الوحدة : التكامل وتطبيقاته — الدرس : التكامل المحدود

(التكامل المحدود)

- حساب
- خصائص
  - جبرية
  - الاضافة
  - المقارنة

[١] حساب التكامل المحدود .

تعريف . اذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً على [أ، ب] م(س) معكوساً لمشتقة الاقتران ق ، يسمى

$\int_{أ}^{ب} \text{ق(س) دس}$ بالتكامل المحدود حيث

$$\int_{أ}^{ب} \text{ق(س) دس} = \int_{أ}^{ب} \text{م}'\text{(س) دس} = \text{م(س)}\Big]_{أ}^{ب}$$

$$= \text{م (ب) - م (أ)} .$$

باختصار .

بعد حساب ناتج التكامل نعوض الحد العلوي ونطرح منه الحد السفلي (تعويض)

حساب

- مباشرة
- معطيات ومطلوب
- ثوابت

[١] الاسئلة المباشرة .

* نفس الاسئلة التي وردت في الدرس الثاني " التكامل غير المحدود " الا انه يقوم باعطائنا حدود للتكامل

مثال . اوجد $\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \text{جا}^2\text{س دس}$

الحل .

$$\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \text{جا}^2\text{س دس} = \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\left(1 - \text{جتا٤س}\right)\text{دس}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \text{١ - جتا٤س دس}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\text{س} - \frac{\text{جا٤س}}{4}\right)\Big]_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\text{جا}\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\text{جا}\frac{\pi}{2}}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right)$$

$= \frac{٨}{٨} - \frac{٨}{١٦} + \frac{٨}{٨}$

$= \boxed{\frac{٨}{١٦} + \frac{١}{٨}}$. وهذا جواب التكامل النهائي .

* نلاحظ أن :

(١) جواب التكامل المحدود دائماً ثابت .

⇐ قيمة التكامل المحدود ثابتة .

(٢) نعتمد في حساب التكامل المحدود على التكامل غير المحدود .

(٣) لا نقوم بإضافة الحد الثابت جـ عند اجراء التكامل المحدود وبدلاً من ذلك نعوض الحد العلوي - تعويض الحد السفلي في ناتج التكامل .

مثال ٢ . جد $\int_{-١}^{٣} ٣س^٢ - ٥س + ٢ \, دس$

الحل -

مثال ٣ . جد $\int_{٥}^{١٧} دس$.

الحل : $\int_{٥}^{١٧} دس = س \Big]_{٥}^{١٧}$

$= ١٧ - ٥ = ١٢$.

مثال ٤ . جد $\int_{٣}^{٦} -٢ \, دس$.

الحل $\int_{٣}^{٦} -٢ \, دس = -٢س \Big]_{٣}^{٦}$

$-٢×٦ - -٢×٣ = -١٢ - -٦$

$= -١٢ + ٦ = -٦$

مثال ٥ . جد $\int_{١}^{٥} م \, دس$ ، م ثابت

الحل . $\int_{١}^{٥} م \, دس = م س \Big]_{١}^{٥}$

$م×٥ - م×١ = م(٥-١)$

$= \boxed{٤×م}$.

الوحدة : التكامل وتطبيقاته
الدرس : التكامل المحدود

تعميم : التكامل المحدود للاقتران الثابت .

$$\int_{\text{م}}^{\text{ن}} \text{أ}\ \text{دس} = \text{أ}(\text{ن} - \text{م})$$

الثابت × (الحد العلوي - الحد السفلي) .

مثال : جد $\int_{5}^{16} \frac{\pi}{\sqrt{3}}\ \text{دس}$.

الحل .

تمارين اضافية .

١- $\int_{-3}^{6} (2\text{س} - 6)\ \text{دس}$. $\boxed{-27}$

الحل .

٢- $\int_{1}^{16} \frac{1}{\sqrt[3]{\text{س}}}\ \text{دس}$ $\boxed{\frac{3}{2}}$

الحل

٣- $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \text{قتاس ظتاس دس}$

الحل

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \text{قتاس ظتاس دس} = -\text{قتاس}\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= -\text{قتا}\frac{\pi}{3} - -\text{قتا}\frac{\pi}{6}$$

$$= -\left(\frac{1}{\text{جا}\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{\text{جا}\frac{\pi}{6}}\right)$$

$$= -\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 2\right) = 2 - \frac{2}{\sqrt{3}}$$

٤- $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \text{جاس جتاس دس}$. $\boxed{\frac{-1}{8}}$

الحل .

الوحدة : التكامل وتطبيقاته
الدرس : التكامل المحدود

* أسئلة المعطيات والمطلوب .

في هذا النوع من الأسئلة تكون بعض المعطيات متوفرة لغاية الاستفادة منها بعد الحل .

مثال ١ اذا كان ق(-٢) = ٨ ، ق(١) = ٣ جد $\int_{-٢}^{١}$ ق'(س) دس .

الحل . نبدأ بالمطلوب ثم نعوض المعطيات

$\int_{-٢}^{١}$ ق'(س) دس = ق(س) $\Big]_{-٢}^{١}$

= ق(١) - ق(-٢) = ٣ - ٨ = -٦ .

مثال ٢ - اذا كان م(س) ، هـ(س) معكوسين لمشتقة الاقتران ق(س) المتصل على [٣ ، ٥] وكان $\int_{٣}^{٥}$ (ق(س) - هـ(س)) دس = ٨ فأوجد $\int_{١}^{٤}$ س ~~ق~~م(س) - س هـ(س) دس

الحل .
تذكر ان ناتج طرح معكوسي مشتقة لاقتران ما دائماً يساوي عدد ثابت .

ق (س) - هـ(س) = $\underline{\underline{م}}$.

ولكن (تجهيز المعطيات)

$\int_{٣}^{٥}$ ق(س) - هـ(س) دس = ٨

$\int_{٣}^{٥}$ م دس = ٨

م (٥ - ٣) = ٨

٢م = ٨ ⟸ $\boxed{م = ٤}$

نعود الى المطلوب .

$\int_{١}^{٤}$ س ~~ق~~م(س) - س هـ(س) دس

= $\int_{١}^{٤}$ س (ق(س) - هـ(س)) دس

= $\int_{١}^{٤}$ س × م دس ولكن $\boxed{م = ٤}$

= $\int_{١}^{٤}$ ٤س دس

= $\dfrac{٤س^٢}{٢}\Big]_{١}^{٤}$

= ٢س^٢ $\Big]_{١}^{٤}$ = ٢(٤)^٢ - ٢(١)^٢

= ٣٢ - ٢ = $\boxed{٣٠}$

ملاحظة. مشتقة التكامل المحدود دائماً تساوي صفر.

مثل $\text{ص} = \int_{1}^{4} \text{ع(س)}\,\text{دس}$ جد $\text{ص}'$

$\text{ص}' = \text{صفر}$ ⇐ لان ص هي ناتج تكامل محدود ، وناتج التكامل المحدود يساوي ~~صفر~~ ثابت ومشتقة الثابت تساوي صفر.

مثال ٣. اذا كان $\text{ه(س)} = \int_{1}^{5} \sqrt{\text{س}^2+1}\,\text{دس}$ فأوجد $\text{ه}'(2)$.

الحل. $\text{ه(س)} = \int_{1}^{5} \sqrt{\text{س}^2+1}\,\text{دس}$

$\text{ه}'\text{(س)} = \text{صفر}$.

$\text{ه}'(2) = \text{صفر}$.

مثال ٤. (وزارة ٢٠١١) اذا كان $\text{ه(س)} = \int \left(\int_{0}^{-2} 4\,\text{دس} - 3\text{س}^2 \right) \text{دس}$

أوجد $\text{ه}'(1)$.

الحل. $\text{ه(س)} = \int \left(\int_{0}^{-2} 4\,\text{دس} - 3\text{س}^2 \right) \text{دس}$

$\text{ه}'\text{(س)} = \int_{0}^{-2} 4\,\text{دس} - 3\text{س}^2$

$\text{ه}'\text{(س)} = 4(-2-0) - 3\text{س}^2$

$\text{ه}'\text{(س)} = -8 - 3\text{س}^2$

$\text{ه}'(1) = -8 - 3(1)^2$

$= -8 - 3 = \boxed{-11}$

ملخص ...

مشتقة التكامل

غير المحدود ← يبقى ما داخل التكامل هو ناتج المشتقة

المحدود ← صفر.

أسئلة الثوابت

- الثابت مرئي
  - جد قاعدة ق(س)
- الثابت ضمن سياق السؤال
  - جد قاعدة كثير حدود من الدرجة ...

* في أسئلة ايجاد الثوابت تكون بعض المعلومات المعطاة مثل ...

- ناتج التكامل
- بعض الصور محددة ...
- مساواة وعودة للسؤال.
- :

مثال ١. وزارة (٢٠٠٣)

اذا كان

$$\int_{-١}^{٣} \left(٣س^٢ - ٢\int_{٠}^{ج} ٣م\, دم\right) دس = -٢٠$$

جد قيمة الثابت ج.

الحل. نجهز التكامل الداخلي.

$$\int_{٠}^{ج} ٣م\, دم = \left[\frac{٣م^٢}{٢}\right]_{٠}^{ج}$$

$$= \frac{٣ج^٢}{٢} - ٠ = \frac{٣ج^٢}{٢} \text{ (ثابت)}$$

التكامل الخارجي.

$$\int_{-١}^{٣} ٣س^٢ - ٢ \times \frac{٣ج^٢}{٢}\, دس = ٨$$

$$\int_{-١}^{٣} ٣س^٢ - ٣ج^٢\, دس = ٨$$

$$\left[س^٣ - ٣ج^٢ س\right]_{-١}^{٣} = ٨$$

$$٢٧ - ٩ج^٢ - (-١ + ٣ج^٢) = ٨$$

$$٢٧ - ٩ج^٢ + ١ - ٣ج^٢ = ٨$$

$$٢٨ - ١٢ج^٢ = ٨$$

$$\frac{\cancel{-١٢}ج^٢}{\cancel{-١٢}} = \frac{-٢٠}{-١٢}$$

$$ج^٢ = \frac{٥}{٣} \Rightarrow ج = \pm\sqrt{\frac{٥}{٣}}.$$

مثال ٢ـ اذا كان :

$\int ق(س)\, دس = س^٢ - ٤س + ٩$

وكان $\int_{-١}^{ب} ق(س)\, دس = ٧$ أوجد قيمة ب.

الحل. $\int_{-١}^{ب} ق(س)\, دس = \left[س^٢ - ٤س + ٩\right]_{-١}^{ب}$

$$ب^٢ - ٤ب + ٩ - (١ + ٤ + ٩) = ٧$$

$$ب^٢ - ٤ب + ٩ - ١٤ = ٧$$

$$ب^٢ - ٤ب - ١٢ = ٠$$

... $ب = ٦$ ، $ب = -٢$

مثال ٣. اذا كان ق(س) اقتران كثير حدود وكان ق(٠) = ٥ ، ق''(س) = ٤

$\int_{٠}^{١}$ ق(س) دس = ٣ فأوجد قاعدة الاقتران ق

الحل. ق''(س) = ٤ نكامل

$\int$ ق''(س) دس = $\int$ ٤ دس

ق'(س) = ٤س + جـ١ نكامل

$\int$ ق'(س) دس = $\int$ ٤س + جـ١ دس

ق(س) = ٢س٢ + جـ١س + جـ٢

[١] ق(٠) = ٥

⟸ ٠ + ٠ + جـ٢ = ٥

$\boxed{\text{جـ٢} = ٥}$

ق(س) = ٢س٢ + جـ١س + ٥

[٢] $\int_{٠}^{١}$ ق(س) دس = ٣

$\int_{٠}^{١}$ ٢س٢ + جـ١س + ٥ دس = ٣

$\left[\frac{٢}{٣}\text{س}^{٣} + \frac{\text{جـ١}}{٢}\text{س}^{٢} + ٥\text{س}\right]_{٠}^{١} = ٣$

$\frac{٢}{٣} + \frac{\text{جـ١}}{٢} + ٥ - (٠) = ٣$

$\frac{٢}{٣} + \frac{\text{جـ١}}{٢} + ٥ = ٣$

$\frac{١٧}{٣} + \frac{\text{جـ١}}{٢} = ٣$

$\frac{\text{جـ١}}{٢} = \frac{-٨}{٣}$

$\text{جـ١} = \frac{-١٦}{٣}$

قاعدة الاقتران ق(س) هي

$\text{ق(س)} = ٢\text{س}^{٢} - \frac{١٦}{٣}\text{س} + ٥$.

مثال ٤. جد قاعدة كثير الحدود من الدرجة الاولى بحيث يكون

$\int_{-١}^{١}$ ق(س) دس = ٤ ، $\int_{١}^{٣}$ ق(س) دس = ٢ .

الحل. كثير حدود من الدرجة الاولى

ق(س) = أ س + ب

[١] $\int_{-١}^{١}$ ق(س) دس = ٤

$\int_{-١}^{١}$ أس + ب دس = ٤

$\left[\frac{\text{أ}}{٢}\text{س}^{٢} + \text{ب س}\right]_{-١}^{١} = ٤$

$\frac{\text{أ}}{٢} + \text{ب} - \left(\frac{\text{أ}}{٢} - \text{ب}\right) = ٤$

الاستاذ احمد اخميس ٠٧٧٥٢٠٤٧١٩
صفحة الاستاذ احمد اخميس - رياضيات علمي و ادبي

$$\frac{م}{٢} + ب - \frac{م}{٢} + ب = ٤$$

$$٢ب = ٤ \qquad \boxed{ب = ٢}$$

[٣] $\int_{١}^{٣} د(س)\, دس = ٢$

$$\int_{١}^{٣} م س + ٢\, دس = ٢$$

$$\left[\frac{م س^{٢}}{٢} + ٢س\right]_{١}^{٣} = ٢$$

$$\frac{٩م}{٢} + ٦ - \left(\frac{م}{٢} + ٢\right) = ٢$$

$$\frac{٩م}{٢} + ٦ - \frac{م}{٢} - ٢ = ٢$$

$$\frac{٨م}{٢} + ٤ = ٢$$

$$\frac{\cancel{٤}م}{\cancel{٤}} = \frac{-٢}{٤} \qquad \boxed{م = \frac{-١}{٢}}$$

$$د(س) = \frac{-١}{٢} س + ٢ .$$

مثال ٨) وزارة (...٢)

اذا كان ن عدداً صحيحاً موجباً فما هي مجموعة قيم ن بحيث أن

$$\int_{-١}^{١} س^{ن}\, دس = ٢ \int_{٠}^{١} س^{ن}\, دس .$$

الحل .

$$\int_{-١}^{١} س^{ن}\, دس = ٢ \int_{٠}^{١} س^{ن}\, دس$$

$$\left[\frac{س^{ن+١}}{ن+١}\right]_{-١}^{١} = ٢ \left[\frac{س^{ن+١}}{ن+١}\right]_{٠}^{١}$$

$$\frac{١}{ن+١} - \frac{(-١)^{ن+١}}{ن+١} = \frac{٢(١)^{ن+١}}{ن+١}$$

$$\frac{١ - (-١)^{ن+١}}{ن+١} = \frac{٢(١)}{ن+١}$$

$$ن \neq -١$$

$$١ - (-١)^{ن+١} = ٢$$

$$-(-١)^{ن+١} = ١$$

$$(-١)^{ن+١} = -١$$

$\Leftarrow$ ن+١ كاملة كأس هي عدد فردي

$\Leftarrow$ ن هي عدد زوجي

$$ن = \{٢ ، ٤ ، ٦ ، ...\}$$

مجموعة الاعداد الطبيعية (الزوجية) .

تمرين ١ -

اوجد قيمة الثابت م فيما يأتي

١- $\int_{١}^{٣} م \, دس = ٨$

الحل .

٢- $\int_{م}^{٢م} ٣ \, دس = ٦$

الحل .

٣- $\int_{م+١}^{٢+٣م} م \, دس = ٤٠$

تمرين ٢ - وزارة ٢٠٠٩

اذا كان ق اقتراناً متصلاً على مجاله وكان $\int ق(س) \, دس = قا^٢ س - ظا^٢ س + س^٢$ فأوجد

$\int_{١-}^{٣} ق'(س) \, دس$.

الحل .

الاستاذ احمد اخميس ٠٧٧٥٢٠٤٧١٩.
صفحة الاستاذ احمد اخميس - رياضيات علمي و ادبي

الوحدة : التكامل وتطبيقاته
الدرس : التكامل المحدود

تمرين ٣ -

اذا كان م = $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ جا٢ س ء س وكانت

ن = $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ جتا٢ س ء س جد

١- م + ن

الحل.

٢- ن - م

الحل.

تمرين ٤ -

اذا كان ق اقترانا متصلا ،

ق(٢) = ٦ ، ق(٧) = ١٣ وكان

$\int_{٢}^{٧}$ م قَ(س) ء س = -٢١ جد قيمة

الثابت م .

الحل.