2017

المنهاج الجديد

الآفاق في تبسيط الرياضيات

الطبعة الجديدة

أ.محمد الحداد
٠٧٨٦٠٧٨٧١٠

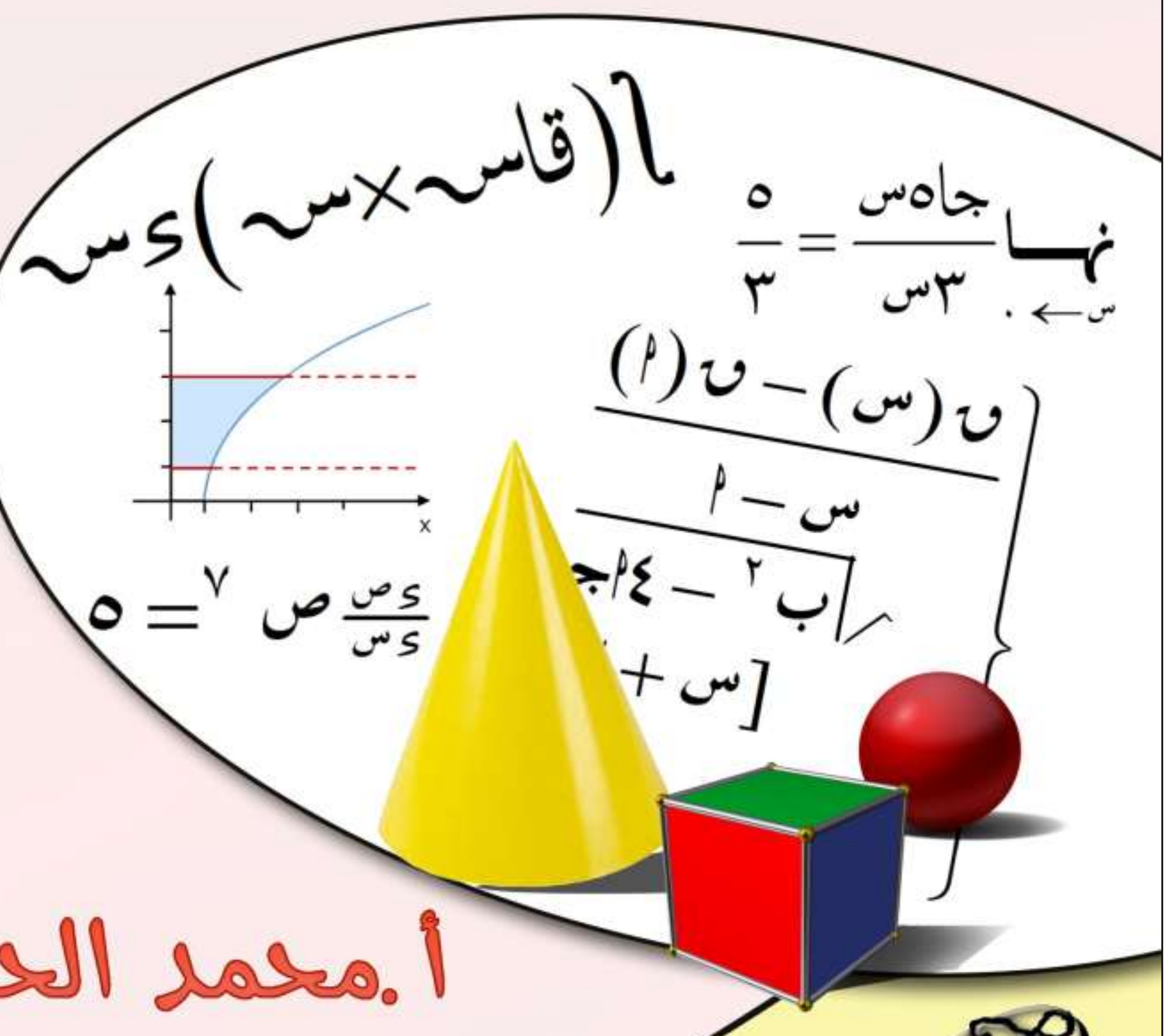
أدبي

2017

المنهاج الجديد

وحدة النهايات والاتصال

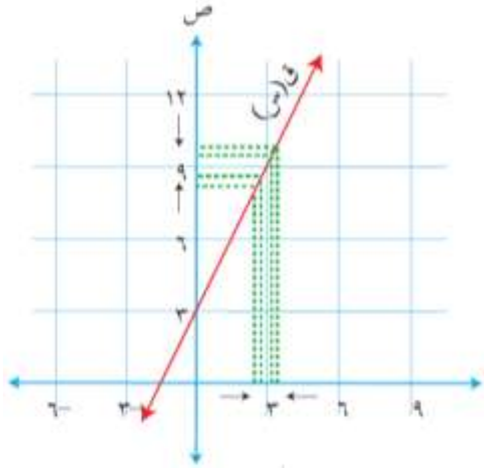
الطبعة الجديدة



أ.محمد الحداد

٠٧٨٦٠٧٨٧١٠

مفهوم النهايات



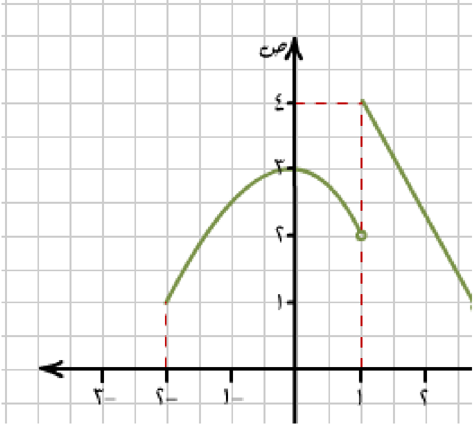
عندما نأخذ النهاية نأخذها من اليمين واليسار لأقرب نقطة للرقم، مثل رقم ٣

<u>لا نأخذ الرقم نفسه</u>

نرمز للنهاية بكلمة نها
كلما اقتربنا من اليمين واليسار للرقم نقول أن س تؤول لـ ٣
ويرمز له برمز $\underset{س \leftarrow}{\text{نهــا}}$

والان نقول أن نهاية الاقتران ق(س) عندما س تؤول الى ٣ تساوي ٩
ويرمز له برمز $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهــا}}$ ق(س) = ٩

مثال:



١- جد $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهــا}}$ ق(س)

الحل: من اليمين $\underset{س \leftarrow ١^+}{\text{نهــا}}$ ق(س) = ٤

من اليسار $\underset{س \leftarrow ١^-}{\text{نهــا}}$ ق(س) = ٣

$\underset{س \leftarrow ١^+}{\text{نهــا}}$ ق(س) $\neq$ $\underset{س \leftarrow ١^-}{\text{نهــا}}$ ق(س)

إذا $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهــا}}$ ق(س) **غير موجودة**

٢- جد $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهــا}}$ ق(س)

الحل: من اليمين $\underset{س \leftarrow -١^+}{\text{نهــا}}$ ق(س) = ٢.٥

من اليسار $\underset{س \leftarrow -١^-}{\text{نهــا}}$ ق(س) = ٢.٥

$\underset{س \leftarrow -١^+}{\text{نهــا}}$ ق(س) = $\underset{س \leftarrow -١^-}{\text{نهــا}}$ ق(س) = ٢.٥

إذا $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهــا}}$ ق(س) **موجودة**

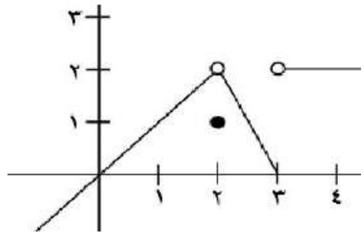
إذا كانت $\underset{س \leftarrow أ^-}{\text{نهــا}}$ ق(س) = $\underset{س \leftarrow أ^+}{\text{نهــا}}$ ق(س) = ل ، حيث ل عدد حقيقي،

فإن: $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}}$ ق(س) موجودة وتكون $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}}$ ق(س) = ل

وإذا كانت $\underset{س \leftarrow أ^-}{\text{نهــا}}$ ق(س) $\neq$ $\underset{س \leftarrow أ^+}{\text{نهــا}}$ ق(س) ، فإن $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}}$ ق(س) غير موجودة.

تمارين مفهوم النهايات

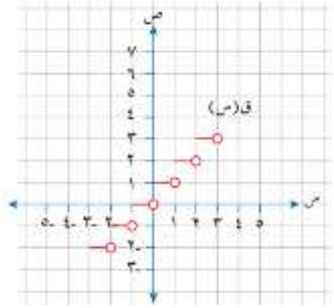
س١: معتمد على الشكل المجاور



جد نهــا ق(س)
س ← ٢

جد نهــا ق(س)
س ← ٣

س٢: معتمد على الشكل المجاور



جد نهــا ق(س)
س ← ٢

س٣:
معتمدا على الجدول الآتي

س	٣	٢,٥	٢,١	٢,٠١	٢,٠٠١		١,٩٩٩	١,٩	١,٥	١,١	١
ق(س)	٤	٣,٥	٣,١	٣,٠١	٣,٠٠١		٢,٩٩٩	٢,٩	٢,٥	٢,١	٢

جد نهــا ق(س)
س ← ٢

Mohammed Haddad
أ.محمد الحداد
٠٧٨٦٠٧٨٧١٠

نظريات النهايات

النظريـ١ـة: $\underset{س \to أ}{\text{نهـا}}\ ب = ب$ حيث ب ثابت

مثال: $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}\ ٥ = ٥$

مثال: $\underset{س \to ٥٥}{\text{نهـا}}\ ٣ = ٣$

النظريـ٢ـة: إذا كانت $\underset{س \to أ}{\text{نهـا}}\ ق(س) = ب$

وكانت $\underset{س \to أ}{\text{نهـا}}\ هـ(س) = جـ$

فإن

١)

$$\underset{س \to أ}{\text{نهـا}}\left(ق(س) \pm هـ(س)\right) = \underset{س \to أ}{\text{نهـا}}\ ق(س) \pm \underset{س \to أ}{\text{نهـا}}\ هـ(س) = ب \pm جـ$$

٢) إذا كانت م عدد حقيقي

$$\underset{س \to أ}{\text{نهـا}}\ م\,ق(س) = م\ \underset{س \to أ}{\text{نهـا}}\ ق(س) = م \times ب$$

٣)

$$\underset{س \to أ}{\text{نهـا}}\left(ق(س) \times هـ(س)\right) = \underset{س \to أ}{\text{نهـا}}\ ق(س) \times \underset{س \to أ}{\text{نهـا}}\ هـ(س) = ب \times جـ$$

٤)

$$\underset{س \to أ}{\text{نهـا}}\ \frac{ق(س)}{هـ(س)} = \frac{\underset{س \to أ}{\text{نهـا}}\ ق(س)}{\underset{س \to أ}{\text{نهـا}}\ هـ(س)} = \frac{ب}{جـ}\ ,\quad جـ \neq ٠$$

٥) إذا كانت ق(س) كثير حدود فإن

$$\underset{س \to أ}{\text{نهـا}}\ ق(س) = ق(أ)$$

٦) إذا كانت $\underset{س \to أ}{\text{نهـا}}\ ق(س) = ب$

فإن

$$\underset{س \to أ}{\text{نهـا}}\left(ق(س)\right)^{ن} = \left(\underset{س \to أ}{\text{نهـا}}\ ق(س)\right)^{ن} = ب^{ن}$$

حيث ن عدد طبيعي

مثال١: إذا كان $ق(س) = ٢س^{٣} - ٦س$ فجد:

١) $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}\ ق(س) = ٢\times٨ - ٦\times٢ = ٤$

٢) $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}\left(ق(س) + س\right)^{٢} = (٤+٢)^{٢}$

$= ٣٦$

مثال٢: إذا كانت $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}}\ ق(س) = ٦$

و $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}}\ ل(س) = ٤$

فإن:

١) $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}}\ ق(س) + ل(س) = ٦ + ٤ = ١٠$

٢) $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}}\ \dfrac{٣ق(س) - ٢ل(س)}{٤ل(س)ق(س)} =$

$$\frac{٣\times٦ - ٢\times٤}{٤\times٤\times٦} = \frac{١٠}{٩٦}$$

٣) $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}}\ \dfrac{٦ق(س)}{ل(س)} + ٢س = \dfrac{٦\times٦}{٤} + ٢\times٣$

$٩ + ٦ = ١٥$

Mohammed Haddad
أ.محمد الحداد
٠٧٨٦٠٧٨٧١٠

$\lim_{س \leftarrow ٣}$ س $ق$(س) + ٢س (ل(س))^٢ = ٤)

٣×٦ + ٢×٣×٤^٢ = ١٨ + ٩٦ = ١١٤

نتائج.... بالأمثلة الآتية

مثال٣: جد $\lim_{س \leftarrow ١}$ س^٣ − ٢

بالتعويض المباشر

١^٣ − ٢ = -١

مثال٤: جد $\lim_{س \leftarrow ٢}$ ٢س^٣ − ٢س

بالتعويض المباشر

٢×٢^٣ − ٢×٢

١٦ − ٤ = ١٢

مثال٥: إذا كانت $ق$(س) = { س − ٢ , س ≥ ٢ ؛ ٢ − س , س < ٢ }

جد $\lim_{س \leftarrow ٢}$ $ق$(س)

الحل: يجب أن نعيد تعريف الاقتران

$\lim_{س \leftarrow ٢^+}$ س − ٢ = ٠

$\lim_{س \leftarrow ٢^-}$ ٢ − س = ٠

$\lim_{س \leftarrow ٢^+}$ $ق$(س) = $\lim_{س \leftarrow ٢^-}$ $ق$(س) **موجود**

إذا $\lim_{س \leftarrow ٢}$ $ق$(س) = ٠

مثال٦: إذا كان $ق$(س) = { س − ٢ , س ≥ ٢ ؛ ٢س , س < ٢ }

جد $\lim_{س \leftarrow ٢}$ $ق$(س)

الحل: $\lim_{س \leftarrow ٢^+}$ $ق$(س) = $\lim_{س \leftarrow ٢^+}$ س − ٢ = ٠

$\lim_{س \leftarrow ٢^-}$ $ق$(س) = $\lim_{س \leftarrow ٢^-}$ ٢س = ٤

$\lim_{س \leftarrow ٢^-}$ $ق$(س) ≠ $\lim_{س \leftarrow ٢^+}$ $ق$(س)

إذا $\lim_{س \leftarrow ٢}$ $ق$(س) **غير موجودة**

مثال٧: جد $\lim_{س \leftarrow ٢}$ $ق$(س)

$ق$(س) = { ٣س^٢ , س=٢ ؛ ٢س , س≠٢ }

الحل: $\lim_{س \leftarrow ٢}$ $ق$(س) = $\lim_{س \leftarrow ٢}$ ٢س = ٤

ملاحظة١: لم نأخذ النهاية من اليمين واليسار لان الاقتران المتشعب لا يوجد به متباينة اكبر واصغر

ملاحظة٢: لم نأخذ المعادلة الاولى لان س=٢ وفي النهاية يجب أن لا نأخذ الرقم نفسه

مثال٨: إذا كانت

هـ(س) = { ٤س , س ≥ ١ ؛ ٢أ , س < ١ }

جد قيمة أ إذا علمت أن $\lim_{س \leftarrow ١}$ هـ(س) **موجودة**

الحل:

$\lim_{س \leftarrow ١^+}$ هـ(س) = $\lim_{س \leftarrow ١^-}$ هـ(س)

٤×١=٢× أ

٤=٢ أ

أ=٢

أ.محمد الحداد

Mohammed Haddad

٠٧٨٦٠٧٨٧١٠

مثال٩: جد $\lim_{س \to -١} \frac{س^{٢} + س}{س - ١} = \frac{٠}{-٢} = ٠$

مثال١٠: جد $\lim_{س \to ٤} ق(س)$

إذا علمت أن $ق(س) = \begin{cases} س^{٢} - ٦ &، س \geq ٤ \\ ٢س + ٢ &، س < ٤ \end{cases}$

الحل: $\lim_{س \to ٤^{+}} س^{٢} - ٦ = ٤^{٢} - ٦ = ١٦ - ٦$

$= ١٠$

$\lim_{س \to ٤^{-}} ٢س + ٢ = ٢ \times ٤ + ٢$

$٨ + ٢ = ١٠$

$\lim_{س \to ٤^{+}} ق(س) = \lim_{س \to ٤^{-}} ق(س)$

$\therefore \lim_{س \to ٤} ق(س) = ١٠$

مثال١١: إذا كان

$ق(س) = \begin{cases} س^{٢} - ل &، س \geq ٢ \\ ٢ل + ١ &، س < ٢ \end{cases}$

إذا كانت $\lim_{س \to ٢} ق(س)$ موجودة فما قيمة ل

$\lim_{س \to ٢^{+}} ق(س) = \lim_{س \to ٢^{-}} ق(س)$

$\lim_{س \to ٢^{+}} س^{٢} - ل = \lim_{س \to ٢^{-}} سل + ١$

$٤ - ل = ٢ل + ١$

$٤ - ١ = ٢ل + ل$

$٣ = ٣ل$

$ل = ١$

تمارين نظريات النهايات

س١: جد $\lim_{س \to ٢} س^{٣} + ٥$

س٢: اذا كان

$ق(س) = \begin{cases} ٣س &, س \geq ٢ \\ ٢س - س^{٢} &, س < ٢ \end{cases}$

جد $\lim_{س \to ٢} ق(س)$

س٣: إذا كانت $\lim_{س \to ١} ق(س) = ٢$

و $\lim_{س \to ١} ل(س) = ٣$

فجد ١) $\lim_{س \to ١} \frac{ق(س) + ل(س)}{٥}$

٢) $\lim_{س \to ١} \frac{٦ق(س)}{ل(س)}$

٣) $\lim_{س \to ١} \left(٣(ل(س) + ق(س)) + س\right)^{٢}$

س٤: إذا كان $\lim_{س \to ٢} ٤س^{٢} + ٢أ - ٤ = ٢$

س٥: إذا كان

$\lim_{س \to ١} \left(٢ق(س) + ٣س - ٤\right) = ٧$

جد $\lim_{س \to ١} \left(سق(س) + س^{٢}\right)$

Mohammed Haddad

أ.محمد الحداد

٠٧٨٦٠٧٨٧١٠

س٦: إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٤ , & س \neq ١ \\ ٥س + ٧ , & س = ١ \end{cases}$$

جد $\underset{س \to ١}{نهـا} ق(س)$

س٧: إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + أس , & س \geqslant ١ \\ ٥س + ٧ , & س < ١ \end{cases}$$

وكانت $\underset{س \to ١}{نهـا} ق(س)$ **موجودة فما قيمة** أ

س٨: إذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٨ , & س < أ \\ ٢س^{٢} , & س \geqslant أ \end{cases}$

وكانت $\underset{س \to أ}{نهـا} ق(س)$ **موجود**

س٩: إذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٥س - أ , & س < ١ \\ بس^{٢} - ٩ , & س \geqslant ١ \end{cases}$

وكانت $\underset{س \to ٥}{نهـا} ق(س) = ١٦$

و $\underset{س \to ١}{نهـا} ق(س)$ **موجود**

جد كلا من أ ، ب

س١٠: إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + ١ , & س < ٢ \\ ٥س , & ٢ \leqslant س \leqslant ٦ \\ س^{٢} + ١ , & س > ٦ \end{cases}$$

جد

$\underset{س \to ٢}{نهـا} ق(س) =$

$\underset{س \to ٦}{نهـا} ق(س) =$

س١١: إذا كان

$\underset{س \to ٢}{نهـا} \left(٢ق(س) \right) = ٨$

جد $\underset{س \to ٢}{نهـا} \left(س ق(س) - س^{٢} \right)^{٢}$

نهاية خارج قسمة اقترانين

نظرية(١): إذا كانت أ،ل،ك $\neq$ ٠،

وكانت $\lim\limits_{س \leftarrow أ} ق(س) = ل$، $\lim\limits_{س \leftarrow أ} هـ(س) = ك$

فإن

$$\lim_{س \leftarrow أ} \frac{ق(س)}{هـ(س)} = \frac{\lim\limits_{س \leftarrow أ} ق(س)}{\lim\limits_{س \leftarrow أ} هـ(س)} = \frac{ل}{ك}$$

مثال١: إذا كانت $\lim\limits_{س \leftarrow ٤} ق(س) = ٣$،

$\lim\limits_{س \leftarrow ٤} هـ(س) = -٥$، فما قيمة

$$\lim_{س \leftarrow ٤} \frac{٢ق(س) + ٧}{هـ(س) + ٩}$$

الحل:

$$\lim_{س \leftarrow ٤} \frac{٢ق(س) + ٧}{هـ(س) + ٩} = \frac{٢ \times ٣ + ٧}{-٥ + ٩}$$

$$= \frac{٦ + ٧}{-٥ + ٩} = \frac{١٣}{٤}$$

مثال٢: جد $\lim\limits_{س \leftarrow ٢} \frac{٢س^٢ + ٤}{س + ٢}$

الحل:

$$\lim_{س \leftarrow ٢} \frac{٢س^٢ + ٤}{س + ٢} = \frac{٢(٢)^٢ + ٤}{٢ + ٢} = \frac{٨ + ٤}{٢ + ٢}$$

$$\frac{١٢}{٤} = ٣$$

مثال٣: $\lim\limits_{س \leftarrow ٤} \frac{\sqrt{س + ٥} + ٣}{س + ٢}$

الحل:

$$\lim_{س \leftarrow ٤} \frac{\sqrt{س + ٥} + ٣}{س + ٢} = \frac{\sqrt{٤ + ٥} + ٣}{٤ + ٢}$$

$$\frac{\sqrt{٩} + ٣}{٦} = \frac{٦}{٦} = ١$$

سنتطرق في هذا الدرس طرق إيجاد النهايات

عندما يكون الجواب = $\frac{٠}{٠}$

١) **بطرق التحليل**

٢) **توحيد المقام**

٣) **ضرب المرافق**

Mohammed Haddad

أ.محمد الحداد

٠٧٨٦٠٧٨٧١٠

مثال٤: جد $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢}$

بالتعويض المباشر يساوي $\frac{٠}{٠}$

وهذا يعنى نهاية الاقتران يجب أن تحل بطرق أخرى

الطريقة الأولى بالتحليل

$$\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢} \frac{(س + ٢)(س - ٢)}{س - ٢}$$

$$\lim_{س \to ٢} \frac{(س + ٢)\cancel{(س - ٢)}}{\cancel{س - ٢}}$$

$$\lim_{س \to ٢} \frac{(س + ٢)}{١} = ٤$$

مثال٥: جد $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٣} - ٢٧}{س - ٣}$

بالتعويض المباشر يساوي $\frac{٠}{٠}$

الحل بالتحليل

$$\lim_{س \to ٣} \frac{\cancel{(س - ٣)}\left(س^{٢} + ٦س + ٩\right)}{\cancel{س - ٣}}$$

$$\lim_{س \to ٣} س^{٢} + ٦س + ٩ = ٣٦$$

مثال٦: جد $\lim_{س \to -٢} \frac{٢س^{٢} + ٣س - ٢}{س + ٢}$

بالتعويض المباشر يساوي $\frac{٠}{٠}$

نحلل :

$$\lim_{س \to -٢} \frac{٢س^{٢} + (٤ - ١)س - ٢}{س + ٢}$$

$$\lim_{س \to -٢} \frac{٢س^{٢} + ٤س - ١س - ٢}{س + ٢}$$

$$\lim_{س \to -٢} \frac{٢س(س + ٢) - ١(س + ٢)}{س + ٢}$$

$$\lim_{س \to -٢} \frac{\cancel{(س + ٢)}\,(٢س - ١)}{\cancel{س + ٢}}$$

$$\lim_{س \to -٢} (٢س - ١) = -٥$$

مثال٧: جد $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٤} - ٢س + ١}{س - ١} = \frac{٠}{٠}$

نحلل: إذا لاحظت أن العدد ١ يصفر البسط لذلك نتطرق لطريقة قسمة التركيب أو الطويلة

$$\lim_{س \to ١} \frac{\cancel{(س - ١)}\left(١س^{٣} + ١س^{٢} - ١س - ١\right)}{\cancel{س - ١}}$$

$$\lim_{س \to ١} \left(س^{٣} + س^{٢} - س - ١\right) = ٠$$

مثال٨: $\lim_{س \to ٨} \frac{(س + ١)^{٢} - ٨١}{س - ٨} = \frac{٠}{٠}$

$$\lim_{س \to ٨} \frac{\left((س + ١) + ٩\right)\left((س + ١) - ٩\right)}{٨ - س}$$

$$\lim_{س \to ٨} \frac{(س + ١٠)\,\cancel{(س - ٨)}^{-١}}{\cancel{٨ - س}}$$

$$\lim_{س \to ٨} (س + ١٠) = ١٨$$

الطريقة الثانية بتوحيد المقام

مثال٩: $\lim\limits_{\text{س} \to 2} \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{\text{س}}\right)\left(\frac{1}{\text{س}^2 - 4}\right) = \frac{0}{0}$

$$\lim_{\text{س} \to 2} \left(\frac{3\text{س}}{2\text{س}} - \frac{3 \times 2}{2\text{س}}\right)\left(\frac{1}{\text{س}^2 - 4}\right)$$

$$\lim_{\text{س} \to 2} \left(\frac{3\text{س} - 6}{2\text{س}}\right)\left(\frac{1}{\text{س}^2 - 4}\right)$$

$$\lim_{\text{س} \to 2} \left(\frac{3\text{س} - 6}{(2\text{س})(\text{س}^2 - 4)}\right)$$

$$\lim_{\text{س} \to 2} \left(\frac{3\cancel{(\text{س} - 2)}}{(2\text{س})\cancel{(\text{س} - 2)}(\text{س} + 2)}\right)$$

$$\lim_{\text{س} \to 2} \left(\frac{3\cancel{(\text{س} - 2)}}{(2\text{س})\cancel{(\text{س} - 2)}(\text{س} + 2)}\right)$$

$$\lim_{\text{س} \to 2} \left(\frac{3}{(2\text{س})(\text{س} + 2)}\right) = \frac{3}{16}$$

مثال١٠: $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \frac{1}{\text{س}}\left(\frac{1}{3 - \text{س}} - \frac{1}{3 + \text{س}}\right) = \frac{0}{0}$

نوحد المقام

$$\lim_{\text{س} \to 0} \frac{1}{\text{س}}\left(\frac{(3 + \text{س}) - (3 - \text{س})}{(3 - \text{س})(3 + \text{س})}\right)$$

$$\lim_{\text{س} \to 0} \frac{1}{\text{س}}\left(\frac{\cancel{3} + \text{س} - \cancel{3} + \text{س}}{(3 - \text{س})(3 + \text{س})}\right)$$

$$\lim_{\text{س} \to 0} \frac{1}{\cancel{\text{س}}}\left(\frac{2\cancel{\text{س}}}{(3 - \text{س})(3 + \text{س})}\right)$$

$$\lim_{\text{س} \to 0} \left(\frac{2}{(3 - \text{س})(3 + \text{س})}\right) = \frac{2}{9}$$

مثال١١: $\lim\limits_{\text{س} \to 1} \frac{\frac{1}{\text{س} + 1} - \frac{2}{\text{س} + 3}}{\text{س} - 1} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{\text{س} \to 1} \frac{\text{س} + 3 - 2(\text{س} + 1)}{(\text{س} + 1)(\text{س} + 3)} \times \frac{1}{\text{س} - 1}$$

$$\lim_{\text{س} \to 1} \frac{\text{س} + 3 - 2\text{س} - 2}{(\text{س} + 1)(\text{س} + 3)} \times \frac{1}{\text{س} - 1}$$

$$\lim_{\text{س} \to 1} \frac{\overset{-1}{\cancel{-\text{س} + 1}}}{(\text{س} + 1)(\text{س} + 3)} \times \frac{1}{\cancel{\text{س} - 1}}$$

$$\lim_{\text{س} \to 1} \frac{-1}{(\text{س} + 1)(\text{س} + 3)} = \frac{-1}{8}$$

الطريقة الثالثة ضرب بالمرافق

ملاحظة: $\left(\sqrt{س}+\sqrt{ص}\right)\left(\sqrt{س}-\sqrt{ص}\right)=س-ص$

مثال١٢:جد $\underset{س\to ٩}{\text{نها}}\ \frac{س-٩}{\sqrt{س}-٣}=\frac{٠}{٠}$

$$\underset{س\to ٩}{\text{نها}}\ \frac{س-٩}{\sqrt{س}-٣}\times\frac{\sqrt{س}+٣}{\sqrt{س}+٣}$$

$$\underset{س\to ٩}{\text{نها}}\ \frac{(س-٩)\left(\sqrt{س}+٣\right)}{\left(\sqrt{س}-٣\right)\left(\sqrt{س}+٣\right)}$$

$$\underset{س\to ٩}{\text{نها}}\ \frac{\cancel{(س-٩)}\left(\sqrt{س}+٣\right)}{\cancel{(س-٩)}}$$

$$\underset{س\to ٩}{\text{نها}}\ \sqrt{س}+٣=\sqrt{٩}+٣=٦$$

مثال١٣: $\underset{س\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\sqrt{١+س^{٢}}-\sqrt{١-س^{٢}}}{س^{٢}}=\frac{٠}{٠}$

ضرب بالمرافق

$$\underset{س\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\sqrt{١+س^{٢}}-\sqrt{١-س^{٢}}}{س^{٢}}\times\frac{\sqrt{١+س^{٢}}+\sqrt{١-س^{٢}}}{\sqrt{١+س^{٢}}+\sqrt{١-س^{٢}}}$$

$$\underset{س\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{(١+س^{٢})-(١-س^{٢})}{س^{٢}\left(\sqrt{١+س^{٢}}+\sqrt{١-س^{٢}}\right)}$$

$$\underset{س\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\cancel{١}+س^{٢}-\cancel{١}+س^{٢}}{س^{٢}\left(\sqrt{١+س^{٢}}+\sqrt{١-س^{٢}}\right)}$$

$$\underset{س\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{٢\cancel{س^{٢}}}{\cancel{س^{٢}}\left(\sqrt{١+س^{٢}}+\sqrt{١-س^{٢}}\right)}$$

$$\underset{س\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{٢}{\left(\sqrt{١+س^{٢}}+\sqrt{١-س^{٢}}\right)}=\frac{\cancel{٢}}{\cancel{٢}\sqrt{٢}}=\frac{١}{\sqrt{٢}}$$

مثال١٤: إذا كان ق(س)= س² فجد

$$\underset{س\to ٢}{\text{نها}}\ \frac{ق(س)-ق(٢)}{س-٢}$$

الحل:

$$\underset{س\to ٢}{\text{نها}}\ \frac{ق(س)-ق(٢)}{س-٢}=\underset{س\to ٢}{\text{نها}}\ \frac{س^{٢}-(٢)^{٢}}{س-٢}$$

$$\underset{س\to ٢}{\text{نها}}\ \frac{س^{٢}-٤}{س-٢}=\underset{س\to ٢}{\text{نها}}\ \frac{\cancel{(س-٢)}(س+٢)}{\cancel{س-٢}}$$

$$\underset{س\to ٢}{\text{نها}}\ (س+٢)=٤$$

مثال١٥: إذا كان ق(س)= س² فجد

$$\underset{هـ\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{ق(س+هـ)-ق(س)}{هـ}$$

الحل:

$$\underset{هـ\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{ق(س+هـ)-ق(س)}{هـ}=$$

$$\underset{هـ\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{(س+هـ)^{٢}-س^{٢}}{هـ}=$$

$$\underset{هـ\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\cancel{س^{٢}}+٢هـس+هـ^{٢}-\cancel{س^{٢}}}{هـ}=$$

$$\underset{هـ\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{٢هـس+هـ^{٢}}{هـ}=\underset{هـ\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\cancel{هـ}(٢س+هـ)}{\cancel{هـ}}=$$

$$\underset{هـ\to ٠}{\text{نها}}\ ٢س+هـ=٢س$$

تمارين نهاية خارج قسمة اقترانين

أوجد قيمة كل من النهايات التالية (إن وجدت)

س١: $\lim_{س \to ٤} \frac{٢س}{٢س - ٤}$

س٢: $\lim_{س \to ١} \frac{س^٣ - س}{س^٢ - ١}$

س٣: $\lim_{س \to ٠} \frac{\frac{١}{س + ٢} - \frac{١}{٢}}{س}$

س٤: $\lim_{س \to ١} \frac{س^٢ + ٧س - ٨}{س^٢ - ١}$

س٥: $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{٤ - س} - \sqrt{س}}{٢ - س}$

س٦: $\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س} - ٢}{س - ٤}$

س٧: إذا كان ق(س)= $\sqrt{س}$ فجد

$\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(س + هـ) - ق(س)}{هـ}$

س٨: $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٣س}{\sqrt{س} - ٣}$

س٩: $\lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{\frac{١}{س + ١} - \frac{١}{٣}}$

أ.محمد الحداد

Mohammed Haddad

٠٧٨٦٠٧٨٧١٠

نظرية: إذا كانت $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا} ق(س) = ل$

فإن

$\underset{س \leftarrow أ}{نهـا} \sqrt[ن]{ق(س)} = \sqrt[ن]{\underset{س \leftarrow أ}{نهـا} ق(س)} = \sqrt[ن]{ل}$

بشرط ل > صفر و كان (ن عدد زوجي)

مثال١:

$\underset{س \leftarrow ١}{نهـا} \sqrt{س + ٣}$

$\sqrt{١ + ٣} = ٢$

بما أن الجواب تحت الجذر موجب نعوض مباشراً

مثال٢:

$\underset{س \leftarrow -٥}{نهـا} \sqrt{س^٢ - ٩} =$

$\sqrt{٢٥ - ٩} = \sqrt{١٦} = ٤$

مثال٣:

$\underset{س \leftarrow -٣}{نهـا} \sqrt[٣]{س - ٥} =$

$\sqrt[٣]{-٣ - ٥} = \sqrt[٣]{-٨} = -٢$

ملاحظة: الجذر الفردي يأخذ إشارة الموجب والسالب تحت الجذر

مثال٤:

$\underset{س \leftarrow -٢٠}{نهـا} \sqrt[٤]{س + ٤} =$

$\sqrt[٤]{-٢٠ + ٤} = \sqrt[٤]{-١٦} \neq -٢$

إذا غير موجودة

لإن الشرط أن يكون داخل الجذر الزوجي موجب دائماً

مثال٥: إذا كان

$\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} ق(س) = ٢$، $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} هـ(س) = -٤$

جد

$\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} \sqrt{٦ق(س) + سهـ(س) + ١}$

الحل:

$\sqrt{٦ \times ٢ + (٣ \times -٤) + ١}$

$\sqrt{\cancel{١٢} + \cancel{-١٢} + ١}$

$\sqrt{١} = ١$

ملاحظة: إذا كانت $ق(أ) = ٠$ وكان ن عددا زوجيا

(($\underset{س \leftarrow أ}{نهـا} \sqrt[ن]{ق(س)} = \sqrt[ن]{٠}$))

فإن نأخذ النهاية من اليمين واليسار

مثال٦: جد $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} \sqrt{س - ٢}$

بالتعويض المباشر الناتج

$\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} \sqrt{س - ٢} = \sqrt{٠}$

إذا يجب أن نأخذ النهاية من اليمين واليسار

$\underset{س \leftarrow ٢^+}{نهـا} \sqrt{٢ - ٢} = \sqrt{٠} = ٠$

$\underset{س \leftarrow ٢^-}{نهـا} \sqrt{٢ - ٢} =$ **غير معرفة !!!!**

غير معرفة لأنه لو فرضنا أن س هي ١.٩ لأصبح الناتج $\sqrt{-٠.١}$ وهذه عبارة خاطئة لعدم وجود سالب تحت الجذور الزوجية

$\underset{س \leftarrow ٢^-}{نهـا} \sqrt{س - ٢} \neq \underset{س \leftarrow ٢^+}{نهـا} \sqrt{س - ٢}$

إذا $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} \sqrt{س - ٢}$ **غير موجودة**

Mohammed Haddad

أ.محمد الحداد

٠٧٨٦٠٧٨٧١٠

مثال٧: جد $\underset{س \leftarrow -٢}{\text{نهـا}} \sqrt{س^{٢}-٤}$

الحل: $\underset{س \leftarrow -٢}{\text{نهـا}} \sqrt{س^{٢}-٤} = \sqrt{٠}$

$\underset{س \leftarrow -٢^{+}}{\text{نهـا}} \sqrt{س^{٢}-٤} =$ **غير معرفة**

$\underset{س \leftarrow -٢^{-}}{\text{نهـا}} \sqrt{س^{٢}-٤} = \sqrt{٠} = ٠$

$\underset{س \leftarrow -٢^{-}}{\text{نهـا}} \sqrt{س^{٢}-٤} \neq \underset{س \leftarrow -٢^{+}}{\text{نهـا}} \sqrt{س^{٢}-٢}$

إذا $\underset{س \leftarrow -٢}{\text{نهـا}} \sqrt{س^{٢}-٤}$ **غير موجود**

مثال٨: جد $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \sqrt{(س-١)^{٢}}$

$\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \sqrt{(س-١)^{٢}} = \sqrt{٠} = ٠$

$\underset{س \leftarrow ١^{+}}{\text{نهـا}} \sqrt{(س-١)^{٢}} = \sqrt{٠} = ٠$

$\underset{س \leftarrow ١^{-}}{\text{نهـا}} \sqrt{(س-١)^{٢}} = \sqrt{٠} = ٠$

$\underset{س \leftarrow ١^{-}}{\text{نهـا}} \sqrt{(س-١)^{٢}} = \underset{س \leftarrow ١^{+}}{\text{نهـا}} \sqrt{(س-١)^{٢}}$

$\therefore \underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \sqrt{(س-١)^{٢}} = ٠$

مثال ٩ مهم: جد $\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \sqrt{\dfrac{س^{٢}-١٦}{س-٤}}$

الحل:

$\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \sqrt{\dfrac{س^{٢}-١٦}{س-٤}} = \sqrt{\dfrac{٠}{٠}}$

$\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \sqrt{\dfrac{(س+٤)\cancel{(س-٤)}}{\cancel{س-٤}}} = \underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \sqrt{(س+٤)}$

$\sqrt{(٤+٤)} = \sqrt{٨}$

مثال ١٠ مهم: جد $\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{س^{٢}-١٦}}{\sqrt{س-٤}}$

الحل:

$\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{س^{٢}-١٦}}{\sqrt{س-٤}} = \dfrac{٠}{٠}$

لكن هنا نقول غير موجودة وذلك لان الجذر الزوجي موزع والنهاية تحت الجذر من اليسار غير موجودة

فرق بين

$\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \sqrt{\dfrac{س^{٢}-١٦}{س-٤}}$ و $\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{س^{٢}-١٦}}{\sqrt{س-٤}}$

$\sqrt{٨}$ غير موجودة

Mohammed Haddad

س١: جد ناتج ما يلي

١) $\underset{\text{س}\to -٣}{\text{نهـا}} \sqrt[٣]{(\text{س}-٥)^{٢}} =$

٢) $\underset{\text{س}\to ٥}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س}^{٢}-٩\text{س}} =$

٣) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س}^{٢}-٢\text{س}} =$

٤) $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \sqrt{\dfrac{٣\text{س}-\text{س}^{٢}}{٣-\text{س}}} =$

٥) $\underset{\text{س}\to ٥}{\text{نهـا}} \sqrt{\dfrac{٥-\text{س}}{\text{س}^{٢}-٢٥}} =$

٦) $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \sqrt[٣]{\dfrac{١-\text{س}}{\text{س}^{٢}-١}} =$

٧) $\underset{\text{س}\to ٦}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س}^{٢}-٦\text{س}}}{\sqrt{\text{س}-٦}} =$

٨) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}-\text{س}}}{\sqrt[٣]{\text{س}-١}} =$

٩) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س}-٣\text{س}}+\text{س}-٥ =$

س٢: إذا كان

$\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = ٣$، $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}}\ \text{ل}(\text{س}) = -١$

جد

١) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \sqrt{٨(\text{ل}(\text{س})+\text{ق}(\text{س}))}+\text{س} =$

٢) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \sqrt{٨\text{ل}(\text{س})+\text{س}} =$

٣) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \sqrt{\dfrac{٩}{\text{ق}(\text{س})}-\text{ل}(\text{س})} =$

٤) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \sqrt[٣]{٨\text{ل}(\text{س})}+٢\text{س} =$

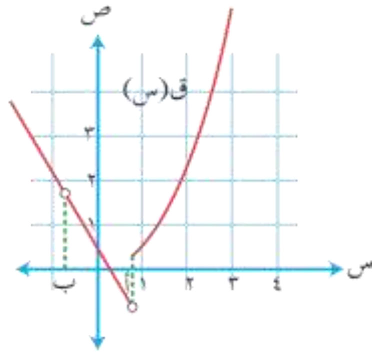
Mohammed Haddad

أ.محمد الحداد

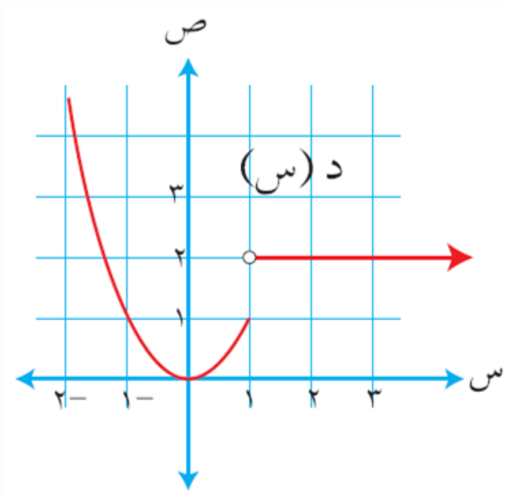
٠٧٨٦٠٧٨٧١٠

الاتصـــــال

نقول إن الاقتران هـ متصل عند س= م ، إذا كان منحنى الاقتران هـ ليس فيه فجوة أو انقطاع عند س = م

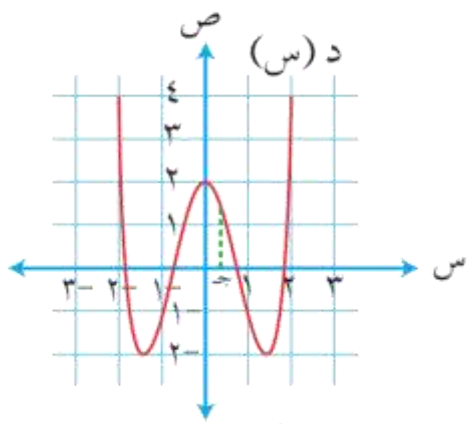


غير متصل عند أ ، ب

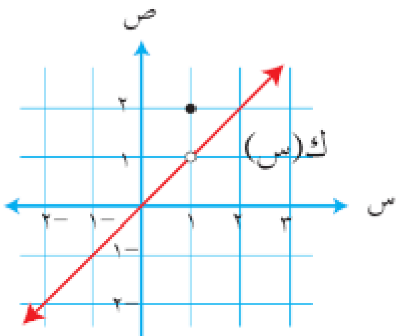


$\underset{س \to 1^{+}}{\text{نهـا}}\ د(س) \neq \underset{س \to 1^{-}}{\text{نهـا}}\ د(س)$

إذا الاقتران د غير متصل



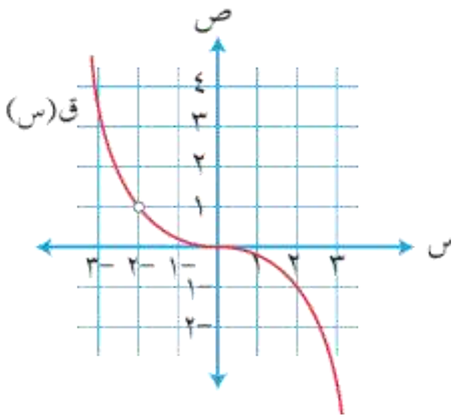
مَتصل عند جـ



غير متصل عن س=١

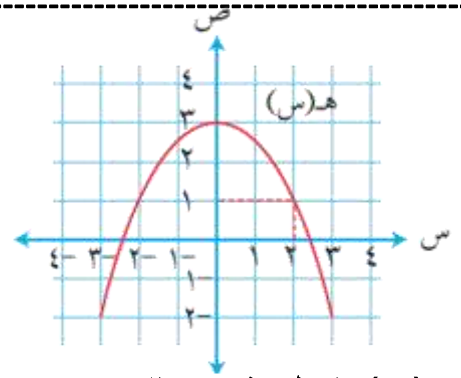
$\underset{س \to 1^{+}}{\text{نهـا}}\ ك(س) = \underset{س \to 1^{-}}{\text{نهـا}}\ ك(س) = 1$

ك(١)=٢



ق(س)غير معرف عند س=-٢

ق(س)غير متصل عند س= -٢



هـ(س) متصل عند س=٢

هـ(س) معرف عند س=٢

هـ(٢)=١

Mohammed Haddad

أ.محمد الحداد

٠٧٨٦٠٧٨٧١٠

$\lim\limits_{س \to ٢^+} هـ(س) = \lim\limits_{س \to ٢^-} هـ(س) = ١$

تعريف

يكون الاقتران ق متصلاً عند س = أ ، إذا حقق الشروط الآتية:

١) الاقتران ق معرف عند س = أ .

٢) $\lim\limits_{س \to أ}$ ق(س) موجودة .

٣) $\lim\limits_{س \to أ}$ ق(س) = ق(أ) .

مثال١: $ق(س) = \begin{cases} ٢س & ، س > ٢ \\ ٣س - ٢ & ، س = ٢ \\ س^٢ & ، س < ٢ \end{cases}$

ابحث في اتصال ق عند س=٢

الحل:

نبحث إذا الاقتران ق معرف عند س=٢

١) ق(٢)= ٣×٢ – ٢ = ٦ – ٢ = ٤

٢) $\lim\limits_{س \to ٢^+} ق(س) = \lim\limits_{س \to ٢^+} ٢س = ٤$

$\lim\limits_{س \to ٢^-} ق(س) = \lim\limits_{س \to ٢^-} س^٢ = ٤$

$\lim\limits_{س \to ٢} ق(س) = ٤$

٣) $\lim\limits_{س \to ٢} ق(س) = ق(٢) = ٤$

∴ق(س) متصل عند س=٢

مثال٢: $ق(س) = \begin{cases} ٦س + ٤ & ، س < ٣ \\ س^٣ - ٨ & ، س \geq ٣ \end{cases}$

ابحث في اتصال ق عند س=٣

الحل:

نبحث إذا الاقتران ق معرف عند س=٣

١) ق(٣)= ٤ + ٦×٣ = ٤ + ١٨ = ٢٢

٢) $\lim\limits_{س \to ٣^+} ق(س) = \lim\limits_{س \to ٣^+} س^٣ - ٨ = ١٩$

$\lim\limits_{س \to ٣^-} ق(س) = \lim\limits_{س \to ٣^-} ٤ + ٦س = ١٩$

$\lim\limits_{س \to ٣} ق(س) =$ **غير موجودة**

٣) $\lim\limits_{س \to ٣} ق(س) \neq ق(٣)$

∴ق(س) غير متصل عند س=٣

مثال٣: $ق(س) = \begin{cases} \dfrac{٢ + س}{٢} & ، س \neq ٢ \\ ٣س - ٢ & ، س = ٢ \end{cases}$

ابحث في اتصال ق عند س=٢

الحل:

$\lim\limits_{س \to ٢} ق(س) = \lim\limits_{س \to ٢} \dfrac{س + ٢}{٢} = ٢$

ق(٢)= ٣×٢ – ٢ = ٢

$\lim\limits_{س \to ٢} ق(س) = ق(٢)$

∴ق(س) متصل عند س=٢

مثال٤: إذا كان ق(س)=٢س ^{٣}– ٢س

ابحث في اتصال ق عند س=٢

بالتعويض المباشر

=٢×٢ ^{٣} – ٢×٢

= ١٦ – ٤ = ١٢

ق(س)=٢×٢ ^{٣} – ٢×٢

= ١٦ – ٤ = ١٢

$\lim\limits_{س \to ٢} ق(س) = ق(٢)$

∴ق(س) متصل عند س=٢

نتيجة: إذا كان ق(س) كثير الحدود فإنه متصل على جميع الأعداد الحقيقية.

Mohammed Haddad

أ.محمد الحداد

٠٧٨٦٠٧٨٧١٠

مثال٥: إذا كان ع(س)= $\frac{س^2 - ٤}{س - ٢}$

ابحث في اتصال ع عند س=٢

$$\lim_{س \to ٢} \frac{س^2 - ٤}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢} \frac{(س+٢)(س-٢)}{س-٢}$$

$$\lim_{س \to ٢} \frac{(س+٢)\cancel{(س-٢)}}{\cancel{س-٢}}$$

$$\lim_{س \to ٢} \frac{(س+٢)}{١} = ٤$$

لكن ع(٢) غير معرف

∴ع(س) غير متصل عند س=٢

مثال٦: ليكن

$$ق(س) = \begin{cases} ٢س + ٤ & ،س \leq ١ \\ م & ،س > ١ \end{cases}$$

جد قيمة م التي تجعل ق متصلا عند س=١

الحل:

$$\lim_{س \to ١^+} ق(س) = \lim_{س \to ١^-} ق(س)$$

٢×١ + ٤ = م

$\boxed{م=٦}$

مثال٧:

ليكن

$$ق(س) = \begin{cases} أس^3 - بس + ١ & ,س < ١ \\ ٥ & ,س = ١ \\ س^2 - (أ+ب)س + ٢ & ,س > ١ \end{cases}$$

جد قيمة أ، ب التي تجعل ق متصلا عند س=١

الحل:

$$\lim_{س \to ١^+} ق(س) = \lim_{س \to ١^-} ق(س)$$

١ – (أ+ب)+٢ = أ – ب + ١

١– أ – ب +٢= أ – ب +١

١ + ٢ = ٢أ +١

٢ = ٢أ $\boxed{أ=١}$

الآن نعوض أ بأحد المعادلتين

$$\lim_{س \to ١^-} ق(س) = ق(١)$$

١– ب + ١ = ٥

– ب+٢=٥

– ب=٣

ب=–٣

مثال٨: ليكن

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{٣ - س}{س - ٣} & ،س \neq ٣ \\ مس + ٢ & ،س=٣ \end{cases}$$

جد قيمة م التي تجعل ق متصلا عند س=٣

الحل:

$$\lim_{س \to ٣} ق(س) = ق(٣)$$

$$\lim_{س \to ٣} \frac{\cancel{٣ - س}^{\,-١}}{\cancel{س - ٣}} = ق(٣)$$

$$-١ = م \times ٣ + ٢$$

$$-٣ = ٣م$$

$$م = -١$$

Mohammed Haddad

أ.محمد الحداد

٠٧٨٦٠٧٨٧١٠

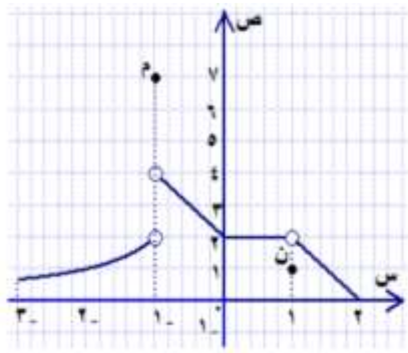
تمارين الاتصـــال

س١: $ق(س) = ٢س + ٤$
ابحث في اتصال ق عند س=٤

س٢: $ق(س) = \begin{cases} ٢س + ٤ &، س \leq ١ \\ ٨س^{٢} - ٢ &، س > ١ \end{cases}$

ابحث في اتصال ق عند س=١

س٣: ابحث في اتصال ق عند س=١
عند س=٠



س٥:

س٦: $ق(س) = \begin{cases} \dfrac{س^{٢} - ٩}{س - ٣} &، س > ٣ \\ ٤س - ٦ &، س = ٣ \\ س^{٢} - ٣ &، س < ٣ \end{cases}$

ابحث في اتصال ق عند س=٣

س٧: ليكن

$ق(س) = \begin{cases} أس - بس + ٥ &, س < ١ \\ ٩ &, س = ١ \\ س^{٢} - بس + ٣ &, س > ١ \end{cases}$ جد

قيمة أ، ب التي تجعل ق متصلا عند س=١

س٨: إذا كان $ق(س) = \begin{cases} \dfrac{س^{٢} - ٤}{س - ٢} &، س = ٢ \\ \dfrac{س^{٢} + ٢س}{س} &، س \neq ٢ \end{cases}$

ابحث في اتصال ق عند س=٢

س٩: ليكن

$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{٣س - س^{٢}}{س^{٢} - ٩} &، س \neq ٣ \\ \dfrac{م}{٤س} &، س = ٣ \end{cases}$

جد قيمة م التي تجعل ق متصلا عند س=٣

نظريات الاتصـــال

نظريات في الاتصال

من خلال تعريف الاتصال عند نقطة يمكن التوصل إلى النظريات الآتية:

نظرية (١)

إذا كان ق اقترانًا كثير حدود، فإن ق متصل عند س لكل س ∈ ح.

نظرية (٢)

إذا كان ق، د اقترانين متصلين عند س = أ ، فإن:

١) كلا الاقترانين ق + د ، ق − د اقتران متصل عند س = أ

٢) الاقتران ق × د متصل عند س = أ

٣) الاقتران $\left(\frac{\text{ق}}{\text{د}}\right)$ متصل عند س = أ، بشرط أن د (أ) ≠ ٠

نظرية (٣)

إذا كان ق اقترانًا متصلاً عند س = أ ، ق(س) ≥ ٠ في فترة مفتوحة تحتوي أ ، فإن هـ حيث هـ(س) = $\sqrt{\text{ق(س)}}$ اقتران متصل عند س = أ

مثال١: إذا كان $\text{ق(س)} = \frac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{س} - ١}$

$\text{هـ(س)} = \sqrt{\text{س} + ٢}$

فابحث في اتصال الاقتران ق × هـ عند س=٢

الحل:

$\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \text{ق(س)} = \frac{٢^{٢} - ١}{٢ - ١} = \frac{٣}{١} = ٣$

$\text{ق(٢)} = \frac{٢^{٢} - ١}{٢ - ١} = \frac{٣}{١} = ٣$

$\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \text{ق(س)} = \text{ق(٢)}$

∴ ق(س) متصل عند س=٢

$\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \text{هـ(س)} = \sqrt{٢ + ٢} = \sqrt{٤} = ٢$

$\text{هـ(س)} = \sqrt{٢ + ٢} = \sqrt{٤} = ٢$

$\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \text{هـ(س)} = \text{هـ(٢)}$

∴ هـ (س) متصل عند س=٢

∴ الاقتران ق × هـ متصل عند س=٢

مثال٢: إذا كان

$\text{ق(س)} = \text{س}^{٢} + ٢ ، \quad \text{هـ(س)} = \begin{cases} \text{س} - ١ ، & \text{س} \leq ٣ \\ ٥ - \text{س} ، & \text{س} > ٣ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران (ق + هـ) عند س=٣

الحل:

ق(س) متصل ، كثير حدود

$\underset{\text{س} \to ٣^{+}}{\text{نهـا}} \text{هـ(س)} = \underset{\text{س} \to ٣^{+}}{\text{نهـا}} ٥ - \text{س} = ٢$

$\underset{\text{س} \to ٣^{-}}{\text{نهـا}} \text{هـ(س)} = \underset{\text{س} \to ٣^{-}}{\text{نهـا}} \text{س} - ١ = ٢$

$\underset{\text{س} \to ٣^{-}}{\text{نهـا}} \text{هـ(س)} = \underset{\text{س} \to ٣^{+}}{\text{نهـا}} \text{هـ(س)} = \underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}} \text{هـ(س)}$

$\text{هـ(٣)} = ٣ - ١ = ٢$

$\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}} \text{هـ(س)} = \text{هـ(٣)}$ **إذن هـ(س)متصل**

∴ **الاقتران (ق + هـ) متصل عند س=٣**

ملاحظة: لا يمكن استخدام نظريات الاتصال (الجمع والطرح والضرب والقسمة) إذا كان أحد الاقترانين على الاقل غير متصل فالحل دمج الاقترانين باقتران واحد والبحث عن اتصال الاقتران الجديد (بعد الدمج)

مثال٣: إذا كان

$\text{ق(س)} = \text{س}^{٢} + ٢ ، \quad \text{هـ(س)} = \begin{cases} \text{س} - ١ ، & \text{س} \leq ١ \\ ٥ - \text{س} ، & \text{س} > ١ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران (ق - هـ) عند س=١

الحل:

ق(س) متصل ، كثير حدود

Mohammed Haddad

أ.محمد الحداد

٠٧٨٦٠٧٨٧١٠

$$\lim_{\text{س} \to 1^+} \text{هـ(س)} = \lim_{\text{س} \to 1^+} ٥ - \text{س} = ٤$$

$$\lim_{\text{س} \to 1^-} \text{هـ(س)} = \lim_{\text{س} \to 1^-} ١ - ١ = ٠$$

$$\lim_{\text{س} \to 1^-} \text{هـ(س)} \neq \lim_{\text{س} \to 1^+} \text{هـ(س)} \quad \text{غير موجودة}$$

إذا هـ(س) غير متصل

فيجب البحث عن اتصالهما عن طريق <u>الدمج</u>

ل(س) = ق(س) - هـ(س)

$$\text{ل(س)} = \begin{cases} (\text{س}^{٢} + ٢) - (\text{س} - ١) & \text{،س} \leqslant ١ \\ (\text{س}^{٢} + ٢) - (٥ - \text{س}) & \text{،س} > ١ \end{cases}$$

$$\lim_{\text{س} \to 1^+} \text{ل(س)} =$$

$$\lim_{\text{س} \to 1^+} (\text{س}^{٢} + ٢) - (٥ - \text{س}) = -١$$

$$\lim_{\text{س} \to 1^-} \text{ل(س)} =$$

$$\lim_{\text{س} \to 1^-} (\text{س}^{٢} + ٢) - (\text{س} - ١) = ٣$$

$$\lim_{\text{س} \to 1^-} \text{ل(س)} \neq \lim_{\text{س} \to 1^+} \text{ل(س)} \quad \text{غير موجودة}$$

إذا ل(س) غير متصل عند س = ١

ملاحظة: قد يصبح الاقترانين متصلين بعد الدمج

<u>نتيجة:</u> الاقتران النسبي هو اقتران متصل لقيم س جميعها <u>باستثناء أصفار المقام</u>

مثال٤: إذا $\text{ق(س)} = \dfrac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{س} - ١}$

جد قيمة س التي تجعل ق(س) غير متصل

الحل: نبحث في أصفار المقام

س − ١ = ٠

س = ١

إذا ق(س) غير متصل عند س = ١

مثال٥: إذا كان

$\text{ق(س)} = \dfrac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س} - ٢}$، $\text{هـ(س)} = \dfrac{١}{\text{س} + ٢}$ **فابحث**

في اتصال الاقتران (ق × هـ) عند س=٢

الحل:

ق(س) غير متصل عند س = ٢

هـ(س) متصل عند س = ٢

فيجب البحث عن اتصالهما عن طريق <u>الدمج</u>

ل(س) = ق(س) × هـ(س)

$$\text{ل(س)} = \frac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س} - ٢} \times \frac{١}{\text{س} + ٢} = \frac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س}^{٢} - ٤} = ١$$

بما أن ل(س)=١ إذن متصل عند س=٢

س١: إذا كان

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س} + ٦ & \text{،س} \leq ١ \\ ٨\text{س}^{٢} & \text{،س} > ١ \end{cases}$$

$$\text{هـ}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س} - ٢ & \text{،س} \leq ١ \\ ٨\text{س}^{٢} - ٨ & \text{،س} > ١ \end{cases}$$

فابحث في اتصال

١) (ق+هـ)(س) عند س=١

٢) (ق-هـ)(س) عند س=١

٣) (ق×هـ)(س) عند س=١

٤) $\left(\dfrac{\text{ق}}{\text{هـ}}\right)$**(س) عند س=١**

س٢: إذا كان

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{س} \quad \text{،} \quad \text{هـ}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} - ١ & \text{،س} \leq -١ \\ ١ - \text{س} & \text{،س} > -١ \end{cases}$$

فابحث في اتصال الاقتران (ق×هـ) عند س=-١

س٣: جد قيمة س التي تجعل الاقتران غير متصل في كل مما يلي:

١) $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{س} - ٥}{\text{س}^{٢} - ٩}$

٢) $\text{ع}(\text{س}) = \text{س}^{٢} - ١$

٣) $\text{ل}(\text{س}) = \dfrac{\text{س} + ١}{\text{س}^{٢} - ٢\text{س}}$

٤) $\text{ك}(\text{س}) = \dfrac{\text{س} - ٢}{٤}$

٥) $\text{ر}(\text{س}) = \dfrac{٢\text{س} + ٧}{\text{س}^{٢} + ٣\text{س} - ٤}$

٦) $\text{ط}(\text{س}) = \dfrac{\text{س} + ٥٨}{\text{س}^{٢} + ٤}$

٧) $\text{و}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}}{٣\text{س} - \text{س}^{٢}}$

٨) $\text{ل}(\text{س}) = \dfrac{\text{س} + ١}{\text{س}^{٢} - ١} + \dfrac{٢}{\text{س}}$

٩) $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} + ١ & \text{،س} \geq ٣ \\ ٥ - \text{س} & \text{،س} < ٣ \end{cases}$

س٢: إذا كان

$\text{ق}(\text{س}) = \text{س} \quad \text{،} \quad \text{هـ}(\text{س}) = \dfrac{\text{س} - ٥}{\text{س}^{٢} - ٥\text{س}}$ **فابحث في اتصال الاقتران (ق × هـ) عند س=٥**

Mohammed Haddad
أ.محمد الحداد
٠٧٨٦٠٧٨٧١٠