لا تنتظر وقتاً إضافياً .... لا تؤجل عمل اليوم إلى الغد .... اجعل هدفك ليس النجاح فقط بل التفوق والتميز

إهداء الى روح والداي
غفر الله لهما وجعلهما
من أهل الجنة

الرياضيـــات

العلامـة الكاملـة

المستوى الثالث – الفرع العلمي

وحدة التفاضل

إعداد الأستاذ

عبد الغفار الشيخ

٠٧٩٦٦٩٢٥٧٩٠٧٨٦٥٠٢٠٧٣

التفاضل

معدل التغير

مقدار التغير :

إذا طرأ تغيير على مقدار معين بزيادة أو نقصان أو العكس فإننا نرمز لهذا التغيير بالرمز Δ ويسمى مقدار التغير

فعندما نقول أن مقدار التغير في س يعني أن

Δ س = س$_2$ − س$_1$

س$_2$ = س$_1$ + Δ س

وان مقدار التغير في ص هو Δ ص = ص$_2$ − ص$_1$

وان مقدار التغير في الاقتران ق (س)

Δ ق(س) = ق (س$_2$) − ق (س$_1$)

أوجد Δ س إذا تغيرت س من ٢.٩ إلى ١.٧

اوجد مقدار التغير في س في الفترة [- ٥ ، -٢]

أوجد Δ س إذا تغيرت س من س$_1$ = ن إلى س$_2$ = ن + ١

إذا كانت Δ س = ٥ ، س$_1$ = ١٥ اوجد مقدار س$_2$

اوجد مقدار التغير في ص عندما ص$_1$ = ٦ ، ص$_2$ = ٣

إذا كان ص = ق (س) = س^2 − ٤ س + ١ فجد مقدار التغير في الاقتران في الحالات الآتية :

١ - إذا تغيرت س من ١ إلى ٣

٢ − إذا تغيرت س من س$_1$ = ن إلى س$_2$ = ن - ١

اوجد مقدار التغير في ق (س) = $\sqrt{\text{س - ١}}$ بحيث Δ س = ١٦ ، س$_1$ = ١٠

إذا كان ق(س) = { ٣ س + ٤ ، س ≥ ٢ ؛ $\sqrt{\text{٢س − ١}}$ ، س < ٢ }

إذا تغيرت س من س$_1$ = ١ إلى س$_2$ = ٥ فاوجد مقدار التغير في الاقتران

اوجد مقدار التغير في ق (س) = 2 س^2 - ١ بحيث Δ س = ١ ، س$_2$ = ٣

اوجد Δ ق (س) للاقتران ق(س) = س^2 − س عندما تتغير س من س$_1$ = ٢ ، س$_2$ = ٥

إذا كان ق (س) = س^2 − س فجد مقدار التغير في قيمة الاقتران ق إذا تغيرت س من

أ) ٣ إلى ٤

ب) س$_1$ = هـ ، س$_2$ = ٢ + هـ

إذا كان ق (س) = (س^2 + س)$^{-1}$ وكان مقدار التغير في قيمة الاقتران ق عندما تغير س من ١ إلى س$_2$ يساوي ($-\frac{1}{3}$)

فجد قيمة س$_2$ ، حيث س$_2$ > ٠

معدل التغير

المقصود بمعدل التغير للاقتران أي النسبة بين مقدار التغير في الاقتران إلى مقدار التغير في س وتكتب كعلاقة رياضية كما يلي :

$$\frac{\Delta\ \text{ق(س)}}{\Delta\ \text{س}} = \frac{\text{ق(س}_{٢}\text{)} - \text{ق(س}_{١}\text{)}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}} = \frac{\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}}$$

إذا كان ق(س) =
- ٢ س^{٢} - ٢ ، ١ ≤ س ≤ ٣
- س + ١ ، ٣ ≤ س ≤ ٥

اوجد معدل التغير في الاقتران إذا كان ق (س) = س^{٣} - س في الفترة [- ١ ، ٢]

إذا كان ق(س) =
- | ٢ س − ٣ | ، ٠ ≤ س < ٢
- [س + ١] ، ٢ ≤ س < ٦

فجد معدل التغير في الاقتران ق عندما تتغير س من ١ إلى ٤

اوجد معدل التغير في الاقتران إذا كان ق (س) = ٣س^{٢} - ٧س - ٢ في الفترة عندما س$_{١}$ = ٢ ، س$_{٢}$ = ٤

إذا كان ق (س) = [٢ س + [س]] جد معدل التغير في الاقتران ق (س) في [- ٢.٥ ، ٢.٥]

إذا كان ص = ق (س) = ٥ − س^{٢} جد معدل التغير في الاقتران ق إذا تغيرت س من ٢ إلى ٢.١

إذا كان ق (س) = [$\frac{١}{٢}$ س − ١] فجد معدل التغير في الاقتران ق في الفترة [٣ ، ٥]

إذا كان ق (س) = | ٢ س − ٦ | فجد معدل التغير في الاقتران ققي الفترة [١ ، ٤]

إذا كان ق (س) = [س +٤] اوجد معدل التغير في الاقتران إذا كانت س$_{١}$ = ١ومقدار التغير في س = ١.٥

إذا كان ق(س) =
- ٥ س^{٣} - ١ ، س ≥١
- س + ٥ ، س < ١

اوجد معدل التغير في الاقتران عندما تتغير س من -١ إلى ٢

جد معدل التغير في الاقتران ق (س) = | ٣ − ٥ س | عندما تتغير س من − ٢ إلى ٣

إذا كان ق (س) = | جتا س | اوجد معدل التغير في الاقتران في [$\frac{\pi}{3}$ ، π]

إذا كان معدل التغير للاقتران ق (س) في الفترة [١ ، ٣] يساوي ٤ وكان الاقتران هـ (س) = ق (س) – س جد معدل التغير في هـ (س) في الفترة [١ ، ٣]

إذا كان معدل تغير الاقتران ق (س) يساوي ٤ في [٢ ، أ] وكان مقدار التغير في الاقتران = ٨ جد أ

إذا كان معدل التغير للاقتران ق (س) في الفترة [١ ، ٤] يساوي ٦ وكان الاقتران هـ (س) = ٣ س - ق (س) + ٢ فجد معدل التغير في الاقتران هـ (س) في الفترة [١ ، ٤]

إذا كان ق (س) = أ $س^{٢}$ – ٣ س + ٤ وكان معدل تغير الاقتران في الفترة [١ ، ٣] يساوي ٣ جد قيمة أ

إذا كان ق (س) = أ $س^{٢}$ وكان مقدار معدل التغير في الاقتران على الفترة [-٢ ، ٤] يساوي ٤ جد أ

إذا كان معدل التغير للاقتران ق (س) على [-١ ، ٣] يساوي ٤ وكان الاقتران هـ (س) = ٢ ق (س) – ٣ $س^{٢}$ جد معدل التغير للاقتران هـ (س) على نفس الفترة

إذا كان ق (س) = ٢ $س^{٢}$ + س + ١ وكان معدل التغير في الاقتران على الفترة [أ ، ٢ أ] يساوي ٧ جد أ

إذا كان معدل التغير للاقتران ق (س) في الفترة [١ ، ٤] يساوي 3 وكان ق (١) + ق (٤) = ٢ فجد معدل التغير في الاقتران هـ (س) = $ق^{٢}$ (س) + ٢ في الفترة [١ ، ٤]

إذا كان ق (س) = ٤ $س^{٢}$ – أ وكان معدل التغير في الاقتران على الفترة [أ ، ٢] يساوي - ٤ جد أ

إذا كان معدل التغير للاقتران ق (س) في الفترة [٢ ، ٥] يساوي ٧ وكان معدل تغيره في الفترة [٥ ، ٩] يساوي ١٤ فجد معدل التغير في الاقتران ق (س) في الفترة [٢ ، ٩]

إذا كان ق (س) = س^{٢} – ٣ جد معدل التغير في الاقتران ق
إذا تغيرت س من (١) إلى (١ + هـ)

إذا كان ق (س) = س^{٢} + هـ (س) حيث

$$\text{هـ (س)} = \begin{cases} \text{س}^{٣} + ١ & ١ \le \text{س} < ٥ \\ ١٠ & ٥ \le \text{س} \le ٧ \end{cases}$$

جد معدل التغير في الاقتران ق (س) على [١ ، ٥]

إذا كان معدل التغير في ق(س) على [-١ ، ٢] يساوي ٥
جد معدل التغير للاقتران هـ (س) = ٤ س^{٢} - ٣ ق (س)
على نفس الفترة

إذا كان هـ (س) = ٢ ق (س) وكان معدل التغير في ق(س)
على [١ ، ٣] يساوي ٨ جد معدل التغير في هـ (س)
عندما تتغير س من ٣ إلى ١

إذا كان معدل تغير الاقتران ق (س) على [١، ٩]
يساوي ٢ جد معدل التغير في الاقتران
هـ (س) = ق (س^{٢}) + ٥ على الفترة [١ ، ٣]

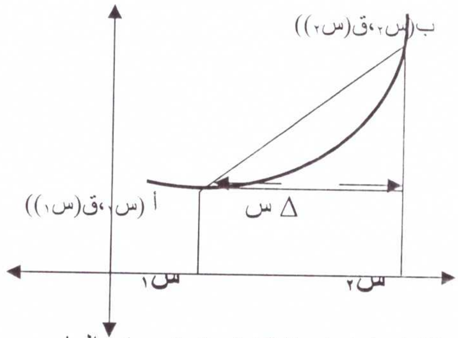
إذا كان معدل التغير في ق(س) على [١ ، ٣] يساوي ٥
وكان ق (١) × ق (٣) = ١٢ وكان هـ (س) = $\frac{١}{\text{ق (س)}}$
جد قيمة معدل التغير للاقتران هـ (س) في الفترة نفسها

إذا كان ق (س) = ظا س أثبت أن معدل التغير في الاقتران
يساوي
$\frac{\text{قا}^{٢}\text{ س ظا هـ}}{\text{هـ (١ – ظا س ظا هـ)}}$ عندما تتغير س من س إلى س + هـ

إذا كان معدل التغير في ق(س) على [-١ ، ٢] يساوي ٥
وكان معدل التغير في ق(س) على [٢ ، ٣] يساوي ٧ جد
معدل التغير في ق(س) على [-١ ، ٣]

إذا كان معدل التغير في ق (س) على [١ ، ٦] يساوي ١٢
وكان هـ (س) = ٢ س - ٣ ق (س) فجد معدل التغير
في الاقتران في الفترة [١ ، ٦]

التفسير الهندسي لمعدل التغير



ميل المستقيم القاطع لمنحنى الاقتران ق (س) والمار بالنقطتين أ (س١ ، ص١) ، ب (س٢ ، ص٢)

م $= \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} =$ ظا هـ = معدل التغير

جد ميل القاطع المار بالنقطتين (٢، ق (٢)) ،(٥، ق (٥)) لمنحنى الاقتران ق (س) = س^٢ - ٣ س

إذا كان القاطع المار بالنقطتين (٢، ق (٢)) ،(٣، ق (٣)) يصنع زاوية قياسها ١٢٠° مع محور السينات الموجب جد معدل تغير ق إذا تغيرت س من ٢ إلى ٣

إذا كان القاطع المار بالنقطتين (١، ق (١)) ، (٢ ، ٤) يصنع زاوية قياسها $\frac{٣\pi}{٤}$ راد مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فجد ق (١)

التفسير الفيزيائي لمعدل التغير

$$\frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(ن + \Delta ن) - ف(ن)}{\Delta ن}$$

$$\bar{ع} = \frac{ف(ن_٢) - ف(ن_١)}{ن_٢ - ن_١}$$

يتحرك جسيم على خط مستقيم حس العلاقة ف(ن) = ٢ ن^٢+٦ احسب السرعة المتوسطة في [٣ ، ٥]

يتحرك جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة ف (ن) = ٣ ن^٢ – ٤ ن + ٢٠ حيث ف بعد الجسيم بالأمتار عن النقطة (و) ، ن الزمن بالثواني ، احسب السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة الزمنية [١ ، ٤]

قذف جسيم رأسياً للأعلى بعده (ف) بالأمتار عن سطح الأرض بعد ن ثانية معطى بالعلاقة ف (ن) =٦٠ ن– ٥ ن^٢ **أوجد :**

أ - السرعة المعدلة للجسيم في الفترة الزمنية [٢ ، ٥]

ب - السرعة المتوسطة للجسيم بدلالة Δ ن إذا تغيرت ن من ن = صفر إلى Δ ن

تحرك جسيم في المستوى الإحداثي على خط مستقيم من النقطة أ (س ، ص) إلى النقطة ب (٢ ، ٥) ، إذا كانت Δ س = ٠.١ ، Δ ص = ٠.٦ فجد إحداثي النقطة أ

صفيحة معدنية مربعة الشكل تتمدد بالحرارة محافظة على شكلها إذا زاد طول ضلعها من ٦ إلى ٦.١ سم فجد معد تغير مساحة الصفيحة بالنسبة إلى طول ضلعها

المشتقة الأولى

يرمز لها بالرمز قَ(س) ، صَ ميل المماس ، $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ ، $\frac{\text{د}}{\text{د س}}$

أو قَ (س) = $\underset{\Delta \text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{س} + \Delta \text{س}) - \text{ق}(\text{س})}{\Delta \text{س}}$

أو قَ (س) = $\underset{\text{س}_٢ \to \text{س}_١}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{س}_٢) - \text{ق}(\text{س}_١)}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$

أوَ ق (س) = $\underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$

أو قَ (س) = $\underset{\text{ع} \to \text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

أي أن المشتقة الأولى هي نهاية معدل التغير عندما هـ تقترب من الصفر أو نهاية ميل القاطع عندما يؤول إلى المماس عند النقطة أ ، وتكون المشتقة موجودة بشرط وجود النهاية

إذا كان ق (س) = ٢س + ٥ جد قَ (س) باستخدام تعريف المشتقة الأولى

إذا كان قَ (٣) = ٥،جد $\underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(٣ + ٤\text{هـ}) - \text{ق}(٣)}{٥\text{هـ}}$

إذا كان قَ(٥) = ٩، فجد $\underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(٥+٢\text{هـ}) - \text{ق}(٥+٤\text{هـ})}{\text{هـ}}$

إذا كان قَ(٢) = ٩، فجد $\underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(٢ + ٤\text{هـ}) - \text{ق}(٢)}{٦\text{هـ}}$

إذا كان قَ(٠) = ٦، فجد $\underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(٠) - \text{ق}(٥\text{هـ})}{٣\text{هـ}}$

إذا كان ق (س) = ١ - $\text{س}^٢$ ،حيث س تنتمي للفترة [١،٤]
جد كلا مما يأتي قَ (س) ، قَ (٣) ، قَ (١.٥)

جد المشتقة الأولى باستخدام التعريف لكل مما يأتي :
ق (س) = ٨ ـ ٥ س عند س = ٣

ق (س) = $\text{س}^٢$ + ٣ فجد قَ (١)

جد المشتقة الأولي باستخدام التعريف لكل مما يأتي :

ق (س) = س^{٣} + ٢ س عند س = - ١

ق (س) = س^{٣} + س^{٢} عند س = - ١

ق (س) = س^{٣} + ٤ س^{٢} - ٢ س + ٧ ، س ∋ ح

ق (س) = $\frac{\text{-٣}}{\text{س}}$ عند س = ٢

ق (س) = $\frac{\text{٢ س}}{\text{س + ٣}}$ عند س = -١

جد المشتقة الأولى باستخدام التعريف لكل مما يأتي :

ق (س) = $\frac{\text{س}}{\text{س}^{٢}\text{ + ٨}}$

ق (س) = س^{٢} - $\frac{\text{٤}}{\text{س}}$ ، س ≠ ٠

ق (س) = $\sqrt{\text{٢ س - ٦}}$ حيث س > ٣

ق (س) = $\frac{\text{١}}{\sqrt{\text{س + ١}}}$ س > -١

ق (س) = $\sqrt[٣]{\text{س - ١}}$

في الاقتران المتشعب تعتمد المشتقة على النقطة المطلوبة

- عادية : نأخذ القاعدة المقابلة لها
- تحول : نأخذ المشتقة من اليمين ومن اليسار
- طرف : المشتقة غير موجودة دائما
- نكتب الملخص للخطوات السابقة على شكل متشعب

إذا كان ق (س) = $\begin{cases} ٤\,\text{س} + ١ & ، \; -٣ < \text{س} \leq ١ \\ ٢\,\text{س} + ٣ & ، \; ١ \leq \text{س} \leq ٥ \end{cases}$

جد قَ (- ١) ، قَ (١) إن وجدت

إذا كان ق (س) = | س − ١ | جد قَ (س) عند كل من القيم الآتية س = ٣ ، س = ٠

إذا كان ق (س) = $\begin{cases} \text{س} - \sqrt[٣]{\text{س}} & \text{س} \leq ٨ \\ \text{س} - ٢ & \text{س} > ٨ \end{cases}$

جد قَ (٨) باستخدام التعريف العام للمشتقة الأولى

إذا كان ق (س) = | $\text{س}^٢$ − ٤ | جد قَ (س) عند كل من القيم الآتية س = ١ ، س = ٢

إذا كان ق (س) = $\begin{cases} ٢\,\text{س} & -٢ \leq \text{س} < ١ \\ \text{س}^٤ + ١ & ١ \leq \text{س} < ٥ \end{cases}$

ابحث في قابلية اشتقاق الاقتران ق (س) باستخدام التعريف

إذا كان ق (س) = ٢ + | ٢ - س | جد قَ (٢)

إذا كان ق (س) = $\begin{cases} \text{س}^٢ - \text{س} & ٠ < \text{س} \leq ٣ \\ ٥\,\text{س} - ٩ & ٣ < \text{س} < ٦ \end{cases}$

عند س = ٠ ، س = ٣ ، س = ٦

ق (س) = [٢ س + ٠.٣] جد قَ (٠.٥)

ق (س) = | س^{٢} | [س] جد قَ (٠)

إذا كان ق اقترانا قابلا للاشتقاق فأثبت أن

$$\lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{ق (س + هـ) − ق (س - هـ)}}{\text{هـ}} = \text{٢ قَ (س)}$$

إذا كان ق (س + هـ) – ٣ س هـ = س هـ^{٢} + ق (س)

حيث هـ التغير في السينات جد قَ (س)

إذا كان ق (س) = جا س أثبت أن قَ (س) = جتا س

باستخدام تعريف المشتقة الأولى

أثبت أن معدل تغير مساحة الدائرة بالنسبة إلى طول قطرها

(عند أي قيمة) يساوي محيط الدائرة

إذا كان ق (س) = جتا س أثبت أن قَ (س) = - جا س

باستخدام تعريف المشتقة الأولى

صفيحة معدنية مربعة الشكل تتمدد بانتظام محافظة على شكلها

جد معدل التغير في مساحة هذه الصفيحة بالنسبة إلى طولها

عندما يكون طولها ٢٠ سم

إذا كان ق(س)= قتا ٣س أثبت أن قَ (س)=-٣قتا٣س ظتا٣س

باستخدام تعريف المشتقة الأولى

إذا كان ق اقترانا قابلا للاشتقاق فأثبت أن

$$\lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{ق (س + ٢ هـ) − ق (س - ٢ هـ)}}{\text{٣ هـ}} = \text{٤ قَ (س)}$$

طرح وإضافة ق (س) في البسط

إذا كان ق (س) = ظا س أثبت أن قَ (س) = قا^{٢} س

باستخدام تعريف المشتقة الأولى

إذا كان ق (س) = س جا ٢ س جد قَ (س) باستخدام تعريف المشتقة الأولى

أنبوب من المعدن أسطواني الشكل يزيد ارتفاعه عن طول نصف قطر قاعدته بمقدار وحدتين ، سخن الأنبوب بالحرارة فبدأ بالتمدد محافظا على شكله ، جد معدل تغير مساحته الجانبية بالنسبة إلى طول نصف قطر قاعدته ، عندما يكون طول نصف قطر قاعدته ٦ سم

إذا كان ق (س) قابلا للاشتقاق أثبت أن

$$\lim_{ع \to س} \frac{ع\,ق(س) - س\,ق(ع)}{ع - س} = ق(س) - س\,قَ(س)$$

" نضيف ونطرح - س ق (س) + س ق (س) ثم نوزع "

إذا كان معدل التغير للاقتران ق عندما تتغير س من س إلى س + هـ يساوي (٦ س^{٢} هـ - ٣ س هـ^{٢}) حيث هـ عدد حقيقي يقترب من الصفر فجد قَ (- ٢)

إذا كان ق (س) قابلا للاشتقاق لكل قيم س وكان د (س) = س^{٢} ق (س) جد دَ (س) باستخدام تعريف المشتقة الأولى

نضيف ونطرح - س^{٢} ق (ع) + س^{٢} ق (ع) ثم نوزع "
أو " نضيف ونطرح - ع^{٢} ق (س) + ع^{٢} ق (س) ثم نوزع "

مكعب معدني يتمدد بانتظام محافظا على شكله جد معدل تغير حجم المكعب بالنسبة إلى طول ضلعه عندما يكون طول ضلعه وحدتي طول

إذا كان ق (س) = (س – أ) ل (س) حيث أن ل (س) متصل عند س = أ بين باستخدام تعريف المشتقة أن قَ (أ) = ل (أ)

أثبت أن معدل تغير حجم الكرة بالنسبة إلى طول نصف قطرها (عند أية نقطة) يساوي مساحة سطحها

الاتصال والاشتقاق

نظرية (١):إذا كان ق (س) قابلاً للاشتقاق عند $\text{س} = \text{س}_1$
فإنه يكون متصلاً عند هذه النقطة

البرهان :
بما أن ق (س) قابل للاشتقاق عند $\text{س} = \text{س}_1$ فإن

$$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{س} \to \text{س}_1}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{س}_1)}{\text{س} - \text{س}_1} \quad \text{موجودة}$$

المطلوب إثبات أن $\underset{\text{س} \to \text{س}_1}{\text{نها}} \text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(\text{س}_1)$

$$\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{س}_1) = \text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{س}_1) \times \frac{(\text{س} - \text{س}_1)}{(\text{س} - \text{س}_1)}$$

نأخذ النهاية للطرفين :

$$\underset{\text{س} \to \text{س}_1}{\text{نها}} \text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{س}_1) = \underset{\text{س} \to \text{س}_1}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{س}_1)}{\text{س} - \text{س}_1} \times \text{س} - \text{س}_1$$

$$\underset{\text{س} \to \text{س}_1}{\text{نها}} \text{ق}(\text{س}) - \underset{\text{س} \to \text{س}_1}{\text{نها}} \text{ق}(\text{س}_1) = \text{ق}'(\text{س}) \times \text{صفر}$$

$$\underset{\text{س} \to \text{س}_1}{\text{نها}} \text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{س}_1) = \text{صفر}$$

$$\underset{\text{س} \to \text{س}_1}{\text{نها}} \text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(\text{س}_1)$$

وبما أن $\text{ق}(\text{س}_1)$ معرفة فإن ق (س) متصل عند $\text{س} = \text{س}_1$

ملاحظة :
إذا كان ق (س) متصل ← إما قابل للاشتقاق
← أو غير قابل للاشتقاق
إذا كان ق (س) غير متصل يكون غير قابل للاشتقاق

إذا كان
$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س} + \text{أ} & \text{س} < ٠ \\ \text{س}^٢ + ٢\text{س} - ٣ & \text{س} \geq ٠ \end{cases}$$
قابلاً للاشتقاق عند س = ٠ جد قيمة الثابت أ

إذا كان
$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{٥}{\text{س}} - ٢ & \text{س} \leq ١ \\ ٤\text{س} - ١ & \text{س} > ١ \end{cases}$$
ابحث في قابلية اشتقاق الاقتران عند س = ١

إذا كان
$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^٢ + ١ & \text{س} \leq ٤ \\ ٣\text{س} - ١ & \text{س} > ٤ \end{cases}$$
ابحث في قابلية اشتقاق الاقتران عند س = ٤

إذا كان ق (س) = [٣ - ٢ س]
ابحث في قابلية اشتقاق الاقتران عند س = - ١

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = [\frac{١}{٢}\text{س} - ١]$

ابحث في قابلية اشتقاق الاقتران عند س = ١

ابحث في قابلية اشتقاق الاقتران عند س = ٤

إذا كان ق (س) = {
- س^٢ + ٢ س + ٢ ، ٠ ≤ س < ١
- [س] + ٤ س ، ١ ≤ س ≤ ٣

جد قَ (س)

إذا كان ق (س) = {
- √س + ٣ ، س ≤ ٤
- ٣ س - ٧ ، س > ٤

أجب عن كل مما يأتي :

ابحث في اتصال الاقتران ق عند س = ٤

ابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق عند س = ٤

ابحث في قابلية اشتقاق الاقتران عند س = ٢ للاقتران

ع (س) = (س − ٢) [س]

إذا كان ق (س) = {
- ٤ / س + ١ ، س ≤ ٢
- ٥ س - ١ ، س > ٢

أجب عن كل مما يأتي :

ابحث في اتصال الاقتران ق عند س = ٢

ابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق عند س = ٢

إذا كان ق (س) = {
- أ س^٢ − ب س ، س ≤ ٢
- ٤ - ب س^٣ + أ س ، س > ٢

جد قيمة أ ، ب اللذان يجعلان قَ (٢) موجودة

إذا كان ق (س) = {
- ٦ / س - ٤ ، ٠ ≤ س ≤ ٢
- ٣ س + ١ ، ٢ < س ≤ ٥

فجد قَ (س) على مجاله

إذا كان ق (س) = {
- √(س + ١) ، ٠ ≤ س < ٢
- س^٢ − ١ ، ٢ ≤ س ≤ ٥

ابحث في قابلية اشتقاق الاقتران عند س = ٢ ، س = ٤

إذا كان ق (س) = {
- [س] ، ١ ≤ س < ٢
- | س − ٣ | ، ٢ ≤ س ≤ ٤

ابحث في قابلية الاقتران للاشتقاق على مجاله
واكتب قاعدة قَ (س)

إذا كان ق (س) = {
- س^٣ - ٤ س ، س < - ٢
- ٢ س + أ ، س ≥ - ٢

قابلا للاشتقاق عند س = - ٢ فجد قيمة الثابت أ

قواعد الاشتقاق (١)

بعد التعرف على طريقة إيجاد المشتقات عن طريق التعريف سنقوم بالتعرف على قواعد الاشتقاق والتي من خلالها نتمكن من إيجاد المشتقة للاقتران بسهولة وسرعة اكبر وهي :

١. **إذا كان ق (س) = جـ حيث جـ عدد ثابت فان**
قَ (س) = صفر ، مشتقة الثابت تساوي الصفر

البرهان :

٢. **إذا كان ق (س) = س فان قَ (س) = ١**

مثال : إذا كان ق (س) = س + ٣ اوجد قَ (س)

٣. **إذا كان ق (س) = $س^{ن}$ فان قَ (س) = ن $س^{ن-١}$**

البرهان :

استخدم الحقيقة التالية :

$ع^{ن} - س^{ن} = (ع - س)\,(ع^{ن-١} + ع^{ن-٢}\,س + ع^{ن-٣}\,س^{٢} + .. + س^{ن-١})$

٤. **إذا كان هـ (س) = جـ ق (س)**
فإن هـَ (س) = جـ قَ (س)

البرهان :

٥. **إذا كان ق (س) = م (س) ± هـ (س) فان**
فإن قَ (س) = مَ (س) ± هـَ (س)

البرهان :

باستخدام قواعد الاشتقاق جد المشتقة الأولى :

ق (س) = $\sqrt{٣٠} + ٤\,س^{١٠} + ٤\,\pi^{٢} + (٢\,س)^{٣}$

ص = $\frac{١}{٤}\,س^{٤} - \frac{١}{٣}\,س^{٣} + \frac{١}{٢}\,س^{٢} - ٣\,س + ٤$

ص = $٧\,س^{٢} + \sqrt{٣}\,س^{٤}$

ص = $٤\,س^{٥} - \pi\,س^{٦}$

ص = $\frac{٤}{٣}\,\pi\,س^{٣} - \frac{١}{٢}\,(س^{٢} + ٨)$

ص = $س^{٤} - ٦\,س^{٢} + ٤$ ثم جد قيم س التي يكون عندها المماس أفقي

ق (س) = $س^{٣}\,|\,س\,|$ اوجد قَ (٤)

باستخدام قواعد الاشتقاق جد المشتقة الأولى :

ق (س) = س^{٢} | ٣ س - ٦ | اوجد قَ (٣)

إذا كان ل ، هـ اقترانين قابلين للاشتقاق وكان لَ (- ٢) = ٤ ، هـَ (- ٢) = - ٣ ، فجد قَ (- ٢) في كل مما يأتي

أ) ق (س) = ٦ ل (س) – ٢ هـ (س)

ب) ٠.٥ ل (س) + هـ (س) + س^{٣}

ق (س) = | س - ٢ | + ٣ س^{٢} اوجد قَ (١)

ق (س) = ٥ | س | + ٣ س^{٤} اوجد قَ (-١)

إذا كان

ق (س) = { أ س^{٢} + ب س ، س ≥ ١ ؛ ٤ – ب س^{٢} + أ س ، س < ١ }

وكانت قَ (١) موجودة فجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب

ق (س) = ٥ س^{٢} - [٣ س] اوجد قَ (٠.٦)

ق (س) = ٥ س^{٢} - [٣ س + ١] + | س | اوجد قَ (٠.٤)

إذا كان

ق (س) = { ل (س) ، س ≥ جـ ؛ لَ (س) (س – جـ) ، س < جـ }

وكان ق (س) اقترانا متصلا عند س = جـ وكان ل (س) اقترانا قابلا للاشتقاق عند س = جـ فأثبت أن الاقتران ق قابل للاشتقاق عند س = جـ ثم جد قَ (جـ)

ق (س) = | $\frac{١}{٢}$ س + ٥] - ٤ س^{٢} اوجد قَ (٢.٤)

ق (س) = ٣ س + [س + ٠.١] - | س | جد قَ (- ١)

إذا كان ق(س) = ٢س^{٣}(٤ س - ٥ س^{٢}) اوجد

نهـــا$_{هـ \to ٠}$ $\frac{\text{ق (١ + هـ) - ق (١)}}{\text{هـ}}$

قواعد الاشتقاق (٢)

مشتقة حاصل ضرب إقترانين :

إذا كانت ق (س) = ل (س) × هـ (س) فإن

قَ (س) = ل (س) × هـَ (س) + هـ (س) × لَ (س)

الاقتران الأول×مشتقة الثاني + الاقتران الثاني×مشتقة الأول

إذا كانت ص = (س^{٣} + ٦ س)(٤ س^{٢} - ٣) اوجد قَ (س)

إذا كانت ص = (٤ - س^{٣})($\frac{١}{٢}$ س + ٣) اوجد قَ (س)

إذا كانت ص = (٣س+١)(٢س^{٢} - ٥س - ٤) اوجد قَ (س)

إذا كانت ص = (٥ + س^{٢}) (٢س^{٣} - ٦س - ٢) اوجد قَ (١)

مشتقة حاصل ضرب ثلاثة اقترانات

إذا كانت ق (س) = ل (س) × م (س) × هـ (س) فإن

قَ(س)=ل(س)×م(س)×هـَ(س)+ل(س)×هـ(س)×مَ(س)+ م(س)×هـ(س)×لَ(س)

إذا كان ق (س) = (٣س+١)(٢س^{٢} - ٥س)(س^{٣} -٤) اوجد قَ (س)

إذا كان ق (س) = (ل (س))^{٣} اوجد قَ (س)

مشتقة خارج قسمة إقترانين :

إذا كان ق (س) = $\frac{\text{ل (س)}}{\text{هـ (س)}}$ هـ(س) ≠ صفر فإن

قَ (س) = $\frac{\text{هـ (س) × لَ (س) - ل (س) × هـَ (س)}}{\text{(هـ (س))}^{٢}}$ دس

$\frac{\text{المقام × مشتقة البسط - البسط × مشتقة المقام}}{\text{(المقام)}^{٢}}$

إذا كانت ق (س) = $\frac{\text{٣ س}^{٢} - ٥}{\text{(٢س + ١)}}$ اوجد قَ (س)

إذا كانت ق (س) = $\frac{\text{س}^{٣} + \text{س}}{\text{س}^{٢} + ٥}$ اوجد قَ (س)

إذا كانت ق (س) = $\frac{\sqrt{٣}}{\text{س}^{٢}}$ اوجد قَ (س)

إذا كانت ق (س) = $\frac{\text{س}^{٤} - ٣}{\text{س}^{٣}}$ اوجد قَ (س)

إذا كانت ق (س) = $\frac{\text{٢ س}^{٤} - \text{س}}{\text{٣ س}^{٣} + ٢}$ اوجد قَ (س)

إذا كانت ق (س) = $\frac{\text{س} + ١}{\text{س}^{٢} - ٤}$ اوجد قَ (١)

نتيجة : إذا كان ق (س) = $\frac{\text{جـ}}{\text{هـ (س)}}$ هـ(س) ≠ صفر فإن

قَ (س) = $\frac{\text{- جـ × هـَ (س)}}{\text{(هـ (س))}^{٢}}$

إذا كانت ص = $\frac{-٦}{\text{(٢س + ١)}}$ اوجد قَ (س)

إذا كانت ق (س) = س$^{-٤}$ اوجد قَ (س)

إذا كانت ق (س) = $\frac{٩}{٢ س^{٢} + ٢}$ اوجد قَ (س)

ص = $\frac{|س^{٢} - ٥ س + ٤|}{س \ (س - ١)}$ س∈ (١ ، ٥]

إذا كانت ق (س) = $\frac{\pi}{س^{٢}}$ اوجد قَ (س)

إذا علمت أن هـ (س) قابل للاشتقاق وأن هـ (٢) = ٣

هَـ (٢) = - ١ فجد قَ (٢) في كل مما يأتي :

ق (س) = س هـ (س)

إذا كان ق (س) = $\frac{م (س)}{س + ١}$ فاوجد قَ (٢)

علما بان م (٢) = ٣ ، مَ (٢) = ٢١

ق (س) = ٣ س^{٢} هـ (س) - ٥ س

نتيجة : إذا كان ق (س) = س^{ن} ، س ≠ ٠ ، ن عدد صحيح

سالب فإن قَ (س) = ن س$^{ن-١}$

البرهان :

ق (س) = هـ (س) - $\frac{١}{هـ (س)}$

جد $\frac{د ص}{د س}$ في كل مما يأتي :

ص = س^{٢} (١ + س^{٣})

ق (س) = $\frac{٢ س + ١}{٣ \ هـ (س)}$

ص = (س^{٣} - ٢ س + ١) (٤ س - ٣)

إذا كان ل ، هـ اقترانين قابلين للاشتقاق وكان ل (- ٢) = ٣

لَ (- ٢) = - ١ ، هـ (- ٢) = ٤ ، هَـ (- ٢) = - ٦ فجد

قَ (س) في كل مما يأتي :

ق (س) = ل (س) × هـ (س)

ص = س (س + ٢) (س^{٢} - ٣ س - ٦)

ص = $\frac{س^{٣}}{١ - س}$

ق (س) = $\frac{هـ (س)}{ل (س) + ١}$

اشتقاق الاقترانات المتشعبة

إذا كان

$$\text{ق (س)} = \begin{cases} \text{م (س)} & \text{، س} \leq \text{أ} \\ \text{هـ (س)} & \text{، س} > \text{أ} \end{cases}$$

بحيث مَ (س) موجودة لكل س> أ،هـَ (س) موجودة لكل س<أ

فانه لإيجاد قَ (س) نتبع الخطوات التالية :

جد مَ (س) لكل س > أ ، هـَ (س) لكل س < أ

فيكون

$$\text{قَ (س)} = \begin{cases} \text{مَ (س)} & \text{، س} > \text{أ} \\ & \text{، س} \neq \text{أ} \\ \text{هـَ (س)} & \text{، س} < \text{أ} \end{cases}$$

نبحث في اتصال ق (س) عند س = أ وهناك حالتان :

ق غير متصل عند س= أ يكون ق غير قابل للاشتقاق عند س=أ

ق متصل عند س = أ البحث عن قابلية الاشتقاق عند س=أ

إذا كان

$$\text{ق (س)} = \begin{cases} \text{س}^3 + \text{٤ س} & \text{س} \leq \text{١} \\ \text{٨ س}^2 + \text{١٢ س - ٨} & \text{س} > \text{١} \end{cases}$$

، جد قَ (س)

إذا كان

$$\text{ق (س)} = \begin{cases} \frac{\text{٢}}{\text{س}} & \text{س} \leq \text{١} \\ \sqrt{\text{س}^2 + \text{١}} & \text{س} > \text{١} \end{cases}$$

، جد قَ (س)

إذا كان

$$\text{ق (س)} = \begin{cases} \frac{\text{٤}}{\text{س + ١}} & \text{س} \leq \text{١} \\ \text{س + ١} & \text{س} > \text{١} \end{cases}$$

، جدقَ (س)

إذا كان ق (س) = س² + | س + ١ | جد قَ (س)

إذا كان

$$\text{ق (س)} = \begin{cases} \text{س}^2 & \text{-٢} \leq \text{س} \leq \text{٣} \\ \text{٤ س} & \text{٣} \leq \text{س} \leq \text{٤} \end{cases}$$

جد قَ (س)

إذا كان ق (س) = س³ | س – ٢ | ابحث قابلية الاقتران للاشتقاق على ح

إذا كان

ق (س) = { ٤ س^{٣} ، س ≤ ١ ؛ ٣ س^{٤} + ١ ، س > ١ } فابحث في

قابلية الاقتران للاشتقاق عند س = ١ ثم اكتب قاعد الاقتران

ق (س) = $\frac{|\text{س} - ٢|}{\text{س}}$ جد قَ (س)

ق (س) = س^{٢} + | ٣ س − ١٢ | جد قَ (س)

إذا كان ق (س) = | س | (س^{٢} + ٦ س)

فابحث في قابلية الاقتران للاشتقاق لجميع قيم س الحقيقية

ق (س) = | س − ٣ | - | س + ٢ | + ١ قَ (س)

ص = | س - ٣ | (س^{٢} + س)

فابحث في قابلية الاقتران للاشتقاق لجميع قيم س الحقيقية

ق (س) = [س + ٣] حيث س تنتمي للفترة [٠ ، ٣]
جد قَ (س)

ق (س) = س | س^{٢} − ٢ س | + ٣س^{٢} حيث س تنتمي إلى

الفترة [- ١ ، ٤] جد قَ (س)

ق (س) = $\left[\frac{\text{س}}{٢} + ٣\right]$ جد قَ (١)

ق (س) = س + [س + ٠.٢] - | س | جد قَ (-١)

ق (س) = $\dfrac{\left[\frac{١}{٤}\text{س} + ٣\right]}{|٢\text{س} - ١|}$ جد قَ (٢)

إذا كان ق (س) = $\begin{cases} \text{أس}^٣ + \text{ب س} & \text{س} < ٢ \\ \text{أس}^٢ + ٩\,\text{ب س} - ١٢ & \text{س} \geq ٢ \end{cases}$

جد أ ، ب التي تجعل قَ (٢) موجودة

ق (س) = $\text{س}^٢ \left[٢ - \frac{\text{س}}{٣}\right] + ١$ جد قَ (- ٤)

إذا كان ق (س) = $\begin{cases} \text{أس}^٢ - \text{ب س} & \text{س} < ٢ \\ ٤ - \text{ب س}^٣ + \text{أ س} & \text{س} \geq ٢ \end{cases}$

وكان ق اقترانا قابلا للاشتقاق عند س = ٢ فجد كلا من أ ، ب

ق (س) = ٣ $\text{س}^٢$ + [س + ٠.٦] جد قَ (٠.٤)

المشتقات من الرتب العليا

المقصود من هذا المفهوم إيجاد مشتقة الاقتران الثانية والثالثة والرابعة وهكذا ٠٠٠٠٠

حيث يرمز للمشتقة الثانية مثلا للاقتران قً (س) أو $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$

وللمشتقة الثالثة قً (س) أو $\frac{د^{٣} ص}{د س^{٣}}$ وهكذا

إذا كان ق (س) =٤س^{٥} -٢س^{٣} +٦س^{٢}+ ١ اوجد قً (س)

إذا كان ق (س) = ٢ س^{٥}+ ٤ س^{٣} +٢س^{٢} اوجد قً (١)

إذا كان ق (س) = ٥ س^{٣}- ٤ س^{٢}+٦س +١ اوجد قً (-١)

إذا كان ق (س) = | س | (س^{٢} + س) اوجد قً (س)

إذا كان ق (س) = $\frac{س^{٢} + ١}{س}$ اوجد قً (س)

إذا كان ق (س) = $\frac{١}{س}$ اوجد ق$^{(٤)}$ (١)

إذا كان ق (س) = س^{ن} وكان ق$^{(2)}$ (س) = 20 س$^{ن-2}$

جد قيمة ن

إذا كان ق (س) = س^{ن} وكان ق$^{(٣)}$ (س) = ٦٠ س$^{ن-٣}$

اوجد قيمة ن

إذا كان ق (س) = س^{ن} وكان ق$^{(٣)}$ (س) = ٢٤ س$^{ن-٣}$

اوجد قيمة ن

إذا كان ق (س) = س^{ن} وكان ق$^{(٣)}$ (س) = أ س جد قيمة أ

إذا كان ق(س) = $\frac{١}{١٠}$ س^{ن} ،وكان قَ(س) = أ س^{٢} جد قيمة أ

إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} س^{٢} & س \le ٠ \\ ٠ & س > ٠ \end{cases}$$

أجب عن كل مما يأتي

١ ـ بين أن الاقتران ق قابل للاشتقاق عند س = ٠

٢ ـ اكتب قاعدة قَ (س) لجميع قيم س الحقيقية

٣ ـ بين أن قً (٠) غير موجودة

إذا كان ق (س) = س^{ن} وكان ق$^{(2)}$ (س) = 20 س$^{ن-2}$

جد قيمة ن

إذا كان ق (س) = (س^{٢} + ٤) (س^{٣} + ١) فجد قيمة

قَ (- ١) × قً (- ١)

إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} س^{٣} & س \le ٠ \\ ٠ & س > ٠ \end{cases}$$

أجب عن كل مما يأتي

١ ـ بين أن كلا من قَ(٠)، قً(٠) موجودة ثم جد قيمة كل منها

٢ ـ اكتب قاعدة قَ (س) ، قً (س) لجميع قيم س الحقيقية

٣ ـ بين أن ق‴ (٠) غير موجودة

إذا كان ق (س) $= \frac{٢}{س}$ ، س ≠ ٠، فاثبت أن صً $= \frac{١}{٢}$ ص^{٣}

إذا كان ق (س) =

$$\begin{cases} أس^{٢} - ب س + ٥ & س \le ٢ \\ س^{٣} + جـ & س > ٢ \end{cases}$$

جد أ ، ب ، جـ التي تجعل قً (٢) موجودة

نجد قَ (س) ثم قً (س) ونجد قيمة أ

بما أن قً موجودة إذن قَ موجودة

أي أن قَ(٢)$_{+}$ = قَ(٢)$_{-}$ ونجد قيمة ب

وأن نهــا$_{+}$ = نهــا$_{-}$ ق متصل عند س = ٢ ونجد جـ

إذا كان ق (س) = س^{٤} + ٣ س^{٣} − ٦س^{٢} − س فجد قيم س التي تحقق ما يأتي ك :

قً (س) = ٠ ، قً (س) ≤ ٠ ، قً (س) > ٠

جد المشتقة الثالثة لكل من الاقترانات الآتية :

ص = ^{٤} – ٣ س$^{-٥}$

ص = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س

ص = س^{٢} – ٦ س عند س = π

إذا كان كل من الاقترانين ل،هـ قابلا للاشتقاق مرتين فأثبت أن

ل (س) هـً (س) – لً (س) هـ(س) =

$\frac{د}{د\,س}$ (ل (س) هـَ (س) – لَ (س) هـ (س))

إذا كانت ل ، ق ، هـ اقترانات قابلة للاشتقاق حتى المشتقة

الثالثة وكان هـ (س) = ل (س) × ق (س) بحيث

لَ (س) × قَ (س) = جـ حيث جـ عدد ثابت أثبت أن

هـ$^{(٣)}$ (س) = ل (س) × ق$^{(٣)}$ (س) + ق (س) × ل$^{(٣)}$(س)

إذا كان ل ، لَ ، لً قابلا للاشتقاق عند س وكان

ق (س) = س^{٢} ل (س) جد قً (س) ، ق$^{(٣)}$(س)

إذا كان كل من الاقترانين ل،هـ قابلا للاشتقاق مرتين فأثبت أن

(ل×هـ)ً(س) = (لً×هـ)(س) + ٢(لَ×هـَ)(س) + (ل×هـً)(س)

إذا كان ق (س) = أ س^{٤} + $\frac{١٦}{س}$ ، أ ثابت وكان

ق$^{(٣)}$ (٢) = ٩٠ ، فجد قيمة الثابت أ

جد قاعدة اقتران كثير حدود ق من الدرجة الثانية الذي فيه

ق (١) = ٣ ، قَ (١) = -٢ ، قً (١) = ٤

إذا كان ق (س) = ٨ س – ٤ (م – ٣) س^{٢}

فجد قيم الثابت م التي تجعل قً (س) < ٠

مشتقة الاقترانات المثلثية

نستخدم تعريف المشتقة في برهان المشتقات المثلثية

$$\text{قَ}(\text{س}) = \underset{\text{ع} \to \text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

قاعدة (١) :

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{جا س}$ فإن $\text{قَ}(\text{س}) = \text{جتا س}$

البرهان : تذكرا لمتطابقة :

$$\text{جا ع} - \text{جا س} = ٢ \; \text{جتا} \frac{\text{ع} + \text{س}}{٢} \; \text{جا} \frac{\text{ع} - \text{س}}{٢}$$

$$\text{قَ}(\text{س}) = \underset{\text{ع} \to \text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$\text{قَ}(\text{س}) = \underset{\text{ع} \to \text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{جا ع} - \text{جا س}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع} \to \text{س}}{\text{نها}} \frac{٢ \; \text{جتا} \frac{\text{ع}+\text{س}}{٢} \; \text{جا} \frac{\text{ع}-\text{س}}{٢}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع} \to \text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{جتا} \frac{\text{ع}+\text{س}}{٢} \; \text{جا} \frac{\text{ع}-\text{س}}{٢}}{\frac{\text{ع} - \text{س}}{٢}}$$

نفرض $\text{ص} = \frac{\text{ع} - \text{س}}{٢}$ وأن $\frac{\text{ع} + \text{س}}{٢} = \text{س} + \text{ص}$

عندما $\text{ع} \to \text{س}$ فإن $\text{ص} \to ٠$

$$\text{قَ}(\text{س}) = \underset{\text{ص} \to ٠}{\text{نها}} \left(\text{جتا}(\text{س} + \text{ص}) \times \frac{\text{جا ص}}{\text{ص}} \right)$$

$$= \text{جتا}(\text{س} + ٠) \times ١ = \text{جتا س}$$

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = ٦ \text{س}^٢ + ٣\text{س} - ٢\text{جا س}$ جد $\text{قَ}(\text{س})$

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = ٢ \text{س} - ٦\text{جا س}$ جد $\text{قَ}\left(\frac{\pi}{٦}\right)$

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س} + ٣\text{جا س}$ جد $\text{قَ}\left(\frac{\pi}{٣}\right)$

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = ٢ \; \text{جا س} + ٦ \; \text{س}$ جد $\text{قَ}\left(\frac{\pi}{٣}\right)$

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = ٦\text{جا س} - ٢\text{س}$ جد $\text{قَ}(\pi)$

قاعدة (٢) :

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{جتا س}$ فإن $\text{قَ}(\text{س}) = -\text{جا س}$

البرهان : تذكرا لمتطابقة :

$$\text{جتا ع} - \text{جتا س} = -٢ \; \text{جا} \frac{\text{ع} + \text{س}}{٢} \; \text{جا} \frac{\text{ع} - \text{س}}{٢}$$

$$\text{قَ}(\text{س}) = \underset{\text{ع} \to \text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$\text{قَ}(\text{س}) = \underset{\text{ع} \to \text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{جتا ع} - \text{جتا س}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع} \to \text{س}}{\text{نها}} \frac{-٢ \; \text{جا} \frac{\text{ع}+\text{س}}{٢} \; \text{جا} \frac{\text{ع}-\text{س}}{٢}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= - \underset{\text{ع} \to \text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{جا} \frac{\text{ع}+\text{س}}{٢} \; \text{جا} \frac{\text{ع}-\text{س}}{٢}}{\frac{\text{ع} - \text{س}}{٢}}$$

نفرض $\text{ص} = \frac{\text{ع} - \text{س}}{٢}$ وأن $\frac{\text{ع} + \text{س}}{٢} = \text{س} + \text{ص}$

عندما $\text{ع} \to \text{س}$ فإن $\text{ص} \to ٠$

$$\text{قَ}(\text{س}) = - \underset{\text{ص} \to ٠}{\text{نها}} \left(\text{جا}(\text{س} + \text{ص}) \times \frac{\text{جا ص}}{\text{ص}} \right)$$

$$= -\text{جا}(\text{س} + ٠) \times ١ = -\text{جا س}$$

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{جتا س}}{\text{س}}$ $\text{س} \neq ٠$ جد $\text{قَ}\left(\frac{\pi}{٣}\right)$

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س جتا س}$ ، جد $\text{قَ}\left(\frac{\pi}{٢}\right)$

قاعدة (٣) :

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{ظا س}$ فإن $\text{قَ}(\text{س}) = \text{قا}^٢ \text{س}$

البرهان :

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{ظا س} = \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$$

$$\text{قَ}(\text{س}) = \frac{\text{جتا س} \times \text{جتا س} - \text{جا س} \times -\text{جا س}}{\text{جتا}^٢ \text{س}}$$

$$\text{قَ}(\text{س}) = \frac{\text{جتا}^٢ \text{س} + \text{جا}^٢ \text{س}}{\text{جتا}^٢ \text{س}} = \frac{١}{\text{جتا}^٢ \text{س}} = \text{قا}^٢ \text{س}$$

ق (س) = س^{٢} قتا س

بشكل عام :

إذا كان ق (س) = جا س فإن قَ (س) = جتا س

إذا كان ق (س) = جتا س فإن قَ (س) = - جا س

إذا كان ق (س) = ظا س فإن قَ (س) = قا^{٢}س

إذا كان ق (س) = قا س فإن قَ (س) = قا س ظا س

إذا كان ق (س) = قتا س فإن قَ (س) =- قتا س ظتا س

إذا كان ق (س) = ظتا س فإن قَ (س) = - قتا^{٢}س

ق (س) = $\frac{\text{ظا س + س}}{\text{جا س}}$ عند س = $\frac{\pi}{٣}$

اوجد المشتقة الأولى في كل مما يأتي :

ص = ٣ ظا س - ٥ جا س + جتا س

ص = س قا س عند س = $\frac{\pi}{٦}$

ص = ٤ س^{٢} - ٥ ظا س + ٢جتا س - جا س

ص = جا^{٢} س + جتا^{٢} س

ص = ٣ س^{٢} جتا س + ظا س - $\sqrt{٣\pi}$ س

ص = $\frac{\text{جا س}}{\text{١ + جتا س}}$

ص = ٥ س^{٣} ظا س

ص = $\frac{\text{جتا س}}{\text{١ + جا س}}$ عند س = π

ص = س^{٢} جتا س + ٣ ظا س

ق (س) = س جا س + ٢ جتا س

ق (س) = جا (- س) + جتا (- س) عند س = $\frac{\pi}{٤}$

ق (س) = $\frac{\text{س}}{\text{جتا س}}$

ق (س) = قتا س - س ظتا س

ص = جا س جتا س عند س = $\frac{\pi}{٣}$

إذا كان ق (س) = قتاس + قتا س أثبت أن قَ(س)= $\frac{١}{\text{جتاس} - ١}$

إذا كان ق (س) = أ جا س + ب جتا س أ ، ب ∋ ح

أثبت أن قً (س) + ق (س) = صفر

اثبت أن ص = جتا س ، ص = جا س حلاً للمعادلة

ص + صً = صفر

إذا كان ص = أ جا س + ب جتا س حيث أ ، ب ∋ ح أثبت

أن $(\text{صَ})^٢ + \text{ص}^٢ = \text{أ}^٢ + \text{ب}^٢$

إذا كان ص = جا س ، فجد صً + ٦ ص بدلالة ص

جد قيم س في الفترة [- ٢ π ، ٢ π] التي تحقق المعادلة

قَ (س) = ٠

ق (س) = س + جتا س

ق (س) = قا س

جد المشتقة الثانية لكل مما يأتي :

ص = قتا س

ص = س جتا س – ٤ جا س

إذا كان ق (س) = $\begin{cases} \text{جتا س} & \text{س} \leq ٠ \\ \text{أ س + ب} & \text{س} > ٠ \end{cases}$

فجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب التي تجعل الاقتران ق قابلا للاشتقاق عند س = ٠

إذا كان ق (س) = | جا س | فابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق عند س = π

أذا كان ق (س) = جا س - $\frac{١}{٢}$ س ، س ∋ [٠ ، ٢ π]

فجد قيم (قيمة) س التي تجعل المماس لمنحنى الاقتران أفقيا

قاعـــدة السلسلــــة

إذا كان ق ، هـ اقترانين حيث ص = ق (ع)، ع = هـ (س)
وكان مدى هـ مجموعة جزئية من مجال ق فإنه يمكن كتابة
ص على الصورة ص = ق (ع) = ق (هـ (س))
= (ق o هـ) (س)

وأن
(ق o هـ)َ (س) = قَ (هـ (س)) × هـَ (س)

تعميم $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{د ص}}{\text{د ع}} \times \frac{\text{د ع}}{\text{د س}}$

جد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ في كل مما يأتي :

ص = ٣ ع^{٢} + ١١ ، ع = ٢ س^{٢} + ١

ص = ع^{٢} + ٣ ع ، وكان ع = ٢ س + ١

ص = ٥ع^{٢} ، وكانت ع = س^{٢} - ١

ص = ٥ع^{٢} + ٣ ، ع = س^{٣} + ٤

ص = ع^{٢} + ١ ، ع = ٣ س - ٢

جد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ في كل مما يأتي :

ص = (٢س^{٣} + س)^{٥}

ص = (س^{٣} − ١)^{١٠}

استخدم قاعدة السلسلة لايجاد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ في كل مما يأتي :

ص = (س^{٣} − ٢ س + ٤)^{٨}

ص = $\frac{١}{(\text{س}^{٢} + ١)^{٥}}$

ص = $\frac{\text{س}^{٤}}{(١ - \text{س}^{٣})^{٤}}$

إذا كان ل (س) = ظا س^{٣} ، فجد لَ (س)

إذا كان ق (س) = س^{٢} ، هـ (س) = ٤ س + ١
جد (ق o هـ)َ (س)

إذا كان ق (س) = س^{٢} ، هـ (س) = ١ − ٦ س

جد (ق o هـ)َ (س) ، (ق o هـ)َ (١)

إذا كان ق (س) = س^{٣} + ٢ س ، هـ (س) = ٣ س^{٢}

جد كلا من الآتي :

أ - (قَ o هـ)َ (١) ، ب - (قَ o هـَ)َ (٢)

جـ - (قَ o هـ)َ (- ١) ، د - (قَ o هـَ)َ (٣)

إذا كان ق (س) = س^{٢} + ٥ ، هـ (س) = $\frac{١}{س}$

جد (ق o هـ)َ (س)

إذا كان ق ، هـ اقترانين معرفتن على ح وقابلين للاشتقاق على مجاليهما وكان هـ (٢) = ٣ ،قَ (٣) = ٤ ،هـَ (٢) = - ٦

فجد كلا مما يأتي :

(ق o هـ)َ (٢) ، قَ (س^{٢}) عند س = $\sqrt{٣}$

إذا كان ق (س) = ٢ س + $\frac{١}{س}$ ، هـ (س) = جا (س)

جد (ق o هـ)َ (س)

إذا كان ق (س) = س^{٢} − ٢ س ، هـ (س) = س^{٣} + ١

جد (ق o هـ)َ (١) ، (هـ o ق)َ (١)

إذا كان ق (س) = $\frac{٨ س}{س^{٢} + ١}$ ، هـ (س) = قا س

جد (ق o هـ)َ ($\frac{\pi}{٣}$)

إذا كان ق (س) = أ جا س : حيث أ ثابت ، أ ≠ ٠

هـ (س) = $\frac{\text{٣ س}}{\text{س}^{٢} + ١}$

و كان (هـ ο ق) ($\frac{\pi}{٦}$) = صفر جد مجموعة قيم أ

إذا كان هـ (س) = ظا س ، قَ (س) = $\frac{١}{١ + \text{س}^{٢}}$

أثبت أن (ق ο هـ)َ (س) = ١

إذا كان قَ (- ٢) = ٤ ، هـ (٣) = - ٢ وكان

(ق ο هـ)َ (٣) = ٢٨ جد قيمة هـَ (٣)

إذا كان ق (س) = ٢ ظتا س

هـ (س) = أ س (س^{٢} − ٣)^{٣}

وكان (هـ ο ق)َ ($\frac{\pi}{٤}$) = - ٥٠ جد قيمة أ

إذا كان ق (س) = (س − ٥)^{٢} ، هـ (س) = $\sqrt{\text{س}}$

جد (هـ ο ق)َ (٣)

إذا كان ق (س) = ٢ ظا س

وكان هـ (س) = $\frac{\text{أ}}{\text{٢ س} + ١}$ ،

وكان (هـ ο ق)َ ($\frac{\pi}{٤}$) = $\frac{٨}{٢٥}$ جد قيمة أ

إذا كان هـ (س) = ظا $\frac{١}{٢}$ س ، ق (س) = $\sqrt{٢(١ - \text{س})}$

جد (ق ο هـ)َ ($\frac{\pi}{٣}$)

إذا كان ق (س) = ٣ظا ٢ س

هـ (س) = $\frac{\text{٢ س}}{\text{س}^{٢} + ١}$ جد (هـ ο ق)َ ($\frac{\pi}{٨}$)

مشتقة الاقتران المركب :

إذا كان ل (س) قابلا للاشتقاق عند س و كان

ص = (ل (س))$^{\text{ن}}$ حيث ن عدد صحيح فإن

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ن (ل (س))$^{\text{ن} - ١}$ × لَ (س)

البرهان : نفرض ع = ل (س) فيكون $\frac{\text{دع}}{\text{دس}}$ = لَ (س)

ص = ع$^{\text{ن}}$ ، ومنه $\frac{\text{دص}}{\text{دع}}$ = ن ع$^{\text{ن} - ١}$ = ن (ل (س))$^{\text{ن} - ١}$

إذن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ن (ل (س))$^{\text{ن} - ١}$ × لَ (س)

جد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ في كل مما يأتي :

ص = (٢س − ٣)^{٦} عند س = ١

ص = (س^{٢} + ٢ س - ٨)^{٧}

ق (س) = $\sqrt{\text{س}^{٥} + ٤}$

ص = $\sqrt{٣ - \text{س}^{٢}}$

ق (س) = $\sqrt[٥]{\text{س}^{٣} - ٤}$

ق (س) = (٣ − س^{٤})^{٣}

ق (س) = $\left[\frac{\text{س} + ٢}{\text{س} + ٥}\right]^{٣}$

جد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ في كل مما يأتي :

ق (س) = $\frac{٨}{(٥\text{س}+٢)^{٣}}$ عند س = ١

ص = $\left[\text{س} + \frac{١}{\text{س}}\right]^{٤}$ ، س = ١

ص = قتا^{٥} س

ص = ظا^{٤} س

ص = جتا (س^{٢} − س)

إذا كان ص = (ظا س + قا س)$^{\text{ن}}$ ، ن عدد صحيح بين أن

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ن ص قـا س

إذا كان ص = (قتـا س + ظتـا س)$^{\text{ن}}$ ، ن عدد صحيح بين

أن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = - ن ص قتـا س

إذا كان ص = (قا س + ظا س)^{٢} فجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ عند س = ٠

قاعدة الاقترانات المثلثية :

إذا كانت ص = جـا هـ (س) وكان هـ (س) قابلا للاشتقاق فإن

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = هـَ (س) × جتـا هـ (س)

إذا كانت ص = جتـا هـ (س) وكان هـ (س) قابلا للاشتقاق فإن

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = - هـَ (س) × جـا هـ (س)

إذا كانت ص = ظـا هـ (س) وكان هـ (س) قابلا للاشتقاق فإن

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = هـَ (س) × قـا^{2} هـ (س)

إذا كانت ص = قتاهـ (س) وكان هـ (س) قابلا للاشتقاق فإن

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = هـَ (س) × - قتـاهـ (س) ظتاهـ (س)

إذا كانت ص = قـاهـ (س) وكان هـ (س) قابلا للاشتقاق فإن

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = - هـَ (س) × قـاهـ (س) ظـاهـ (س))

إذا كانت ص = ظتـاهـ (س) وكان هـ (س) قابلا للاشتقاق فإن

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = - هـَ (س) × قتا^{2} هـ (س)

إذا كان هـ (س) اقترانا قابلا للاشتقاق عند س وكان

ص = جا^{ن} هـ (س) فأثبت أن

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ن جـا$^{ن - 1}$ (هـ (س)) هـَ (س) جتا هـ (س)

إذا كان هـ (س) اقترانا قابلا للاشتقاق عند س وكان

ص = جا هـ (س) فأثبت أن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = هـَ (س) جتا هـ (س)

جد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ في كل مما يأتي :

ص = قا ٤ س

ص = جا^{4} س^{2}

ص = (جـا ٢ س)^{5}

ص = جـا (س^{2} - ٣س)^{3}

ص = جـا^{2} ٣ س ، س = $\frac{\pi}{9}$

ص = ظا (٣ س^{2} + ٢)^{4}

ص = (س^{2} + ١)$^{-5}$

ص = جتـا^{3} س

ص = ظا ع ، ع = س^{3} - س

ص = ل^{2} + ٢ ل ، ل = $\sqrt{\text{س}^{2} + 1}$

جد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ في كل مما يأتي :

ص = ظا^{٣} (س^{٢} − ١)^{٢}

ق (س) = جا ٢ س

ق (س) = (٢س^{٣} − ٤ س^{٢} −٧)^{٦}

ق (س) = جا^{٢} ٥ س

جد صً في كل مما يأتي :

ص = س ظا ($\frac{١}{\text{س}}$)

ص = $\frac{\text{جتا ٢ س}}{\text{س}}$

إذا كان ق اقترانا قابلا للاشتقاق وكان

ق (جا ٢ س) = قتا (٢ س) حيث س ∈ (٠ ، $\frac{\pi}{٣}$]

فجد قَ ($\frac{١}{٢}$)

إذا كان ق (س) قابلاً للاشتقاق عند س وكان

ص = جتا (ق (س)) اثبت أن

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = - قَ (س) جا (ق (س))

إذا كان ص = جتا (س + $\frac{\pi}{٢}$) فاثبت أن ص + صً = ٠

إذا كان ص= ظا س + $\frac{١}{٣}$ ظا^{٣} س فبرهن أن $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = قا^{٤} س

إذا كان ص = ق (س^{٣} + س) وكانت قَ (- ١٠) = ٧

جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عندما س = - ٢

إذا كان ق (٣ س) = ٦ س^{٢} + ٩ س فجد قَ (٣)

إذا كان ص= ق(س^{٢} + ٢ س) ، قَ (٣) = ٥ فجد $\left.\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right|_{\text{س} = ١}$

إذا كان ق (٤ س) = $\frac{\text{د}}{\text{د س}}$ (س^{٢} + ٣) فجد قَ (٣)

إذا كان هـ (س) = ق (جا ٢ س) وكان قَ ($\frac{\sqrt{٣}}{٢}$) = ٨

فجد هـَ ($\frac{\pi}{٦}$)

أذا كان ق (س^{٣} − ١) = $\frac{١}{س}$ − س^{٢} فجد قَ (٧)

يقال للاقتران ق بأنه زوجي إذا كان ق (- س) = ق (س)
لجميع قيم س ، وأنه فردي إذا كان ق (- س) = - ق (س)
لجميع قيم س ، أثبت ما يأتي :

أ – إذا كان ق (س) اقترانا فرديا قابلا للاشتقاق فإن قَ (س) اقتران زوجي

ب - إذا كان ق (س) اقترانا زوجي قابلا للاشتقاق فإن قَ (س) اقتران فردي

إذا كان ص = $\sqrt{س^{٢} + ٣ س}$ فجد $\frac{د ص}{د س}$

الاشتقـــاق الضمنـــي

تستخدم هذه الطريقة في حال وجود متغيرين في المعادلة بحيث تكون متداخلة يصعب كتابة احدهما بدلالة الآخر

جد المشتقة الأولى في كل مما يأتي :

٥ س + ٤ ص − ٣ = صفر

٣ س^{٢} − ٤ ص^{٢} = ٨

س^{٣} + ص^{٣} = ٦ س ص عند (٣ ، ٣)

٤ ص^{٣} س + ٣ س^{٢} ص = ٦

ص^{٢} − ٤ ص + ٦ س^{٣} = ٦ س + ٥

٢ س ص − ص^{٣} + ١ = س + ٢ ص

ص^{٣} + جا ص = س^{٢} ص^{٢}

جد المشتقة الأولى في كل مما يأتي :

س^{٢} – ٣ ص^{٢} = ٦

س^{٤} – ٤ ص^{٤} = ٥ س ص

٤ص^{٢} - حا ص = س^{٢}

ص^{٢} = س$^{\frac{١}{٢}}$ ، ص > ٠ فجد $\frac{\text{دص}}{\text{د س}}$ عند س = ١٦

نظرية : إذا كان ص = س$^{\frac{م}{ن}}$ حيث م / ن عدد نسبي فإن

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{م}{ن}$ س$^{\frac{م}{ن} - ١}$

البرهان :

قاعدة مشتقة الجذور : فقط في الجذور التربيعية

إذا كانت ص = $\sqrt{\text{ق (س)}}$ ق (س) > صفر فإن

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{قَ (س)}}{٢\sqrt{\text{ق (س)}}}$ ($\frac{\text{مشتقة ما داخل الجذر}}{\text{٢ × الجذر نفسه}}$)

البرهان :

إذا كان ق (س) = $\sqrt{\text{س}^{٢} + ٣\text{س}}$ جد قَ (١)

إذا كان (٢س + ٣ ص)^{٥} = ٣ س^{٢} جد قَ (س)

إذا كان (س - ص)^{٥} = س^{٢} جد قَ (س) عند (١ ، ٠)

إذا كان $\sqrt{\text{ص}}$ - جا س = ٥ جد قَ (س)

جد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ في كل مما يأتي :

إذا كان س = ظتا ٢ ص فأثبت أن :

ص̋ = ـ صَ حا ٤ ص

$\text{س}^{٢} + ٤\ \text{ص}^{٢} = ١٦$

$\text{س}^{٣} + \text{ص}^{٣} = \text{س ص}$

إذا كان س = جا ص بحيث ص 3 (٠ ، $\frac{\pi}{٢}$)أثبت أن :

$\text{ص}^{٤} \times \sqrt{٣\ \text{س}^{٢} + ٥}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١}{\sqrt{١ - \text{س}^{٢}}}$

$\text{ص}^{٢} = \sqrt{\text{س}^{٣} + ٤\ \text{س}^{٢}}$

جد $\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د س}^{٢}}$ في كل مما يأتي :

$\text{ص} + \sqrt{\text{جتا س}} = ٤$

$(\text{س ص})^{٣} = ٤\ \text{س}$

$(\text{س} - \text{ص})^{٢} - \text{ص} = ٠$

ص = س جتا ص

$\text{جـا}\ (\text{س ص}) = \text{س}^{٢}$

$٤\ \text{س}^{٢} + ٣\text{ص}^{٢} = ١٦$

إذا كان س = ظا ص أثبت أن :

$\text{صَ}\ (١ + \text{س}^{٢}) = -\ \text{حا}\ ٢\ \text{ص}$

$\text{جـا س} = \sqrt{\text{ص}} + ٢$

إذا كان ص = $ن^٤$ ، س = ٣ ن جد المشتقة الثانية

إذا كان ص = $ن^٤$ ، س = ٦ ن + ١ فجد $\left.\frac{د^٢ ص}{د س^٢}\right|_{ن = ١}$

إذا كان س = جا ٢ ن ، ص = جتا ٢ ن جد $\frac{د^٢ص}{د س^٢}$

عندما ن = $\frac{\pi}{٤}$

إذا كان جا (س + ص) = $ص^٢$ جتا س فجد صَ

إذا كان جتا ص = س ، ص ∈ (٠ ، $\frac{\pi}{٢}$) فاثبت أن :

$\frac{د ص}{د س} = \frac{-١}{\sqrt{١ - س^٢}}$

إذا كان س = جا ٣ ن ، ص = جتا ٣ ن فجد

جد $\frac{د^٢ص}{د س^٢}$ عندما ن = $\frac{\pi}{٣}$

جد $\frac{د ص}{د س}$ لكل من العلاقات الآتية عند النقط المبينة إزاء كل منها :

٨ س ص + جتا ص = $\pi^٢$ عند ($\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{\pi}{٢}$)

$س^٣ - ٢ س ص + ص^٣ = ٢$ ، (١ ، ١ -)

$\frac{٤}{س} + \frac{٢}{ص} = ٣$ ، (٤ ، ١)

جد النقطة على منحنى العلاقة $\sqrt{س} + \sqrt{ص} = ٣$

التي يكون عندها المماس أفقيا

إذا كان ص = $\sqrt[٣]{(٢ س + ١)^٢}$ فجد $\frac{د ص}{د س}$

إذا كانت س = جا ص فأثبت أن صَ = ظا ص قا^{٢} ص

إذا كان س + ص = جـا ص فأثبت أن

(صَ)^{٢} = صً (ظتا ص - قتا ص)

إذا كان ص جتا ٢ س = س جا ٢ ص فجد

جد $\frac{د ص}{د س}$ عند النقطة ($\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{\pi}{٢}$)

إذا كان ص = جـا س + س ص فأثبت أن

صَ + ص = $\frac{٢ صَ}{١ - س}$

إذا كان س ص = جا س فأثبت أن س صً + ٢ صَ + س ص = ٠

إذا كان ل (س) اقترانا قابلا للاشتقاق عند س = - ١ ،

ل (- ١) = ١ ، لَ (- ١) = ٢ فجد قَ (- ١) فيما يأتي :

ق (س) = $\sqrt{س + ٥}$ × ل (س)

ق (س) = $\frac{(ل (س))^{٢}}{س^{٢} - س}$

إذا كان ص = ن^{٣} + ٢ ن ، $\frac{د س}{د ن}$ = ٤ ن

فجد $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ عند ن = ١

ق (س) = ل (س) - $\frac{ل (س)}{س}$

ق (س) = ظا ($\frac{\pi}{٣}$ ل (س))

إذا علمت أن ص = س ظا س فأثبت أن

صً = ٢ قا^{٢} س (١ + ص)

إذا كان ق (س) = $\begin{cases} (\text{س} + ١)^{٤} & \text{س} \geq ٠ \\ (\text{س} - ١)^{٤} & \text{س} < ٠ \end{cases}$

فأجب عن كل مما يأتي :

أ - جد قَ (س) لجميع قيم س ، س ≠ ٠

ب - بين أن ق اقتران غير قابل للاشتقاق عند س = ٠

إذا كان جا ص = س ، | س | < ١ فأثبت أن

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{١}{\sqrt{١ - \text{س}^{٢}}}$ ، ص (٠ ، $\frac{\pi}{٢}$)

إذا كان ص^{٣} = ق (٤ س^{٢} – س) ، ق (٥) = ٤

قً (٥) = - ٨ ، فجد $\left.\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right|_{\text{س} = -١}$.

إذا كان ص = ن^{٢} – ٤ ن ، س = ٢ ن – ٥ ، فجد

$\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د س}^{٢}}$ ، عند ن = ٦

إذا كان ق (س) = جا هـ (س) ، هـ (١) = $\frac{\pi}{٣}$ ،

هـً (١) = ٠ ، هـَ (١) = ٤ فجد قً (١)

علما بأن ق ، قَ قابلان للاشتقاق

إذا كان ق ، هـ اقترانين قابلين للاشتقاق بحيث كان

هـَ (س) = ق (س) ، قَ (س) = - هـ (س) وكان

ل (س) = (هـ (س))^{٢} + (ق (س))^{٢} فجد لَ (س)

إذا كان ق (س) = س^{3} + ٢ س ، هـ (س) = ٣ س^{2}

جد كلا مما يأتي (قَ ∘ هـ)َ (٢) ، (قَ ∘ هـَ) (٢)

إذا كان ق (٣ س − ١) = $\frac{١}{س^{2}}$ − $\frac{٢}{س}$ ، س ≠ ٠

فأثبت أن قَ (٥) = $-\frac{١}{١٢}$

إذا كان جتا ص − س ص = ٢ س فأثبت أن

صً (س + جا ص) + صَ (٢ + صَ جتا ص) = ٠

إذا كان ل (س) = ق (هـ (س)) ، وكان هـ (١) = ٤ ،

لَ (١) = ٢ ، قَ (٤) = − ٥ ، فجد هـَ (١)

إذا كانت ص = أ جا س − ب جتا س ، أ ، ب ثابتان فاثبت أن

(صَ)^{2} + ص^{2} = أ^{2} + ب^{2}

إذا كان ص = س هـ (س) وكان هـ (− ١) = ٦

هـَ (− ١) = ٢ فجد صَ عند س = − ١

إذا كان جا ص = ظا س فأثبت أن

ظا س = $\frac{\text{صً}}{٢\ \text{قا}^{2}\ \text{س} + (\text{صَ})^{2}}$

إذا كان ص = ق (س) ، ص^{3} = (٢ س^{2} − س) ،

قَ (٦) = ٤ ، ق (٦) = − ٨ ، جد صَ عند س = ٢

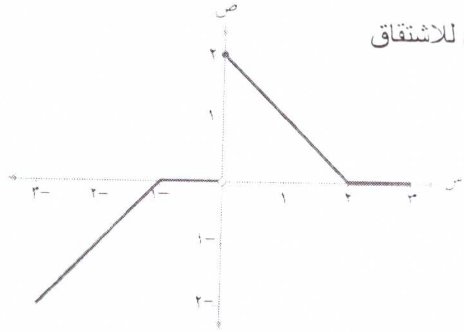
إذا كان ق (س) = $س^{٣}$ - $س^{٢}$ ، هـ (س) = ٣ $س^{٢}$ + س

جد كلا مما يأتي (قَ o هـ)َ (١) ، (قَ o هـ)ً (١)

اعتمادا على الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران ق في الفترة [- ٣ ، ٣] جد كلا مما يأتي :

أ – قيم س حيث - ٣ < س < ٣ التي يكون عندها الاقتران ق غير متصل

ب – قيم س حيث - ٣ < س < ٣ التي يكون عندها الاقتران ق غير قابل للاشتقاق



يتكون هذا السؤال من (٨) فقرات من نوع الاختيار من متعدد ويلي كل فقرة أربعة بدائل واحدة فقط منها صحيحة ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح

١) إذا كان منحنى الاقتران ق يمر بالنقطة (٢ ، ٣) وكان المماس المرسوم لمنحنى ق عند هذه النقطة يصنع زاوية مقدارها ٤٥ مع الاتجاه الموجب مع محور السينات فان

$\lim_{س \to ٢} \frac{ق(س) - ٣}{٦ - ٣س}$ تساوي :

أ) ١ ب) $\frac{١}{٣}$ جـ) $\frac{-١}{٣}$ د) - ٣

٢) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{جا ٢س - ١}{س - \frac{\pi}{٤}}$ تساوي :

أ) ١ ب) صفر جـ) $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ د) $\sqrt{٢}$

٣) $\lim_{هـ \to ٠} \frac{\frac{١}{٢} - جتا(\frac{\pi}{٣} + هـ)}{هـ}$ تساوي

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $\frac{-١}{٢}$ جـ) $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

٤) $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(٢ + ٣هـ) - ق(٢)}{هـ}$ تساوي :

أ) - ١٨ ب) ١٨ جـ) - ٦ د) - ٢

٥) إذا كان معدل التغير في الاقتران ق (س) في الفترة [- ٢ ، م] يساوي $\frac{م - ٤}{م + ٢}$ فإن $قَ_{+}$ (- ٢) تساوي

أ) ٢ ب) صفر جـ) - ٤ د) ٤

٦) إذا كان معدل التغير في الاقتران ق (س) عندما تتغير س من س إلى س + هـ يساوي $س^{٢}$ هـ - ٤ س $هـ^{٢}$ فإن قَ (٣) تساوي

أ) ٩ ب) - ٩ جـ) صفر د) - ٣

٧) إذا كان ق (س) = | ٤ – ٢ س | فإن قَ (٢) تساوي

أ) ٢ ب) - ٢ جـ) صفر د) غير موجودة

٨) إذا كان ق (٤) = ٥ ، قَ (٤) = - ١ ، قً (٤) = ٢
فإن $\left(\frac{ق}{قَ}\right)'$ (٤) يساوي

أ) ١١ ب) - ٩ جـ) - ٦ د) ٦

بالتوفيق والنجاح الباهر
عبد الغفار الشيخ