



امتحان المستوى الثالث

مدارس فرسان الأردن

الإجابات

العام الدراسي ٢٠١٦/٢٠١٧

العلامة (١٠٠ /)

المبحث : رياضيات

الصف: الثاني ثانوي علمي

المعلم : مهند المجالي

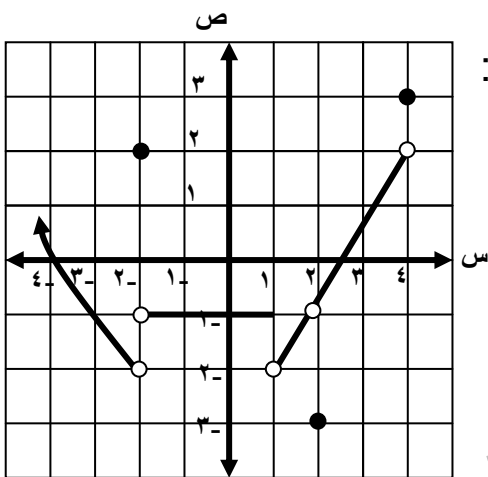
ملاحظة: اجب عن الأسئلة الآتية جميعها وعددها (٦) ، علما بأن عدد أوراق الإمتحان (٤)

(١٣ علامة)

السؤال الاول :

(أ) من الشكل المجاور الذي يمثل منحنى

ق(س) : س معرف على الفترة (- ∞ ، ٤] ، أجب عما يلي :



(١) جد قيم أ التي يكون نهـا ق(س) غير موجودة

الحل : أ $\{ -٢ ، ١ ، ٤ \}$

(٢) جد قيم ل التي يكون نهـا ق(س) = -١

الحل : ل $\{ -٢ ، ٣ \}$ ، $\{ -١ ، ٢ \}$

(٣) جد ناتج نهـا (س) ق(٢س) + ٥ - (ق(١-))

الحل : نهـا س × نهـا ق(ص) + ٥ - (٢) = ١ - ٥ + ٠ × ٢ = ١ - ٥ = -٤

(٤) جد قيم م التي يكون عندها ق(س) غير متصل

الحل : م $\{ -٢ ، ١ ، ٢ ، ٤ \}$

(٥) جد ناتج ق(٠) = صفر (ثابت) ، ق(٢) غير موجودة (انفصال)

(ب) إذا كان نهـا ق(٦-س) = ل ، نهـا ق(س) + ٣س + ل = ١٢ ، جد قيم ل

الحل : نهـا ق(ص) = ل ← ل + ١٢ + ١٢ = ل + ١٢ ← ل = ٠ ← ل = ١ ، ل = ٠

(ج) إذا كان المستقيم ص = ٣س + ١ عاموديا على منحنى ق(س) عند النقطة (١- ، ق(١-)) ، فجد ق(٣) / (١-)

الحل : ق(٣) / (١-) = (٣ × ق(١-) × ٣) / (١-) = ١٦ ، لكن ق(١-) = ٤ ، ق(١-) / (١-) = ١/٣

السؤال الثاني :

(٢٣ علامة)

$$\left. \begin{array}{l} [س + ٣] ، \quad ٢- > س \geq ٠ \\ |٢(س-٢)| ، \quad ٢ \geq س > ٠ \\ ١- > س > ٢- ، \quad ١ \\ ٠ > س \geq ١- ، \quad ٢ \\ ٠ = س ، \quad ٣ \\ ٢ \geq س > ٠ ، \quad ٢(س-٢) \end{array} \right\} = (س) \text{ إذا كان ق(س) = } \left\{ \begin{array}{l} \text{نعيد تعريف ق(س)} \\ \text{ق(س)} \end{array} \right.$$

(٢-، ١-) // ١ ثابت متصل ، (٠، ١-) // ٢ ثابت متصل ، (٢، ٠) // (س-٢) ٣ كثير حدود متصل

ق(١-) = ٢ ، نهاق ق(س) = ٢ ، نهاق ق(س) = ١ ، غير متصل عند س = ١-

ق(٠) = ٣ ، نهاق ق(س) = ٢ ، نهاق ق(س) = ١ ، غير متصل عند س = ٠

إذا ق(س) متصل على الفترة (٢-، ٠) - {٠، ١-}

(ب) إذا كان نهقا $\frac{\text{جا } \pi(س+هـ) - \text{جا } \pi س}{هـ}$ = صفر ، جد قيم س ، حيث س تنتمي للفترة [٢، ٠]

الحل : ق(س) = جا(س) ، المطلوب قيم التي تجعل ق'(س) = صفر ، نشتق الأقران

ق'(س) = ٢ جا(س) جتا(س) = $\pi \times \pi$ جا(٢س) = صفر

$$\pi س^٢ = \text{صفر} \leftarrow س = \text{صفر} ، \pi س^٢ = \pi \leftarrow س = \frac{١}{\pi} ، \pi س^٢ = \pi^٢ \leftarrow س = ١$$

$$\pi س^٢ = \pi^٣ \leftarrow س = \frac{\sqrt[٣]{\pi}}{\pi} ، \pi س^٢ = \pi^٤ \leftarrow س = \sqrt[٤]{\pi} ، س = ٢ ، س \in \{٠، \frac{١}{\pi}، ١، \frac{\sqrt[٣]{\pi}}{\pi}، ٢\}$$

(ج) إذا علمت أن نهقا $\frac{١ - \text{جتا ب س}}{س}$ = ١٨ ، جد قيمة أ ، ب ؟

الحل : نعوض $\frac{١ - \text{جتا ب س}}{س}$ = ١٨ ، بما أن النهاية موجودة البسط أ - ١ = صفر ، أ = ١

نهقا $\frac{١ - \text{جتا ب س}}{س}$ = ١٨ ، نضرب بالمرافق (١ + جتا ب س) ينتج ب = ± ٦



(د) جد كلا من النهايات التالية :

(٩ علامات)

$$(1) \text{ نهـا } \frac{\sqrt[3]{5s+17} - 3}{s \left(\sqrt[3]{5s+17} - 2 \right)}$$

$$\frac{6}{27} \times \frac{9 + \sqrt[3]{5s+17} + 3 + \sqrt[3]{(5s+17)^2}}{3 + \sqrt[3]{5s+17}} \times \frac{\sqrt[3]{5s+17} - 3}{s \left(\sqrt[3]{5s+17} - 2 \right)}$$

$$\frac{6}{27} \times \frac{10 - 5s}{s^2 - 4} \text{ نهـا } = \frac{6}{27} \times \frac{27 - 17 + 5s}{s^2 - 9} \text{ نهـا}$$

$$\frac{5}{18} = \frac{6}{27} \times \frac{5}{4} = \frac{6}{27} \times \frac{(2-s)^5}{(2+s)(2-s)^2} \text{ نهـا}$$

$$(2) \text{ نهـا } \frac{\text{جا } 2\text{س} - \text{جا } 2}{\text{س}}$$

$$\text{نهـا } \frac{\text{جا } 2\text{س} - \text{جا } 2}{\text{س}} = \frac{\text{جا } 2\text{س} - \text{جا } 2}{\text{س}}$$

$$\text{نهـا } \frac{\text{جا } 2\text{س} - \text{جا } 2}{\text{س}} = \frac{1 + \text{جا } 2\text{س}}{1 + \text{جا } 2\text{س}} \times \frac{(1 - \text{جا } 2\text{س})}{(1 - \text{جا } 2\text{س})}$$

$$\text{نهـا } \frac{\text{جا } 2\text{س} - \text{جا } 2}{\text{س}} = 1 - \text{جا } 2\text{س}$$

$$(3) \text{ نهـا } \frac{1 - \sqrt[2]{\text{جتا } \pi\text{س}}}{\frac{1}{4} \text{ قا } \pi\text{س} - 2}$$

$$\text{نهـا } \frac{1 - \sqrt[2]{\text{جتا } \pi\text{س}}}{\frac{1}{4} \text{ قا } \pi\text{س} - 2} = \frac{1 - \sqrt[2]{\text{جتا } \pi\text{س}}}{\frac{1}{4} \text{ قا } \pi\text{س} - 2} \times \frac{\text{جتا } \pi\text{س}}{\text{جتا } \pi\text{س}}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{(1 - \sqrt[2]{\text{جتا } \pi\text{س}})(\text{جتا } \pi\text{س})}{\frac{1}{4} (\text{جتا } \pi\text{س} - 1)(\text{جتا } \pi\text{س} + 1)}$$

$$\text{نهـا } \frac{(\text{قا } \pi\text{س} - \sqrt[2]{\text{جتا } \pi\text{س}})(\text{جتا } \pi\text{س})}{\frac{1}{4} \text{ قا } \pi\text{س} - 2}$$

← طريقة اخرى اقسام و ضرب البسط جتا π س

هـ) إذا كان ق (س) = س^٣ ، هـ (٢) = ٣ ، هـ' (٢) = ٢- ، هـ'' (٢) = ٥- ، احسب قيمة (ق' هـ)'' (٢) .

$$\text{الحل: (ق هـ) (س) = (ق' (هـ) (س))'' \leftarrow \text{نشق' (ق' (هـ) (س))} \times \text{هـ' (س)}$$

$$\leftarrow \text{نشق ضرب ق' (هـ) (س)} \times \text{هـ'' (س)} + \text{ق'' (هـ) (س)} \times \text{هـ' (س)} \leftarrow \text{نعوض (٢)}$$

$$\leftarrow \text{ق'' (هـ) (٢)} \times \text{هـ' (٢)} + \text{ق' (هـ) (٢)} \times \text{هـ'' (٢)}$$

$$\leftarrow \text{ق' (٢)} \times \text{هـ'' (٢)} + \text{ق'' (٢)} \times \text{هـ' (٢)}$$

$$\leftarrow ٦٦ - = ٢٤ + ٩٠ - = ٢(٢-) \times ٦ + ٥- \times ١٨$$

$$\text{ق (س) = س}^٣$$

$$\text{ق' (س) = ٣س}^٢$$

$$\text{ق'' (س) = ٦س}$$

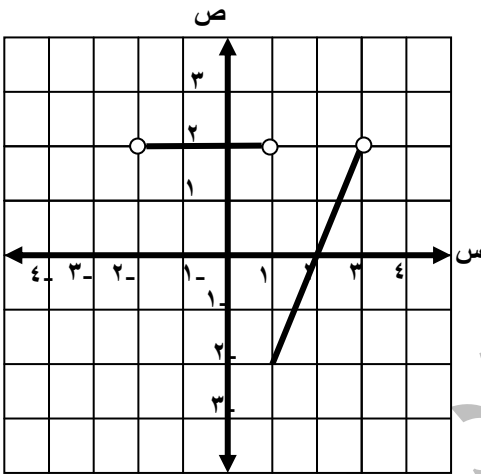
$$\text{ق''' (٣) = ١٨}$$

$$\text{ق'''' (٣) = ٦}$$

(١٥ علامة)

السؤال الثالث:

أ) الشكل المجاور يمثل منحنى الأقتران ق' (س) ، حيث ق (س) متصل على الفترة [٢- ، ٣] ، (٧ علامات)



$$\left. \begin{array}{l} \text{ل س} + \text{ج} \\ \text{ق (س) = } \left. \begin{array}{l} \text{م س}^٢ + \text{هـ س} - \text{ب} \\ \text{ج د} \end{array} \right\} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{٢-} \leq \text{س} < ١ \\ \text{٣} \geq \text{س} \geq ١ \end{array}$$

(١) فترات التناقص للأقتران ق (س)

(٢) النقاط الحرجة للأقتران ق' (س)

(٣) قيم كل من الثوابت ل ، ج ، م ، هـ ، ب ، علما بأن ق (٠) = ١

الحل :

(١) فترات التناقص للأقتران ق (س) [٢ ، ١]

(٢) النقاط الحرجة للأقتران ق' (س) (١ ، ٢-)

$$\left. \begin{array}{l} \text{ل} \\ \text{١} > \text{س} > ٢- \\ \text{م س}^٢ + \text{هـ س} - \text{ب} \\ \text{٣} > \text{س} \geq ١ \end{array} \right\} \text{ق' (س)}$$

قيمة ل = ٢ (من الرسم) ، ق (٠) = ١ ← ج = ١ ،

$$\text{ق' (٢) = ٠} \leftarrow \text{م} + \text{هـ} = ٠ ، \text{ق' (١) = ٢-} \leftarrow \text{م} + \text{هـ} = ٢- ، \text{ينتج م} = ١ ، \text{هـ} = -٤$$

لإيجاد قيمة ب ق (س) متصل عند س = ١ ، نهـ ق (س) = نهـ ق (س) ، ينتج ب = -٦

$$\text{س} \leftarrow ١ \quad \text{س} \leftarrow -١$$

(٥ علامات)

ب) إذا كان $s = 1 + \text{جا ص}$ ، أثبت أن : $\frac{\text{ص}''}{(\text{ص})'} = \text{ظا ص}$

البرهان: نشتق $\leftarrow 1 = \text{جتا ص}' (\div \text{جتا ص}) \leftarrow \text{ص}' = \text{قا ص} \leftarrow \text{نشتق} \leftarrow \text{ص}'' = \text{قا ص ظا ص}'$

لكن $\text{ص}' = \text{قا ص} \leftarrow \text{ص}'' = \text{ظا ص} (\text{ص}')' \leftarrow \frac{\text{ص}''}{(\text{ص}')'} = \text{ظا ص}$

ج) إذا كان $\text{ق} (أ + ب) = \text{ق} (أ) \times \text{ق} (ب)$ ، وكان $\text{ق} (٠) = ١$ ، أثبت أن $\text{ق} (س) = \text{ق}' (س)$

حسب تعريف المشتقة الأولى $\text{ق}' (س) = \lim_{\text{ه} \rightarrow ٠} \frac{\text{ق} (س + \text{ه}) - \text{ق} (س)}{\text{ه}}$ ، نبدأ

$\text{ق}' (س) = \lim_{\text{ه} \rightarrow ٠} \frac{\text{ق} (س) (\text{ق} (١ - \text{ه})) - \text{ق} (س)}{\text{ه}}$ لكن $\text{ق} (٠) = ١ \leftarrow \text{ق}' (س) = \lim_{\text{ه} \rightarrow ٠} \frac{\text{ق} (س) (\text{ق} (١ - \text{ه})) - \text{ق} (س)}{\text{ه}}$

$\text{ق}' (س) = \text{ق} (س) \times \text{ق}' (٠) = ١$ (حسب تعريف المشتقة) لكن $\text{ق}' (٠) = ١ \leftarrow \text{ق}' (س) = \text{ق} (س)$

(١٥ علامة)

السؤال الرابع:

أ) أوجد قياس الزاوية بين مماسي الاقترانين $\text{ق} (س) = \frac{\text{س}^2}{3\sqrt{2}}$ ، $\text{ه} (س) = \text{س} + 3$ عندما $\text{س} = 1$ ؟

الحل : المطلوب الزاوية المحصور بين المماسين $\text{ق} (س)$ و $\text{ه} (س)$ \leftarrow نحسب زاوية كل مماس

$\text{ق}' (س) = \frac{\text{س}^2}{3\sqrt{2}} \leftarrow \text{ق}' (1) = \frac{1}{3\sqrt{2}}$ ، $\text{م} = \text{ظا ه} \leftarrow \text{ه} = 30^\circ$

$\text{ه}' (س) = 1 \leftarrow \text{ه}' (1) = 1$ ، $\text{م} = \text{ظا ه} \leftarrow \text{ه} = 45^\circ$

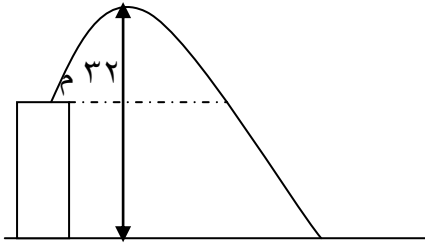
الزاوية المحصورة = $45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$



(ب) قذفت كره رأسيا الى أعلى من سطح بناية ترتفع (٤٠ م) عن سطح الارض ، فكان ارتفاعه في أي لحظة
 ف(ن) = ع. ن - ٨ ن^٢ ، ع. < صفر، فإذا كان أقصى ارتفاع وصل إليه الكرة عن سطح الارض ٧٢ م ، فجد :

(١) سرعة الكرة لحظة وصولها الى الارض

(٢) المسافة التي يقطعها بعد ثانييتين من اقصى ارتفاع



الحل : نحسب اقصى ارتفاع من سطح البناية ٧٢ م - ٤٠ م = ٣٢ م

ع(ن) = ع. ن - ٨ ن^٢ ، عند اقصى ارتفاع ع(ن) = صفر ← ع. = ١٦ ن نعوض في المسافة

ف(ن) = ١٦ ن × ن - ٨ ن^٢ ← ف(ن) = ١٦ ن^٢ - ٨ ن^٢ ← ف(ن) = ٨ ن^٢ (عند اقصى ارتفاع)

٨ ن^٢ = ٣٢ (٨ ÷) ← ن^٢ = ٤ ← ن = ٢ ← ع. = ٢ × ١٦ = ٣٢

ف(ن) = ٨ ن^٢ - ٣٢ ← لإيجاد سرعة الكرة لحظة وصولها الى الأرض يجب ان نحسب الزمن لقطع (- ٤٠ م)

٨ ن^٢ - ٣٢ = ٤٠ ← ٨ ن^٢ - ٣٢ - ٤٠ = ٠ ← ٨ ن^٢ - ٧٢ = ٠ ← ن = ٠ ← ن = ٣

ع(ن) = ١٦ ن - ٣٢ = ٥ ← ع(٥) = ٥ × ١٦ - ٣٢ = ٤٨ م / ث

لحساب المسافة المقطوعة بعد ثانيين من اقصى ارتفاع ← زمن الوصول الى اقصى ارتفاع ثانييتين

الزمن : ٢ + ٢ = ٤ ثوان ، ف(٤) = ٨ × ٤ - ٣٢ = ٤ (صفر) اي ان الجسم ه صا ، الى مستوى سطح البناية)

اي ان الجسم على ارتفاع ٤٠ م من سطح الأرض

(ج) إذا كان |س| ≥ ٢ ، أثبت باستخدام القيم القصوى أن |س^٣ - س| ≥ ٢

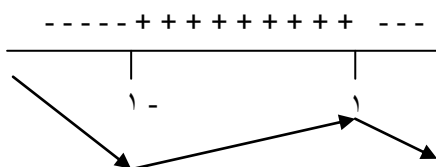
الحل :

|س| ≥ ٢ ← - ٢ ≤ س ≤ ٢ ،

|س^٣ - س| ≥ ٢ ← - ٢ ≤ س^٣ - س ≤ ٢ ، أي ان الاقتران محصور بين - ٢ و ٢

نسمي ق(س) = س^٣ - س ، نشق الاقتران ← ق'(س) = ٣س^٢ - ١ ، نسوي ق'(س) = ٠

٣س^٢ - ١ = ٠ ← س^٢ = ١/٣ ← س = ١/√٣ ، ضمن الفترة [- ٢ ، ٢]



عند س = ١ - قيمة صغرى محلية صورتها ق(١-) = - ٢

عند س = ١ = قيمة عظمى محلية صورتها ق(١) = ٢

السؤال الخامس :

(١٩ علامة)

(أ) جد مساحة المثلث المكون من محور السينات و المماس و العمودي على المماس لمنحنى ق(س) = جا ٢س عند النقطة التي يصنع المماس عندها زاوية قياسها $(\frac{\pi}{3})$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات في الفترة $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ ؟

$$\begin{aligned} \text{الحل: ق/س) = } 2 \text{ جتا } 2\text{س} &\leftarrow \text{ ق/س) = } \frac{\pi}{3} \text{ ظا} &\leftarrow 2 \text{ جتا } 2\text{س} = \sqrt{3} &\leftarrow \text{ جتا } 2\text{س} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2\text{س} = \frac{\pi}{6} &\leftarrow \text{ س} = \frac{\pi}{12} &\leftarrow \text{ ق(} \frac{\pi}{12} \text{) = } \frac{\pi}{6} &\leftarrow \frac{1}{2} = \text{ جتا } \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\leftarrow \text{ معادلة المماس : ص} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \text{ ق(} \frac{\pi}{12} - \text{س) } \leftarrow \text{ تقاطعه مع محور السينات ص} = 0 \leftarrow \text{ س} = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\leftarrow \text{ معادلة العمودي : ص} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \text{ ق(} \frac{\pi}{12} - \text{س) } \leftarrow \text{ تقاطعه مع محور السينات ص} = 0 \leftarrow \text{ س} = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\leftarrow \text{ طول القاعدة} = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6} \text{ ، الارتفاع} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{مساحة المثلث} = \frac{1}{2} \times \text{القاعدة} \times \text{الارتفاع} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{6} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{12\sqrt{3}}$$

(ب) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث أن المسافة ف(ن) بالامتر التي يقطعها في زمن قدره (ن) ثانية بسرعة مقدرها ع(ن) هي $\sqrt{2 - \text{ع}}$ ، حيث $\text{ع} \neq \text{صفر}$ ، $\text{ف} < \text{صفر}$ جد تسارع الجسيم عندما يقطع مسافة قدرها (٩) م



الحل : نشق ضمني

$$\text{ع}^2 = \frac{\text{ع}}{\sqrt{2 - \text{ع}}} \text{ ، نجد السرعة من العلاقة الاصلية } \sqrt{2 - \text{ع}} = \frac{\text{ع}}{\sqrt{2 - \text{ع}}} \text{ ، نعوض ف} = 9$$

$$\leftarrow \text{ع}^2 = \sqrt{2 - \text{ع}} \text{ ، نرتب المعادلة } \leftarrow \text{ع}^2 + \text{ع} - 2 = 0 \leftarrow \text{ع} = 1 \text{ ، } \text{ع} = -2$$

$$\text{ع} = 1 \leftarrow \text{ع} = 2 \times \frac{3}{9} = \frac{2}{3} \leftarrow \text{ع} = 2 \times \frac{1}{2} = 1 \leftarrow \text{ع} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$\text{ع} = 1 \leftarrow \text{ع} = 2 \times 1 \times 2 = 4 \leftarrow \text{ع} = 2 \leftarrow \text{ع} = 2 \leftarrow \text{ع} = 2 \leftarrow \text{ع} = 2 \leftarrow \text{ع} = 2$$

(ج) اذا كان ق (س) = $2س^2 - \sqrt{س}$ ، أوجد:

(١) الفترات التي يكون فيها الاقتران ق (س) متزايد .

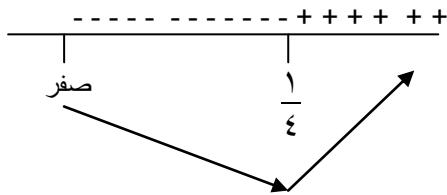
(٢) القيم العظمى والصغرى المحلية للاقتران ق (س) .

الحل : المجال الأقران ق(س) $(0, \infty)$ ، نشتق الاقتران ق(س)

$$ق'(س) = 4س - \frac{1}{2\sqrt{س}} ، نسوي المشتقة بالصفر ← 4س = \frac{1}{2\sqrt{س}} ← س = \frac{1}{4}$$

فترات التزايد : $[\frac{1}{4}, \infty)$

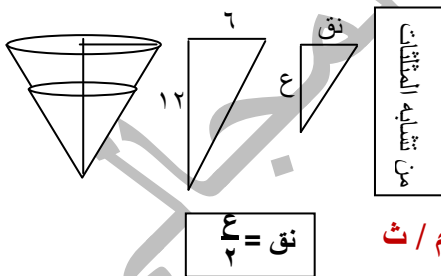
عند $س = \frac{1}{4}$ قيمة صغرى محلية مطلقة



(١٥ علامة)

السؤال السادس :

(أ) استخدم معلم الكيمياء في احدى التجارب قمع على شكل مخروط قطر قاعدته ١٢ سم وارتفاعه ١٢ سم قاعدته افقيه ورأسه الى الاسفل ، إذا صب السائل فيه بمعدل (٦ سم^٣/ثانية) وفي اللحظة نفسها يخرج منه السائل بمعدل (٧ سم^٣/ثانية) ، فجد سرعه ارتفاع سطح السائل في القمع عندما يكون عمق السائل فيه ٦ سم؟

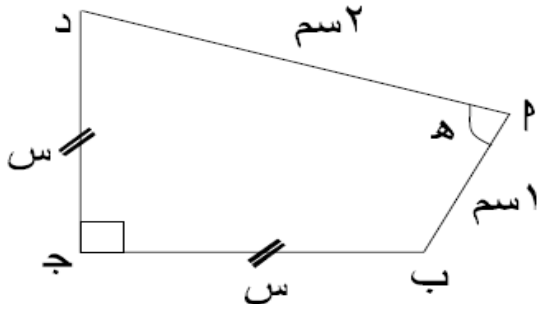


الحل : المطلوب $\frac{دع}{دن}$ ، $\frac{دع}{دن} = 7 - 16 = 9$ سم^٣/ثانية

$$ح = \frac{\pi}{3} \text{ نق}^3 ع ← ح = \frac{\pi}{3} \left(\frac{ع}{2}\right)^3 ← ح = \frac{\pi}{12} ع^3$$

$$\frac{دع}{دن} = \frac{\pi}{12} ع^2 \times \frac{دع}{دن} ← ع = 6 ← 9 = \frac{\pi}{4} \times 36 \times \frac{دع}{دن} ← \frac{دع}{دن} = \frac{1}{\pi} \text{ سم}^3 / \text{ث}$$

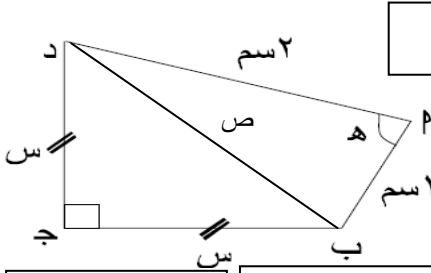




ب) معتمداً على الشكل المجاور جد قيمة س لتكون مساحة المثلث د ج ب أكبر ما يمكن ؟

الحل : المطلوب قيمة س ،

مساحة الشكل = مساحة المثلث د ج ب + مساحة المثلث د أ ب



$$٢ س^٢ = ٥ - ٤ جتا هـ$$

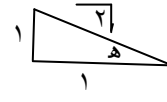
$$م = \frac{1}{٢} س \times س + \frac{1}{٢} \times ٢ \times ١ \times جتا هـ$$

$$م = \frac{1}{٢} س^٢ + جتا هـ \leftarrow \text{لكن } س^٢ = ٥ - ٢ جتا هـ$$

$$م = ١,٢٥ - جتا هـ + جتا هـ \leftarrow \text{نشق بالنسبة لـ هـ}$$

$$\frac{د م}{د هـ} = جتا هـ + جتا هـ, \leftarrow \frac{د م}{د هـ} = صفر, - جتا هـ = جتا هـ$$

$$\leftarrow \frac{ج ا هـ}{ج ت ا هـ} = ١ - \leftarrow جتا هـ = \frac{١}{٢}, \text{ هـ منفرجة } \leftarrow س = \sqrt{\frac{٥}{٢} + ٢}$$



من المثلث د ج ب

$$ص^٢ = ٢ = ٢ س^٢$$

من المثلث د أ ب

حسب قانون جتا

$$ص^٢ = ٥ - ٤ جتا هـ$$