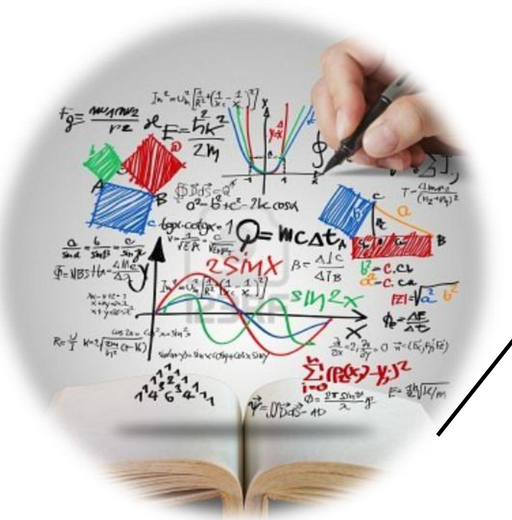
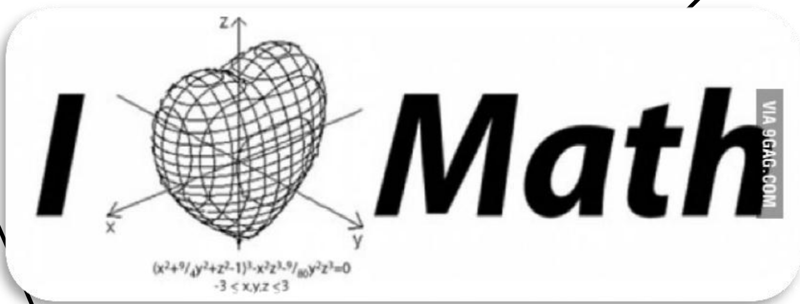


المستوى الثالث (الوحدة الأولى)

الفروع الأكاديمية (أدبي ، الفندقي ، و السياحة)

المنهاج الجديد ٢٠١٧ - ٢٠١٨

النهايات و الاتصال



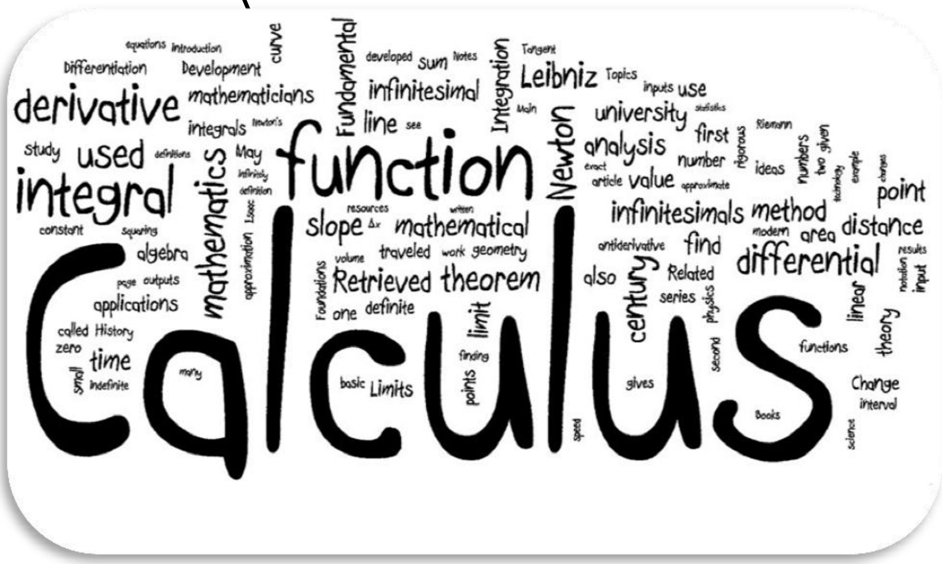
الرونق في الرياضيات

إعداد : أ . سائد الوردات

0772044048 — 0787556274

2017 / 2018

للمراسلة : عبر الفيس بوك https://www.facebook.com/Sa2ed.wardat



مقدمة

الحمدلله رب العالمين والصلاة والسلام على معلم البشرية محمد بن عبدالله وعلى اله وصحبه اجمعين وبعد :

فإنه من دواعي سروري أن أضع بين يدي الطلبة هذا الجهد راجين من الله تبارك وتعالى ان يكون خالصاً لوجهه والوالدي وأن يحقق النفع والفائدة لأبنائنا الطلبة .

وقد حرصت في هذه الدوسيه على أمور عدة تحقق النفع للطالب :-

أولا : مراعاة التأسيس وذكر المتطلب السابق لأي موضوع وارد في الدوسية.

ثانيا : تتضمن الدوسيه شرحاً مفصلاً وملحوظات وأمثلة متنوعة وشاملة

مدرجة من السهل الى الوسط وصولاً الى أمثلة إبداعية محفزة للتفكير .

ثالثا : تحتوي الدوسية على جميع أمثلة الكتاب وتمارينه وأسئلة سنوات سابقة

رابعاً : عملت على وضع تدريبات ووضعت الجواب النهائي حتى يقوم الطالب باختبار نفسك .

وانا إذ اضع هذا الجهد بين يدي الطالب ، فإنني لا اركز على ذكر الإيجابيات ، بل اخترت أن اترك لأبنائنا الطلبة الحكم عليها وتقويمها واذاني مصغية وقلبي مفتوح لسماع أي رأي أو نقد لهذا العمل .

وأعتذر عن أي خطأ أو سهو غير مقصود فنحن بشر إن أصبت فمن الله وإن أخطأت فمن نفسني و الشيطان

((مع أمنياتي لكم جميعا بالنجاح والتوفيق))

أ . سائد ياسين الوردات

تعلّمنا بيتَ الشعر القائل :

ما كل ما يتمنى المرء يدركه

تجري الرياح بما لا تشتهي السفن

ولم نتعلّم بيوت الشعر القائلة :

تجري الرياح كما تجري سفينتنا

نحن الرياح و نحن البحر و السفنُ

إن الذي يرتجي شيئاً بهمّتهِ

يلقاهُ لو حاربَتْهُ الانسُ والجن

فاقصد الى قمم الاشياءِ تدركها

تجري الرياح كما رادت لها السفن

الأول يدعو للرضا بالواقع

والأخريات تدعو لصناعة الواقع

درس الأول : مفهوم النهايات

يرمز لها بالرمز نهـا

$$\text{نها}_{\text{س}\to\text{أ}}\ \text{ق(س)} = \text{ل}$$

تقرأ : نهاية ق(س) عندما س <u>تقترب (تؤول)</u> من أ تساوي ل .

تفصيل النهاية

ق(س)	اقتران
س ← أ	س تقترب (تؤول) إلى أ
ل	ناتج النهاية

مقدمة الدرس

<u>مفهوم اقتراب قيم س من العدد أ</u>

✓ **<u>مثال لتوضيح</u>** :

ما معنى **س تقترب** من العدد ٢ ؟

٢.١ ٢.٠١ ٢.٠٠١ ٢ ١.٩٩٩ ١.٩٩ ١.٩٩

جهة اليمين ← **كلما اقتربت من العدد ٢ تقل**

جهة اليسار → **كلما اقتربت من العدد ٢ تزداد**

س تقترب من العدد ٢ من جهة اليمين

ويرمز لذلك $\text{س} \to 2^{+}$

س تقترب من العدد ٢ من جهة اليسار

ويرمز لذلك $\text{س} \to 2^{-}$

وبشكل عام نقول س تقترب من العدد ٢

ويرمز لذلك $\text{س} \to 2$

شرح الدرس

يتم حساب النهاية من خلال **ثلاث طرق**

الجدول　　الرسم　　التعويض

أولا : حساب النهاية بالجدول .

الجدول

أسئلة مباشرة　　**أسئلة غير مباشره**

أ) **أسئلة مباشرة .**

مثال (١) : الجدول الأتي يبين سلوك الاقتران ق(س) عندما **يقترب من ٢**

س	٢.٠١	٢.٠٠١	٢	١.٩٩٩	١.٩٩
ق(س)	٣.٠١	٣.٠٠١		٢.٩٩٩	٢.٩٩

كلما اقتربت من العدد ٢ تقل　　**كلما اقتربت من العدد ٢ تزداد**

نلاحظ من الجدول ما يلي :

- كلما اقتربت س من العدد ٢ من **جهة اليمين**
  فان **ق(س) تقترب من العدد (٢)** وبالرموز $\text{نها}_{\text{س}\to 2^{+}}\ \text{ق(س)} = 3$
- كلما اقتربت س من العدد ٢ من **جهة اليسار**
  فان **ق(س) تقترب من العدد (٢)** وبالرموز $\text{نها}_{\text{س}\to 2^{-}}\ \text{ق(س)} = 3$
- نلاحظ إن $\text{نها}_{\text{س}\to 2^{+}}\ \text{ق(س)} = \text{نها}_{\text{س}\to 2^{-}}\ \text{ق(س)}$

لذلك نقول إن

النهاية موجودة وتساوي (٣) وبالرموز $\text{نها}_{\text{س}\to 2}\ \text{ق(س)} = 3$

مثال (٢) : الجدول الأتي يبين سلوك الاقتران ق(س) **عندما س تقترب من ١**

س	١.٢	١.١٥	١.١	١	٠.٩٥	٠.٩٠	٠.٨٥
ق(س)	٢.٦٤	٢.٤٧	٢.٣		١.٨٥	١.٧	١.٥٨

الحل :

$\text{نها}_{\text{س}\to 1^{+}}\ \text{ق(س)} = 2$　　$\text{نها}_{\text{س}\to 1^{-}}\ \text{ق(س)} = 2$

$\text{نها}_{\text{س}\to 1^{+}}\ \text{ق(س)} = \text{نها}_{\text{س}\to 1^{-}}\ \text{ق(س)}$

$\therefore\ \text{نها}_{\text{س}\to 1}\ \text{ق(س)} = 2$

مثال (٣) : الجدول الأتي يبين سلوك الاقتران ق(س) **عندما س تقترب من ٢**

س	٣.٣	٣.٢	٣.١	٢	٢.٩	٢.٨	٢.٧
ق(س)	−١.٧	−١.٨	−١.٩		−٢.١	−٢.٢	−٢.٣

الحل :

نها (س ← ٣+) ق(س) = −٢ نها (س ← ٣−) ق(س) = −٢

نها (س ← ٣+) ق(س) = نها (س ← ٣−) ق(س)

∴ نها (س ← ٣) ق(س) = −٢

مثال (٤) : الجدول الأتي يبين سلوك الاقتران ق(س) **عندما س تقترب من ١**

س	١.٣	١.٢	١.١	١	٠.٩	٠.٨	٠.٧
ق(س)	٤.٣	٤.٢	٤.١		٥.٩	٥.٨	٥.٧

الحل :

نها (س ← ١+) ق(س) = ٤ نها (س ← ١−) ق(س) = ٦

نها (س ← ١+) ق(س) ≠ نها (س ← ١−) ق(س)

∴ نها (س ← ١) ق(س) غ.م

ب) أسئلة غير مباشرة

مثال (١) **:** إذا كان **ق(س) = س + ٣** بين باستخدام الجدول القيم التي يأخذها ق(س) **عندما تقترب من ٢**

الحل :

س	٢.١	٢.٠١	٢.٠٠١	٢	١.٩٩٩	١.٩٩	١.٩
ق(س)	٥.١	٥.٠١	٥.٠٠١		٤.٩٩٩	٤.٩٩	٤.٩

عندما س = ٢.١ فان ق(٢.١) = ٢.١ + ٣ = ٥.١

عندما س = ٢.٠١ فان ق(٢.٠١) = ٢.٠١ + ٣ = ٥.٠١

عندما س= ٢.٠٠١ فان ق(٢.٠٠١)=٢.٠٠١+٣ = ٥.٠٠١

عندما س = ٢ فان ق(٢) = ٢ +٣ = ٥

عندما س=١.٩٩٩ فان ق(١.٩٩٩)=١.٩٩٩+٣=٤.٩٩٩

عندما س=١.٩٩ فان ق(١.٩٩)=١.٩٩+٣= ٤.٩٩

عندما س=١.٩ فان ق(١.٩)= ١.٩+٣ = ٤.٩

نها (س ← ٢+) ق(س) = ٥ نها (س ← ٢−) ق(س) = ٥

نها (س ← ٢+) ق(س) = نها (س ← ٢−) ق(س)

∴ نها (س ← ٥) ق(س) = ٥

مثال (٢) : إذا كان **ق(س) = ٢س+١ جد**

نها (س ← ٤) ق(س) باستخدام الجدول

الحل :

س	٤.١	٤.٠١	٤.٠٠١	٤	٣.٩٩٩	٣.٩٩	٣.٩
ق(س)	٩.٢	٩.٠٢	٩.٠٠٢		٨.٩٩٨	٨.٩٨	٨.٨

عندما س=٤.١ فان ق(٤.١)= ٢(٤.١) +١ = ٩.٢

عندما س=٤.٠١ فان ق(٤.٠١) = ٢(٤.٠١)+١= ٩.٠٢

.

.

.

نها (س ← ٤+) ق(س) = ٩ نها (س ← ٤−) ق(س) = ٩

نها (س ← ٤+) ق(س) = نها (س ← ٤−) ق(س)

∴ نها (س ← ٤) ق(س) = ٩

مثال (٣) : إذا كان ق(س)= $\frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢}$ فجد

نها (س ← ٢) ق(س) باستخدام الجدول .

الحل :

بما ان الاقتران اقتران نسبي

....

....

$ق(س) = \frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢} = \frac{(س+٢)\cancel{(س-٢)}}{\cancel{(س-٢)}} = س+٢$

⇐ ق(س) = س+٢ حيث س ≠ ٢

س	٢.١	٢.٠١	٢.٠٠١	٢	١.٩٩٩	١.٩٩	١.٩
ق(س)	٤.١	٤.٠١	٤.٠٠١		٣.٩٩٩	٣.٩٩	٣.٩

عندما س=٢.١ فان ق(٢.١)=٢.١+٢ = ٤.١

عندما س= ٢.٠١ فان ق(٢.٠١)= ٢.٠١ + ٢ = ٤.٠١

عندما س =

عندما س =

نها (س ← ٢+) ق(س) = ٤ نها (س ← ٢−) ق(س) = ٤

نها (س ← ١+) ق(س) = نها (س ← ١−) ق(س)

∴ نها (س ← ٢) ق(س) = ٤

تدريب (١) : إذا كان $ه(س) = \frac{س^{٢} - ١}{س + ١}$ **فجد** $\lim\limits_{س \to -١} ه(س)$ باستخدام الجدول .

الحل :

س				−١			
ق(س)							

انتبه

∞ : عدد حقيقي **لذلك في حاله إن**

$\lim\limits_{س \to ١^{+}} ه(س) = \infty$

$\lim\limits_{س \to ١^{-}} ه(س) = \infty$

$\lim\limits_{س \to ١^{+}} ه(س) = \lim\limits_{س \to ١^{-}} ه(س)$

$\therefore \lim\limits_{س \to ١} ه(س) = \infty$ (غ.م)

نتيجة

١) $\lim\limits_{س \to ا^{+}} ه(س) = ل$ $\lim\limits_{س \to ا^{-}} ه(س) = ل$

$\lim\limits_{س \to ا^{+}} ه(س) = \lim\limits_{س \to ا^{-}} ه(س)$

$\therefore \lim\limits_{س \to ا} ه(س) = ا$ (م وج)

٢) $\lim\limits_{س \to ا^{+}} ه(س) = ل$ $\lim\limits_{س \to ا^{-}} ه(س) = ع$

$\lim\limits_{س \to ا^{+}} ه(س) \neq \lim\limits_{س \to ا^{-}} ه(س)$

$\therefore \lim\limits_{س \to ا} ه(س)$ (غ.م)

مثال (٤) : ليكن

$$ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + ١ & ، س < ٢ \\ ٣س - ١ & ، س \geq ٢ \end{cases}$$

جد $\lim\limits_{س \to ٢} ه(س)$ باستخدام الجدول

لتسهيل الحل :

شرح السؤال :

$س^{٢} + ١$: تسمى قاعدة الاقتران الأولى

$٣س - ١$: تسمى القاعدة الاقتران الثانية

$س < ٢$: تسمى فترة القاعدة الأولى مجاله $(-\infty ، ٢)$

(س اقل تعني إن النهاية من اليسار)

$س \geq ٢$: تسمى فترة القاعدة الثانية مجاله $[٢ ، \infty)$

(س أكبر تعني ان النهاية من اليمين)

الحل :

$\lim\limits_{س \to ٢^{+}} ه(س) = ٥$ $\lim\limits_{س \to ٢^{-}} ه(س) = ٥$

$\lim\limits_{س \to ٢^{+}} ه(س) = \lim\limits_{س \to ٢^{-}} ه(س)$

$\therefore \lim\limits_{س \to ٢} ه(س) = ٥$

تدريب (٢) : **إذا كان**

$$ل(س) = \begin{cases} ٣ & ، س \geq ١ \\ س^{٢} & ، س < ١ \end{cases}$$

جد $\lim\limits_{س \to ١} ل(س)$ باستخدام الجدول

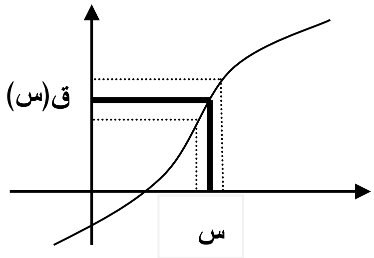
الحل :

ثانيا : حساب النهاية بالرسم

كيفية حساب النهاية من الرسم ؟

ننزل خط عمودي (خط وهمي) عند النقطة المطلوبة ونقترب من النقطة س من اليمين .

وخط أفقي يوازي س يقترب من ق(س) وكذلك الأمر على اليسار .

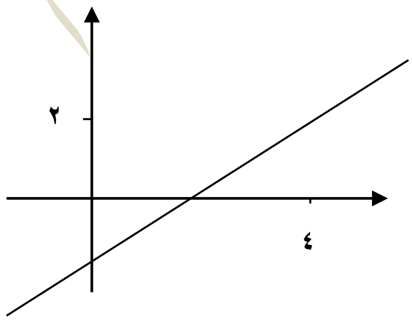


الاقترانات التي سوف نتعامل معها في هذه الوحدة على ثلاثة إشكال

الشكل الأول : اقتران متصل عند نقطة

مثال (١) :

جد $\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نها}}$ ق(س)



الحل :

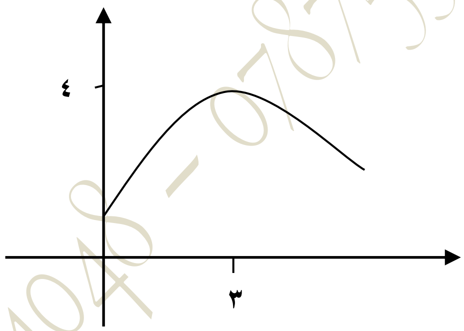
$\underset{س \leftarrow ٤^{+}}{\text{نها}}$ ق(س) = ٢ $\underset{س \leftarrow ٤^{-}}{\text{نها}}$ ق(س) = ٢

$\underset{س \leftarrow ٤^{+}}{\text{نها}}$ ق(س) = $\underset{س \leftarrow ٤^{-}}{\text{نها}}$ ق(س)

$\therefore$ $\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نها}}$ ق(س) = ٢

تدريب (٣) :

جد $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نها}}$ ق(س)

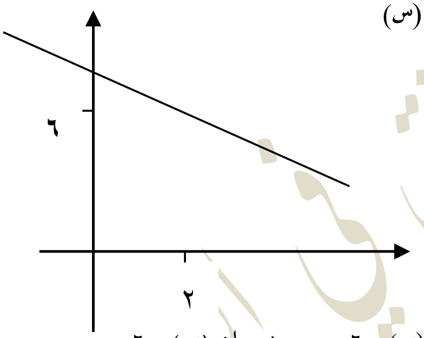


الحل :

مثال (٢) :

جد ١) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}}$ ق(س)

٢) ق(٢)



الحل :

١) $\underset{س \leftarrow ٢^{+}}{\text{نها}}$ ق(س) = ٦ $\underset{س \leftarrow ٢^{-}}{\text{نها}}$ ق(س) = ٦

$\underset{س \leftarrow ٢^{+}}{\text{نها}}$ ق(س) = $\underset{س \leftarrow ٢^{-}}{\text{نها}}$ ق(س)

$\therefore$ $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نها}}$ ق(س) = ٦

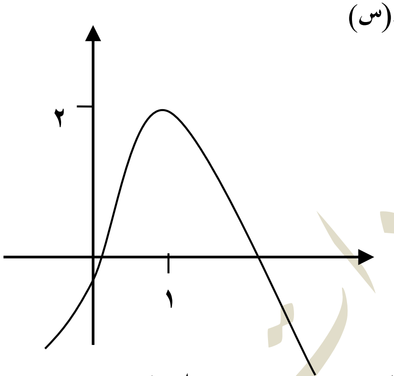
٢) ق(٢) = ٦ **(تعني صورة ق(٢))**

ملاحظة : نجد صورة العدد من المنحنى أو الدائرة المغلقة .

مثال (٣) :

جد ١) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}}$ ق(س)

٢) ق(١)



الحل :

١) $\underset{س \leftarrow ١^{+}}{\text{نها}}$ ق(س) = ٢ $\underset{س \leftarrow ١^{-}}{\text{نها}}$ ق(س) = ٢

$\underset{س \leftarrow ١^{+}}{\text{نها}}$ ق(س) = $\underset{س \leftarrow ١^{-}}{\text{نها}}$ ق(س)

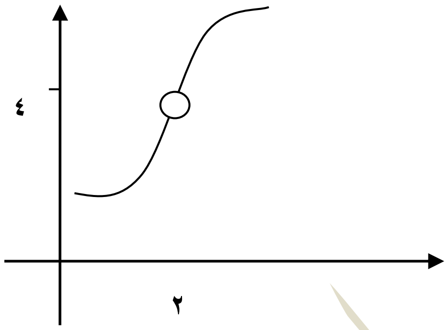
$\therefore$ $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}}$ ق(س) = ٢

٢) ق (١) = ٢

الشكل الثاني : اقتران له فجوة عند نقطة .

مثال (١) :

جد $\lim_{س \to ٢}$ ق(س)



الحل :

$\lim_{س \to ٢^+}$ ق(س) = ٤ $\lim_{س \to ٢^-}$ ق(س) = ٤

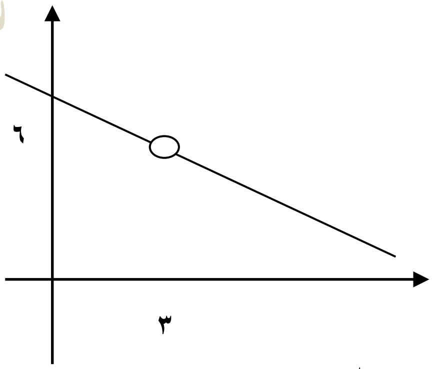
$\lim_{س \to ٢^+}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٢^-}$ ق(س)

∴ $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) = ٤

مثال (٢) :-

جد ١) $\lim_{س \to ٣}$ ق(س)

٢) ق (٣)



الحل :

١) $\lim_{س \to ٣^+}$ ق(س) = ٦ $\lim_{س \to ٣^-}$ ق(س) = ٦

$\lim_{س \to ٣^+}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٣^-}$ ق(س)

∴ $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) = ٦

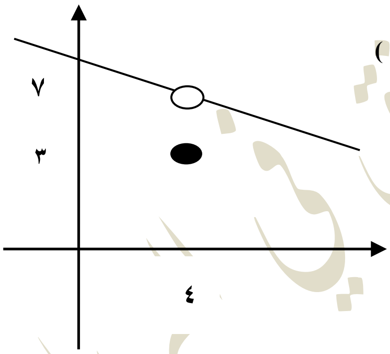
٢) ق (٣) غير موجودة

ملاحظة : الحلقة المفتوحة لا تقبل كصورة ولكنها تقبل كنهاية

تدريب :

جد ١) $\lim_{س \to ٤}$ ق(س)

٢) ق (٤)



الحل :

١) $\lim_{س \to ٤^+}$ ق(س) = ٧ $\lim_{س \to ٤^-}$ ق(س) = ٧

$\lim_{س \to ٤^+}$ ق(س) = $\lim_{س \to ٤^-}$ ق(س)

∴ $\lim_{س \to ٤}$ ق(س) = ٧

٢) ق (٤) = ٣ (الدائرة المغلقة)

ملاحظات :

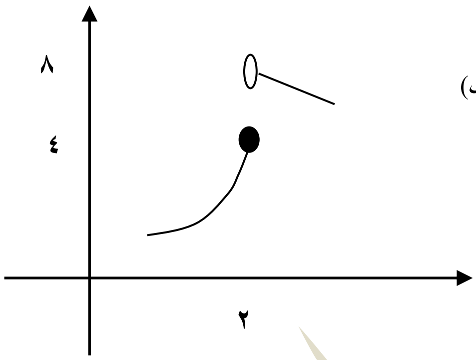
- يتم اخذ النهاية التي يقترب منها العدد فقط من الاقترانات
- عند الحلقات المغلة والمفتوحة لوحدها **لا تأخذ كنهاية**

الشكل الثالث : اقتران له انقطاع عند نقطة

مثال (١) :

جد ١) $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}$

٢) ق (٢)



الحل :

١) $\underset{\text{س}\leftarrow ٢^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = ٨$ ، $\underset{\text{س}\leftarrow ٢^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = ٤$

$\underset{\text{س}\leftarrow ٢^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} \neq \underset{\text{س}\leftarrow ٢^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}$

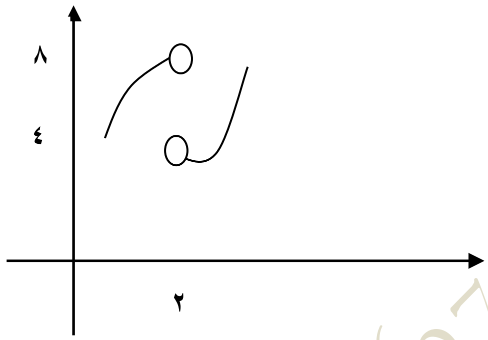
$\therefore \underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} =$ غ . م

٢) ق (٢) = ٤ **(عند الحلقة المغلقة)**

مثال (٢) :

جد ١) $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}$

٢) ق (٢)



الحل :

١) $\underset{\text{س}\leftarrow ٢^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = ٤$ ، $\underset{\text{س}\leftarrow ٢^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = ٨$

$\underset{\text{س}\leftarrow ٢^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} \neq \underset{\text{س}\leftarrow ٢^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}$

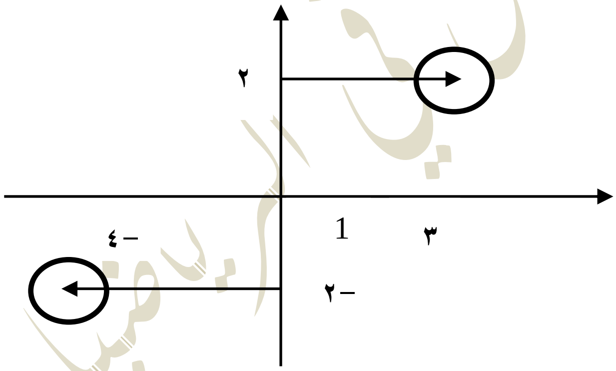
$\therefore \underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} =$ غ . م

٢) ق (٢) غ . م

تدريب :

جد ١) $\underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}$ ٢) $\underset{\text{س}\leftarrow ٤-}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}$

٣) $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}$ ٤) ق (٠)



الحل :

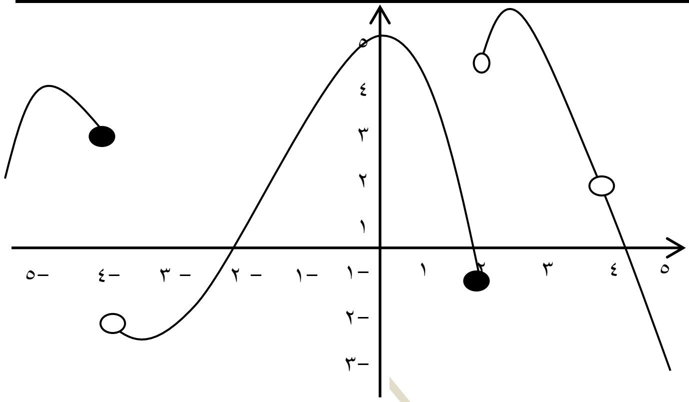
أهم نتائج حساب النهاية بالرسم :

١) الحلقة المفتوحة **لا تقبل كصورة** ولكنها **تقبل كنهاية**

٢) لا علاقة **للصورة بالنهاية**

٣) تكون النهاية **غير موجودة** عندما تكون هناك **قفزة في شكل**

كيفية إيجاد الصورة من الرسم :



في الشكل السابق ق معرف على ح - { ٤ }

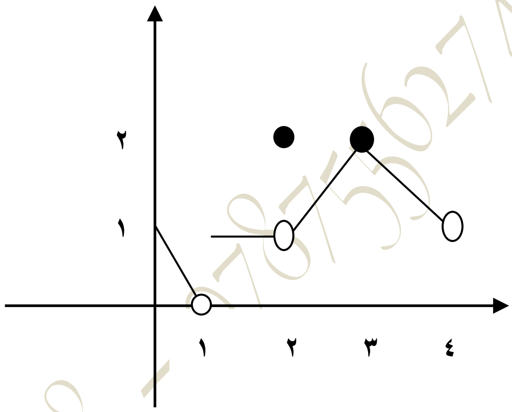
جد أ) ق (-١) = ب) ق (١) = جـ) ق (-٢) =

د) ق (-٤) = هـ) ق (٢) = و) ق (٤) =

الحل :-

نستنتج مما سبق إن **الصورة فقط** تكون معرفة عند **الحلقات المغلقة**

تدريب :-



في الشكل يمثل ق المعرف على [٠ ، ٤) جد

أ) ق (٠) ب) ق (٢) جـ) ق (٤)

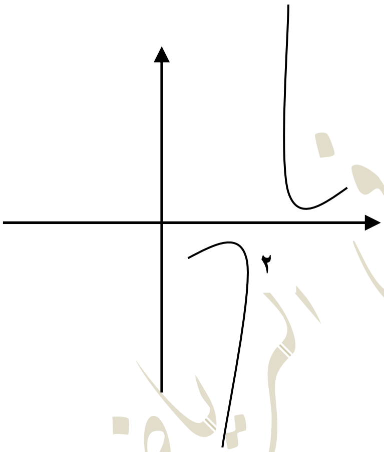
د) ق (١) هـ) ق (٣)

الحل :-

أسئلة متنوعة

سؤال ١ :

جد $\lim\limits_{\text{س} \to ٢}$ ق(س)

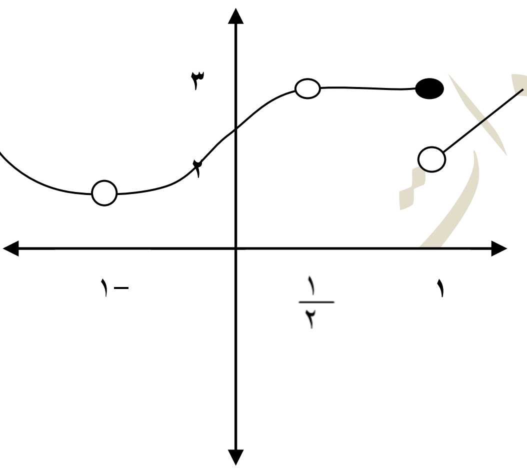


الحل :-

سؤال ٢ :

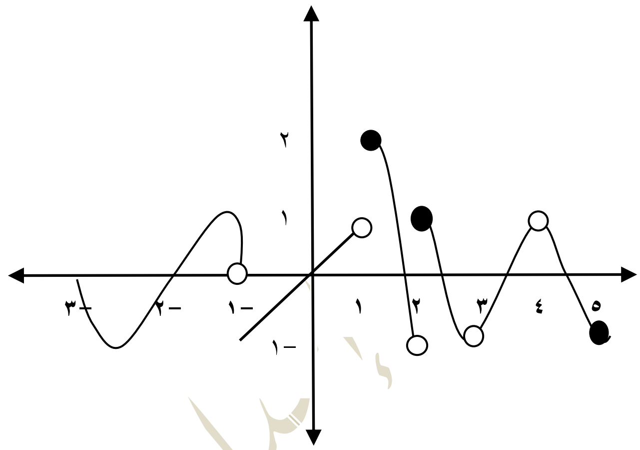
جد أ) $\lim\limits_{\text{س} \to \frac{١}{٢}}$ ق(س)

ب) $\lim\limits_{\text{س} \to ١}$ ق(س)



الحل :-

سؤال ٣ :



جد

أ) نهــا ق(س) حيث س ← -١ ب) نهــا ق(س) حيث س ← ١

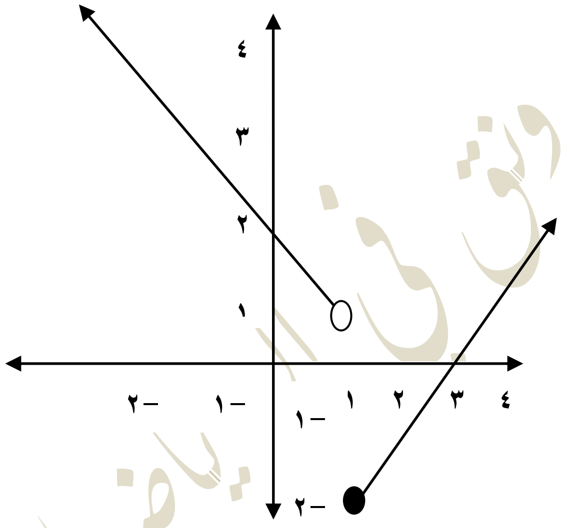
جـ) نهــا ق(س) حيث س ← ٣ د) نهــا ق(س) حيث س ← ٥⁻

هـ) نهــا ق(س) حيث س ← -٣⁻ و) ق(١) ي) ق(٥)

الحل :

لاحظ إن **النهاية الكاملة** عند الأطراف وعند نقاط القفزة **دائما غير موجودة**

سؤال ٤ :

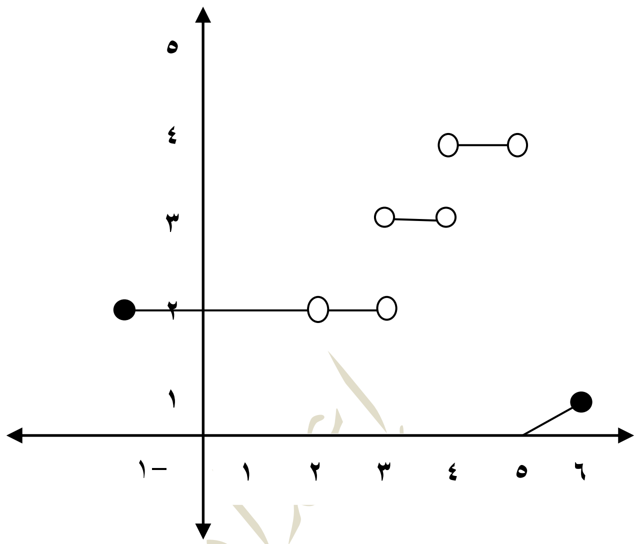


جد أ) ق(٣) ب) ق(١) جـ) ق(٢)

د) نهــا ق(س) حيث س ← ٣ هـ) نهــا ق(س) حيث س ← ١ و) نهــا ق(س) حيث س ← ٢

الحل :

السؤال ٥ :- الشكل يمثل منحنى ق(س) المعرف على [-١ ، ٦]



جد ١) مجموعة قيم أ حيث ان $\lim_{س \to أ} ق(س) =$ غ.م

٢) مجموعة قيم ب حيث ان $\lim_{س \to ب} ق(س) = ٣$

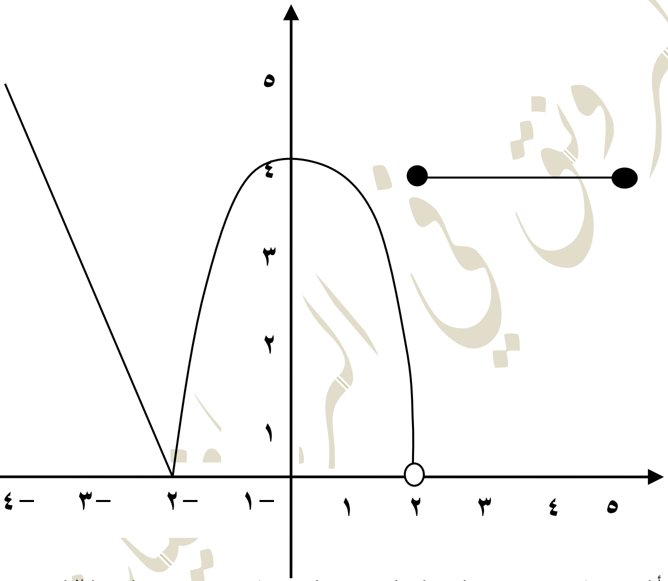
٣) $\lim_{س \to ٥^{+}} ق(س)$

الحل :-

ملاحظات السؤال

- دائما **أطراف الفترات** النهاية عندها **غير موجودة**
- ندرس فقط ما يطلبه السؤال **ضمن الفترة المعطاة**

سؤال ٦ : الشكل المجاور يمثل ق(س) المعرف على [-٤ ، ٥]



جد أ) $\lim_{س \to ٠} ق(س)$ ب) ق(٠) جـ) $\lim_{س \to ٢} ق(س)$ د) ق(٢)

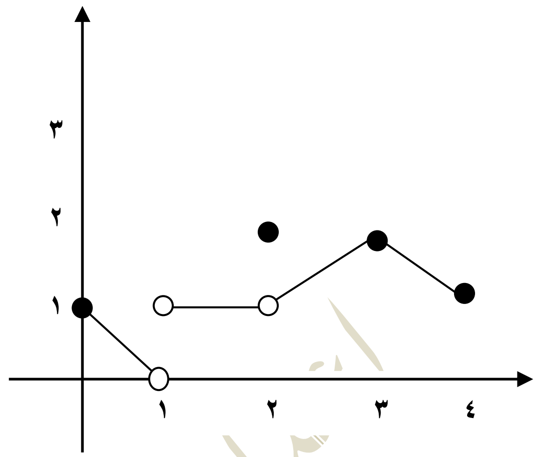
هـ) ق(٣) و) $\lim_{س \to ٥} ق(س)$

ز) ما هي مجموعة قيم أ حيث $\lim_{س \to أ} ق(س) =$ غ.م

ي) ما هي مجموعة قيم ب حيث $\lim_{س \to ب} ق(س) = ٤$

الحل :-

سؤال ٧ : في الشكل الذي يمثل منحنى ق(س) المعرف على [٠ ، ٤] .

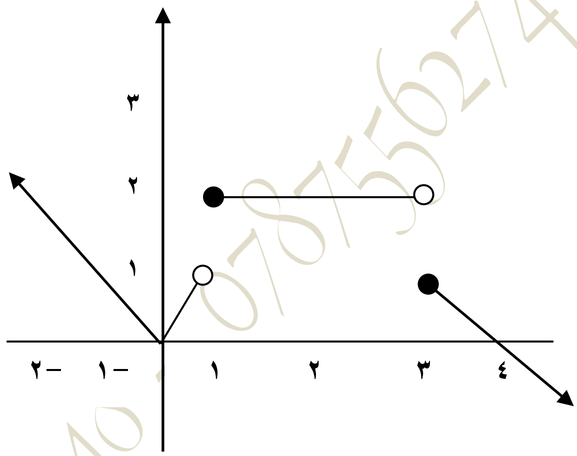


جد أ) مجموعة قيم أ حيث $\lim_{س \to أ}$ ق(س) = غ.م

ب) مجموعة قيم ب حيث $\lim_{س \to ب}$ ق(س) = ١

الحل :

سؤال ٨ :

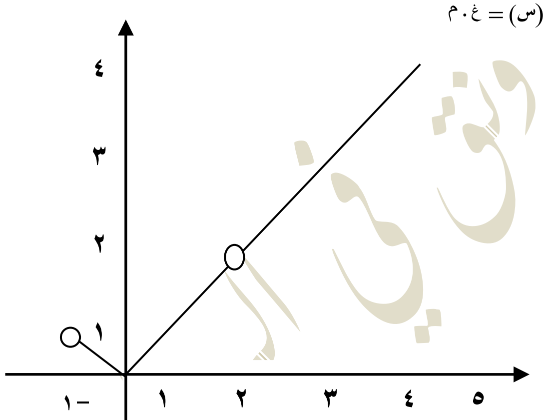


جد $\lim_{س \to أ}$ ق(س) = غ.م

الحل :

سؤال ٩ : في الشكل قيم أ ∋ { -١ ، ١ ، ٠ ، ٢ } والتي عندها

$\lim_{س \to أ}$ ق(س) = غ.م

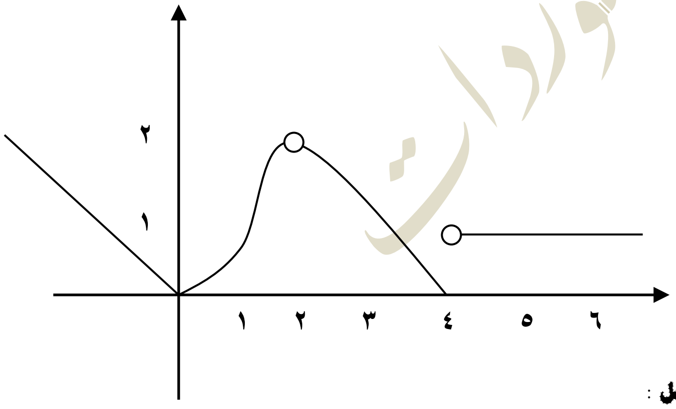


فكرة السؤال فقط يتم فحص الأرقام التي ينتمي إليها القيم أ

الحل :

سؤال ١٠ : في الشكل قيم أ حيث أ ∋ { ٠ ، ٢ ، ٤ ، ٥ } بحيث

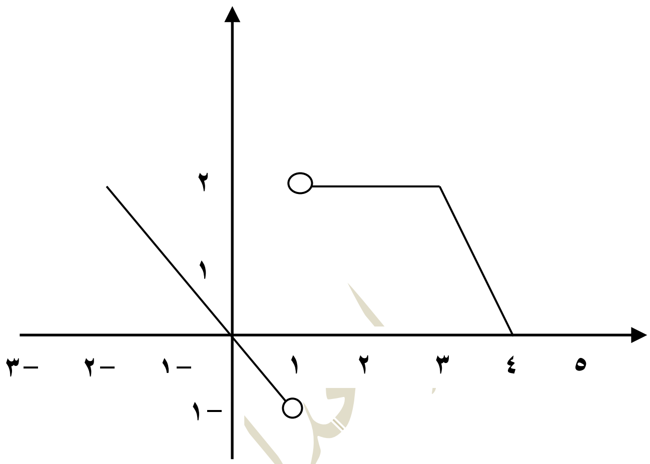
$\lim_{س \to أ}$ ق(س) = غ.م



الحل :

سؤال ١١ : الشكل يمثل ق(س) المعرف على [-٢ ، ٤]

جد أ) $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ ق(س)   ب) ق (٣)



الحل :

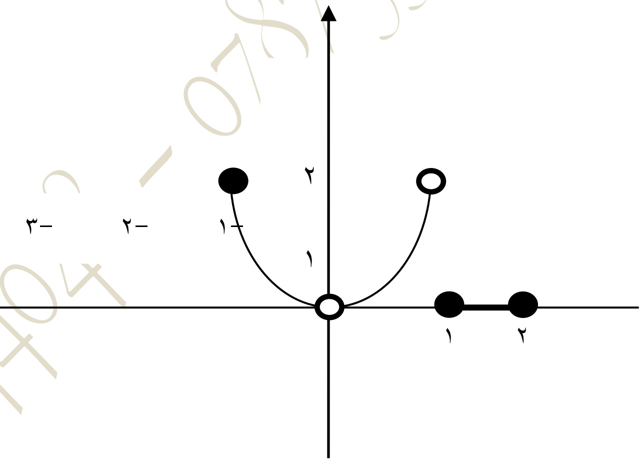
النهاية = الصورة

$\underset{س \leftarrow ١^+}{\text{نهـا}}$ ق(س) = $\underset{س \leftarrow ١^-}{\text{نهـا}}$ ق(س)

$\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ق(أ)

بما ان **النهاية تساوي الصورة** فان **الاقتران متصل عند** س = أ

سؤال ١٢ : يمثل الشكل ق(س) فأي العبارات الاتية صحيحة



أ) $\underset{س \leftarrow ١^+}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ١ ✗   ب) $\underset{س \leftarrow ٠^-}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ١ ✗

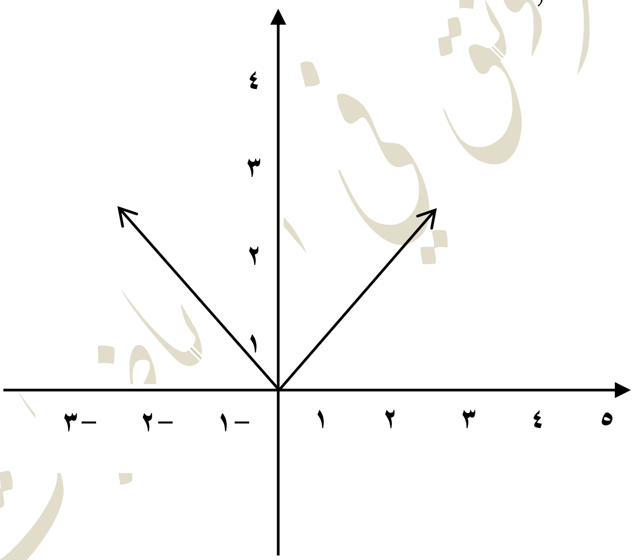
ج) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٠ ✓   د) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ ق(س) = م وج ✓

هـ) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ١ ✗   و) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ١ ✗

ز) $\underset{س \leftarrow ٢^-}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٢ ✗   ي) $\underset{س \leftarrow ١^+}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٠ ✓

سؤال ١٣ : **اعتماد على الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران :**

$$ق(س) = \begin{cases} -س &، س < ٠ \\ س &، س \geq ٠ \end{cases}$$



جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت) :

١) ق (٠) =   ٢) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ ق(س)   ٣) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ ق(س)

الحل :

تلخيص الدرس

$\underset{س \leftarrow ١^+}{\text{نهـا}}$ ق(س)	$\underset{س \leftarrow ١^-}{\text{نهـا}}$ ق(س)	$\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ ق(س)
ل	ل	ل
ل	ع	غ.م
ل	غ.م	غ.م
غ.م	ل	غ.م
غ.م	غ.م	غ.م

الدرس الثاني : نظريات النهايات

١) اذا كان أ وب عددان حقيقان وكان **ق(س) = ب** فان

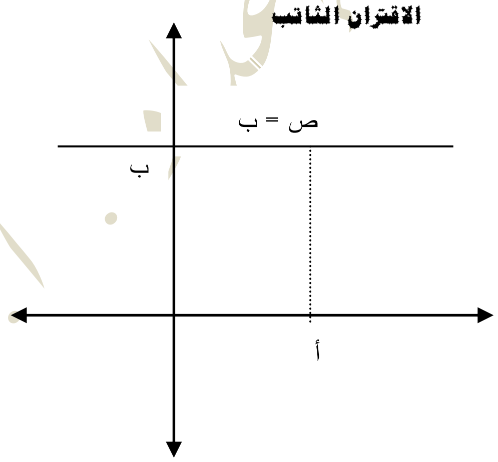
$\underset{س\to أ}{\text{نهـا}}\ ق(س) = ب$ (**نهـا الثابت = الثابت نفسه**)

امثلة : جد قيمة النهايات التالية

١) $\underset{س\to ٢}{\text{نهـا}}\ ٧ = ٧$ ٢) $\underset{س\to \sqrt{٥}}{\text{نهـا}}\ -٥ = -٥$

٣) $\underset{س\to -٥}{\text{نهـا}}\ ٠ = ٠$

الاقتران الثابت

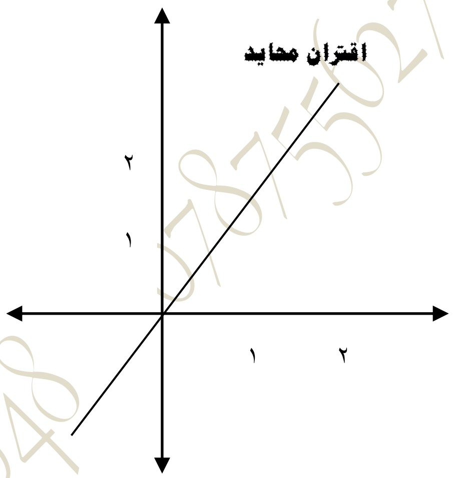


٢) اذا كان **ق(س)= س** فان $\underset{س\to أ}{\text{نهـا}}\ ق(س) = أ$ حيث أ ∈ ح

أمثلة :

١)

اقتران محايد



٣) اذا كان **ق** و **هـ** اقترانيين أ ، ب ، جـ ∈ ح

حيث $\underset{س\to أ}{\text{نهـا}}\ ق(س) = ل$ و $\underset{س\to أ}{\text{نهـا}}\ هـ(س) = ك$ فأن

١) $\underset{س\to أ}{\text{نهـا}}\ (ق(س) \pm هـ(س)) = \underset{س\to أ}{\text{نهـا}}\ ق(س) \pm \underset{س\to أ}{\text{نهـا}}\ هـ(س) = ل \pm ك$

٢) $\underset{س\to أ}{\text{نهـا}}\ (ق(س) \times هـ(س)) = \underset{س\to أ}{\text{نهـا}}\ ق(س) \times \underset{س\to أ}{\text{نهـا}}\ هـ(س) = ل \times ك$

٣) $\underset{س\to أ}{\text{نهـا}}\ جـ\, ق(س) = جـ \times \underset{س\to أ}{\text{نهـا}}\ ق(س) = جـ \times ل$

٤) $\underset{س\to أ}{\text{نهـا}}\ \sqrt[ن]{ق(س)} = \sqrt[ن]{\underset{س\to أ}{\text{نهـا}}\ ق(س)} = \sqrt[ن]{ل}$

شرط ل > ٠ ، ن عدد زوجي

❖ **نتيجة**

أ) اذا كان ق **اقتران كثير حدود** حيث ان أ ∈ ح

فان $\underset{س\to أ}{\text{نهـا}}\ ق(س) = ق(أ)$

ب) اذا كانت $\underset{س\to أ}{\text{نهـا}}\ ق(س) = ب$

فان $(\underset{س\to أ}{\text{نهـا}}\ ق(س))^{ن} = (ب)^{ن}$ **حيث ان ن عدد طبيعي**

تلخيص

تتوزع النهاية على العمليات الاربعة **بشرط** ان تكون **موجوده**

وفي **القسمة بشرط** ان لا يكون ناتج التعويض المقام يساوي صفر

يتم شرح القسمة فيما بعد

أمثلة : جد قيمة النهايات التالية

١) $\underset{س\to ٤}{\text{نهـا}}\ ٢س+١ = ٢\times٤+١ = ٩$

بما الاقتران كثير حدود يتم تعويض العدد الذي يقترب اليه النهاية بشكل مباشر

٢) $\underset{س\to ٢}{\text{نهـا}}\ \sqrt[٣]{س^{٢}-١٢}$

$= \sqrt[٣]{\underset{س\to ٢}{\text{نهـا}}\ س^{٢}-١٢} = \sqrt[٣]{(٢)^{٢}-١٢} = \sqrt[٣]{-٨} = -٢$

٣) $\underset{س\to ٣}{\text{نهـا}}\ س^{٢} = (٣)^{٢} = ٩$

٤) $\underset{س\to -٤}{\text{نهـا}}\ (٣س^{٢}-٦)$

$= \underset{س\to -٤}{\text{نهـا}}\ ٣س^{٢} - \underset{س\to -٤}{\text{نهـا}}\ ٦$

$= ٣\underset{س\to -٤}{\text{نهـا}}\ س^{٢} - \underset{س\to -٤}{\text{نهـا}}\ ٦ = ٣(-٤)^{٢}-٦ = ٣(١٦)-٦ = ٤٨-٦ = ٤٢$

٥) $\underset{س\to ٢}{\text{نهـا}}\ (س^{٣}+٤س^{٢}-٥س+٤)$

$= \underset{س\to ٢}{\text{نهـا}}\ س^{٣} + \underset{س\to ٢}{\text{نهـا}}\ ٤س^{٢} - \underset{س\to ٢}{\text{نهـا}}\ ٥س + \underset{س\to ٢}{\text{نهـا}}\ ٤$

$= \underset{س\to ٢}{\text{نهـا}}\ س^{٣} + ٤\underset{س\to ٢}{\text{نهـا}}\ س^{٢} - ٥\underset{س\to ٢}{\text{نهـا}}\ س + \underset{س\to ٢}{\text{نهـا}}\ ٤$

$= (٢)^{٣}+٤(٢)^{٢}-٥(٢)+٤ = ٨+٤(٤)-١٠+٤ = ٨+١٦-١٠+٤ = ١٨$

٦) $\lim\limits_{س \to \boxed{^-٢}} (س^٢ - ٢س + ٢)$

$= \lim\limits_{س \to ^-٢} س^٢ - \lim\limits_{س \to ^-٢} ٢س + \lim\limits_{س \to ^-٢} ٢$

$= \lim\limits_{س \to ^-٢} س^٢ - ٢ \lim\limits_{س \to ^-٢} س + \lim\limits_{س \to ^-٢} ٢$

$= (٢)^٢ - ٢(٢) + ٢ = ٤ - ٤ + ٢ = ٢$

٧) $\lim\limits_{س \to ^+٢} (س^٣ - ١٥س)$

الحل :

٨) $\lim\limits_{س \to \frac{١}{٢}} (٤س^٢ + ١)$

الحل :

٩) $\lim\limits_{س \to ^-١} -س$

الحل :

١٠) $\lim\limits_{س \to ٠} (٣س + ٥)$

الحل :

١١) $\lim\limits_{س \to ^-١} (س^٣ + ٢س + ٧)$

الحل :

١٢) $\lim\limits_{س \to ^-٢} (٣س^٤ - ٥س^٣ + ٦س - ٧) =$

الحل :

١٣) $\lim\limits_{س \to ١} (س^٢ + ١)(س^٣ + ٥س - ٢) =$

الحل :

١٤) $\lim\limits_{س \to ^-١} (س^٣ + ٢)^٥ =$

الحل :

أمثلة : جد قيمة النهايات التالية :

١) اذا كان $\underset{س\to ٣}{\text{نهـا}}\ ق(س) = ٥$ و $\underset{س\to ٣}{\text{نهـا}}\ هـ(س) = -٤$

جد أ) $\underset{س\to ٣}{\text{نهـا}}(ق(س) + هـ(س))$ ب) $\underset{س\to ٣}{\text{نهـا}}(ق(س) - هـ(س))$

جـ) $\underset{س\to ٣}{\text{نهـا}}(ق(س) \times هـ(س))$ د) $\underset{س\to ٣}{\text{نهـا}}\ ٢ق(س)$ هـ) $(\underset{س\to ٣}{\text{نهـا}}\ ق(س))^{٢}$

الحل : الفكرة " المعطى هنا جاهز "

أ) $\underset{س\to ٣}{\text{نهـا}}(ق(س) + هـ(س))$

$= \underset{س\to ٣}{\text{نهـا}}\ ق(س) + \underset{س\to ٣}{\text{نهـا}}\ هـ(س) = (٥) + (-٤) = ١$

ب) $\underset{س\to ٣}{\text{نهـا}}(ق(س) - هـ(س))$

$= \underset{س\to ٣}{\text{نهـا}}\ ق(س) - \underset{س\to ٣}{\text{نهـا}}\ هـ(س) = (٥) - (-٤) = ٩$

جـ) $\underset{س\to ٣}{\text{نهـا}}(ق(س) \times هـ(س))$

$= \underset{س\to ٣}{\text{نهـا}}\ ق(س) \times \underset{س\to ٣}{\text{نهـا}}\ هـ(س) = (٥) \times (-٤) = -٢٠$

د) $\underset{س\to ٣}{\text{نهـا}}\ ٢ق(س)$

$= ٢ \underset{س\to ٣}{\text{نهـا}}\ ق(س) = ٢ \times (٥) = ١٠$

هـ) $(\underset{س\to ٣}{\text{نهـا}}\ ق(س))^{٢} = (٥)^{٢} = ٢٥$

٢) اذا كانت $\underset{س\to ٢}{\text{نهـا}}\ ق(س) = ٥$ **فجد** :

أ) $\underset{س\to ٢}{\text{نهـا}}(٦ \times ٢ق(س) + ٣)$ ب) $(\underset{س\to ٢}{\text{نهـا}}\ ق(س))^{٣}$

الحل :

أ) $\underset{س\to ٢}{\text{نهـا}}(٦ \times ٢ق(س) + ٣)$

$= \underset{س\to ٢}{\text{نهـا}}\ ٦ \times \underset{س\to ٢}{\text{نهـا}}\ ٢ق(س) + \underset{س\to ٢}{\text{نهـا}}\ ٣$

$= \underset{س\to ٢}{\text{نهـا}}\ ٦ \times ٢ \boxed{\underset{س\to ٢}{\text{نهـا}}\ ق(س)} + \underset{س\to ٢}{\text{نهـا}}\ ٣$

$= ٦ \times ٢(٥) + ٣ = ٦٣$

ب) $(\underset{س\to ٢}{\text{نهـا}}\ ق(س))^{٣} = (٥)^{٣} = ١٢٥$

٣) اذا كان $\underset{س\to ٦}{\text{نهـا}}\ ق(س) = ٤$ و $\underset{س\to ٦}{\text{نهـا}}\ هـ(س) = ٣$

جد : ١) $\underset{س\to ٦}{\text{نهـا}}\ ٢ق(س) = \boxed{٨}$ ٢) $\underset{س\to ٦}{\text{نهـا}}(ق(س) + هـ(س)) = \boxed{٧}$

٣) $\underset{س\to ٦}{\text{نهـا}}\ ق(س) \times هـ(س) = \boxed{١٢}$ ٤) $\underset{س\to ٦}{\text{نهـا}} \frac{ق(س)}{\boxed{هـ(س)}} = \boxed{\frac{٤}{٣}}$

٥) $\underset{س\to ٦}{\text{نهـا}}(٢ق(س) - هـ(س)) = \boxed{٥}$ ٦) $\underset{س\to ٦}{\text{نهـا}}(٤ق(س) - هـ(س)) = \boxed{٤}$

٧) $\underset{س\to ٦}{\text{نهـا}}(هـ(س) - ٤) = \boxed{-١}$ ٨) $\underset{س\to ٦}{\text{نهـا}}(هـ(س) - س^{٢} + ١) = \boxed{-٣٢}$

٩) $\underset{س\to ٦}{\text{نهـا}}(ق(س) \times هـ(س) + ١) = \boxed{١٣}$ ١٠) $(\underset{س\to ٦}{\text{نهـا}}\ ق(س))^{٢} = \boxed{١٦}$

١١) $\underset{س\to ٦}{\text{نهـا}} \sqrt[٣]{٢ق(س)} = \boxed{٢}$ ١٢) $\underset{س\to ٦}{\text{نهـا}} \sqrt{٣ق(س) + س} = \boxed{\sqrt{١٨}}$

الحل :

٤) اذا علمت ان $\lim\limits_{س\to ٣} ق(س) = ٨$ ، $\lim\limits_{س\to ٣} هـ(س) = -٢$ **فجد قيمة كل مما يأتي** (**أن وجدت**) :

١) $\lim\limits_{س\to ٣} (٤ق(س) + ٢هـ(س)) = \boxed{٢٨}$

٢) $\lim\limits_{س\to ٣} (ق(س) - ٢هـ(س)) = \boxed{١٢}$

٣) $\lim\limits_{س\to ٣} (ق(س) \times هـ(س)) = \boxed{-١٦}$ ٤) $\lim\limits_{س\to ٣} ٥ق(س) = \boxed{٤٠}$

٥) $\lim\limits_{س\to ٣} (٢ق(س) + ١) = \boxed{١٧}$

٦) $\lim\limits_{س\to ٣} ((هـ(س))^{٣} + ٣س - ٧) = \boxed{-٦}$

٧) $\lim\limits_{س\to ٣} (٢ق(س) + ٣هـ(س) + ٢س + ٤) = \boxed{٢٠}$

الحل :

أمثلة : جد قيمة النهايات التالية :

١) اذا كانت $\lim\limits_{س\to ٣} ٢ق(س) = ١٠$ ، $\lim\limits_{س\to ٣} \frac{هـ(س)}{٤} = -١$

جد : ١) $\lim\limits_{س\to ٣} \frac{هـ(س)}{٥} =$ ٢) $\lim\limits_{س\to ٣} (ق(س) - هـ(س) + س)$

٣) $\lim\limits_{س\to ٣} (ق(س) + هـ(س))^{٢}$ ٤) $\lim\limits_{س\to ٣} \sqrt{٣ق(س) + ١}$

الحل :الفكرة " المعطى هنا ليس جاهز "

$\lim\limits_{س\to ٣} ٢ق(س) = ١٠ \Leftarrow ٢\lim\limits_{س\to ٣} ق(س) = ١٠ \Leftarrow \lim\limits_{س\to ٣} ق(س) = \frac{١٠}{٢} = ٥$

$\lim\limits_{س\to ٣} \frac{هـ(س)}{٤} = -١ \Leftarrow \lim\limits_{س\to ٣} هـ(س) = ٤ \times -١ \Leftarrow \lim\limits_{س\to ٣} هـ(س) = -٤$

١) $\lim\limits_{س\to ٣} \frac{هـ(س)}{٥} = \frac{\lim\limits_{س\to ٣} هـ(س)}{\lim\limits_{س\to ٣} ٥} = \frac{-٤}{٥}$

٢) $\lim\limits_{س\to ٣} (ق(س) - هـ(س) + س)$

$= \lim\limits_{س\to ٣} ق(س) - \lim\limits_{س\to ٣} هـ(س) + \lim\limits_{س\to ٣} س$

$= ٥ - -٤ + ٣ = ١٢$

٣) $\lim\limits_{س\to ٣} (ق(س) + هـ(س))^{٢}$

$= \lim\limits_{س\to ٣} ((ق(س))^{٢} + ٢ق(س)هـ(س) + هـ(س)^{٢})$

$= \lim\limits_{س\to ٣} (ق(س))^{٢} + \lim\limits_{س\to ٣} ٢ق(س)هـ(س) + \lim\limits_{س\to ٣} هـ(س)^{٢}$

$= (\lim\limits_{س\to ٣} ق(س))^{٢} + ٢\lim\limits_{س\to ٣} ق(س) \lim\limits_{س\to ٣} هـ(س) + (\lim\limits_{س\to ٣} هـ(س))^{٢}$

$(٥)^{٢} + ٢(٥)(-٤) + (-٤)^{٢} = ٢٥ + -٤٠ + ١٦ = ١$

٤) $\lim\limits_{س\to ٣} \sqrt{٣ق(س) + ١}$

$= \sqrt{\lim\limits_{س\to ٣} (٣ق(س) + ١)}$

$= \sqrt{٣\lim\limits_{س\to ٣} ق(س) + \lim\limits_{س\to ٣} ١} = \sqrt{٣(٥) + ١} = \sqrt{١٦}$

٢) اذا كان $\underset{س\to -١}{\text{نهـا}}\ ٥ق(س) = ٢٠$ ، $\underset{س\to -١}{\text{نهـا}}\ \frac{١}{٢}هـ(س) = -٣$

جد : ١) $\underset{س\to -١}{\text{نهـا}}\ ٢هـ(س) = \boxed{-١٢}$ ٢) $\underset{س\to -١}{\text{نهـا}}\ (ق(س) + س^{٣}) = \boxed{٤}$

٣) $\underset{س\to -١}{\text{نهـا}}\ (٢ق(س) + ٤س) = \boxed{٦}$ ٤) $\underset{س\to -١}{\text{نهـا}}\ \sqrt[٣]{هـ(س) + ٢س} = \boxed{-٢}$

الحل :

٣) ليكن $\underset{س\to ٣}{\text{نهـا}}\ (ق(س) + ٢) = -٣$ ، $\underset{س\to ٣}{\text{نهـا}}\ \frac{هـ(س)}{٤} = ٢$

جد $\underset{س\to ٣}{\text{نهـا}}\ (ق(س) + ٣هـ(س) - س) = \boxed{١٦}$ ؟

الحل :

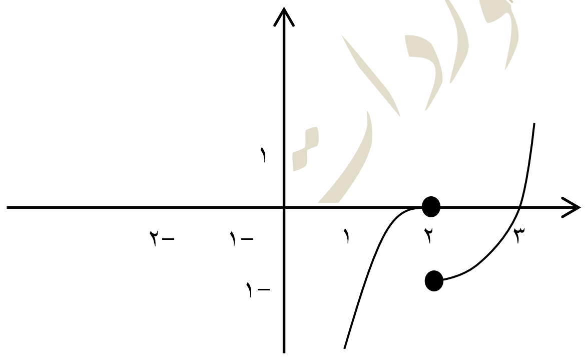
٤) ليكن $\underset{س\to ١}{\text{نهـا}}\ (٢ق(س) - ٣س) = ٥$ ، $\underset{س\to ١}{\text{نهـا}}\ (هـ(س) + ٧س^{٢}) = ٠$

جد : ١) $\underset{س\to ١}{\text{نهـا}}\ (٢ق(س) - هـ(س) + ٢) = \boxed{٢١}$

٢) $\underset{س\to ١}{\text{نهـا}}\ \sqrt[٣]{\frac{هـ(س)}{ق(س) - ١}} = \boxed{\sqrt[٣]{\frac{-٧}{٣}}}$

الحل :

٥) من الرسم المجاور جد $\underset{س\to ٢^{+}}{\text{نهـا}}\ (ق(س) + ٤س - ٧)$



الحل :

٦) ٣١/الأسئلة اذا كانت نهـــا$_{س\to ٣}$ (٢ق(س) + ٢س + ١) = ٢٧ **فجد قيمة** نهـــا$_{س\to ٣}$ (ق(س))^{٣} ؟

الحل :

$\boxed{ع = ١٠٠٠}$

إيجاد المجاهيل

أمثلة :

١) اذا كانت نهـــا$_{س\to ٨}$ (م س + ٥) = ٢١ **جد الثابت م** ؟

الحل :

نهـــا$_{س\to ٨}$ (م س + ٥) = ٢١

= نهـــا$_{س\to ٨}$ م س + نهـــا$_{س\to ٨}$ ٥ = ٢١

م(٨) + ٥ = ٢١ ⇐ ٨م = ١٦ ⇐ م = ٢

٢) ليكن نهـــا$_{س\to ٢}$ (٢س+جـ) = ١٢ **جد قيمة جـ** ؟

الحل :

$\boxed{جـ = ٨}$

٣) لتكن نهـــا$_{س\to ١^{+}}$ (٨ − س) = ٩ **جد قيمة الثابت أ** ؟

الحل :

نهـــا$_{س\to ١^{+}}$ (٨ − س) = ٩

نهـــا$_{س\to ١^{+}}$ ٨ − نهـــا$_{س\to ١^{+}}$ س = ٩

٨ − أ = ٩ ⇐ أ = −١

٤) لتكن نهـــا$_{س\to ١^{-}}$ (أس − ٥) = ٤ **جد قيمة الثابت أ** ؟

الحل :

نهـــا$_{س\to ١^{-}}$ (أس − ٥) = ٤

نهـــا$_{س\to ١^{-}}$ أس − نهـــا$_{س\to ١^{-}}$ ٥ = ٤

أ^{٢} − ٥ = ٤ ⇐ أ^{٢} = ٩ ⇐ أ = ±٣

٥) ٣١/الأسئلة اذا كانت نهـــا$_{س\to ٣}$ (م س^{٢} + ٥س + ١) = ٢٥ **فما قيمة الثابت م** ؟

الحل :

$\boxed{ع \quad م = ١}$

عزيزي الطالب تذكر

تستخدم فقط في الجذور الزوجية اذا كان ناتج التعويض يساوي صفر

ق(س) = $\sqrt{أس \pm ب}$ حيث أ ≠ ٠

① نساوي ما داخل الجذر بالصفر (اي بمعنى نجد جذور الاقتران)

✓ **مثال ذلك** :- جد جذور الاقتران ق(س) = $\sqrt{٣س - ٩}$

٣س – ٩ = ٠ ⟸ ٣س = ٩ ⟸ س = ٣

تستخدم هذه الطريقة للاقترانات الخطية فقط

② نرسم خط الاعداد

✓ **مثال ذلك** :- المثال السابق

بعد يجاد اصفار الاقتران نرسم خط الاعداد

③ نعين على الخط الاعداد . الاطراف والجذور والاشارات

كيفية ذلك :-

اولا : نرسم خط اعداد

ثانيا : نجد إشارة خط الاعداد

- - - - - - - - - - - - -　　+ + + + + + + +

٣

كيفية وضع الاشارة فوق خط الاعداد ؟!!

طريقة فحص الاشارة على خط الاعداد

عكس اشارة معامل س　　مثل اشارة معامل س

س = اصفار الاقتران أو جذور الاقتران

غير معرف　　معرف

- - - - - - - - - -　+++++++++++++

٣

الإشارة الموجبة تعني على خط الاعداد :

الإشارة السالبة تعني على خط الاعداد :

ق(س) = $\sqrt{أس^٢ + ب س + جـ}$

① نساوي ما داخل الجذر بالصفر (نجد جذور الاقتران) .

مثال ذلك :- جد جذور الاقتران ق(س) = $\sqrt{س^٢ - ٢س}$

$س^٢$ – ٢س = ٠　نستخدم طرق التحليل التي تم شرحهم سابقا

س(س – ٢) = ٠

س = ٠　و　س =٢

تستخدم هذه الطريقة للاقترانات تربيعية فقط

② نرسم خط الاعداد وتعيين اصفار الجذور والاطراف:-

مثال ذلك :- المثال السابق

٠　　٢

③ نعين على خط الاعداد الاشارات .

هناك عدد حالات :-

الحالة الاولى :- اذا كان المميز $ب^٢ - ٤أجـ > صفر$ ، فان للمعادلة جذران حقيقيان مختلفين .

نفس اشارة $س^٢$　　**عكس معامل $س^٢$**　　**نفس اشارة $س^٢$**

ن　　م

الحالة الثانية :- اذا كان المميز $ب^٢ - ٤أجـ = صفر$ ، فان للمعادلة جذران حقيقيان متساويين .

نفس اشارة $س^٢$　　**نفس اشارة $س^٢$**

م

الحالة الثالثة :- اذا كان المميز $ب^٢ - ٤ أجـ < صفر$ ، فلا يوجد للمعادلة جذور حقيقية .

نفس اشارة معامل $س^٢$

نكمل حل المثال السابق :-

نحسب المميز من اجل تحديد الاشارات على خط الاعداد

$ب^٢ - ٤أجـ$ = $(-٢)^٢$ - ٤(١)(٠) = ٤ > ٠ يطبق عليها الحالة الاولى

معرف　　غير معرف　　معرف

++ +++++　　- - - - - - - - - - - -　　+ ++ ++++++

٠　　٢

الجذور

الجذور الفردية   **الجذور الزوجية**

أولا : الجذور الفردية : لا يوجد فيها مشكلة فهي دائما سواء كان بداخلها ناتج (موجب أو سالب أو صفر) معنى ذلك التعويض يكون مباشر

أمثلة : جد قيمة النهايات التالية

١) $\underset{\text{س}\to-6}{\text{نهـا}} \sqrt[3]{\text{س}-2}+\text{س} = \sqrt[3]{-8}-6 = -2-6 = -8$

٢) $\underset{\text{س}\to32}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[5]{\text{س}}+8}{\text{س}-2} = \dfrac{\sqrt[5]{32}+8}{32-2} = \dfrac{10}{30} = \dfrac{1}{3}$

٣) $\underset{\text{س}\to3}{\text{نهـا}} \sqrt[3]{\text{س}-3} = \sqrt[3]{0} = 0$

أهم الملاحظات :

١) $\sqrt{\dfrac{\text{أ}}{\text{ب}}} = \dfrac{\sqrt{\text{أ}}}{\sqrt{\text{ب}}}$ أ ، ب >0

٢) $\dfrac{\text{أ}}{\sqrt{\text{أ}}} = \dfrac{\sqrt{\text{أ}}\times\sqrt{\text{أ}}}{\sqrt{\text{أ}}} = \sqrt{\text{أ}}$ أ >0

---

١) $\sqrt[3]{\dfrac{\text{أ}}{\text{ب}}} = \dfrac{\sqrt[3]{\text{أ}}}{\sqrt[3]{\text{ب}}}$

٢) $\dfrac{\text{أ}}{\sqrt{\text{أ}}} = \dfrac{\sqrt{\text{أ}}\times\sqrt{\text{أ}}}{\sqrt{\text{أ}}} = \sqrt{\text{أ}}$

ثانيا : الجذور الزوجية

التعويض المباشر

اذا كان ناتج التعويض داخل الجذور (**موجب**) الجذر معرف نكمل الحل

مثال :

$\underset{\text{س}\to2}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س}^2+5} = \sqrt{(2)^2+5} = \sqrt{9} = \pm3$

اذا كان ناتج التعويض داخل الجذور (**سالب**) الجذر غير معرف (غ.م)

مثال :

$\underset{\text{س}\to1}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س}^2-26} = \sqrt{(1)^2-26} = \sqrt{-25} = \text{غ.م}$

اذا كان ناتج التعويض داخل الجذر (صفر) أقوم بتحديد المجال

كيف نقوم بتحديد المجال :

١) نساوي ما داخل الجذر بالصفر

٢) نرسم خط الاعداد

٣) نعين اصفار المجال ونعين إشارات

٤) فوق خط الاعداد موجب (+) النهاية معرفة

فوق خط الاعداد سالب (-) النهاية غير معرفة

أمثلة : جد قيمة النهايات التالية (أن وجدت)

إيجاد النهاية بشكل عام

١) $\underset{\text{س}\to2}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س}+2} = \sqrt{4} = \pm2$

٢) $\underset{\text{س}\to3}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س}-5} = \sqrt{3-5} = \sqrt{-2} = \text{غ.م}$

٣) $\underset{\text{س}\to5}{\text{نهـا}} \boxed{\sqrt{\text{س}-5}} = \sqrt{5-5} = \boxed{\sqrt{0}}$

الحل :

بما ان ناتج التعويض داخل الجذر صفر يجب علينا تحديد المجال $\sqrt{\text{س}-5}$

$\text{س}-5=0 \Leftarrow \text{س}=5$

(غ.م)   (م)

$-----\quad 5 \quad ++++++$

$\underset{\text{س}\to5}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س}-5} \begin{cases} \underset{\text{س}\to5^+}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س}-5} = \sqrt{5-5} = \sqrt{0} = 0 \\ \underset{\text{س}\to5^-}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س}-5} \quad \text{غ.م} \end{cases}$

$\underset{\text{س}\to5^+}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س}-5} \neq \underset{\text{س}\to5^-}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س}-5}$

$\therefore \underset{\text{س}\to5}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س}-5} \quad \text{غ.م}$

٤) $\underset{\text{س}\to2}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س}-2}$

الحل :

٥) $\underset{\text{س}\to1}{\text{نهـا}} \sqrt{1-\text{س}}$

الحل :

٦) $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \sqrt{٣ - س}$

الحل :

٧) $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \sqrt{٩ - ٣س} = \sqrt{٩ - ٣(٣)} = \boxed{\sqrt{٠}}$

الحل :

تحديد المجال $\sqrt{٩ - ٣س}$

$٩ - ٣س = ٠ \Leftarrow -٣س = -٩ \Leftarrow س = ٣$

(غ.م) (م)

+++++ ------

٣

$\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \sqrt{٩ - ٣س} \begin{cases} \underset{س \to ٣^{+}}{\text{نهـا}} \sqrt{٩ - ٣س} & \text{غ.م} \\ \underset{س \to ٣^{-}}{\text{نهـا}} \sqrt{٩ - ٣س} = \sqrt{٩ - ٣(٣)} = \sqrt{٠} = ٠ \end{cases}$

$\underset{س \to ٣^{+}}{\text{نهـا}} \sqrt{٩ - ٣س} \neq \underset{س \to ٣^{-}}{\text{نهـا}} \sqrt{٩ - ٣س}$

$\therefore \underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \sqrt{٩ - ٣س}$ غ.م

٨) $\underset{س \to ٥}{\text{نهـا}} \sqrt{١٠ - ٢س}$

الحل :

٩) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \sqrt{س^{٢} - ١} = \sqrt{(١)^{٢} - ١} = \boxed{\sqrt{٠}}$

الحل :

تحديد المجال $\sqrt{س^{٢} - ١}$

$س^{٢} - ١ = ٠ \Leftarrow س^{٢} = ١ \Leftarrow س = \pm ١$

(م) (غ.م) (م)

+++++ ----- +++++

-١ $\boxed{١}$

فقط ندرس العدد الذي تقترب منه النهاية

$\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \sqrt{س^{٢} - ١} \begin{cases} \underset{س \to ١^{+}}{\text{نهـا}} \sqrt{س^{٢} - ١} = \sqrt{(١)^{٢} - ١} = \sqrt{٠} = ٠ \\ \underset{س \to ١^{-}}{\text{نهـا}} \sqrt{س^{٢} - ١} & \text{غ.م} \end{cases}$

$\underset{س \to ١^{+}}{\text{نهـا}} \sqrt{س^{٢} - ١} \neq \underset{س \to ١^{-}}{\text{نهـا}} \sqrt{س^{٢} - ١}$

$\therefore \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \sqrt{س^{٢} - ١}$ غ.م

١٠) $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \sqrt{٤ - س^{٢}}$

الحل :

١١) $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \sqrt{س^{٢} - ١٦}$

الحل :

١٢) $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \sqrt{٩ - س^{٢}}$

الحل :

١٣) $\underset{س \to ٥}{\text{نهـا}} \sqrt{٥س - س^{٢}} = \sqrt{٥(٥) - (٥)^{٢}} = \boxed{\sqrt{٠}}$

الحل :

تحديد المجال $\sqrt{٥س - س^{٢}}$

$٥س - س^{٢} = ٠ \Leftarrow س(٥ - س) = ٠ \Leftarrow س = ٠$ أو $س = ٥$

(غ.م)	(م)	(غ.م)
-----	+++++	-----
٠		$\boxed{٥}$

$\underset{س \to ٥}{\text{نهـا}} \sqrt{٥س - س^{٢}} \begin{cases} \underset{س \to ٥^{+}}{\text{نهـا}} \sqrt{٥س - س^{٢}} & \text{غ.م} \\ \underset{س \to ٥^{-}}{\text{نهـا}} \sqrt{٥س - س^{٢}} = \sqrt{٥(٥) - (٥)^{٢}} = \sqrt{٠} = ٠ \end{cases}$

$\underset{س \to ٥^{+}}{\text{نهـا}} \sqrt{٥س - س^{٢}} \neq \underset{س \to ٥^{-}}{\text{نهـا}} \sqrt{٥س - س^{٢}}$

$\therefore \underset{س \to ٥}{\text{نهـا}} \sqrt{٥س - س^{٢}}$ غ.م

١٤) $\underset{س \to ٦}{\text{نهـا}} \sqrt{س^{٢} - ٦س}$

الحل :

١٥) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \sqrt{س^{٢}}$

الحل :

١٦) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \sqrt{-س^{٢}}$

الحل :

١٧) $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \sqrt{(٢ - س)^{٢}}$

الحل :

١٨) **ليكن** $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}^{٢} - ٦٤}$ جد نهاية ق(س) عند :

أ) س = ٩　　ب) س = ٠　　جـ) س = -٨

الحل :

أمثلة : **جد قيمة النهايات التالية (أن وجدت)**

تحديد الاتجاه

١) $\underset{\text{س}\to ٠^{+}}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س}}$

الحل :

تحديد المجال $\sqrt{\text{س}}$

س = ٠ ⇐ س =

(غ.م)	(م)
-----	++++++

٠

$\underset{\text{س}\to ٠^{+}}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س}} = \sqrt{٠} = ٠$

NOTE **نجد النهاية التي يطلبها السؤال فقط**

٢) $\underset{\text{س}\to ٥^{-}}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س} - ٥}$

الحل :

تحديد المجال $\sqrt{\text{س} - ٥}$

س − ٥ = ٠ ⇐ س = ٥

(غ.م)	(م)
-----	++++++

٥

$\underset{\text{س}\to ٥^{-}}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س} - ٥}$ غ.م

٣) $\underset{\text{س}\to ٢^{-}}{\text{نهـا}} \sqrt{٤ - \text{س}^{٢}}$

الحل :

تحديد المجال $\sqrt{٤ - \text{س}^{٢}}$

$٤ - \text{س}^{٢} = ٠$ ⇐ $\text{س}^{٢} = ٤$ ⇐ س = ±٢

(غ.م)	(م)	(غ.م)
-----	+++++	-----

−٢　　$\boxed{٢}$

$\underset{\text{س}\to ٢^{-}}{\text{نهـا}} \sqrt{٤ - \text{س}^{٢}} = \sqrt{٤ - (٢)^{٢}} = \sqrt{٠} = ٠$

٤) نهـــا (س ← ٥⁺) √(٥س − س²)

الحل :

٥) نهـــا (س ← ٥⁺) √(١٠ − ٢س)

الحل :

نهاية الاقترانات المتشعبة

(نهاية الاقترانات المعرفة على **اكثر من قاعدة**)

صريح — قيمة مطلقة — أكبر عدد صحيح

أولا : نهاية الاقتران المتشعب " صريح "

أهم الملاحظات سوف نواجهها في **الاقترانات المتشعبة ثلاثة نقاط** :

١) **النقطة العادية** : عندها نعوض مباشرة في القاعدة المناسبة .

مثال ذلك :

ق(س) = { س² ، ٠ ≤ س < ٢
{ ٤ − س ، ٢ ≤ س < ٤

لتسهيل الحل :

جد نهـــا (س ← $\boxed{٣}$) ق(س)

تسمى نقطة عادية ونعوضها في الاقتران المناسب

نهـــا (س ← ٣) ٤ − س = ٤ − ٣ = ١

٢) **نقطة التحول** : عندها نجد النهاية من اليمين ومن اليسار .

مثال ذلك :

ق(س) = { س² ، ٠ ≤ س < ٢
{ ٤ − س ، ٢ ≤ س < ٤

جد نهـــا (س ← ٢) ق(س)

نقطة التحول :

الحل :

نهـــا (س ← ٢⁺) ق(س) = نهـــا (س ← ٢⁺) ٤ − س = ٤ − ٢ = ٢

نهـــا (س ← ٢⁻) ق(س) = نهـــا (س ← ٢⁻) س² = ٢² = ٤

بما ان

نهـــا (س ← ٢⁺) ق(س) ≠ نهـــا (س ← ٢⁻) ق(س)

∴ نهـــا (س ← ٢) ق(س) غ.م .

٣) **نقاط الاطراف** : عندها نجد النهاية من جهة واحده فقط .

ملاحظة

النهاية بشكل عام عند الإطراف أو الفترات تكون دائما (غير موجودة)

مثال ذلك :

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} & ، \; ٠ \le \text{س} < ٢ \\ ٤ - \text{س} & ، \; ٢ \le \text{س} < ٤ \end{cases}$$

جد

$$\lim_{\text{س} \to ٠^{+}} \text{ق}(\text{س})$$

$$\lim_{\text{س} \to ٠^{+}} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to ٠^{+}} \text{س}^{٢} = (٠)^{٢} = ٠$$

الصورة تأخذ فقط عند إشارة المساواة

س > أ ⇐ **النهاية من اليمين** $\lim_{\text{س} \to \text{أ}^{+}} \text{ه}(\text{س})$

س < أ ⇐ **النهاية من اليسار** $\lim_{\text{س} \to \text{أ}^{-}} \text{ه}(\text{س})$

أمثلة : جد قيمة النهايات التالية (أن وجدت)

١) ليكن

$$\text{ه}(\text{س}) = \begin{cases} ٣\text{س}^{٢} - ٢\text{س} & ، \; \text{س} < ٤ \\ ٢\text{س} + ٣ & ، \; \text{س} \ge ٤ \end{cases}$$

جد :

أ) $\lim_{\text{س} \to ٦} \text{ه}(\text{س})$ ب) $\lim_{\text{س} \to -٤} \text{ه}(\text{س})$ جـ) $\lim_{\text{س} \to ٠} \text{ه}(\text{س})$

د) $\lim_{\text{س} \to ٤} \text{ه}(\text{س})$

الحل :

٣س² − ٢س ٢س + ٣

٤

أ) $\lim_{\text{س} \to ٦} \text{ه}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to ٦} (٢\text{س} + ٣) = ٢(٦) + ٣ = ١٥$

ب) $\lim_{\text{س} \to -٤} \text{ه}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to -٤} (٣\text{س}^{٢} - ٢\text{س}) = ٢(-٤)^{٢} - ٢(-٤) = ٥٦$

جـ) $\lim_{\text{س} \to ٠} \text{ه}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to ٠} (٣\text{س}^{٢} - ٢\text{س}) = ٣(٠)^{٢} - ٢(٠) = ٠$

د) $\lim_{\text{س} \to ٤} \text{ه}(\text{س})$

$= \lim_{\text{س} \to ٤^{+}} (٢\text{س} + ٣) = ٢(٤) + ٣ = ١١$

$= \lim_{\text{س} \to ٤^{-}} (٣\text{س}^{٢} - ٢\text{س}) = ٣(٤)^{٢} - ٢(٤) = ٤٠$

$\Leftarrow \lim_{\text{س} \to ٤^{+}} \text{ه}(\text{س}) \ne \lim_{\text{س} \to ٤^{-}} \text{ه}(\text{س})$

$\therefore \lim_{\text{س} \to ٤} \text{ه}(\text{س})$ غ.م

٢) ليكن

$$\text{ه}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ٤ & ، \; \text{س} < ١ \\ ٥\text{س} & ، \; \text{س} > ١ \end{cases}$$

جد :

أ) $\lim_{\text{س} \to ١} \text{ه}(\text{س}) = \boxed{٥}$

الحل :

٣) **ليكن**

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٧ - ٣\text{س} & ، \ \text{س} > ١ \\ ٩ & ، \ \text{س} = ١ \\ ٤\text{س} & ، \ \text{س} < ١ \end{cases}$$

جد :

أ) $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \text{ق}(\text{س})$

الحل :

٤) **ليكن**

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^٢ - ١ & ، \ \text{س} < ٢ \\ ٥ & ، \ \text{س} = ٢ \\ \sqrt{\text{س} + ٧} & ، \ \text{س} > ٢ \end{cases}$$

جد :

أ) $\lim\limits_{\text{س} \to ٩} \text{ق}(\text{س}) = \boxed{٤}$ ب) $\lim\limits_{\text{س} \to -٣^+} \text{ق}(\text{س}) = \boxed{٨}$

جـ) $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \text{ق}(\text{س}) = \boxed{٣}$

الحل :

٥) **ليكن**

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س} + ٥ & ، \ \boxed{\text{س} \neq ٣} \\ ١٤ & ، \ \text{س} = ٣ \end{cases}$$

النهاية من اليمين
وأيضا من اليسار

جد :

أ) $\lim\limits_{\text{س} \to ٣^+} \text{ق}(\text{س})$ ب) $\lim\limits_{\text{س} \to ٣^-} \text{ق}(\text{س})$ جـ) $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \text{ق}(\text{س})$

د) ق (س) =

الحل :

٦)

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س}^٢ + ٥ & ، \ \text{س} < ٣ \\ ١٧ & ، \ ٣ \leq \text{س} \leq ٦ \\ ٣\text{س} - ١ & ، \ \text{س} > ٦ \end{cases}$$

فما قيمة :

أ) $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \text{ق}(\text{س}) = \boxed{٧}$ ب) $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \text{ق}(\text{س}) = \boxed{\text{غ.م}}$

جـ) $\lim\limits_{\text{س} \to ٥} \text{ق}(\text{س}) = \boxed{١٧}$ د) $\lim\limits_{\text{س} \to ٦} \text{ق}(\text{س}) = \boxed{١٧}$

الحل :

٧) [١٨ / ٦] **اذا كان** ق(س) = $\begin{cases} ٥س+١ ، & س > ٢ \\ س^{٢} ، & س \le ٢ \end{cases}$

جد :

أ) ق(٢) = $\boxed{٤}$ لماذا ؟

ب) $\lim_{س \to ١}$ ق(س) = $\boxed{٦}$

جـ) $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) = $\boxed{٩}$

د) $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) = $\boxed{\text{غ.م}}$

الحل :

٨) [٢٩ / تدريب] **اذا كان** ق(س) = $\begin{cases} س+٦ ، & س \in ص \\ ٤س+١ ، & س \notin ص \end{cases}$

حيث ص = مجموعة الاعداد الصحيحة

فجد $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) =

الحل :

أسئلة الثابت للاقتران المتشعب

أمثلة :

١) **اذا كان** هـ(س) = $\begin{cases} س^{٢}+٥ ، & س > ٣ \\ أس+١ ، & س < ٣ \end{cases}$

و كانت $\lim_{س \to ٣}$ هـ(س) م (موجوده) ، **فما قيمة الثابت أ** ؟

الحل :

$\lim_{س \to ٢}$ هـ(س) معنى موجودة (أي ان النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار)

بما ان النهاية موجودة عند س = ٣

$\therefore \lim_{س \to ٣^{+}}$ هـ(س) = $\lim_{س \to ٣^{-}}$ هـ(س)

$\lim_{س \to ٣^{+}} (أس+٢) = \lim_{س \to ٣^{-}} (س^{٢}+٥)$

$\lim_{س \to ٣^{+}} أس + \lim_{س \to ٣^{+}} ٢ = \lim_{س \to ٣^{-}} س^{٢} + \lim_{س \to ٣^{+}} ٥$

$أ(٣)+٢ = (٣)^{٢}+٥$

$٣أ+٢ = ٩+٥$

$٣أ+٢ = ١٤$

$٣أ = ١٢ \Leftarrow أ = ٤$

٢) **اذا كان** ق(س) = $\begin{cases} ٣س^{٢}+١ ، & س > -٢ \\ س+أ ، & س \le -٢ \end{cases}$

و كانت $\lim_{س \to -٢}$ ق(س) م (موجوده) ، **فما قيمة الثابت أ** ؟

الحل :

$\boxed{أ = ١٥}$

٣) **ليكن** هـ(س) = $\begin{cases} س^{٢}+٥ ، & س > ٣ \\ ٢٠ ، & س = ٣ \\ أس+٢ ، & س < ٣ \end{cases}$

واذا علمت ان $\lim_{س \to ٣}$ هـ(س) م (موجوده) ، **فما قيمة الثابت أ** ؟

الحل :

$\boxed{أ = ٤}$

٤) **ليكن** $ه(س) = \begin{cases} س^{٢} - ل & ، \quad س > ٢ \\ ل س + ٢ & ، \quad س \leq ٢ \end{cases}$

واذا علمت ان $\lim_{س \to ٢} ه(س)$ م (موجوده) ، **فما قيمة الثابت ل** ؟

الحل :

$\boxed{ل = ٦}$

نهاية خارج قسمة اقترانين

أولا : **طرق حساب النهاية للاقتران كثير الحدود**

هي عبارة عن **التعويض المباشر** وناتج التعويض هو **قيمة النهاية**

بمعنى إذا كانت ق كثير حدود حيث أ $\in$ ح

فان $\lim\limits_{\text{س}\to\text{أ}} \text{ق(س)} = \text{ق(أ)}$

مثال لتوضيح :-

إذا كانت ق(س)= س^{٢} + ٥س فان $\lim\limits_{\text{س}\to ٢} \text{ق(س)}$

الحل :-

$\lim\limits_{\text{س}\to ٢} \text{س}^{٢}+٥\text{س} = (٢)^{٢} + ٥\times٢ = ١٤$

كل س في النهاية يتم تعويضها قيمة س وهي العدد ٢

أمثلة :- جد كل من النهايات الآتية .

١) $\lim\limits_{\text{س}\to ٢} ٣\text{س} = ٣\times٢ = ٦$

٢) $\lim\limits_{\text{س}\to ٢} (٣+\text{س})^{٢} = (٣+٢)^{٢} = (٥)^{٢} = ٢٥$

٣) $\lim\limits_{\text{س}\to ٢} \sqrt{\text{س}+٧} = \sqrt{٢+٧} = \sqrt{٩} = ٣$

٤) $\lim\limits_{\text{س}\to\text{أ}} ٣\text{أ} = ٣\text{أ}$

٥) $\lim\limits_{\text{س}\to -٢} \left(\frac{٣}{٤}\right)^{\text{س}} = \left(\frac{٣}{٤}\right)^{-٢} = \left(\frac{٤}{٣}\right)^{٢} = \frac{١٦}{٩}$

الدرس الثالث : نهاية خارج قسمة اقترانين

هي عبارة عن **التعويض المباشر**

١) عدد حقيقي (**نهاية موجودة**) ← **تكون قيمة النهاية**

٢) كمية غير معرفة (**نهاية غير موجودة**) ← $\frac{\text{ع}}{٠}$ و جذر سالب

٣) **البحث عن النهاية** ← $\frac{٠}{٠}$ أو $\frac{\text{ع}}{٠} \pm \frac{\text{ع}}{٠}$

أمثلة ذلك :- جد كل من النهايات الآتية

١) $\lim\limits_{\text{س}\to ١} \frac{٢\text{س}-٣}{\text{س}-٢} = \frac{٢\times١-٣}{١-٢} = \frac{-١}{-١} = ١$

٢) $\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{س}^{٣}-٣\text{س}-٥}{\text{س}+٥} = \frac{(٠)^{٣}-٣(٠)-٥}{٠+٥} = \frac{-٥}{٥} = -١$

٣) $\lim\limits_{\text{س}\to ٥} \frac{\text{س}^{٢}-٥\text{س}}{٢\text{س}+١} = \frac{(٥)^{٢}-٥\times٥}{٢\times٥+١} = \frac{٠}{١١} = ٠$

٤) $\lim\limits_{\text{س}\to ١} \frac{٢\text{س}-٣}{\text{س}-١} = \frac{٢\times١-٣}{١-١} = \frac{٢-٣}{٠} = \frac{-١}{٠} = \text{غ.م}$

٥) $\lim\limits_{\text{س}\to ٤} \frac{\text{س}^{٣}-٣\text{س}-٤}{\text{س}-٤} = \frac{(٤)^{٣}-٣(٤)-٤}{٤-٤} = \frac{٣٢-١٦}{٠} = \frac{١٦}{٠} = \text{غ.م}$

٦) $\lim\limits_{\text{س}\to ٢} \sqrt{\text{س}-٧} = \sqrt{٢-٧} = \sqrt{-٥} = \text{غ.م}$

ملخص

$\lim\limits_{\text{س}\to ٢} \text{ق(س)} =$

- تعويض مباشر عندما ق(أ) ≠ صفر
- غير موجودة عندما ق(أ) = أو
- البحث عن النهاية عندما ق(أ) = أو

بلش الجد ☺

ناتج التعويض في النهاية يساوي $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty} \pm \frac{\infty}{\infty}$

مثال ذلك :. جد ناتج قيمة النهاية

$\lim_{س \to 2} \frac{س^2 - 4}{س - 2}$

الحل :- **تعويض مباشر**

$\frac{(2)^2 - 4}{2 - 2} = \frac{4 - 4}{2 - 2} = \frac{0}{0}$

ما دام **جواب النهاية** $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty} \pm \frac{\infty}{\infty}$

يتم البحث عن **مشكلة النهاية ويحل ب ٣ طرق** :

- التحليل
- توحيد المقام
- الضرب بالمرافق (الترافقي)

سؤال سوف يخطر في بالك :.

كيف اعرف ما هو العنصر أو المسبب **لمشكلة** $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty} \pm \frac{\infty}{\infty}$ ؟

لتوضيح نرجع للمثال السابق

$\lim_{س \to 2} \frac{س^2 - 4}{س - 2}$ **وكان ناتج التعويض** $\frac{0}{0}$

س ← ٢ ⇐ س = ٢

⇐ إما س – ٢ = صفر

أو ٢ – س = صفر

هي تكون مسبب المشكلة

في هذه الأمثلة تحل بالتحليل :

١) الفرق بين مربعين ٢) الفرق بين مكعبين

٣) مجموع مكعبين ٤) إخراج عامل مشترك

٥) مفكوك القوس ٦) تحليل ثلاثي الحدود

التحليل الى العوامل

الفرق بين مربعين $س^2 - أ^2$

$س^2 - أ^2 = (س - أ)(س + أ)$

أي بمعنى $س^2 - أ^2 =$ (الجذر – الجذر) (الجذر + الجذر)

أمثلة :.

✓ $س^2 - 16 = (س - 4)(س + 4)$

✓ $16 - س^2 = (4 - س)(4 + س)$

✓ $49م^2 - ل^2 = (7م - ل)(7م + ل)$

✓ $(س + 1)^2 - 1 = ((س + 1) - 1)((س + 1) + 1)$

✓ $س - 4 = (\sqrt{س} - 2)(\sqrt{س} + 2)$

لتذكير :.
$س = \sqrt{س} \times \sqrt{س}$

تدريب :.

❖ $25 - س^2 =$

❖ $1 - س^2 =$

❖ $ن^2 - 64س^2 =$

مجموع مربعين $س^2 + أ^2$ **لا تحلل**

مثال :.

✓ $س^2 + 4 =$ لا يوجد لها تحليل " لان مميزها سالب "

الفرق بين مكعبين $س^3 - أ^3$

$س^3 - أ^3 = (س - أ)(س^2 + أس + أ^2)$

أي بمعنى (قوس له نفس الإشارة) (قوس كبير الأولى العكس و الثانية دائما موجبة)

العبارة التربيعية التي تنتج من تحليل **دائما** تكون أولية أي لا تحلل (مميزها سالب)

أمثلة :.

✓ $س^3 - 8 = (س - 2)(س^2 + 2س + 4)$

✓ $64 - 216ص^3 = (4 - 6ص)(16 + 24ص + 36ص^2)$

✓ $- س^3 - 27 =$

✓ $س - 1 = (\sqrt[3]{س} - 1)((\sqrt[3]{س})^2 + \sqrt[3]{س} + 1)$ ✓ $(\sqrt[3]{س})^2 = \sqrt[3]{س^2}$

تدريب :.

❖ $64 س^3 - 125 =$

❖ $27 - س^3 =$

مجموع مكعبين س^{٣} + أ^{٣}

س^{٣} + أ^{٣} = (س + أ) (س^{٢} – أس + أ^{٢})

(الحد الاول + الحد الثاني) (مربع الحد الاول – الحد الاول×الحد الثاني + الحد الثاني)

أي بمعنى (قوس صغير له نفس الإشارة) (قوس كبير الاولى العكس والثانية دائما موجبة)

أمثلة :

٢٧س^{٣} + ٨ص^{٣} =(٣س + ٢ص)(٩س^{٢} – ٦س ص + ٤ ص٢)

٦٤+ ص^{٣} = (٤ + ص)(١٦ – ٤ص + ص^{٢})

تدريب :

ص^{٣} + ل^{٣} =

١٢٥ + ن^{٣} =

اخراج عامل مشترك

العامل المشترك قد يكون **رقم او متغير (س ، ص) او كلاهما**

أمثلة :

✓ ٣س^{٢} + ٩ = ٣ (س^{٢} + ٣)

✓ س^{٢} – ٤س = س(س – ٤)

✓ ٣س^{٣} – ٣س=٣س (س- ١)

✓ س^{٣} + س^{٢} – ٢س = س(س^{٢} + س – ٢) = س(س + ٢)(س – ١)

✓ ٨س^{٥} + ٢٧س^{٢} = س^{٢} (٨س^{٣} + ٢٧) = س^{٢} (٢س + ٣)(٤س^{٢} – ٦س + ٩)

✓ $\frac{١}{٣}$س^{٢} – ٣ = ٣(س^{٢} – ٩) = ٣((س – ٣)(س + ٣))

✓ $\frac{١}{٦}$س – $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٦}$(س – ٣)

✓ (س – ٢)^{٣} ٤(س – ٢) = (س – ٢)((س – ٢)^{٢} – ٤) = (س – ٢)((س – ٢) – ٢)(س – ٢) + ٢))

✓ س^{٣} – ٣س^{٢} – ٩س – ٢٧ =

تدريب :

❖ ١٢٥ع + ٣ع^{٤} + ٢ع^{٤} =

❖ ٢٧س^{٣} + ٩س^{٢} =

تحليل ثلاثي الحدود

الشكل العام ← أس^{٢} ± ب س ± جـ = صفر

هناك ثلاثة حالات

الحالة الاولى : أس^{٢} + ب س + جـ = صفر

✓ **س^{٢} + ٥س + ٦ = صفر**

طريقة الحل :

نفتح قوسين ونضع (س) (س)

نضع اشارتي الموجب (س +) (س +)

ثم نأخذ الثابت س^{٢} + ٥س + ٦ = صفر

عددين اذا ضربتهم في بعضهم يعطوني الحد الثابت ٦

١ × ٦ =٦ أو ٢ × ٣ = ٦

واذا جمعتهم يعطوني الحد الاوسط ٥ ٢ + ٣ = ٥

(س + ٣)(س + ٢) = ٠

الحالة الثانية :- أس^{٢} – ب س + جـ = صفر

مثال :

✓ **س^{٢}- ٧ س + ١٠ = صفر**

نفتح قوسين ونضع (س) (س)

نضع اشارتي السالب (س -) (س -)

ثم نأخذ الثابت س^{٢}- ٧ س + ١٠ = صفر

عددين اذا ضربتهم في بعضهم يعطوني الحد الثابت ١٠

١ × ١٠ =١٠ أو ٢ × ٥ = ١٠

واذا جمعتهم يعطوني الحد الاوسط ٧ ٢ + ٥ = ٧

(س - ٥)(س – ٢) = صفر

الحالة الثالثة :- أس^{٢} ± ب س - جـ = صفر

مثال :

✓ **س^{٢}- ٣س - ١٠ = صفر**

نفتح قوسين ونضع (س) (س)

نضع اشارتي موجب وسالب (س +) (س -)

ثم نأخذ الثابت س^{٢}- ٣ س - ١٠ = صفر

عددين اذا ضربتهم في بعضهم يعطوني الحد الثابت ١٠

١ × ١٠ =١٠ أو ٢ × ٥ = ١٠

واذا طرحتهم يعطوني الحد الاوسط ٣ ٥ – ٢ = ٣

وحسب اشارة الحد الاوسط توضع للرقم الاكبر وهنا بما ان اشارة الاحد الاوسط سالبة توضع لرقم ٥

(س + ٢)(س – ٥) = صفر

تدريب :

❖ س^{٢} + ٩س +١٤ = (س + ٢) (س + ٧)

❖ س^{٢} -٢س +١ = (س – ١) (س – ١)

❖ س^{٢} + ٣س – ١٠ = (س + ٥)(س – ٣)

لتسهيل الحل : اذا كان معامل $س^{٢}$ سالبا فانه يؤخذ عاملا مشتركا من بداية الحل

أمثلة : حلل المعادلات التالية :

١) $٦ + ٧س - س^{٢} = ٠$

٢) $٤ + ٥س - س^{٢} = ٠$

اذا كانت $س^{٢}$ معاملها ليس (١) كيف يتم الحل ؟

أمثلة :

١) $٦ + ٧س - ٣س^{٢} = ٠$

٢) $٤ + ٥س - ٢س^{٢} = ٠$

مقادير تحلل بنفس طريقة التربيعي (شبيه التربيعي)

أ) **المقدار ثلاثي الحدود** اذا ربعت حده الأوسط بدون المعامل ونتج الحد الأول هذا يحلل بنفس طريقة تحليل التربيعي .

أمثلة : حلل المقادير الاتية

١) $س^{٤} - ١٣س^{٢} + ٣٦ = (س^{٢} - ٩)(س^{٢} - ٤)$

$= (س - ٣)(س + ٣)(س - ٢)(س + ٢)$

٢) $س - ٥\sqrt{س} + ٦ = (\sqrt{س} - ٢)(\sqrt{س} - ٣)$

٣) $٣س + ١٠\sqrt{س} - ٨ = (٣\sqrt{س} - ٢)(\sqrt{س} + ٤)$

٤) $١٨ + ٥\sqrt{س} - ٢س = -(٢س - ٥\sqrt{س} - ١٨)$

$= (٢\sqrt{س} - ٩)(\sqrt{س} + ٢)$

ب) الاقتران الاسي

١) $٩^{س} = (٣^{٢})^{س} = ٣^{٢س} = ٣^{س} \times ٣^{س}$

٢) في **حالة الضرب** اذا كان الأساس موحدا فان الأساس يثبت والاسس تجمع .

٣) في **حالة القسمة** اذا كان الأساس موحدا فان الأساس يثبت والاسس تطرح .

٤) $\sqrt[م]{س^{ن}} = (\sqrt[م]{س})^{ن}$

لتسهيل الحل :

*) المقادير التي تحتوي $(٢٥)^{س}$ أو $\sqrt[٣]{س^{٤}} = (\sqrt[٣]{س})^{٤}$ يمكن ان

نستخدم الفرض $٢٥^{س} = (٥^{س})^{٢} \Leftarrow ص = ٥^{س}$

$\sqrt[٣]{س^{٢}} = (\sqrt[٣]{س})^{٢} \Leftarrow ص = \sqrt[٣]{س}$

**) اذا استطعت ان تحلل بدون فرض فلا مانع من ذلك .

أمثلة :

١) $٢٥^{س} - ٣٦ = (٥^{س})^{٢} - ٣٦$ ✓ $\boxed{ص = ٥^{س}}$

$= ص^{٢} - ٣٦$

$= (ص - ٦)(ص + ٦)$

$= (٥^{س} - ٦)(٥^{س} + ٦)$

٢) $٨ - ٢٧^{س} = ٨ - (٣^{س})^{٣}$ ✓ $\boxed{ص = ٣^{س}}$

$= ٨ - ص^{٣}$

$= (٢ - ص)(٤ + ٢ص + ص^{٢})$

$= (٢ - ٣^{س})(٤ + ٢ \times ٣^{س} + ٣^{٢س})$

٣) $(١٢٥)^{س} - ٢٥^{س} = (٥^{س})^{٣} - (٥^{س})^{٢}$ ✓ $\boxed{ص = ٥^{س}}$

$= ص^{٣} - ص^{٢}$

$= ص^{٢}(ص - ١)$

$= ٥^{٢س}(٥^{س} - ١)$

٤) $\sqrt[٣]{س^{٢}} - ٤\sqrt[٣]{س} - ٢١ = (\sqrt[٣]{س})^{٢} - ٤(\sqrt[٣]{س}) - ٢١$ ✓ $\boxed{ص = \sqrt[٣]{س}}$

$= ص^{٢} - ٤ص - ٢١$

$= (ص - ٧)(ص + ٣)$

$= (\sqrt[٣]{س} - ٧)(\sqrt[٣]{س} + ٣)$

٦) $٤^{س} - ١٧ \times ٢^{س} + ١٦ =$ **تدريب**

مفكوك القوس

الحالة الاولى :ـ القوس التربيعي (المربع الكامل)

(س ± أ)^{2} = س^{2} ± ٢ أس + أ^{2}

أمثلة :ـ

- ✓ (س + ٥)^{2} = س^{2} + ١٠س + ٢٥
- ✓ (س – ٥)^{2} = س^{2} – ١٠س + ٢٥
- ✓ (٤ + ٥ص)^{2} =
- ✓ (-٣ + ٤أ)^{2} =
- ✓ ٥ (٢س -١)^{2} =

الحالة الثانية :ـ القوس التكعيبي

(أ ± ب)^{3} = س^{3} ± ٣أ^{2}س + ٣أس^{2} ± ب^{3}

- ✓ (٣س + ١)^{3} = (٣س)^{3} + ٣ (٣س)^{2}(١) + ٣(٣س)(١)^{2} +(١)
  = ٢٧س^{3} + ٢٧ س^{2} + ٩س + ١
- ✓ (٢ – ٣س)^{3} = (٢)^{3} – ٣(٢)^{2}(٣س) + ٣(٢)(٣س)^{2} – (٣س)^{3}
  = ٨ – ٣٦س + ٥٤س^{2} – ٢٧س^{3}
- ✓ (٤ + ٢س)^{3} =
- ✓ (٢س – ٤)^{3} =

الحالة الثالثة :ـ

س(س ± أ) = س^{2} ± أس

أمثلة :ـ

- ✓ ٢(س + ٣) = ٢س + ٦
- ✓ ٧(س – ٤) = ٧س – ٢٨
- ✓ س(س + ٥) = س^{2} + ٥س
- ✓ س(س – ٨) = س^{2} - ٨س
- ✓ ٧ (س – ٧) =
- ✓ س (٩ – س) =

الحالة الرابعة :ـ

(س + أ) (س + ب) = س(س +ب) + أ (س + ب)
= س^{2} + ب س + أس + أب

(س – أ) (س + ب) = س(س + ب) – أ (س + ب)
= س^{2} + ب س – أس – أب

أمثلة :ـ

- ✓ (س + ٢)(س + ٤) = س(س + ٤) + ٢ (س + ٤)
  = س^{2} + ٤س + ٢س + ٨ = س^{2} + ٦س + ٨
- ✓ (س – ٥)(س + ٣) = س(س + ٣) – ٥ (س + ٣)
  = س^{2} + ٣ س – ٥س – ١٥ = س^{2} – ٢س – ١٥

الحالة الرابعة :ـ

(أ – ب) (أ + ب) = (أ)^{2} – (ب)^{2}

(أ – ب) (أ – ب) = (أ – ب)^{2}

أمثلة :ـ

- ✓ (س – ٣) (س + ٣) = (س)^{2} – (٣)^{2} = س^{2} – ٩
- ✓ (س – ٣) (س – ٣) = (س – ٣)^{2} = س^{2} – ٦س + ٩
- ✓ (٣ – ٥س) (٣ + ٥س) = ٣^{2} – (٥س)^{2} = ٩ – ٢٥س^{2}
- ✓ (٣ – ٥س) (٣ – ٥س) = (٣ – ٥س)^{2} = ٩ – ٣٠س + ٢٥س^{2}
- ✓ (جاس – جتاس) (جاس + جتاس) = جا^{2}س – جتا^{2}س
- ✓ (جاس – جتاس) (جاس – جتاس) = (جاس – جتاس)^{2} = جا^{2}س + ٢جاس جتاس + جتا^{2}س

اضف الى معلوماتك :

$(\text{أ}-\text{ب})^{\text{ن}}(\text{أ}+\text{ب})^{\text{ن}} = (\text{أ}^2-\text{ب}^2)^{\text{ن}}$

$(\text{أ}\pm\text{ب})^{\text{ن}}(\text{أ}\pm\text{ب})^{\text{ن}} = (\text{أ}\pm\text{ب})^{\text{ن}+\text{ن}}$

أمثلة :

✔ $(\text{س}-3)^4(\text{س}+3)^4 = ((\text{س})^2-(3)^2)^4 = (\text{س}^2-9)^4$

✔ $(1-\text{جتاس})^2(1+\text{جتاس})^2 = ((1)^2-(\text{جتاس})^2)^2 = (1-\text{جتا}^2\text{س})^2$

✔ $\sqrt{1+4\text{أ}}\ \sqrt{1-4\text{أ}} = (1+4\text{أ})^{\frac{1}{2}}(1-4\text{أ})^{\frac{1}{2}}$

$= ((1)^2-(4\text{أ})^2)^{\frac{1}{2}} = (1-16\text{أ}^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1-16\text{أ}^2}$

✔ $\sqrt[3]{\text{س}+2}\ \sqrt[3]{\text{س}-2} = (\text{س}+2)^{\frac{1}{3}}(\text{س}-2)^{\frac{1}{3}}$

$= ((\text{س})^2-(2)^2)^{\frac{1}{3}} = (\text{س}^2-4)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\text{س}^2-4}$

✔ $(\text{س}+1)(\text{س}+1) = (\text{س}+1)^{1+1} = (\text{س}+1)^2$

✔ $(2-\text{س})^{-2}(2-\text{س})^4 = (2-\text{س})^{-2+4} = (2-\text{س})^2$

✔ $(\frac{1}{4}+9\text{س})^8(\frac{1}{4}+9\text{س})^{-6} = (\frac{1}{4}+9\text{س})^{8+-6} = (\frac{1}{4}+9\text{س})^2$

✔ $(\text{س}-19)^5(\text{س}-19)^4 = (\text{س}-19)^{5+4} = (\text{س}-19)^9$

التحليل

خطوات الحل :

١) التعويض المباشر $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\text{ع}}{0} \pm \frac{\text{ع}}{0}$

٢) التحليل إلى العوامل (**بهدف الوصول إلى الاختصار**)

٣) **الاختصار** بين البسط والمقام (**تنتهي المشكلة**)

٤) التعويض المباشر وتكون **النهاية**

موجودة **غير موجودة**

مثال: جد قيمة النهايات التالية (**اخراج عامل مشترك**)

١) $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \frac{\text{س}^2+\text{س}}{\text{س}}$

الحل : التعويض المباشر

$\lim\limits_{\text{س}\to 0} \frac{\text{س}^2+\text{س}}{\text{س}} = \frac{(0)^2-0}{0} = \frac{0}{0}$

مسبب المشكلة (الذي سوف نقوم بحذفه)

$\text{س}\to 0 \quad \text{س} = 0 \Leftarrow \text{س} = 0$

أو $-\text{س} = 0$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 0} \frac{\text{س}(\text{س}+1)}{\text{س}}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 0} \frac{\cancel{\text{س}}(\text{س}+1)}{\cancel{\text{س}}}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to 0} \frac{(\text{س}+1)}{1}$

$\lim\limits_{\text{س}\to 0}(\text{س}+1) = 0+1 = 1$

٢) $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \frac{25\text{س}^2+5\text{س}}{5\text{س}}$

الحل : التعويض المباشر

$\lim\limits_{\text{س}\to 0} \frac{25\text{س}^2+5\text{س}}{5\text{س}} = \frac{25(0)^2+5(0)}{5(0)} = \frac{0}{0}$

مسبب المشكلة (الذي سوف نقوم بحذفه)

$\text{س}\to 0 \quad \text{س} = 0 \Leftarrow \text{س} = 0$

أو $-\text{س} = 0$

$\lim\limits_{\text{س}\to 0} \frac{\cancel{5\text{س}}(5\text{س}+1)}{\cancel{5\text{س}}} = \lim\limits_{\text{س}\to 0} \frac{5\text{س}+1}{1} = \frac{5(0)+1}{1} = \frac{1}{1} = 1$

٣) $\underset{\text{ع}\to ٤}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{٥ع} - ٢٠}{\text{ع} - ٤}$

الحل : التعويض المباشر

$\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{٥ع} - ٢٠}{\text{ع} - ٤} = \dfrac{٥(٤) - (٢٠)}{٤ - ٤} = \dfrac{٠}{٠}$

مسبب المشكلة (الذي سوف نقوم بحذفه)

س ←٤ س = ٤ ⟸ س − ٤ = ٠

٤ − س = ٠

$= \underset{\text{س}\to ٤}{\text{نهـا}} \dfrac{٥\cancel{(\text{ع} - ٤)}}{\cancel{\text{ع} - ٤}}$

$= \underset{\text{س}\to ٤}{\text{نهـا}} ٥ = ٥$

٤) ٣٥ / الكتاب $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{٥س}^{٢} - \text{١٠س}}{\text{س} - ٢}$

الحل : التعويض المباشر

$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{٥س}^{٢} - \text{١٠س}}{\text{س} - ٢} = \dfrac{٥(٢)^{٢} - ١٠(٢)}{(٢) - ٢} = \dfrac{٠}{٠}$

مسبب المشكلة (الذي سوف نقوم بحذفه)

س ← ٢ س = ٢ ⟸ س − ٢ = ٠

٢ − س = ٠

$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{٥س}(\text{س} - ٢)}{(\text{س} - ٢)}$

$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{٥س}\cancel{(\text{س} - ٢)}}{\cancel{(\text{س} - ٢)}}$

$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \text{٥س} = ٥(٢) = ١٠$

٦) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٤} + \text{٣س}^{٢}}{\text{س}^{٣} - \text{٤س}^{٢}}$

الحل : التعويض المباشر

$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٤} + \text{٣س}^{٢}}{\text{س}^{٣} - \text{٤س}^{٢}} = \dfrac{(٠)^{٤} + ٣(٠)^{٢}}{(٠)^{٣} - ٤(٠)^{٢}} = \dfrac{٠}{٠}$

مسبب المشكلة (الذي سوف نقوم بحذفه)

س ← ٠ س = ٠ ⟸ س = ٠

أو − س = ٠

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٢}(\text{س} + ٣)}{\text{س}^{٢}(\text{س} - ٤)}$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\cancel{\text{س}^{٢}}(\text{س} + ٣)}{\cancel{\text{س}^{٢}}(\text{س} - ٤)}$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س} + ٣)}{(\text{س} - ٤)} = \dfrac{٠ + ٣}{٠ - ٤} = \dfrac{٣}{-٤}$

٧) $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{٧س} - ٢١}{٣ - \text{س}}$

الحل :

ع −٧

أمثلة : جد قيمة النهايات التالية **(فرق بين مربعين و أخراج عامل)**

١) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٢}-١}{\text{س}-١}$

الحل : التعويض المباشر

$\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٢}-١}{\text{س}-١} = \dfrac{(١)^{٢}-١}{(١)-١} = \dfrac{٠}{٠}$

مسبب المشكلة (الذي سوف نقوم بحذفه)

س ← ١   س = ١   ⟸   س − ١ = ٠

١ − س = ٠

$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س}-١)(\text{س}+١)}{(\text{س}-١)}$

$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{(\text{س}-١)}(\text{س}+١)}{\cancel{(\text{س}-١)}}$

$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} (\text{س}+١) = ١+١ = ٢$

٢) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٢}-٤}{\text{س}-٢}$

الحل : التعويض المباشر

$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٢}-٤}{\text{س}-٢} = \dfrac{(٢)^{٢}-٢}{(٢)-٢} = \dfrac{٠}{٠}$

مسبب المشكلة (الذي سوف نقوم بحذفه)

س ← ٢   س = ٢   ⟸   س − ٢ = ٠

٢ − س = ٠

$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س}-٢)(\text{س}+٢)}{(\text{س}-٢)}$

$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{(\text{س}-٢)}(\text{س}+٢)}{\cancel{(\text{س}-٢)}}$

$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} (\text{س}+٢) = ٢+٢ = ٤$

٣) $\underset{\text{ع}\to ٧}{\text{نها}} \dfrac{٤٩-\text{ع}^{٢}}{\text{ع}-٧} =$

الحل: التعويض المباشر

$\underset{\text{ع}\to ٧}{\text{نها}} \dfrac{٤٩-\text{ع}^{٢}}{\text{ع}-٧} = \dfrac{(٤٩)-(٧)^{٢}}{(٧)-٧} = \dfrac{٠}{٠}$

مسبب المشكلة (الذي سوف نقوم بحذفه)

س ← ٧   س = ٧   ⟸   س − ٧ = ٠

− س + ٧ = ٠

$= \underset{\text{ع}\to ٧}{\text{نها}} \dfrac{(٧-\text{ع})(٧+\text{ع})}{\text{ع}-٧}$

$= \underset{\text{ع}\to ٧}{\text{نها}} \dfrac{\overset{-١}{\cancel{(٧-\text{ع})}}(٧+\text{ع})}{\cancel{\text{ع}-٧}}$

$= \underset{\text{ع}\to ٧}{\text{نها}} -١\times(٧+\text{ع}) = -(٧+٧) = -١٤$

٤) $\underset{\text{س}\to ٦}{\text{نها}} \dfrac{٦-\text{س}}{\text{س}^{٢}-٣٦}$

الحل : التعويض المباشر

$\underset{\text{س}\to ٦}{\text{نها}} \dfrac{٦-\text{س}}{\text{س}^{٢}-٣٦} = \dfrac{٦-٦}{(٦)^{٢}-٣٦} = \dfrac{٠}{٠}$

مسبب المشكلة (الذي سوف نقوم بحذفه)

س ← ٦   س = ٦   ⟸   س − ٦ = ٠

أو   ٦ − س = ٠

$= \underset{\text{س}\to ٦}{\text{نها}} \dfrac{\overset{-١}{\cancel{٦-\text{س}}}}{\cancel{(\text{س}-٦)}(\text{س}+٦)}$

$= \underset{\text{س}\to ٦}{\text{نها}} \dfrac{-١}{(\text{س}+٦)} = \dfrac{-١}{٦+٦} = \dfrac{-١}{١٢}$

٥) $\underset{\text{س}\to ١٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٢}-١٠٠}{\text{س}^{٢}-١٠\text{س}}$

الحل : التعويض المباشر

$\underset{\text{س}\to ١٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٢}-١٠٠}{\text{س}^{٢}-١٠\text{س}} = \dfrac{(١٠)^{٢}-١٠٠}{(١٠)^{٢}-١٠(١٠)} = \dfrac{٠}{٠}$

مسبب المشكلة (الذي سوف نقوم بحذفه)

س ← ١٠   س = ١٠   ⟸   س − ١٠ = ٠

أو   ١٠ − س = ٠

$= \underset{\text{س}\to ١٠}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س}-١٠)(\text{س}+١٠)}{\text{س}(\text{س}-١٠)}$

$= \underset{\text{س}\to ١٠}{\text{نها}} \dfrac{\cancel{(\text{س}-١٠)}(\text{س}+١٠)}{\text{س}\cancel{(\text{س}-١٠)}}$

$= \underset{\text{س}\to ١٠}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س}+١٠)}{\text{س}} = \dfrac{١٠+١٠}{١٠} = \dfrac{٢٠}{١٠} = ٢$

٦) $\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}} \dfrac{٣\text{س}-١٢}{\text{س}^{٢}-١٦}$

الحل : التعويض المباشر

$\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}} \dfrac{٣\text{س}-١٢}{\text{س}^{٢}-١٦} = \dfrac{٣(٤)-١٢}{(٤)^{٢}-١٦} = \dfrac{٠}{٠}$

مسبب المشكلة (الذي سوف نقوم بحذفه)

س ← ٤   س = ٤   ⟸   س − ٤ = ٠

أو   ٤ − س = ٠

$= \underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}} \dfrac{٣(\text{س}-٤)}{(\text{س}-٤)(\text{س}+٤)}$

$= \underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}} \dfrac{٣\cancel{(\text{س}-٤)}}{\cancel{(\text{س}-٤)}(\text{س}+٤)}$

$= \underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}} \dfrac{٣}{(\text{س}+٤)} = \dfrac{٣}{٤+٤} = \dfrac{٣}{٨}$

أمثلة : جد قيمة النهايات التالية (**تحليل ثلاثي الحدود**)

١) $\lim\limits_{\text{س}\to ٢} \dfrac{\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٦}{\text{س} - ٢}$

الحل : التعويض المباشر

$$\lim\limits_{\text{س}\to ٢} \dfrac{\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٦}{\text{س} - ٢} = \dfrac{(٢)^٢ - ٥(٢) + ٦}{٢ - ٢} = \dfrac{٠}{٠}$$

مسبب المشكلة (**الذي سوف نقوم بحذفه**)

س ← ٢   س = ٢ ⇐ س − ٢ = ٠

أو ٢ − س = ٠

$$= \lim\limits_{\text{س}\to ٢} \dfrac{(\text{س} - ٣)(\text{س} - ٢)}{(\text{س} - ٢)}$$

$$= \lim\limits_{\text{س}\to ٢} \dfrac{(\text{س} - ٣)\cancel{(\text{س} - ٢)}}{\cancel{(\text{س} - ٢)}}$$

$$= \lim\limits_{\text{س}\to ٢} \text{س} - ٣ = ٢ - ٣ = -١$$

---

٢) $\lim\limits_{\text{س}\to ٤} \dfrac{\text{س}^٢ - ٧\text{س} + ١٢}{\text{س} - ٤}$

الحل : التعويض المباشر

$$\lim\limits_{\text{س}\to ٤} \dfrac{\text{س}^٢ - ٧\text{س} + ١٢}{\text{س} - ٤} = \dfrac{(٤)^٢ - ٧(٤) + ١٢}{٤ - ٤} = \dfrac{٠}{٠}$$

مسبب المشكلة (**الذي سوف نقوم بحذفه**)

س ← ٤   س = ٤ ⇐ س − ٤ = ٠

أو ٤ − س = ٠

$$= \lim\limits_{\text{س}\to ٤} \dfrac{(\text{س} - ٤)(\text{س} - ٣)}{(\text{س} - ٤)}$$

$$= \lim\limits_{\text{س}\to ٤} \dfrac{\cancel{(\text{س} - ٤)}(\text{س} - ٣)}{\cancel{(\text{س} - ٤)}}$$

$$= \lim\limits_{\text{س}\to ٤} \text{س} - ٣ = ٤ - ٣ = ١$$

---

٣) $\lim\limits_{\text{س}\to -٣} \dfrac{\text{س}^٢ + ٥\text{س} + ٦}{\text{س} + ٣}$

الحل : التعويض المباشر

$$\lim\limits_{\text{س}\to -٣} \dfrac{\text{س}^٢ + ٥\text{س} + ٦}{\text{س} + ٣} = \dfrac{(-٣)^٢ + ٥(-٣) + ٦}{-٣ + ٣} = \dfrac{٠}{٠}$$

مسبب المشكلة (**الذي سوف نقوم بحذفه**)

س ← −٣   س = −٣ ⇐ س + ٣ = ٠

أو − س − ٣ = ٠

$$= \lim\limits_{\text{س}\to -٣} \dfrac{(\text{س} + ٢)(\text{س} + ٣)}{(\text{س} + ٣)}$$

$$= \lim\limits_{\text{س}\to -٣} \dfrac{(\text{س} + ٢)\cancel{(\text{س} + ٣)}}{\cancel{(\text{س} + ٣)}}$$

$$= \lim\limits_{\text{س}\to -٣} \text{س} + ٢ = -٣ + ٢ = -١$$

---

٧) $\lim\limits_{\text{س}\to ٤} \dfrac{\text{س}^٢ - ١٦}{٢\text{س}^٢ - ٨\text{س}}$

الحل : التعويض المباشر

$$\lim\limits_{\text{س}\to ٤} \dfrac{\text{س}^٢ - ١٦}{٢\text{س}^٢ - ٨\text{س}} = \dfrac{(٤)^٢ - ١٦}{٢(٤)^٢ - ٨(٤)} = \dfrac{٠}{٠}$$

مسبب المشكلة (**الذي سوف نقوم بحذفه**)

س ← ٤   س = ٤ ⇐ س − ٤ = ٠

أو ٤ − س = ٠

$$= \lim\limits_{\text{س}\to ٤} \dfrac{(\text{س} - ٤)(\text{س} + ٤)}{٢\text{س}(\text{س} - ٤)}$$

$$= \lim\limits_{\text{س}\to ٤} \dfrac{\cancel{(\text{س} - ٤)}(\text{س} + ٤)}{٢\text{س}\cancel{(\text{س} - ٤)}}$$

$$= \lim\limits_{\text{س}\to ٤} \dfrac{(\text{س} + ٤)}{٢\text{س}} = \dfrac{٤ + ٤}{٢(٤)} = \dfrac{٨}{٨} = ١$$

---

٨) $\lim\limits_{\text{س}\to -٣} \dfrac{\text{س}^٢ - ٩}{٣\text{س} + ٩}$

الحل : التعويض المباشر

$$\lim\limits_{\text{س}\to -٣} \dfrac{\text{س}^٢ - ٩}{٣\text{س} + ٩} = \dfrac{(-٣)^٢ - ٩}{٣(-٣) + ٩} = \dfrac{٠}{٠}$$

مسبب المشكلة (**الذي سوف نقوم بحذفه**)

س ← −٣   س = −٣ ⇐ س + ٣ = ٠

أو − س − ٣ = ٠

$$= \lim\limits_{\text{س}\to -٣} \dfrac{(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٣)}{٣(\text{س} + ٣)}$$

$$= \lim\limits_{\text{س}\to -٣} \dfrac{(\text{س} - ٣)\cancel{(\text{س} + ٣)}}{٣\cancel{(\text{س} + ٣)}}$$

$$= \lim\limits_{\text{س}\to -٣} \dfrac{(\text{س} - ٣)}{٣} = \dfrac{-٣ - ٣}{٣} = \dfrac{-٦}{٣} = -٢$$

٤) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٢} - ٥س - ١٤}{س - ٧}$

الحل :

٥) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٢} + س - ٦}{س - ٢}$

الحل :

٦) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٢} + س - ١٢}{س^{٢} - ٩}$

الحل :

٧) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٢} - ٢٥}{س^{٢} - ٤س - ٥}$

الحل :

أمثلة : جد قيمة النهايات التالية (**فرق ومجموع مكعبين**)

١) $\underset{س \leftarrow -٢}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٣}+٨}{س+٢}$

الحل : التعويض المباشر

$\underset{س \leftarrow -٢}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٣}+٨}{س+٢} = \dfrac{(-٢)^{٣}+٨}{(-٢)+٢} = \dfrac{٠}{٠}$

مسبب المشكلة (**الذي سوف نقوم بحذفه**)

س ← -٢   س = -٢   ⟸   س + ٢ = ٠

أو   – س – ٢ = ٠

$= \underset{س \leftarrow -٢}{\text{نهـا}} \dfrac{(س+٢)(س^{٢}-٢س+٤)}{(س+٢)}$

$= \underset{س \leftarrow -٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\cancel{(س+٢)}(س^{٢}-٢س+٤)}{\cancel{(س+٢)}}$

$= \underset{س \leftarrow -٢}{\text{نهـا}} (س^{٢}-٢س+٤) = (-٢)^{٢}-٢(-٢)\boxed{+٤} = ١٢$

٢) $\underset{س \leftarrow ٥}{\text{نهـا}} \dfrac{٥-س}{س^{٣}-١٢٥}$

الحل : التعويض المباشر

$\underset{س \leftarrow ٥}{\text{نهـا}} \dfrac{٥-س}{س^{٣}-١٢٥} = \dfrac{٥-(٥)}{(٥)^{٣}-١٢٥} = \dfrac{٠}{٠}$

مسبب المشكلة (**الذي سوف نقوم بحذفه**)

س ← ٥   س = ٥   ⟸   س – ٥ = ٠

أو   ٥ – س = ٠

$= \underset{س \leftarrow ٥}{\text{نهـا}} \dfrac{٥-س}{(س-٥)(س^{٢}+٥س+٢٥)}$

$= \underset{س \leftarrow ٥}{\text{نهـا}} \dfrac{\overset{-١}{\cancel{٥-س}}}{\cancel{(س-٥)}(س^{٢}+٥س+٢٥)}$

$= \underset{س \leftarrow ٥}{\text{نهـا}} \dfrac{-١}{(س^{٢}+٥س+٢٥)} = \dfrac{-١}{((٥)^{٢}+٥س+\boxed{٢٥})} = \dfrac{-١}{٧٥}$

٣) $\underset{س \leftarrow -٢}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٣}+٨}{س^{٢}+٣س+٢}$

الحل :

٤) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٣}-٨}{س-٢}$

الحل :

٥) $\underset{س \leftarrow ٥}{\text{نهـا}} \dfrac{٥-س}{س^{٣}-١٢٥}$

الحل :

٦) $\underset{س \leftarrow -٣}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٤}+٢٧س}{س+٣}$

الحل :

٧) $\underset{\text{س}\to\text{٣}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{س}^{\text{٣}}-\text{٢٧}}{\text{٣س}^{\text{٢}}-\text{٩س}}$

الحل :

٨) $\underset{\text{س}\to\text{-٣}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{س}^{\text{٣}}+\text{٢٧}}{\text{س}^{\text{٢}}+\text{٤س}+\text{٣}}$

الحل :

٩) $\underset{\text{س}\to\text{٣}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{(\text{س}+\text{٢})^{\text{٢}}-\text{٢٥}}{\text{س}-\text{٣}}$

الحل : االتعويض المباشر

$$\underset{\text{س}\to\text{٣}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{(\text{س}+\text{٢})^{\text{٢}}-\text{٢٥}}{\text{س}-\text{٣}}=\dfrac{(\text{٣}+\text{٢})^{\text{٢}}-\text{٢٥}}{\text{٣}-\text{٣}}=\dfrac{\text{٠}}{\text{٠}}$$

مسبب المشكلة (الذي سوف نقوم بحذفه)

س ← ٣   س = ٣ $\Leftarrow$ س - ٣ = ٠

أو ٣ - س = ٠

$$=\underset{\text{س}\to\text{٣}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{(\text{س}+\text{٢}+\text{٥})(\text{س}+\text{٢}-\text{٥})}{\text{س}-\text{٣}}$$

$$=\underset{\text{س}\to\text{٣}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{(\text{س}+\text{٧})(\text{س}-\text{٣})}{\text{س}-\text{٣}}$$

$$=\underset{\text{س}\to\text{٣}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{(\text{س}+\text{٧})\cancel{(\text{س}-\text{٣})}}{\cancel{\text{س}-\text{٣}}}$$

$$=\underset{\text{س}\to\text{٣}}{\text{نهـا}}\ \text{س}+\text{٧}=(\text{٣})+\text{٧}=\text{١٠}$$

١٠) $\underset{\text{س}\to\text{٤}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{(\text{س}+\text{٢})^{\text{٢}}-\text{٣٦}}{\text{س}^{\text{٢}}+\text{س}-\text{٢٠}}$

الحل :

١١) $\underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{٧س}-\text{١٤}}{(\text{٢س}+\text{١})^{\text{٢}}-\text{٢٥}}$

الحل :

١٢) $\underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{(\text{س}+\text{١})^{\text{٣}}-\text{٨}}{\text{س}^{\text{٢}}-\text{س}}$

الحل :

الضرب بالمرافق التربيعي

متى تستخدم ؟

عندما يكون في البسط والمقام **جذر تربيعي مضاف اليه قيمة أو الاثنين معا**

يكون المقدار المرافق **عكس اشارة** الفاصلة بين الحدين

لتوضيح ذلك

المقدار	المرافق	ضربهم
١) $\sqrt{س}-أ$	$\sqrt{س}+أ$	$(\sqrt{س}-أ)(\sqrt{س}+أ)=(\sqrt{س})^{٢}-(أ)^{٢}=س-أ^{٢}$

مثال ذلك

$\sqrt{س}-٤$

المقدار	المرافق	ضربهم
$\sqrt{س}-٤$	$\sqrt{س}+٤$	$(\sqrt{س}-٤)(\sqrt{س}+٤)=(\sqrt{س})^{٢}-(٤)^{٢}=س-١٦$

المقدار	المرافق	ضربهم
٢) $أ-\sqrt{س}$	$أ+\sqrt{س}$	$(أ-\sqrt{س})(أ+\sqrt{س})=أ^{٢}-(\sqrt{س})^{٢}=أ^{٢}-س$

مثال ذلك :

$٤-\sqrt{س}$

المقدار	المرافق	ضربهم
$٤-\sqrt{س}$	$٤+\sqrt{س}$	$(٤-\sqrt{س})(٤+\sqrt{س})=(٤)^{٢}-(\sqrt{س})^{٢}=١٦-س$

المقدار	المرافق	ضربهم
٣) $\sqrt{س}+أ$	$\sqrt{س}-أ$	$(\sqrt{س}+أ)(\sqrt{س}-أ)=(\sqrt{س})^{٢}-أ^{٢}$

مثال ذلك :

$\sqrt{س}+٥$

المقدار	المرافق	ضربهم
$\sqrt{س}+٥$	$\sqrt{س}-٥$	$(\sqrt{س}+٥)(\sqrt{س}-٥)=(\sqrt{س})^{٢}-(٥)^{٢}=س-٢٥$

المقدار	المرافق	ضربهم
٤) $أ+\sqrt{س}$	$أ-\sqrt{س}$	$(أ+\sqrt{س})(أ-\sqrt{س})=(أ)^{٢}-(\sqrt{س})^{٢}=أ^{٢}-س$

مثال ذلك

المقدار	المرافق	ضربهم
$٥+\sqrt{س}$	$٥-\sqrt{س}$	$(٥-\sqrt{س})(٥+\sqrt{س})=(٥)^{٢}-(\sqrt{س})^{٢}=٢٥-س$

أمثلة توضيحية أكثر

١) مرافق $\sqrt{س+٥}-٢$ هو $\sqrt{س+٥}+٢$

ضربهم $(\sqrt{س+٥}-٢)(\sqrt{س+٥}+٢)=((\sqrt{س+٥})^{٢}-(٢)^{٢})=س+٥-٤=س+١$

٢) مرافق $٣+\sqrt{س+٢}$

تدريب

خطوات الحل :

١) التعويض المباشر $\frac{٠}{٠}$ او $\frac{ع}{٠}\pm\frac{ع}{٠}$

٢) ابحث عن **مسبب المشكلة النهاية** وتكون جزء من الحل .

٣) استخدم الضرب بالمرافق التربيعي (**بسبب وجود جذر تربيعي مضاف اليه قيمة او الاثنين معا**)

٤) **الاختصار** بين البسط والمقام (**تنتهي المشكلة**)

٥) التعويض المباشر وتكون **النهاية** اما

موجودة **غير موجودة**

أمثلة: جد قيمة النهايات التالية (**المرافق التربيعي**)

١) $\underset{س\to ٩}{\text{نها}}\ \frac{س-٩}{\sqrt{س}-٣}$

الحل : التعويض المباشر

$\underset{س\to ٩}{\text{نها}}\ \frac{س-٩}{\sqrt{س}-٣}=\frac{(٩)-٩}{٣-٣}=\frac{٠}{٠}$

مسبب المشكلة (**الذي سوف نقوم بحذفه**)

$س \leftarrow ٩ \qquad س = ٩ \quad \Leftarrow \quad س-٩=٠$

$٩-س=٠$

$$=\underset{س\to ٩}{\text{نها}}\ \frac{س-٩}{\sqrt{س}-٣}\times\frac{\sqrt{س}+٣}{\sqrt{س}+٣}$$

$$=\underset{س\to ٩}{\text{نها}}\ \frac{س-٩}{(\sqrt{س})^{٢}-(٣)^{٢}}\times\frac{\sqrt{س}+٣}{١}$$

$$=\underset{س\to ٩}{\text{نها}}\ \frac{س-٩}{(\cancel{\sqrt{س}})^{\cancel{٢}}-(٣)^{٢}}\times\frac{\sqrt{س}+٣}{١}$$ ✓ $\boxed{\cancel{\sqrt{س}}^{\cancel{٢}}=س}$

$$=\underset{س\to ٩}{\text{نها}}\ \frac{س-٩}{س-٩}\times\frac{\sqrt{س}+٣}{١}$$

$$=\underset{س\to ٩}{\text{نها}}\ \frac{\cancel{س-٩}}{\cancel{س-٩}}\times\frac{\sqrt{س}+٣}{١}$$

$$=\underset{س\to ٩}{\text{نها}}\ ١\times\frac{\sqrt{س}+٣}{١}=\sqrt{٩}+٣=٦$$ ✓ $\boxed{\sqrt{٩}=٣}$

هناك طريقة أخرى للحل

٢) $\underset{\text{س}\to 1}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س}}-1}{\text{س}-1}$

الحل : التعويض المباشر

$$\underset{\text{س}\to 1}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س}}-1}{\text{س}-1} = \dfrac{\sqrt{1}-1}{1-1} = \dfrac{0}{0}$$

مسبب المشكلة (الذي سوف نقوم بحذفه)

س ← ١   س = ١ $\Leftarrow$ س − ١ = ٠

١ − س = ٠

$$= \underset{\text{س}\to 1}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س}}-1}{\text{س}-1} \times \dfrac{\sqrt{\text{س}}+1}{\sqrt{\text{س}}+1}$$

$$= \underset{\text{س}\to 1}{\text{نهـا}} \dfrac{(\sqrt{\text{س}})^2-(1)^2}{\text{س}-1} \times \dfrac{1}{\sqrt{\text{س}}+1}$$

$$= \underset{\text{س}\to 1}{\text{نهـا}} \dfrac{(\cancel{\sqrt{\text{س}}})^{\cancel{2}}-(1)^{\cancel{2}}}{\text{س}-1} \times \dfrac{1}{\sqrt{\text{س}}+1} \quad ✓ \quad \boxed{\cancel{\sqrt{\text{س}}}^{\cancel{2}} = \text{س}}$$

$$= \underset{\text{س}\to 1}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}-1}{\text{س}-1} \times \dfrac{1}{\sqrt{\text{س}}+1}$$

$$= \underset{\text{س}\to 1}{\text{نهـا}} \dfrac{\cancel{\text{س}-1}}{\cancel{\text{س}-1}} \times \dfrac{1}{\sqrt{\text{س}}+1}$$

$$= \underset{\text{س}\to 9}{\text{نهـا}} 1 \times \dfrac{1}{\sqrt{\text{س}}+1} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$$

هناك طريقة أخرى للحل

٣) $\underset{\text{س}\to 2}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س}+2}-2}{\text{س}-2}$

الحل : التعويض المباشر

$$\underset{\text{س}\to 2}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س}+2}-2}{\text{س}-2} = \dfrac{\sqrt{(2)+2}-2}{2-2} = \dfrac{0}{0}$$

مسبب المشكلة (الذي سوف نقوم بحذفه)

س ← ٢   س = ٢ $\Leftarrow$ س − ٢ = ٠

٢ − س = ٠

$$= \underset{\text{س}\to 2}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س}+2}-2}{\text{س}-2} \times \dfrac{\sqrt{\text{س}+2}+2}{\sqrt{\text{س}+2}+2}$$

$$= \underset{\text{س}\to 2}{\text{نهـا}} \dfrac{(\sqrt{\text{س}+2})^2-(2)^2}{\text{س}-2} \times \dfrac{1}{\sqrt{\text{س}+2}+2}$$

$$= \underset{\text{س}\to 2}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}+2-4}{\text{س}-2} \times \dfrac{1}{\sqrt{\text{س}+2}+2}$$

$$= \underset{\text{س}\to 2}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}-2}{\text{س}-2} \times \dfrac{1}{\sqrt{\text{س}+2}+2}$$

$$= \underset{\text{س}\to 2}{\text{نهـا}} \dfrac{\cancel{\text{س}-2}}{\cancel{\text{س}-2}} \times \dfrac{1}{\sqrt{\text{س}+2}+2}$$

$$= \underset{\text{س}\to 2}{\text{نهـا}} 1 \times \dfrac{1}{\sqrt{\text{س}+2}+2} = \dfrac{1}{\sqrt{2+2}+2} = \dfrac{1}{4}$$

٤) $\underset{\text{س}\to 3}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}-3}{\sqrt{\text{س}+1}-2}$

الحل :

ج ٤

٥) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^2}{\sqrt{\text{س}^2+4}-2}$

الحل :

ج ٤

٦) $\underset{\text{س}\to 8}{\text{نهـا}} \dfrac{2\text{س}-8}{\sqrt{\text{س}+1}-3}$

الحل :

ج ١٢

٧) $\lim\limits_{\text{س}\to ٥} \dfrac{\sqrt{\text{س} + ٤} - ٣}{\text{س}^{٢} - ٥\text{س}}$

الحل :

ع $\dfrac{١}{٣٠}$

٨) $\lim\limits_{\text{س}\to ٩} \dfrac{\text{س}^{٢} - ٨\text{س} - ٩}{٣ - \sqrt{\text{س}}}$

الحل :

ع $\dfrac{١}{٣٠}$

٩) $\lim\limits_{\text{س}\to ٢} \dfrac{\sqrt{٢\text{س} + ٥} - ٣}{\text{س} - ٢}$

الحل :

ع $\dfrac{١}{٣}$

١٠) $\lim\limits_{\text{س}\to ٣} \dfrac{٢ - \sqrt{\text{س} + ١}}{\text{س} - ٣}$

الحل :

ع $\dfrac{-١}{٤}$

١١) $\lim\limits_{\text{س}\to -١} \dfrac{\sqrt{\text{س}^{٢} + ١} - \sqrt{٢}}{\text{س}^{٢} - ١}$

الحل :

ع $\dfrac{١}{٢\sqrt{٢}}$

١٢) $\lim\limits_{\text{س}\to ١} \dfrac{\sqrt{٩\text{س} + ١٦} - \sqrt{\text{س} + ٢٤}}{٢\text{س}^{٢} - ٢\text{س}}$

الحل :

ع ٤

١٣) $\lim\limits_{س\to ٢} \frac{\sqrt{٤-س}-\sqrt{س}}{س-٢}$

الحل :

$\boxed{ع \quad \frac{-١}{\sqrt{٢}}}$

١٤) $\lim\limits_{س\to ٤} \frac{\sqrt{س}-٢}{\sqrt{٢س+١}-٣}$

الحل :

$\boxed{ع \quad \frac{٣}{٤}}$

توحيد المقام

متى تستخدم هذا الطريقة ؟

عندما يكون هناك **جمع الكسور أو طرحها** .

خطوات الحل :

١) التعويض المباشر $\frac{٠}{٠}$ أو $\frac{ع}{٠} \pm \frac{ع}{٠}$

٢) ابحث عن **مسبب المشكلة النهاية** وتكون جزء من الحل .

٣) استخدم توحيد المقامات (**بسبب وجود جمع وطرح الكسور**)

٤) **الاختصار** بين البسط والمقام (**تنتهي المشكلة**)

٥) التعويض المباشر وتكون **النهاية** اما

$\overbrace{\textbf{موجودة} \qquad\qquad \textbf{غير موجودة}}$

توحيد المقام

$$\frac{أ}{ب} \pm \frac{د}{جـ} = \frac{أ\times جـ \pm د\times ب}{ب\times جـ}$$

$$\frac{\text{بسط الاول} \times \text{مقام الثاني} \pm \text{بسط الثاني} \times \text{مقام الاول}}{\text{مقام الاول} \times \text{مقام الثاني}}$$

هناك ثلاث حالات للتوحيد

١ .

٢ .

٣ .

أمثلة: جد قيمة النهايات التالية (**المرافق التربيعي**)

١) $\lim\limits_{س\to ٢} \frac{\frac{١}{س}-\frac{١}{٢}}{س-٢}$

الحل : التعويض المباشر

$$\lim_{س\to ٢} \frac{\frac{١}{س}-\frac{١}{٢}}{س-٢} = \frac{\frac{١}{٢}-\frac{١}{٢}}{٢-٢} = \frac{٠}{٠}$$

مسبب المشكلة (الذي سوف نقوم بحذفه)

س ← ٢   س = ٢ ⇐ س − ٢ = ٠

٢ − س = ٠

$$= \lim_{س\to ٢} \left(\frac{١}{س}-\frac{١}{٢}\right)\frac{١}{س-٢}$$

$$= \lim_{س\to ٢} \left(\frac{١\times ٢-١\times س}{٢س}\right)\frac{١}{س-٢}$$

$$= \lim_{س\to ٢} \left(\frac{٢-س}{٢س}\right)\frac{١}{س-٢}$$

$$= \lim_{س\to ٢} \left(\frac{\cancel{٢-س}^{\,-١}}{٢س}\right)\frac{١}{\cancel{س-٢}}$$

$$= \lim_{س\to ٢} \left(\frac{-١}{٢س}\right) = \frac{-١}{٢(٢)} = \frac{-١}{٤}$$

٢) $\lim_{س \to ١} \frac{\frac{١}{س+١} - \frac{٢}{س+٣}}{س-١}$

الحل : التعويض المباشر

$$\lim_{س \to ١} \frac{\frac{١}{س+١} - \frac{٢}{س+٣}}{س-١} = \frac{\frac{١}{١+١} - \frac{٢}{١+٣}}{١-١} = \frac{٠}{٠}$$

مسبب المشكلة (الذي سوف نقوم بحذفه)

س ← ١ س = ١ ⟸ س − ١ = ٠

١ − س = ٠

$$= \lim_{س \to ١} \left(\frac{١}{س+١} - \frac{٢}{س+٣}\right)\left(\frac{١}{س-١}\right)$$

$$= \lim_{س \to ١} \left(\frac{١ \times (س+٣) - ٢(س+١)}{(س+١)(س+٣)}\right)\left(\frac{١}{س-١}\right)$$

$$= \lim_{س \to ١} \left(\frac{س+٣-٢س-٢}{(س+١)(س+٣)}\right)\left(\frac{١}{س-١}\right)$$

$$= \lim_{س \to ١} \left(\frac{\cancel{س}+\cancel{٣}-٢س-\cancel{٢}}{(س+١)(س+٣)}\right)\left(\frac{١}{س-١}\right)$$

$$= \lim_{س \to ١} \left(\frac{\cancel{١-س}^{\,-١}}{(س+١)(س+٣)}\right)\left(\frac{١}{\cancel{١-س}}\right)$$

$$= \lim_{س \to ١} \left(\frac{-١}{(س+١)(س+٣)}\right) = \frac{-١}{(١+١)(١+٣)} = \frac{-١}{٨}$$

٣) $\lim_{س \to ٣} \left(\frac{١}{س} - \frac{١}{٣}\right)\left(\frac{١}{س^٢-٩}\right)$

الحل : التعويض المباشر

$$\lim_{س \to ٣} \left(\frac{١}{س} - \frac{١}{٣}\right)\left(\frac{١}{س^٢-٩}\right) = \left(\frac{١}{٣} - \frac{١}{٣}\right)\left(\frac{١}{(٣)^٢-٩}\right) = \frac{٠}{٠}$$

مسبب المشكلة (الذي سوف نقوم بحذفه)

س ← ٣ س = ٣ ⟸ س − ٣ = ٠

٣ − س = ٠

$$= \lim_{س \to ٣} \left(\frac{٣ \times ١ - ١ \times س}{٣س}\right)\left(\frac{١}{س^٢-٩}\right)$$

$$= \lim_{س \to ٣} \left(\frac{\cancel{٣-س}^{\,-١}}{٣س}\right)\frac{١}{(س+٣)\cancel{(س-٣)}}$$

$$= \lim_{س \to ٣} \left(\frac{-١}{٣س}\right)\frac{١}{س+٣} = \frac{-١}{٣(٣)}\left(\frac{١}{٣+٣}\right) = \frac{-١}{٥٤}$$

٤) $\lim_{س \to ٢} \frac{٥س - ١٠}{\frac{١}{س^٢} - \frac{١}{٤}}$

الحل : التعويض المباشر

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{٥س - ١٠}{\frac{١}{س^٢} - \frac{١}{٤}} = \frac{٥(٢) - ١٠}{\frac{١}{(٢)^٢} - \frac{١}{٤}} = \frac{٠}{٠}$$

مسبب المشكلة (الذي سوف نقوم بحذفه)

س ← ٢ س = ٢ ⟸ س − ٢ = ٠

٢ − س = ٠

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{٥س - ١٠}{\frac{١}{س^٢} - \frac{١}{٤}}$$

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{٥س - ١٠}{\frac{٤ \times ١ - ١ \times س^٢}{س^٢ \times ٤}}$$

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{٥س - ١٠}{\frac{٤ - س^٢}{٤س^٢}}$$

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{٥س - ١٠}{١} \times \frac{٤س^٢}{٤ - س^٢}$$

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{٥(س-٢)}{١} \times \frac{٤س^٢}{(٢-س)(٢+س)}$$

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{٥\cancel{(س-٢)}^{\,-١}}{١} \times \frac{٤س^٢}{\cancel{(٢-س)}(٢+س)}$$

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{٥(-١)}{١} \times \frac{٤س^٢}{(٢+س)} = \frac{(-٥)٤(٢)^٢}{(٢+٢)} = ٢٠$$

٥) $\lim_{س \to ٢} \frac{\frac{١}{س} - \frac{١}{٢}}{س-٢}$

الحل :

ج $\frac{١}{٤}$

٦) $\lim_{س \to ٢} \frac{\frac{١}{س+١} - \frac{١}{٣}}{س-٢}$

الحل :

ج $\frac{-١}{٩}$

٧) $\underset{\text{س}\to ٥}{\text{نهـا}} \dfrac{\dfrac{١}{\text{س}+٢} - \dfrac{١}{٧}}{\text{س}-٥}$

الحل :

ج $\dfrac{-١}{٤٩}$

٨) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\dfrac{٢}{\text{س}-٣} + \dfrac{٤}{\text{س}+٦}}{\text{س}}$

الحل :

ج $\dfrac{-١}{٣}$

٩) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\dfrac{١}{\text{س}} - \dfrac{١}{٢}}{٢\text{س}-٤}$

الحل :

ج $\dfrac{-١}{٨}$

١٠) $\underset{\text{س}\to ٧}{\text{نهـا}} \dfrac{\dfrac{١}{\text{س}-٢} - \dfrac{١}{٥}}{٢\text{س}-١٤}$

الحل :

ج $\dfrac{-١}{٢٠}$

١١) $\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نهـا}} \dfrac{\dfrac{\text{س}}{\text{س}-٢} - \dfrac{\text{س}+٢}{\text{س}-١}}{\text{س}-٤}$

الحل :

ج $\dfrac{-١}{٦}$

١٢) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢}-٤} - \dfrac{٤}{\text{س}^{٢}-٤}\right)$

الحل :

ج $\dfrac{١}{٢}$

تدريبات عامه :

أمثلة :

١) اذا كانت $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣}$ **فجد** : $\lim\limits_{\text{س}\to ٢} \dfrac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(٢)}{\text{س} - ٢}$ ؟

ج	١٢

الحل :

$$\lim\limits_{\text{س}\to ٢} \frac{\boxed{\text{ق}(\text{س})} - \boxed{\text{ق}(٢)}}{\text{س} - ٢} = \lim\limits_{\text{س}\to ٢} \frac{\text{س}^{٣} - ٨}{\text{س} - ٢}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣} \\ \text{ق}(٢) = (٢)^{٣} = ٨ \end{array}}$$

$$= \lim\limits_{\text{س}\to ٢} \frac{\text{س}^{٣} - ٨}{\text{س} - ٢}$$

$$= \lim\limits_{\text{س}\to ٢} \frac{(\text{س} - ٢)(\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٤)}{\text{س} - ٢}$$

$$= \lim\limits_{\text{س}\to ٢} \frac{\cancel{(\text{س} - ٢)}\,(\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٤)}{\cancel{\text{س} - ٢}}$$

$$= \lim\limits_{\text{س}\to ٢} (\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٤) = (٢)^{٢} + ٢(٢) + ٤ = ١٢$$

٢) اذا كانت $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}^{٢} + ٥}$ **فجد** : $\lim\limits_{\text{س}\to ٢} \dfrac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(٤)}{\text{س} - ٤}$ ؟

ج	$\frac{٢}{٣}$

الحل :

٣) اذا كانت $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{٢\text{س}}{\text{س} + ٣}$ **فجد** : $\lim\limits_{\text{س}\to ٤} \dfrac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(٢)}{\text{س} - ٢}$ ؟

ج	$\frac{٦}{٤٩}$

الحل :

٤) [٤٠ / الأسئلة] اذا كانت $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}$ **فجد** : $\lim\limits_{\text{س}\to -٣} \dfrac{\text{ق}^{٢}(\text{س}) - \text{ق}(٩)}{\text{س} + ٣}$ ؟

الحل :

٥) [٤٠ / الأسئلة] اذا كانت $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{١}{\text{س} - ٢}$ **فجد** : $\lim\limits_{\text{هـ}\to ٠} \dfrac{\text{ق}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$ ؟

الحل :

٦) [٤٠ / الأسئلة] اذا علمت ان $\lim\limits_{\text{س}\to ٥} \text{ق}(\text{س}) = -٧$ ، $\lim\limits_{\text{س}\to ٥} \text{هـ}(\text{س}) = ٢$ **فبين ان** :

$$\lim\limits_{\text{س}\to ٥} \frac{٢\text{ق}(\text{س}) - ٣\text{هـ}(\text{س})}{\text{ق}(\text{س}) + \text{س} + ٧} = -٤$$

الحل :

٧) اذا علمت ان $\lim\limits_{س \to ٢} ق(س) = ٣$ ، $\lim\limits_{س \to ٢} هـ(س) = ٩$ فجد قيمة كل مما يأتي :

أ) $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{ق(س)}{هـ(س)}$ ب) $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{هـ(س) + ١}{ق(س) + س - ٥}$

الحل :

٨) **جد** النهايات :

١) $\lim\limits_{س \to -٥} (\sqrt{٤ - س} + س^{٢}) = \boxed{٢٨}$

٢) $\lim\limits_{س \to -٤} (\sqrt[٣]{٧س + ١} + ٣س) = \boxed{-١٥}$

الحل :

٩) **إذا كانت** : $\lim\limits_{س \to ٣} ق(س) = -٣٢$ **فجد** :

١) $\lim\limits_{س \to ٣} (\boxed{\sqrt[ن]{ق(س)}} + س^{٢}) = \boxed{٧}$

٢) $\lim\limits_{س \to ٣} \boxed{\sqrt{ق(س)}} = \boxed{غ . م}$

٣) $\lim\limits_{س \to ٣} \sqrt[٤]{ق(س)} = \boxed{غ . م}$

٤) $\lim\limits_{س \to ٣} (\sqrt[٣]{\frac{ق(س)}{٤}} + \frac{٤س + ٣}{٥}) = \boxed{١}$

٥) $\lim\limits_{س \to ٣} \sqrt{١٠٠ + ٢ق(س)} = \boxed{٦}$

الحل :

الدرس الخامس : الاتصال

الاتصال : **يمكن معرفة الاتصال من خلال رسمة الاقتران حيث يكون الاقتران غير متصل عند القفزات والحلقات .**

حيث من شروط الاتصال عند نقطة س = أ

١) ق(أ) **موجودة** (**لها صورة**) " **الحلقات المغلقة والمنحنيات** .

٢) $\text{نها}_{س \to أ} \text{ق}(س) =$ **موجودة** $\Leftarrow \text{نها}_{س \to أ^+} \text{ق}(س) = \text{نها}_{س \to أ^-} \text{ق}(س)$

٣) $\text{ق}(أ) = \text{نها}_{س \to أ} \text{ق}(س)$

دائما عند استخدام شروط الاتصال يجب ....

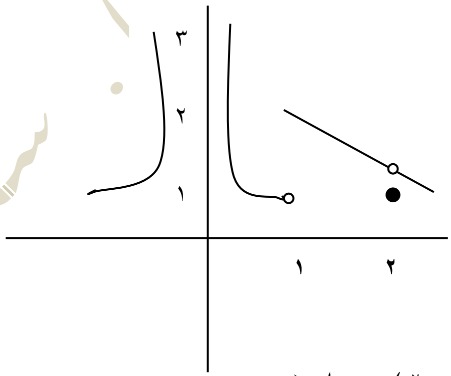
اذا نقص احد شروط الاتصال عند النقطة المراد بحث الاتصال عندها يكون الاقتران ق(س) غير متصل عند س=أ **أو منفصل عند** س = أ

مثال لتوضيح :-

في الشكل المجاور

ما قيم س التي يكون عندها

غير متصل مع ذكر السبب



١) $\text{نها}_{س \to ١} \text{ق}(س)$ ٢) $\text{نها}_{س \to ٢} \text{ق}(س)$

الحل :

١) $\text{ق}(١) = ٢$

$\text{نها}_{س \to ١^+} \text{ق}(س) = ٢$

$\text{نها}_{س \to ١^-} \text{ق}(س) = ١$

$\Leftarrow \text{نها}_{س \to ١^+} \text{ق}(س) \neq \text{نها}_{س \to ١^-} \text{ق}(س)$

$\text{نها}_{س \to ١} \text{ق}(س)$ غ.م

سبب عدم الاتصال ان نهاية نهاية من اليمين لا يساوي النهاية من اليسار

ولا تساوي الصورة

٢) $\text{ق}(٢) = ١$

$\text{نها}_{س \to ٢^+} \text{ق}(س) = ١.٥$

$\text{نها}_{س \to ٢^-} \text{ق}(س) = ١.٥$

$\Leftarrow \text{نها}_{س \to ٢^+} \text{ق}(س) = \text{نها}_{س \to ٢^-} \text{ق}(س)$

$\text{نها}_{س \to ٢} \text{ق}(س) = ١.٥$ (م)

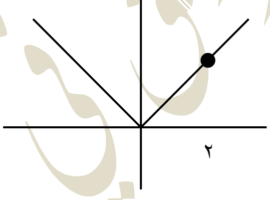
$\text{ق}(٢) \neq \text{نها}_{س \to ٢} \text{ق}(س)$

سبب عدم الاتصال ان الصورة لا تساوي النهاية بشكل عام

أمثلة :

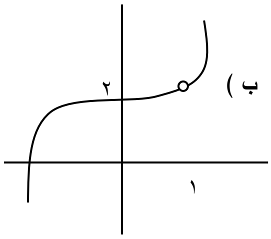
١) تتبع الاشكال التالية وأدرس اتصال عند النقاط المبينه إزاء كل منها :

أ)



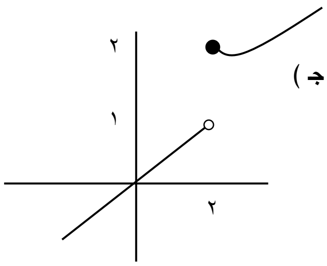
عندما س = ٢

ب)

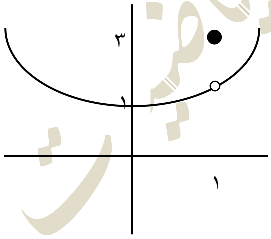


عندما س = ١

جـ)



عندما س = ٢



عندما س = ١

الحل :

أمثلة : ابحث اتصال عند النقاط المبينه إزاء كل منها

الاتصال عند عدد ليس نقطة تشعب

١) $ق(س) = ٣س^{٢} + ٢س - ١$ هل ق متصل عند س = ٢ ؟

الحل :

$$ق(٢) = ٣س^{٢} + ٢س - ١ = ٣(٢)^{٢} + ٢(٢) - ١ = ٥$$

$$\lim_{س \to ٢} ٣س^{٢} + ٢س - ١ = ٣(٢)^{٢} + ٢(٢) - ١ = ٥$$

$$ق(٢) = \lim_{س \to ٢} ق(س)$$

∴ ق (س) متصل عند س =٥

ملاحظة " كثيرات الحدود متصله دائما لجميع الاعداد الحقيقة "

٢) $ق(س) = س^{٢} + ٥س + ٢$ هل ق متصل عند س = − ١ ؟

الحل :

$$ق(-١) = س^{٢} + ٥س + ٢ = (-١)^{٢} + ٥(-١) + ٢ = -٣$$

$$\lim_{س \to -١} س^{٢} + ٥س + ٢ = (-١)^{٢} + ٥(-١) + ٢ = -٣$$

$$ق(-١) = \lim_{س \to -٣} ق(س)$$

∴ ق (س) متصل عند س= − ١

٣) $ق(س) = س^{٢} - ٤$ هل ق متصل عند س ∋ ح ؟

الحل :

نعم . لان ق (س) كثير حدود معرف دائما فهو متصل

٤) $ق(س) = س^{٣} + ٥س$ هل ق متصل عند س =٢ ؟

الحل :

تذكرعزيزي الطالب : " **أنواع كثيرات الحدود**

١) ثابت ٢) خطي ٣) تربيعي ٤) تكعيبي

من الأمثلة على كثيرات الحدود :

١) $ق(س) = ٧س^{٢} - ٥س + ٦$

٢) $هـ(س) = ٢س^{٣} - ٨س^{٢} + ٢$

٣) $ل(س) = \sqrt{٣}س - \frac{٧}{٤}$

٤) $م(س) = ٧$

أمثلة : ابحث اتصال عند النقاط المبينه إزاء كل منها

الاقتران المتشعب

١) $ق(س) = \begin{cases} ٥س^{٢} + ٣ & ، \quad س < ١ \\ \frac{٨}{س} & ، \quad س = ١ \\ ٦س + ٢ & ، \quad س > ١ \end{cases}$

ابحث اتصال ق(س) عندما أ) س = ١ ب) س = ٥ ج) س = −١

الحل :

لتسهيل الحل يفضل عمل خط اعداد وتعين عليه الاقترانات والنقاط

الدائرة المغلقة تعني ان هناك صورة عند العدد ١

أ) س = ١

$$ق(١) = \frac{٨}{س} = \frac{٨}{١} = ٨$$

$$\lim_{س \to ١^{+}} ق(س) = ٥س^{٢} + ٣ = ٥(١)^{٢} + ٣ = ٨$$

$$\lim_{س \to ١^{-}} ق(س) = ٦س + ٢ = ٦(١) + ٢ = ٨$$

$$\Leftarrow \lim_{س \to ١^{+}} ق(س) = \lim_{س \to ١^{-}} ق(س)$$

$$ق(١) = \lim_{س \to ١} ق(س)$$

∴ ق (س) متصل عند س= ١

ب) س = ٥

$$ق(٥) = ٦(٥) + ٢ = ٣٢$$

$$\lim_{س \to ٥} ق(س) = ٦س + ٢ = ٦(٥) + ٢ = ٣٢$$

$$ق(٥) = \lim_{س \to ٥} ق(س)$$

∴ ق (س) متصل عند س= ١

ج) س = −١

$$ق(-١) = ٥(-١)^{٢} + ٣ = ٨$$

$$\lim_{س \to -١} ٥س^{٢} + ٣ = ٥(-١)^{٢} + ٣ = ٨$$

$$ق(-١) = \lim_{س \to -١} ق(س)$$

∴ ق (س) متصل عند س= −١

٢) $ق(س) = \begin{cases} ٢س + ١ & ، \quad س < ٥ \\ ٩ & ، \quad س = ٥ \\ \frac{٥}{س} + ٢ & ، \quad س > ٥ \end{cases}$

ابحث اتصال ق(س) عندما أ) س = ٣ ب) س = ٥

الحل :

٣) مثال / ٤٨ $ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + ١ & ، \quad س < ٢ \\ ٥س - ٥ & ، \quad س \geq ٢ \end{cases}$

ابحث اتصال ق(س) عندما أ) س = ٢ ب) س = ٠ جـ) س = ٤

الحل :

٤) $ق(س) = \begin{cases} س + ٥ & ، \quad س < -١ \\ ٩ - ٢س & ، \quad -١ \leq س \leq ٣ \\ س^{٢} - ٦ & ، \quad س > ٣ \end{cases}$

ابحث اتصال ق(س) عندما أ) س = -١ ب) س = ٣

الحل :

٥) مثال / ٤٩ $ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٢ & ، \quad س < ١ \\ ٣س & ، \quad ١ \leq س < ٣ \\ س^{٣} - ١٨ & ، \quad س > ٣ \end{cases}$

ابحث اتصال ق(س) عندما أ) س = ٠ ب) س = ١ جـ) س = ٣

الحل :

٦) $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \sqrt{\text{س}} & ، \ \text{س} > ٤ \\ ٣\text{س} - ١٠ & ، \ \text{س} \le ٤ \end{cases}$

ابحث اتصال ق(س) عندما أ) س = ٢ ب) س = ٩ جـ) س = ٤

الحل :

٧) $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^٢ + ٢\text{س} + ١ & ، \ \boxed{\text{س} \ne ٠} \\ ٣\text{س} + ١ & ، \ \text{س} = ٠ \end{cases}$

ابحث اتصال ق(س) عندما أ) س = ٠

الحل :

الفكرة " تعني س ≠ ٠

$\text{ق}(٠) = ٣\text{س} + ١ = ٣(٠) + ١ = ١$

$\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \text{س}^٢ + ٢\text{س} + ١ = (٠)^٢ + ٢(٠) + ١ = ١$

$\text{ق}(٠) = \lim\limits_{\text{س} \to ٠} \text{ق}(\text{س})$

∴ ق (س) متصل عند س= ٠

٨) $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} + ٣ & ، \ \boxed{\text{س} \ne -١} \\ ٤ & ، \ \text{س} = -١ \end{cases}$

ابحث اتصال ق(س) عندما أ) س = −١

الحل :

أمثلة : ابحث اتصال عند النقاط المبينه إزاء كل منها

١) $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^٣ - ٢٧}{\text{س} - ٣} & ، \ \text{س} < ٣ \\ ٣\text{س}^٢ & ، \ \text{س} > ٣ \\ \text{س} + ٢٤ & ، \ \text{س} = ٣ \end{cases}$

ابحث اتصال ق(س) عند أ) س = ٣

الحل :

الفكرة " الاقتران النسبي ....

$\text{ق}(٣) = \text{س} + ٢٤ = (٣) + ٢٤ = ٢٧$

$\lim\limits_{\text{س} \to ٣^+} ٣\text{س}^٢ = ٣(٣)^٢ = ٢٧$

$\boxed{\lim\limits_{\text{س} \to ١^-} \dfrac{\text{س}^٣ - ٢٧}{\text{س} - ٣}}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to ١^-} \dfrac{(\text{س} - ٣)(\text{س}^٢ + ٣\text{س} + ٩)}{\text{س} - ٣}$ ⇐ $\lim\limits_{\text{س} \to ١^+} \text{ق}(\text{س}) = \lim\limits_{\text{س} \to ١^-} \text{ق}(\text{س})$

$= \lim\limits_{\text{س} \to ١^-} \dfrac{\cancel{(\text{س} - ٣)}(\text{س}^٢ + ٣\text{س} + ٩)}{\cancel{\text{س} - ٣}}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to ١^-} (\text{س}^٢ + ٣\text{س} + ٩) = ٢٧$

$\text{ق}(\text{س}) = \lim\limits_{\text{س} \to ١} \text{ق}(\text{س})$

∴ ق (س) متصل عند س= ٣

٢) $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^٢ - ٩}{\text{س} - ٣} & ، \ \text{س} \ne ٣ \\ ٥ & ، \ \text{س} = ٣ \end{cases}$

ابحث اتصال ق(س) عندما أ) س = ٣ ب) س = ٤

الحل :

٣) $ق(س) = \begin{cases} \dfrac{س^{٢} - ٢٥}{س - ٥} &، س \neq ٥ \\ ٢س &، س = ٥ \end{cases}$

ابحث اتصال ق(س) عندما أ) س = ٥

الحل :

٤) ٤٩ / تدريب $ق(س) = \begin{cases} \dfrac{س^{٢} - ٢س}{س - ٢} &، س \neq ٢ \\ ٤ &، س = ٢ \end{cases}$

ابحث اتصال ق(س) عندما أ) س = ٢

الحل :

أسئلة الثوابت

أمثلة :

١) $ق(س) = \begin{cases} ٤س^{٢} + أس &، س < ٢ \\ ٢س^{٣} + ١٢ &، س \geq ٢ \end{cases}$

وكان ق (س) متصل عند س=٢ فما قيمة الثابت أ ؟

الحل :

الفكرة " كلمة متصل تعني ان

النهاية من اليمين = النهاية من اليسار = النهاية بشكل عام = الصورة "

$$\lim_{س \to أ^{+}} ق(س) = \lim_{س \to أ^{-}} ق(س) = \lim_{س \to أ} ق(س) = ق(أ)$$

$$\lim_{س \to ٢^{+}} ق(س) = \lim_{س \to ٢^{-}} ق(س)$$

$$\lim_{س \to ٢^{+}} ٢س^{٣} + ١٢ = \lim_{س \to ٢^{-}} ٤س^{٢} + أس$$

$$٢(٢)^{٣} + ١٢ = ٤(٢)^{٢} + أ(٢) \Leftarrow أ = \frac{١٢}{٢} = ٦$$

٢) $ق(س) = \begin{cases} ٨س + ٦ &، س < ٣ \\ ٤ل + ١٠ &، س \geq ٣ \end{cases}$

وكان ق (س) متصل عند س=٣ فما قيمة الثابت ل ؟

الحل :

ع ل = ٥

٣) $ق(س) = \begin{cases} \dfrac{س^{٢} - ٣س - ٤}{س^{٢} - ١٦} & ، \ س \neq ٤ \\ جـ & ، \ س = ٤ \end{cases}$

وكان ق (س) متصل عند س=٤ فما قيمة الثابت جـ ؟

الحل :

$ق(٤) = \lim_{س \to ٤} ق(س)$

$جـ = \lim_{س \to ٤} \dfrac{س^{٢} - ٣س - ٤}{س^{٢} - ١٦}$

$جـ = \lim_{س \to ٤} \dfrac{(س - ٤)(س + ١)}{(س - ٤)(س + ٤)}$

$جـ = \lim_{س \to ٤} \dfrac{\cancel{(س - ٤)}(س + ١)}{\cancel{(س - ٤)}(س + ٤)}$

$جـ = \lim_{س \to ٤} \dfrac{(س + ١)}{(س + ٤)}$

$جـ = \dfrac{٤ + ١}{٤ + ٤} \Leftarrow \boxed{جـ = \dfrac{٥}{٨}}$

٤) $ق(س) = \begin{cases} \dfrac{٣ - س}{س - ٣} & ، \ س \neq ٣ \\ م س + ٢ & ، \ س = ٣ \end{cases}$

وكان ق (س) متصل عند س=٣ فما قيمة الثابت م ؟

الحل :

$\boxed{ج \ \ م = -١}$

٥) $ق(س) = \begin{cases} أس^{٢} + ب & ، \ س < ٢ \\ ٣أس + ٤ & ، \ س > ٢ \\ ١٦ & ، \ س = ٢ \end{cases}$

وكان ق (س) متصل عند س=٢ فما قيمة الثابت أ ، ب ؟

الحل :

لتسهيل حل السؤال ....

الفكرة " كلمة متصل تعني ان

النهاية من اليمين = النهاية من اليسار = النهاية بشكل عام = الصورة "

$\boxed{\lim_{س \to أ^{+}} ق(س) = \lim_{س \to أ^{-}} ق(س) = \lim_{س \to أ} ق(س) = ق(أ)}$

$\lim_{س \to ٢^{+}} ٣أ س + ٤ = ٣أ (٢) + ٤ = ٦أ + ٤$

$\lim_{س \to ٢^{-}} أ س^{٢} + ب = أ (٢)^{٢} + ب = ٤أ + ب$

$ق(٢) = ١٦$

$\lim_{س \to ٢^{+}} ٣أ س + ٤ = ق(٢) \Leftarrow ٦أ + ٤ = ١٦ \Leftarrow ٦أ = ١٢ \Leftarrow \boxed{أ = ٢}$

$\lim_{س \to ٢^{-}} أ س^{٢} + ب = ق(٢) \Leftarrow (٢)(٢)^{٢} + ب = ١٦ \Leftarrow \boxed{ب = ٨}$

٦) ٥٤ / الأسئلة $ق(س) = \begin{cases} س + أ & ، \ س < ٢ \\ ٨ & ، \ س = ٢ \\ ب س + ٦ & ، \ س > ٢ \end{cases}$

وكان ق (س) متصل عند س=٢ فما قيمة الثابت أ ، ب ؟

الحل :

$\boxed{ج \ \ أ = ٦ \ ، \ ب = ١}$

٧) ٥٤ / الأسئلة

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{أ س} - \text{ب} & ، \quad \text{س} < ١ \\ ٤ & ، \quad \text{س} = ١ \\ \text{أ س}^{٣} + \text{ب} + ٢ & ، \quad \text{س} > ١ \end{cases}$$

وكان ق (س) متصل عند س= ١ فما قيمة الثابت أ ، ب ؟

الحل :

$$\lim_{\text{س} \to ١^{+}} \text{أ س}^{٣} + \text{ب} + ٢ = \text{ق}(١)$$

$$\text{أ}(١)^{٣} + \text{ب} + ٢ = ٤ \Leftarrow \boxed{\text{أ} + \text{ب} = ٢} \qquad (١)$$

$$\lim_{\text{س} \to ٢^{-}} \text{أ س} - \text{ب} = \text{ق}(١)$$

$$\text{أ}(١) - \text{ب} = ٤ \Leftarrow \boxed{\text{أ} - \text{ب} = ٤} \qquad (٢)$$

نجمع المعادلتين

$$\text{أ} + \text{ب} = ٢$$

$$+$$

$$\text{أ} - \text{ب} = ٤$$

$$٢\text{أ} = ٦ \quad \Leftarrow \quad \boxed{\text{أ} = ٣}$$

بالعويض في المعادلة (١) أو (٢)

$$\text{أ} + \text{ب} = ٢ \quad \Leftarrow \quad \boxed{\text{أ} = ٣}$$

$$٣ + \text{ب} = ٤ \quad \Leftarrow \quad \boxed{\text{ب} = -١}$$

٨)

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٦\ \text{س} + \text{أس} & ، \quad \text{س} < ٢ \\ ٨ & ، \quad \text{س} = ٢ \\ ٤\ \text{س}^{٢} + ٤\text{ب} & ، \quad \text{س} > ٢ \end{cases}$$

وكان ق (س) متصل عند س= ٢ فما قيمة الثابت أ ، ب ؟

الحل :

$$\boxed{\text{ج} \quad \text{أ} = -٢ \quad ، \quad \text{ب} = -٢}$$

نظريات الاتصال

نظرية :
اذا كان كل من الاقترانين ق ، هـ متصلا عند س= أ فإن كل من الاتية يكون متصلا عند س= أ

١) ق(س) + هـ(س)　　٢) ق(س) − هـ(س)

٣) ق(س) × هـ(س)　　٤) $\frac{\text{ق(س)}}{\text{هـ(س)}}$ هـ(أ) ≠ ٠

تفسير النظرية :

❋ أي انه اذا طلب اتصال جمع أو طرح أو ضرب أو قسمة اقترانين عند عدد ما ندرس كلا منهما على حدى اذا كان كلاهما متصلا نحكم على جمعهما أو طرحهما أو ضربهما أو قسمتهما متصله

❋ أما اذا كان أحدهما غير متصل وجب دمج الاقترانين معا ودراستهما ثم الحكم

❋ كل اقتران نسبي $\frac{\text{ب}}{\boxed{\text{م}}}$ متصلا ما عدا اصفار مقامه .

أمثلة :

١) ق(س) = ٥ + ٢س ، هـ(س) = $\begin{cases} \text{٣س + ٤} & \text{، س < ٣} \\ \text{س}^{٢}\text{ + ٤} & \text{، س ≥ ٣} \end{cases}$

وكان ل(س) = ق(س) + هـ(س) ابحث اتصال ل(س) عند س = ٣

الحل :

ندرس ق(س) لوحده

ق(س) كثير حدود معرف متصل س=٣

هـ(س) اقتران متشعب يجب علينا بحث الاتصال لانه يحتوي على مجموعة من القواعد

نبحث اتصال عند ق س = ٣

ق(س) = ٥ + ٢س

ق(٣) = ٥ + ٢(٣) = ١١

$\lim_{\text{س}\to ٣}$ ق(س) = $\lim_{\text{س}\to ٣}$ ٥ + ٢س = ٥ + ٢(٣) = ١١

ق(٣) = $\lim_{\text{س}\to ٣}$ ق(س)

∴ ق (س) متصل عند س= ٣

نبحث اتصال هـ عند س = ٣

هـ(س) = س^{٢} + ٤

هـ(٣) = (٣)^{٢} + ٤ = ١٣

$\lim_{\text{س}\to ٣^{+}}$ س^{٢} + ٤ = (٣)^{٢} + ٤ = ١٣

$\lim_{\text{س}\to ٣^{-}}$ ٣س + ٤ = ٣(٣) + ٤ = ١٣

$\lim_{\text{س}\to ٣^{+}}$ هـ(س) = $\lim_{\text{س}\to ٣^{-}}$ هـ(س)

⇐ $\lim_{\text{س}\to ٣}$ هـ(س) = ١٣

هـ(٣) = $\lim_{\text{س}\to ٣}$ هـ(س)

∴ هـ (س) متصل عند س= ٣

∴ ل (س) متصل عند س=٣ لانه ناتج جمع متصلين فهو متصل

٢) ق(س) = س^{٢} + ٥س ، هـ(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢} & \text{، س < ٢} \\ \text{٢س} & \text{، س ≥ ٢} \end{cases}$

وكان ل(س) = ق(س) + هـ(س) ابحث اتصال ل(س) عند س = ٢

الحل :

٣) ق(س) = ٣س − ١ ، هـ(س) = $\begin{cases} \text{٤س + ٢} & \text{، س < ١} \\ \text{س}^{٢}\text{ + ٥} & \text{، س ≥ ١} \end{cases}$

وكان ل(س) = ق(س) + هـ(س) ابحث اتصال ل(س) عند س = ١

الحل :

٤) $\text{ق}(س) = س^{٢} + ٢$ ، $\text{هـ}(س) = \begin{cases} س - ١ & ، \ س \le ٣ \\ ٥ - س & ، \ س > ٣ \end{cases}$

وكان $(\text{ق} + \text{هـ})(س)$ ابحث اتصال ل(س) عند س = ٣

الحل :

٥) $\text{ق}(س) = \sqrt{س^{٢} + ٥}$ ، $\text{هـ}(س) = (٢س - ١)^{٣}$

وكان $\text{ل}(س) = \text{ق}(س) \times \text{هـ}(س)$ ابحث اتصال ل(س) عند س = ٢

الحل :

نبحث اتصال عند ق س = ٢

$\text{ق}(س) = \sqrt{س^{٢} + ٥}$

$\text{ق}(٢) = \sqrt{(٢)^{٢} + ٥} = \sqrt{٩} = ٣$

$\lim_{س \to ٣} \sqrt{س^{٢} + ٥} = \sqrt{(٣)^{٢} + ٥} = \sqrt{٩} = ٣$

$\text{ق}(٣) = \lim_{س \to ٣} \text{ق}(س)$

∴ ق (س) متصل عند س= ٢

نبحث اتصال هـ عند س = ٢

$\text{هـ}(س) = (٢س - ١)^{٣}$

$\text{هـ}(٢) = (٢(٢) - ١)^{٣} = ٢٧$

$\lim_{س \to ٢} (٢س - ١)^{٣} = (٢(٢) - ١)^{٣} = ٢٧$

$\text{هـ}(٢) = \lim_{س \to ٣} \text{هـ}(س)$

∴ هـ (س) متصل عند س= ٢

∴ ل (س) متصل عند س= ٢ لانه ناتج ضرب متصلين فهو متصل

٦) $\text{ق}(س) = \begin{cases} س^{٢} + ٢ & ، \ س < ٣ \\ ٢س + ٨ & ، \ س \ge ٣ \end{cases}$ ، $\text{هـ}(س) = س^{٣} - ٣س$

وكان $\text{ل}(س) = \text{ق}(س) \times \text{هـ}(س)$ ابحث اتصال ل(س) عند س = ٣

الحل :

٧) $\text{ق}(س) = ٥س^{٢} + ٤$ ، $\text{هـ}(س) = \begin{cases} س + ٤ & ، \ س < ٠ \\ ٤ - س^{٣} & ، \ س \ge ٠ \end{cases}$

وكان $\text{ل}(س) = (\text{ق} \times \text{هـ})(س)$ ابحث اتصال ل(س) عند س = ٠

الحل :

٨) ق(س) = ٣س − ١ ، هـ(س) = { ٤س + ١ ، س < ٢ ؛ س^{٢} + ٥ ، س ≥ ٢ }

وكان ل(س) = ق(س) × هـ(س) ابحث اتصال ل(س) عند س = ٢

الحل :

ندرس ق(س) لوحده

ق(س) كثير حدود معرف متصل س=٢

هـ(س) اقتران متشعب يجب علينا بحث الاتصال لانه يحتوي على مجموعة من القواعد

نبحث اتصال عند ق س = ٢

ق(س) = ٣س − ١

ق(٢) = ٣(٢) − ١ = ٥

نهـا$_{س→٢}$ ٣س − ١ = ٣(٢) − ١ = ٥

ق(٢) = نهـا$_{س→٢}$ ق(س)

∴ ق (س) متصل عند س=٢

نبحث اتصال هـ عند س = ٢

هـ(س) = س^{٢} + ٥

هـ(٢) = (٢)^{٢} + ٥ = ٩

نهـا$_{س→٢^{+}}$ س^{٢} + ٥ = (٢)^{٢} + ٥ = ٩

نهـا$_{س→٢^{-}}$ ٤س + ١ = ٤(٢) + ١ = ٩

نهـا$_{س→٢^{+}}$ هـ(س) = نهـا$_{س→٢^{-}}$ هـ(س)

⇐ نهـا$_{س→٣}$ هـ(س) = ٩

هـ(٢) = نهـا$_{س→٢}$ هـ(س)

∴ هـ (س) متصل عند س=٢

∴ ل (س) متصل عند س=٢ لانه ناتج ضرب متصلين هو متصل

٩) ٦١ / مثال ق(س) = ٥س^{٢} + ٥س − ١ ، هـ(س) = { س + ٩ ، س ≤ ٢ ؛ ٥س + ١ ، س > ٢ }

وكان ل(س) = ٢ق(س) + هـ(س) ابحث اتصال ل(س) عند س = ٢

الحل :

ملاحظه : اذا كان احد الاقترانين غير متصل عند نقطة فلا يمكن الحكم على الجمع والطرح والضرب والقسمة على انه غير متصل بل نقوم بالعلمية الجبرية على الاقترانين ثم نختبر الاتصال .

أمثلة :

١) ق(س) = { س^{٢} ، س < ٢ ؛ ٢س + ٣ ، س ≥ ٢ } ، هـ(س) = س^{٢} − ٤

وكان ل(س) = ق(س) × هـ(س) بين ان ل(س) متصل عند س = ٢

الحل :

نبحث اتصال عند ق س = ٢

ق(س) = ٢س + ٣

ق(٢) = ٢(٢) + ٣ = ٧

نهـا$_{س→٢^{+}}$ ٢س + ٣ = ٢(٢) + ٣ = ٧

نهـا$_{س→٢^{-}}$ س^{٢} = (٢)^{٢} = ٤

نهـا$_{س→٢^{+}}$ ق(س) ≠ نهـا$_{س→٢^{-}}$ ق(س)

⇐ نهـا$_{س→٣}$ هـ(س) غ.م

∴ ق (س) غير متصل عند س=٢

لاحظ ان ق(س) غير متصل عند س=٢ هنا لا نستطيع الحكم عليها انه غير متصل يجب علينا ان نبحث اتصال ل(س)

ل(س) = ق(س) × هـ(س)

ل(س) = { س^{٢} ، س < ٢ ؛ ٢س + ٣ ، س ≥ ٢ } × (س^{٢} − ٤)

ل(س) = { س^{٢} (س^{٢} − ٤) ، س < ٢ ؛ (٢س + ٣) (س^{٢} − ٤) ، س ≥ ٢ }

نبحث اتصال ل عند س = ٢

ل(س) = (٢س + ٣)(س^{٢} − ٤)

ل(٢) = (٢(٢) + ٣)((٢)^{٢} − ٤) = ٠

نهـا$_{س→٢^{+}}$ (٢س + ٣)(س^{٢} − ٤) = (٢(٢) + ٣)((٢)^{٢} − ٤) = ٠

نهـا$_{س→٢^{-}}$ س^{٢}(س^{٢} − ٤) = (٢)^{٢}((٢)^{٢} − ٤) = ٠

نهـا$_{س→٢^{+}}$ ل(س) ≠ نهـا$_{س→٢^{-}}$ ل(س)

⇐ نهـا$_{س→٢}$ ل(س) = ٠

ل(٢) = نهـا$_{س→٢}$ ل(س)

∴ ل (س) متصل عند س=٢

٢) $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٣} + ٥ &، \text{س} < ١ \\ ٦\text{س} + ٤ &، \text{س} \geq ١ \end{cases}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = \begin{cases} ٩ &، \text{س} < ١ \\ ٥\text{س}^{٢} &، \text{س} \geq ١ \end{cases}$

وكان $\text{ل}(\text{س}) = \text{ق}(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س})$ ابحث اتصال ل(س) عند س = ١

الحل :

نبحث اتصال عند ق س = ١

$\text{ق}(\text{س}) = ٦\text{س} + ٤$

$\text{ق}(١) = ٦(١) + ٤ = ١٠$

$$\left[\begin{array}{l} \lim\limits_{\text{س} \to ١^{+}} ٦\text{س} + ٤ = ٦(١) + ٤ = ١٠ \\ \lim\limits_{\text{س} \to ١^{-}} \text{س}^{٣} + ٥ = (١)^{٣} + ٥ = ٦ \end{array}\right. \qquad \lim\limits_{\text{س} \to ١^{+}} \text{ق}(\text{س}) \neq \lim\limits_{\text{س} \to ١^{-}} \text{ق}(\text{س})$$

$\Leftarrow \lim\limits_{\text{س} \to ١} \text{هـ}(\text{س})$ غ.م

∴ ق (س) غير متصل عند س= ١

لاحظ ان ق(س) غير متصل عند س=١ هنا لا نستطيع الحكم عليها انه غير متصل
يجب علينا ان نبحث اتصال ل(س)

$\text{ل}(\text{س}) = \text{ق}(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س})$

$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٣} + ٥ &، \text{س} < ١ \\ ٦\text{س} + ٤ &، \text{س} \geq ١ \end{cases} + \text{هـ}(\text{س}) = \begin{cases} ٩ &، \text{س} < ١ \\ ٥\text{س}^{٢} &، \text{س} \geq ١ \end{cases}$

$\text{ل}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٣} + ٥ + ٩ &، \text{س} < ١ \\ (٦\text{س} + ٤) + ٥\text{س}^{٢} &، \text{س} \geq ١ \end{cases}$

$\text{ل}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٣} + ١٤ &، \text{س} < ١ \\ ٥\text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ٤ &، \text{س} \geq ١ \end{cases}$

نبحث اتصال ل عند س = ١

$\text{ل}(\text{س}) = ٥\text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ٤$

$\text{ل}(١) = ٥(١)^{٢} + ٦(١) + ٤ = ١٥$

$$\left[\begin{array}{l} \lim\limits_{\text{س} \to ١^{+}} ٥\text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ٤ = ٥(١)^{٢} + ٦(١) + ٤ = ١٥ \\ \lim\limits_{\text{س} \to ١^{-}} \text{س}^{٣} + ١٤ = (١)^{٣} + ١٤ = ١٥ \end{array}\right. \qquad \lim\limits_{\text{س} \to ١^{+}} \text{ل}(\text{س}) = \lim\limits_{\text{س} \to ١^{-}} \text{ل}(\text{س})$$

$\Leftarrow \lim\limits_{\text{س} \to ١} \text{ل}(\text{س}) = ١٥$

$\text{ل}(١) = \lim\limits_{\text{س} \to ١} \text{ل}(\text{س})$

∴ ل (س) متصل عند س= ١

٣) $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٣\text{س} + ٢ &، \text{س} \leq ٢ \\ \text{س}^{٢} &، \text{س} > ٢ \end{cases}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = \begin{cases} ٣ - \text{س} &، \text{س} \leq ٢ \\ ٥ &، \text{س} > ٢ \end{cases}$

وكان $\text{ل}(\text{س}) = \text{ق}(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س})$ ابحث اتصال ل(س) عند س = ٢

الحل :

٤) $ق(س) = \begin{cases} ٣ \quad ، \quad س < ٢ \\ ٥ \quad ، \quad س = ٢ \\ -٣ \quad ، \quad س > ٢ \end{cases}$ ، $هـ(س) = (س - ٢)^٢$

وكان $ل(س) = ق(س) \times هـ(س)$ ابحث اتصال ل(س) عند س = ٢

الحل :

٥) ٦٢/ مثال $ق(س) = س + ٣$ ، $هـ(س) = \frac{س - ٣}{س^٢ - ٩}$

وكان $ل(س) = ق(س) \times هـ(س)$ ابحث اتصال ل(س) عند س = ٣

الحل :

٦) مهم ٥٧ / مثال

$\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{2} + 15$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{2} & ، \text{س} \le 5 \\ 3\text{س} & ، \text{س} > 5 \end{cases}$

وكان $\text{م}(\text{س}) = (\text{ق} - \text{هـ})(\text{س})$ ابحث اتصال $\text{ل}(\text{س})$ عند $\text{س} = 5$

الحل :

عدم الاتصال

(قيم التي يكون عندها اقتران غير متصل)

اهم الملاحظات

١) جميع **كثيرات الحدود** متصله على ح جميع الاعداد حقيقة .

٢) الاقترانات **النسبية** تكون غير متصله عند **أصفار المقام** .

٣) الاقترانات المعرفة بأكثر من قاعدة (**المتشبعة**) عند نقاط النشعب قد يكون **متصله** وقد تكون **غير متصلة** . (غير متصل أو منفصل لم تحقق شرط من شروط الاتصال)

أمثلة : جد نقاط عدم الاتصال لكل اقتران فيما يلي :

ويمكن كتابة السؤال بطريقة أخرى : جد قيم س (إن وجدت) التي لا يكون عندها كل اقتران مما يأتي متصلا :

١) $\text{ق}(\text{س}) = 5\text{س}^{2} - 8\text{س}^{3} + 9\text{س}$

الحل : ق (س) متصل على ح (لانه كثير حدود) ولا يوجد نقط عدم اتصال .

٢) $\text{ق}(\text{س}) = 11$

الحل :

٣) $\text{ق}(\text{س}) = (3\text{س}^{2} + 4\text{س})(\text{س}^{3} + 6)$

الحل :

٤) $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^{2} - 8}{\text{س} + 5}$

الحل : ما دام الاقتران نسبي نجد اصفار المقام

$\text{س} + 5 = 0 \Leftarrow \text{س} = -5$

∴ ق غير متصل عند س = − ٥

٥) $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{3\text{س}}{\text{س}^{2} - 3\text{س}}$

الحل :

٦) $\text{ق(س)} = \dfrac{\text{٥س}}{\text{س}^{٢}+١}$

الحل :

٧) $\text{ق(س)} = \dfrac{٢}{\text{س}} + \dfrac{٧}{\text{س}-٣}$

الحل :

٨) $\text{ق(س)} = \dfrac{\text{س}}{\text{س}^{٢}-\text{٣س}-٢٨}$

الحل :

٩) $\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{٣س} & \text{،} \quad \text{س} < ١ \\ \text{٤س}-١ & \text{،} \quad ١ < \text{س} < ٥ \\ \text{٥س}+٢ & \text{،} \quad \text{س} \geq ٥ \end{cases}$

الحل :

ق غير متصل عند س= ١ ، ٥ والسبب أن ق (١) غير موجودة

$\lim_{\text{س}\to ٥} \text{ق(س)}$ غ.م

١٠) $\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{٣س} & \text{،} \quad \text{س} < ٠ \\ \dfrac{\text{س}^{٢}-\text{س}}{\text{س}-١} & \text{،} \quad ٠ < \text{س} \leq ٢ \\ \text{٤س} & \text{،} \quad \text{س} > ٢ \end{cases}$

الحل :