الرياضيات التوجيهي الادبي

إجابات أسئلة وتدريبات وحدة التكامل وتطبيقاته

فهرس الوحدة	رقم الصفحة
الفصل الأول : التكامل	٢
أولا : التكامل غير المحدود	٢
ثانيا : التكامل المحدود	٨
ثالثا : خصائص التكامل المحدود	١١
رابعا : التكامل بالتعويض	١٧
الفصل الثاني : تطبيقات التكامل	٢٣
أولا : تطبيقات هندسية	٢٣
ثانيا : تطبيقات فيزيائية	٢٦
ثالثا : المساحة	٢٩
الفصل الثالث : الاقترانان اللوغاريتمي الطبيعي والأسي الطبيعي وتطبيقاتهما	٣٦
أولا : الاقترانان اللوغاريتمي الطبيعي والأسي الطبيعي	٣٦
ثانيا : النمو والاضمحلال	٤٢

إعداد : المعلمة سلسبيل الخطيب

الفصل الأول : التكامل

أولا التكامل غير المحدود Indefinite Integral



ملاحظة تجد شرح هذه الوحدة مع حلول أسئلة الكتاب على قناتي في اليوتيوب باسم "سلسبيل الخطيب"

>> تدريب (١) صفحة ١٦١

إذا كان ص = $\int \frac{٤س - ١}{س^{٢} + ١}$ د س ، فجد $\frac{د ص}{د س}$ عندما س = -١

الحل :

نقوم باشتقاق الطرفين ،،

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د}{د س} \int \frac{٤س - ١}{س^{٢} + ١}$ د س (مشتقة التكامل تعطي ما داخل التكامل) ، إذن:

$\frac{د ص}{د س} = \frac{٤س - ١}{س^{٢} + ١}$

$\frac{د ص}{د س}$ $\Big|_{س = -١}$ $= \frac{٤(-١) - ١}{(-١)^{٢} + ١} = \frac{-٤ - ١}{١ + ١} = \frac{-٥}{٢}$

>> تدريب (٢) صفحة ١٦٣

جد كلا من التكاملات الآتية :-

١) $\int$ د س $= \int ١ \times$ د س $=$ س + جـ

٢) $\int س^{٣}$ د س $= \frac{س^{٤}}{٤} +$ جـ

٣) $\int س^{-٥}$ د س ، س ≠ صفر ، $\int س^{-٥}$ د س $= \frac{س^{-٤}}{-٤} +$ جـ

٤) $\int \sqrt{س}$ د س ، س ≥ ٠

$\int \sqrt{س}$ د س $= \int س^{\frac{١}{٢}}$ د س $= \frac{س^{\frac{١}{٢}+١}}{\frac{١}{٢}+١} +$ جـ $= \frac{س^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} +$ جـ $= ٢ \frac{س^{\frac{٣}{٢}}}{٣} +$ جـ

>> تدريب (٣) صفحة ١٦٤

جد كلا من التكاملين الآتيين :

١) $\int (٣س^{٢} - \frac{٦}{\sqrt{س}})$ د س $= \int (٣س^{٢} - \frac{٦}{س^{\frac{١}{٢}}})$ د س $= \int (٣س^{٢} - ٦ س^{-\frac{١}{٢}})$ د س

$= س^{٣} - ٦ \frac{س^{-\frac{١}{٢}+١}}{-\frac{١}{٢}+١} + جـ = س^{٣} - ٦ \frac{س^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} + جـ = س^{٣} - ١٢ س^{\frac{١}{٢}} + جـ$

٢) $\int (٤س - ٣جاس)$ د س $= ٢س^{٢} - ٣ \times -$ جتاس $+ جـ = ٢س^{٢} + ٣$جتاس $+ جـ$

>> تدريب (٤) صفحة ١٦٥

جد كلا من التكاملات الآتية :

هنا نفك القوس أولا ..تذكر
$(أ + ب)^{٢} = أ^{٢} + ٢ أ ب + ب^{٢}$

١) $\int (٢س + ٣)^{٢}$ د س $= \int (٤س^{٢} + ١٢س + ٩)$ د س $= \frac{٤س^{٣}}{٣} + ٦س^{٢} + ٩س + جـ$

٢) $\int \frac{س^{٢} - ٥س}{\sqrt[٣]{س}}$ د س ، س > ٠

$\int \frac{س^{٢} - ٥س}{\sqrt[٣]{س}}$ د س $= \int \frac{س^{٢} - ٥س}{س^{\frac{١}{٣}}}$ د س $= \int (س^{\frac{٢}{٣}} - ٥س^{\frac{١}{٣}})$ د س

$= \int (س^{-\frac{١}{٣}} - ٥ س^{-\frac{١}{٣}}) د س = \int (س^{\frac{٢}{٣}} - ٥ س^{\frac{٢}{٣}}) د س$

$= \frac{س^{\frac{٨}{٣}}}{\frac{٨}{٣}} - ٥ \frac{س^{\frac{٥}{٣}}}{\frac{٥}{٣}} + جـ = \frac{٣}{٨} س^{\frac{٨}{٣}} - ٥ \times \frac{٣}{٥} س^{\frac{٥}{٣}} + جـ = \frac{٣}{٨} س^{\frac{٨}{٣}} - ٣ س^{\frac{٥}{٣}} + جـ$

٣) $\int \frac{س^{٢} + ٢س - ١٥}{س - ٣}$ د س ، س $\neq ٣$

$\int \frac{س^{٢} + ٢س - ١٥}{س - ٣}$ د س $= \int \frac{(س - ٣)(س + ٥)}{س - ٣}$ د س $= \int (س + ٥)$ د س $= \frac{س^{٢}}{٢} + ٥س + جـ$

٤) $\int \frac{س^{٣} + ٦٤}{س + ٤}$ د س ، س ≠ -٤

$\int \frac{س^{٣} + ٦٤}{س + ٤}$ د س $= \int \frac{(س + ٤)(س^{٢} - ٤س + ١٦)}{س + ٤}$ د س $= \int (س^{٢} - ٤س + ١٦)$ دس

$= \frac{س^{٣}}{٣} - ٤ \frac{س^{٢}}{٢} + ١٦ س + جـ = \frac{س^{٣}}{٣} - ٢ س^{٢} + ١٦ س + جـ$

>> تدريب (٥) صفحة ١٦٥

جد قاعدة الاقتران ق الذي تعطى مشتقته بالقاعدة قَ (س) = ٣س^{٢} – ٦س + ٥ ، علما بأن ق (٠) = ٧

الحل :

ق (س) = $\int$ قَ (س) د س = $\int$ (٣س^{٢} – ٦س + ٥) د س = س^{٣} – ٣ س^{٢} + ٥س + جـ

ق (٠) = (٠)^{٣} – ٣(٠)^{٢} + ٥ (٠) + جـ = ٧ <== جـ = ٧

∴ ق (س) = س^{٣} – ٣ س^{٢} + ٥س + ٧

الأسئلة

ملاحظة تجد شرح هذه الوحدة مع حلول أسئلة الكتاب على قناتي في اليوتيوب باسم "سلسبيل الخطيب"

١) جد كلا مما يأتي :

أ) $\int \frac{١}{٢}$ د س = $\frac{١}{٢}$ س + جـ

ب) $\int \frac{د س}{س^{٥}}$ س ≠ ٠

$\int \frac{د س}{س^{٥}} = \int \frac{١}{س^{٥}} \times$ د س $= \int س^{-٥}$ د س $= \frac{س^{-٤}}{-٤} + جـ$

جـ) $\int$ (٢ – س^{٢}) د س = ٢س - $\frac{س^{٣}}{٣}$ + جـ

د) $\int \frac{-٢}{س^{-٥}}$ د س $= \int -٢س^{٥}$ د س = -٢ × $\frac{س^{٦}}{٦}$ + جـ = $\frac{-س^{٦}}{٣}$ + جـ

من استطال الطريق ضَعُفَ مشيه

٢) جد كلا مما يأتي :

أ) $\int (١٠س^{٢} - \sqrt[٦]{س} + ٣ قا^{٢}س)\, د س = \int (١٠س^{٢} - س^{\frac{١}{٦}} + ٣ قا^{٢}س)\, د س$

$= \frac{١٠ س^{٣}}{٣} - \frac{س^{\frac{٧}{٦}}}{\frac{٧}{٦}} + ٣ ظا س + جـ = \frac{١٠ س^{٣}}{٣} - \frac{٦ س^{\frac{٧}{٦}}}{٧} + ٣ظا س + جـ$

ب) $\int (٢ - س)(٤س + ١)\, د س = \int (٨ س + ٢ - ٤س^{٢} - س)\, د س$

$\int (٧ س + ٢ - ٤س^{٢})\, د س = \frac{٧س^{٢}}{٢} + ٢س - \frac{٤ س^{٣}}{٣} + جـ$

جـ) $\int ٣ ظا س \ جتا س \ د س = \int ٣ \frac{جا س}{جتا س} \times جتا س \ د س = \int ٣ جا س \ د س$

$= ٣ \times -$ جتاس $+ جـ = -٣$ جتا س $+ جـ$

د) $\int \frac{س^{٢} + ٦س + ٨}{س + ٢}\, د س$ ، $س \neq -٢$

$\int \frac{س^{٢} + ٦س + ٨}{س + ٢}\, د س = \int \frac{(س + ٢)(س + ٤)}{س + ٢}\, د س = \int (س + ٤)\, د س = \frac{س^{٢}}{٢} + ٤س + جـ$

٣) جد $\frac{د ص}{د س}$ عندما $س = ٥$ ، حيثُ $ص = \int \frac{٤س + ١}{س}\, د س$ ، $س \neq ٠$

الحل :

نقوم باشتقاق الطرفين ،،

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د}{د س} \int \frac{٤س + ١}{س}\, د س$ (مشتقة التكامل تعطي ما داخل التكامل) ، إذن:

$\frac{د ص}{د س} = \frac{٤س + ١}{س}$

$\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س = ٥} = \frac{٤(٥) + ١}{٥} = \frac{٢٠ + ١}{٥} = \frac{٢١}{٥}$

٤) إذا كان ق اقترانا قابلا للاشتقاق ، وكان قَ(س) = ٦س - ٨س^{٣} + ٥ ، وكان ق (-١) = ٢ ، فجد قاعدة الاقتران ق .

الحل :

ق (س) = $\int$ قَ(س) د س = $\int$ (٦س – ٨ س^{٣} + ٥) د س = ٣س^{٢} – ٢ س^{٤} + ٥س + جـ

ق (-١) = ٣ (-١)^{٢} - ٢ (-١)^{٤} + ٥(-١) + جـ = ٢

٣ - ٢ - ٥ + جـ = ٢ ==> -٤ + جـ = ٢ ==> جـ = ٦

∴ ق (س) = ٣س^{٢} – ٢ س^{٤} + ٥س + ٦

٥) إذا كان $\int$ عَ(س) د س = ٦س^{٣} – ٣ س^{٢} + ٦س – ٥ ، فجد عَ (١) .

الحل :

نقوم باشتقاق الطرفين ،،

$\frac{د}{د س}$ $\int$ عَ(س) د س = (٦س^{٣} – ٣ س^{٢} + ٦س – ٥)َ

عَ(س) = ١٨س^{٢} – ٦س + ٦ ==> عَ(١) = ١٨ (١)^{٢} – ٦ (١) + ٦ ==> عَ(١) = ١٨

٦) إذا كان ق اقترانا قابلا للاشتقاق ، وكان قَ (س) = ٢س – ٥ ، وكان ق (٢) = ٤ ، فجد قيمة ق(١).

الحل :

ق (س) = $\int$ قَ (س) د س = $\int$ (٢س – ٥) د س = س^{٢} – ٥س + جـ

ق (٢) = (٢)^{٢} – ٥ (٢) + جـ = ٤ ==> ٤ – ١٠ + جـ = ٤ ==> جـ = ١٠

∴ ق (س) = س^{٢} – ٥س + ١٠ ==> ق(١) = (١)^{٢} – ٥ (١) + ١٠ ==> ق (١) = ٦

٧) إذا كان ق اقترانا قابلا للاشتقاق ، وكان قَ(س) = ٣س (٦ – ٥س) + ٤س^{٣} ، وكان ق (٢) = -١ ، فجد قيمة ق (١).

الحل :

قَ(س) = ١٨س – ١٥س^{٢} + ٤س^{٣}

ق (س) = $\int$ قَ (س) د س = $\int$ (١٨س – ١٥س^{٢} + ٤س^{٣}) د س = ٩س^{٢} – ٥ س^{٣} + س^{٤} + جـ

ق (٢) = ٩(٢)^{٢}– ٥ (٢)^{٣} + (٢)^{٤} + جـ = -١ ⟸ ٣٦ - ٤٠ + ١٦ + جـ = -١ ⟸ جـ = -١٣

∴ ق (س) = ٩س^{٢} – ٥ س^{٣} + س^{٤} – ١٣ ⟸ ق (١) = ٩(١)^{٢}– ٥ (١)^{٣} + (١)^{٤} – ١٣ = - ٨

٨) إذا كان ق اقترانا قابلا للاشتقاق ، وكان قَ (س) = $\frac{\text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ٨\text{ س}^{٣}}{\text{س}}$ ، س ≠ صفرا ، وكان ق (١) = ١٢ ، فجد قاعدة الاقتران ق.

الحل :

ق (س) = $\int$ قَ (س) د س = $\int \frac{\text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ٨\text{ س}^{٣}}{\text{س}}$ د س = $\int \frac{\text{س (س}^{٢} + ٦ + ٨\text{ س}^{٢})}{\text{س}}$ د س

= $\int$ (س + ٦ + ٨س^{٢}) د س = $\frac{\text{س}^{٢}}{٢}$ + ٦س + ٨ $\frac{\text{س}^{٣}}{٣}$ + جـ

ق(١) = $\frac{(١)^{٢}}{٢}$ + ٦ (١) + ٨ $\frac{(١)^{٣}}{٣}$ + جـ = ١٢ ⟸ $\frac{١}{٢}$ + ٦ + $\frac{٨}{٣}$ + جـ = ١٢

⟸ $\frac{١}{٢}$ + $\frac{٨}{٣}$ + جـ = ٦ ⟸ $\frac{١٩}{٦}$ + جـ = ٦ ⟸ جـ = $\frac{١٧}{٦}$

∴ ق (س) = $\frac{\text{س}^{٢}}{٢}$ + ٦س + $\frac{٨\text{ س}^{٣}}{٣}$ + $\frac{١٧}{٦}$

٩) إذا كان ل اقترانا قابلا للاشتقاق ، وكان لَ (س) = ٦س^{٢} – ٦س^{٣} – ٢س ، فجد قيمة ل (٣) – ل (١)

الحل :

ل (س) = $\int$ لَ (س) د س = $\int$ (٦س^{٢} – ٦س^{٣} – ٢س) دس = ٢س^{٣} - $\frac{٣\text{س}^{٤}}{٢}$ - س^{٢} + جـ

* ل(٣) = ٢(٣)^{٣} – ٣ $\frac{(٣)^{٤}}{٢}$ - (٣)^{٢} + جـ = ٥٤ - $\frac{٢٤٣}{٢}$ - ٩ + جـ = - $\frac{١٥٣}{٢}$ + جـ

* ل(١) = ٢(١)^{٣} – ٣ $\frac{(١)^{٤}}{٢}$ - (١)^{٢} + جـ = ٢ - $\frac{٣}{٢}$ - ١ + جـ = - $\frac{١}{٢}$ + جـ

∴ ل (٣) – ل (١) = (- $\frac{١٥٣}{٢}$ + جـ) - (- $\frac{١}{٢}$ + جـ)

= - $\frac{١٥٣}{٢}$ + جـ + $\frac{١}{٢}$ - جـ = - $\frac{١٥٣}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ = - $\frac{١٥٢}{٢}$ = -٧٦



ملاحظة تجد شرح هذه الوحدة مع حلول أسئلة الكتاب على قناتي في اليوتيوب باسم "سلسبيل الخطيب"

>> تدريب (١) صفحة ١٦٩

جد قيمة كل مما يأتي :

١) $\int_{٤}^{١} \frac{٦}{\sqrt{س}}$ د س $= \int_{٤}^{١} \frac{٦}{س^{\frac{١}{٢}}}$ د س $= \int_{٤}^{١} ٦ س^{-\frac{١}{٢}}$ د س $= ٦ \times \frac{س^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} \Big]_{٤}^{١} = ١٢ \sqrt{س} \Big]_{٤}^{١}$

$= ١٢ \sqrt{١} - ١٢ \sqrt{٤} = ١٢ - ٢٤ = -١٢$

ب) $\int_{٠}^{١} ١٤ (س)^{\frac{٤}{٣}}$ د س $= ٤ \times \frac{س^{\frac{٤}{٣}+١}}{\frac{٤}{٣}+١} \Big]_{٠}^{١} = ١٤ \times ٣ \times \frac{س^{\frac{٧}{٣}}}{٧} = ٦ \sqrt[٣]{س^{٧}} \Big]_{٠}^{١}$

$= ٦ \sqrt[٣]{(١)^{٧}} - ٦ \sqrt[٣]{(٠)^{٧}} = ٦$

>> تدريب (٢) صفحة ١٧٠

إذا كان ق (-١) = ٣ ، ق (٢) = ٥ ، فجد قيمة التكامل الآتي : $\int_{-١}^{٢} ٤$ قَ (س) د س

الحل :

$\int_{-١}^{٢} ٤$ قَ (س) د س $= \int_{-١}^{٢} ٤$ قَ (س) د س $= ٤$ ق (س) $\Big]_{-١}^{٢} = ٤$ (ق (٢) – ق (-١))

$= ٤ (٥ - ٣) = ٤ \times ٢ = ٨$

>> تدريب (٣) صفحة ١٧٠

إذا كان $\int_{١}^{ب} ٦$س د س $= ٩$ ، فجد قيمة الثابت ب .

الحل :

$\int_{١}^{ب} ٦$ س د س $= ٩$ ==> $٣س^{٢} \Big]_{١}^{ب} = ٩$ ==> $٣(ب)^{٢} - ٣(١)^{٢} = ٩$ ==> $٣ب^{٢} - ٣ = ٩$

==> $٣ب^{٢} = ١٢$ ==> $ب^{٢} = ٤$ ==> ب $= \pm ٢$

ملاحظة تجد شرح هذه الوحدة مع حلول أسئلة الكتاب على قناتي في اليوتيوب باسم "سلسبيل الخطيب"

١) احسب قيمة كل مما يأتي :

أ) $\int_{١}^{٦} -٢ \, د س = -٢ (٦ - ١) = -٢ \times ٥ = -١٠$

ب) $\int_{٨}^{١} \frac{١}{\sqrt[٣]{س}} د س = \int_{٨}^{١} \frac{١}{٨ \, س^{\frac{١}{٣}}} د س = \int_{٨}^{١} \frac{١}{٨} س^{-\frac{١}{٣}} د س = \frac{١}{٨} \times \left[\frac{س^{\frac{٢}{٣}}}{\frac{٢}{٣}} \right]_{٨}^{١}$

$= \frac{٣}{١٦} \left[س^{\frac{٢}{٣}} \right]_{٨}^{١} = \frac{٣}{١٦} \sqrt[٣]{س^{٢}}_{٨}^{١} = \frac{٣}{١٦} \sqrt[٣]{(١)^{٢}} - \frac{٣}{١٦} \sqrt[٣]{(٨)^{٢}}$

$= \frac{٣}{١٦} - \frac{٣}{١٦} = ٤ \times \frac{٣}{١٦} - \frac{٣}{١٦} = \frac{١٢}{١٦} - \frac{٩}{١٦}$

جـ) $\int_{٠}^{٦} (٢س + ٨س^{٣} - ٥س^{٤} + ٧) د س = [س^{٢} + ٢س^{٤} - س^{٥} + ٧س]_{٠}^{٦}$

$= ((٦)^{٢} + ٢ (٦)^{٤} - (٦)^{٥} + ٧ (٦) - صفر) = ٣٦ + ٢٥٩٢ - ٧٧٧٦ + ٤٢ = -٥١٠٦$

د) $\int_{-٢}^{٢} (٣س - ٢) (س + ١) د س = \int_{-٢}^{٢} (٣س^{٢} + ٣س - ٢س - ٢) د س = \int_{-٢}^{٢} (٣س^{٢} + س - ٢) د س$

$= [س^{٣} + \frac{س^{٢}}{٢} - ٢س]_{-٢}^{٢} = ((٢)^{٣} + \frac{(٢)^{٢}}{٢} - ٢ \times ٢) - ((-٢)^{٣} + \frac{(-٢)^{٢}}{٢} - ٢ \times -٢)$

$= (٨ + ٢ - ٤) - (-٨ + ٢ + ٤) = ٦ - -٢ = ٨$

٢) إذا كان $\int_{-١}^{م} ٤ د س = ٢٠$ ، فجد قيمة الثابت م .

الحل :

$\int_{-١}^{م} ٤ د س = ٢٠ \Longleftarrow \quad ٤ (م - -١) = ٢٠ \Longleftarrow \quad ٤ (م + ١) = ٢٠ \Longleftarrow م + ١ = ٥ \Longleftarrow م = ٤$

٣) إذا كان الاقتران ق معرفا على الفترة [١ ، ٥] ، وكان قَ (س) = ٢س + ١ ، فجد قيمة ق(٥) – ق(١)

الحل :

$$\int_{١}^{٥} قَ(س)\,د\,س = ق(س)\Big]_{١}^{٥} = ق(٥) - ق(١)$$

$$\int_{١}^{٥} (٢س + ١)\,د\,س = (س^{٢} + س)\Big]_{١}^{٥} = (٥^{٢} + ٥) - (١^{٢} + ١) = ٣٠ - ٢ = ٢٨$$

٤) احسب قيمة التكامل الآتي : $\int_{٢}^{٢} (٤س - ٦س^{٢} + ٣)\,د\,س$.

الحل :

$$\int_{٢}^{٢} (٤س - ٦س^{٢} + ٣)\,دس = (٢س^{٢} - ٢س^{٣} + ٣س)\Big]_{٢}^{٢}$$

$$= ((٢)(٢)^{٢} - ٢(٢)^{٣} + ٣(٢)) - ((٢)(٢)^{٢} - ٢(٢)^{٣} + ٣(٢))$$

$$= (٨ - ١٦ + ٦) - (٨ - ١٦ + ٦) = -٢ - -٢ = ٢ + ٢ = \text{صفر}$$

وهذه من خضائص التكامل المحدود $\int_{أ}^{أ} ق(س)\,دس = \text{صفر}$

٥) احسب قيمة كل من التكاملات الآتية :-

أ) $\int_{١}^{٢} ٣س\,(٤ - ٢س^{٢})\,دس = \int_{١}^{٢} (١٢س - ٦س^{٣})\,دس = (٦س^{٢} - \frac{٦}{٤} س^{٤})\Big]_{١}^{٢}$

$$= (٦ \times ٢^{٢} - \frac{٦}{٤} \times ٢^{٤}) - (٦ \times ١^{٢} - \frac{٦}{٤} \times ١^{٤})$$

$$= (٢٤ - ٢٤) - (٦ - \frac{٦}{٤}) = \text{صفر} - (\frac{٢٤ - ٦}{٤}) = \frac{-١٨}{٤} = \frac{-٩}{٢}$$

ب) $\int_{١}^{-١} (٢س - ٣)^{٢}\,د\,س = \int_{١}^{-١} (٤س^{٢} - ١٢س + ٩)\,دس = (\frac{٤}{٣} س^{٣} - ٦س^{٢} + ٩س)\Big]_{١}^{-١}$

$$= (\frac{٤}{٣} \times (-١)^{٣} - ٦ \times (-١)^{٢} + ٩ \times -١) - (\frac{٤}{٣} \times ١^{٣} - ٦ \times ١^{٢} + ٩ \times ١)$$

$$= (\frac{-٤}{٣} - ١٥) - (\frac{٤}{٣} + ٣) = \frac{-٤}{٣} - ١٥ - \frac{٤}{٣} - ٣ = -\frac{٨}{٣} - ١٨ = -\frac{٦٢}{٣}$$

جـ) $\int_{0}^{-2} \frac{س^{2} + ٦س - ٧}{س - ١}$ دس $= \int_{0}^{-2} \frac{(س - ١)(س + ٧)}{س - ١}$ دس $= \int_{0}^{-2}$ (س + ٧) دس

$= (\frac{س^{2}}{٢} + ٧س)\Big]_{0}^{-2} = (\frac{(-٢)^{2}}{٢} + ٧ \times -٢) -$ صفر $= ٢ - ١٤ = -١٢$

٦) إذا كان $\int_{٥}^{٢}$ قَ (س) دس = ١٣ ، وكان ق(٥) = -١٧ ، فجد قيمة ق(٢)

الحل :

$\int_{٥}^{٢}$ قَ (س) دس = ق(٢) – ق(٥)

١٣ = ق(٢) - - ١٧ <== ١٣ = ق(٢) + ١٧ <== ق (٢) = -٤

ثالثا خصائص التكامل المحدود Properties of the Definite Integral

>> تدريب (١) صفحة ١٧٣

إذا كان $\int_{-١}^{٢}$ ٢ل(س) دس = -٢ ، $\int_{-١}^{٢}$ ع(س) دس = ٥ ، فجد قيمة كل مما يأتي :

١) $\int_{-١}^{٢} \frac{٥ ع(س)}{٢}$ دس $= \int_{-١}^{٢} \frac{٥}{٢} \times$ ع(س) دس $= \frac{٥}{٢} \int_{-١}^{٢}$ ع(س) دس $= \frac{٥}{٢} \times ٥ = \frac{٢٥}{٢}$

٢) $\int_{-١}^{٢}$ (٢ ع(س) – ٣ل(س) – ٢س) دس $= ٢ \int_{-١}^{٢}$ ع(س) دس $- ٣ \int_{-١}^{٢}$ ل(س) دس - $\int_{-١}^{٢}$ ٢س دس

لحل المسألة تحتاج إلى معرفة $\int_{-١}^{٢}$ ل(س) دس ،،، الآن من معطيات السؤال

$\int_{-١}^{٢}$ ٢ ل(س) دس = -٢ ومنه $\int_{-١}^{٢}$ ل(س) دس = -١

∴ $\int_{-١}^{٢}$ (٢ ع(س) – ٣ل(س) – ٢س) دس $= ٢ \times ٥ - ٣ \times -١ - س^{٢}\Big]_{-١}^{٢} = ١٠ + ٣ - ((٢)^{٢} - (-١)^{٢})$

$= ١٠ + ٣ - (٤ - ١) = ١٣ - ٣ = ١٠$

ملاحظة تجد شرح هذه الوحدة مع حلول أسئلة الكتاب على قناتي في اليوتيوب باسم "سلسبيل الخطيب"

<< تدريب (٢) صفحة ١٧٥

إذا كان $\int_{-١}^{٢} \frac{ق(س)}{٣}$ دس = ٥ ، $\int_{-١}^{٦}$ ق(س) دس = ٤ ، فجد قيمة كل مما يأتي :

١) $\int_{٢}^{-١}$ ٢ ق(س) دس = ٢ $\int_{٢}^{-١}$ ق(س) دس

من معطيات السؤال $\int_{-١}^{٢} \frac{ق(س)}{٣}$ دس = ٥ ==> $\frac{١}{٣}$ $\int_{-١}^{٢}$ ق(س) دس = ٥ ==> $\int_{-١}^{٢}$ق(س) دس = ١٥

∴ $\int_{٢}^{-١}$ ق(س) دس = - $\int_{-١}^{٢}$ ق(س) دس = - ١٥

∴ المطلوب : $\int_{٢}^{-١}$ ٢ ق(س) دس = ٢ × -١٥ = -٣٠

٢) $\int_{٦}^{٢}$ ق (س) دس



$\int_{-١}^{٦}$ ق (س) دس = $\int_{-١}^{٢}$ ق(س) دس + $\int_{٢}^{٦}$ ق(س) دس

٤ = ١٥ + $\int_{٢}^{٦}$ ق (س) دس ومنه $\int_{٢}^{٦}$ ق(س) دس = -١١

∴ المطلوب : $\int_{٦}^{٢}$ ق(س) دس = - $\int_{٢}^{٦}$ ق(س) دس = +١١

<< تدريب (٣) صفحة ١٧٥

إذا كان $\int_{٢}^{٥}$ (٣ ق(س) – ٤) دس = ١٨ ، فجد قيمة التكامل الآتي $\int_{٢}^{٥}$ ق(س) دس.

الحل :

$\int_{٢}^{٥}$ (٣ ق(س) – ٤) دس = ١٨ ومنه ٣ $\int_{٢}^{٥}$ق(س) دس - $\int_{٢}^{٥}$ ٤ دس = ١٨

$\int_{٢}^{٥}$ ٣ ق(س) دس - ٤(٥ – ٢) = ١٨ ومنه $\int_{٢}^{٥}$ ٣ ق(س) دس – ١٢ = ١٨ ومنه

$\int_{٢}^{٥}$ ٣ ق(س) دس = ٣٠ ومنه $\int_{٢}^{٥}$ ق(س) دس = ١٠

>> تدريب (٤) صفحة ١٧٦

١) إذا كان $\int_{م^٣+١}^{-٧}$ ق(س) دس = ٠ ، فجد قيمة الثابت م

الحل :

-٧ = $م^٣$ + ١ ==> - ٨ = $م^٣$ وبأخذ الجذر التكعيبي للطرفين ∴ م = -٢

٢) إذا كان $\int_{ن}^{١}$ (٢س – ٣) دس = ٠ ، فجد قيمة الثابت ن.

الحل :

$\left[(س^٢ - ٣س) \right]_{ن}^{١}$ = ٠

((١)^٢ – ٣ × ١) – ($ن^٢$ – ٣ن) = ٠

١ – ٣ – $ن^٢$ + ٣ن = ٠ ==> -٢ – $ن^٢$ + ٣ن = ٠ وبإعادة ترتيب المعادلة ينتج :

- $ن^٢$ + ٣ن – ٢ = ٠ الآن اضرب المعادلة بـ (-١) وذلك لجعل معامل $ن^٢$ = ١

$ن^٢$ – ٣ن + ٢ = ٠ الآن حلل العبارة التربيعية

(ن – ١) (ن – ٢) = ٠ ومنه قيم ن هي : {١ ، ٢}

كن كالنخيل عن الأحقاد مرتفعاً ،، يرمى بصخرٍ فيعطي أطيبَ الثمر

١) إذا كان $\int_{١}^{٤}$ ٢ ق(س) دس = ١٢ ، $\int_{٤}^{٥}$ ق(س) دس = ٤ ، فجد قيمة كل مما يأتي :

أ) $\int_{٤}^{١}$ ٣ ق(س) دس = ٣ $\int_{٤}^{١}$ ق (س) دس

من معطيات السؤال $\int_{١}^{٤}$ ٢ ق(س) دس = ٢ $\int_{١}^{٤}$ ق(س) دس = ١٢ ومنه $\int_{١}^{٤}$ ق(س) دس = ٦

∴ $\int_{٤}^{١}$ ق(س) دس = - $\int_{١}^{٤}$ ق(س) دس = - ٦

∴ المطلوب : $\int_{٤}^{١}$ ٣ ق(س) دس = ٣ × -٦ = - ١٨

ب) $\int_{٥}^{١}$ ق(س) دس



$\int_{١}^{٥}$ ق(س) دس = $\int_{١}^{٤}$ ق(س) دس + $\int_{٤}^{٥}$ ق(س) دس = ٦ + ٤ = ١٠

∴ المطلوب : $\int_{٥}^{١}$ ق(س) دس = - $\int_{١}^{٥}$ ق(س) دس = - ١٠

جـ) $\int_{٥}^{٤}$ (ق(س) + ٢س) دس = $\int_{٥}^{٤}$ ق(س) دس + $\int_{٥}^{٤}$ ٢س دس = -٤ + $س^{٢}]_{٥}^{٤}$

= -٤ + ($٤^{٢}$ – $٥^{٢}$) = -٤ + (١٦ – ٢٥) = -٤ - ٩ = - ١٣

٢) إذا كان $\int_{-١}^{٢}$ $\frac{ل(س)}{٢}$ دس = ٣ ، $\int_{٢}^{-١}$ (هـ(س) +١) دس = ٥ ، فجد قيمة كل مما يأتي :

أ) $\int_{٢}^{-١}$ هـ (س) دس

من معطيات السؤال : $\int_{٢}^{-١}$ (هـ (س) + ١) دس = $\int_{٢}^{-١}$ هـ (س) دس + $\int_{٢}^{-١}$ ١ دس = ٥ يتبع >>

ملاحظة تجد شرح هذه الوحدة مع حلول أسئلة الكتاب على قناتي في اليوتيوب باسم "سلسبيل الخطيب"

$\int_{-١}^{١} هـ(س)\,دس + ١\,(-١ - ٢) = ٥$ ومنه $\int_{-١}^{٢} هـ(س)\,دس = ٨$

ب) $\int_{-١}^{٢} (٣\,هـ(س) - ٢س + ٣ل(س))\,دس = ٣\int_{-١}^{٢} هـ(س)\,دس - ٢س\,دس + ٣\int_{-١}^{٢} ل(س)\,دس$

** $\int_{-١}^{٢} هـ(س)\,دس = -\int_{-٢}^{١} هـ(س)\,دس = -٨$ (من فرع (أ))

** $\int_{-١}^{٢} \frac{ل(س)}{٢}\,دس = \frac{١}{٢}\int_{-١}^{٢} ل(س)\,دس = ٣$ ==> $\int_{-١}^{٢} ل(س)\,دس = ٦$ (من معطيات السؤال)

∴ المطلوب $\int_{-١}^{٢} (٣هـ(س) - ٢س + ٣ل(س))\,دس = ٣ \times -٨ - [س^{٢}]_{-١}^{٢} + ٣ \times ٦$

$= -٢٤ - ((٢^{٢}) - (-١)^{٢}) + ١٨$

$= -٢٤ - ٣ + ١٨ = -٩$

٣) إذا كان $\int_{-١}^{٥أ+٧} ق(س)\,دس = ٠$ ، فجد قيمة الثابت أ .

الحل :

$٥أ + ٧ = أ - ١$ ==> $٤أ + ٧ = -١$ ==> $٤أ = -٨$ ==> $أ = -٢$

٤) إذا كان $\int_{٣}^{م} (٢ - ٤س)\,دس = ٠$ ، فجد قيمة الثابت م .

الحل :

$[٢س - ٢س^{٢}]_{٣}^{م} = ٠$

$(٢م - ٢م^{٢}) - (٢ \times ٣ - ٢ \times (٣)^{٢}) = ٢م - ٢م^{٢} - ٦ + ١٨ = ٠$ بإعادة ترتيب المعادلة ينتج :

$-٢م^{٢} + ٢م + ١٢ = ٠$ بالقسمة على -٢ ينتج :

$م^{٢} - م - ٦ = ٠$ ومنه $(م - ٣)(م + ٢) = ٠$ ومنه قيم م هي : {٣ ، -٢}

٥) إذا كان $\int_{٤}^{١}$ (٣ ق(س) – ٥) دس = ٩ ، فجد قيمة التكامل الآتي : $\int_{١}^{٤}$ (٢ق(س) + ١) دس

الحل :

$$\int_{١}^{٤} (٢ق(س) + ١)\ دس = ٢ \int_{١}^{٤} ق(س)\ دس + \int_{١}^{٤} ١\ دس$$

من معطيات السؤال

$$\int_{٤}^{١} (٣ق(س) – ٥)\ دس = ٣ \int_{٤}^{١} ق(س)\ دس - ٥ \int_{٤}^{١} دس = ٩ \quad \text{ومنه} \quad ٣ \int_{٤}^{١} ق(س)\ دس - ٥ (١ – ٤) = ٩$$

$$٣ \int_{٤}^{١} ق(س)\ دس + ١٥ = ٩ \quad \text{ومنه} \quad ٣ \int_{٤}^{١} ق(س)\ دس = -٦ \quad \text{ومنه} \int_{٤}^{١} ق(س)\ دس = -٢$$

$$\therefore \int_{١}^{٤} ق(س)\ دس = - \int_{٤}^{١} ق(س)\ دس = ٢$$

$$\therefore \text{المطلوب} : \int_{١}^{٤} (٢ق(س) + ١)\ دس = ٢ \int_{١}^{٤} ق(س)\ دس + \int_{١}^{٤} ١\ دس$$

$$= ٢ \times ٢ + ١ (٤ – ١) = ٤ + ٣ = ٧$$

٦) إذا كان $\int_{٠}^{ل}$ (٢س – ١) دس = ٦ ، فجد قيمة الثابت ل .

الحل :

$$\left[(س^{٢} – س) \right]_{٠}^{ل} = ٦$$

$$(ل^{٢} – ل) – (٠) = ٦$$

$$ل^{٢} – ل = ٦ \quad ==> \quad ل^{٢} – ل – ٦ = ٠ \quad ==> \quad (ل – ٣)(ل + ٢) = ٠$$

$$\therefore \text{قيم الثابت ل هي } \{٣ ، -٢\}$$

لا تقلقْ من تَدابير البشر،، فأقصى ما يستَطيعُون فعله مَعك،، هو تنفيذ إرادةُ الله

>> تدريب (١) صفحة ١٧٩

جد قيمة التكامل الآتي : $\int$ ٢١ (٣س^{٢} + ٤س) (س^{٣} + ٢س^{٢})^{٧} دس

الحل :

افرض ص = س^{٣} + ٢س^{٢} ==> $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٣س^{٢} + ٤س <== دس = $\frac{\text{دص}}{\text{٣س}^{٢} + \text{٤س}}$

∴ $\int$ ٢١ (٣س^{٢} + ٤س) (س^{٣} + ٢س^{٢})^{٧} دس = $\int$ ٢١ (٣س^{٢} + ٤س) (ص)^{٧} $\frac{\text{دص}}{\text{٣س}^{٢} + \text{٤س}}$

= $\int$ ٢١ ص^{٧} دص = $\frac{\text{٢١ ص}^{٨}}{٨}$ + جـ = $\frac{٢١}{٨}$ (س^{٣} + ٢س^{٢})^{٨} + جـ

>> تدريب (٢) صفحة ١٨٢

حل الفرع (٤) من المثال (٢) باستخدام قيم ص بالتعويض في حدود التكامل $\int_{٣}^{}$ $\frac{١}{\sqrt{\text{٥س} + ١}}$ دس

الحل :

افرض ص = ٥س + ١ ==> $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٥ <== دس = $\frac{\text{دص}}{٥}$

- عند س = ٣ ، ص = ٥×٣ + ١ = ١٦
- عند س = ٠ ، ص = ٥×٠ + ١ = ١

∴ $\int_{٣}^{}$ $\frac{١}{\sqrt{\text{٥س} + ١}}$ دس = $\int_{١٦}^{١}$ $\frac{١}{\sqrt{\text{ص}}}$ $\frac{\text{دص}}{٥}$ = $\int_{١٦}^{١}$ $\frac{١}{٥}$ ص$^{-\frac{١}{٢}}$ دص = $\frac{١}{٥}$ $\left[\frac{\text{ص}^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}}\right]_{١٦}^{١}$ = $\frac{١}{٥}$ $\left[\text{٢}\sqrt{\text{ص}}\right]_{١٦}^{١}$ = $\frac{٢}{٥}$ $\sqrt{١}$ - $\frac{٢}{٥}$ $\sqrt{١٦}$ = $\frac{٢}{٥}$ - $\frac{٨}{٥}$ = - $\frac{٦}{٥}$



ملاحظة تجد شرح هذه الوحدة مع حلول أسئلة الكتاب على قناتي في اليوتيوب باسم "سلسبيل الخطيب"

>> تدريب (٣) صفحة ١٨٢

جد قيمة كل من التكاملات الآتية :-

١) $\int$ ٣س (س^{٢} + ١)$^{-٥}$ دس

ص = س^{٢} + ١ ==> $\frac{دص}{دس}$ = ٢س ==> دس = $\frac{دص}{٢س}$

∴ $\int$ ٣س (س^{٢} + ١)$^{-٥}$ دس = $\int$ ٣س (ص)$^{-٥}$ $\frac{دص}{٢س}$ = $\frac{٣}{٢}$ $\int$ ص$^{-٥}$ دص = $\frac{٣}{٢}$ × $\frac{ص^{-٤}}{-٤}$ + جـ

= - $\frac{٣}{٨}$ ص$^{-٤}$ + جـ = - $\frac{٣}{٨}$ (س^{٢} + ١)$^{-٤}$ + جـ

٢) $\int$ ٢س قا^{٢} (١ – س^{٢}) دس

ص = ١ – س^{٢} ==> $\frac{دص}{دس}$ = -٢س ==> دس = $\frac{دص}{-٢س}$

∴ $\int$ ٢س قا^{٢} (١ – س^{٢}) دس = $\int$ ٢س قا^{٢} (ص) $\frac{دص}{-٢س}$ = - $\int$ قا^{٢}ص دص = - ظا ص + جـ

= - ظا (١ – س^{٢}) + جـ

٣) $\int_{١}^{-١}$ (٤س – ١) $\sqrt[٣]{س – ٢س^{٢} – ١}$ دس

ص = س – ٢س^{٢} – ١ ==> $\frac{دص}{دس}$ = ١ – ٤س ==> دس = $\frac{دص}{١ – ٤س}$

- عند س = ١ ، ص = ١ – ٢ × (١)^{٢} – ١ ==> ص = -٢

- عند س = -١ ، ص = ١ – ٢ × (-١)^{٢} – ١ ==> ص = -٤

∴ $\int_{١}^{-١}$ (٤س – ١) $\sqrt[٣]{س – ٢س^{٢} – ١}$ دس = $\int_{-٢}^{-٤}$ (٤س – ١) $\sqrt[٣]{ص}$ $\frac{دص}{١ – ٤س}$ = - $\int_{-٢}^{-٤}$ $\sqrt[٣]{ص}$ دص

= - $\int_{-٢}^{-٤}$ ص$^{\frac{١}{٣}}$ دص = -١ $\left[\frac{ص^{\frac{٤}{٣}}}{\frac{٤}{٣}} \right]_{-٢}^{-٤}$ = $\frac{-٣}{٤}$ $\left[\sqrt[٣]{ص^{٤}} \right]_{-٢}^{-٤}$

= $\frac{-٣}{٤}$ ($\sqrt[٣]{(-٤)^{٤}}$ - $\sqrt[٣]{(-٢)^{٤}}$) = $\frac{-٣}{٤}$ ($\sqrt[٣]{٢٥٦}$ - $\sqrt[٣]{١٦}$)

٤) $\int_{0}^{3} \frac{1}{\sqrt[5]{س + ١}}$ دس $= \int_{0}^{3} \frac{1}{(س + ١)^{\frac{١}{٥}}}$ دس $= \int_{0}^{3} (س + ١)^{-\frac{١}{٥}}$ دس $= \frac{٥}{٤} (س + ١)^{\frac{٤}{٥}} \Big]_{0}^{3}$

$= \frac{٥}{٤} \sqrt[٥]{(س + ١)^{٤}} \Big]_{0}^{3} = \frac{٥}{٤} (\sqrt[٥]{(٣ + ١)^{٤}} - \sqrt[٥]{(٠ + ١)^{٤}}) = \frac{٥}{٤} \sqrt[٥]{(٤)^{٤}} - \frac{٥}{٤}$

>> تدريب (٤) صفحة ١٨٢

جد قيمة كل تكامل مما يأتي :

١) $\int (أ س + ب)^{ن}$ دس ، حيثُ أ ، ب ثابتان ، أ $\neq ٠$ ، ن $\neq -١$

افرض ص = أ س + ب $\Longrightarrow$ أ $= \frac{دص}{دس}$ $\Longrightarrow$ دس $= \frac{دص}{أ}$

$\therefore \int (أ س + ب)^{ن}$ دس $= \int ص^{ن} \frac{دص}{أ} = \frac{١}{أ} \int ص^{ن}$ د ص $= \frac{١}{أ} \frac{ص^{ن+١}}{ن + ١} +$ جـ

$= \frac{(أس + ب)^{ن+١}}{أ (ن + ١)} +$ جـ

٢) $\int$ جتا (أ س + ب) دس ، حيثُ أ ، ب ثابتان ، أ $\neq ٠$

افرض ص = أ س + ب $\Longrightarrow$ أ $= \frac{دص}{دس}$ $\Longrightarrow$ دس $= \frac{دص}{أ}$

$\therefore \int$ جتا (أ س + ب) دس $= \int$ جتا ص $\frac{دص}{أ} = \frac{١}{أ} \int$ جتا ص دص $= \frac{١}{أ}$ جاص + جـ

$= \frac{جا (أ س + ب)}{أ} +$ جـ

>> تدريب (٥) صفحة ١٨٣

جد قيمة كل تكامل مما يأتي :-

١) $\int_{-١}^{2} ٦ (١ - ٢س)^{٥}$ دس $= ٦ \int_{-١}^{2} (١ - ٢س)^{٥}$ دس $= ٦ \times \frac{(١ - ٢س)^{٦}}{٦ \times -٢} \Big]_{-١}^{2} = -\frac{١}{٢} (١ - ٢س)^{٦} \Big]_{-١}^{2}$

$= -\frac{١}{٢} ((١ - ٢ \times ٢)^{٦} - (١ - ٢ \times -١)^{٦}) = -\frac{١}{٢} ((-٣)^{٦} - (٣)^{٦}) =$ صفر

٢) ⌠ ١٢ جا (١ – ٤س) دس = ١٢ × $\frac{\text{- جتا (١ – ٤س)}}{-٤}$ + جـ = ٣ جتا (١ – ٤س) + جـ ⌡

الأسئلة

١) اكتب التعويض المناسب لإيجاد قيمة كل تكامل من التكاملات الآتية :-

أ) ⌠ (١ – ٢س) (س – س^{٢})^{٤} دس ،،، ص = س – س^{٢} ⌡

ب) ⌠ ٦س^{٢} $\sqrt[٥]{(٢س^{٣} - ٢)^{٢}}$ دس ،،، ص = ٢س^{٣} – ٢ ⌡

جـ) ⌠ (٢س – ٣س^{٢}) قا^{٢}(س^{٣} – س^{٢}) دس ،،، ص = س^{٣} – س^{٢} ⌡

د) ⌠ $\frac{٣س - ٩}{(س^{٢} - ٦س)^{٢}}$ دس ،،، ص = س^{٢} – ٦س ⌡

ملاحظة تجد شرح هذه الوحدة مع حلول أسئلة الكتاب على قناتي في اليوتيوب باسم "سلسبيل الخطيب"

٢) جد قيمة كل من التكاملات الآتية :-

أ) ⌠ $\sqrt[٣]{(٣س - ٢)^{٢}}$ دس = ⌠ (٣س – ٢)$^{\frac{٢}{٣}}$ دس = $\frac{(٣س - ٢)^{\frac{٥}{٣}}}{\frac{٥}{٣} \times ٣}$ + جـ = $\frac{(٣س - ٢)^{\frac{٥}{٣}}}{٥}$ + جـ ⌡

ب) ⌠ (س – ١) (٢س^{٢} – ٤س + ١)^{٥} دس ⌡

ص = ٢س^{٢} – ٤س + ١ ⟸ $\frac{دص}{دس}$ = ٤س – ٤ ⟸ دس = $\frac{دص}{٤س - ٤}$

∴ ⌠ (س – ١) (٢س^{٢} – ٤س + ١)^{٥} دس = ⌠ (س – ١) (ص)^{٥} $\frac{دص}{٤(س - ١)}$ = $\frac{١}{٤}$ ⌠ ص^{٥} دص ⌡ ⌡

= $\frac{١}{٤}$ × $\frac{ص^{٦}}{٦}$ + جـ = $\frac{ص^{٦}}{٢٤}$ + جـ = $\frac{(٢س^{٢} - ٤س + ١)^{٦}}{٢٤}$ + جـ

ب) ⌠ ٢ قا^{٢}(٢ – س) دس = ٢ $\frac{\text{ظا (٢ – س)}}{-١}$ + جـ = -٢ ظا (٢ – س) + جـ ⌡

د) $\int$ ٢س^{٣} جا (س^{٤} + ١) دس

افرض ص = س^{٤} + ١ ⟸ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٤س^{٣} ⟹ دس = $\frac{\text{دص}}{٤\text{س}^{٣}}$

∴ $\int$ ٢س^{٣} جا ص $\frac{\text{دص}}{٤\text{س}^{٣}}$ = $\frac{١}{٢}$ $\int$ جاص دص = -$\frac{١}{٢}$ جتا ص + جـ = $\frac{-١}{٢}$ جتا(س^{٤} + ١) + جـ

٣) احسب قيمة كل من التكاملات الآتية :-

أ) $\int_{٠}^{٢}$ $\sqrt{٤\text{س} + ١}$ دس = $\int_{٠}^{٢}$ (٤س + ١)$^{\frac{١}{٢}}$ دس = ٢ $\frac{(٤\text{س} + ١)^{\frac{٣}{٢}}}{٤ \times ٣}$ $]_{٠}^{٢}$ = $\frac{١}{٦}$ $\sqrt{(٤\text{س} + ١)^{٣}}$ $]_{٠}^{٢}$

= $\frac{١}{٦}$ ($\sqrt{(٤ \times ٢ + ١)^{٣}}$ - $\sqrt{(٤ \times ٠ + ١)^{٣}}$) = $\frac{١}{٦}$ (٢٧ – ١) = $\frac{١}{٦}$ × ٢٦ = $\frac{٢٦}{٦}$

ب) $\int_{-١}^{١}$ ٣س^{٢} (س^{٣} – ١)^{٣} دس = صفر ، لأن $\int_{أ}^{أ}$ ق(س) دس = صفر

جـ) $\int_{١}^{٠}$ ٢س $\sqrt{\text{س}^{٢} - ١}$ دس

افرض ص = س^{٢} – ١ ⟸ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٢س ⟹ دس = $\frac{\text{دص}}{٢\text{س}}$

- عند س = ١ ، فإن ص = ٠

- عند س = ٠ ، فإن ص = -١

∴ $\int_{١}^{٠}$ ٢س $\sqrt{\text{س}^{٢} - ١}$ دس = $\int_{٠}^{-١}$ ٢س $\sqrt{\text{ص}}$ $\frac{\text{دص}}{٢\text{س}}$ = $\int_{٠}^{-١}$ ص$^{\frac{١}{٣}}$ دص = $\frac{٣}{٤}$ ص$^{\frac{٤}{٣}}$ $]_{٠}^{-١}$

= $\frac{٣}{٤}$ $\sqrt[٣]{(\text{ص})^{٤}}$ $]_{٠}^{-١}$ = $\frac{٣}{٤}$ ($\sqrt[٣]{(-١)^{٤}}$ - $\sqrt[٣]{(٠)^{٤}}$) = $\frac{٣}{٤}$

د) $\int_{١}^{٢}$ $\frac{٣ - ٢\text{س}}{(\text{س}^{٢} - ٣\text{س})^{٢}}$ دس

افرض ص = س^{٢} – ٣س ⟸ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٢س – ٣ ⟹ دس = $\frac{\text{دص}}{٢\text{س} - ٣}$

- عند س = ١ ، ص = -٢

- عند س = ٢ ، ص = -٢

∴ $\int_{١}^{٢} \frac{٣ - ٢س}{(س^{٢} - ٣س)^{٢}}$ دس = $\int_{-٢}^{-٢} \frac{٣ - ٢س}{ص^{٢}} \times \frac{دص}{٢س - ٣}$ = $\int_{-٢}^{-٢} \frac{-١}{ص^{٢}}$ دص = صفر

٤) إذا علمت أن ق(- ٨) = ٥ ، ق(٢٧) = -٦ ، فجد قيمة التكامل الآتي: $\int_{-٢}^{٣}$ ٣س^{٢} قَ (س^{٣}) دس

الحل :

ص = س^{٣} ==> $\frac{دص}{دس}$ = ٣س^{٢} ==> دس = $\frac{دص}{٣س^{٢}}$

- عند س = -٢ ، ص = - ٨

- عند س = ٣ ، ص = ٢٧

∴ $\int_{-٢}^{٣}$ ٣س^{٢} قَ (س^{٣}) دس = $\int_{-٨}^{٢٧}$ ٣س^{٢} قَ (ص) $\frac{دص}{٣س^{٢}}$ = $\int_{-٨}^{٢٧}$ قَ (ص) دص = ق(٢٧) – ق(-٨)

= -٦ – ٥ = -١١

٥) إذا علمت أن $\int_{٥}^{٢}$ ق(س) دس = ٣ ، فجد قيمة التكامل التالي : $\int_{-١}^{٢}$ ٨ س ق (س^{٢} + ١) دس.

الحل :

ص = س^{٢} + ١ ==> $\frac{دص}{دس}$ = ٢س ==> دس = $\frac{دص}{٢س}$

- عند س = -١ ، فإن ص = ٢

- عند س = ٢ ، فإن ص = ٥

∴ $\int_{-١}^{٢}$ ٨ س ق (س^{٢} + ١) دس = $\int_{٢}^{٥}$ ٨س ق(ص) $\frac{دص}{٢س}$ = ٤ $\int_{٢}^{٥}$ ق(ص) دص = ٤ × -٣ = -١٢

٦) جد قيمة التكامل الآتي : $\int_{٠}^{٤}$ ٢س $\sqrt{س^{٢} + ٩}$ دس

الحل :

ص = س^{٢} + ٩ ==> $\frac{دص}{دس}$ = ٢س ==> دس = $\frac{دص}{٢س}$

- عند س = ٠ ، ص = ٩

- عند س = ٤ ، ص = ٢٥

$$\therefore \int_{0}^{4} ٢س\sqrt{س^{٢}+٩}\,دس = \int_{٩}^{٢٥} ٢س\sqrt{ص}\,\frac{دص}{٢س} = \int_{٩}^{٢٥} \sqrt{ص}\,دص = \int_{٩}^{٢٥} ص^{\frac{١}{٢}}\,دص$$

$$= \left[\frac{٢ص^{\frac{٣}{٢}}}{٣}\right]_{٩}^{٢٥} = \left[\frac{٢}{٣}ص^{\frac{٣}{٢}}\right]_{٩}^{٢٥} = \frac{٢}{٣}\left(\sqrt{(٢٥)^{٣}} - \sqrt{(٩)^{٣}}\right) = \frac{٢}{٣}(١٢٥ - ٢٧) = \frac{١٩٦}{٣}$$

الفصل الثاني : تطبيقات التكامل

أولا تطبيقات هندسية Geometric Applications

>> تدريب (١) صفحة ١٨٦

جد قاعدة الاقتران ق ، علما بأن منحناه يمر بالنقطة (-١ ، ٢) ، وأنّ ميل المماس لمنحنى الاقتران ص = ق(س) عند النقطة (س ، ص) يعطى بالقاعدة : ق′(س) = ٢س – ١

الحل :

م = ق′(س) = ٢س – ١

ق (س) = $\int$ ق′(س) دس = $\int$ (٢س – ١) دس = س^{٢} – س + جـ

ق (-١) = (-١)^{٢} – (-١) + جـ = ٢ ⟸ ١ + ١ + جـ = ٢ ⟸ جـ = ٠

∴ ق(س) = س^{٢} – س

ملاحظة تجد شرح هذه الوحدة مع حلول أسئلة الكتاب على قناتي في اليوتيوب باسم "سلسبيل الخطيب"

>> تدريب (٢) صفحة ١٨٧

جد قيمة ق(١٤) ، علما بأن ميل المماس لمنحنى الاقتران ص = ق(س) عند النقطة (س ، ص) يعطى بالقاعدة : ق′(س) = ٦ $\sqrt[٣]{٢س - ١}$ ، وأن منحناه يمر بالنقطة (٠ ، ٥) .

الحل :

ق (س) = $\int$ ق′(س) دس = $\int$ ٦ $\sqrt[٣]{٢س - ١}$ دس = ٦ $\int$ (٢س – ١)$^{\frac{١}{٣}}$ دس = ٦ × $\frac{(٢س - ١)^{\frac{٤}{٣}}}{\frac{٤}{٣} \times ٢}$ + جـ

∴ ق (س) = $\frac{٩}{٤}\sqrt[٣]{(٢س - ١)^{٤}}$ + جـ

ق (٠) = $\frac{٩}{٤}\sqrt[٣]{(٢ \times ٠ - ١)^{٤}}$ + جـ = ٥ ⟸ $\frac{٩}{٤}$ + جـ = ٥ ⟸ جـ = $\frac{١١}{٤}$



ملاحظة تجد شرح هذه الوحدة مع حلول أسئلة الكتاب على قناتي في اليوتيوب باسم "سلسبيل الخطيب"

∴ ق(س) = $\frac{٩}{٤}$ $\sqrt[٣]{(٢س - ١)^{٤}}$ + $\frac{١١}{٤}$

ق(١٤) = $\frac{٩}{٤}$ $\sqrt[٣]{(٢ \times ١٤ - ١)^{٤}}$ + $\frac{١١}{٤}$ = $\frac{٩}{٤}$ × ٨١ + $\frac{١١}{٤}$ = ١٨٥

الأسئلة

١) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ص = ق(س) عند النقطة (س ، ص) يساوي (٦ – ٢س + ٩س^{٣}) ، فجد قاعدة الاقتران ق ، علما بأن ق(٠) = ٥

الحل :

ق (س) = $\int$ ق′(س) دس = $\int$ (٦ – ٢س + ٩س^{٣}) دس = ٦س – س^{٢} + $\frac{٩س^{٤}}{٤}$ + جـ

ق(٠) = ٦ × ٠ – (٠)^{٢} + $\frac{٩(٠)^{٤}}{٤}$ + جـ = ٥ <== جـ = ٥

∴ ق(س) = ٦س – س^{٢} + $\frac{٩س^{٤}}{٤}$ + ٥

٢) جد قاعدة الاقتران ق ، إذا كان ميل المماس لمنحنى ص = ق(س) عند النقطة (س ، ص) يعطى بالقاعدة : ق′(س) = $\frac{٢س}{\sqrt[٣]{س^{٢} + ٨}}$ ، وكان منحناه يمر بالنقطة (٠ ، ٤).

الحل :

ق (س) = $\int$ ق′(س) دس = $\int$ $\frac{٢س}{\sqrt[٣]{س^{٢} + ٨}}$ دس

افرض ص = س^{٢} + ٨ <== $\frac{دص}{دس}$ = ٢س <== دس = $\frac{دص}{٢س}$

∴ ق (س) = $\int$ $\frac{٢س}{\sqrt[٣]{ص}}$ × $\frac{دص}{٢س}$ = $\int$ $\frac{١}{\sqrt[٣]{ص}}$ دص = $\int$ $\frac{١}{ص^{\frac{١}{٣}}}$ دص = ص$^{\frac{-١}{٣}}$ دص

= $\frac{٣}{٢}$ ص$^{\frac{٢}{٣}}$ + جـ = $\frac{٣}{٢}$ (س^{٢} + ٨)$^{\frac{٢}{٣}}$ + جـ = $\frac{٣}{٢}$ $\sqrt[٣]{(س^{٢} + ٨)^{٢}}$ + جـ

ق(٠) = $\frac{٣}{٢}$ $\sqrt[٣]{(٠)^{٢} + ٨)^{٢}}$ + جـ = ٤ <== $\frac{٣}{٢}$ × ٤ + جـ = ٤ <== جـ = -٢

∴ ق(س) = $\frac{٣}{٢}$ $\sqrt[٣]{(س^{٢} + ٨)^{٢}}$ - ٢

٣) جد قيمة ق(١) ، علما بأن ميل المماس لمنحنى ص = ق(س) عند النقطة (س ، ص) يساوي ٢٥ (٥س +٤)^{٤} ، وأن منحنى الاقتران ق يمر بالنقطة (-١ ، ٧).

الحل :

$$ق(س) = \int ق'(س)\,دس = \int ٢٥\,(٥س + ٤)^{٤}\,دس = ٢٥ \times \frac{(٥س + ٤)^{٥}}{٥ \times ٥} + جـ = (٥س + ٤)^{٥} + جـ$$

$$ق(-١) = (٥\times-١ + ٤)^{٥} + جـ = ٧ \quad \Longleftarrow \quad -١ + جـ = ٧ \quad \Longleftarrow \quad جـ = ٨$$

$$\therefore ق(س) = (٥س + ٤)^{٥} + ٨ \quad \Longleftarrow \quad ق(١) = (٥ \times ١ + ٤)^{٥} + ٨ = ٩^{٥} + ٨ = ٥٩٠٥٧$$

٤) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ل عند النقطة (س ، ص) يعطى بالقاعدة : ل'(س) = ٢س (٤ – ٣س) ، فجد قاعدة الاقتران ل علما بأن منحناه يمر بالنقطة (٠ ، ٣).

الحل :

$$ل(س) = \int ل'(س)\,دس = \int ٢س\,(٤ - ٣س)\,دس = \int (٨س - ٦س^{٢})\,دس = ٤س^{٢} - ٢س^{٣} + جـ$$

$$ل(٠) = ٤ \times (٠)^{٢} - ٢\,(٠)^{٣} + جـ = ٣ \quad \Longleftarrow \quad جـ = ٣$$

$$\therefore ل(س) = ٤س^{٢} - ٢س^{٣} + ٣$$

٥) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران هـ يعطى بالقاعدة هـ' (س) = $\frac{٢س^{٢} - ٥س}{س}$ ، س ≠ ٠ ، فجد هـ (٢) ، علما بأن منحنى الاقتران هـ يمر بالنقطة (-١ ، ٥) .

الحل :

$$هـ(س) = \int هـ'(س)\,د\,س = \int \frac{٢س^{٢} - ٥س}{س}\,دس = \int (٢س - ٥)\,دس = س^{٢} - ٥س + جـ$$

$$هـ(-١) = (-١)^{٢} - ٥ \times -١ + جـ = ٥ \quad \Longleftarrow \quad ١ + ٥ + جـ = ٥ \quad \Longleftarrow \quad جـ = -١$$

$$\therefore هـ(س) = س^{٢} - ٥س - ١$$

$$هـ(٢) = (٢)^{٢} - ٥ \times ٢ - ١ = ٤ - ١٠ - ١ = -٧$$

أن تحقق هدفاً صغيراً كل يوم يعلو بك على سلم النجاح ،، خير لك من الوقوف في مكانك وانتظار المجهول .

>> تدريب (١) صفحة ١٩٠

١) يتحرك جُسيم على خط مستقيم ، وتعطى سرعته بالعلاقة : ع(ن) = (٢ن – ٥) م/ث ، حيث ن : الزمن بالثواني. جد موقع الجسيم بعد ثانيتين من بدء الحركة، علما بأن موقعه الابتدائي ف(٠) = ٣م.

٢) يتحرك جُسيم على خط مستقيم بحيث إن سرعته بعد مرور (ن) ثانية من بدء الحركة تعطى بالعلاقة : ع(ن) = (٦)(١ – ٢ن)^{٢} م/ث. جد موقعه بعد مرور ثانية واحدة من بدء الحركة، علما بأن موقعه الابتدائي ف(٠) = ٥م.

الحل :

١) ف (ن) = $\int$ ع (ن) دن $\int$ = $\int$ (٢ن – ٥) دن = ن^{٢} – ٥ن + جـ

ف(٠) = ٣ <== (٠)^{٢} – ٥ (٠) + جـ = ٣ <== جـ = ٣

∴ ف (ن) = ن^{٢} – ٥ن + ٣

ف(٢) = (٢)^{٢} – ٥(٢) + ٣ = ٤ – ١٠ + ٣ = - ٣م

٢) ف (ن) = $\int$ ع (ن) دن $\int$ = $\int$ (٦)(١ – ٢ن)^{٢}) دن = $\int$ (٦ (١ – ٤ن + ٤ن^{٢}) دن

= $\int$ (٦ – ٢٤ن + ٢٤ن^{٢}) دن = ٦ن – ١٢ن^{٢} + ٨ ن^{٣} + جـ

ف (٠) = ٦×٠ – ١٢×(٠)^{٢} + ٨ ×(٠)^{٣} + جـ = ٥ <== جـ = ٥

∴ ف(ن) = ٦ن – ١٢ن^{٢} + ٨ ن^{٣} + ٥

ف(١) = ٦ × ١ – ١٢ × (١)^{٢} + ٨ × (١)^{٣} + ٥ = ٦ – ١٢ + ٨ + ٥ = ٧ م

>> تدريب (٢) صفحة ١٩١

يتحرك جسيم على خط مستقيم ، وبتسارع ثابت مقدارة ت(ن) = -١٢ م/ث^{٢}. إذا كانت سرعته الابتدائية ع(٠) = ٥ م/ث ، وموقعه الابتدائي ف(٠) = ٣م، فجد :

١) سرعة الجسيم بعد مرور أربع ثوانٍ من بدء الحركة.

٢) موقع الجسيم بعد مرور ثلاث ثوانٍ من بدء الحركة.

ملاحظة تجد شرح هذه الوحدة مع حلول أسئلة الكتاب على قناتي في اليوتيوب باسم "سلسبيل الخطيب"

الحل :

١) ع (ن) = $\int$ ت (ن) د ن = $\int$ -١٢ دن = -١٢ن + جـ

ع(٠) = -١٢ × ٠ + جـ = ٥ <== جـ = ٥

∴ ع (ن) = -١٢ن + ٥

ع (٤) = -١٢ × ٤ + ٥ = -٤٨ + ٥ = -٤٣ م/ث

٢) ف (ن) = $\int$ ع (ن) دن = $\int$ (-١٢ن + ٥) دن = -٦ن^{٢} + ٥ن + جـ

ف (٠) = -٦×(٠)^{٢} + ٥×٠ + جـ = ٣ <== جـ = ٣

∴ ف(ن) = -٦ن^{٢} + ٥ن + ٣

ف (٣) = -٦(٣)^{٢} + ٣×٥ + ٣ = -٥٤ + ١٥ + ٣ = -٣٦ م/ث

الأسئلة

١) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث إن سرعته بعد مرور ن ثانية من بدء حركته تعطى بالعلاقة : ع(ن) = (١٢ جتا (٢ن – ١)) م/ث . جد القاعدة التي تمثل موقع الجسيم بعد مرور ن ثانية من بدء الحركة.

الحل :

ف (ن) = $\int$ ع (ن) دن = $\int$ ١٢ جتا (٢ن – ١) دن = ١٢ × $\frac{\text{جا (٢ن – ١)}}{٢}$ + جـ

∴ ف (ن) = ٦ جا (٢ن – ١) + جـ

٢) تتحرك نقطة مادية على خط مستقيم بحيث إن سرعته بعد مرور ن ثانية من بدء حركتها تعطى بالعلاقة : ع(ن) = (٤ن + ٨) م/ث. جد موقع النقطة المادية بعد مرور أربع ثوانٍ من بدء حركتها ، علما بأن موقعها الابتدائي ف (٠) = ٢م.

الحل :

ف (ن) = $\int$ ع (ن) دن = $\int$ (٤ن + ٨) دن = ٢ن^{٢} + ٨ن + جـ

ف (٠) = ٢ <== ٢(٠)^{٢} + ٨(٠) + جـ = ٢ <== جـ = ٢

∴ ف (ن) = ٢ن^{٢} + ٨ن + ٢ <== ف (٤) = ٢(٤)^{٢} + ٨ × ٤ + ٢ = ٦٦م

ملاحظة تجد شرح هذه الوحدة مع حلول أسئلة الكتاب على قناتي في اليوتيوب باسم "سلسبيل الخطيب"

٣) إذا كان تسارع جسيم يسير بخط مستقيم بعد مرور ن ثانية من بدء الحركة تعطى بالعلاقة :

ت (ن) = ٤٨ (١ – ٢ن)^{٣} م/ث^{٢} ، وكان موقعه الابتدائي ف(٠) = ٣م ، وسرعته الابتدائية ع(٠) = ٢م/ث، فجد :

أ) سرعة الجسيم بعد مرور ثانية واحدة من بدء الحركة.

ب) موقع الجسيم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة.

الحل :

أ) ع (ن) = $\int$ ت (ن) دن = $\int$ ٤٨ (١ – ٢ن)^{٣} دن = ٤٨ × $\frac{(١ - ٢ن)^{٤}}{٤ \times ٢-}$ + جـ =

= -٦ (١ – ٢ن)^{٤} + جـ

ع (٠) = -٦ (١ – ٢×٠)^{٤} + جـ = ٢ ⟸ جـ = ٨

∴ ع (ن) = -٦ (١ – ٢ن)^{٤} + ٨

ع (١) = -٦ (١ – ٢×١)^{٤} + ٨ = -٦ + ٨ = ٢م/ث

ب) ف (ن) = $\int$ ع (ن) دن = $\int$ (-٦ (١ – ٢ن)^{٤} + ٨) دن = -٦ × $\frac{(١ - ٢ن)^{٥}}{٥ \times ٢-}$ + ٨ ن + جـ

= $\frac{٣}{٥}$ (١ – ٢ن)^{٥} + ٨ن + جـ

ف (٠) = $\frac{٣}{٥}$ (١ – ٢×٠)^{٥} + ٨×٠ + جـ = ٣ ⟸ $\frac{٣}{٥}$ + جـ = ٣ ⟸ جـ = $\frac{١٢}{٥}$

∴ ف (ن) = $\frac{٣}{٥}$ (١ – ٢ن)^{٥} + ٨ن + $\frac{١٢}{٥}$

ف (٢) = $\frac{٣}{٥}$ (١ – ٢×٢)^{٥} + ٢×٨ + $\frac{١٢}{٥}$ ⟸ ف (٢) = $\frac{-٦٣٧}{٥}$ م

٤) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث إن سرعته بعد مرور ن ثانية من بدء الحركة تعطى بالقاعدة :

ع(ن) = (٣ن – ١) (٤ن + ١) م/ث. جد:

أ) القاعدة التي تمثل موقع الجسيم بعد مرور ن ثانية من بدء الحركة.

ب) موقع الجسيم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة ، علما بأن موقعه الابتدائي ف(٠) = ٧م.

الحل :

أ) ف (ن) = $\int$ ع (ن) دن = $\int$ (٣ن – ١) (٤ن + ١) دن = $\int$ (١٢ن^{٢} – ن – ١) دن

∴ ف (ن) = ٤ن^{٣} – $\frac{ن^{٢}}{٢}$ – ن + جـ

ب) ف (٠) = ٤(٠)^{٣} - $\frac{(٠)^{٢}}{٢}$ - ٠ + جـ = ٧ ==> جـ = ٧

ف (ن) = ٤ن^{٣} - $\frac{ن^{٢}}{٢}$ - ن + ٧

ف (٢) = ٤ (٢)^{٣} - $\frac{(٢)^{٢}}{٢}$ - ٢ + ٧ = ٣٢ - ٢ - ٢ + ٧ = ٣٥ م

ثالثا المساحة The Area

>> تدريب (١) صفحة ١٩٨

جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = ق(س) ، ومحور السينات على الفترة المحددة في كل مما يأتي:-



ملاحظة تجد شرح هذه الوحدة مع حلول أسئلة الكتاب على قناتي في اليوتيوب باسم "سلسبيل الخطيب"

١) ق(س) = ١٢ - ٤س ، على الفترة [١ ، ٢]

٢) ق(س) = ٣س^{٢} - ١٢س ، على الفترة [٠ ، ٢]

٣) ق(س) = ٦ - ٢س ، على الفترة [١ ، ٤]

الحل :

١) ق(س) = ١٢ - ٤س ، على الفترة [١ ، ٢]

١٢ - ٤س = ٠ ==> س = ٣

$$\int_{١}^{٢} ق(س)\,دس = \int_{١}^{٢} (١٢ - ٤س)\,دس = \Big[(١٢س - ٢س^{٢})\Big]_{١}^{٢}$$

$$= (١٢ \times ٢ - ٢ \times ٢^{٢}) - (١٢ \times ١ - ٢ \times ١^{٢})$$

$$= (٢٤ - ٨) - (١٢ - ٢) = ١٦ - ١٠ = ٦$$

∴ م = $\int_{١}^{٢} |ق(س)|\,دس$ = ٦ وحدة مربعة

٢) ق(س) = ٣س^{٢} - ١٢س ، على الفترة [٠ ، ٢]

٣س^{٢} - ١٢س = ٠ ==> ٣س (س - ٤) = ٠ ==> س = ٠ ، س = ٤

$$\int_{٠}^{٢} ق(س)\,د س = \int_{٠}^{٢} (٣س^{٢} - ١٢س)\,دس = \Big[(س^{٣} - ٦س^{٢})\Big]_{٠}^{٢} = ((٢)^{٣} - ٦ (٢)^{٢} - صفر) = -١٦$$

∴ م = $\int_{٠}^{٢} |ق(س)|\,دس$ = ١٦ وحدة مربعة

٣) ق(س) = ٦ – ٢س ، على الفترة [١ ، ٤]



٦ – ٢س = ٠ ==> س = ٣ لاحظ أن س = ٣ تقع ضمن الفترة

$$* \int_{1}^{3} ق(س)\,دس = \int_{1}^{3} (٦ - ٢س)\,دس = [٦س - س^{٢}]_{1}^{3} = (٦\times٣ - (٣)^{٢}) - (٦\times١ - (١)^{٢})$$

$$= (١٨ - ٩) - (٦ - ١) = ٩ - ٥ = ٤$$

$$\therefore م_{١} = \int_{1}^{3} |ق(س)|\,دس = ٤ \text{ وحدة مربعة}$$

$$* \int_{3}^{4} ق(س)\,دس = \int_{3}^{4} (٦ - ٢س)\,دس = [٦س - س^{٢}]_{3}^{4} = (٦\times٤ - (٤)^{٢}) - (٦\times٣ - (٣)^{٢})$$

$$= (٢٤ - ١٦) - (١٨ - ٩) = ٨ - ٩ = -١$$

$$\therefore م_{٢} = \int_{3}^{4} |ق(س)|\,دس = ١ \text{ وحدة مربعة}$$

∴ المساحة الكلية = م١ + م٢ = ٤ + ١ = ٥ وحدات مربعة

>> تدريب (٢) صفحة ١٩٨

جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = ق(س) = س^{٢} – ٢س – ٣ ، ومحور السينات.

الحل :

تعتبر حدود التكامل

س^{٢} – ٢س – ٣ = صفر ==> (س – ٣) (س + ١) = ٠ ==> س = ٣ ، س = -١

$$\int_{-1}^{3} (س^{٢} - ٢س - ٣)\,دس = \left[\frac{س^{٣}}{٣} - س^{٢} - ٣س\right]_{-1}^{3}$$

$$= \left(\frac{(٣)^{٣}}{٣} - (٣)^{٢} - ٣\times٣\right) - \left(\frac{(-١)^{٣}}{٣} - (-١)^{٢} - ٣\times-١\right)$$

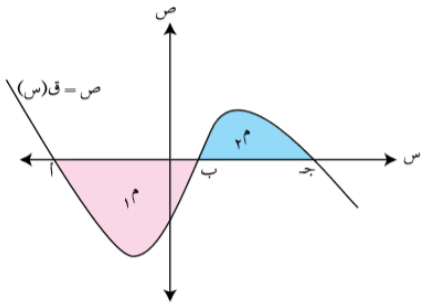
$$= (٩ - ٩ - ٩) - \left(\frac{-١}{٣} + ١ + ٣\right) = -٩ - \left(٢ + \frac{-١}{٣}\right) = -٩ - \frac{٥}{٣} = \frac{-٣٢}{٣}$$

$$\therefore م = \int_{-1}^{3} |ق(س)|\,دس = \frac{٣٢}{٣} \text{ وحدة مربعة}$$

القلق لا يمنع ألم الغد ،، لكنه يسرق متعة اليوم .

>> تدريب (٣) صفحة ١٩٩

يمثل الشكل المجاور منحنى الاقتران ص = ق(س) ، فإذا كانت المساحة م١ = ٨ وحدات مربعة ، والمساحة م٢ = ٥ وحدات مربعة ، فجد قيمة كل مما يأتي ، مبررا إجابتك .



١) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ ق (س) دس = -٨ ؛ لأن ق (س) تحت محور السينات

٢) $\int_{\text{ب}}^{\text{جـ}}$ ق (س) دس = +٥ ؛ لأن ق (س) فوق محور السينات

٣) $\int_{\text{أ}}^{\text{جـ}}$ ق(س) دس = $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ ق(س) دس + $\int_{\text{ب}}^{\text{جـ}}$ ق(س) دس = -٨ + ٥ = -٣

٤) مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق ومحور السينات على الفترة [أ ، جـ]

م = م١ + م٢ = ٨ + ٥ = ١٣ وحدة مربعة

الأسئلة

١) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = ق(س) ، ومحور السينات والمستقيمين المحددين في كل مما يأتي :-

أ) ق (س) = ١٢ ، س = -١ ، س = ٢

ب) ق (س) = ٥ – ٢س ، س = -٢ ، س = ٢

جـ) ق(س) = ٣س^{٢} – ٣ ، س = -٢ ، س = -٤

ملاحظة تجد شرح هذه الوحدة مع حلول أسئلة الكتاب على قناتي في اليوتيوب باسم "سلسبيل الخطيب"

الحل :

أ) ق (س) = ١٢ ، س = -١ ، س = ٢ المنحنى اقتران ثابت لا يقطع محور السينات

$\int_{-١}^{٢}$ ق (س) دس = $\int_{-١}^{٢}$ ١٢ دس = [١٢س]$_{-١}^{٢}$ = (١٢ × ٢ – ١٢ × -١) = ٢٤ + ١٢ = ٣٦

∴ م = $\int_{-١}^{٢}$ | ق (س) | دس = ٣٦ وحدة مربعة

ب) ق (س) = ٥ – ٢س ، س = -٢ ، س = ٢

٥ – ٢س = ٠ ⟸ س = ٢,٥ لا تقع ضمن الفترة [-٢ ، ٢]

$$\int_{-٢}^{٢} ق(س)\,دس = \int_{-٢}^{٢} (٥ - ٢س)\,دس = [٥س - س^{٢}]_{-٢}^{٢} = (٥\times٢ - (٢)^{٢}) - (٥\times(-٢) - (-٢)^{٢})$$

$$= (١٠ - ٤) - (-١٠ - ٤) = ٦ + ١٤ = ٢٠$$

$$\therefore م = \int_{-٢}^{٢} |ق(س)|\,دس = ٢٠ \text{ وحدة مربعة}$$

جـ) ق(س) = ٣س^{٢} – ٣ ، س = -٢ ، س = -٤

٣س^{٢} – ٣ = ٠ ⟸ س = +١ ، س = -١ لا يقع أي منهما ضمن الفترة [-٢ ، -٤]

$$\int_{-٤}^{-٢} ق(س)\,دس = \int_{-٤}^{-٢} (٣س^{٢} - ٣)\,دس = [س^{٣} - ٣س]_{-٤}^{-٢} = ((-٢)^{٣} - ٣\times(-٢)) - ((-٤)^{٣} - ٣\times(-٤))$$

$$= (-٨ + ٦) - (-٦٤ + ١٢) = -٢ + ٥٢ = ٥٠$$

$$\therefore م = \int_{-٤}^{-٢} |ق(س)|\,دس = ٥٠ \text{ وحدة مربعة}$$

٢) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = ق(س) ، ومحور السينات على الفترة المحددة في كل مما يأتي :-

أ) ق (س) = ٦ - ٦س^{٢} ، على الفترة [-٢ ، ٠]

ب) ق (س) = ٤س^{٣} ، على الفترة [-١ ، ١]

جـ) ق (س) = ٣س^{٢} – ٤٨ ، على الفترة [٣ ، ٥]

د) ق (س) = - س^{٢} – ٤ ، على الفترة [-١ ، ١]

الحل :

أ) ق (س) = ٦ - ٦س^{٢} ، على الفترة [-٢ ، ٠]

٦ – ٦س^{٢} = ٠ ⟸ س = +١ ، س = -١



لاحظ أن س = -١ تقع ضمن الفترة المعطاة

$$* \int_{-٢}^{-١} (٦ - ٦س^{٢})\,دس = [٦س - ٢س^{٣}]_{-٢}^{-١} = (٦\times(-١) - ٢(-١)^{٣}) - (٦\times(-٢) - ٢\times(-٢)^{٣})$$

$$= (-٦ - -٢) - (-١٢ - -١٦) = -٤ - ٤ = -٨$$

∴ م١ = $\int_{-٢}^{-١}$ | ق (س) | دس = ٨ وحدة مربعة

* $\int_{-١}^{-١}$ (٦ – ٦س^{٢}) دس = [٦س – ٢س^{٣}] = (٦×٠ – ٢(٠)^{٣}) – (٦×-١ – ٢(-١)^{٣})

= صفر – (-٦ +٢) = ٠ - -٤ = ٤

∴ م٢ = $\int_{-١}^{-١}$ | ق (س) | دس = ٤ وحدة مربعة

∴ المساحة الكلية = م١ + م٢ = ٨ + ٤ = ١٢ وحدة مربعة

ب) ق (س) = ٤س^{٣} ، على الفترة [-١ ، ١]

٤س^{٣} = ٠ ==> س = ٠ تقع ضمن الفترة المعطاة

إذن هنا نجزأ لتكامل



* $\int_{-١}^{-١}$ ٤س^{٣} دس = [س^{٤}] = (٠)^{٤} – (-١)^{٤} = (٠ – ١) = -١

∴ م١ = $\int_{-١}^{-١}$ | ق (س) | دس = ١ وحدة مربعة

* $\int_{٠}^{١}$ ٤س^{٣} دس = [س^{٤}] = (١)^{٤} – (٠)^{٤} = ١ – ٠ = ١

∴ م٢ = $\int_{٠}^{١}$ | ق (س) | دس = ١ وحدة مربعة

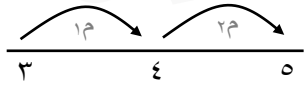
∴ المساحة الكلية = م١ + م٢ = ١ + ١ = ٢ وحدة مربعة

جـ) ق (س) = ٣س^{٢} – ٤٨ ، على الفترة [٣ ، ٥]

٣س^{٢} – ٤٨ = ٠ ==> س = -٤ ، س = +٤

لاحظ أن س = ٤ تقع ضمن الفترة المعطاة

إذن هنا نجزأ لتكامل



* $\int_{٣}^{٤}$ (٣س^{٢} – ٤٨) دس = (س^{٣} – ٤٨س) = ((٤)^{٤} – ٤٨ × ٤) – ((٣)^{٣} – ٤٨ × ٣)

= (٦٤ – ١٩٢) – (٢٧ – ١٤٤) = -١١

∴ م٢ = $\int_{٣}^{٤}$ | ق (س) | دس = ١١ وحدة مربعة

* $\int_{٤}^{٥}$ (٣س^{٢} – ٤٨) دس = (س^{٣} – ٤٨س)$\Big]_{٤}^{٥}$ = ((٥)^{٣} – ٤٨ ×٥) - ((٤)^{٤} – ٤٨ × ٤)

= (١٢٥ – ٢٤٠) – (٦٤ – ١٩٢) = ١٣

∴ م٢ = $\int_{٣}^{٤}$ | ق (س) | دس = ١٣ وحدة مربعة

∴ المساحة الكلية = م١ + م٢ = ١١ + ١٣ = ٢٤ وحدة مربعة

د) ق (س) = - س^{٢} – ٤ ، على الفترة [-١ ، ١]

- س^{٢} – ٤ = ٠ عبارة تربيعية لا تحلل

$\int_{-١}^{١}$ (- س^{٢} - ٤) دس = (- $\frac{س^{٣}}{٣}$ - ٤س)$\Big]_{-١}^{١}$ = (- $\frac{(١)^{٣}}{٣}$ - ٤ × ١) – (- $\frac{(-١)^{٣}}{٣}$ - ٤ × -١)

= - $\frac{١}{٣}$ - ٤ – ($\frac{١}{٣}$ + ٤) = - $\frac{٢}{٣}$ - ٨ = - $\frac{٢٦}{٣}$

∴ م = $\int_{-١}^{١}$ | ق (س) | دس = $\frac{٢٦}{٣}$ وحدة مربعة

٣) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = ق(س) ، ومحور السينات في كل مما يأتي :-

أ) ق (س) = ٤س – س^{٢}

ب) ق (س) = ٤س^{٣} – ١٢س^{٢}

الحل :

أ) ق (س) = ٤س – س^{٢}

تعتبر حدود التكامل

٤س – س^{٢} = ٠ ==> س (٤ – س) = ٠ ==> س = ٠ ، س = ٤

$\int_{٠}^{٤}$ (٤س – س^{٢}) دس = (٢س^{٢} – $\frac{س^{٣}}{٣}$)$\Big]_{٠}^{٤}$ = (٢ × (٤)^{٢} – $\frac{(٤)^{٣}}{٣}$) – صفر = ٣٢ - $\frac{٦٤}{٣}$ = $\frac{٣٢}{٣}$

∴ م = $\int_{٠}^{٤}$ | ق (س) | دس = $\frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة

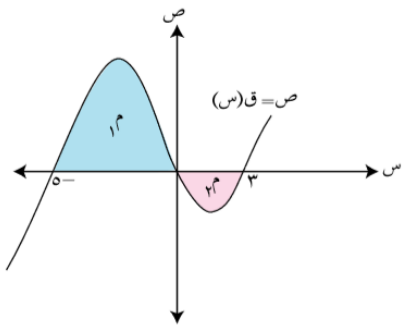
ب) ق (س) = ٤س^{٣} – ١٢س^{٢}

٤س^{٣} – ١٢س^{٢} = ٠ <==> ٤س^{٢}(س – ٣) = ٠ <==> س = ٠ ، س = ٣

$\int_{٠}^{٣}$ (٤س^{٣} – ١٢س^{٢}) دس = [س^{٤} – ٤س^{٣}]$_{٠}^{٣}$ = ((٣)^{٤} – ٤ × (٣)^{٣}) – صفر = ٨١ – ١٠٨ = – ٢٧

∴ م = $\int_{٠}^{٣}$ | ق (س) | دس = ٢٧ وحدة مربعة

٤) يمثل الشكل منحنى الاقتران ص = ق (س) ، فإذا كانت المساحة م$_{١}$ = ١٣ وحدة مربعة ، والمساحة م$_{٢}$ = ٣ وحدات مربعة ، فجد قيمة $\int_{-٥}^{٣}$ ق(س) دس ، مبررا إجابتك.



الحل :

$\int_{-٥}^{٣}$ ق(س) دس = $\int_{-٥}^{٠}$ ق(س) دس + $\int_{٠}^{٣}$ ق(س) دس

* $\int_{-٥}^{٠}$ ق(س) دس = +١٣ لأن منحنى الاقتران ق فوق محور السينات

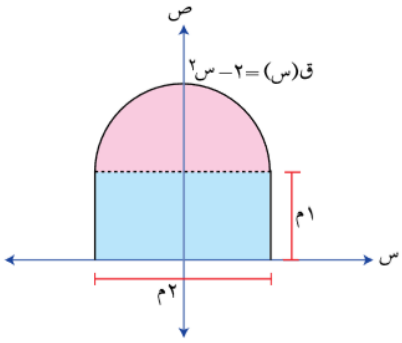
* $\int_{٠}^{٣}$ ق(س) دس = -٣ لأن منحنى الاقتران ق تحت محور السينات

∴ $\int_{-٥}^{٣}$ ق(س) دس = ١٣ + -٣ = ١٠

٥) يمثل الشكل نافذة على شكل مستطيل طول قاعدته ٢م ، وارتفاعه ١م ، يعلوه منحنى يعطى بالقاعدة

ص = ق(س) = ٢ – س^{٢}

إذا أردنا وضع زجاج على النافذة ، وكانت تكلفة المتر المربع الواحد منه خمسة دنانير ، فما التكلفة الكلية لزجاج النافذة ؟



الحل :

* التكلفة الكلية للنافذة = مساحة النافذة × تكلفة المتر المربع الواحد

$= \quad م_{\text{النافذة}} \quad \times \quad ٥$

* $م_{\text{النافذة}}$ = مساحة المستطيل + المساحة تحت المنحنى

- مساحة المستطيل = الطول × العرض = ٢ × ١ = ٢ $م^{٢}$

- المساحة تحت المنحنى $= \int_{-١}^{١} |\ ق(س)\ |\ دس = \int_{-١}^{١} |\ (٢ - س^{٢})\ |\ دس = \left[٢س - \frac{س^{٣}}{٣} \right]_{-١}^{١}$

$= (٢ \times ١ - \frac{(١)^{٣}}{٣}) - (٢ \times -١ - \frac{(-١)^{٣}}{٣}) = (٢ - \frac{١}{٣}) - (-٢ - \frac{١}{٣})$

$= ٢ - \frac{١}{٣} + ٢ + \frac{١}{٣} = ٤ - \frac{٢}{٣} = \frac{١٠}{٣}$ وحدة مربعة

* $م_{\text{النافذة}}$ = مساحة المستطيل + المساحة تحت المنحنى $= ٢ + \frac{١٠}{٣} = \frac{١٦}{٣}$ وحدة مربعة

∴ التكلفة الكلية $= \frac{١٦}{٣} \times ٥ = \frac{٨٠}{٣}$ دينار.

الفصل الثالث : الاقتران (اللوغاريتمي الطبيعي والأسي الطبيعي وتطبيقاتيهما)

أولا الاقترانان : اللوغاريتمي الطبيعي والأسي الطبيعي

Natural Logarithmic and Natural Exponential Functions

>> تدريب (١) صفحة ٢٠٣

إذا كان ق (س) = لو$_{هـ}$ م(س) ، م(س) > ٠ ، وكان م اقترانا قابلا للاشتقاق ، فأثبت أن

ق$'$ (س) $= \frac{م'(س)}{م(س)}$ مستخدما قاعدة السلسلة.

ملاحظة تجد شرح هذه الوحدة مع حلول أسئلة الكتاب على قناتي في اليوتيوب باسم "سلسبيل الخطيب"

الحل :

افرض ع = م (س) <=== $م'(س) = \frac{د\ ع}{د\ س}$

ص = ق(س) = لو$_{هـ}$ م(س) = لو$_{هـ}$ ع <=== $\frac{د\ ص}{د\ ع} = \frac{١}{ع}$

∴ $\frac{د\ ص}{د\ س} = \frac{د\ ص}{د\ ع} \times \frac{د\ ع}{د\ س} = م'(س) \times \frac{١}{ع} = م'(س) \times \frac{١}{م(س)} = \frac{م'(س)}{م(س)}$

>> تدريب (٢) صفحة ٢٠٤

جد قَ (س) في كل مما يأتي :-

١) ق(س) = لو$_{هـ}$ جتا س

٢) ق(س) = لو$_{هـ}$ $\frac{٢}{س}$ ، س > ٠

٣) ق(س) = لو$_{هـ}$ (س^{٣} + ٨) ، س > -٢

الحل :

١) ق(س) = لو$_{هـ}$ جتا س ،،،،، قَ (س) = $\frac{-\text{جاس}}{\text{جتاس}}$

٢) ق(س) = لو$_{هـ}$ $\frac{٢}{س}$ ، س > ٠ ،،،،، قَ (س) = $\frac{\frac{-٢}{س^{٢}}}{\frac{٢}{س}}$ = $\frac{-٢ \times س}{٢ \times س^{٢}}$ = $\frac{-١}{س}$

٣) ق(س) = لو$_{هـ}$ (س^{٣} + ٨) ، س > -٢ ،،،،، قَ (س) = $\frac{٣س^{٢}}{س^{٣} + ٨}$

>> تدريب (٣) صفحة ٢٠٤

إذا كان ق(س) = لو (أس + ٣) ، حيثُ أ ثابت ، وكان قَ (-٢) = ١ ، فجد قيمة الثابت أ.

الحل :

قَ (س) = $\frac{أ}{أس + ٣}$ ==> ق (-٢) = $\frac{أ}{أ \times -٢ + ٣}$ = ١

أ = -٢أ + ٣ ==> ٣أ = ٣ ==> أ = ١

>> تدريب (٣) صفحة ٢٠٤

إذا كان ق(س) = لو$_{هـ}$| س | (حيثُ س ≠ ٠) ، فجد قَ(س).

الحل :

أعد تعريف الاقتران دون استخدام رمز القيمة المطلقة

$$| س | = \begin{cases} س & ، \quad س > ٠ \\ -س & ، \quad س < ٠ \end{cases}$$

ق (س) = لو$_{هـ}$ س عندما س > ٠ ==> قَ (س) = $\frac{١}{س}$

ق (س) = لو$_{هـ}$ -س ، عندما س < ٠ ==> قَ (س) = $\frac{-١}{-س}$ = $\frac{١}{س}$

<< تدريب (٥) صفحة ٢٠٥

جد قيمة كل تكامل مما يأتي :-

١) $\int \frac{-٣}{س}$ دس ، س $\neq$ ٠ ،،،، $\int \frac{-٣}{س}$ دس $= -٣ \int \frac{١}{س}$ دس $= -٣$ لو$_{هـ}$ | س | + جـ

٢) $\int (٦س^{٢} - ٤)(س^{٣} - ٢س + ١)^{-١}$ دس $= \int \frac{٦س^{٢} - ٤}{س^{٣} - ٢س + ١}$ دس

افرض ص = $س^{٣} - ٢س + ١$

$\frac{دص}{دس} = ٣س^{٢} - ٢$ ==> دس $= \frac{دص}{٣س^{٢} - ٢}$

$\therefore \int \frac{٦س^{٢} - ٤}{س^{٣} - ٢س + ١}$ دس $= \int \frac{٦س^{١} - ٤}{ص} \frac{دص}{٣س^{٢} - ٢} = \int \frac{٢}{ص}$ دص $= ٢ \int \frac{١}{ص}$ دص

$= ٢$ لو$_{هـ}$ | ص | + جـ $= ٢$ لو$_{هـ}$ | $س^{٣} - ٢س + ١$ | + جـ

<< تدريب (٦) صفحة ٢٠٦

إذا كان ق (س) = $هـ^{ل(س)}$ ، وكان ل (س) اقترانا قابلا للاشتقاق ، فأثبت أن

قَ (س) = لَ (س) $هـ^{ل(س)}$ مستخدما قاعدة السلسلة.

الحل :

افرض ع = ل (س) ==> $\frac{د ع}{د س}$ = لَ (س)

ص = ق(س) = $هـ^{ل(س)}$ = $هـ^{ع}$ ==> $\frac{د ص}{د ع}$ = $هـ^{ع}$

$\therefore \frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$ = $هـ^{ع} \times$ لَ (س) = $هـ^{ل(س)} \times$ لَ (س) = لَ (س) $هـ^{ل(س)}$

<< تدريب (٧) صفحة ٢٠٧

جد صَ في كل مما يأتي :-

١) ص = $هـ^{-س^{٢}}$ ==> صَ = $-٢س هـ^{-س^{٢}}$

٢) ص = $هـ^{جتا٢س}$ ==> صَ = $-٢جا٢س هـ^{جتا٢س}$

٣) ص = هـ^س لوس هـ (مشتقة ضرب)

ص' = هـ^س × ١/س + لوس هـ × هـ^س = هـ^س/س + هـ^س لوس هـ

٤) ص = هـ^٣س / (س^٢ + ١) (مشتقة قسمة)

ص' = [(س^٢ + ١) × ٣هـ^٣س - هـ^٣س × ٢س] / (س^٢ + ١)^٢

>> تدريب (٨) صفحة ٢٠٧

اثبت أن ∫ هـ^(أس + ب) دس = هـ^(أس + ب)/أ + جـ ، حيثُ أ ، ب عددان حقيقيان ، أ ≠ ٠

الحل :

افرض ص = أس + ب ==> د ص / د س = أ ==> دس = د ص / أ

∴ ∫ هـ^(أس + ب) دس = ∫ هـ^ص د ص / أ = ١/أ ∫ هـ^ص دص = هـ^ص/أ + جـ = هـ^(أس + ب)/أ + جـ

>> تدريب (٩) صفحة ٢٠٨

جد قيمة كل من التكاملات الآتية :-

١) ∫ ١/٢ هـ^س دس = ١/٢ هـ^س + جـ

٢) ∫ ١/٣ هـ^(-٦س + ١) دس = ١/٣ × هـ^(-٦س + ١)/(-٦) + جـ = هـ^(-٦س + ١)/(-١٨) + جـ

٣) ∫ (٢ + ٣س^٢) هـ^(س^٣ + ٢س - ١) دس

افرض ص = س^٣ + ٢س - ١ ==> د ص / د س = ٣س^٢ + ٢ ==> د س = د ص / (٣س^٢ + ٢)

∴ ∫ (٢ + ٣س^٢) هـ^(س^٣ + ٢س - ١) دس = ∫ (٢ + ٣س^٢) هـ^ص د ص / (٣س^٢ + ٢) = ∫ هـ^ص دص = هـ^ص + جـ

= هـ^(س^٣ + ٢س - ١) + جـ

٤) $\int \frac{٦ \, دس}{هـ^{١ - ٢س}} = \int ٦ \, هـ^{-١ + ٢س} \, دس$ د س $= \frac{٦}{هـ^{١ - ٢س}}$ ((حسب قوانين الأسس $\frac{١}{هـ^{س}} = هـ^{-س}$))

$= ٦ \frac{هـ^{-١ + ٢س}}{٢} + جـ = ٣ هـ^{-١ + ٢س} + جـ$

الأسئلة



ملاحظة تجد شرح هذه الوحدة مع حلول أسئلة الكتاب على قناتي في اليوتيوب باسم "سلسبيل الخطيب"

١) جد قَ (س) في كل مما يأتي :-

أ) ق (س) $= \frac{١}{س} +$ لو$_{هـ}$ س $+ ٧ هـ^{٢س} + ٦$ ، س > ٠

ب) ق (س) $= ٣$ لو$_{هـ}$ س $- ٢ هـ^{٣ - ٢س} -$ س^{٢} ، س > ٠

جـ) ق (س) $= هـ^{جاس} - ٢$ لو$_{هـ}$ (جتا س)

الحل :

أ) قَ (س) $= - \frac{١}{س^{٢}} + \frac{١}{س} + ٧ \times ٢ هـ^{٢س} = - \frac{١}{س^{٢}} + \frac{١}{س} + ١٤ هـ^{٢س}$

ب) قَ (س) $= ٣ \times \frac{١}{س} - ٢ \times -٢ هـ^{٣ - ٢س} - ٢س = \frac{٣}{س} + ٤ هـ^{٣ - ٢س} - ٢س$

جـ) قَ (س) $=$ جتاس $هـ^{جاس} - ٢ \times \frac{- جاس}{جتاس} =$ جتاس $هـ^{جاس} +$ ٢ظاس

٢) جد قيمة كل من التكاملات الآتية :-

أ) $\int (٢هـ^{س} - \frac{١}{س} + ٣س^{٢}) \, دس = ٢هـ^{س} -$ لو$_{هـ}$ \| س \| $+ س^{٣} + جـ$

ب) $\int ٢٤ هـ^{١ + ٢س} \, دس = ٢٤ \times \frac{هـ^{١ + ٢س}}{٢} + جـ = ١٢ هـ^{١ + ٢س} + جـ$

جـ) $\int ٢س هـ^{١ - س^{٢}} \, دس$

افرض ص $= ١ - س^{٢}$ $\Longleftarrow$ $\frac{دص}{دس} = -٢س$ $\Longleftarrow$ دس $= \frac{دص}{-٢س}$

$\therefore \int ٢س هـ^{١ - س^{٢}} \, دس = \int ٢س هـ^{ص} \frac{دص}{-٢س} = - \int هـ^{ص} \, دص = - هـ^{ص} + جـ = - هـ^{١ - س^{٢}} + جـ$

د) $\int \left(\frac{٥}{س} - ٣ هـ^{٣س} - ٤\right)$ دس $= ٥$ لو$_{هـ}$ | س | $- ٣ \times \frac{هـ^{٣س}}{٣} - ٤$س $+$ جـ $= ٥$ لو$_{هـ}$ | س | $- هـ^{٣س} - ٤$س $+$ جـ

هـ) $\int \frac{٨ س}{س^{٢} + ٤}$ دس

افرض ص $= س^{٢} + ٤$ ==> $\frac{دص}{دس} = ٢س$ ==> دس $= \frac{دص}{٢س}$

∴ $\int \frac{٨ س}{س^{٢} + ٤}$ دس $= \int \frac{٨ س}{ص} \frac{دص}{٢س} = \int \frac{٤}{ص}$ دص $= ٤$ لو$_{هـ}$ | ص | $+$ جـ

$= ٤$ لو$_{هـ}$ | $س^{٢} + ٤$ | $+$ جـ

٣) إذا كان ميل المماس للاقتران ص $=$ ق(س) عند النقطة (س ، ص) يعطى بالقاعدة :

قَ(س) $= ٢ هـ^{٢س} + ٢س$ ، فجد قاعدة الاقتران ق ، علما بأن منحناه يمر بالنقطة (٠ ، ٤).

الحل :

ق (س) $= \int$ قَ(س) دس $= \int (٢هـ^{٢س} + ٢س)$ دس $= ٢هـ^{٢س} + س^{٢} +$ جـ

ق (٠) $= ٢هـ^{٠} + (٠)^{٢} +$ جـ $= ٤$ ==> $٢ +$ جـ $= ٤$ ==> جـ $= ٢$

∴ ق (س) $= ٢هـ^{٢س} + س^{٢} + ٢$

٤) تتحرك نقطة مادية على خط مستقيم بحيث إن سرعتها بعد ن ثانية من بدء حركتها تعطى بالقاعدة :

ع (ن) $= هـ^{ن+١} + \frac{٨}{ن}$ ، وإن ، ن > ٠ ، جد الاقتران الذي يمثل موقع النقطة المادية بعد مرور ن ثانية من بدء حركتها.

الحل :

ف (ن) $= \int$ ع (ن) دن $= \int (هـ^{ن+١} + \frac{٨}{ن})$ دن $= هـ^{ن+١} + ٨$ لو$_{هـ}$ | ن | $+$ جـ

أنا مُصمم على بلوغ الهدف ،، فإمّا أن أنجح ... وإمّا ... أن أنجح ♥

>> تدريب (١) صفحة ٢١٢

افترض يمان مبلغ ١٠٠٠٠ دينار من مصرف يحسب ربحًا مركبًا وفق قانون النمو ، بنسبة ربح مقدارها ٤% سنويا. جد جملة المبلغ الذي سيسدده يمان للمصرف بعد مرور خمس وعشرين سنة.

الحل :

ع. = ١٠٠٠٠ ، أ = $\frac{٤}{١٠٠}$ = ٠,٠٤ ، ن = ٢٥

جملة المبلغ = ع (ن) = ع. × هـ$^{\text{أن}}$

ع (٢٥) = ١٠٠٠٠ × (٢,٧)$^{\frac{٤}{١٠٠} \times ٢٥}$ = ١٠٠٠٠ × (٢,٧)^{١} = ١٠٠٠٠ × ٢,٧ = ٢٧٠٠٠ دينار

>> تدريب (٢) صفحة ٢١٢

يتناقص ثمن عقار بمرور الزمن ، وبصورة مستمرة منتظمة وفق قانون الاضمحلال بمعدل ٥% سنويا. فإذا كان ثمنه الأصلي ٨٠٠٠٠ دينار ، فكم يصبح ثمنه بعد مرور ٤٠ سنة؟

الحل :

ع. = ٨٠٠٠٠ ، أ = $\frac{-٥}{١٠٠}$ = ٠,٠٥ - ، ن = ٤٠

ثمن العقار = ع (ن) = ع. × هـ$^{\text{أن}}$

ع (٤٠) = ٨٠٠٠٠ × (٢,٧)$^{\frac{-٥}{١٠٠} \times ٤٠}$ = ٨٠٠٠٠ × (٢,٧)$^{-٢}$ = ٨٠٠٠٠ × $\frac{١}{(٢,٧)^{٢}}$ = ١٠٩٧٣,٩ دينار

الأسئلة

١) تتكاثر البكتيريا بصورة مستمرة ومنتظمة وفق قانون النمو بنسبة ٢٠٠% في الساعة. جد عددها بعد نصف ساعة، علما بأن عددها الابتدائي (٥٠٠٠٠٠).

الحل :

ع. = ٥٠٠٠٠٠ ، أ = $\frac{٢٠٠}{١٠٠}$ ، ن = $\frac{١}{٢}$ ساعة

عدد البكتيريا = ع (ن) = ع. × هـ$^{\text{أن}}$

ع ($\frac{١}{٢}$) = ٥٠٠٠٠٠ × (٢,٧)$^{\frac{٢٠٠}{١٠٠} \times \frac{١}{٢}}$ = ٥٠٠٠٠٠ × (٢,٧)^{١} = ١٣٥٠٠٠٠

ملاحظة تجد شرح هذه الوحدة مع حلول أسئلة الكتاب على قناتي في اليوتيوب باسم "سلسبيل الخطيب"

٢) يتناقص ثمن سيارة بمرور الزمن، وبصورة مستمرة منتظمة وفق قانون الاضمحلال، وبمعدل ٨% سنويا. فإذا كان ثمنها الأصلي ١٢٥٨٠ دينارا، فجد ثمنها بعد مرور ٢٥ سنة.

الحل :

ع. = ١٢٥٨٠ ، أ = - ٠,٠٨ = $\frac{-٨}{١٠٠}$ ، ن = ٢٥

ثمن السيارة = ع (ن) = ع. × هـ^{أن}

ع (٢٥) = ١٢٥٨٠ × (٢,٧)$^{\frac{-٨}{١٠٠} \times ٢٥}$ = ١٢٥٨٠ × (٢,٧)$^{-٢}$ = $\frac{١}{(٢,٧)^{٢}}$ × ١٢٥٨٠ = ١٧٢٥,٦٥

٣) يذوب ملح في الماء، وتخضع كتلة الملح المتبقية من دون الذوبان في الماء لقانون الاضمحلال.
إذا وضعت ١٠ كيلوغرامات من الملح في الماء، فذاب نصف الكمية بعد مرور ربع ساعة، فجد كتلة الملح المتبقية من دون الذوبان في الماء بعد ساعة وربع الساعة.

الحل :

ع. = ١٠ ، أ = ؟؟ ، ن$_{١}$ = $\frac{١}{٤}$ ، ع ($\frac{١}{٤}$) = ٥ (كمية الملح دون ذوبان بعد ربع ساعة) معطيات

المطلوب : كتلة الملح المتبقية دون الذوبان في الماء بعد ساعة وربع الساعة ، أي بعد ساعة وربع

$\frac{١}{٤}$ ساعة + ١ ساعة = $\frac{١}{٤}$ + ١ = $\frac{١}{٤}$ + $\frac{٤}{٤}$ = $\frac{٥}{٤}$ ساعة ؛ أي ع (ن$_{٢}$) = ع ($\frac{٥}{٤}$)

الآن من هذه المعطيات : ع (ن$_{١}$) = ع. × هـ$^{أن_{١}}$

٥ = ١٠ × هـ$^{أ \times \frac{١}{٤}}$ ==> ٥ = ١٠ هـ$^{\frac{أ}{٤}}$ ==> هـ$^{\frac{أ}{٤}}$ = $\frac{١}{٢}$ ✓

المطلوب : ع (ن$_{٢}$) = ع. × هـ$^{أن_{٢}}$

ع ($\frac{٥}{٤}$) = ١٠ × هـ$^{أ \times \frac{٥}{٤}}$ = ١٠ × (هـ$^{\frac{أ}{٤}}$)^{٥} = ١٠ × ($\frac{١}{٢}$)^{٥} = ١٠ × $\frac{١}{٣٢}$ = $\frac{٥}{١٦}$ = ٠,٣١٢٥

٤) يتزايد عدد سكان مدينة ما بصورة مستمرة منتظمة وفق قانون النمو، بنسبة مقدارها ٠,٨% سنويا. فإذا بلغ عدد سكانها ٦٠٠٠٠٠ نسمة عام ٢٠١٠م ، فكم سيبلغ عدد سكانها عام ٢١٣٥م؟

الحل :

ع. = ٦٠٠٠٠٠ ، أ = ٠,٨% = $\frac{٨}{١٠٠٠}$ ، ن = ٢١٣٥ _ ٢٠١٠ = ١٢٥ سنة

عدد السكان = ع (ن) = ع. × هـ^{أن} = ٦٠٠٠٠٠ × (٢,٧)$^{\frac{٨}{١٠٠٠} \times ١٢٥}$ = ٦٠٠٠٠٠ × ٢,٧ = ١٦٢٠٠٠٠