مثال 4: اذا كانت $س^2 + ص^2 = 2ص$ أثبت أن $\frac{د^2ص}{دس^2} = \frac{1}{(1-ص)^3}$

الحل: $2س + 2ص \frac{دص}{دس} = 2\frac{دص}{دس} \Leftarrow 2ص\frac{دص}{دس} - 2\frac{دص}{دس} = -2س$

$\frac{دص}{دس}(2ص - 2) = -2س \Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{-2س}{2ص-2} = \frac{-س}{ص-1} = \frac{س}{1-ص}$

$\frac{د^2ص}{دس^2} = \frac{\left(\frac{دص}{دس} \times س\right) - (1)(ص-1)}{(ص-1)^2} = \frac{(ص-1) + س\left(\frac{س}{ص-1}\right)}{(ص-1)^2}$

$= \frac{\frac{(1-ص)^2 + س^2}{1-ص}}{(1-ص)^2} = \frac{1 - 2ص + ص^2 + س^2}{(1-ص)^3} = \frac{1}{(1-ص)^3}$

مثال 5: اذا كانت $ص^2 = \frac{س}{1+س}$ أثبت أن $\frac{دص}{دس} = \frac{ص^3}{2س^2}$

الحل: $2ص\frac{دص}{دس} = \frac{(1+س)(1) - (1)(س)}{(1+س)^2} = \frac{1 + س - س}{(1+س)^2} = \frac{1}{(1+س)^2}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{\frac{1}{(1+س)^2}}{2ص} = \frac{1}{2ص(1+س)^2} = \frac{1}{2ص(1+س)^2} \times \frac{ص^3}{ص^3}$ (ضربنا البسط والمقام في $ص^3$)

$\Leftarrow = \frac{ص^3}{2ص^4(1+س)^2}$

لكن: $ص^2 = \frac{س}{1+س} \Leftarrow س = ص^2(1+س)$

وبالتربيع $\Leftarrow س^2 = ص^4(1+س)^2$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{ص^3}{2س^2}$

سؤال: اذا جا$(س ص) = ص$ ، جد $\frac{دص}{دس}$ عند $(\frac{\pi}{2} ، 1)$

الاجابة $\frac{دص}{دس} = \frac{-2}{1 - \frac{\pi}{2}}$

مثال: إذا كانت $\text{س} + \text{ص} + \text{جاص} = 3$ أثبت أن $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = \frac{\text{جاص}}{(1+\text{جتاص})^3}$

الحل: $1 + \frac{\text{دص}}{\text{دس}} + \text{جتاص} \times \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 0 \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}}(1+\text{جتاص}) = -1$

$\Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-1}{1+\text{جتاص}}$

$\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = \frac{1 \times -\text{جاص}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}}}{(1+\text{جتاص})^2} = \frac{-\text{جاص} \times \frac{-1}{1+\text{جتاص}}}{(1+\text{جتاص})^2} = \frac{\text{جاص}}{(1+\text{جتاص})^3}$

مثال: إذا كانت $\text{س} = \text{جاص}$ أثبت أن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{1}{\sqrt{1-\text{س}^2}}$

الحل: $\text{س} = \text{جاص}$ نشتق

$1 = \text{جتاص}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{1}{\text{جتاص}} = \frac{1}{\sqrt{1-\text{س}^2}}$

$\text{جا}^2\text{ص} + \text{جتا}^2\text{ص} = 1$
$\text{جتا}^2\text{ص} = 1 - \text{جا}^2\text{ص}$
$= 1 - \text{س}^2$
$\text{جتاص} = \sqrt{1-\text{س}^2}$

مثال: إذا كانت $\text{س} = \text{ظاص}$ أثبت أن $\text{ص}''(1+\text{س}^2) = -\text{جا}2\text{ص}$

الحل: نشتق الطرفين $\Leftarrow 1 = \text{قا}^2\text{ص} \times \text{ص}' \Leftarrow \text{ص}' = \frac{1}{\text{قا}^2\text{ص}} = \text{جتا}^2\text{ص}$

$\Leftarrow \text{ص}'' = 2\,\text{جتاص} \times -\text{جاص} \times \text{ص}' = -(2\,\text{جاص}\,\text{جتاص}) \times \frac{1}{\text{قا}^2\text{ص}}$

$\Leftarrow \text{ص}'' = -\text{جا}2\text{ص} \times \frac{1}{1+\text{ظا}^2\text{ص}} \Leftarrow \text{ص}'' = -\text{جا}2\text{ص} \times \frac{1}{1+\text{س}^2}$

$\Leftarrow \text{ص}''(1+\text{س}^2) = -\text{جا}2\text{ص}$

مثال: س + ص = س ص، أثبت أن $ص'' = \frac{2ص^3}{س^3}$

الحل:

س + ص = س ص ⟸ س = س ص − ص

⟸ س = ص (س − 1) ⟸ $ص = \frac{س}{س - 1}$ نشتق

⟸ $ص' = \frac{(س - 1)(1) - (س)(1)}{(س - 1)^2}$ ⟸ $ص' = \frac{س - 1 - س}{(س - 1)^2}$

⟸ $ص' = \frac{-1}{(س - 1)^2}$

⟸ $ص'' = \frac{2(س - 1)}{(س - 1)^4} = \frac{2}{(س - 1)^3}$

$ص'' = \frac{2ص^3}{س^3}$

من السؤال:

$ص = \frac{س}{س - 1}$

$س - 1 = \frac{س}{ص}$ نكعب

$(س - 1)^3 = \frac{س^3}{ص^3}$

مثال: إذا كان جاص = ظاس أثبت أن: $ظاص = \frac{ص''}{2قا^2س + (ص')^2}$

الحل: نشتق الطرفين ⟸ جتاص × ص' = قا²س نشتق مرة أخرى

⟸ جتاص × ص'' + ص' × −جاص × ص' = 2 قاس × قاس ظاس

نستبدل قا²س بـ جتاص ص' ⟸ جتاص × ص'' − جاص × (ص')² = 2 جتاص ص' ظاس

بالقسمة على جتاص ⟸ ص'' − ظاص × (ص')² = 2قا²س ظاص

⟸ ص'' = 2قا²س ظاص + ظاص × (ص')²

⟸ ص'' = ظاص (2قا²س + (ص')²)

⟸ $ظاص = \frac{ص''}{2قا^2س + (ص')^2}$

مثال: إذا كانت جتاص = جاس أثبت أن: $\dfrac{ص''}{1-(ص')^2} = \text{ظتاص}$

الحل: نشتق ⇐ $-\text{جاص} \times ص' = \text{جتاس}$ ⇐ $ص' = \dfrac{-\text{جتاس}}{\text{جاص}}$ | نشتق مرة أخرى

⇐ $-\text{جاص} \times ص'' + ص' \times -\text{جتاص} \times ص' = -\text{جاس}$ نقسم على (− جاص)

⇐ $ص'' + (ص')^2 \times \dfrac{\text{جتاص}}{\text{جاص}} = +\dfrac{\text{جاس}}{\text{جاص}}$ وبما أن جاس = جتاص

∴ $ص'' + (ص')^2 \times \text{ظتاص} = \dfrac{\text{جتاص}}{\text{جاص}}$ ⇐ $ص'' + (ص')^2 \times \text{ظتاص} = \text{ظتاص}$

⇐ $ص'' = \text{ظتاص} - (ص')^2 \times \text{ظتاص}$

⇐ $ص'' = \underbrace{\text{ظتاص}}_{\text{عامل مشترك}}\left(1-(ص')^2\right)$ ⇐ $\text{ظتاص} = \dfrac{ص''}{1-(ص')^2}$

سؤال: س = ظتاص أثبت أن: $ص''(1+س^2) = \text{جا}2ص$

مثال: إذا كانت $\sqrt{س} + \sqrt{ص} = 2$ أثبت أن $\dfrac{د^2ص}{دس^2} = \dfrac{1}{س\sqrt{س}}$

الحل: نشتق الطرفين ⇐ $\dfrac{1}{2\sqrt{س}} + \dfrac{1}{2\sqrt{ص}}\dfrac{دص}{دس} = 0$

⇐ $\dfrac{1}{2\sqrt{ص}}\dfrac{دص}{دس} = \dfrac{-1}{2\sqrt{س}}$ ⇐ $\dfrac{دص}{دس} = \dfrac{-\sqrt{ص}}{\sqrt{س}}$

$$\frac{د^2ص}{دس^2} = \frac{\sqrt{س} \times \dfrac{-1}{2\sqrt{ص}}\dfrac{دص}{دس} - (-\sqrt{ص}) \times \dfrac{1}{2\sqrt{س}}}{س}$$

$$= \frac{1}{س} \times \left(\frac{-1}{2\sqrt{ص}} \times \sqrt{س} \times \frac{-\sqrt{ص}}{\sqrt{س}} + \sqrt{ص} \times \frac{1}{2\sqrt{س}}\right) = \frac{1}{س} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{ص}}{2\sqrt{س}}\right)$$

$$= \frac{1}{س} \times \frac{\sqrt{س} + \sqrt{ص}}{2\sqrt{س}} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}س\sqrt{س}} = \frac{1}{س\sqrt{س}}$$

مثال: اذا كانت $ص = \sqrt{س + ص}$ ، أثبت أن: $ص''(٢ص - ١)^٣ = -٢$

الحل: $ص^٢ = س + ص$ نشتق

$٢ص ص' = ١ + ص' \Leftarrow ٢ص ص' - ص' = ١ \Leftarrow ص'(٢ص - ١) = ١$

$\Leftarrow ص' = \dfrac{١}{٢ص - ١}$

$ص'' = \dfrac{-١ \times ٢ص'}{(٢ص - ١)^٢} \Leftarrow ص'' = \dfrac{-١ \times ٢\left(\dfrac{١}{٢ص - ١}\right)}{(٢ص - ١)^٢}$

ضربنا تبادلي

$\Leftarrow ص'' = \dfrac{-٢}{(٢ص - ١)^٣} \Leftarrow \therefore ص''(٢ص - ١)^٣ = -٢$

مثال: اذا كانت $ص = \dfrac{ظاس}{س}$ ، أثبت أن $س ص'' + ٢ص' - ٢س ص - ٢س^٣ ص^٣ = ٠$

الحل: $س ص = ظاس$ نشتق

$س ص' + ص = قا^٢س$ نشتق مرة أخرى

$س ص'' + ص'(١) + ص' = ٢قاس \times قاس ظاس$

$\Leftarrow س ص'' + ٢ص' = ٢قا^٢س ظاس$

$\Leftarrow س ص'' + ٢ص' = ٢(١ + ظا^٢س) ظاس$

$\Leftarrow س ص'' + ٢ص' = ٢(١ + س^٢ص^٢) س ص$

$\Leftarrow س ص'' + ٢ص' = ٢س ص + ٢س^٣ ص^٣$

$\Leftarrow س ص'' + ٢ص' - ٢س ص - ٢س^٣ ص^٣ = ٠$

مثال: اذا كانت $س = جتاص$ ، أثبت أن: $\dfrac{ص''}{(ص')^٢} = -ظتاص$

الحل: نشتق الطرفين $\Leftarrow ١ = -جاص ص' \Leftarrow ص' = \dfrac{-١}{جاص} = -قتاص$

$\Leftarrow$ نشتق مرة أخرى $\Leftarrow ص'' = -(-قتاص ظتاص \times ص') \Leftarrow ص'' = قتاص ظتاص ص'$

$\Leftarrow ص'' = -ص' ظتاص \times ص' = -(ص')^٢ ظتاص$

$ص'' = -(ص')^٢ ظتاص$ نقسم الطرفين على $(ص')^٢$

$\Leftarrow \dfrac{ص''}{(ص')^٢} = -ظتاص$