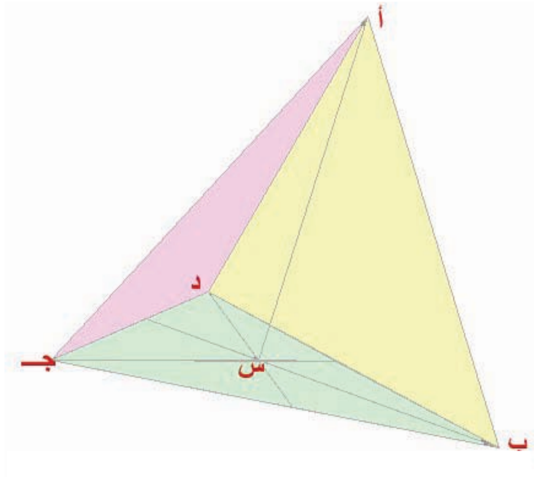
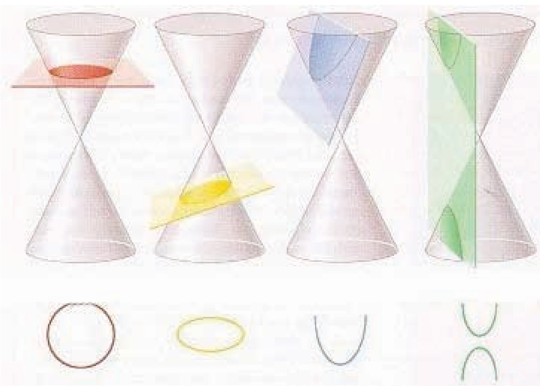
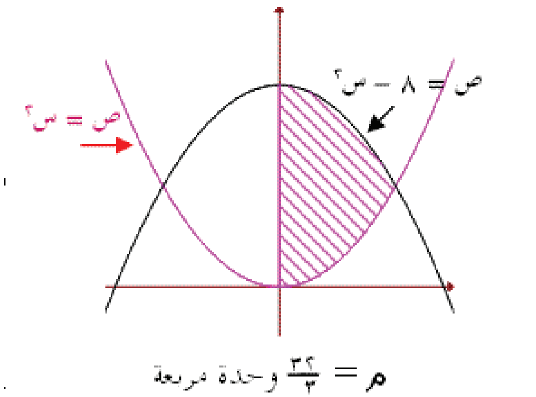
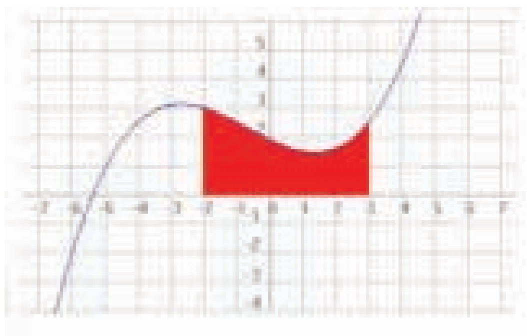
المتميز في الرياضيات

المستوى الرابع - توجيهي علمي









الاستاذ : محمود الجزار

٠٧٨٦٩٠٩١٢١ - ٠٧٩٧٢٦٦٣٩٩

وقل اعملوا فسيرى الله عملكم ورسوله والمؤمنون

هذه الدوسية تحتوي على

شرح وافي للمستوى الرابع

اسئلة مقترحة في نهاية كل وحدة

نماذج اسئلة امتحانات وزارة لسنوات سابقة

محمود الجزار

الوحدة الرابعة

التكامل

التكـامل

العملية العكسية للاشتقاق بحيث يطلب الاقتران الاصلي من المشتقة ويسمى الاقتران البدائي حيث $م'(س) = ق(س)$

تعريف

اذا كان ق اقترانا متصلاً على مجاله ، فإن م(س) اقتران بدائي لـ ق(س) اذا كان :

$م'(س) = ق(س)$

امثلة على الاقتران البدائي

(١) بين أن م الذي قاعدته $م(س) = ٢س^٢ + ١$ إقترانا بدائيا للاقتران ق الذي قاعدته $ق(س) = ٤س$.

الحل :- نجد $م'(س) = ٤س$

$م'(س) = ق(س)$ ∴ م اقتران بدائي لـ ق

(٢) جد الاقتران البدائي للاقتران $ق(س) = جتاس$

الحل: ماهو الاقتران الذي مشتقته جتاس

$م(س) = جاس + جـ$

(٣) جد إقترانا بدائيا للاقتران الذي قاعدته $ق(س) = ٤س^٣ + قا^٢س$

(٤) اذا كان $م(س) = س^٣ - س^٢ + ٥س + جـ$ اقتران بدائي للاقتران ق(س) نجد ق(٢)

الحل : $م'(س) = ق(س) = ٣س^٢ - ٢س + ٥$

$ق(٢) = ٣(٢)^٢ - ٢(٢) + ٥ = ١٣$

(٥) جد الاقتران البدائي للاقتران $ق(س) = ٢س + ٦$

(٦) بين ان $م(س) = \sqrt{س^٢ + ٦س}$ هو اقتران بدائي للاقتران ق $= \frac{٢س + ٣}{\sqrt{س^٢ + ٦س}}$

الحل: $م'(س) = \frac{٢س + ٦}{٢\sqrt{س^٢ + ٦س}} = \frac{س + ٣}{\sqrt{س^٢ + ٦س}} = ق$

(٧) جد اقتران بدائي م للاقتران $ل(س) = \frac{-١}{س^٢}$ ، س ≠ ٠ ، م(٣) = ١

الحل : $م(س) = \frac{١}{س} + جـ$

$م(٣) = \frac{١}{٣} + جـ = ١ \Leftarrow جـ = \frac{٢}{٣}$

$م(س) = \frac{١}{س} + \frac{٢}{٣}$

يسمى الاقتران البدائي بالتكامل غير المحدود لـ ق(س) بالنسبة الى س ويرمز له على النحو الاتي

$\int ق(س) . دس$ ، ويقرأ بـ تكامل ق(س) دال س ويعني تكامل ق بالنسبة الى س .

قواعد التكامل غير المحدود

١) $\int$ أ . دس = أ س + جـ حيث أ ثابت

٢) $\int$ س^{ن} . دس = $\frac{س^{ن+١}}{ن+١}$ + جـ

٣) $\int$ جاس . دس = − جتاس + جـ

٤) $\int$ جتاس . دس = جاس + جـ

٥) $\int$ قاس ظاس . دس = قاس + جـ

٦) $\int$ قتاس ظتاس . دس = − قتاس + جـ

٧) $\int$ قا^{٢}س . دس = ظاس + جـ

٨) $\int$ قتا^{٢}س . دس = − ظتاس + جـ

متطابقات وملاحظات هامة عزيزي الطالب يجب مراعاتها

جتا^{٢}س + جا^{٢}س = ١

ظا^{٢}س = قا^{٢}س − ١

ظتا^{٢}س = قتا^{٢}س − ١

جا^{٢}س = $\frac{١}{٢}$ (١ − جتا٢س)

جتا^{٢}س = $\frac{١}{٢}$ (١ + جتا٢س)

٢ جاس جتاس = جا٢س

جتا^{٢}س − جا^{٢}س = جتا٢س

يجب تجهيز الجذور الى أسس نسبية

يجب فك الاقواس في حالة الضرب

يجب توزيع البسط على المقام إن أمكن

نضرب بالمرافق عند وجود ١ ± جاس ، ١ ± جتاس

نحاول رفع المقام إن أمكن

جتاأ جتاب = $\frac{١}{٢}$ [جتا(أ+ب) + جتا(أ−ب)]

جاأ جاب = $\frac{١}{٢}$ [جتا(أ−ب) − جتا(أ+ب)]

جاأ جتاب = $\frac{١}{٢}$ [جا(أ−ب) + جا(أ+ب)]

امثلة على التكامل المحدود

جد التكاملات الاتية

(١) $\int ٢ \,.\, دس$

الحل: $\int ٢ .دس = ٢س + ج$

(٢) $\int دس$

الحل:- $\int دس = س + ج$

(٣) $\int (س^{٢} + ٢س - ٧) \,.\, دس$

الحل:- $\int (س^{٢} + ٢س - ٧).دس$

$= \frac{س^{٣}}{٣} + \frac{٢س^{٢}}{٢} - ٧س + ج$

(٤) $\int ص \,.\, دص$

الحل:- $\int ص.دص = \frac{ص^{٢}}{٢} + ج$

(٥) $\int (س^{٣} + ٣س^{٢} + ٢س + ٦).دس$

الحل:

$= \frac{س^{٤}}{٤} + \frac{٣س^{٣}}{٣} + \frac{٢س^{٢}}{٢} + ٦س + ج$

$\frac{س^{٤}}{٤} + س^{٣} + س^{٢} + ٦س + ج$

(٦) $\int \frac{١}{س^{٢}} . دس$ يجب التجهيز أولاً

الحل:-

$\int س^{-٢} . دس = \frac{س^{-١}}{-١} + ج$

$= \frac{-١}{س} + ج$

(٧) $\int \sqrt{س} \,.\, دس$ يجب التجهيز

الحل: $\int س^{\frac{١}{٢}} . دس$

$= \frac{س^{\frac{١}{٢}+١}}{\frac{١}{٢}+١} + ج$

$= \frac{س^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + ج = \frac{٢\sqrt{س^{٣}}}{٣} + ج$

(٨) $\int (س^{٤} + ١) \,.\, دس$

(٩) $\int (١ + ظا^{٢}س) \,.\, دس$

الحل: يجب استخدام متطابقة

$\int قا^{٢}س \,.\, دس = ظاس + ج$

١٠ $\int \frac{س^{٣} + ٥س^{٢} - ٤}{س^{٢}} . د س$

الحل: يجب توزيع البسط على المقام

$\int \left(\frac{س^{٣}}{س^{٢}} + \frac{٥س^{٢}}{س^{٢}} - \frac{٤}{س^{٢}}\right) . د س = \int (س + ٥ - ٤ س^{-٢}) د س$

$= \frac{س^{٢}}{٢} + ٥ س - \frac{٤ س^{-١}}{-١} + ج$

$= \frac{١}{٢} س^{٢} + ٥ س + \frac{٤}{س} + ج$

١١ $\int \frac{٢س^{٢} - ٣س}{\sqrt{س}} . د س$ يجب توزيع

الحل: $\int \frac{٢س^{٢}}{س^{\frac{١}{٢}}} - \frac{٣س}{س^{\frac{١}{٢}}} . د س$

$= \int (٢ س^{\frac{٣}{٢}} - ٣ س^{\frac{١}{٢}}) د س$

$= \frac{٢ س^{\frac{٥}{٢}}}{\frac{٥}{٢}} - \frac{٣ س^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + ج = \frac{٤}{٥} \sqrt{س^{٥}} - ٢ \sqrt{س^{٣}} + ج$

١٢ $\int \frac{د س}{٤} .$

الحل: $\frac{س}{٤} + ج$

١٣ $\int (س^{٢} - ٢)^{٢} د س$

الحل: يجب فك الأقواس

$= \int (س^{٤} - ٤س^{٢} + ٤) . د س$

$= \frac{١}{٥} س^{٥} - \frac{٤}{٣} س^{٣} + ٤ س + ج$

١٤ $\int (٣س^{٢} - ١)^{٢} . د س$

١٥ $\int (\frac{١}{٢} س - ٥)^{٧} . د س$

الحل: في حالة ان يكون ما داخل القوس خطي نكامل القوس فقط و بعدها نقسم على معامل س

$\int (\frac{١}{٢} س - ٥)^{٧} . د س = \frac{(\frac{١}{٢} س - ٥)^{٨}}{٨ \times \frac{١}{٢}} = \frac{١}{٤} (\frac{١}{٢} س - ٥)^{٨} + ج$

١٦ $\int (٢س - ١)^{٦} . د س$

الحل: ما داخل القوس خطي

$\int (٢س - ١)^{٦} . د س = \frac{(٢س - ١)^{٧}}{٧ \times ٢} + ج$

$= \frac{١}{١٤} (٢س - ١)^{٧} + ج$

١٧ $\int \frac{س - ١}{\sqrt[٣]{س}} . د س$

١٨ $\int \frac{س^{٢} - ٥س + ٦}{س - ٣} . د س$

الحل: لايجوز التوزيع، نحلل البسط

$\int \frac{(س - ٢)\cancel{(س - ٣)}}{\cancel{(س - ٣)}} . د س$

$= \int (س - ٢) . د س = \frac{س^{٢}}{٢} - ٢س + ج$

١٩ $\int \left(\text{٣} - \pi\,\text{س}^{٢} + \frac{\text{١}}{\text{س}^{٣}}\right)\,.\,\text{د س}$

٢٠ $\int (\text{قا س ظا س} + \text{١})\,.\,\text{د س}$

الحل: $= -\,\text{قتا س} + \text{س} + \text{ج}$

٢١ $\int \frac{\text{١}}{\text{جا}^{٢}\text{س}}\,.\,\text{د س}$ يجب التجهيز

متطابقة مقلوب قتا²س

الحل: $\int \text{قتا}^{٢}\text{س}\,.\,\text{د س}$

$= -\,\text{ظتا س} + \text{ج}$

٢٢ $\int \text{قا}^{٢}\,\text{٣س}\,.\,\text{د س}$ يجب الانتباه للزاوية

الحل: تكامل عادي ثم نقسم على معامل س في حالة الزاوية الخطية

$\int \text{قا}^{٢}\,\text{٣س}\,.\,\text{د س} = \frac{\text{ظا ٣س}}{\text{٣}} + \text{ج}$

٢٣ $\int (\text{قتا ٥س ظتا ٥س})\,.\,\text{د س}$

الحل: $\int (\text{قتا ٥س ظتا ٥س})\,.\,\text{د س}$

$= \frac{-\,\text{قتا ٥س}}{\text{٥}} + \text{ج}$

٢٤ $\int \text{٢س} - \text{٣}\,\text{ظتا}^{٢}\text{س}\,.\,\text{د س}$

متطابقة

الحل: $\int \text{٢س} - \text{٣}(\text{قتا}^{٢}\text{س} - \text{١})\,.\,\text{د س}$ ؛ $\text{ظتا}^{٢}\text{س} = \text{قتا}^{٢}\text{س} - \text{١}$

$= \frac{\text{٢س}^{٢}}{\text{٢}} + \text{٣ ظتا س} + \text{٣س} + \text{ج}$

$= \text{س}^{٢} + \text{٣ ظتا س} + \text{٣س} + \text{ج}$

٢٥ $\int (\text{جا س} - \text{٣ جتا س})\,.\,\text{د س}$

٢٦ $\int (\text{قا}^{٢}\text{س} - \text{ظا}^{٢}\text{س})\,.\,\text{د س}$

٢٧ $\int (\text{قتا س ظتا س} + \text{٣س}^{٢} - \text{٥})\,.\,\text{د س}$

٢٨ $\int \frac{\text{د س}}{\text{١} + \text{جا س}}$ ضرب بالمرافق

الحل:

$= \int \frac{\text{د س}}{\text{١} + \text{جا س}} \times \frac{\text{١} - \text{جا س}}{\text{١} - \text{جا س}}$

$= \int \frac{\text{١} - \text{جا س}}{\text{١} - \text{جا}^{٢}\text{س}}\,.\,\text{د س} = \int \frac{\text{١} - \text{جا س}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}\,.\,\text{د س}$

بتوزيع البسط على المقام

$= \int \frac{\text{١}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}} - \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س جتا س}}\,.\,\text{د س}$

$= \int (\text{قا}^{٢}\text{س} - \text{ظا س قا س})\,.\,\text{د س}$

$= \text{ظا س} - \text{قا س} + \text{ج}$

٢٩ $\int \text{جا}^2 ٥\text{س} \,.\, \text{د س}$

متطابقة: $\text{جا}^2 ٥\text{س} = \frac{١}{٢}(١ - \text{جتا} ١٠\text{س})$

الحل:

$\int (\frac{١}{٢} - \frac{١}{٢}\,\text{جتا} ١٠\text{س}) \,.\, \text{د س}$

$= \frac{١}{٢}\text{س} - \frac{١}{٢}\,\frac{\text{جا} ١٠\text{س}}{١٠} + \text{ج}$

$= \frac{١}{٢}\text{س} - \frac{\text{جا} ١٠\text{س}}{٢٠} + \text{ج}$

٣٠ $\int \text{جتا}^2(٣ - \text{س}) \,.\, \text{د س}$

متطابقة: $\text{جتا}^2(٣ - \text{س}) = \frac{١}{٢}(١ + \text{جتا}(٦ - ٢\text{س}))$

الحل:

$\int \frac{١}{٢}(١ + \text{جتا}(٦ - ٢\text{س}))\ \text{د س}$ ← الزاوية خطية

$= \frac{١}{٢}(\text{س} + \frac{\text{جا}(٦ - ٢\text{س})}{-٢}) + \text{ج}$

٣١ $\int \text{ظتا}^2 ٣\text{س} \,.\, \text{د س}$

متطابقة: $\text{ظتا}^2 ٣\text{س} = \text{قتا}^2 ٣\text{س} - ١$

الحل: $\int (\text{قتا}^2 ٣\text{س} - ١) \,.\, \text{د س}$

$= -\frac{\text{ظتا} ٣\text{س}}{٣} - \text{س} + \text{ج}$

٣٢ $\int (\text{جا س} + \text{جتا س})^2\ \text{د س}$ بفك القوس

$= \int (\text{جا}^2\text{س} + ٢\,\text{جا س جتا س} + \text{جتا}^2\text{س}) \,.\, \text{د س}$

$= \int (١ + \text{جا} ٢\text{س}) \,.\, \text{د س}$

$= \text{س} + \frac{-\text{جتا} ٢\text{س}}{٢} + \text{ج} = \text{س} - \frac{\text{جتا} ٢\text{س}}{٢} + \text{ج}$

٣٣ $\int \text{ظا}^2 ٣\text{س} \,.\, \text{د س}$

٣٤ $\int \frac{\text{جتا} ٢\text{س}}{\text{جا}^2\text{س}\ \text{جتا}^2\text{س}} \,.\, \text{د س}$

متطابقة: $\text{جتا} ٢\text{س} = \text{جتا}^2\text{س} - \text{جا}^2\text{س}$

الحل: $\int \frac{\text{جتا}^2\text{س} - \text{جا}^2\text{س}}{\text{جا}^2\text{س}\ \text{جتا}^2\text{س}} \,.\, \text{د س}$

$= \int \frac{\text{جتا}^2\text{س}}{\text{جا}^2\text{س}\ \text{جتا}^2\text{س}} - \frac{\text{جا}^2\text{س}}{\text{جا}^2\text{س}\ \text{جتا}^2\text{س}} = \int (\text{قتا}^2\text{س} - \text{قا}^2\text{س}) \,.\, \text{د س}$

$= -\text{ظتا س} - \text{ظا س} + \text{ج}$

٣٥ $\int \frac{\text{جتا}^2\text{س} - ٥}{١ - \text{جا}^2\text{س}} \,.\, \text{د س}$

٣٦ إذا كان $\text{قَ(س)} = \text{س}^3 - \text{س}^2 + ١$ اوجد $\text{ق}(٣) - \text{ق}(١)$

الحل: $\int \text{قَ(س)} \,.\, \text{د س} = \text{ق(س)} + \text{ج}$

$\int \text{قَ(س)} = \int (\text{س}^3 - \text{س}^2 + ١) \,.\, \text{د س}$

$\text{ق(س)} = \frac{\text{س}^4}{٤} - \frac{\text{س}^3}{٣} + \text{س} + \text{ج}$

$\text{ق}(٣) - \text{ق}(١) = (\frac{٨١}{٤} - \frac{٢٧}{٣} + ٣ + \text{ج}) - (\frac{١}{٤} - \frac{١}{٣} + ١ + \text{ج})$

$= \frac{٨١}{٤} - \frac{١}{٤} - \frac{٢٧}{٣} + \frac{١}{٣} + ٣ - ١ + \text{ج} - \text{ج}$

$= \frac{٨٠}{٤} - \frac{٢٦}{٣} + ٢ = ٢٠ - \frac{٢٦}{٣} + ٢ = \frac{٤٠}{٣}$

٣٧ $\int (١ + \text{جتا س})^2 \,.\, \text{د س}$

الحل: $\int (١ + ٢\,\text{جتا س} + \text{جتا}^2\text{س}) \,.\, \text{د س}$

$= \int (١ + ٢\,\text{جتا س} + \frac{١}{٢}(١ + \text{جتا} ٢\text{س})) \,.\, \text{د س}$

$= (١ + ٢\,\text{جا س} + \frac{١}{٢}(\text{س} + \frac{\text{جا} ٢\text{س}}{٢}) + \text{ج}$

قواعد التكامل المحدود

(١) $\int_{أ}^{ب} ك \cdot د س = ك(ب - أ)$ ك: عدد ثابت

(٢) $\int_{أ}^{ب} (ق(س) \pm هـ(س)) \cdot د س = \int_{أ}^{ب} ق(س) \cdot د س + \int_{أ}^{ب} هـ(س) \cdot د س$

خاصية التوزيع

(٣) $\int_{أ}^{ب} ق(س) \cdot د س = - \int_{ب}^{أ} ق(س) \cdot د س$

خاصية قلب الحدود

(٤) $\int_{أ}^{جـ} ق(س) \cdot د س = \int_{أ}^{ب} ق(س) \cdot د س + \int_{ب}^{جـ} ق(س) \cdot د س$

خاصية الإضافة

امثلة على التكامل المحدود

(١) $\int_{-٢}^{٣} س^{٢} \cdot د س$

الحل: $\left[\frac{س^{٣}}{٣}\right]_{-٢}^{٣} = \left(\frac{٢٧}{٣}\right) - \left(\frac{-٨}{٣}\right) = \frac{٣٥}{٣}$

(٢) $\int_{-٢}^{١} س^{٥} \cdot د س$

الحل: $\left[\frac{س^{٦}}{٦}\right]_{-٢}^{١} = \left(\frac{١}{٦}\right) - \left(\frac{+٦٤}{٦}\right) = \frac{-٦٣}{٦} = \frac{-٢١}{٢}$

(٣) $\int_{١}^{٥} ٢ \cdot د س$

الحل: $٢(٥ - ١) = ٤ \times ٢ = ٨$

(٤) $\int_{-٢}^{١} س^{٣} \cdot د س$

(٥) $\int_{٢}^{٥} جـ \cdot د س = -١٢$ فما قيمة الثابت جـ ؟

الحل: $جـ(٥ - ٢) = -١٢$

$٣جـ = -١٢$

$جـ = -٤$

(٦) $\int_{١}^{٢أ} ٣ \cdot د س = ٦$ أوجد قيمة أ.

الحل: $٣(٢أ - ١) = ٦$

$٦أ - ٣ = ٦$

$٦أ = ٩ \Leftarrow أ = \frac{٣}{٢}$

(٧) $\int_{\frac{\pi}{٣}}^{\frac{\pi}{٢}} جا س \cdot د س$

الحل: $- جتا س \Big]_{\frac{\pi}{٣}}^{\frac{\pi}{٢}} = (-جتا \frac{\pi}{٢}) - (-جتا \frac{\pi}{٣})$

$= ٠ + \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$

(٨) إذا كانت $\int_{أ+١}^{٢+٣أ} ٥ \cdot د س = ٤٠$ جد قيمة أ

الحل: $٥((٢+٣أ) - (أ+١)) = ٤٠$

$= ٥(٢ + ٣أ - ١ - أ) = ٤٠$

$= ٥(١ + ٢أ) = ٤٠$

$١ + ٢أ = ٨$

$٢أ = ٧$

$أ = \frac{٧}{٢}$

٩ $\int_{٠}^{١} (\text{س}^{٢} + ٣\text{س})\,.\,\text{د س}$

الحل: $\left[\frac{\text{س}^{٣}}{٣} + \frac{٣\text{س}^{٢}}{٢}\right]_{٠}^{١}$

$= (\frac{١}{٣} + \frac{٣}{٢}) - (٠) = \frac{١١}{٦}$

١٠ إذا كان $\int_{١}^{٢} ٢\text{ق}(\text{س})\,.\,\text{د س} = ١٠$ فجد $\int_{١}^{٢} (\text{ق}(\text{س}) + ٦)$

الحل: $\int_{١}^{٢} ٢\text{ق}(\text{س})\,.\,\text{د س} = ١٠ \Leftarrow \int_{١}^{٢} \text{ق}(\text{س})\,.\,\text{د س} = ٥$

$\int_{١}^{٢} (\text{ق}(\text{س}) + ٦)\,.\,\text{د س} = \int_{١}^{٢} \text{ق}(\text{س}) + ٦(٢-١)$

$= ٥ + ٦ = ١١$

١١ إذا كان $\int_{٢}^{٤} (٣\text{ق}(\text{س}) + ٢\text{س})\,.\,\text{د س} = ٥$

فجد $\int_{٤}^{٢} (\text{ق}(\text{س}) + ٣)\,.\,\text{د س}$

١٢ $\int_{٣}^{٣} (\text{س}^{٣} - ٤)^{٥}\,.\,\text{د س}$

الحل: بما أن حدود التكامل متشابهة فإن

$\int_{٣}^{٣} (\text{س}^{٣} - ٤)^{٥}\,.\,\text{د س} = \text{صفر}$

١٣ $\int_{١}^{٩} ٢\sqrt{\text{س}}\,.\,\text{د س}$

الحل: $\int_{١}^{٩} ٢(\text{س})^{\frac{١}{٢}}\,.\,\text{د س} = ٢\left[\frac{\text{س}^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}}\right]_{١}^{٩}$

$= \frac{٤}{٣}\left[\sqrt{\text{س}^{٣}}\right]_{١}^{٩}$

$= \frac{٤}{٣}\left((\sqrt{٩^{٣}}) - (\sqrt{١^{٣}})\right)$

$= \frac{٤}{٣}(٢٧ - ١) = \frac{٤ \times ٢٦}{٣} = \frac{١٠٤}{٣}$

١٤ $\int^{\frac{\pi}{٢}} (\text{جتا س} - \text{جا س})\,.\,\text{د س}$

١٥ $\int_{١}^{٢} ٢\text{م}\,.\,\text{د س} = -٣٠$ جد قيمة م

١٦ إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س} & ، ٠ \le \text{س} \le ٢ \\ \text{س}^{٢} + ١ & ، ٢ < \text{س} \le ٥ \end{cases}$

جد $\int_{٠}^{٥} \text{ق}(\text{س})\,.\,\text{د س}$

الحل: $\int_{٠}^{٥} \text{ق}(\text{س})\,.\,\text{د س} = \int_{٠}^{٢} \text{ق}(\text{س})\,.\,\text{د س} + \int_{٢}^{٥} \text{ق}(\text{س})\,.\,\text{د س}$

$= \int_{٠}^{٢} ٢\text{س}\,.\,\text{د س} + \int_{٢}^{٥} \text{س}^{٢} + ١\,.\,\text{د س} = \left[\frac{\cancel{٢}\text{س}^{٢}}{\cancel{٢}}\right]_{٠}^{٢} + \left[\frac{\text{س}^{٣}}{٣} + \text{س}\right]_{٢}^{٥}$

$= ٤ + (\frac{١٢٥}{٣} + ٥) - (\frac{٨}{٣} + ٢) = ٤ + \frac{١٢٥}{٣} - \frac{٨}{٣} + ٣ = \frac{١٣٨}{٣}$

١٧ $\int_{٣}^{٣} \sqrt{\text{س}^{٢} + ١}\,.\,\text{د س}$

١٨ ليكن $\text{ق}(\text{س}) = |\text{س} + ١|$ ، $\text{س} \in [-٢، ٣]$

جد $\int_{-٢}^{٣} \text{ق}(\text{س})\text{د س}$

الحل: نعيد التعريف

$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} -\text{س} - ١ & ، -٢ \le \text{س} < -١ \\ \text{س} + ١ & ، -١ \le \text{س} \le ٣ \end{cases}$

$\int_{-٢}^{٣} \text{ق}(\text{س})\,.\,\text{د س} = \int_{-٢}^{-١} \text{ق}(\text{س}) + \int_{-١}^{٣} \text{ق}(\text{س})$

$= \int_{-٢}^{-١} (-\text{س} - ١)\,.\,\text{د س} + \int_{-١}^{٣} (\text{س} + ١)\,.\,\text{د س}$

$= \left[\frac{-\text{س}^{٢}}{٢} - \text{س}\right]_{-٢}^{-١} + \left[\frac{\text{س}^{٢}}{٢} + \text{س}\right]_{-١}^{٣}$

$= (\frac{-١}{٢} + ١) - (\frac{-٤}{٢} + ٢) + (\frac{٩}{٢} + ٣) - (\frac{١}{٢} - ١)$

$= \frac{١}{٢} - ٠ + ٧,٥ + \frac{١}{٢} = ٨,٥$

(١٩) $\int_{1}^{5} [\text{س} + 4] \, .\,\text{دس}$

الحل:

نعيد التعريف

$\bar{\text{ق}}(\text{س}) = \begin{cases} 5 ,\ 1 \le \text{س} < 2 \\ 6 ,\ 2 \le \text{س} < 3 \\ 7 ,\ 3 \le \text{س} < 4 \\ 8 ,\ 4 \le \text{س} < 5 \end{cases}$

$\int_{1}^{2} 5 \,.\,\text{دس} + \int_{2}^{3} 6 \,.\,\text{دس} + \int_{3}^{4} 7 \,.\,\text{دس} + \int_{4}^{5} 8 \,.\,\text{دس}$

$= 5 + 6 + 7 + 8 = 26$

(٢٠) إذا كان $\int_{1}^{\text{ج}} [\tfrac{1}{2}\text{س} + 1] \,.\,\text{دس} = 17$ فجد ج حيث ج > ١

الحل:

نعيد التعريف

$\begin{array}{cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \end{array}$

$\int_{1}^{2} 1 \,\text{دس} + \int_{2}^{4} 2 \,\text{دس} + \int_{4}^{6} 3 \,.\,\text{دس} + \int_{6}^{\text{ج}} 4 \,\text{دس} = 17$

$= 1 + 4 + 6 + 4(\text{ج} - 6) = 17$

$4\text{ج} - 24 = 6 \Leftarrow 4\text{ج} = 30$

$\text{ج} = 7.5$

(٢١) $\int_{2}^{\text{ج}} [\tfrac{1}{3}\text{س} + 2] = 20$ جد قيمة ج

(٢٢) $\int_{2}^{5} |2\text{س} - 10| \,.\,\text{دس}$

(٢٣) $\int_{2}^{4} [\text{س} + 2] \,.\,\text{دس}$ نعيد التعريف

$\bar{\text{ق}}(\text{س}) = \begin{cases} 4 ,\ 2 \le \text{س} < 3 \\ 5 ,\ 3 \le \text{س} < 4 \end{cases}$

$\int_{2}^{4} \bar{\text{ق}}(\text{س}) \,.\,\text{دس} = \int_{2}^{3} 4 \,\text{دس} + \int_{3}^{4} 5 \,\text{دس}$

$= 4 + 5 = 9$

(٢٤) $\int_{1}^{3} [1 - \text{س}] \,.\,\text{دس}$ نعيد التعريف

$\bar{\text{ق}}(\text{س}) = \begin{cases} -1 ,\ 1 < \text{س} \le 2 \\ -2 ,\ 2 < \text{س} \le 3 \end{cases}$

الحل:

$\int_{1}^{3} \bar{\text{ق}}(\text{س}) \,.\,\text{دس} = \int_{1}^{2} -1 \,\text{دس} + \int_{2}^{3} -2 \,\text{دس}$

$= -1 - 2 = -3$

(٢٥) $\int_{1}^{5} [\tfrac{1}{2}\text{س} + 1] \,.\,\text{دس}$

(٢٦) $\int_{0}^{\pi} |\text{جتا س}| \,.\,\text{دس}$ نعيد التعريف

$\bar{\text{ق}}(\text{س}) = \begin{cases} \text{جتا س} ,\ 0 \le \text{س} \le \frac{\pi}{2} \\ -\text{جتا س} ,\ \frac{\pi}{2} \le \text{س} \le \pi \end{cases}$

الحل:

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جتا س} \,.\,\text{دس} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\text{جتا س} \,.\,\text{دس}$

$= [\text{جا س}]_{0}^{\frac{\pi}{2}} + [-\text{جا س}]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = (1) - (0) + (0) - (-1)$

$= 1 + 1 = 2$

(٢٧) $\int_{0}^{2\pi} |\text{جا س}| \,.\,\text{دس}$

(٢٨) $\int_{0}^{4} \sqrt{\text{س}^2 - 4\text{س} + 4} \,.\,\text{دس}$ ، س $\in [0 , 4]$

الحل ، $\int_{0}^{4} \sqrt{(\text{س} - 2)^2} = \int_{0}^{4} |\text{س} - 2| \,.\,\text{دس}$

بإعادة التعريف

$= \int_{0}^{2} (2 - \text{س}) \,.\,\text{دس} + \int_{2}^{4} (\text{س} - 2) \,.\,\text{دس}$

$= [2\text{س} - \frac{\text{س}^2}{2}]_{0}^{2} + [\frac{\text{س}^2}{2} - 2\text{س}]_{2}^{4}$

$= (4 - 2) - (0) + (8 - 8) - (2 - 4)$

$= 2 + 2 = 4$

خاصية المقارنة

اذا كان ق ، هـ إقترانين قابلين للتكامل على [م ، ب] وكان ق(س) ≤ هـ(س) لكل س ∈ [م ، ب] فإن $\int_{م}^{ب}$ ق(س).دس ≤ $\int_{م}^{ب}$ هـ(س).دس

(١) دون إجراء تكامل ما إشارة $\int_{١}^{٢}$ س^{٣}.دس

الحل: افرض ان ق(س) = س^{٣} ∈ [١ ، ٢]

ندرس إشارة ق(س) على الفترة [١ ، ٢]

ق(س) > صفر لكل س ∈ [١ ، ٢]

وحسب القاعدة $\int_{١}^{٢}$ ق(س).دس > ٠

اي ان $\int_{١}^{٢}$ س^{٣}.دس > ٠ . وهذا يعني ان إشارة التكامل موجبة

(٢) ليكن ق(س) = $\frac{هـ^{س} + ٢}{س^{٢} + ٤}$ ، س ∈ [٠ ، ٢]

ما إشارة $\int_{٠}^{٢}$ ق(س).دس ؟

الحل: هـ^{س} + ٢ > ٠ لكل س ∈ [٠ ، ٢]

س^{٢} + ٤ > ٠ لكل س ∈ [٠ ، ٢]

اذن $\frac{هـ^{س} + ٢}{س^{٢} + ٤}$ > ٠ لكل س ∈ [٠ ، ٢]

وبناء على ذلك فإن إشارة $\int_{٠}^{٢}$ ق(س).دس موجبة

(٣) بين أن ٠ ≤ $\int_{-١}^{١} \sqrt{١ - س^{٢}}$.دس ≤ ٢

الحل: افرض ان ق(س) = $\sqrt{١ - س^{٢}}$ ، س ∈ [-١ ، ١]

٠ ≤ ق(س) ≤ ١ بإجراء التكامل

$\int_{-١}^{١}$ ٠.دس ≤ $\int_{-١}^{١}$ ق(س).دس ≤ $\int_{-١}^{١}$ ١.دس

٠ ≤ $\int_{-١}^{١}$ ق(س).دس ≤ ١(١ - -١)

٠ ≤ $\int_{-١}^{١}$ ق(س).دس ≤ ٢

٠ ≤ $\int_{-١}^{١} \sqrt{١ - س^{٢}}$.دس ≤ ٢

(٤) اذا كان ق(س) ∈ [١ ، ٤] ∈ ح حيث

٢ ≤ ق(س) ≤ ٥ جد

أ) اكبر قيمة للمقدار $\int_{١}^{٤}$ (٣ + ٢ق(س)).دس

٢ ≤ ق(س) ≤ ٥ × ٢

٤ ≤ ٢ق(س) ≤ ١٠ + ٣

٧ ≤ ٣ + ٢ق(س) ≤ ١٣ $\int_{١}^{٤}$

$\int_{١}^{٤}$ ٧.دس ≤ $\int_{١}^{٤}$ (٣ + ٢ق(س)).دس ≤ $\int_{١}^{٤}$ ١٣.دس

٢١ ≤ $\int_{١}^{٤}$ (٣ + ٢ق(س)).دس ≤ $\underline{٣٩}$ اكبر قيمة

ب) اكبر قيمة للمقدار $\int_{١}^{٤}$ (٣ - ٢ق(س)).دس

٢ ≤ ق(س) ≤ ٥ × -٢

-٤ ≥ -٢ق(س) ≥ -١٠ + ٣

-١ ≥ ٣ - ٢ق(س) ≥ -٧ $\int_{١}^{٤}$

$\int_{١}^{٤}$ -١ ≥ $\int_{١}^{٤}$ (٣ - ٢ق(س)) ≥ $\int_{١}^{٤}$ -٧

$\underline{-٣}$ ≥ $\int_{١}^{٤}$ (٣ - ٢ق(س)) دس ≥ -٢١

اكبر قيمة

جـ) ما قيمة ن ، م حيث ن ≤ $\int_{١}^{٤}$ (ق(س) - ٣).دس ≤ م

(٥) اذا كان ق(س) ∈ [١ ، ٣] وكان ق(س) ≤ ٦ ما اقل قيمة للمقدار $\int_{١}^{٣}$ (٢ق(س) - ٤).دس

العلاقة بين التكامل و التفاضل

$\frac{\text{د}}{\text{د س}}\left(\int \text{ق(س)}\,.\,\text{د س}\right) = \text{ق(س)}$

$\frac{\text{د}}{\text{د س}}\left(\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س)}\,.\,\text{د س}\right) = \text{صفر}$

(١) جد $\frac{\text{د}}{\text{د س}}\left(\text{س}^{٢}\,.\int_{٢}^{٢} ٣\text{س}\,.\,\text{د س}\right)$

الحل:

$\frac{\text{د}}{\text{د س}}\left(\text{س}^{٢} \times \text{صفر}\right)$

$= \text{صفر}$

(٢) جد $\frac{\text{د}}{\text{د س}}\left(\text{س}^{٣} + \int ٢\text{س}^{٢}.\text{د س} - \int_{٢}^{٢} ٧.\text{د س}\right)$

الحل:

$٣\text{س}^{٢} + ٢\text{س}^{٢} - \text{صفر} = ٥\text{س}^{٢}$

(٣) جد $\frac{\text{د}}{\text{د س}}\left(\int (\text{جتاس} - ٣\text{س}^{٢})\right).\text{د س}$

الحل: $= \text{جتاس} - ٣\text{س}^{٢}$

(٤) جد $\frac{\text{د}}{\text{د س}}\left(\int_{\text{ب}}^{\frac{\pi}{٤}} \frac{\text{د س}}{١+\text{ظا}^{٢}\text{س}} + ٣\text{س}\right)$

مشتقة الاقتران الاسى والاقتران اللوغاريتمى

الاقتران الاسي $\text{ق(س)} = \text{هـ}^{\text{س}}$ ، $\text{هـ} \approx ٢,٧٢$

الاقتران اللوغاريتمي $\text{ق(س)} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{ق(س)}} \Leftarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{هـ}^{\text{ق(س)}} \times \text{قَ(س)}$

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ق(س)} \Leftarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{قَ(س)}}{\text{ق(س)}}$

(١) اذا كان $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}^{٢}}$ جد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$

الحل: $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{هـ}^{\text{س}^{٢}} \times ٢\text{س}$

(٢) اذا كان $\text{ص} = \text{هـ}^{٣}$ جد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$

الحل $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{صفر}$ لأن $\text{هـ}^{٣}$ ثابت

(٣) اذا كان $\text{ص} = \text{لو س}^{٢}$ جد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$

الحل: $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢}} = \frac{٢}{\text{س}}$

(٤) اذا كان $\text{ص} = \text{هـ}^{٤\text{س}} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظاس} + \int^{\frac{\pi}{٤}} \frac{\text{د س}}{١+\text{جتا}^{٢}\text{س}}$ جد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ $|_{\text{س}=\frac{\pi}{٤}}$

الحل: $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{هـ}^{٤\text{س}} \times ٤ + \frac{\text{قا}^{٢}\text{س}}{\text{ظاس}} + \text{صفر}$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{هـ}^{٤\times\frac{\pi}{٤}} \times ٤ + \frac{\text{قا}^{٢}\frac{\pi}{٤}}{\text{ظا}\frac{\pi}{٤}}$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ٤\text{هـ}^{\pi} + ٢$

(٥) اذا كانت $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{ظاس}} + \text{أ}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{جتاس} + \int^{\frac{\pi}{٤}} \frac{\text{د س}}{١+\text{ظاس}}$ جد قيمة أ علمًا بأن $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\Big|_{\text{س}=\frac{\pi}{٤}} = ٢\text{هـ} + ١$

الحل: $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{هـ}^{\text{ظاس}} \times \text{قا}^{٢}\text{س} + \text{أ} \times \frac{-\text{جاس}}{\text{جتاس}} + ٠$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\Big|_{\text{س}=\frac{\pi}{٤}} = \text{هـ}^{١} \times ٢ + \text{أ} \times -١ = ٢\text{هـ} + ١$

$-\text{أ} = ٢\text{هـ} + ١ - ٢\text{هـ}$

$-\text{أ} = ١ \Leftarrow \text{أ} = -١$

(٦) اذا كان $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{جتاس}}$ ، جد $\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=\frac{\pi}{2}}$

(٧) $\text{ص} = \sqrt{\text{هـ}^{2\text{س}} + 2\text{س}}$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

(٨) $\text{ص} = P\,\text{هـ}^{2\text{س}} + \text{جا}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})$ ، حيث P ثابت وكان $\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=1} = \text{هـ}^{3} + 1$ ، نجد قيمة P .

الحل:

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2P\,\text{هـ}^{2\text{س}} + \text{جتا}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})\left(\frac{1}{\text{س}}\right)$$

$$\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=1} = 2P\,\text{هـ}^{2} + \text{جتا}(0)\left(\frac{1}{1}\right) = \text{هـ}^{3}+1$$

$$\Leftarrow 2P\,\text{هـ}^{2} + 1 = \text{هـ}^{3} + 1 \Leftarrow 2P\,\text{هـ}^{2} = \text{هـ}^{3}$$

$$P = \frac{\text{هـ}}{2}$$

(٩) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جا}^{2}\text{س}$ جد $\text{قَ}(\text{س})$.

الحل: $\text{قَ}(\text{س}) = \frac{2\,\text{جاس جتاس}}{\text{جا}^{2}\text{س}}$

$$\text{قَ}(\text{س}) = \frac{2\,\text{جتاس}}{\text{جاس}} \Leftarrow \text{قَ}(\text{س}) = 2\,\text{ظتاس}$$

(١٠) $\text{ص} = \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ}^{\text{س}^{2}}$ ، نجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل:

نجعل $\text{ص} = \text{س} \times \text{س}^{2}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ}$

$$\text{ص} = \text{س}^{3}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 3\text{س}^{2}$$

(١١) إذا كان $\text{ص} = \text{هـ}^{P\text{س}}$ نجد قيمة P التي تحقق المعادلة $\text{صً} - 5\,\text{صَ} + 6\,\text{ص} = 0$

الحل:

$\text{صَ} = P\,\text{هـ}^{P\text{س}} \longrightarrow (1)$

$\text{صً} = P^{2}\,\text{هـ}^{P\text{س}} \longrightarrow (2)$

نعوض (1) و (2) في المعادلة الاصلية

$$P^{2}\text{هـ}^{P\text{س}} - 5P\,\text{هـ}^{P\text{س}} + 6\,\text{هـ}^{P\text{س}} = 0 \quad \div\ \text{هـ}^{P\text{س}}$$

$$P^{2} - 5P + 6 = 0$$

$$(P-2)(P-3) = 0$$

$$P = 2 \ ،\ P = 3$$

(١٢) $\text{هـ}^{\text{س ص}} = \text{س} + \text{ص}$ اثبت أن

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{1 - \text{س ص} - \text{ص}^{2}}{\text{س}^{2} + \text{س ص} - 1}$$

(١٣) اذا كان $\text{س}\,\text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جاس} = \text{ص}^{2}$

جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$.

(١٤) اذا كان $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{جاس}+\text{جتاس})}$

جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

(١٥) اذا كان $\text{ص} = \text{جاس}\,\text{هـ}^{\text{س}}$ أثبت أن

$\text{صً} - 2\text{صَ} + 2\text{ص} = \text{صفر}$.

الحل: $\text{صَ} = \text{جاس}\,\text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتاس}$

$$\text{صَ} = \text{ص} + \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتاس}$$

$$\text{صً} = \text{صَ} + \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتاس} - \text{جاس}\,\text{هـ}^{\text{س}}$$

$$\text{صً} = \text{صَ} + \text{صَ} - \text{ص} - \text{ص}$$

$$\text{صً} = 2\text{صَ} - 2\text{ص}$$

$$\text{صً} - 2\text{صَ} + 2\text{ص} = \text{صفر}$$

المعادلة التفاضلية

يقصد بها المعادلات التي تحتوي على مشتقات أو تفاضلات ويقصد بحلها أن نفصل بين ل(س) مع دس في جهة و هـ(ص) مع دص في جهة أخرى بحيث تصبح على الصورة الآتية :

هـ(ص) . دص = ل(س) . دس

ثم بإجراء التكامل $\int$ هـ(ص) . دص = $\int$ ل(س) . دس

وتظهر المعادلة التفاضلية إما بصورة مباشرة عن طريق دص بدلالة س أو بصورة غير مباشرة عن طريق المسألة الفيزيائية أو الهندسية ومعدل التغير بحيث يجب معرفة ما يلي

السرعة = $\frac{\text{دف}}{\text{دن}}$ ، التسارع = $\frac{\text{دع}}{\text{دن}}$ ، الميل = $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ .. الخ

امثلة على المعادلة التفاضلية

(١) حل المعادلة التفاضلية الآتية $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \sqrt{\frac{\text{ص}}{\text{س}}}$

الحل :- $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\sqrt{\text{ص}}}{\sqrt{\text{س}}}$ بالفصل

$\frac{\text{دص}}{\sqrt{\text{ص}}} = \frac{\text{دس}}{\sqrt{\text{س}}} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{ص}^{\frac{1}{2}}} = \frac{\text{دس}}{\text{س}^{\frac{1}{2}}}$

$\int \text{ص}^{-\frac{1}{2}} . \text{دص} = \int \text{س}^{-\frac{1}{2}} . \text{دس}$

$\frac{\text{ص}^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{\text{س}^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \text{جـ}$

$2\sqrt{\text{ص}} = 2\sqrt{\text{س}} + \text{جـ}$

(٢) حل المعادلة الآتية $2\text{جا}^2\text{س} . \text{دص} + \text{ص}^2 . \text{دس} = 2\text{دص}$

الحل :-

$\text{ص}^2 . \text{دس} = 2 . \text{دص} - 2\text{جا}^2\text{س} . \text{دص}$

$\text{ص}^2 . \text{دس} = 2\text{دص}(1 - \text{جا}^2\text{س})$

$\text{ص}^2 . \text{دس} = 2\text{دص} \times \text{جتا}^2\text{س}$

$\frac{\text{دس}}{\text{جتا}^2\text{س}} = \frac{2\text{دص}}{\text{ص}^2}$

$\text{قا}^2\text{س} . \text{دس} = 2\text{ص}^{-2}\text{دص}$

$\text{ظاس} + \text{جـ} = \frac{2\text{ص}^{-1}}{-1}$

$\text{ظاس} + \text{جـ} = \frac{-2}{\text{ص}}$

$\text{ص} = \frac{-2}{\text{ظاس} + \text{جـ}}$

(٢) اذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة عند النقطة (س ، ص) يساوي $\frac{\text{جاس} - \text{قا}^2\text{س}}{3\text{ص}^2}$ فجد قاعدة العلاقة علماً بأن النقطة ($\frac{\pi}{4}$ ، ٤) تقع على منحناه .

الحل :

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{جاس} - \text{قا}^2\text{س}}{3\text{ص}^2}$ بالضرب التبادلي

$\int 3\text{ص}^2 \text{دص} = \int (\text{جاس} - \text{قا}^2\text{س}) . \text{دس}$

$\text{ص}^3 = -\text{جتاس} - \text{ظاس} + \text{جـ}$

$(\frac{\pi}{4} , 4) \Leftarrow 4^3 = -\text{جتا}\frac{\pi}{4} - \text{ظا}\frac{\pi}{4} + \text{جـ}$

$64 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 + \text{جـ}$

$\text{جـ} = 65 + \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\text{ص}^3 = -\text{جتاس} - \text{ظاس} + 65 + \frac{1}{\sqrt{2}}$

(٤) يسير جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة $\text{ت} = \text{أ} \, \text{ع}^{\frac{1}{3}}$ ، ع > ٠ ، إذا تحرك الجسيم من السكون فجد قيمة الثابت أ التي تجعل سرعته ٨ سم/ث بعد ٣ ثواني من بدء الحركة .

الحل :- $\text{ت} = \frac{\text{دع}}{\text{دن}} = \text{أ} \, \text{ع}^{\frac{1}{3}}$

$\frac{\text{دع}}{\text{ع}^{\frac{1}{3}}} = \text{أ} \, \text{دن}$

$\int \text{ع}^{-\frac{1}{3}} \text{دع} = \int \text{أ} . \text{دن}$

$\frac{3\text{ع}^{\frac{2}{3}}}{2} = \text{أن} + \text{جـ}$

تحرك الجسيم من السكون

ع = ٠ ، ن = ٠ ، جـ = ٠

$\frac{3}{2}\sqrt[3]{\text{ع}^2} = \text{أن}$

عندما ن = ٣ ، ع = ٨

$\Leftarrow$

$\frac{3}{2}\sqrt[3]{8^2} = \text{أ} \times 3$

$\frac{3}{2} \times 4 = \text{أ} \times 3$

$3\text{أ} = 6$

$\text{أ} = 2$

٥) يسير جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة $ت = \frac{١}{ع}$ ، $ع > ٠$. اذا تحرك الجسيم من السكون فقطع مسافة ١٠ر٢١ م بعد ٤ ثوان من حركته. جد المسافة التي قطعها بعد ثانية من حركته

٦) اذا كان تسارع جسيم $ت$ بعد (ن) من الثواني $ت = ٦ن + ٤$ جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد ٣ث من بدء الحركة علماً بأن السرعة الابتدائية للجسيم ٢م/ث وانه قطع مسافة (٢١) في اول ثانيتين

الحل:-

$\int ت = \int (٦ن + ٤)$

$ع = \frac{٦ن^٢}{٢} + ٤ن + ج$

$ع = ٣ن^٢ + ٤ن + ج$

$ع(٠) = ٣ \times ٠^٢ + ٤ \times ٠ + ج = ٢$

$ج = ٢$

$ع = ٣ن^٢ + ٤ن + ٢$

$\int ع = \int (٣ن^٢ + ٤ن + ٢)$

$\int دف = \int (٣ن^٢ + ٤ن + ٢).دن$

$ف = \frac{٣ن^٣}{٣} + \frac{٤ن^٢}{٢} + ٢ن + ج$

$ف = ن^٣ + ٢ن^٢ + ٢ن + ج$

$ف(٢) = ٢^٣ + ٢ \times ٢^٢ + ٢ \times ٢ + ج = ٢١$

$= ٨ + ٨ + ٤ + ج = ٢١$

$ج = ١$

$ف(ن) = ن^٣ + ٢ن^٢ + ٢ن + ١$

$ف(٣) = ٢٧ + ١٨ + ٦ + ١$

$ف(٣) = ٥٢$ م

٧) اذا كان ميل المماس $= \frac{\sqrt{هـ^{ص}}}{١ - جتا^٢س}$ جد قاعدة العلاقة ص علماً بأن منحناها يمر بالنقطة $(\frac{\pi}{٤}، ٠)$

الحل:-

$\frac{دص}{دس} = \frac{\sqrt{هـ^{ص}}}{١ - جتا^٢س}$

$\frac{دص}{\sqrt{هـ^{ص}}} = \frac{دس}{١ - جتا^٢س}$

$\frac{دص}{هـ^{\frac{١}{٢}ص}} = \frac{دس}{جا^٢س}$

$هـ^{-\frac{١}{٢}ص}.دص = قتا^٢س.دس$

$\int هـ^{-\frac{١}{٢}ص}.دص = \int قتا^٢س.دس$

$\frac{هـ^{-\frac{١}{٢}ص}}{-\frac{١}{٢}} = -ظتاس + ج$

$\frac{-٢}{\sqrt{هـ^{ص}}} = -ظتاس + ج$

$\frac{-٢}{\sqrt{هـ^{٠}}} = -ظتا\frac{\pi}{٤} + ج$

$-٢ = -١ + ج$

$ج = -١$

$\frac{-٢}{\sqrt{هـ^{ص}}} = -ظتاس - ١$

$\sqrt{هـ^{ص}} = \frac{-٢}{-ظتاس - ١}$

$لوهـ^{\frac{١}{٢}ص} = لو\frac{٢}{ظتاس + ١}$

$\frac{١}{٢}ص = لوهـ \frac{٢}{ظتاس + ١}$

$ص = ٢ لوهـ \frac{٢}{ظتاس + ١}$

٨) إذا كان ق(س) إقتران كثير حدود، وكان $ق(٠) = ٥$ ، $ق''(س) = ٤$ ، $\int_{٠}^{١} ق'(س).دس = ٣$ جد قاعدة الاقتران ق(س)

الحل:-

$\int ق''(س) = \int ٤.دس$

$ق'(س) = ٤س + ج_١$

$\int_{٠}^{١} ق'(س) = \int_{٠}^{١} ٤س + ج_١ = ٣$

$[٢س^٢ + ج_١س]_{٠}^{١} = ٣$

$٢ + ج_١ = ٣$

$ج_١ = ١$

$ق'(س) = ٤س + ١$

$\int ق'(س) = \int (٤س + ١).دس$

$ق(س) = ٢س^٢ + س + ج_٢$

$ق(٠) = ٢ \times ٠ + \quad + ج_٢ = ٥$

$ج_٢ = ٥$

$ق(س) = ٢س^٢ + س + ٥$

٩) اذا كان ميل المماس لمنحنى ق(س) عند النقطة (١ ، ٨) يساوي ٤ وكان $ق''(س) = ١٢س - ١٠$ جد قاعدة الاقتران.

١٠) اذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة يساوي $\frac{-ص(س^٢ - ١)}{س^٢}$ جد قاعدة العلاقة اذا علمت أن منحناها يمر بالنقطة (١ ، -١).

الحل:-

$\frac{دص}{دس} = \frac{-ص(س^٢ - ١)}{س^٢}$

$\int \frac{دص}{ص} = \int (\frac{-س^٢}{س^٢} + \frac{١}{س^٢}).دس$

$لو|ص| = \int (١ - س^{-٢}).دس$

$لو|ص| = -س + \frac{س^{-١}}{-١} + ج$

$لو|ص| = -س + \frac{-١}{س} + ج$

$-لو|-١| = -١ - ١ + ج$

$٠ = -٢ + ج$

$ج = +٢$

$لو|ص| = -س - \frac{١}{س} + ٢$

الزاويه و الأس و المقام (الخطى)

١) $\int \frac{1}{2+3س} \cdot دس = \frac{لو|2+3س|}{3} + ج$

٢) $\int \frac{دس}{2-س} = \frac{لو|2-س|}{-1} + ج$

٣) $\int \frac{1}{س} \cdot دس = لو|س| + ج$

٤) $\int هـ^{2س} \cdot دس = \frac{هـ^{2س}}{2} + ج$

٥) $\int جا(4س+5) \cdot دس = \frac{-جتا(4س+5)}{4} + ج$

٦) $\int \frac{دس}{جاس \, ظاس} = \int قتاس \, ظتاس \cdot دس$
$= -قتاس + ج$

٧) $\int (جتا^2س - جا^2س) \cdot دس$
$= \int جتا2س \cdot دس = \frac{جا2س}{2} + ج$

٨) $\int (3س + هـ^{4س}) \cdot دس$
$= \frac{3س^2}{2} + \frac{هـ^{4س}}{4} + ج$

٩) $\int \sqrt{1-س} \cdot دس$
$= \int (1-س)^{\frac{1}{2}} \cdot دس$
$= \frac{(1-س)^{\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + ج$

١٠) $\int (2س+1)^3 \cdot دس$
$= \frac{(2س+1)^4}{2 \times 4} + ج$

١١) $\int جتا(3س-1) \cdot دس$
$= \frac{جا(3س-1)}{3} + ج$

١٢) $\int \frac{2}{5س} \cdot دس$
$= \frac{2}{5} لو|س| + ج$

١٣) $\int \sqrt[3]{(س-2)^2} \cdot دس$
$= \int (س-2)^{\frac{2}{3}} \cdot دس = \frac{3(س-2)^{\frac{5}{3}}}{5} + ج$

١٤) $\int \frac{دس}{س+هـ}$
$= لو|س+هـ| + ج$

١٥) $\int \frac{1}{جتا^2س} \cdot دس$

١٦) $\int \frac{جاس}{جتا^2س} \cdot دس$

١٧) $\int (2س+هـ) \cdot دس$

ورجينا شطارتك

(١) جد $\int (\text{جا}^2\text{س} + \text{جتا}^2\text{س}) \,.\, \text{دس}$

(٢) جد $\int \text{قاس} (\text{ظاس} + \text{جتاس}) \,.\, \text{دس}$

(٣) جد $\int \frac{\text{دص}}{\text{جا}^2\text{ص}}$

(٤) اذا كان $\int (\text{قَ}(\text{س}) + ٢\text{س}) \,.\, \text{دس} = \text{س}^3 + \text{م}\,\text{س}^2 + ١$ وكان $\text{قَ}(١) = ٥$ ، $\text{ق}(٢) = ٧$ جد قيمة م

(٥) جد $\int \frac{٢\text{س}^2 - ٣\text{س}}{\sqrt{\text{س}}} \,.\, \text{دس}$

(٦) $\int \frac{\text{س}^3 + ٥\text{س}^2 - ٤}{\text{س}^2} \,.\, \text{دس}$

(٧) $\int \frac{١ - \text{جا}^2\text{س}}{\text{جا}^2\frac{\text{س}}{٢} \times \text{جتا}^2\frac{\text{س}}{٢}} \,.\, \text{دس}$

(٨) اذا كان $\int_{١+٢\text{م}}^{\text{م}^2+٣\text{م}} ٥ \,.\, \text{دس} = ٤٠$ جد قيمة م

(٩) ليكن $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٣\text{س}^2 ، & ٠ \leq \text{س} \leq ١ \\ \text{س}+٢ ، & ١ < \text{س} \leq ٤ \end{cases}$

جد $\int_{٠}^{٤} \text{ق}(\text{س}) \,.\, \text{دس}$

(١٠) $\int_{١}^{\text{ج}} [\tfrac{١}{٢}\text{س} + ١] \,.\, \text{دس} = ١١$ فما قيمة ج

(١١) $\int_{١}^{\text{ج}} \text{س} \,.\, \text{دس} = \text{صفر}$ جد قيمة ج

(١٢) قذف جسم راسياً لاعلى بسرعة ابتدائية مقدارها ٤٠م/ثا وبتسارع مقداره (-١٠ م/ثا²) إذا كان ارتفاعه عن سطح الارض بعد ثانية من حركته ٣٨٠ جد اقصى ارتفاع

(١٣) حل المعادلات التفاضلية الاتية
١- $\text{س}^3 \,.\, \text{دص} - \text{ص}^2 \,.\, \text{دس} = \text{صفر}$
٢- $\text{دس} + ٣\text{دص} = \text{جتا ن} \,.\, \text{دس}$

(١٤) تتكاثر بكتيريا حسب المعادلة $\frac{\text{دن}}{\text{دت}} = ٠٫٠٤\text{ن}$ اذا كان عددها بعد ثانية واحدة يساوي ٣٠ جد عددها بعد ٣ ثواني.

(١٥) $\int_{٢}^{٣} \sqrt{٤\text{س} + ١} \,.\, \text{دس}$

(١٦) $\int_{١}^{٤} |\text{س}^2 - ٩| \,.\, \text{دس}$

(١٧) اذا كان $\int \text{ق}(\text{س}) \,.\, \text{دس} = \text{س}^2 - ٢\text{س} + ٣$ جد $\text{قَ}(٢)$

(١٨) اذا كان $\int_{١}^{٣} \text{ق}(\text{س}) \,.\, \text{دس} = ٦$ جد $\int_{٣}^{١} \text{ق}(\text{س}) \,.\, \text{دس}$

(١٩) حل المعادلة التفاضلية $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{ص}}{\text{جتا}^2\text{س}}$

(٢٠) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} \text{قا}^2\text{س} \,.\, \text{دس}$

(٢١) اذا كان $\int_{-٢}^{٤} (\text{م} + \text{ق}(\text{س})) \,.\, \text{دس} = ١٥$ ، $\int_{-٢}^{٤} \text{ق}(\text{س}) \,.\, \text{دس} = ٨\text{م}$ فما قيمة الثابت م

(٢٢) جد $\int \frac{\text{س} - ٤}{\sqrt{\text{س}} - ٢} \,.\, \text{دس}$

(٢٣) جد كثير الحدود من الدرجة الاولى بحيث يكون $\int_{١}^{٤} \text{ق}(\text{س}) \,.\, \text{دس} = ٤$ ، $\int \text{ق}(\text{س}) \,.\, \text{دس} = ٢$

(٢٤) $\text{ص}^2 = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} - \text{هـ}^{\text{س}^2}$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

(٢٥) $\int_{\text{م}}^{٢} ٢\text{م} \,.\, \text{دس} = -٣٠$ جد قيمة $\text{م} \in \text{ح}$

(٢٦) اذا كان $\int_{١}^{٢} (٣\text{ق}(\text{س}) - ٤) \,.\, \text{دس} = ٤$ ، $\int_{٤}^{٢} \text{ق}(\text{س}) \,.\, \text{دس} = ٦$ فجد $\int_{١}^{٤} \text{ق}(\text{س}) \,.\, \text{دس}$

طرق التكامل

التكامل فى حاله الجمع والطرح
(التكامل المباشر)

يجب مراعاة مايلي في حالة التكامل المباشر

- ماداخل قوس المركب خطي من الدرجة الاولى
- زاوية الاقتران المثلثي خطية من الدرجة الاولى
- قوة الأسي من الدرجة الاولى، خطية.
- مقام خطي

التكامل فى حالة الضرب

نفك الأقواس ان امكن وفي حالة عدم القدرة على فك الأقواس نقوم بطريقة التعويض بحيث نفرض جزء من السؤال ص ونجد مشتقته وان لايكون مشتقة الجزء المفروض ثابت اذا كان ثابت نستخدم طريقة اخرى تسمى الاجزاء حسب القانون $\int \text{ق}.\text{دهـ} = \text{ق}.\text{هـ} - \int \text{هـ}\,\text{دق}$ بحيث نفرض ق الاسهل للاشتقاق .

مبادى اختيار الفرض فى حاله التعويض

- $\int$ إقتران x اسي نفرض ص قوة الاسي
- $\int$ اقتران x مركب نفرض ص ماداخل المركب
- $\int$ اقتران x مثلثي نفرض ص زاوية المثلثي
- $\int$ جا(زاوية) x جتا(زاوية) نفرض ص احدهما بدون قوة
- $\int$ ظا(زاوية) x قا²(زاوية) نفرض ص ظا(الزاوية)
- $\int$ ظتا(زاوية) x قتا²(زاوية) نفرض ص ظتا(الزاوية)

اذا كانت الزوايا مختلفة يجب التفكير في متطابقة

---

(١) $\int \text{س}(\text{س}^2-3)^3 .\text{دس}$

الحل: $\int \text{س}(\text{ص})^3 . \frac{\text{دص}}{2\text{س}}$

$\frac{1}{2}\int \text{ص}^3 .\text{دص}$

$= \frac{1}{2}\frac{\text{ص}^4}{4} + \text{جـ}$

$= \frac{1}{8}(\text{س}^2-3)^4 + \text{جـ}$

نفرض

$\text{ص} = \text{س}^2 - 3$

$\text{دص} = 2\text{س}.\text{دس}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{2\text{س}}$

(٢) $\int \text{س}^3\sqrt{\text{س}^2+1} .\text{دس}$

الحل: $\int \text{س}^3 \sqrt{\text{ص}} . \frac{\text{دص}}{2\text{س}}$

$= \frac{1}{2}\int \text{س}^2 (\text{ص})^{\frac{1}{2}} .\text{دص}$

لـه على الاصل دور

$= \frac{1}{2}\int (\text{ص}-1)\text{ص}^{\frac{1}{2}} .\text{دص}$

$= \frac{1}{2}\int \text{ص}^{\frac{3}{2}} - \text{ص}^{\frac{1}{2}} .\text{دص}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{2\text{ص}^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{2\text{ص}^{\frac{3}{2}}}{3}\right) + \text{جـ}$

$= \frac{\sqrt{(\text{س}^2+1)^5}}{5} - \frac{\sqrt{(\text{س}^2+1)^3}}{3} + \text{جـ}$

نفرض

$\text{ص} = \text{س}^2 + 1$

$\text{دص} = 2\text{س}.\text{دس}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{2\text{س}}$

$\text{س}^2 = \text{ص} - 1$

(٣) $\int \text{س} - 1\ (2\text{س}^2 - 4\text{س}) .\text{دس}$

(٤) $\int \text{س}^5\sqrt{\text{س}^3 + 2} .\text{دس}$

(٥) $\int \text{جا}^3\text{س} .\text{دس}$ .. يجب الفك ثم التفكير في التعويض

الحل: $\int \text{جاس}\ \text{جا}^2\text{س} .\text{دس}$

$\int \text{جاس}(1-\text{جتا}^2\text{س}) .\text{دس}$

$\int (\text{جاس} - \text{جاس}\ \text{جتا}^2\text{س}) .\text{دس}$

$\int \text{جاس} - \int \text{جاس}\ \text{جتا}^2\text{س}$

$-\text{جتاس} - \int \text{جاس}\ \text{ص}^2 . \frac{\text{دص}}{-\text{جاس}}$

$-\text{جتاس} + \frac{\text{ص}^3}{3} + \text{جـ} = -\text{جتاس} + \frac{1}{3}(\text{جتاس})^3 + \text{جـ}$

$\text{جتاس} = \text{ص}$

$\text{دص} = -\text{جاس} .\text{دس}$

$\text{دس} =$

(٦) $\int \text{س}^2 \sqrt[3]{\text{س}^7 - \text{س}^3}\ .\ \text{دس}$

الحل: $\int \text{س}^2 \sqrt[3]{\text{س}^3(\text{س}^4-1)}\ .\ \text{دس}$

$\int \text{س}^3 \sqrt[3]{(\text{س}^4-1)}\ .\ \text{دس}$

$= \int \cancel{\text{س}^3}\,(\text{ص})^{\frac{1}{3}} . \frac{\text{دص}}{4\cancel{\text{س}^3}}$

$= \frac{1}{4} \frac{\text{ص}^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + \text{ج}$

$= \frac{3}{16} \sqrt[3]{(\text{س}^4-1)^4} + \text{ج}$

$\text{ص} = \text{س}^4 - 1$

$\text{دص} = 4\text{س}^3 . \text{دس}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{4\text{س}^3}$

(٧) $\int \frac{\text{س} - 1}{(\text{س}^2 - 2\text{س} + 1)^3} . \text{دس}$

الحل: $\int \cancel{(\text{س}-1)}\ \text{ص}^{-3} . \frac{\text{دص}}{2\cancel{(\text{س}-1)}}$

$= \frac{1}{2} \frac{\text{ص}^{-2}}{-2} + \text{ج}$

$= \frac{-1}{4(\text{س}^2-2\text{س}+1)^2} + \text{ج}$

$\text{ص} = \text{س}^2 - 2\text{س} + 1$

$\text{دص} = (2\text{س} - 2).\text{دس}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{2(\text{س}-1)}$

(٨) $\int \frac{\sqrt[3]{\text{س}}}{5 - \text{س}\sqrt[3]{\text{س}}} . \text{دس}$

الحل: $= \int \frac{\text{ص}}{5 - \text{ص}^3\text{ص}} . \text{دص} \times 2\text{ص}^2$

$= \int \frac{2\text{ص}^3}{5 - \text{ص}^4} . \text{دص}$

$= \int \frac{2\text{ص}^3}{\text{ع}} . \frac{\text{دع}}{-4\text{ص}^3}$

$= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\text{ع}} . \text{دع}$

$= -\frac{1}{2}\ \text{لو}|\text{ع}| + \text{ج}$

$= -\frac{1}{2}\ \text{لو}|5 - \text{ص}^4| + \text{ج}$

$= -\frac{1}{2}\ \text{لو}|5 - \sqrt[3]{\text{س}^4}| + \text{ج}$

$\text{ص} = \sqrt[3]{\text{س}}$

$\text{ص}^3 = \text{س}$

$3\text{ص}^2 . \text{دص} = \text{دس}$

نفرض مرة أخرى

$\text{ع} = 5 - \text{ص}^4$

$\text{دع} = -4\text{ص}^3 . \text{دص}$

$\text{دص} = \frac{\text{دع}}{-4\text{ص}^3}$

(٩) $\int_1^2 \frac{6\text{س}}{3\text{س}^2 - 5} . \text{دس}$

الحل: $\int_{-2}^{7} \frac{6\text{س}}{\text{ص}} . \frac{\text{دص}}{\cancel{6\text{س}}}$

$\text{لو}|\text{ص}|\Big]_{-2}^{22} = \text{لو}|22| - \text{لو}|-2| = \text{لو}_{\text{ه}}\ 11$

$\text{ص} = 3\text{س}^2 - 5$

$\text{دص} = 6\text{س} . \text{دس}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{6\text{س}}$

(١٠) $\int \frac{\text{جا}3\text{س}}{1 + \text{جتا}3\text{س}} . \text{دس}$

الحل: $\int \frac{\cancel{\text{جا}3\text{س}}}{\text{ص}} . \frac{\text{دص}}{-3\cancel{\text{جا}3\text{س}}}$

$= -\frac{1}{3} \int \frac{1}{\text{ص}} . \text{دص}$

$= -\frac{1}{3}\ \text{لو}_{\text{ه}}|\text{ص}| + \text{ج}$

$= -\frac{1}{3}\ \text{لو}_{\text{ه}}|1 + \text{جتا}3\text{س}| + \text{ج}$

$\text{ص} = 1 + \text{جتا}3\text{س}$

$\text{دص} = -3\text{جا}3\text{س} . \text{دس}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{-3\text{جا}3\text{س}}$

(١١) $\int_0^{\pi} (1 + \text{جا}2\text{س})\,\text{جتا}^2\text{س} . \text{دس}$

الحل: $\int_0^{\pi} (1 + 2\text{جاس}\,\text{جتاس})\,\text{جتا}^2\text{س}$

$= \int_0^{\pi} (\text{جتا}^2\text{س} + 2\,\text{جاس}\,\text{جتا}^3\text{س}).\text{دس}$

$= \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(1 + \text{جتا}2\text{س}).\text{دس} + \int_1^{-1} 2\cancel{\text{جاس}}\,\text{ص}^3 \frac{\text{دص}}{-\cancel{\text{جاس}}}$

$= \frac{1}{2}\left(\text{س} + \frac{\text{جا}2\text{س}}{2}\right)\Big]_0^{\pi} + \int_1^{-1} -2\text{ص}^3 . \text{دص}$

$= \frac{1}{2}(\pi + 0) - \frac{1}{2}(0) - \frac{2}{4}\left[(\text{ص})^4\right]_1^{-1}$

$\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\left[\frac{(\text{ص})^4}{4}\right]_1^{-1}$

$= \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{8}\left[(-1)^4 - (1)^4\right]$

$\frac{1}{2}\pi + \text{صفر} = \frac{1}{2}\pi$

$\text{ص} = \text{جتاس}$

$\text{دص} = -\text{جاس}.\text{دس}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{-\text{جاس}}$

$\int_0^{\pi} \Leftarrow \int_1^{-1}$

(١٢) $\int \frac{1}{\sqrt{\text{س}}\,(2 + \sqrt{\text{س}})} . \text{دس}$

الحل: $\int \frac{1}{\cancel{\sqrt{\text{س}}}\,(\text{ص})} . 2\cancel{\sqrt{\text{س}}} . \text{دص}$

$= 2\ \text{لو}_{\text{ه}}|\text{ص}| + \text{ج}$

$= 2\ \text{لو}_{\text{ه}}|2 + \sqrt{\text{س}}| + \text{ج}$

$\text{ص} = 2 + \sqrt{\text{س}}$

$\text{دص} = \frac{1}{2\sqrt{\text{س}}} . \text{دس}$

$\text{دس} = 2\sqrt{\text{س}}\ \text{دص}$

(١٣) $\int \frac{1+\text{ظا}^2\text{س}}{\text{ظاس}} \cdot \text{دس}$

الحل: $\int \frac{\text{قا}^2\text{س}}{\text{ظاس}} \cdot \text{دس}$

$\int \frac{\cancel{\text{قا}^2\text{س}}}{\text{ص}} \cdot \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{قا}^2\text{س}}}$

$\text{لو}|\text{ص}| + \text{ج} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ظاس}| + \text{ج}$

$\text{ص} = \text{ظاس}$

$\text{دص} = \text{قا}^2\text{س} \cdot \text{دس}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{قا}^2\text{س}}$

(١٤) $\int \text{جا}2\text{س} \, \text{هـ}^{\text{جا}^2\text{س}} \cdot \text{دس}$

الحل: $\int \text{جا}2\text{س} \cdot \text{هـ}^{\text{ص}} \frac{\text{دص}}{\text{جا}2\text{س}}$

$= \text{هـ}^{\text{ص}} + \text{ج}$

$= \text{هـ}^{\text{جا}^2\text{س}} + \text{ج}$

$\text{ص} = \text{جا}^2\text{س}$

$\text{دص} = 2\text{جاس جتاس دس}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{جا}2\text{س}}$

(١٥) إذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة عند النقطة (س، ص) يساوي $\frac{\text{هـ}^{-\text{ص}}(\text{س}+4)(\text{س}-3)}{\text{س}^2-3\text{س}}$ نجد قاعدة العلاقة إذا علمت أن منحناها يمر (١، ٠)

الحل: $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{هـ}^{-\text{ص}}(\text{س}+4)\cancel{(\text{س}-3)}}{\text{س}\cancel{(\text{س}-3)}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{هـ}^{-\text{ص}}} = \frac{\text{س}+4}{\text{س}} \cdot \text{دس}$

$\int \text{هـ}^{\text{ص}} \text{دص} = \int (1 + \frac{4}{\text{س}}) \cdot \text{دس}$

$\text{هـ}^{\text{ص}} = \text{س} + 4\,\text{لو}|\text{س}| + \text{ج}$

$\text{هـ}^{\text{ص}} = \text{س} + 4\,\text{لو}|\text{س}|$

$\text{ص} = \text{لو}|\text{س} + 4\,\text{لو}|\text{س}||$

النقطة (١، ٠) تحقق المعادلة

$\text{هـ}^0 = 1 + 4\,\text{لو}|1| + \text{ج}$

$1 = 1 + 0 + \text{ج}$

$\text{ج} = 0$

(١٦) $\int \frac{\text{دس}}{\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}$

الحل: $\int \frac{\cancel{\text{س}}\,\text{دص}}{\cancel{\text{س}}\,\text{ص}} = \text{لو}|\text{ص}| + \text{ج} = \text{لو}|\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}| + \text{ج}$

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

$\text{دص} = \frac{1}{\text{س}} \cdot \text{دس}$

$\text{دس} = \text{س دص}$

(١٧) $\int_1^{\text{هـ}} \frac{\text{دس}}{\text{س}+\text{هـ}}$ مباشر

الحل: $[\text{لو}|\text{س}+\text{هـ}|]_1^{\text{هـ}}$

$= \text{لو}2\text{هـ} - \text{لوهـ} = \text{لو}_{\text{هـ}} \frac{2\text{هـ}}{\text{هـ}} = \text{لو}_{\text{هـ}} 2$

(١٨) $\int_0^{\text{لو}_{\text{هـ}}2} \text{هـ}^{\text{س}}(9 - 4\text{هـ}^{\text{س}}) \cdot \text{دس}$

الحل: $\int_0^{\text{لو}_{\text{هـ}}2} 9\text{هـ}^{\text{س}} - 4\text{هـ}^{2\text{س}}$

$= [9\text{هـ}^{\text{س}}]_0^{\text{لو}_{\text{هـ}}2} - [\frac{4\text{هـ}^{2\text{س}}}{2}]_0^{\text{لو}_{\text{هـ}}2}$

$= 9((\text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}2} - \text{هـ}^0)) - 2((\text{هـ}^{2\text{لو}_{\text{هـ}}2} - \text{هـ}^0))$

$9\times 2 - 9 - 2\times 4 = 18 - 9 - 8 + 2 = 3$

(١٩) $\int_0^{\text{لو}3} \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{4 + \text{هـ}^{\text{س}}} \cdot \text{دس}$

الحل: $\int_5^7 \frac{\cancel{\text{هـ}^{\text{س}}}}{\text{ص}} \cdot \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{هـ}^{\text{س}}}}$

$\text{لو}|\text{ص}|]_5^7 = \text{لو}_{\text{هـ}} \frac{7}{5}$

$\text{ص} = 4 + \text{هـ}^{\text{س}}$

$\text{دص} = \text{هـ}^{\text{س}} \cdot \text{دس}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{هـ}^{\text{س}}}$

(٢٠) $\int (\text{س}^2 - 6\text{س} + 9)^4 \cdot \text{دس}$

الحل: $\int ((\text{س}-3)^2)^4 \cdot \text{دس}$

$= \int (\text{س}-3)^8 \cdot \text{دس}$

$= \frac{(\text{س}-3)^9}{9} + \text{ج}$

(٢١) $\int_0^2 \sqrt{\text{س}^2 - 2\text{س} + 1} \cdot \text{دس}$

الحل: $\int_0^2 \sqrt{(\text{س}-1)^2} \cdot \text{دس}$

$= \int_0^2 |\text{س}-1| \cdot \text{دس}$

نعيد التعريف

$\overline{\;2 \quad + + \quad 1 \quad - - - \quad 0\;}$

$= \int_1^2 (\text{س}-1) \cdot \text{دس} + \int_0^1 (-\text{س}+1) \cdot \text{دس}$

$= [\frac{-\text{س}^2}{2} + \text{س}]_0^1 + [\frac{\text{س}^2}{2} - \text{س}]_1^2$

$= (\frac{-1}{2} + 1) - (0) + (2-2) - (\frac{1}{2} - 1)$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

التكامل بالأجزاء

نستخدم هذه الطريقة في حالة فشل طريقة التعويض وذلك عندما يكون ناتج المشتقة ثابت

$\text{ق} \times \text{هـ} - \int \text{هـ} \cdot \text{دق}$

(١) $\int (2\text{س}-1)\ \text{جتا}\,3\text{س} \cdot \text{دس}$

الحل:

$\text{ق} = 2\text{س} - 1 \Leftarrow \text{دق} = 2\ \text{دس}$ تشتق

$\text{دهـ} = \text{جتا}\,3\text{س} \cdot \text{دس} \Leftarrow \text{هـ} = \frac{1}{3}\,\text{جا}\,3\text{س}$ تكامل

$(2\text{س}-1) \times \frac{1}{3}\,\text{جا}\,3\text{س} - \int \frac{2}{3}\,\text{جا}\,3\text{س} \cdot \text{دس}$

$\frac{1}{3}(2\text{س}-1)\ \text{جا}\,3\text{س} + \frac{2}{9}\,\text{جتا}\,3\text{س} + \text{ج}$

(٢) $\int_{-2}^{1} 5\text{س}\sqrt{\text{س}+3} \cdot \text{دس}$

الحل: $\text{ق} = 5\text{س} \Leftarrow \text{دق} = 5 \cdot \text{دس}$

$\text{دهـ} = (\text{س}+3)^{\frac{1}{2}} \Leftarrow \text{هـ} = \frac{2(\text{س}+3)^{\frac{3}{2}}}{3}$

$5\text{س} \times \frac{2}{3}(\text{س}+3)^{\frac{3}{2}} - \int 5 \times \frac{2}{3}(\text{س}+3)^{\frac{3}{2}} \cdot \text{دس}$

$\frac{10}{3}\text{س}(\text{س}+3)^{\frac{3}{2}} - \frac{10}{3} \times \frac{2(\text{س}+3)^{\frac{5}{2}}}{5}$

$\left[\frac{10}{3}\text{س}\sqrt{(\text{س}+3)^3} - \frac{4}{3}\sqrt{(\text{س}+3)^5}\right]_{-2}^{1}$

$\left(\frac{10}{3} \times 8 - \frac{4}{3} \times 32\right) - \left(\left(\frac{-20}{3} \times 1\right) - \frac{4}{3}\ 1\right) = -8$

(٣) $\int \text{س}^2\,\text{جتا}\text{س} \cdot \text{دس}$

الحل: $\text{ق} = \text{س}^2 \Leftarrow \text{دق} = 2\text{س} \cdot \text{دس}$

$\text{دهـ} = \text{جتا}\text{س}\,\text{دس} \Leftarrow \text{هـ} = \text{جا}\text{س}$

$\text{س}^2 \times \text{جا}\text{س} - \int 2\text{س}\,\text{جا}\text{س} \cdot \text{دس}$ اجزاء مرة أخرى

$\text{س}^2 \times \text{جا}\text{س} - \left[\begin{array}{l}\text{ق} = 2\text{س} \Leftarrow \text{دق} = 2 \cdot \text{دس} \\ \text{دهـ} = \text{جا}\text{س} \Leftarrow \text{هـ} = -\text{جتا}\text{س}\end{array}\right]$

$\text{س}^2 \times \text{جا}\text{س} - \left[2\text{س} \times -\text{جتا}\text{س} + \int 2\,\text{جتا}\text{س} \cdot \text{دس}\right]$

$\text{س}^2\,\text{جا}\text{س} + 2\text{س}\,\text{جتا}\text{س} - 2\,\text{جا}\text{س} + \text{ج}$

(٤) $\int \text{س}\ \text{ظا}\text{س}\ \text{قا}^2\text{س} \cdot \text{دس}$

$\text{ق} = \text{س} \Leftarrow \text{دق} = \text{دس}$

$\text{دهـ} = \underbrace{\text{ظا}\text{س}\ \text{قا}^2\text{س}}_{\text{تعويض}} \Leftarrow \text{هـ} = \frac{\text{ظا}^2\text{س}}{2}$

$= \frac{1}{2}\text{س}\,\text{ظا}^2\text{س} - \int \frac{1}{2}\,\text{ظا}^2\text{س} \cdot \text{دس}$

$= \frac{1}{2}\text{س}\,\text{ظا}^2\text{س} - \frac{1}{2}\int(\text{قا}^2\text{س} - 1) \cdot \text{دس}$

$= \frac{1}{2}\text{س}\,\text{ظا}^2\text{س} - \frac{1}{2}(\text{ظا}\text{س} - \text{س}) + \text{ج}$

$\text{ص} = \text{ظا}\text{س}$

$\text{دص} = \text{قا}^2\text{س}\,\text{دس}$

$\int \text{ظا}\text{س}\ \text{قا}^2\text{س} \cdot \text{دس}$

$= \int \text{ص}\ \cancel{\text{قا}^2\text{س}}\ \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{قا}^2\text{س}}}$

$= \frac{\text{ص}^2}{2} = \frac{\text{ظا}^2\text{س}}{2}$

(٥) $\int \text{قا}^4\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظا}\text{س} \cdot \text{دس}$

$\text{ص} = \text{ظا}\text{س}$

$\text{دص} = \text{قا}^2\text{س} \cdot \text{دس}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{قا}^2\text{س}}$

$\text{ص}^2 = \text{ظا}^2\text{س}$

$\text{ص}^2 = \text{قا}^2\text{س} - 1$

$\text{ص}^2 + 1 = \text{قا}^2\text{س}$

$\int \text{قا}^4\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} \cdot \frac{\text{دص}}{\text{قا}^2\text{س}}$

$\int \text{قا}^2\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} \cdot \text{دص}$

$\int (\text{ص}^2 + 1) \cdot \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} \cdot \text{دص}$

$\text{ق} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} \Leftarrow \text{دق} = \frac{1}{\text{ص}} \cdot \text{دص}$

$\text{دهـ} = \text{ص}^2 + 1 \Leftarrow \text{هـ} = \frac{\text{ص}^3}{3} + \text{ص}$

$\left(\frac{\text{ص}^3}{3} + \text{ص}\right)\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} - \int \frac{1}{\text{ص}}\left(\frac{\text{ص}^3}{3} + \text{ص}\right) \cdot \text{دص}$

$\left(\frac{\text{ص}^3}{3} + \text{ص}\right)\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} - \int\left(\frac{1}{3}\text{ص}^2 + 1\right) \cdot \text{دص}$

$\left(\frac{\text{ص}^3}{3} + \text{ص}\right)\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} - \frac{\text{ص}^3}{9} - \text{ص} + \text{ج}$

$\left(\frac{\text{ظا}^3\text{س}}{3} + \text{ظا}\text{س}\right)\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظا}\text{س} - \frac{\text{ظا}^3\text{س}}{9} - \text{ظا}\text{س} + \text{ج}$

$\left(\frac{\text{ظا}^3\text{س}}{3} + \text{ظا}\text{س}\right)\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظا}\text{س} - \frac{\text{ظا}^3\text{س}}{9} - \text{ظا}\text{س} + \text{ج}$

(٦) $\int \frac{3\text{س}}{\sqrt[3]{2\text{س}+1}} \cdot \text{دس}$

$\text{ق} = 3\text{س} \Leftarrow \text{دق} = 3 \cdot \text{دس}$

$\text{دهـ} = (2\text{س}+1)^{-\frac{1}{3}} \Leftarrow \text{هـ} = \frac{3(2\text{س}+1)^{\frac{2}{3}}}{4}$

$3\text{س} \times \frac{3}{4}(2\text{س}+1)^{\frac{2}{3}} - \int \frac{9}{4}(2\text{س}+1)^{\frac{2}{3}} \cdot \text{دس}$

$\frac{9}{4}\text{س}\sqrt[3]{(2\text{س}+1)^2} - \frac{9}{4}\,\frac{(2\text{س}+1)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3} \times 2} + \text{ج}$

٧ $\int \text{جا}\sqrt{\text{س}}\ \text{جتا}^3\sqrt{\text{س}}\ .\ \text{د س}$

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}}$ ، $\text{س} = \text{ص}^2$ ، $\text{د س} = 2\text{ص}\ .\ \text{د ص}$

الحل :- $\int \text{جاص}\ .\ \text{جتا}^3\text{ص}\ .\ 2\text{ص}\ .\ \text{د ص}$

$\text{ق} = 2\text{ص} \Leftarrow \text{د ق} = 2\ \text{د ص}$

$\text{د هـ} = \underbrace{\text{جاص جتا}^3\text{ص}\ .\ \text{د ص}}_{\text{تعويض}} \Leftarrow \text{هـ} = -\frac{1}{4}\text{جتا}^4\text{ص}$

$\text{ع} = \text{جتاص}$ ، $\text{د ع} = -\text{جاص}\ .\ \text{د ص}$

$\int \text{جاص}\ .\ \text{ع}^3\ .\ \frac{\text{د ع}}{-\text{جاص}} = -\frac{\text{ع}^4}{4} = -\frac{1}{4}\text{جتا}^4\text{ص}$

$-\frac{1}{2}\text{ص جتا}^4\text{ص} + \int \frac{1}{2}\text{جتا}^4\text{ص}\ .\ \text{د ص}$

$-\frac{1}{2}\text{ص جتا}^4\text{ص} + \frac{1}{2}\int (\text{جتا}^2\text{ص})^2\ .\ \text{د ص}$

$-\frac{1}{2}\text{ص جتا}^4\text{ص} + \frac{1}{2}\int \left[\frac{1}{2}(1+\text{جتا}2\text{ص})\right]^2 .\ \text{د ص}$

$-\frac{1}{2}\text{ص جتا}^4\text{ص} + \frac{1}{8}\int (1 + 2\text{جتا}2\text{ص} + \text{جتا}^2 2\text{ص})\ .\ \text{د ص}$

$-\frac{1}{2}\text{ص جتا}^4\text{ص} + \frac{1}{8}\int \left(1 + 2\text{جتا}2\text{ص} + \frac{1}{2}(1+\text{جتا}4\text{ص})\right) \text{د ص}$

$-\frac{1}{2}\text{ص جتا}^4\text{ص} + \frac{1}{8}\left[\text{ص} + \frac{2\text{جا}2\text{ص}}{2} + \frac{1}{2}\left(\text{ص} + \frac{\text{جا}4\text{ص}}{4}\right)\right] + \text{ج}$

$-\frac{1}{2}\sqrt{\text{س}}\ \text{جتا}^4\sqrt{\text{س}} + \frac{1}{8}\left[\sqrt{\text{س}} + \text{جا}2\sqrt{\text{س}} + \frac{1}{2}\left(\sqrt{\text{س}} + \frac{1}{4}\text{جا}4\sqrt{\text{س}}\right)\right] + \text{ج}$

٨ $\int \frac{\text{س جاس}}{\text{جتا}^3\text{س}}\ .\ \text{د س}$

الحل : $\text{ق} = \text{س} \Leftarrow \text{د ق} = \text{د س}$

$\text{د هـ} = \frac{\text{جاس}}{\text{جتا}^3\text{س}}\ .\ \text{د س} \Leftarrow \text{هـ} = \frac{1}{2\text{جتا}^2\text{س}}$

$\text{ص} = \text{جتاس}$ ، $\text{د ص} = -\text{جاس}\ .\ \text{د س}$ ، $\text{د س} = \frac{-\text{د ص}}{\text{جاس}}$

$\int \frac{\text{جاس}}{\text{ص}^3}\ .\ \frac{-\text{د ص}}{\text{جاس}}$

$\int -\text{ص}^{-3}\ .\ \text{د ص}$

$\frac{\text{ص}^{-2}}{2} = \frac{1}{2\text{جتا}^2\text{س}}$

$= \text{س} \times \frac{1}{2\text{جتا}^2\text{س}} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\text{جتا}^2\text{س}}\ .\ \text{د س}$

$= \frac{1}{2}\text{س قا}^2\text{س} - \frac{1}{2}\int \text{قا}^2\text{س}\ .\ \text{د س}$

$= \frac{1}{2}\text{س قا}^2\text{س} - \frac{1}{2}\text{ظاس} + \text{ج}$

٩ $\int \frac{\text{س} + 1}{\text{س}}\ .\ \text{د س}$ توزيع البسط

الحل :- $\int \left(1 + \frac{1}{\text{س}}\right) .\ \text{د س}$

$= \text{س} + \text{لو}|\text{س}| + \text{ج}$

١٠ $\int \text{س}\ (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2 .\ \text{د س}$

$\text{ق} = (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2 \Leftarrow \text{د ق} = 2\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \times \frac{1}{\text{س}}$

$\text{د هـ} = \text{س}\ .\ \text{د س} \Leftarrow \text{هـ} = \frac{\text{س}^2}{2}$

$\frac{\text{س}^2}{2}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2 - \int \text{س لو}_{\text{هـ}}\text{س}\ .\ \text{د س}$

$\frac{\text{س}^2}{2}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2 - \left[\begin{array}{ll} \text{ق} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \Leftarrow \text{د ق} = \frac{1}{\text{س}} \\ \text{د هـ} = \text{س} \Leftarrow \text{هـ} = \frac{\text{س}^2}{2} \end{array}\right]$

$\frac{\text{س}^2}{2}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2 - \frac{1}{2}\text{س}^2(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}) + \int \frac{1}{2}\text{س}^{\cancel{2}} \times \frac{1}{\cancel{\text{س}}}\ .\ \text{د س}$

$\frac{\text{س}^2}{2}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2 - \frac{1}{2}\text{س}^2(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}) + \frac{1}{4}\text{س}^2 + \text{ج}$

١١ $\int \frac{\text{س}}{\text{قا}^2\text{س}}\ .\ \text{د س}$

الحل :- $\int \text{س جتا}^2\text{س}\ .\ \text{د س}$

$\int \text{س}\ \frac{1}{2}(1 + \text{جتا}2\text{س})\ .\ \text{د س}$

$\int \frac{1}{2}\text{س} + \frac{1}{2}\text{س جتا}2\text{س}\ .\ \text{د س}$

$= \frac{1}{4}\text{س}^2 + \left[\begin{array}{ll} \text{ق} = \frac{1}{2}\text{س} \Leftarrow \text{د ق} = \frac{1}{2}\ .\ \text{د س} \\ \text{د هـ} = \text{جتا}2\text{س}\ \text{د س} \Leftarrow \text{هـ} = \frac{1}{2}\text{جا}2\text{س} \end{array}\right]$

$= \frac{1}{4}\text{س}^2 + \frac{1}{4}\text{س جا}2\text{س} - \int \frac{1}{4}\text{جا}2\text{س}\ .\ \text{د س}$

$= \frac{1}{4}\text{س}^2 + \frac{1}{4}\text{س جا}2\text{س} + \frac{1}{8}\text{جتا}2\text{س} + \text{ج}$

(١٢) $\int س^{3} جتا\, س^{2} \,.\, دس$

$ص = س^{2}$

$دص = ٢س \,.\, دس$

$دس = \frac{دص}{٢س}$

الحل: $\int س^{3} جتا\, ص \,.\, \frac{دص}{٢س}$

$\frac{1}{2}\int س^{2} جتا\, ص \,.\, دص$ نرجع الأصل دور

$\frac{1}{2}\int ص\, جتا\, ص \,.\, دص$

$ق = \frac{1}{2} ص \Leftarrow دق = \frac{1}{2} دص$

$دهـ = جتا\, ص \Leftarrow هـ = جا\, ص$

$\frac{1}{2} ص\, جا\, ص - \int \frac{1}{2} جا\, ص \,.\, دص$

$\frac{1}{2} ص\, جا\, ص + \frac{1}{2} جتا\, ص + جـ$

$= \frac{1}{2} س^{2} جا\, س^{2} + \frac{1}{2} جتا\, س^{2} + جـ$

(١٣) $\int س^{2}\sqrt{1-س} \,.\, دس$

الحل: $ق = س^{2} \Leftarrow دق = ٢س \,.\, دس$

$دهـ = (1-س)^{\frac{1}{2}} \,.\, دس \Leftarrow هـ = \frac{(1-س)^{\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}}$

$-\frac{2}{3} س^{2} (1-س)^{\frac{3}{2}} + \int \frac{4}{3} س\, (1-س)^{\frac{3}{2}} \,.\, دس$

$-\frac{2}{3} س^{2} (1-س)^{\frac{3}{2}} + \left[ق = \frac{4}{3} س \Leftarrow دق = \frac{4}{3} \,.\, دس \;;\; دهـ = (1-س)^{\frac{3}{2}} \Leftarrow هـ = \frac{(1-س)^{\frac{5}{2}}}{-\frac{5}{2}} \right]$

$-\frac{2}{3} س^{2} \sqrt{(1-س)^{3}} + \frac{-8}{15} س \sqrt{(1-س)^{5}} + \frac{8}{15} \int (1-س)^{\frac{5}{2}} \,.\, دس$

$-\frac{2}{3} س^{2} \sqrt{(1-س)^{3}} - \frac{8}{15} س \sqrt{(1-س)^{5}} + \frac{16}{105} \sqrt{(1-س)^{7}} + جـ$

(١٤) $\int \frac{س\, جا\, س}{قا\, س} \,.\, دس$

الحل: $\int س\, جا\, س\, جتا\, س\, دس$

$ق = س \Leftarrow دق = دس$

$دهـ = جا\, س\, جتا\, س \,.\, دس \Leftarrow هـ = \frac{-جتا^{2} س}{2}$

$ص = جتا\, س$

$\frac{دص}{دس} = -جا\, س$

$دس = \frac{-دص}{جا\, س}$

$\int \cancel{جا\, س}\, ص \frac{دص}{-\cancel{جا\, س}} = \frac{-ص^{2}}{2}$

$= -\frac{1}{2} س\, جتا^{2} س + \frac{1}{2} \int جتا^{2} س \,.\, دس$

$= -\frac{1}{2} س\, جتا^{2} س + \frac{1}{2} \int \frac{1}{2} (1 + جتا\, ٢س) \,.\, دس$

$= -\frac{1}{2} س\, جتا^{2} س + \frac{1}{4} (س + \frac{1}{2} جا\, ٢س) + جـ$

(١٥) $\int س^{2} هـ^{س} \,.\, دس$

الحل: $ق = س^{2} \Leftarrow دق = ٢س \,.\, دس$

$دهـ = هـ^{س} \,.\, دس \Leftarrow هـ = هـ^{س}$

$= س^{2} هـ^{س} - \int ٢س\, هـ^{س} \,.\, دس$

$س^{2} هـ^{س} - \left[ق = ٢س \Leftarrow دق = ٢ \,.\, دس \;;\; دهـ = هـ^{س} \Leftarrow هـ = هـ^{س} \right]$

$= س^{2} هـ^{س} - ٢س\, هـ^{س} + \int ٢ هـ^{س} \,.\, دس$

$= س^{2} هـ^{س} - ٢س\, هـ^{س} + ٢ هـ^{س} + جـ$

(١٦) $\int \frac{هـ^{س}}{قتا\, س} \,.\, دس$

الحل: $\int هـ^{س} جا\, س \,.\, دس$

$ق = هـ^{س} \Leftarrow دق = هـ^{س} \,.\, دس$

$دهـ = جا\, س \,.\, دس \Leftarrow هـ = -جتا\, س$

$-هـ^{س} جتا\, س - \int -هـ^{س} جتا\, س \,.\, دس$

$-هـ^{س} جتا\, س - \left[ق = هـ^{س} \Leftarrow دق = هـ^{س} \,.\, دس \;;\; دهـ = جتا\, س \,.\, دس \Leftarrow هـ = جا\, س \right]$

$\int هـ^{س} جا\, س \,.\, دس = -هـ^{س} جتا\, س + جا\, س\, هـ^{س} - \int جا\, س\, هـ^{س}\, دس$

دورية

$٢ \int هـ^{س} جا\, س \,.\, دس = -هـ^{س} جتا\, س + هـ^{س} جا\, س$

$\int هـ^{س} جا\, س \,.\, دس = \frac{-هـ^{س} جتا\, س + هـ^{س} جا\, س}{2}$

(١٧) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{(س+1)^{5}}{س^{7}} \,.\, دس$

$ص = \frac{1}{س} + 1$

$دص = \frac{-1}{س^{2}} \,.\, دس$

$-س^{2} دص = دس$

$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{(\frac{1}{س}+1)^{5}}{س^{2}} \,.\, دس$

$\int_{3}^{2} \frac{ص^{5}}{\cancel{س^{2}}} \,.\, -\cancel{س^{2}}\, دص$

$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \Leftarrow \int_{3}^{2}$

$= \left[\frac{-ص^{6}}{6} \right]_{3}^{2} = \frac{-1}{6} (2^{6} - 3^{6})$

$= \frac{-1}{6} (64 - 729) = \frac{665}{6}$

(١٨) $\int \frac{س\, جتا\, س}{جا^{3} س} \,.\, دس$

اختبر نفسك عزيزي الطالب

(١) $\int_{-\frac{\text{ط}}{٣}}^{٠} \text{جا}^٢\text{س جتا}^٤\text{س} \ . \ \text{د س}$

(٢) $\int \text{قا}^٢\sqrt{\text{س}} \ . \ \text{د س}$

(٣) $\int (٢\text{س} - ١) \ \text{جا} ٢\text{س} \ . \ \text{د س}$

(٤) $\int \frac{\text{ظتا}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})}{\text{س}} \ . \ \text{د س}$

(٥) $\int (\text{س} + ٣)\sqrt{٥ - \text{س}} \ . \ \text{د س}$

(٦) $\int \text{س}^٢\sqrt{٣\text{س} + ٢} \ . \ \text{د س}$

(٧) $\int \sqrt{٣\text{س} + ٢} \ . \ \text{د س}$

(٨) $\int \frac{\text{س}}{(\text{س}^٢ + ٤)^٢} \ . \ \text{د س}$

(٩) $\int \sqrt{\text{جا س} + ٣} \ . \ \text{جتا س} \ . \ \text{د س}$

(١٠) $\int \text{س}^٦ (٢ + \frac{٣}{\text{س}})^٦ . \text{د س}$

(١١) $\int (\text{جا س} + \text{جتا س})^٢ . \text{د س}$

(١٢) $\int_{\frac{\text{ط}}{٤}}^{\frac{\text{ط}}{٢}} \frac{\text{د س}}{١ - \text{جتا س}}$

(١٣) $\int \frac{\text{د س}}{\sqrt{\text{س}}\,(١ + \sqrt{\text{س}})^٤}$

(١٤) $\int \text{هـ}^{\text{س}} (٢ \ \text{جتا} ٣\text{س جتا س} - \text{جتا} ٢\text{س}) \ \text{د س}$

(١٥) $\int_{٠}^{\frac{\text{ط}}{٢}} \frac{\text{جا س جتا س}}{\sqrt{١ + \text{جا}^٤\text{س}}} \ . \ \text{د س}$

(١٦) $\int \frac{(١ + \text{س})^٧}{\text{س}^٩} \ . \ \text{د س}$

(١٧) $\int \text{س}^٥ \sqrt{\text{س}^٣ + ١} \ . \ \text{د س}$

التكامل في حالة القسمة

سنراجع اولاً القسمة الطويلة ثم الكسور الجزئية

• $\frac{س^3 - 5س + 1}{س^2 - 1}$

$$\begin{array}{r|l} س & \\ \hline س^3 - 5س + 1 & س^2 - 1 \\ \cancel{س^3} \mp س & \\ \hline -4س + 1 & \end{array}$$

لا يقبل الباقي

$= س + \frac{-4س + 1}{س^2 - 1}$

• $\frac{س^3 + س}{س - 1}$

$$\begin{array}{r|l} س^2 + س & \\ \hline س^3 + س & س - 1 \\ \cancel{س^3} - س^2 & \\ \hline س^2 + س & \\ \cancel{س^2} - س & \\ \hline 2س & \end{array}$$

لا يقبل ⟵ $2س$

$= س^2 + س + \frac{2س}{س - 1}$

الكسور الجزئية

يجب ان تكون درجة البسط اقل من درجة المقام وإلا نستخدم القسمة الطويلة أولاً

• $\frac{س + 1}{س^2 - 4س} = \frac{P}{س} + \frac{ب}{(س - 4)}$

تحليل

$س + 1 = P(س - 4) + ب(س)$

$س = 0 \Leftarrow 1 = -4P \Leftarrow P = -\frac{1}{4}$

$س = 4 \Leftarrow 5 = 4س \Leftarrow س = \frac{5}{4}$

$\frac{س + 1}{س^2 - 4س} = \frac{-\frac{1}{4}}{س} + \frac{\frac{5}{4}}{س - 4}$

• $\frac{6س + 7}{س^2 - س - 6} = \frac{ب}{(س - 3)} + \frac{P}{(س + 2)}$

$6س + 7 = ب(س + 2) + P(س - 3)$

$س = 3 \Leftarrow 25 = 5ب \Leftarrow ب = 5$

$س = -2 \Leftarrow -5 = -5P \Leftarrow P = 1$

$\frac{6س + 7}{س^2 - س - 6} = \frac{5}{س - 3} + \frac{1}{س + 2}$

---

① $\int \frac{1}{(2س - 3)^4} . دس$

الحل: $\int (2س - 3)^{-4} دس = \frac{(2س - 3)^{-3}}{-6} + ج$

② $\int \frac{4س + 2}{س^2 - س} . دس$

$\frac{4س + 2}{س^2 - س} = \frac{P}{(س)} + \frac{ب}{(س - 1)}$

$4س + 2 = P(س - 1) + بس$

$س = 1 \Leftarrow 6 = ب$

$س = 0 \Leftarrow 2 = -P \Leftarrow P = -2$

الحل: $\int \left(\frac{P}{س} + \frac{ب}{س - 1}\right) . دس$

$\int \frac{-2}{س} . دس + \int \frac{6}{س - 1} . دس$

$-2 لو|س| + 6 لو|س - 1| + ج$

③ $\int \frac{2}{س^2 - 1} . دس$

$\frac{2}{س^2 - 1} = \frac{P}{س - 1} + \frac{ب}{س + 1}$

$2 = P(س + 1) + ب(س - 1)$

$س = -1$

$2 = -2ب \Leftarrow ب = -1$

$س = 1$

$2 = 2P \Leftarrow P = 1$

الحل: $= \int \frac{P}{س - 1} . دس + \int \frac{ب}{س + 1} . دس$

$= \int \frac{1}{س - 1} . دس + \int \frac{-1}{س + 1} . دس$

$= لو|س - 1| - لو|س + 1| + ج$

④ $\int \frac{6س + 7}{س^2 - 4س + 3} . دس$

$\frac{6س + 7}{س^2 - 4س + 3} = \frac{P}{س - 3} + \frac{ب}{س - 1}$

$6س + 7 = P(س - 1) + ب(س - 3)$

$س = 1$

$13 = -2ب \Leftarrow ب = \frac{-13}{2}$

$س = 3$

$25 = 2P \Leftarrow P = \frac{25}{2}$

الحل: $\int \frac{P}{س - 3} . دس + \int \frac{ب}{س - 1} . دس$

$\int \frac{\frac{25}{2}}{س - 3} . دس + \int \frac{\frac{-13}{2}}{س - 1} . دس$

$= \frac{25}{2} لو|س - 3| - \frac{13}{2} لو|س - 1| + ج$

(٥) $\int \frac{\text{س}^2-\text{س}}{\text{س}+1}\,.\,\text{د س}$

الحل:

$$\int \left(\text{س}-2+\frac{2}{\text{س}+1}\right).\,\text{د س}$$

$$\frac{\text{س}^2}{2}-2\text{س}+2\,\text{لو}|\text{س}+1|+\text{جـ}$$

قسمة: $\text{س}^2-\text{س} \div (\text{س}+1)$ ، الناتج $\text{س}-2$

$-\text{س}^2\mp\text{س}$

-2س

$\pm 2\text{س}\pm 2$

2

(٦) $\int \frac{2\text{س}^3-\text{س}^2+3\text{س}}{\text{س}^2-3\text{س}-4}\,.\,\text{د س}$

قسمة: الناتج $2\text{س}+5$

$-2\text{س}^3\pm 6\text{س}^2\pm 8\text{س}$

$5\text{س}^2+11\text{س}$

$-5\text{س}^2\pm 15\text{س}\pm 20$

$26\text{س}+20$

$$\int 2\text{س}+5+\int\frac{26\text{س}+20}{\text{س}^2-3\text{س}-4}.\,\text{د س}$$

$$\frac{2\text{س}^2}{2}+5\text{س}+\int\frac{\text{أ}}{(\text{س}-4)}.\,\text{د س}+\int\frac{\text{ب}}{(\text{س}+1)}.\,\text{د س}$$

$$\text{س}^2+5\text{س}+\int\frac{124}{5(\text{س}-4)}.\,\text{د س}+\int\frac{6}{5(\text{س}+1)}.\,\text{د س}$$

$$\text{س}^2+5\text{س}+\frac{124}{5}\,\text{لو}|\text{س}-4|+\frac{6}{5}\,\text{لو}|\text{س}+1|$$

$26\text{س}+20=\text{أ}(\text{س}+1)+\text{ب}(\text{س}-4)$

$\text{س}=4$

$124=5\text{أ} \Leftarrow \text{أ}=\frac{124}{5}$

$\text{س}=-1$

$-6=-5\text{ب} \Leftarrow \text{ب}=\frac{6}{5}$

$$\text{س}^2+5\text{س}+\frac{124}{5}\,\text{لو}|\text{س}-4|+\frac{6}{5}\,\text{لو}|\text{س}+1|+\text{جـ}$$

(٧) $\int \frac{1}{\text{س}-2\sqrt{\text{س}}-3}\,.\,\text{د س}$

نفرض

$\text{ص}=\sqrt{\text{س}}$

$\text{ص}^2=\text{س}$

$2\text{ص}\,.\,\text{د ص}=\text{د س}$

$$\int\frac{2\text{ص}}{\text{ص}^2-2\text{ص}-3}\,.\,\text{د ص}$$

$$=\int\frac{\text{أ}}{\text{ص}-3}.\,\text{د ص}+\int\frac{\text{ب}}{\text{ص}+1}\,\text{د ص}$$

$$\int\frac{\frac{3}{2}}{\text{ص}-3}\,\text{د ص}+\int\frac{\frac{1}{2}}{\text{ص}+1}.\,\text{د ص}$$

$$\frac{3}{2}\,\text{لو}|\text{ص}-3|+\frac{1}{2}\,\text{لو}|\text{ص}+1|+\text{جـ}$$

$\frac{2\text{ص}}{\text{ص}^2-2\text{ص}-3}=\frac{\text{أ}}{\text{ص}-3}+\frac{\text{ب}}{\text{ص}+1}$

$2\text{ص}=\text{أ}(\text{ص}+1)+\text{ب}(\text{ص}-3)$

$\text{ص}=-1$

$-2=-4\text{ب} \Leftarrow \text{ب}=\frac{1}{2}$

$\text{ص}=3$

$6=4\text{أ} \Leftarrow \text{أ}=\frac{3}{2}$

(٨) $\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{2\text{س}}-9}\,.\,\text{د س}$

$\text{ص}=\text{هـ}^{\text{س}}$

$\text{د ص}=\text{هـ}^{\text{س}}.\,\text{د س}$

$\text{د ص}=\text{ص}\,\text{د س}$

$\text{د س}=\frac{\text{د ص}}{\text{ص}}$

$$\int\frac{\text{ص}}{\text{ص}^2-9}\,.\,\frac{\text{د ص}}{\text{ص}}$$

$$=\int\frac{\text{أ}}{\text{ص}-3}.\,\text{د ص}+\int\frac{\text{ب}}{\text{ص}+3}.\,\text{د ص}$$

$$=\int\frac{\frac{1}{6}}{\text{ص}-3}.\,\text{د ص}+\int\frac{-\frac{1}{6}}{\text{ص}+3}.\,\text{د ص}$$

$$=\frac{1}{6}\,\text{لو}|\text{ص}-3|-\frac{1}{6}\,\text{لو}|\text{ص}+3|+\text{جـ}$$

$\frac{1}{\text{ص}^2-9}=\frac{\text{أ}}{\text{ص}-3}+\frac{\text{ب}}{\text{ص}+3}$

$1=\text{أ}(\text{ص}+3)+\text{ب}(\text{ص}-3)$

$\text{ص}=-3$

$1=-6\text{ب} \Leftarrow \text{ب}=-\frac{1}{6}$

$\text{ص}=3$

$1=6\text{أ} \Leftarrow \text{أ}=\frac{1}{6}$

(٩) $\int \frac{\sqrt[3]{\text{س}}-1}{\sqrt[3]{\text{س}^2}-4}$

(١٠) $\int \frac{2\text{س}^2+3}{\text{س}^2-\text{س}}\,.\,\text{د س}$

(١١) $\int \frac{\sqrt{\text{س}-2}+1}{\sqrt{\text{س}-2}+1}$

(١٢) $\int \frac{\text{هـ}^{3\text{س}}}{\text{هـ}^{2\text{س}}-3\text{هـ}^{\text{س}}-4}$

الحل:-

$\text{ص}=\text{هـ}^{\text{س}}$

$\text{د ص}=\text{هـ}^{\text{س}}.\,\text{د س}$

$\text{د ص}=\text{ص}.\,\text{د س}$

$\text{د س}=\frac{\text{د ص}}{\text{ص}}$

$$=\int\frac{\text{ص}^3}{\text{ص}^2-3\text{ص}-4}\,\frac{\text{د ص}}{\text{ص}}$$

$$=\int\frac{\text{ص}^2}{\text{ص}^2-3\text{ص}-4}\,.\,\text{د ص}$$

قسمة: $\text{ص}^2 \div (\text{ص}^2-3\text{ص}-4)$ ، الناتج 1

$-\text{ص}^2\pm 3\text{ص}\pm 4$

$3\text{ص}+4$

$$=\text{ص}+\int\frac{3\text{ص}+4}{\text{ص}^2-3\text{ص}-4}\,.\,\text{د ص}$$

$$=\text{ص}+\int\frac{\frac{16}{5}}{\text{ص}-4}\,\text{د ص}+\int\frac{-\frac{1}{5}}{\text{ص}+1}.\,\text{د ص}$$

$$=\text{ص}+\frac{16}{5}\,\text{لو}|\text{ص}-4|-\frac{1}{5}\,\text{لو}|\text{ص}+1|+\text{جـ}$$

$\frac{3\text{ص}+4}{\text{ص}^2-3\text{ص}-4}=\frac{\text{أ}}{\text{ص}-4}+\frac{\text{ب}}{\text{ص}+1}$

$3\text{ص}+4=\text{أ}(\text{ص}+1)+\text{ب}(\text{ص}-4)$

$\text{ص}=-1$

$1=-5\text{ب} \Leftarrow \text{ب}=\frac{-1}{5}$

$\text{ص}=4$

$16=5\text{أ}$

$\text{أ}=\frac{16}{5}$

(١٣) $\int \frac{\text{س}}{\text{س}^4+\text{س}^2}\,.\,\text{د س}$

الحل: $\int \frac{\text{س}}{\text{س}^2(\text{س}^2+1)}\,.\,\text{د س}$

$= \int \frac{1}{\text{س}(\text{س}^2+1)}\,.\,\text{د س}$

$\text{ص} = \text{س}^2+1$

$\text{د ص} = 2\text{س}\,.\,\text{د س}$

$\text{د س} = \frac{\text{د ص}}{2\text{س}}$

$\int \frac{1}{\text{س}^2\,\text{ص}}\,.\,\text{د ص} = \int \frac{1\,.\,\text{د ص}}{\text{ص}(\text{ص}-1)}$

$\frac{\text{أ}}{\text{ص}-1} + \frac{\text{ب}}{\text{ص}} = \frac{1}{\text{ص}(\text{ص}-1)}$

$1 = \text{أ}\,\text{ص} + \text{ب}(\text{ص}-1)$

$\text{ص} = 0 \Leftarrow \text{ب} = -1$

$\text{ص} = 1 \Leftarrow \text{أ} = 1$

$= \int \frac{1}{\text{ص}-1}\,.\,\text{د ص} + \int \frac{-1}{\text{ص}}\,.\,\text{د ص}$

$= \text{لو}|\text{ص}-1| - \text{لو}|\text{ص}| + \text{ج}$

(١٤) $\int \frac{2\,\text{لو س}}{(\text{س}-2)^2}\,.\,\text{د س}$

$\text{ق} = 2\,\text{لو س} \Leftarrow \text{ق}' = \frac{2}{\text{س}}$

$\text{ده} = (\text{س}-2)^{-2} \Leftarrow \text{هـ} = \frac{(\text{س}-2)^{-1}}{-1}$

$= \frac{-2\,\text{لو س}}{\text{س}-2} + \int \frac{1}{\text{س}(\text{س}-2)}\,.\,\text{د س}$

$\frac{1}{\text{س}(\text{س}-2)} = \frac{\text{أ}}{\text{س}} + \frac{\text{ب}}{\text{س}-2}$

$1 = \text{أ}(\text{س}-2) + \text{ب}\,\text{س}$

$\text{س} = 0$: $1 = -2\text{أ} \Leftarrow \text{أ} = -\frac{1}{2}$

$\text{س} = 2$: $1 = 2\text{ب} \Leftarrow \text{ب} = \frac{1}{2}$

$= \frac{-2\,\text{لو س}}{\text{س}-2} + \int \frac{-\frac{1}{2}}{\text{س}}\,.\,\text{د س} + \int \frac{\frac{1}{2}}{\text{س}-2}\,.\,\text{د س}$

$= \frac{-2\,\text{لو س}}{\text{س}-2} - \frac{1}{2}\,\text{لو}|\text{س}| + \frac{1}{2}\,\text{لو}|\text{س}-2| + \text{ج}$

(١٥) $\int_1^{\text{هـ}} \frac{2}{\text{س}(\text{لو س}-2)(\text{لو س}-3)}\,.\,\text{د س}$

$\text{ص} = \text{لو س}$

$\text{د ص} = \frac{1}{\text{س}}\,.\,\text{د س}$

$\text{د س} = \text{س}\,\text{د ص}$

$\int \frac{2}{(\text{ص}-2)(\text{ص}-3)}\,.\,\text{د ص}$

$2 = \text{أ}(\text{ص}-3) + \text{ب}(\text{ص}-2)$

$\text{ص} = 3$، $\text{ب} = 2$

$\text{ص} = 2$، $\text{أ} = -2$

$\int \frac{\text{أ}}{\text{ص}-2}\,.\,\text{د ص} + \int \frac{\text{ب}}{\text{ص}-3}\,.\,\text{د ص}$

$\int \frac{-2}{\text{ص}-2}\,.\,\text{د ص} + \int \frac{2}{\text{ص}-3}\,.\,\text{د ص}$

$-2\,[\text{لو}|\text{ص}-2|] + 2\,[\text{لو}|\text{ص}-3|]$

$-2\,[(\quad) - (\text{لو}2)] + 2\,[(\text{لو}2) - (\text{لو}3)]$

$2\,\text{لو}2 + 2\,\text{لو}2 - 2\,\text{لو}3$

$= 4\,\text{لو}2 - 2\,\text{لو}3$

(١٦) $\int \frac{\text{س}^3-1}{\text{س}^3+2\text{س}}\,.\,\text{د س}$

(١٧) $\int \frac{\text{جتا س}}{1+3\,\text{جا س}-\text{جتا}2\text{س}}\,.\,\text{د س}$

الحل:

$\int \frac{\text{جتا س}}{\cancel{1}+3\,\text{جا س}-\cancel{1}+2\,\text{جا}^2\text{س}}\,.\,\text{د س}$

$\text{ص} = \text{جا س}$

$\text{د ص} = \text{جتا س}\,.\,\text{د س}$

$\int \frac{\text{جتا س}}{3\,\text{جا س}+2\,\text{جا}^2\text{س}}\,.\,\text{د س}$

$\int \frac{\cancel{\text{جتا س}}}{3\text{ص}+2\text{ص}^2}\,.\,\frac{\text{د ص}}{\cancel{\text{جتا س}}}$

$\int \frac{1}{3\text{ص}+2\text{ص}^2}\,.\,\text{د ص}$

$\frac{1}{3\text{ص}+2\text{ص}^2} = \frac{\text{أ}}{\text{ص}} + \frac{\text{ب}}{3+2\text{ص}}$

$1 = \text{أ}(3+2\text{ص}) + \text{ب}\,\text{ص}$

$\text{ص} = 0 \Leftarrow \text{أ} = \frac{1}{3}$

$\text{ص} = -\frac{3}{2}$

$1 = -\frac{3}{2}\text{ب} \Leftarrow \text{ب} = -\frac{2}{3}$

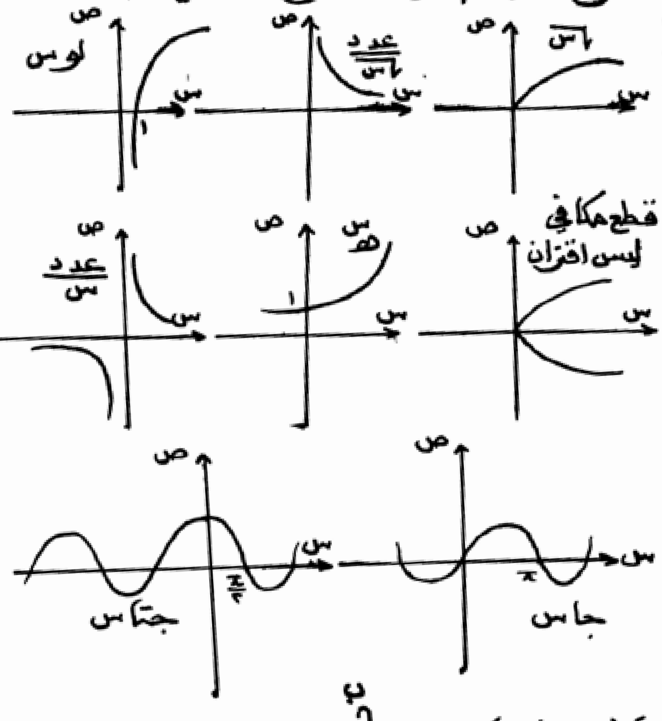
$= \int \frac{\frac{1}{3}}{\text{ص}}\,.\,\text{د ص} + \int \frac{-\frac{2}{3}}{3+2\text{ص}}\,.\,\text{د ص}$

$\frac{1}{3}\,\text{لو}|\text{ص}| - \frac{2}{3}\,\frac{\text{لو}|3+2\text{ص}|}{2} + \text{ج}$

$\frac{1}{3}\,\text{لو}|\text{ص}| - \frac{1}{3}\,\text{لو}|3+2\text{ص}| + \text{ج}$

مبادئ حساب المساحة

- نعتبر كل مستقيم على صورة ص = عدد هو اقتران واهمهم محور السينات ص = ٠
- نعتبر كل مستقيم على صورة س = عدد هو عمود واهمهم محور الصادات س = ٠
- رسمة بعض الاقترانات الهامة



قانون المساحة = $\int_{أ}^{ب}$ (الاعلى - الادنى) . دس

خطوات حل السؤال

١- تحديد ما لدينا من أعمدة واقترانات
٢- نساوي كل اقترانين ببعض لايجاد نقط التقاطع والتي تعتبر اعمدة، حدود التكامل.
٣- نرسم الاعمدة ثم الاقترانات ونظلل المنطقة المطلوبة
٤- نحدد المساحة باستخدام التكامل
٥- اذا كان لدينا ٣ اقترانات فإنه يوجد اكثر من منطقة
٦- نقط التقاء الاقترانات يجب ان تكون اعمدة

---

(١) ما مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = ٢ - $\sqrt{س}$ ومحوري السينات والصادات

الحل:-
الاعمدة ، س = ٠ محور السينات
س = ٤

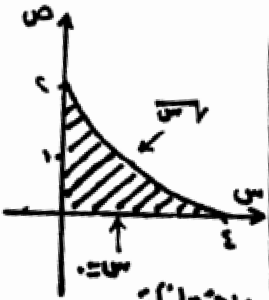
$م = \int_{0}^{4} (2 - \sqrt{س} - 0) \, . \, دس$

$= \left[2س - \frac{س^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_{0}^{4}$

$= 8 - \frac{2}{3} (4)^{\frac{3}{2}} - (0)$

$= 8 - \frac{2}{3} \times 8 = 8 - \frac{16}{3}$

$= \frac{8}{3}$



الاقترانات:
٢ - $\sqrt{س}$ ، ص = ٠
٢ - $\sqrt{س}$ = ٠
س = ٤

---

(٢) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = $س^{3}$ - ١ ومحور السينات في الفترة [-٢، ٢]

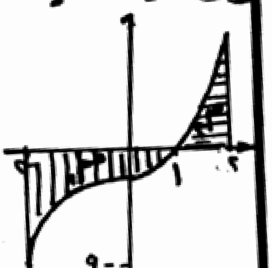
$م = م_{1} + م_{2}$

$م = \int_{-2}^{1} (0 - (س^{3} - 1)) + \int_{1}^{2} ((س^{3} - 1) - 0)$

$\left[\frac{-س^{4}}{4} + س \right]_{-2}^{1} + \left[\frac{س^{4}}{4} - س \right]_{1}^{2}$

$(\frac{-1}{4} + 1) - (-4 - 2) + (2) - (\frac{1}{4} - 1)$

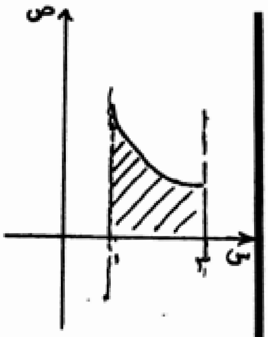
$= \frac{38}{4}$



---

(٣) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = ٢ - ٢س ومحور السينات والمستقيمين
س = -٢ ، س = ٢

④ ما مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = ١٦ − س٢ ومحور السينات والمستقيمين س = ١ ، س = ٣



الحل:

$م = \int_{١}^{٣} (١٦ - س^٢ - ٠) \, دس$

$\left[١٦س - \frac{س^٣}{٣} \right]_{١}^{٣}$

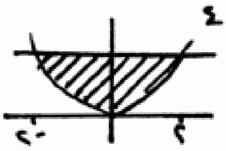
$(٤٨ - \frac{٢٧}{٣}) - (١٦ - \frac{١}{٣})$

$٣٩ - \frac{٤٧}{٣} = \frac{٧٠}{٣}$

⑤ ما مساحة المنطقة المحصورة بين ق(س) = جاس − ½ ، ومحور السينات في الفترة $[\frac{-π}{٢} ، \frac{π}{٢}]$

⑥ احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = $\sqrt{س}$ حيث س ≥ ٠ ومحور السينات والمستقيم س = ٤

⑦ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = س٢ والمستقيم ص = ٤



الحل: اقترانات س٢ ، ٤

س٢ = ٤

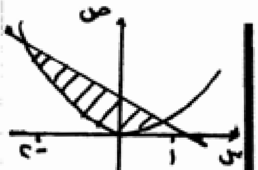
س = ± ٢

$م = \int_{-٢}^{٢} ٤ - س^٢ \, . \, دس$

$\left[٤س - \frac{س^٣}{٣} \right]_{-٢}^{٢}$

$(٨ - \frac{٨}{٣}) - (-٨ + \frac{٨}{٣}) = \frac{٣٢}{٣}$

⑧ احسب مساحة المنطقة المحصورة بين ق(س) = س٢ والمستقيم هـ(س) = ٢ − س .



الحل:

س٢ = ٢ − س

س٢ + س − ٢ = ٠

(س + ٢)(س − ١) = ٠

س = −٢ ، س = ١

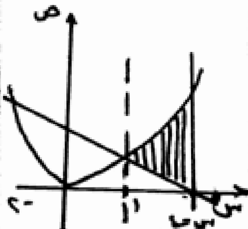
$م = \int_{-٢}^{١} ٢ - س - س^٢ \, . \, دس$

$= \left[٢س - \frac{س^٢}{٢} - \frac{س^٣}{٣} \right]_{-٢}^{١}$

$(٢ - \frac{١}{٢} - \frac{١}{٣}) - (-٤ - ٢ + \frac{٨}{٣})$

$= \frac{٩}{٢}$

⑨ ما مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق = س٢ والمستقيم هـ = ٢ − س والمستقيم س = ٤



س٢ = ٢ − س

س = −٢ ، س = ١

الحل:

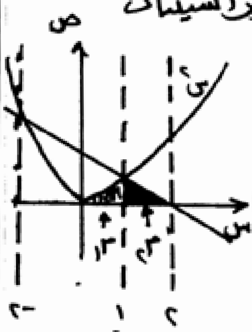
$م = \int_{١}^{٤} (س^٢ + س - ٢) \, . \, دس$

$= \left[\frac{س^٣}{٣} + \frac{س^٢}{٢} - ٢س \right]_{١}^{٤}$

$= (\frac{٦٤}{٣} + \frac{١٦}{٢} - ٨) - (\frac{١}{٣} + \frac{١}{٢} - ٢)$

$= ٢٢,٥$

⑩ ما مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق = س٢ والمستقيم هـ = ٢ − س ومحور السينات



س٢ = ٠	س٢ = ٢ − س	٢ − س = ٠
س = ٠	س = −٢ ، س = ١	س = ٢

$م = م_١ + م_٢$

$م = \int_{٠}^{١} س^٢ - ٠ + \int_{١}^{٢} ٢ - س - ٠$

$\left[\frac{س^٣}{٣} \right]_{٠}^{١} + \left[٢س - \frac{س^٢}{٢} \right]_{١}^{٢}$

$= \frac{١}{٣} + (٤ - ٢) - (٢ - \frac{١}{٢})$

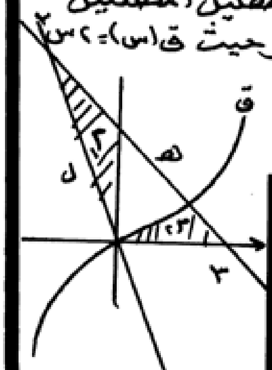
$= \frac{١}{٣} + ٢ - \frac{٣}{٢} = \frac{٥}{٦}$

١١ ما مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق = $س^٢$ والمستقيم هـ = ٢ـس والمستقيم ص = ٤

١٢ ما مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ص = $س^٣$ والمستقيمات ص = ١ ، ص = ٨ ومحور الصادات.

١٣ ما مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات ق = ٩ ـ $س^٢$ ، هـ(س) = ٥ في الفترة [-٢ ، ٢]

١٤ جد مجموع مساحتي المنطقتين المظللتين المبينتين في الشكل المجاور حيث ق(س) = $٢س^٣$ ، هـ(س) = ٣ ـ س ، ل(س) = -٢س



ق = هـ
$٢س^٣$ = ٣ ـ س
س = ١

ق = ل
$٢س^٣$ = -٢س
س = ٠
س = ١

هـ = ل
س = -٣

م = م١ + م٢ ← منطقتين

$م = \int_{-٣}^{٠} (هـ - ل) + \int_{٠}^{١} (ق - ٠) + \int_{١}^{٣} (هـ - ٠)$

$م = \int_{-٣}^{٠} (٣ - س + ٢س) + \int_{٠}^{١} ٢س^٣ + \int_{١}^{٣} ٣ - س$

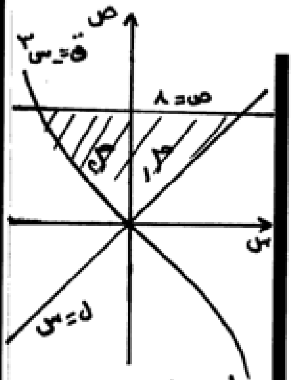
$= \left[٣س + \frac{س^٢}{٢}\right]_{-٣}^{٠} + \left[\frac{٢س^٤}{٤}\right]_{٠}^{١} + \left[٣س - \frac{س^٢}{٢}\right]_{١}^{٣}$

$(٠) - (-٩ + \frac{٩}{٢}) + \frac{١}{٢}(١) + (٩ - \frac{٩}{٢}) - (٣ - \frac{١}{٢})$

= ٧

١٥ اذا كان ق(س) = ـ $س^٣$ ، د(س) = ٨ ، ل(س) = س ، جد مساحة المنطقة المحصورة بين الاقترانات الثلاثة

الحل:



م = م١ + م٢

$= \int_{-٢}^{٠} ٨ - -س^٣ + \int_{٠}^{٨} ٨ - س$

$\left[٨س + \frac{س^٤}{٤}\right]_{-٢}^{٠} + \left[٨س - \frac{س^٢}{٢}\right]_{٠}^{٨}$

$(٠) - (-١٦ + ٤) + (٦٤ - ٣٢) - (٠)$

١٢ + ٣٢

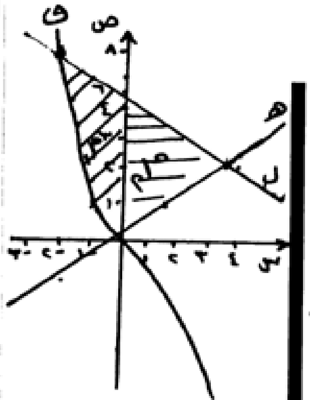
= ٤٤

ل = د
س = ٨

ق = د
ـ$س^٣$ = ٨
س = -٢

ق = ل
ـ$س^٣$ = س
س = ٠

١٦ جد مساحة المنطقة المحصورة بين ق = ـ $س^٣$ ، هـ = $\frac{١}{٢}$ س ، ل = ٦ ـ س



م = م١ + م٢

$= \int_{-٢}^{٠} ل - ق + \int_{٠}^{٤} ل - هـ$

$= \int_{-٢}^{٠} (٦ - س) + س^٣ + \int_{٠}^{٤} ٦ - س - \frac{١}{٢}س$

$\left[٦س - \frac{س^٢}{٢} + \frac{س^٤}{٤}\right]_{-٢}^{٠} + \left[٦س - \frac{٣}{٢} \cdot \frac{س^٢}{٢}\right]_{٠}^{٤}$

$(٠) - (-١٢ - ٢ + ٤) + (٢٤ - \frac{٣}{٤} \times ١٦)$

$١٠ + (٢٤ - ٣ \times ٤)$

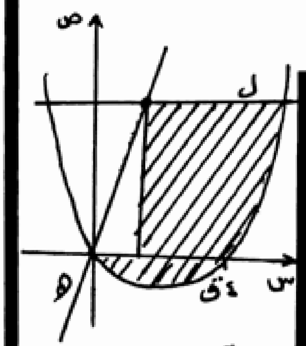
١٠ + ١٢ = ٢٢

ق = هـ
ـ$س^٣$ = $\frac{١}{٢}$ س
$٢س^٣ + س = ٠$
س = ٠

ق = ل
ـ$س^٣$ = ٦ ـ س
$س^٣ - س + ٦ = ٠$
س = -٢

هـ = ل
$\frac{١}{٢}$ س = ٦ ـ س
س = ١٢ ـ ٢س
س = ٤

(١٧) جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور حيث $ق = س^2 - ٤س$ ، $هـ = ٥س$ ، $ل = ٥$



$$م = \int_{0}^{4} (\cdot - ق) + \int_{1}^{4} (ل - \cdot) + \int_{4}^{5} ل - ق$$

$$= \int_{0}^{4} -س^2 + ٤س + \int_{1}^{4} ٥ + \int_{4}^{5} ٥ - س^2 + ٤س$$

$$= \left[-\frac{س^3}{٣} + \frac{٤س^2}{٢}\right]_{0}^{4} + ١٥ + \left[٥س - \frac{س^3}{٣} + \frac{٤س^2}{٢}\right]_{4}^{5}$$

$$= \frac{-٦٤}{٣} + ٣٢ + ١٥ +$$

$$\frac{٣٢}{٣} + ١٥ + \frac{٨}{٣}$$

$$= \frac{٨٥}{٣}$$

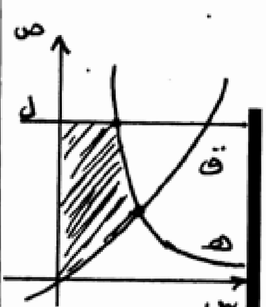
$ق = هـ$
$س^2 - ٤س - ٥س = ٠$
$س^2 - ٩س = ٠$
$س = ٠$ ، $س = ٩$

$ق = ل$
$س^2 - ٤س - ٥ = ٠$
$س = ٥$ ، $س = -١$

$هـ = ل$
$٥س = ٥$
$س = ١$

(١٨) جد مساحة المنطقة الواقعة في الربع الأول والمحصورة بين محور الصادات والمنحنيات $ق(س) = س^2 - ١$ ، $هـ(س) = ٥ - س$ ، $ل(س) = ١ - س$.

(١٩) جد مساحة المنطقة المظللة بالشكل المجاور حيث $ق(س) = س^2$ ، $هـ(س) = \frac{١}{س^2}$ ، $ل(س) = ٤$



$$م = م_1 + م_2$$

$$= \int_{0}^{\frac{1}{2}} (٤ - س^2) + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{١}{س^2} - س^2$$

$$\left[٤س - \frac{س^3}{٣}\right]_{0}^{\frac{1}{2}} + \int_{\frac{1}{2}}^{1} س^{-2} - س^2$$

$$(٢ - \frac{١}{٢٤}) + \left[\frac{س^{-1}}{-١} - \frac{س^3}{٣}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$٢ - \frac{١}{٢٤} + \left[(\frac{-١}{س} - \frac{س^3}{٣})\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$٢ - \frac{١}{٢٤} + (\frac{-١}{١} - \frac{١}{٣}) - (-٢ - \frac{١}{٢٤})$$

$$٤ - ١ - \frac{١}{٣} = \frac{٨}{٣}$$

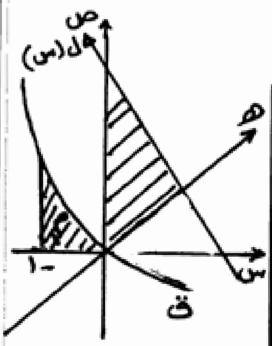
$ق = ل$
$س^2 = ٤$
$س = ٢$ ، $س = -٢$

$ق = هـ$
$س^4 = ١$
$س = \pm ١$

$هـ = ل$
$\frac{١}{س^2} = ٤$
$س = \pm \frac{١}{٢}$

(٢٠) جد المساحة المظللة في الشكل المجاور $ق = -س^3$ ، $هـ = س$ ، $ل = ٣ - ٢س$.

الحل:



$$م = م_1 + م_2 + م_3$$

$$م = \int_{-1}^{0} ق - \cdot + \int_{0}^{1} ل - هـ$$

$$= \int_{-1}^{0} -س^3 + \int_{0}^{1} ٣ - ٢س - س$$

$$= \left[\frac{-س^4}{٤}\right]_{-1}^{0} + \left[٣س - \frac{٣س^2}{٢}\right]_{0}^{1}$$

$$(٠) - (-\frac{١}{٤}) + ٣ - \frac{٣}{٢}$$

$$\frac{١}{٤} + \frac{٣}{٢}$$

$$\frac{٧}{٤}$$

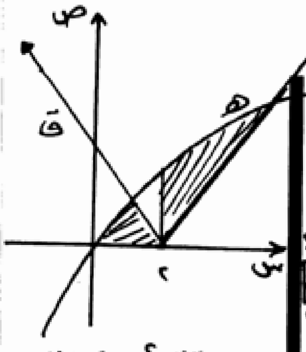
$ق = هـ$
$-س^3 = س$
$س = ٠$

$هـ = ل$
$س = ٣ - ٢س$
$س = ١$

$ل = ٠$
$-٢س + ٣ = ٠$
$س = \frac{٣}{٢}$

(٢١) جد مساحة المنطقة المحصورة في الشكل المجاور حيث $ق(س) = |س - ٢|$
$هـ(س) = \sqrt{س}$

الحل



$$م = \int_{0}^{1} هـ + \int_{1}^{2} ق + \int_{2}^{4} هـ - س + ٢$$

$$م = \int_{0}^{1} \sqrt{س} + \int_{1}^{2} ٢ - س + \int_{2}^{4} \sqrt{س} - س + ٢$$

$$\left[\frac{٢س^{\frac{3}{2}}}{٣}\right]_{0}^{1} + \left[٢س - \frac{س^2}{٢}\right]_{1}^{2} + \left[\frac{٢س^{\frac{3}{2}}}{٣} - \frac{س^2}{٢} + ٢س\right]_{2}^{4}$$

$$\frac{٢}{٣} + (٢) - (\frac{٣}{٢}) + \frac{١٦ - ٤\sqrt{٢}}{٣} - ٢$$

$$\frac{٧}{٦} + \frac{١٦ - ٤\sqrt{٢}}{٣} - ٢$$

$$\frac{٢٧ - ٨\sqrt{٢}}{٦}$$

$س - ٢$		$٢ - س$
$+$	٢	$-$

$٢ - س = هـ$
$٢ - س = \sqrt{س}$
$س = ١$

$س - ٢ = هـ$
$س - ٢ = \sqrt{س}$
$س = ٤$