ل (ن ، ٢) = ٧٢ ، أوجد قيمة (ن) ؟؟

الحل : نبحث عن عددين متتاليين يكون حاصل ضربهما = القيمة المعطاة

$$٧٢ = ٨ \times ٩$$

* أسئلة :

(١) جد قيمة (ر) في كل مما يلي :

(أ) ل (٥ ، ر) = ٦٠

(ب) ل (٦ ، ر) = ٩٠

(ج) ل (٥ ، ر) = ١٠٠

(٢) جد قيمة (ن) في كل مما يلي :

(أ) ل (ن ، ٣) = ٦٠

(ب) ل (ن ، ٢) = ٥٦

$$\text{ج) } 120 = (2, n)$$

$$\text{د) } 9 = (3, n)$$

❖ التوافيق : (الترتيب غير مهم و ليس له معنى)

* الصورة العامة : $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ ، تقراً (n) فوق (r)

* حالات خاصة : $\binom{n}{0} = 1$ ، $\binom{n}{n} = 1$ ، $\binom{n}{1} = n$ ، $\binom{n}{n} = 1$

* مثال : جد قيمة كل مما يلي :

$$\text{أ) } 10 = \frac{5 \times 6}{2} = \frac{(2,6)}{!2} = \binom{6}{2}$$

$$\text{ب) } 100 = \frac{60}{6} \times \frac{20}{2} = \frac{3 \times 4 \times 5}{!3} \times \frac{4 \times 5}{!2} = \binom{5}{3} \times \binom{5}{2}$$

$$\text{ج) } 1 = \frac{!5}{!5} = \frac{(5,5)}{!5} = \binom{5}{5}$$

$$\text{د) } 1 = \frac{!7}{!1} = \binom{7}{1}$$

$$\text{هـ) } 1 = \binom{7}{1}$$

* سؤال : جد قيمة كل مما يلي :

$$= \binom{8}{3} \quad (1)$$

$$= \binom{6}{4} \quad (2)$$

$$= \binom{5}{4} \quad (3)$$

$$= \binom{6}{3} \times \binom{6}{4} \quad (4)$$

$$= \binom{9}{2} \times \binom{8}{1} \quad (5)$$

$$= \binom{9}{9} \quad (6)$$

$$= \binom{14}{1} \quad (7)$$

$$= \binom{2}{0} \quad (8)$$

❖ قاعدة : (1) $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

(2) اذا كان $\binom{n}{r} = \binom{n}{r}$ ، فإن $r = r$ أو $r = n - r$

* مثال : جد قيمة ما يلي :

(1) $\binom{9}{7}$ ، $\binom{9}{2}$

الحل : $36 = \frac{8 \times 9}{!2} = \frac{ل(ن,ر)}{!ر} = \binom{9}{2}$

$36 = \frac{72}{2} = \frac{17 \times 8 \times 9}{!2 \times 17} = \binom{9}{7}$

* نلاحظ أن $\binom{9}{7} = \binom{9}{2}$ وأن $9 = 7 + 2$

الحل : $س = 5$ أو $س + 5 = 12 < س = 7$

(2) $\binom{12}{5} = \binom{12}{س}$

الحل : $س = 8 + 5 = 13$

(3) $\binom{س}{8} = \binom{س}{5}$

سؤال : حل المعادلات الآتية :

(1) $\binom{9}{5} = \binom{9}{س}$

(2) $\binom{12}{7} = \binom{12}{س}$

(3) $\binom{15}{س+1} = \binom{15}{3}$

(4) $\binom{9}{3} = \binom{9}{س3}$

$$\binom{س}{9} = \binom{س}{3} \quad (5)$$

$$\binom{س}{7} = \binom{س}{3} \quad (6)$$

$$1 = \binom{5}{س} \quad (7)$$

$$11 = \binom{11}{س} \quad (8)$$

$$7 = \binom{س}{1} \quad (9)$$

* مثال :

(1) بكم طريقة يمكن إجراء مباريات التصفيات النهائية لكرة القدم بين أربعة فرق رياضية ؟

$$\text{الحل : } \binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

(2) مجموعة مكونة من (8) معلمين و (3) إداريين ، أوجد عدد الطرق التي يمكن من خلالها تكوين لجنة ثلاثية منهم في كل من الحالات التالية :

- (أ) تتكون اللجنة من معلمين و إداري
 (ب) تتكون اللجنة من معلمين على الأقل .
 (ج) رئيس اللجنة و نائبه من الإداريين و الباقي من المعلمين .

الحل :

(أ) عدد طرق اختيار معلمين \times عدد طرق اختيار الإداري

$$84 = 3 \times 28 = 3 \times \frac{7 \times 8}{2} = \binom{3}{1} \times \binom{8}{2}$$

(ب) عدد طرق اختيار معلمين \times عدد طرق اختيار الإداري + عدد طرق اختيار ثلاثة معلمين

$$140 = 56 + 3 \times 28 = \frac{6 \times 7 \times 8}{6} + 3 \times \frac{7 \times 8}{2} = \binom{8}{3} + \binom{3}{1} \times \binom{8}{2}$$

(ج) طرق تكوين اللجنة =

عدد طرق اختيار الرئيس \times عدد طرق اختيار نائب الرئيس \times عدد طرق اختيار معلم

$$48 = 8 \times 2 \times 3$$

* أسئلة :

(١) ما عدد الطرق الممكنة لاختيار (٥) أسئلة للإجابة عنها في امتحان الرياضيات الذي يتكون من ٧ أسئلة؟

(٢) ما عدد الطرق التي يمكن بها إجراء مباريات التصفيات النهائية للعبة الشطرنج من بين (٦) لاعبين؟

(٣) بكم طريقة يمكن اختيار معلمين و طالبين لتشكيل لجنة مكونة من بين (٥) معلمين و (٩) طلاب؟

(٤) اذا كان عدد أعضاء مجلس إدارة إحدى الشركات (١٠) أعضاء ، و كان من ضمنهم (٤) سيدات ، ما عدد طرق اختيار رجلين و سيدة من الأعضاء لتمثيل الشركة في أحد المؤتمرات؟

(٥) بكم طريقة يمكن اختيار (٣) معلمين و طالبين لتشكيل لجنة مكونة من بين (٦) معلمين و (١٠) طلاب؟

(٧) مجموعة مكونة من (٨) طلاب و (٣) معلمين ، أوجد عدد الطرق التي يمكن من خلالها تكوين لجنة ثلاثية منهم في كل من الحالات التالية :

- (أ) تتكون اللجنة من (٣) طلاب و معلم
(ب) تتكون اللجنة من معلمين على الأقل .
(ج) رئيس اللجنة و نائبه من المعلمين و الباقي من الطلاب .

Large empty dashed box for writing the solution to the combinatorics problem.

* أسئلة متنوعة : (١) حل المعادلات التالية :

$$(أ) \binom{n}{3} = 10$$

$$(ب) \binom{n}{2} = 36$$

٢) اذا كان $\binom{ن}{٣} = ٢٠$ ، أوجد ل (ن ، ٣) ؟؟

٤) اذا كان ل (ن ، ر) = ٢٠ و $\binom{ن}{ر} = ١٠$ ، أوجد قيم (ن) و (ر) ؟؟

٥) اذا كان ل (ن ، ر) = ٢١٠ و $\binom{ن}{ر} = ٣٥$ ، أوجد قيم (ن) و (ر) ؟؟

الدرس الثالث :
المتغير العشوائى المنفصل و تويع ذات الحدين

❖ أولاً : المتغير العشوائى المنفصل

* **التعريف :** هو اقتران معرّف من الفضاء العيني الى مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية و تستخدم الرموز (س ، ص ، ع ،) للدلالة على المتغيرات العشوائية .

* **الفضاء العيني** يرمز له (Ω) و تلفظ أميجا

*** مثال :**

إذا دلّ المتغير العشوائى (س) على عدد مرات ظهور الصورة عند رمي قطعة نقود مرتين و دلّ الرمز (ص) للصورة و الرمز (ك) للكتابة ،

أوجد القيم الممكنة للمتغير العشوائى (س) ، و جدول التوزيع الاحتمالى .

الحل : $\Omega = \{ (ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك) \}$

$$س (ص ، ص) = ٢$$

$$س (ص ، ك) = ١$$

$$س (ك ، ص) = ١$$

$$س (ك ، ك) = ٠$$

$$* \text{ قيم (س) } = \{ ٢ ، ١ ، ١ ، ٠ \}$$

$$* \text{ احتمال الحادث (ح) } = \frac{\text{عدد عناصر الحادث ح}}{\Omega \text{ عدد عناصر}}$$

$$ل (س = ٢) = ل (ص ، ص) = \frac{١}{٤}$$

$$ل (س = ١) = ل (ص ، ك) + ل (ك ، ص) = \frac{٢}{٤}$$

$$ل (س = ٠) = ل (ك ، ك) = \frac{١}{٤}$$

* جدول التوزيع الاحتمالي :

س	٠	١	٢
ل (س)	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

* التوزيع الاحتمالي :

$$\left\{ \left(\frac{1}{4}, 2 \right), \left(\frac{2}{4}, 1 \right), \left(\frac{1}{4}, 0 \right) \right\}$$

* ملاحظة :

$$(1) \text{ ل (س) } \leq \text{ صفر}$$

$$(2) \text{ ل (س) } = 1$$

* أسئلة :

(١) اذا دلّ المتغير العشوائي (س) على عدد الأطفال الإناث في تجربة اختيار عشوائي لعائلة لديها طفلان ، و تسجيل النتائج حسب الجنس و تسلسل الولادة ،

أوجد : (أ) قيم (س) (ب) جدول التوزيع الاحتمالي

Area reserved for student answers, enclosed in a dashed border.

٢) اذا دلّ المتغير العشوائي (س) على عدد مرات ظهور الصورة عند رمي قطعة نقود مرتين و دلّ الرمز (ص) للصورة و الرمز (ك) للكتابة ،
أوجد : أ) القيم الممكنة للمتغير العشوائي (س) ب) جدول التوزيع الاحتمالي

Blank area for the answer to question 2.

٣) اذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س) معطى بالمجموعة :
{ (٠, ٢, ٠) ، (٠, ٤, ١) ، (٢, ٠, ٠) } ، أوجد قيمة (ب) ؟؟

Blank area for the answer to question 3.

٤) اذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س) معطى بالمجموعة :
{ (٠, ٣, ١) ، (٢, ٠, ٠) } ، أوجد قيمة (ب) ؟؟

Blank area for the answer to question 4.

٥) يمثل الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س) :

س	٠	١	٢	٣
ل (س)	٠,١٢	ب	٠,٤٥	٠,٢٥

* أوجد قيمة (ب) ؟؟

❖ ثانياً : توزيع ذات الحدين

$$* \text{الصورة العامة : ل (س = ر) = } \binom{ن}{ر} \times (أ)^ر \times (١-أ)^{ن-ر}$$

حيث أن :

ن = عدد مرات اجراء التجربة (العدد الكلي) .

ر = العدد المطلوب من التجربة .

أ = احتمال النجاح في المحاولة الواحدة .

س = عدد مرات النجاح .

* مثال : اذا كان (س) متغير عشوائياً ذا الحدين ، معاملاه ن = ٤ ، أ = ٠,٢ ، أوجد كل ما يلي :

$$(١) \text{ ل (س = ٣) } \quad (٢) \text{ ل (س < ٣) } \quad (٣) \text{ ل (س ≥ ١)}$$

$$\text{الحل : (١) ل (س = ٣) = } \binom{٤}{٣} \times (٠,٢)^٣ \times (٠,٨)^١ = ٠,٠٢٥٦$$

$$(٢) \text{ ل (س < ٣) = ل (س = ٤) = } \binom{٤}{٤} \times (٠,٢)^٤ \times (٠,٨)^٠ = ٠,٠٠١٦$$

$$(٣) \text{ ل (س ≥ ١) = ل (س = ١) + ل (س = ٠)}$$

$$٠,٨١٩٢ = \binom{٤}{١} \times (٠,٢)^١ \times (٠,٨)^٣ + \binom{٤}{٠} \times (٠,٢)^٠ \times (٠,٨)^٤$$

* أسئلة :

(١) اذا كان (س) متغير عشوائياً ذا الحدين ، معاملاه $n = ٥$ ، $a = ٠,٣$ ، أوجد كل ما يلي :
(١) ل (س = ٢) (٢) ل (س > ١) (٣) ل (س ≤ ٤)

(٢) اذا كان (س) متغير عشوائياً ذا الحدين ، معاملاه $n = ٥$ ، $a = ٠,٤$ ، أوجد كل ما يلي :
(١) ل (س = ٢) (٢) ل (س = ٤) (٣) ل (س ≥ ١)
(٤) ل (س < ٣) (٥) ل (س > ٢) (٤) ل (س ≥ ٤)

* أمثلة :

(١) عند رمي حجر نرد أربع مرات متتالية ، ما احتمال ظهور العدد (٢) في ثلاث رميات ؟

$$\text{الحل : ل (س = ٣) } = \binom{٤}{٣} \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^1$$

(٢) إذا كان احتمال أن يصيب شخص هدفاً في كل سهم يرميه على الهدف يساوي (٠,٧) ،
فإذا أطلق (٥) طلقات على الهدف فما احتمال :

(أ) إصابة الهدف ٣ مرات (ب) إصابة الهدف ٥ مرات (ج) عدم إصابة الهدف

$$\text{الحل : ن = ٥ ، أ = ٠,٧}$$

$$\text{(أ) ل (س = ٣) } = \binom{٥}{٣} \times (٠,٧)^3 \times (٠,٣)^2 = ١٠ \times ٠,٣٤٣ \times ٠,٩ = ٠,٣٠٨٧$$

$$\text{(ب) ل (س = ٥) } = \binom{٥}{٥} \times (٠,٧)^5 \times (٠,٣)^0 = ٠,١٦٨٧$$

$$\text{(ج) ل (س = ٠) } = \binom{٥}{٠} \times (٠,٧)^0 \times (٠,٣)^5 = ٠,٠٠٢٤٣$$

* أسئلة :

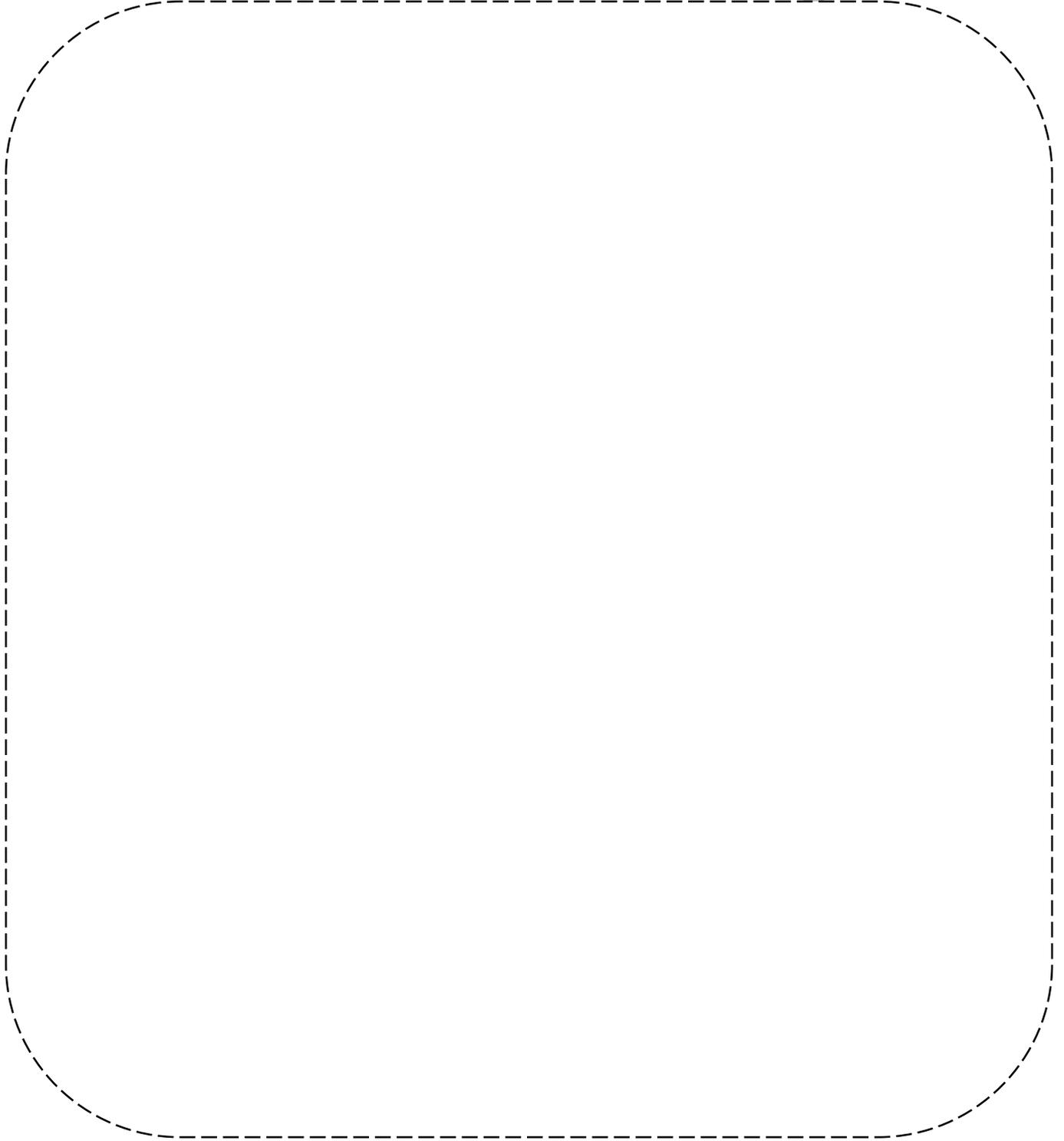
(١) عند رمي حجر نرد خمس مرات متتالية ، ما احتمال ظهور العدد (٤) في ثلاث رميات ؟

٢) إذا كان احتمال أن يصيب شخص هدفاً في كل سهم يرميه على الهدف يساوي (٠,٦) ،

فإذا أطلق (٤) طلقات على الهدف فما احتمال :

أ) إصابة الهدف ٣ مرات ب) إصابة الهدف ٤ مرات ج) عدم إصابة الهدف

د) إصابة الهدف مرة واحدة على الأكثر هـ) إصابة الهدف مرة واحدة على الأقل



٣) مصنع به (٥) آلات من نوع واحد ، اذا كان احتمال أن تحتاج أي آلة إلى إصلاح في السنة الخامسة من عمرها هو (٠,٢) فاحسب احتمال :

- أ) ألا تحتاج أي من الآلات إلى إصلاح .
- ب) أن تحتاج اثنتان فقط إلى إصلاح .
- ج) أن تحتاج اثنتان على الأكثر إلى إصلاح .
- د) أن تحتاج واحدة على الأقل إلى إصلاح .

٤) اذا كانت نسبة الإنبات في بذور البندورة تساوي ٨٠ % ، و تم زراعة خمس بذرات في إحدى الحدائق ،
فما احتمال إنبات : (أ) خمس بذرات (ب) ثلاث بذرت على الأقل ؟؟

٥) اذا كانت نسبة القطع المعيبة في إنتاج أحد المصانع ١٠ % ، فإذا أخذت (٥) قطع
من انتاج المصنع بطريقة عشوائية ، فما احتمال :
(أ) أن لا تجد أي قطعة معيبة
(ب) أن يكون بينها قطعة واحدة معيبة
(ج) أن لا يزيد عدد القطع المعيبة على قطعة واحدة

٦) اذا كان احتمال نجاح عملية جراحية يساوي ٨٠ % ، فما احتمال نجاح عمليتين على الأقل ،
في حال أجريت ثلاث عمليات؟؟

٧) اذا كانت نسبة التالف من انتاج مصنع لأجهزة الحاسوب تساوي (٠,٠٠١) ،
وأخذت عينة حجمها (٥) أجهزة بطريقة عشوائية ، فما احتمال أن تكون جميعها سالحة؟؟

٨) يحتوي صندوق على أربع كرات بيضاء وست كرات حمراء ، سُحبت من الصندوق ثلاث كرات
على التوالي مع الإرجاع ، اذا دلّ المتغير لعشوائي (س) على عدد الكرات البيضاء المسحوبة ،
كۆن جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س) .

* أسئلة متنوعة :

١) اذا كان (س) متغيراً عشوائياً ذا الحدين معاملاه $n = 3$ ، $a = 2, 0$.
أوجد : (أ) قيم (س) (ب) جدول التوزيع الاحتمالي .

Blank area for the solution to question 1.

٢) اذا كان (س) متغيراً عشوائياً ذا الحدين معاملاه $n = 4$ ، $a = 3, 0$.
أوجد : (أ) ل (س = 2) (ب) ل (س ≤ 3)

Blank area for the solution to question 2.

٣) اذا كان (س) متغيراً عشوائياً ذا الحدين معاملاه $n = 4$ ، و كان ل (س) $(1 \leq s)$ $\frac{19}{27}$

أوجد : (١) قيمة (أ) (٢) ل (س = ٢)

الدرس الرابع : العلامة المعيارية

$$\diamond \text{ العلامة المعيارية : } z_s = \frac{s - \bar{s}}{ع}$$

* ملاحظة :

في حالة المقارنة نأخذ العلامة المعيارية الأكبر

حيث أن : $z_s =$ العلامة المعيارية

$s =$ العلامة الأصلية

$\bar{s} =$ الوسط الحسابي

$ع =$ الانحراف المعياري

* مثال :

إذا كان الوسط الحسابي لعلامات طالبات الصف الثاني عشر الأدبي في العلوم الإسلامية (٦٥) و الانحراف المعياري لها (٥) ، فجد العلامة المعيارية لعلامات رنا ، حنان ، آمنة ، إذا كانت علامتهن في العلوم الإسلامية على الترتيب : ٦٥ ، ٦٠ ، ٧٥ .

الحل :

$$z_1 = \frac{65-60}{5} = 1 ، \quad z_2 = \frac{65-75}{5} = -2 ، \quad z_3 = \frac{65-65}{5} = 0$$

* أسئلة :

١) إذا كان الوسط الحسابي لتوزيع معين يساوي (٧٢) و الانحراف المعياري يساوي (٨) ، فأوجد العلامات المعيارية للعلامات ٧٢ ، ٧٥ ، ٢٠ ، ٨٤ .

٢) إذا كانت علامة سناء في اللغة العربية (٨٠) ، و في اللغة الإنجليزية (٧٠) ، و كان الوسط الحسابي لعلامات اللغة العربية (٦٨) ، و الانحراف المعياري (٨) ، أما الوسط الحسابي للغة الإنجليزية (٥٠) و الانحراف المعياري (١٠) ، أي المادتين كان مستوى تحصيل سناء أفضل؟؟

٣) اذا كان الوسط الحسابي لعلامات طلاب الصف العاشر في الرياضيات (٧٠) و الانحراف المعياري لها (١٠) ، فجد العلامة المعيارية لعلامات خالد ، محمد ، سامر ، اذا كانت علاماتهم في الرياضيات على الترتيب : ٨٠ ، ٧٠ ، ٥٥ ؟

٤) اذا كان الوسط الحسابي لعلامات طلاب التوجيهي فرع العلمي في اللغة العربية (٧٥) و الانحراف المعياري له (١٤) ، و الوسط الحسابي لعلامات شعبة الادبي (٨٠) ، و الانحراف المعياري لها (١٠) ، و كانت علامة إحدى الطلبة في شعبة العلمي (٦٠) ، و علامة إحدى الطلبة في شعبة الادبي (٩٠) ، فأأي العلامتين أفضل ؟

* ملاحظة : تكون $|z|$ مساوية لعدد الانحرافات المعيارية التي تنحرفها المشاهدة (س) عن الوسط الحسابي للتوزيع ،

اما إشارة (ز) تدل على موقع المشاهدة (س) فوق الوسط الحسابي أو تحته .

* اذا (ز) موجبة << فوق الوسط الحسابي ، اذا (ز) سالبة >> تحت الوسط الحسابي

* مثال : اذا كان الوسط الحسابي لعلامات صف هو (٦٠) و الانحراف المعياري لها (٨) ،

أوجد :

- (١) العلامة التي تتحرف فوق الوسط الحسابي بمقدار (٣) انحرافات معيارية
- (٢) العلامة التي تتحرف تحت (دون) الوسط الحسابي بمقدار انحرافين معارين .
- (٣) عدد الانحرافات المعيارية التي تتحرفها العلامة (٧٢) عن الوسط الحسابي .

الحل :

$$(١) \quad ٢٤ = ٨ \times ٣$$

العلامة = $٦٠ + ٢٤ = ٨٤$

$$(٢) \quad ١٦ = ٨ \times ٢$$

العلامة = $٦٠ - ١٦ = ٤٤$

$$(٣) \quad \text{عدد الانحرافات} = \frac{٦٠ - ٧٢}{٨} = \frac{١٢}{٨} = ١,٥$$

* أسئلة :

- (١) اذا كان الوسط الحسابي لعلامات صف ما في مادة الرياضيات (٦٠) و الانحراف المعياري لها (٤) ، و كانت العلامة المعيارية لعلامة الطالب أحمد (- ٣) ، أوجد علامته الفعلية التي حصل عليها ؟

٢) اذا كان الوسط الحسابي لعلامات صف ما في اللغة الإنجليزية (٦٠) ، و الانحراف المعياري (١٠) ،
أوجد :

أ) العلامة (س) التي قيمتها المعيارية (١,٥)

ب) القيمة المعيارية للعلامة (٥٥)

ج) العلامة التي تتحرف فوق الوسط الحسابي انحرافين معياريين

د) العلامة التي تتحرف تحت الوسط انحرافاً معيارياً واحداً .

* أمثلة :

(١) ثلاث طلاب في إحدى الصفوف علامتهم المعيارية (٤ ، ٢ ، ٥ ، ١) على الترتيب ، و كان الوسط الحسابي لعلامات جميع الطلاب في الصف (٦٨) ، و الفرق بين علامتي الطالب الأول و الثالث هو (٢٠) ، فجد ما يلي :

(أ) الانحراف المعياري لعلامات طلاب الصف .

(ب) العلامات الفعلية للطلاب .

الحل : نفرض الطالب الأول (أ) و الثاني (ب) و الثالث (ج)

$$أ <<< ٤ ، ب <<< ٢ ، ج <<< ١,٥$$

$$أ - ج = ٢٠ ، س = ٦٨$$

فرع (أ) :

$$\frac{٦٨ - أ}{٤} = ٤ <<< ٤ = ع - أ = ٦٨ - أ \dots \dots \dots \text{معادلة (١)}$$

$$\frac{٦٨ - ج}{٤} = ١,٥ <<< ١,٥ = ع - ج = ٦٨ - ج \dots \dots \dots \text{معادلة (٢)}$$

معادلة (١) - معادلة (٢)

$$٢,٥ = ع - ٢٠ <<< ٨ = ع$$

فرع (ب) :

$$\frac{٦٨ - أ}{٨} = ٤ <<< ٣٢ = ٦٨ - أ <<< ١٠٠ = أ \dots \dots \dots \text{(الطالب الأول)}$$

$$\frac{٦٨ - ب}{٨} = ٢ <<< ١٦ = ٦٨ - ب <<< ٨٤ = ب \dots \dots \dots \text{(الطالب الثاني)}$$

$$\frac{٦٨ - ج}{٨} = ١,٥ <<< ١٢ = ٦٨ - ج <<< ٨٠ = ج \dots \dots \dots \text{(الطالب الثالث)}$$

$$\text{أو } ٢٠ = ج - ١٠٠ <<< ٢٠ = ج - ٨٠$$

٢) اذا كانت علامات ثلاث طلاب في اختبار الحاسوب (٧٠ ، ٦٠ ، س) على الترتيب ،
و علاماتهم المعيارية (٤ ، ٢ ، -٢) على الترتيب ، أوجد كل ما يلي :

أ) الانحراف المعياري لعلامات طلاب الصف
ب) الوسط الحسابي لعلامات الطلاب
ج) علامة الطالب الثالثة .

$$\text{الحل : (أ) } \frac{\bar{س} - ٧٠}{ع} = ٤ \lll \lll \bar{س} - ٧٠ = ٤ع \text{ معادلة (١)}$$

$$\frac{\bar{س} - ٦٠}{ع} = ٢ \lll \lll \bar{س} - ٦٠ = ٢ع \text{ معادلة (٢)}$$

$$\text{معادلة (١) - معادلة (٢) } \lll \lll ١٠ = ٢ع \lll \lll ٥ = ع$$

$$\text{(ب) } \frac{\bar{س} - ٧٠}{٥} = ٤ \lll \lll \bar{س} - ٧٠ = ٢٠ \lll \lll \bar{س} = ٥٠$$

$$\text{(ج) } \frac{\bar{س} - ٥٠}{٥} = ٢ - \lll \lll \bar{س} - ٥٠ = ١٠ \lll \lll \bar{س} = ٤٠$$

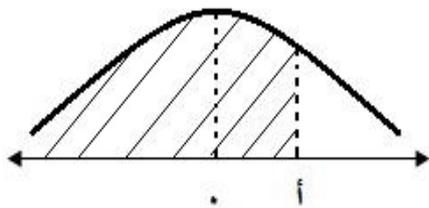
* أسئلة :

١) اذا كانت العلامات المعيارية للطلاب أحمد ، جاسر و وائل هي (٥ ، ١ ، -١ ، -٢) على الترتيب ،
و كان الوسط الحسابي لعلامات الصف (٧٠) ، و الفرق بين علامتي أحمد و جاسر (١٠) ،
اوجد العلامات الفعلية للطلاب الثلاثة ؟

٢) صف مكوّن من (٢٠) طالبة ، إذا كانت علامات الطالبات هديل ، شروق و غدير هي :
(٩٠ ، ٨٠ ، س) على الترتيب ، و علامتهن المعيارية (٣ ، ٢ ، ١ -) ،
أوجد علامة الطالبة غدير؟؟

الدرس الخامس : التوزيع الطبيعي

❖ التوزيع الطبيعي المعياري : هي التوزيع الذي وسطه الحسابي يساوي (صفر) و انحرافه المعياري يساوي (١) و متغيره العشوائي هو العلامة المعيارية (ز) .



* يتم استخدام جدول التوزيع الطبيعي لإيجاد الاحتمالات

لقيم (ز) الأقل من (أ) ← ل (ز ≥ أ)

حيث $أ \leq صفر$

* جدول التوزيع الطبيعي في الدوسية صفحة (١٢٨)

* أمثلة :

$$(1) ل (ز ≥ ١,٢٥) = ٠,٨٩٤٤$$

$$(٢) ل (ز ≥ ١,٣) = ٠,٩٠٣٢$$

* أسئلة :

$$(١) ل (ز ≥ ١,٣٥) =$$

$$(٢) ل (ز ≥ ٠,٥٤) =$$

$$(٣) ل (ز ≥ صفر) =$$

$$(٤) ل (ز ≥ ٣) =$$

* ملاحظة : لإيجاد الاحتمالات على يسار أو يمين قيم (ز) السالبة أو على يمين قيم (ز) الموجبة ،

فيتم استخدام خاصية التمثيل ، فإذا كانت $أ < صفر$ فإن :

$$\text{حالة (١) : } ل (ز ≤ أ) = ١ - ل (ز ≥ أ)$$

$$\text{حالة (٢) : } ل (ز ≤ أ) = ل (ز ≥ أ)$$

$$\text{حالة (٣) : } ل (ز ≥ أ) = ل (ز ≤ أ) = ١ - ل (ز ≥ أ)$$

$$\text{حالة (٤) : } ل (أ ≥ ز ≥ ب) = ل (ز ≥ ب) - ل (ز ≥ أ)$$

* أمثلة :

$$(١) ل (ز ≤ ٠,٦٥) = ١ - ل (ز ≥ ٠,٦٥) = ١ - ٠,٧٤٢٢ = ٠,٢٥٧٨$$

$$(٢) ل (ز ≤ ١,٥) = ل (ز ≥ ١,٥) = ٠,٩٣٣٢$$

$$(٣) ل (ز ≥ ٠,٨٥) = ل (ز ≤ ٠,٨٥) = ١ - ل (ز ≥ ٠,٨٥) = ١ - ٠,٠٨٠٢٣ = ٠,٩١٩٧٧$$

$$٠,١٩٧٧ =$$

$$(٤) ل (٠,٢ ≥ ز ≥ ٢,٣) = ل (ز ≥ ٢,٣) - ل (ز ≥ ٠,٢) =$$

$$٠,٩٨٩٣ - ٠,٥٧٩٣ = ٠,٤١٠٠$$

* أسئلة :

$$(1) \text{ ل } (z \leq 1) =$$

$$(2) \text{ ل } (z \leq 0,73) =$$

$$(3) \text{ ل } (z - 1 \leq -1) =$$

$$(4) \text{ ل } (z - 0,65) =$$

$$(5) \text{ ل } (z - 0,95) =$$

$$(6) \text{ ل } (z - 2,4) =$$

$$(7) \text{ ل } (0,09 \geq z \geq 1,5) =$$

$$(8) \text{ ل } (-0,4 \geq z \geq 1,8) =$$

$$(9) \text{ ل } (-1,7 \geq z \geq \text{صفر}) =$$

❖ إيجاد قيمة (أ) :

* أمثلة :

$$(1) \text{ ل } (z \geq \text{أ}) = 0,8599 \lll \text{أ} = 1,08 \text{ (من الجدول)}$$

$$(2) \text{ ل } (z \leq \text{أ}) = 0,3 \lll 1 - 0,3 = 0,7 \lll \text{أ} = 0,52 \text{ (من الجدول)}$$

* أسئلة :

$$(1) L(z \geq A) = 0,8531$$

$$(2) L(z \leq A) = 0,3050$$

$$(3) L(z \leq A) = 0,7486$$

❖ تطبيقات عملية على التوزيع الطبيعي :

* يمكن الاستفادة من التوزيع الطبيعي المعياري في إيجاد الاحتمالات للمتغير العشوائي المتصل (س) التي يتبع التوزيع الطبيعي من خلال تحويل العلامة الخام (س) الى العلامة المعيارية (ز) .

$$z = \frac{\mu - s}{\sigma}$$

حيث μ = الوسط الحسابي (تلفظ مي) ، σ = الانحراف المعياري (تلفظ سيغما)

* مثال :

إذا كان (س) متغير عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي (٦٠) ،

و انحرافه المعياري (٥) ، فأوجد :

(١) القيمة المعيارية المقابلة للقيمة س = ٦٨

(٢) قيمة (س) التي تقابل القيمة المعيارية (٢) .

$$\text{الحل : (1) } z = \frac{60 - 68}{5} = \frac{8}{5} = 1,6$$

$$(2) \frac{60 - s}{5} = 2 \lll s = 60 - 10 = 50$$

* سؤال : اذا كان (س) متغير عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي (٥٠) ،
و انحرافه المعياري (٤) ، فأوجد :

(أ) القيمة المعيارية المقابلة للقيمة $S = ٥٧$ ، (ب) قيمة (س) التي تقابل القيمة المعيارية (٣) .

* مثال : اذا كان (س) متغير عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي (٦٥) ،
و انحرافه المعياري (٦) ، فأوجد :

$$(١) \text{ ل } (س \geq ٦٨) \quad (٢) \text{ ل } (س \leq ٥٥)$$

$$\text{الحل : } (١) \text{ ل } (س \geq ٦٨) = \text{ ل } (س \geq ٦٥ + \frac{٦٨-٦٥}{٦}) = \text{ ل } (س \geq ٦٥ + ٠,٥) = ٠,٦٩١٥$$

$$(٢) \text{ ل } (س \leq ٥٥) = \text{ ل } (س \leq ٦٥ - \frac{٦٥-٥٥}{٦}) = \text{ ل } (س \leq ٦٥ - ١,٦٧) = ٠,٩٥٢٥$$

* سؤال :

اذا كان (س) متغير عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي (٦٠) ،
و انحرافه المعياري (٨) ، فأوجد :

$$(١) \text{ ل } (س \geq ٧٦) \quad (٢) \text{ ل } (س \leq ٤٨)$$

* مثال :

يخضع معامل الذكاء للطلبة المسجلين في إحدى الجامعات لتوزيع طبيعي ، وسطه (١٠٥) ،
و انحرافه المعياري (١٠) ، اذا تم اختيار أحد الطلبة عشوائياً ،
فما احتمال أن يكون من الطلبة الذين معامل ذكائهم أقل من (١١٠) ؟

الحل : $L(س \geq ١١٠) = L(ز \geq \frac{١٠٥-١١٠}{١٠}) = L(ز \geq -٠,٥) = ٠,٦٩١٥$

* أسئلة :

(١) يخضع معامل النجاح في عينة لمصنع ما لتوزيع طبيعي ، وسطه (١١٥) ،
و انحرافه المعياري (٢٠) ، اذا تم اختيار أحد العينات عشوائياً ،
فما احتمال أن تكون من العينات التي معامل نجاحها أقل من (١٢٠) ؟

(٢) اذا كانت أوزان الأطفال عند الولادة تتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي (٣,٢) كغم ،
و انحرافه المعياري (٠,٤) كغم ، اذا اختير طفل عشوائياً عند الولادة ،
فما احتمال أن يكون وزنه أكبر من (٤) كغم ؟؟

٤) اذا كانت أوزان سبائك ذهبية عند تتخذ شكل التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي (٥٠) غرام ،
و انحرافه المعياري (١٠) غرام ، اذا تم اختيار إحدى السبائك ،
فما احتمال أن يقل وزنها عن (٤٤,٩) غراماً ؟؟

* مثال :

اذا كانت أوزان طلبة إحدى المدارس و عددهم (٥٠٠) طالب تتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي (٥٥) كغم ، و انحرافه المعياري (٦) كغم ، اذا تم اختيار أحد الطلبة عشوائياً :
١) ما احتمال أن يكون من الطلبة الذين تقل أوزانهم عن (٤٩) كغم ؟
٢) ما احتمال أن يكون من الطلبة الذين تزيد أوزانهم عن (٥٨) كغم ؟
٣) ما عدد الطلبة الذين تنحصر أوزانهم بين (٥٢) كغم و (٦١) كغم ؟

$$\text{الحل : } ١) ل (س \ge ٤٩) = ل (ز \ge \frac{٥٥-٤٩}{٦}) = ل (١ - ز) =$$

$$= ١ - ل (ز \ge ١) = ١ - ٠,٨٤١٣ = ٠,١٥٨٧$$

$$٢) ل (س \le ٥٨) = ل (ز \le \frac{٥٥-٥٨}{٦}) = ل (ز \le -٠,٥) =$$

$$= ١ - ل (ز \ge ٠,٥) = ١ - ٠,٦٩١٥ = ٠,٣٠٨٥$$

$$٣) ل (٥٢ \le س \le ٦١) = ل (\frac{٥٥-٥٢}{٦} \le ز \le \frac{٥٥-٦١}{٦}) = ل (١ - ز \le -١ \le ١ - ز) =$$

$$= ل (١ - ز \ge ١) - ل (١ - ز \le ١) = ل (١ - ز \ge ١) - ل (١ - ز \le ١) =$$

$$= ل (١ - ز \ge ١) - ل (١ - ز \le ١) =$$

$$= ٠,٨٤١٣ - (١ - ٠,٦٩١٥) = ٠,٨٤١٣ - ٠,٣٠٨٥ = ٠,٥٣٢٨$$

* عدد الطلبة = العدد الكلي x الاحتمال

$$= ٥٠٠ \times ٠,٥٣٢٨ = ٢٦٦,٤ = ٢٦٦ \text{ طالباً}$$

* أسئلة :

١) اذا كانت أوزان طلبة إحدى المدارس و عددهم (١٠٠٠) طالب تتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي (٦٠) كغم ، و انحرافه المعياري (٦) كغم ، اذا تم اختيار أحد الطلبة عشوائياً :

- أ) ما احتمال أن يكون من الطلبة الذين تقل أوزانهم عن (٤٢) كغم ؟
ب) ما احتمال أن يكون من الطلبة الذين تزيد أوزانهم عن (٦٣) كغم ؟
ج) ما عدد الطلبة الذين تنحصر أوزانهم بين (٦٠) كغم و (٦٩) كغم ؟

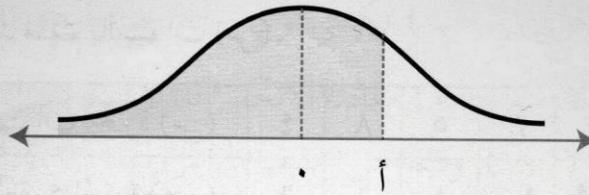
٢) تخضع عبوات إحدى المنتجات الزراعية لتوزيع طبيعي ، وسطه (٢٥) كغم ،
و انحرافه المعياري (٢) كغم ، اذا تم اختيار إحدى العبوات عشوائياً :
أ) ما احتمال أن يزيد وزنها عن (٢٧) كغم ؟
ب) ما احتمال أن ينحصر وزنها بين (٢٤,٥) كغم و (٢٥,٥) كغم ؟

٣) تتخذ أعمار (٢٠٠٠٠) شخص شكل التوزيع الطبيعي ، وسطه (٥٢) سنة ،
و انحرافه المعياري (١٠) سنة ، اذا اختير شخص عشوائياً :
فما احتمال أن يكون ممن تتراوح أعمارهم بين (٤٦) سنة و (٥٨) سنة ؟

٤) اذا كانت علامات (١٠٠٠) طالب تتخذ شكل التوزيع طبيعي ، وسطه (٦٥) ،
و انحرافه المعياري (١٠) ، و كان عدد الناجحين (٧٥٨) طالباً ، فما علامة النجاح ؟

٥) اذا كان رواتب (١٠٠٠٠) معلم تتخذ شكل التوزيع طبيعي ، وسطه (٢٠٠) دينار شهرياً ،
و انحرافه المعياري (١٠) دنائير ،
فما عدد المعلمين و المعلمات الذين تنحصر رواتبهم بين (١٨٠) دينار و (٢١٠) دينار ؟

جدول التوزيع الطبيعي المعياري

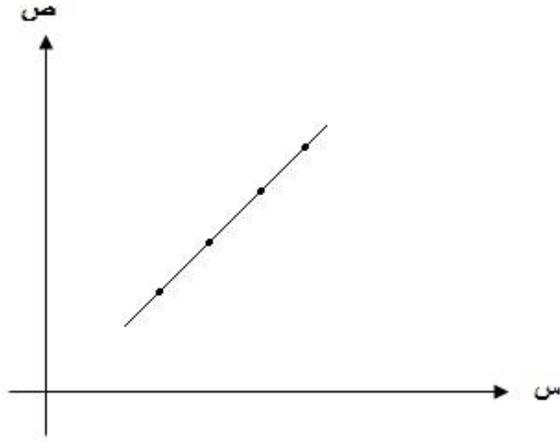


٠,٠٩	٠,٠٨	٠,٠٧	٠,٠٦	٠,٠٥	٠,٠٤	٠,٠٣	٠,٠٢	٠,٠١	٠,٠٠	ز
٠,٥٣٥٩	٠,٥٣١٩	٠,٥٢٧٩	٠,٥٢٣٩	٠,٥١٩٩	٠,٥١٦٠	٠,٥١٢٠	٠,٥٠٨٠	٠,٥٠٤٠	٠,٥٠٠٠	٠,٠
٠,٥٧٥٣	٠,٥٧١٤	٠,٥٦٧٥	٠,٥٦٣٦	٠,٥٥٩٦	٠,٥٥٥٧	٠,٥٥١٧	٠,٥٤٧٨	٠,٥٤٣٨	٠,٥٣٩٨	٠,١
٠,٦١٤١	٠,٦١٠٣	٠,٦٠٦٤	٠,٦٠٢٦	٠,٥٩٨٧	٠,٥٩٤٨	٠,٥٩١٠	٠,٥٨٧١	٠,٥٨٣٢	٠,٥٧٩٣	٠,٢
٠,٦٥١٧	٠,٦٤٨٠	٠,٦٤٤٣	٠,٦٤٠٦	٠,٦٣٦٨	٠,٦٣٣١	٠,٦٢٩٣	٠,٦٢٥٥	٠,٦٢١٧	٠,٦١٧٩	٠,٣
٠,٦٨٧٩	٠,٦٨٤٤	٠,٦٨٠٨	٠,٦٧٧٢	٠,٦٧٣٦	٠,٦٧٠٠	٠,٦٦٦٤	٠,٦٦٢٨	٠,٦٥٩١	٠,٦٥٥٤	٠,٤
٠,٧٢٢٤	٠,٧١٩٠	٠,٧١٥٧	٠,٧١٢٣	٠,٧٠٨٨	٠,٧٠٥٤	٠,٧٠١٩	٠,٦٩٨٥	٠,٦٩٥٠	٠,٦٩١٥	٠,٥
٠,٧٥٤٩	٠,٧٥١٧	٠,٧٤٨٦	٠,٧٤٥٤	٠,٧٤٢٢	٠,٧٣٨٩	٠,٧٣٥٧	٠,٧٣٢٤	٠,٧٢٩١	٠,٧٢٥٧	٠,٦
٠,٧٨٥٢	٠,٧٨٢٣	٠,٧٧٩٤	٠,٧٧٦٤	٠,٧٧٣٤	٠,٧٧٠٤	٠,٧٦٧٣	٠,٧٦٤٢	٠,٧٦١١	٠,٧٥٨٠	٠,٧
٠,٨١٣٣	٠,٨١٠٦	٠,٨٠٧٨	٠,٨٠٥١	٠,٨٠٢٣	٠,٧٩٩٥	٠,٧٩٦٧	٠,٧٩٣٩	٠,٧٩١٠	٠,٧٨٨١	٠,٨
٠,٨٣٨٩	٠,٨٣٦٥	٠,٨٣٤٠	٠,٨٣١٥	٠,٨٢٨٩	٠,٨٢٦٤	٠,٨٢٣٨	٠,٨٢١٢	٠,٨١٨٦	٠,٨١٥٩	٠,٩
٠,٨٦٢١	٠,٨٥٩٩	٠,٨٥٧٧	٠,٨٥٥٤	٠,٨٥٣١	٠,٨٥٠٨	٠,٨٤٨٥	٠,٨٤٦١	٠,٨٤٣٨	٠,٨٤١٣	١,٠
٠,٨٨٣٠	٠,٨٨١٠	٠,٨٧٩٠	٠,٨٧٧٠	٠,٨٧٤٩	٠,٨٧٢٩	٠,٨٧٠٨	٠,٨٦٨٦	٠,٨٦٦٥	٠,٨٦٤٣	١,١
٠,٩٠١٥	٠,٨٩٩٧	٠,٨٩٨٠	٠,٨٩٦٢	٠,٨٩٤٤	٠,٨٩٢٥	٠,٨٩٠٧	٠,٨٨٨٨	٠,٨٨٦٩	٠,٨٨٤٩	١,٢
٠,٩١٧٧	٠,٩١٦٢	٠,٩١٤٧	٠,٩١٣١	٠,٩١١٥	٠,٩٠٩٩	٠,٩٠٨٢	٠,٩٠٦٦	٠,٩٠٤٩	٠,٩٠٣٢	١,٣
٠,٩٣١٩	٠,٩٣٠٦	٠,٩٢٩٢	٠,٩٢٧٩	٠,٩٢٦٥	٠,٩٢٥١	٠,٩٢٣٦	٠,٩٢٢٢	٠,٩٢٠٧	٠,٩١٩٢	١,٤
٠,٩٤٤١	٠,٩٤٢٩	٠,٩٤١٨	٠,٩٤٠٦	٠,٩٣٩٤	٠,٩٣٨٢	٠,٩٣٧٠	٠,٩٣٥٧	٠,٩٣٤٥	٠,٩٣٣٢	١,٥
٠,٩٥٤٥	٠,٩٥٣٥	٠,٩٥٢٥	٠,٩٥١٥	٠,٩٥٠٥	٠,٩٤٩٥	٠,٩٤٨٤	٠,٩٤٧٤	٠,٩٤٦٣	٠,٩٤٥٢	١,٦
٠,٩٦٣٣	٠,٩٦٢٥	٠,٩٦١٦	٠,٩٦٠٨	٠,٩٥٩٥	٠,٩٥٩١	٠,٩٥٨٢	٠,٩٥٧٣	٠,٩٥٦٤	٠,٩٥٥٤	١,٧
٠,٩٧٠٦	٠,٩٦٩٩	٠,٩٦٩٣	٠,٩٦٨٦	٠,٩٦٧٨	٠,٩٦٧١	٠,٩٦٦٤	٠,٩٦٥٦	٠,٩٦٤٩	٠,٩٦٤١	١,٨
٠,٩٧٦٧	٠,٩٧٦١	٠,٩٧٥٦	٠,٩٧٥٠	٠,٩٧٤٤	٠,٩٧٣٨	٠,٩٧٣٢	٠,٩٧٢٦	٠,٩٧١٩	٠,٩٧١٣	١,٩
٠,٩٨١٧	٠,٩٨١٢	٠,٩٨٠٨	٠,٩٨٠٣	٠,٩٧٩٨	٠,٩٧٩٣	٠,٩٧٨٨	٠,٩٧٨٣	٠,٩٧٧٨	٠,٩٧٧٢	٢,٠
٠,٩٨٥٧	٠,٩٨٥٤	٠,٩٨٥٠	٠,٩٨٤٦	٠,٩٨٤٢	٠,٩٨٣٨	٠,٩٨٣٤	٠,٩٨٣٠	٠,٩٨٢٦	٠,٩٨٢١	٢,١
٠,٩٨٩٠	٠,٩٨٨٧	٠,٩٨٨٤	٠,٩٨٨١	٠,٩٨٧٨	٠,٩٨٧٥	٠,٩٨٧١	٠,٩٨٦٨	٠,٩٨٦٤	٠,٩٨٦١	٢,٢
٠,٩٩١٦	٠,٩٩١٣	٠,٩٩١١	٠,٩٩٠٩	٠,٩٩٠٦	٠,٩٩٠٤	٠,٩٩٠١	٠,٩٨٩٨	٠,٩٨٩٦	٠,٩٨٩٣	٢,٣
٠,٩٩٣٦	٠,٩٩٣٤	٠,٩٩٣٢	٠,٩٩٣١	٠,٩٩٢٩	٠,٩٩٢٧	٠,٩٩٢٥	٠,٩٩٢٢	٠,٩٩٢٠	٠,٩٩١٨	٢,٤
٠,٩٩٥٢	٠,٩٩٥١	٠,٩٩٤٩	٠,٩٩٤٨	٠,٩٩٤٦	٠,٩٩٤٥	٠,٩٩٤٣	٠,٩٩٤١	٠,٩٩٤٠	٠,٩٩٣٨	٢,٥
٠,٩٩٦٤	٠,٩٩٦٣	٠,٩٩٦٢	٠,٩٩٦١	٠,٩٩٦٠	٠,٩٩٥٩	٠,٩٩٥٧	٠,٩٩٥٦	٠,٩٩٥٥	٠,٩٩٥٣	٢,٦
٠,٩٩٧٤	٠,٩٩٧٣	٠,٩٩٧٢	٠,٩٩٧١	٠,٩٩٧٠	٠,٩٩٦٩	٠,٩٩٦٨	٠,٩٩٦٧	٠,٩٩٦٦	٠,٩٩٦٥	٢,٧
٠,٩٩٨١	٠,٩٩٨٠	٠,٩٩٧٩	٠,٩٩٧٩	٠,٩٩٧٨	٠,٩٩٧٧	٠,٩٩٧٧	٠,٩٩٧٦	٠,٩٩٧٥	٠,٩٩٧٤	٢,٨
٠,٩٩٨٦	٠,٩٩٨٦	٠,٩٩٨٥	٠,٩٩٨٥	٠,٩٩٨٤	٠,٩٩٨٤	٠,٩٩٨٣	٠,٩٩٨٢	٠,٩٩٨٢	٠,٩٩٨١	٢,٩
٠,٩٩٩٠	٠,٩٩٩٠	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٨٨	٠,٩٩٨٨	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٧	٣,٠
٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩٠	٣,١
٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٣	٣,٢
٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٣,٣
٠,٩٩٩٨	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٣,٤

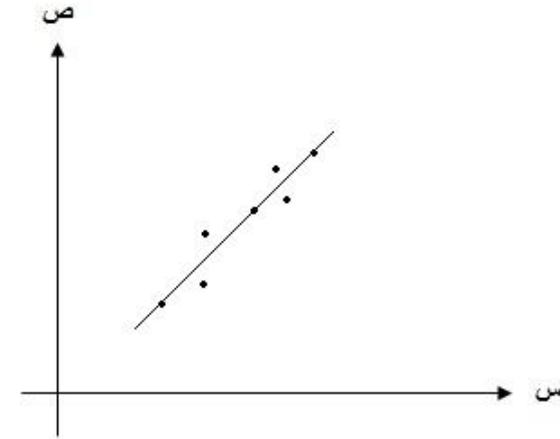
الدرس السادس : الارتباط و معامل الارتباط

❖ الارتباط هو علاقة بين متغيرين اثنين بحيث اذا تغير أحدهما فإن الثاني سوف يتغير طردياً أو عكسياً .
و يحدد نوع الارتباط من شكل الانتشار .

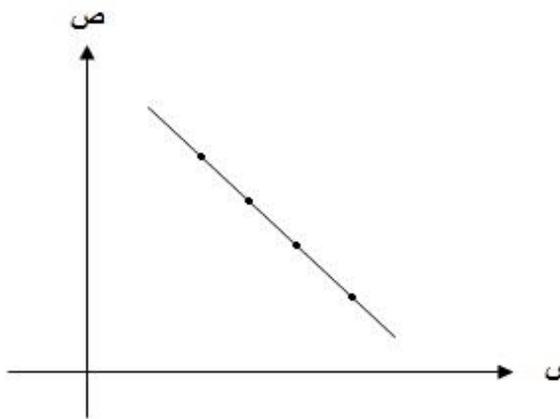
* نوع الارتباط :



(١) ارتباط خطي طردي تام (إيجابي)

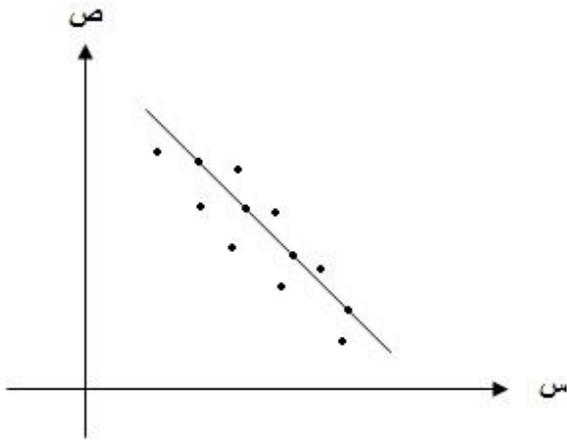


(٢) ارتباط خطي طردي (إيجابي)

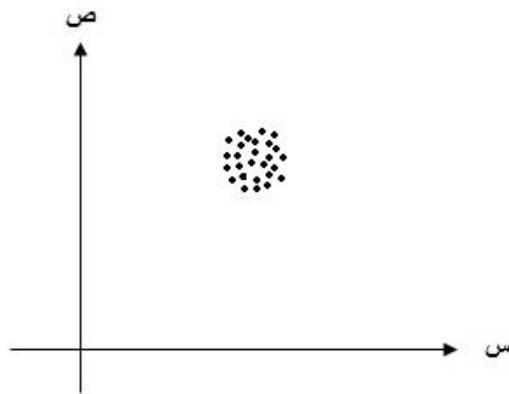


(٣) ارتباط خطي عكسي تام (سلبي)

٤) ارتباط خطي عكسي (سلبى)



❖ ملاحظة :



هناك بعض الحالات التي لا تشير الى وجود أي نوع من الارتباط حيث تتجمع النقاط على شكل دائرة مما يدل على عدم وجود ارتباط خطي .

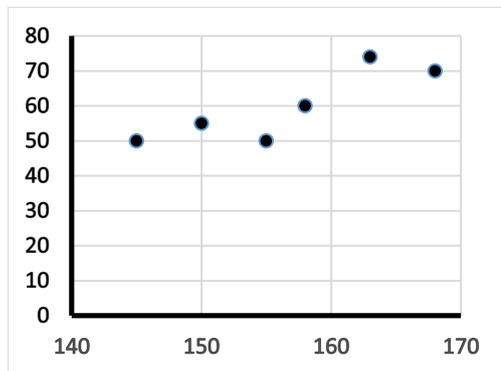
* مثال :

يبين الجدول ادناه أطوال عشرة طلاب بالسنتيمترات و أوزانهم بالكيلومترات :

١٦٣	١٥٨	١٥٥	١٥٠	١٤٥	الطول (س)
٧٤	٦٠	٥٠	٥٥	٥٠	الوزن (ص)

المطلوب : ارسم شكل الانتشار بين المتغيرين (س) و (ص) ، و بين نوع الارتباط ؟

الحل :



* نوع الارتباط :

ارتباط طردي (إيجابي)

* سؤال :

الجدول ادناه يبيّن علامات (٦) طلاب في مبحث الرياضيات و عدد أيام غياب كل منهم :

١	٢	١	٤	٧	٦	علامات الطالب في الرياضيات (س)
٨	٥	٦	٤	٢	١	عدد أيام غياب الطالب (ص)

المطلوب : (١) ارسم شكل الانتشار بين المتغيرين (س) و (ص)

(٢) حدد نوع العلاقة بين المتغيرين (س) و (ص)

❖ معامل ارتباط بيرسون الخطي : يُستخدم لقياس قوة الارتباط الخطي بين متغيرين .

$$r = \frac{\sum (s - \bar{s}) \times (v - \bar{v})}{\sqrt{\sum (s - \bar{s})^2 \times \sum (v - \bar{v})^2}}$$

* القانون :

* ملاحظة : اذا كان (ر) معامل الارتباط فيكون محصور بين (-١) و (١)

ارتباط خطي طردي (إيجابي) ← (١ > ر > ٠)

ارتباط خطي عكسي (سلبي) ← (٠ > ر > -١)

ارتباط خطي طردي تام (إيجابي) ← ١ = ر

ارتباط خطي عكسي تام (سلبي) ← -١ = ر

* مثال :

يمثل الجدول أدناه علامات ستة طلاب في مبحثي الرياضيات (س) و الجغرافيا (ص) في امتحان قصير ، النهاية العظمى له (١٠) :

٦	٥	٤	٣	٢	١	رقم الطالب
٤	٥	٣	٥	٧	٦	الرياضيات (س)
٣	٥	١	٤	٦	٥	الجغرافيا (ص)

المطلوب : احسب معامل ارتباط بيرسون الخطي بين (س) و (ص) ؟

الحل :

$$\bar{س} = \frac{٤+٥+٣+٥+٧+٦}{٦} = \frac{٣٠}{٦} = ٥$$

$$\bar{ص} = \frac{٣+٥+١+٤+٦+٥}{٦} = \frac{٢٤}{٦} = ٤$$

س	ص	س - $\bar{س}$	ص - $\bar{ص}$	(س - $\bar{س}$)(ص - $\bar{ص}$)	(س - $\bar{س}$) ^٢	(ص - $\bar{ص}$) ^٢
٦	٥	١	١	١	١	١
٧	٦	٢	٢	٤	٤	٤
٥	٤	٠	٠	٠	٠	٠
٣	١	-٢	-٣	٦	٤	٩
٥	٥	٠	١	٠	٠	١
٤	٣	-١	-١	١	١	١
المجموع				<u>١٢</u>	<u>١٠</u>	<u>١٦</u>

$$r = \frac{\sum (س - \bar{س}) \times (ص - \bar{ص})}{\sqrt{\sum (س - \bar{س})^2 \times \sum (ص - \bar{ص})^2}}$$

$$r = \frac{١٢}{\sqrt{١٦ \times ١٠}} = \frac{١٢}{\sqrt{١٦٠}}$$

* أسئلة :

(١) احسب معامل ارتباط بيرسون بين متغيرين (س) و (ص) في الجدول الآتي :

٨	١٤	١٢	١٠	١١	س
١١	٩	٦	١٠	١٤	ص

٢) يبين الجدول الآتي عدد سنوات الخبرة (س) و الأجر اليومي (ص) بالدينار ، لخمسة عمال في إحدى الشركات في مدينة سحاب الصناعية :

عدد سنوات الخبرة (س)	٥	٦	٧	٨	١٤
الأجر اليومي (ص)	٦	٧	٨	٩	١٠

* المطلوب : احسب معامل ارتباط بيرسون الخطي بين (س) و (ص) ، وحدد نوع الارتباط .

Area reserved for the student's solution to the problem.

٣) يمثل الجدول أدناه معامل الذكاء (س) و علامة الرياضيات (ص) لخمسـة طلاب :

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥
معامل الذكاء (س)	١٣٠	١٢٠	١١٥	١١٠	١٠٠
علامة الرياضيات (ص)	٩٥	٧٠	٨٥	٨٠	٥٠

* المطلوب : احسب معامل ارتباط بيرسون بين معامل الذكاء و علامة الرياضيات .

Area reserved for the student's solution to the problem.

٤) اذا كان (س) و (ص) متغيرين ، عدد قيم كل منهما (١٠) ، و كان $\sum_{r=1}^{10} (s_r - \bar{s})^2 = 36$ ،

$$\sum_{r=1}^{10} (v_r - \bar{v})^2 = 1600 ، \sum_{r=1}^{10} (s_r - \bar{s})(v_r - \bar{v}) = 180$$

* المطلوب : احسب معامل ارتباط بيرسون الخطي بين (س) و (ص) .

Blank area for the solution to question 4.

٥) اذا كان (س) و (ص) متغيرين ، و كان $\sum (s - \bar{s})^2 = 80$ ،

$$\sum (v - \bar{v})^2 = 20 ، \sum (s - \bar{s})(v - \bar{v}) = 32$$

* المطلوب : احسب معامل ارتباط بيرسون الخطي بين (س) و (ص) .

Blank area for the solution to question 5.

❖ أثر التعديلات الخطية في قيمة معامل ارتباط بيرسون

* إذا كان معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين (س) و (ص) يساوي (ر) ،

و عُدلت قيم كل من (س) و (ص) حسب العلاقة :

$$س^* = أس + ب ، \quad ص^* = ص + د$$

فإن معامل الارتباط بين (س*) و (ص*) يساوي :

(ر) إذا كانت إشارتا (أ) و (ج) متشابهتين .

(- ر) إذا كانت إشارتا (أ) و (ج) مختلفتين .

* مثال :

إذا كان معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين (س) و (ص) هو (٠,٩) ،

أوجد معامل الارتباط بين (س*) و (ص*) في كل مما يأتي :

$$(١) \quad س^* = ٣س - ١ ، \quad ص^* = ٤ص + ١$$

$$(٢) \quad س^* = ٢س + ٣ ، \quad ص^* = ٢ - ص$$

الحل : (١) ٠,٩ (٢) - ٠,٩

* أسئلة :

(١) إذا كان معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين (س) و (ص) هو (- ٠,٨) ،

أوجد معامل الارتباط بين (س*) و (ص*) في كل مما يأتي :

$$(١) \quad س^* = ٢س - ٣ ، \quad ص^* = ص - ١$$

$$(٢) \quad س^* = ٣ - ٢س ، \quad ص^* = ٥ - ص$$

٢) إذا كان معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين (س) و (ص) هو (٠,٢٤) ،
أوجد معامل الارتباط بين (س*) و (ص*) في كل مما يأتي :

$$(١) \text{ س}^* = ٤ - \text{س} - ٣ ، \text{ ص}^* = ٢ - \text{ص} - ١$$

$$(٢) \text{ س}^* = ٧ - \text{س} - ٤ ، \text{ ص}^* = ٥ - \text{ص} - ٣$$

$$(٣) \text{ س}^* = ٩ - \text{س} - ٣ ، \text{ ص}^* = ٤ - \text{ص} - ٢$$

$$(٤) \text{ س}^* = ٧ - \text{س} - ٤ ، \text{ ص}^* = ٥ - \text{ص} - ٦$$

الدرس السابع : الانحدار

❖ **معادلة الانحدار :** هي معادلة خطية تربط بين المتغيرين و تستخدم للتنبؤ بقيم أحد المتغيرين إذا عُلم قيمة المتغير الآخر .

$$* \text{ معادلة الانحدار : } \hat{\text{ص}} = \text{س} + \text{ب}$$

$$\text{حيث أن : } \hat{\text{ص}} = \frac{\sum (\text{س} - \bar{\text{س}}) \times (\text{ص} - \bar{\text{ص}})}{\sum (\text{س} - \bar{\text{س}})^2}$$

$$\text{ب} = \bar{\text{ص}} - \bar{\text{س}}$$

* **الخطأ في التنبؤ :** عند رسم شكل الانتشار بين متغيرين و وبحالة كانت العلاقة خطية سوف نلاحظ أن النقاط تتجمع حول خط مستقيم يمر بعدد منها و يتوسط النقاط الباقية و لا يمر منها فهذا يسبب ما يسمى الخطأ في التنبؤ .

القانون : الخطأ في التنبؤ = القيمة الحقيقية - القيمة المتنبأ فيها

$$= \text{ص} - \hat{\text{ص}}$$

حيث أن : $\text{ص} =$ القيمة الحقيقية ، $\hat{\text{ص}} =$ القيمة المتنبأ فيها

* مثال : الجدول الآتي يبيّن قيم لكل من (س) و (ص) :

س	٥	٦	٢	٨	٤
ص	٣٥	٥٠	٣٠	٦٠	٣٥

المطلوب : (١) جد معادلة الانحدار ، (٢) جد القيمة المتوقعة لـ (ص) اذا كانت س = ٤
(٣) جد الخطأ في التنبؤ عند س = ٨

الحل : فرع (١) : $\bar{s} = \frac{٥+٦+٢+٨+٤}{٥} = \frac{٢٥}{٥}$
 $\bar{v} = \frac{٣٥+٥٠+٣٠+٦٠+٣٥}{٥} = \frac{٢١٠}{٥}$

س	ص	س - \bar{s}	ص - \bar{v}	(س - \bar{s})(ص - \bar{v})	(س - \bar{s}) ^٢
٥	٣٥	٠	-٧	٠	٠
٦	٥٠	١	٨	٨	١
٢	٣٠	-٣	-١٢	٣٦	٩
٨	٦٠	٣	١٨	٥٤	٩
٤	٣٥	-١	-٧	٧	١
المجموع				<u>١٠٥</u>	<u>٢٠</u>

$$أ = \frac{\sum (س - \bar{s})(ص - \bar{v})}{\sum (س - \bar{s})^2} = \frac{١٠٥}{٢٠} = \frac{٢١}{٤}$$

$$ب = \bar{v} - \bar{s} = \frac{٦٣}{٤} - \frac{١٠٥}{٤} = \frac{٦٣}{٤} - \frac{٥ \times ٢١}{٤} = \frac{٦٣}{٤} - \frac{١٠٥}{٤}$$

$$\hat{ص} = \bar{s} + ب = \frac{٦٣}{٤} + \frac{٢١}{٤}$$

$$\text{فرع (٢) : } \hat{ص} = \frac{٦٣}{٤} + \frac{٢١}{٤} = \frac{٦٣}{٤} + \frac{٤ \times ٢١}{٤} = \frac{٦٣}{٤} + \frac{٨٤}{٤} = \frac{١٤٧}{٤}$$

$$\text{فرع (٣) : } \hat{ص} = \frac{٦٣}{٤} + \frac{٢١}{٤} = \frac{٦٣}{٤} + \frac{٨ \times ٢١}{٤} = \frac{٦٣}{٤} + \frac{١٦٨}{٤} = \frac{٢٣١}{٤}$$

الخطأ في التنبؤ = القيمة الحقيقية - القيمة المتنبأ فيها

$$= ص - \hat{ص} = \frac{٢٣١}{٤} - ٦٠ = \frac{٩}{٤}$$

* أسئلة :

(١) يمثل الجدول أدناه معامل الذكاء (س) و معدل التحصيل (ص) لستة طلاب :

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥	٦
معامل الذكاء (س)	٩٥	١٠٦	١١٩	١١٣	١١٥	١٢٤
معدل التحصيل (ص)	٥٣	٦٢	٨٧	٧٥	٨٦	٩٣

* المطلوب : (١) جد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم (ص) اذا علمت قيم (س) .
(٢) قدر معدل التحصيل المتوقع به لطالب معامل ذكائه (١١٠) .

٢) يمثل الجدول أدناه معدلات خمس طالبات و عدد الساعات التي تقضيها الطالبة في الدراسة يومياً :

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥
عدد الساعات (س)	٨	٢	٥	٣	٧
المعدل (ص)	٩٥	٦٥	٩٠	٧٠	٩٠

المطلوب :

- ١) بافتراض أن العلاقة بين (س) و (ص) خطية ، جد معادلة خط الانحدار .
- ٢) قَدِّر المعدل المتوقع لطالبة تدرس ست ساعات يومياً .
- ٣) درست طالبة (٨) ساعات و حصلت على معدل (٩٥) ، جد الخطأ في التنبؤ .

٣) يمثل الجدول أدناه علامات خمسة طلاب في مبحثي التاريخ و الجغرافيا ، حيث العلامة العظمى (٢٠) :

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥
علامة التاريخ (س)	١١	١٢	١٠	١٣	١٤
علامة الجغرافيا (ص)	١٢	١٦	١٠	١٤	١٨

* المطلوب : جد معادلة خط الانحدار .

٤) يمثل الجدول الآتي عدد المركبات المشتركة في حوادث السير في الأردن في الفترة ٢٠٠٠ - ٢٠٠٤ :

السنة	٢٠٠٠	٢٠٠١	٢٠٠٢	٢٠٠٣	٢٠٠٤
رقم السنة (س)	١	٢	٣	٤	٥
عدد المركبات المشتركة بالحوادث (ص)	٩٥	٩٦	٩٤	١١٧	١٣٣

المطلوب : (١) جد معادلة خط الانحدار .

(٢) جد الخطأ في التنبؤ بعدد المركبات المشتركة بالحوادث اذا كان العدد الفعلي (١١٧) .

(٣) استخدم معادلة خط الانحدار للتنبؤ بعدد السيارات المشتركة بالحوادث عام (٢٠٠٦) .

Area reserved for the student's solution to the problems above.

(٥) اذا كان (س) و (ص) يمثلان رأس مال الشركة و أرباحها مقدرة بالآلاف الدينانير ،
و جمعت البيانات الآتية لخمس شركات :

$$\bar{s} = 10 , \quad \bar{v} = 12 , \quad \sum_{i=1}^5 (s_i - \bar{s})^2 = 10000 ,$$

$$\sum_{i=1}^5 (s_i - \bar{s})(v_i - \bar{v}) = 80$$

* المطلوب : (١) جد معادلة خط الانحدار الخطي البسيط للتنبؤ بقيمة (ص) اذا علمت قيم (س)
(٢) قدر أرباح شركة رأس مالها س = ١٠٠ الف دينار .

(٦) اذا كان $\bar{s} = 8 , \quad \bar{v} = 10 , \quad \sum_{i=1}^5 (s_i - \bar{s})^2 = 240 ,$

$$\sum_{i=1}^5 (s_i - \bar{s})(v_i - \bar{v}) = 120$$

* المطلوب : (١) جد معادلة خط الانحدار . (٢) قدر قيمة (ص) اذا كانت س = ٤ .

٧) توصل مجموع من الباحثين في دراسة علامات الطالب مقارنة بعدد الساعات الدراسية يومياً إلى معادلة خط الانحدار الخطي للعلاقة بين عدد ساعات الدراسة اليومي (س) و معدل الطالب (ص)

$$\text{فكانت } \hat{ص} = ١٢ + ٣س$$

* المطلوب :

- ١) أوجد قيمة (أ) و (ب)
- ٢) قَدِّر معدل الطلاب إذا كانت ساعات الدراسة اليومية هي (٥) ساعات
- ٣) اذا كانت قيمة (ص) = ٣٠ عند س = ٧ ، فأوجد الخطأ في التنبؤ .

٩) يبين الجدول الآتي نتائج دراسة أجريت لمعرفة تأثير عدد ساعات العمل المتواصل في دقة العمل ،

من حيث الأخطاء التي يرتكبها الموظف :

٢٤	٢٠	٢٠	١٦	١٢	١٢	٨	٨	عدد ساعات العمل (س)
١٦	١٦	١٢	٨	١٠	٦	٦	٦	عدد الأخطاء (ص)

* المطلوب : (١) جد معادلة خط الانحدار .

(٢) قَدِّر عدد الأخطاء اذا كانت عدد ساعات العمل (١٠) ساعات .

تم بحمد الله