التكامل بالتعويض :

يستخدم التكامل بالتعويض عند فشل الترتيب .

خطوات الحل :

١) نفرض ص ٢) نشتق دس = $\frac{\text{دص}}{\text{صَ}}$

٣) نجعل ما داخل التكامل كله ص .

٤) نكامل ونرجع ص إذا كان التكامل غير محدود .

إذا كان التكامل محدود نغير حدود التكامل ولا نرجع ص

يستخدم التكامل بالتعويض في الحالات التالية :-

١) قوس مرفوع لقوة ما داخله غير خطي

(كثير حدود × مركب) ⟸ ص = ما داخل القوس

٢) مثلثي زاويته غير خطية نفرض ص = الزاوية

٣) أسي قوته غير خطية نفرض ص = القوة

٤) مثلثي × مثلي ، نفرض أحدهما ص مع قليل من التفكير.

التفكير: أ) قا ، ظا ⟸ ص = قا القوة (قا) فردية

⟸ ص = ظا القوة (قا) زوجية

ب) قتا ، ظتا ⟸ ص = ظتا القوة (قتا) زوجية

⟸ ص = قتا القوة (قتا) فردية

ج) جا × جتا ⟸ ص = الأعلى قوة فردي ، فردي

⟸ ص = القوة زوجية فردي ، زوجي

٥) إذا كانت ق ، قَ ، قً ، ... وكان داخلها مش (س) نفرض ص = ما داخل ق .

٦) إذا كان لدينا $\sqrt{\text{س}}$ ، $\sqrt[3]{\text{س}}$ ، $\text{هـ}^{\text{س}}$ ، $\text{لو}_{\text{هـ}}$ س ، جا س ، ظا س ، ... داخل مكان غير مريح نفرضها ص لتحسين الشكل .

* لا تنسى الأصل في حالة وجود أي (س) .

أسئلة :

١) $\int$ ٢س (س^{٢} + ١)^{٥} . دس

الحل :

ص = س^{٢} + ١ ⟸ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٢س ⟸ دس = $\frac{\text{دص}}{\text{٢س}}$

= $\int$ ٢س (ص)^{٥} . $\frac{\text{دص}}{\text{٢س}}$ = $\int$ ص^{٥} . دص

= $\frac{\text{ص}^{٦}}{٦}$ + جـ = $\frac{(\text{س}^{٢}+١)^{٦}}{٦}$ + جـ

---

٢) $\int$ ٥س^{٤} (س^{٥} + ٢)^{٦} . دس

الحل :

ص = س^{٥} + ٢ ⟸ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٥س^{٤} ⟸ دس = $\frac{\text{دص}}{\text{٥س}^{٤}}$

= $\int$ ٥س^{٤} (ص)^{٦} . $\frac{\text{دص}}{\text{٥س}^{٤}}$ = $\int$ ص^{٦} دص

= $\frac{\text{ص}^{٧}}{٧}$ + جـ = $\frac{(\text{س}^{٥}+٢)^{٧}}{٧}$ + جـ

---

٣) $\int$ س^{٥} $\sqrt{\text{س}^{٣}+٢}$. دس

الحل :

ص = س^{٣} + ٢ ⟸ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٣ س^{٢} ⟸ دس = $\frac{\text{دص}}{\text{٣س}^{٢}}$

= $\int$ س^{٥} $(\text{س}^{٣}+٢)^{\frac{١}{٢}}$. دس

= $\int$ س^{٥} (ص)$^{\frac{١}{٢}}$. $\frac{\text{دص}}{\text{٣س}^{٢}}$

= $\int$ س^{٣} (ص)$^{\frac{١}{٢}}$. $\frac{\text{دص}}{٣}$ ⟸ س^{٣} = ص − ٢

= $\int$ (ص − ٢) (ص)$^{\frac{١}{٢}}$. $\frac{\text{دص}}{٣}$

= $\int$ $\frac{\text{ص}^{\frac{٣}{٢}}}{٣}$ - $\frac{\text{٢ص}^{\frac{١}{٢}}}{٣}$. دص

= $\frac{٢}{١٥}$ $(\text{ص})^{\frac{٥}{٣}}$ + $\frac{٤}{٩}$ $(\text{ص})^{\frac{٣}{٢}}$ + جـ

= $\frac{٢}{١٥}$ $(\text{س}^{٣}+٢)^{\frac{٥}{٣}}$ + $\frac{٤}{٩}$ $(\text{س}^{٣}+٢)^{\frac{٣}{٢}}$ + جـ

SALEM ALSATEB

٤) $\int \frac{٢س+٤}{\sqrt[٥]{س^{٢}+٤س+٥}}$.دس

الحل :

$\int (٢س + ٤)\ (س^{٢}+٤س+٥)^{\frac{١}{٥}}$.دس

ص = $س^{٢}$+ ٤س + ٥ $\Leftarrow$ $\frac{دص}{دس}$ = ٢س + ٤ $\Leftarrow$ دس = $\frac{دص}{٢س+٤}$

= $\int (٢س + ٤)\ (ص)^{\frac{١}{٥}} . \frac{دص}{٢س+٤}$

= $\int (ص)^{\frac{١}{٥}}$.دص = $\frac{٥}{٤}$ $ص^{\frac{٤}{٥}}$ + جـ

= $\frac{٥}{٤}\ (س^{٢}+٤س+٥)^{\frac{٤}{٥}}$ + جـ

---

٥) $\int_{٠}^{٣} \frac{س}{\sqrt{س^{٢}+١}}$. دس

الحل :

ص = $س^{٢}$ + ١ $\Leftarrow$ $\frac{دص}{دس}$ = ٢ س $\Leftarrow$ دس = $\frac{دص}{٢س}$

$\int_{٠}^{٣} س\ (س^{٢}+١)^{-\frac{١}{٢}}$.دس = $\int_{١}^{١٠} س\ ص^{-\frac{١}{٢}} . \frac{دص}{٢س}$

= $\int_{١}^{١٠} \frac{ص^{-\frac{١}{٢}}}{٢}$.دص = $ص^{\frac{١}{٢}}]_{١}^{١٠}$ = $\sqrt{١٠}$ - ١

---

٦) $\int س^{١٣}\ (\frac{١}{س^{٢}}+٢)^{٥}$. دس

الحل :

$\int س^{١٣} \left(\frac{١+٢س^{٢}}{س^{٢}}\right)^{٥}$. دس

= $\int \frac{س^{١٣}}{س^{١٠}}\ (١+٢س^{٢})^{٥}$. دس

= $\int س^{٣}(١+٢س^{٢})^{٥}$. دس

ص = ١ + $٢س^{٢}$

دس = $\frac{دص}{٤س}$

$\int س^{٣}\ (ص)^{٥} . \frac{دص}{٤س}$

$\int \frac{س^{٢}}{٤}\ (ص)^{٥}$. دص $\Leftarrow$ $س^{٢}$ = $\frac{ص-١}{٢}$

= $\frac{١}{٨}\int (ص - ١)\ ص^{٥}$. دص

= $\frac{١}{٨}\int ص^{٦} - ص^{٥}$. دص

= $\frac{١}{٨}$ ($\frac{ص^{٧}}{٧}$ - $\frac{ص^{٦}}{٦}$) + جـ

= $\frac{١}{٨}$ ($\frac{(١+٢س^{٢})^{٧}}{٧}$ - $\frac{(١+٢س^{٢})^{٦}}{٦}$) + جـ

---

٧) $\int (س - ١)^{٣}\ (س^{٢} - ٢س + ٥)^{٧}$. دس

الحل :

ص = $س^{٢}$ - ٢س + ٥ $\Leftarrow$ $\frac{دص}{دس}$ = ٢س – ٢

$\Leftarrow$ دس = $\frac{دص}{٢س-٢}$

= $\int (س - ١)^{٣}\ ص^{٧}$. $\frac{دص}{٢س-٢}$

= $\int \frac{(س-١)^{٢}}{٢}\ ص^{٧}$. دص

= $\int (س^{٢} - ٢س + ١)\ \frac{ص^{٧}}{٢}$. دص

$\Leftarrow$ص – ٤ = $س^{٢}$ - ٢س + ١

= $\int (ص - ٤)\ \frac{ص^{٧}}{٢}$. دص

= $\int \frac{ص^{٨}}{٢}$ - ٢ $ص^{٧}$. دص

= $\frac{ص^{٩}}{١٨}$ - $\frac{٢ص^{٨}}{٨}$ + جـ

= $\frac{(س^{٢}-٢س+٥)^{٩}}{١٨}$ - $\frac{(س^{٢}-٢س+٥)^{٨}}{٤}$ + جـ

SALEEM ALSATEB

٨) $\int \frac{٢}{س^{٢}-١} \sqrt{\frac{س-١}{س+١}}$. دس

الحل :

ص = $\frac{س-١}{س+١}$ $\Leftarrow$ $\frac{دص}{دس}$ = $\frac{(س+١)\times ١-(س-١)}{(س+١)^{٢}}$

$\Leftarrow$ $\frac{دص}{دس}$ = $\frac{٢}{(س+١)^{٢}}$ دس = $\frac{(س+١)^{٢}}{٢}$ دص

= $\int \frac{٢}{س^{٢}-١}$ $ص^{\frac{١}{٢}}$. $\frac{(س+١)^{٢}}{٢}$ دص

= $\int (\frac{س+١}{س-١})$ $ص^{\frac{١}{٢}}$. دص = $\int \frac{١}{ص} \times$ $ص^{\frac{١}{٢}}$. دص

= $\int ص^{\frac{-١}{٢}}$. دص = ٢ $ص^{\frac{١}{٢}}$ + جـ = ٢ $(\frac{س+١}{س-١})^{\frac{١}{٢}}$ + جـ

---

٩) $\int \frac{١}{س^{٢}} \sqrt{\frac{٢س-١}{س}}$. دس

الحل :

ص = $\frac{٢س-١}{س}$ $\Leftarrow$ $\frac{دص}{دس}$ = $\frac{س(٢)-(٢س-١)}{س^{٢}}$

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{١}{س^{٢}}$ $\Leftarrow$ دس = $س^{٢}$. دص

= $\int \frac{١}{س^{٢}}$ $ص^{\frac{١}{٢}}$. $س^{٢}$. دص = $\int$ $ص^{\frac{١}{٢}}$. دص

= $\frac{٢}{٣}$ $ص^{\frac{٣}{٢}}$ + جـ = $\frac{٢}{٣}$ $(\frac{٢س-١}{س})^{\frac{١}{٢}}$ + جـ

---

١٠) $\int \frac{\sqrt{س+١}}{\sqrt{س^{٥}}}$. دس

= $\int \sqrt{\frac{س+١}{س}} \times \frac{١}{\sqrt{س^{٤}}}$. دس

= $\int \left(\frac{س+١}{س}\right)^{\frac{١}{٢}} \times \frac{١}{س^{٢}}$. دس

ص = $\frac{س+١}{س}$ = ١ + $\frac{١}{س}$

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{-١}{س^{٢}}$ $\Leftarrow$ دس = - $س^{٢}$. دص

= $\int ص^{\frac{١}{٢}} \times \frac{١}{س^{٢}} \times - س^{٢}$. دص

= $\int -ص^{\frac{١}{٢}}$. دص = - $\frac{٢}{٣}$ $ص^{\frac{٣}{٢}}$ + جـ

= - $\frac{٢}{٣}$ $\left(\frac{س+١}{س}\right)^{\frac{٣}{٢}}$ + جـ

---

١١) $\int \left(\frac{س+١}{س-١}\right)^{٢}$. دس

الحل:

نفرض ان: ص = س - ١ $\Leftarrow$ ص + ١ = س

$\frac{دص}{دس}$ = ١ $\Leftarrow$ دس = دص

$\Leftarrow \int \left(\frac{ص+١+١}{ص}\right)^{٢}$. دص = $\int \left(\frac{ص+٢}{ص}\right)^{٢}$. دص

= $\int \frac{ص^{٢}+٤ص+٤}{ص^{٢}}$. دص

= $\int ١ + \frac{٤}{ص} + ٤ص^{-٢}$. دص

= ص + ٤ لو$_{هـ}$ |ص| - $٤ص^{-١}$ + جـ

= س - ١ + ٤ لو$_{هـ}$|س - ١| $-٤(س-١)^{-١}$ + جـ

---

١٢) $\int \frac{(٢س+٣)^{٥}}{س^{٧}}$. دس

الحل :

= $\int \frac{(٢س+٣)^{٥}}{س^{٥}} \times \frac{١}{س^{٢}}$. دس

= $\int \left(٢+\frac{٣}{س}\right)^{٥} \times \frac{١}{س^{٢}}$. دس

ص = ٢ + $\frac{٣}{س}$ $\Leftarrow$ $\frac{دص}{دس}$ = $\frac{-٣}{س^{٢}}$ $\Leftarrow$ دس = $\frac{س^{٢}}{-٣}$. دص

$\Leftarrow \int ص^{٥} \times \frac{١}{س^{٢}} \times \frac{س^{٢}}{-٣}$. دص

= $\int \frac{-ص^{٥}}{٣}$. دص = $\frac{-١}{١٨}$ $ص^{٦}$ + جـ

SALEEM ALSATEB

$= \frac{-١}{١٨}\left(\frac{٣}{س}+٢\right)^{٦} + جـ$

---

١٣) $\int \frac{(أس+ب)^{ن}}{س^{ن+٢}}$.دس ، حيث أ ، ب ، ن ثوابت

الحل:

$= \int \frac{(أس+ب)^{ن}}{س^{ن}} \times \frac{١}{س^{٢}}$.دس

$= \int \left(\frac{أس+ب}{س}\right)^{ن} \times \frac{١}{س^{٢}}$.دس

نفرض ص $= \frac{أس+ب}{س}$

$\frac{ؤص}{ؤس} = \frac{س \times أ - (أس+ب) \times ١}{س^{٢}}$

$\frac{ؤص}{ؤس} = \frac{-ب}{س^{٢}} \quad \frac{١}{س^{٢}}$

دس $= \frac{س^{٢}}{-ب}$.دص

$\Leftarrow = \int ص^{ن} \times \frac{١}{س^{٢}} \times \frac{س^{٢}}{-ب}$.دص

$= \frac{-١}{ب} \int ص^{ن}$.دص $= \frac{-١}{ب(ن+١)} \times ص^{ن+١} + جـ$

$= \frac{-١}{ب(ن+١)} \times \left(\frac{أس+ب}{س}\right)^{ن+١} + جـ$

---

١٤) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{جاس جتاس}{\sqrt{١+جا^{٢}س}}$.دس

الحل :

ص = ١ + جا^{٢} س $\Leftarrow \frac{دص}{دس} = ٢$ جاس جتا س

$\Leftarrow$ د س $= \frac{دص}{٢جاس جتاس}$

ص$_{١}$ = ١ ص$_{٢}$ = ٣

$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{ص^{\frac{-١}{٢}}}{٢}$. دص $= ص^{\frac{١}{٢}}]_{١}^{٣} = \sqrt{٣} - ١$

---

١٥) $\int \frac{جا\ ٢س}{جتا^{٢}٢س}$.دس

الحل :

ص = جتا٢س $\Leftarrow$ دس $= \frac{دص}{-٢جا٢س}$

$= \int \frac{جا\ ٢س}{ص^{٢}} \cdot \frac{دص}{-٢جا٢س}$

$= \int \frac{-ص^{-٢}}{٢}$.دص $= \frac{ص^{-١}}{٢} + جـ$

$= \frac{١}{٢جتا٢س} + جـ = \frac{قا^{٢}س}{٢} + جـ$

حل اخر:

$\int \frac{جا\ ٢س}{جتا^{٢}٢س}$.دس $= \int \frac{جا\ ٢س}{جتا٢س} \times \frac{١}{جتا٢س}$.دس

$= \int$ ظا٢س $\times$ قا ٢س .دس $= \frac{قا^{٢}س}{٢} + جـ$

---

١٦) $\int \frac{١}{جتا^{٢}س \sqrt{ظاس - ١}}$.دس

الحل :

ص = ظاس – ١ $\Leftarrow$ دس $= \frac{دص}{قا^{٢}س}$

$= \int \frac{قا^{٢}س}{\sqrt{ظاس-١}}$.دس

$= = \int \frac{قا^{٢}س}{\sqrt{ص}} \cdot \frac{دص}{قا^{٢}س} = \int ص^{\frac{-١}{٢}}$.دص

$= ٢ ص^{\frac{١}{٢}} + جـ = ٢ (ظاس)^{\frac{١}{٢}} + جـ$

---

١٧) $\int جا\ ٢س \sqrt{٢جتا٢س - ٢}$.دس

الحل :

ص = ٢ جتا ٢س – ٢ $\Leftarrow$ دس $= \frac{دص}{-٤جا٢س}$

$= \int جا\ ٢س\ ص^{\frac{١}{٢}} \cdot \frac{دص}{-٤جا٢س}$

SALEM ALSATEB

$= \int \frac{ص^{\frac{1}{2}}}{-٤} \cdot دص = \frac{ص^{\frac{3}{2}}}{-٦} + جـ$

$= \frac{-١}{٦} (٢جتا٢س-٢)^{\frac{3}{2}} + جـ$

---

١٨) $\int$ ٢ س جا $(س^{٢} - ١)$. دس

الحل :

$ص = س^{٢} + ١ \Leftarrow \frac{دص}{دس} = ٢س \Leftarrow دس = \frac{دص}{٢س}$

$\int ٢س جا ص . \frac{دص}{٢س} = \int جا ص . دص = -$ جتا ص + جـ

$= -$ جتا $(س^{٢} - ١)$ + جـ

---

١٩) $\int$ س قا $(١ - ٢س^{٢})$ ظا $(١ - ٢س^{٢})$. دس

الحل :

$ص = ١ - ٢س^{٢} \Leftarrow \frac{دص}{دس} = -٤س \Leftarrow دس = \frac{دص}{-٤س}$

$= \int س قا ص ظا ص . \frac{دص}{-٤س}$

$= \int قا ص ظا ص . \frac{دص}{-٤} = -\frac{قاص}{٤} + جـ$

$= \frac{-قا(١-٢س^{٢})}{٤} + جـ$

---

٢٠) $\int \frac{جا\sqrt{س}}{\sqrt{س}}$. دس

الحل :

$ص = \sqrt{س} \Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{١}{٢\sqrt{س}} \Leftarrow دس = ٢\sqrt{س} . دص$

$= \int ٢ جا ص . دص = -٢$ جتاص $+$ جـ $= -٢$ جتا $\sqrt{س} +$ جـ

---

٢١) $\int \frac{جا(لو_{هـ} س)}{س}$. دس

الحل:

$ص = لو_{هـ} س \Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{١}{س} \Leftarrow دس = س\ دص$

$= \int \frac{جاص}{س} س . دص \Leftarrow \int جاص\ دص$

$= -$جتاص + جـ $= -$جتا$(لو_{هـ} س)$ + جـ

---

٢٢) $\int س^{٢} هـ^{س^{٣}+١}$. دس

الحل :

$ص = س^{٣} + ١ \Leftarrow \frac{دص}{دس} = ٣س^{٢} \Leftarrow دس = \frac{دص}{٣س^{٢}}$

$\int س^{٢} هـ^{ص} . \frac{دص}{٣س^{٢}} = \int \frac{هـ^{ص}}{٣} . دص$

$= \frac{هـ^{ص}}{٣} + جـ = \frac{هـ^{(س^{٣}+١)}}{٣} + جـ$

---

٢٣) $\int قا^{٢}س\ هـ^{ظاس}$. دس

الحل :

$ص = ظا س \Leftarrow \frac{دص}{دس} = قا^{٢}س \Leftarrow دس = \frac{دص}{قا^{٢}س}$

$= \int قا^{٢}س\ هـ^{ص} . \frac{دص}{قا^{٢}س}$

$= \int هـ^{ص} . دص = هـ^{ص} + جـ = هـ^{ظاس} + جـ$

---

٢٤) $\int$ جا ٢س $هـ^{جا^{٢}س}$. دس

الحل :

$ص = جا^{٢}س \Leftarrow \frac{دص}{دس} = ٢$جاس جتاس

$\Leftarrow \frac{دص}{دس} = جا ٢س \Leftarrow دس = \frac{دص}{جا٢س}$

$= \int هـ^{ص} . دص = هـ^{ص} + جـ = هـ^{جا^{٢}س} + جـ$

قاعدة: $\int \frac{ق'(س)}{ق(س)}$. دس $= لو_{هـ}|ق(س)| + جـ$

٢٥) $\int \frac{٣س^{٢}-٢}{س^{٣}-٢س+١}$. دس

الحل :

$= لو_{هـ}|س^{٣} - ٢س + ١| + جـ$

---

٢٦) $\int$ طاس. دس

الحل :

$\int \frac{جاس}{جتاس}$. دس $= -لو_{هـ}|$جتاس$| + جـ$

SALEM ALSATEB

٢٧) ∫ظتاس. دس

الحل :

$$\int \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}} \text{ . دس} = \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{ جاس }| + \text{جـ}$$

---

٢٨) $\int \frac{\text{جا}٣\text{س}}{١+\text{جتا}٣\text{س}}$. دس

الحل :

ص = ١ + جتا ٣س

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -٣\ \text{جا}٣\text{س} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{-٣\text{جا}٣\text{س}}$$

$$\Leftarrow \int \frac{\text{جا}٣\text{س}}{\text{ص}} \cdot \frac{\text{دص}}{-٣\text{جا}٣\text{س}}$$

$$= \frac{-١}{٣} \int \frac{١}{\text{ص}} \text{ . دص} = \frac{-١}{٣} \text{ لو}_{\text{هـ}} |\text{ ص }| + \text{جـ}$$

$$= \frac{-١}{٣} \text{ لو}_{\text{هـ}} |\text{ ١ + جتا ٣س }| + \text{جـ}$$

---

٢٩) ∫ جا^{٥}س جتا^{٣}س . دس

الحل :

= ∫ جا^{٥}س (١ – جا^{٢}س) جتاس . دس

ص = جاس ⇐ دس = $\frac{\text{دص}}{\text{جتاس}}$

= ∫ ص^{٥} (١ – ص^{٢}) جتاس . $\frac{\text{دص}}{\text{جتاس}}$

= ∫ ص^{٥} – ص^{٧} . دص = $\frac{\text{ص}^{٦}}{٦} - \frac{\text{ص}^{٨}}{٨} + \text{جـ}$

= $\frac{\text{جا}^{٦}\text{س}}{٦} - \frac{\text{جا}^{٨}\text{س}}{٨} + \text{جـ}$

---

٣٠) ∫ جتا^{٤}س جا^{٣}س . دس

الحل :

∫ جتا^{٤}س (١ – جتا^{٢}س) جاس . دس

ص = جتاس ⇐ دس = $\frac{\text{دص}}{-\text{جاس}}$

= ∫ ص^{٤} (١ –ص^{٢}) جاس . $\frac{\text{دص}}{-\text{جاس}}$

= ∫ ص^{٦} – ص^{٤} . دص = $\frac{\text{ص}^{٧}}{٧} - \frac{\text{ص}^{٥}}{٥} + \text{جـ}$

= $\frac{\text{جتا}^{٧}\text{س}}{٧} - \frac{\text{جتا}^{٥}\text{س}}{٥} + \text{جـ}$

---

٣١) ∫ جا^{٥}س جتا^{٢}س . دس

الحل :

= ∫جاس (١ – جتا^{٢}س) (١ – جتا^{٢}س) جتا^{٢}س . دس

ص = جتاس ⇐ دس = $\frac{\text{دص}}{-\text{جاس}}$

= ∫ جاس (١ – ص^{٢}) (١ – ص^{٢}) ص^{٢} . $\frac{\text{دص}}{-\text{جاس}}$

= ∫ ٢ص^{٤} – ص^{٦} – ص^{٢} . دص

= = $\frac{٢}{٥}$ ص^{٥} - $\frac{\text{ص}^{٧}}{٧} - \frac{\text{ص}^{٣}}{٣} + \text{جـ}$

= $\frac{٢}{٥}$ جتا^{٥}س - $\frac{\text{جتا}^{٧}\text{س}}{٧} - \frac{\text{جتا}^{٣}\text{س}}{٣} + \text{جـ}$

---

٣٢) ∫ جا^{٣}س . دس

الحل :

∫ جاس (١ – جتا^{٢}س) . دس

ص = جتاس ⇐ دس = $\frac{\text{دص}}{-\text{جاس}}$

= ∫ جاس (١ – ص^{٢}) . $\frac{\text{دص}}{-\text{جاس}}$

= ∫ ص^{٢} – ١ . دص = $\frac{\text{ص}^{٣}}{٣}$ - ص + جـ

= $\frac{\text{جتا}^{٣}\text{س}}{٣}$ - جتا س + جـ

---

٣٣) ∫ جا^{٢}س جتا^{٤}س.دس

الحل :

= ∫ $\frac{١}{٨}$ (١-جتا٢س)(١+جتا٢س)(١+جتا٢س) .دس

= ∫ $\frac{١}{٨}$ (١-جتا^{٢} ٢س)(١+جتا٢س).دس

= ∫ $\frac{١}{٨}$ جا^{٢} ٢س (١+جتا٢س).دس

SALEM ALSATEB

$= \frac{١}{٨} \int$ جا^{٢} ٢س.دس + $\int \frac{١}{٨}$ جا^{٢} ٢س جتا٢س.دس

ص = جا٢س $\Leftarrow$ دس = $\frac{\text{دص}}{\text{٢ جتا٢س}}$

$= \int \frac{١}{٨}$ (١-جتا٤س).دس + $\frac{١}{٨} \int$ ص^{٢} جتا٢س. $\frac{\text{دص}}{\text{٢ جتا٢س}}$

$= \frac{١}{٨}$ (س- $\frac{١}{٤}$ جا٤س)+ $\frac{١}{١٦} \int$ ص^{٢} .دص

$= \frac{١}{٨}$ (س- $\frac{١}{٤}$ جا٤س)+ $\frac{١}{٤٨}$ ص^{٣} +جـ

$= \frac{١}{٨}$ (س- $\frac{١}{٤}$ جا٤س)+ $\frac{١}{٤٨}$ جا^{٢} ٢س +جـ

---

٣٤) $\int$ جاس (١ + جتا٢س)^{٣} . دس

الحل :

$= \int$ جاس (١ + ٢جتا^{٢}س – ١)^{٣} . دس

$= \int$ جاس × ٨ جتا^{٦}س . دس

ص = جتاس

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = - جاس $\Leftarrow$ دس = $\frac{\text{دص}}{\text{–جاس}}$

$\int$ ٨ جاس × ص^{٦} . $\frac{\text{دص}}{\text{–جاس}}$

$= \int$ - ٨ ص^{٦} . دص

$= \frac{\text{–٨}}{٧}$ ص٧ + جـ = $\frac{\text{–٨}}{٧}$ (جتا^{٧}س) + جـ

---

٣٥) $\int$قا^{٢} س ظا^{٢} س . دس

الحل :

ص = ظا س$\Leftarrow$ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = قا^{٢}س $\Leftarrow$ دس = $\frac{\text{دص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}$

$= \int$ ص^{٢} . دص = $\frac{\text{ص}^{٣}}{٣}$ + جـ = $\frac{\text{ظا}^{٣}\text{س}}{٣}$ + جـ

---

٣٦) $\int$ قتا^{٤}س ظتا^{٣}س.دس

الحل:

ص=ظتاس $\Leftarrow$ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$=-قتا^{٢}س$\Leftarrow$ دس= $\frac{\text{دص}}{\text{–قتا}^{٢}\text{س}}$

$\int$ قتا^{٤}س ص^{٣}. $\frac{\text{دص}}{\text{–قتا}^{٢}\text{س}}$ = $\int$ -قتا^{٢}س ص^{٣}.دص

$\int$ -(ظتا^{٢}س+١) ص^{٣}.دص =$\int$ -(ص^{٢}+١) ص^{٣}.دص

=$\int$ -ص^{٥}–ص^{٣} .دص =- $\frac{\text{ص}^{٦}}{٦}$ - $\frac{\text{ص}^{٤}}{٤}$+جـ

=- $\frac{\text{ظتا}^{٦}\text{س}}{٦}$ - $\frac{\text{ظتا}^{٤}\text{س}}{٤}$+جـ

---

٣٧)$\int$ قا^{٥}س طا^{٣}س.دس

الحل:

ص=قاس $\Leftarrow$ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$=قاس ظاس$\Leftarrow$ دس= $\frac{\text{دص}}{\text{قاسظاس}}$

=$\int$ص^{٥} طا^{٣}س. $\frac{\text{دص}}{\text{قاسظاس}}$ = $\int$ص^{٤}طا^{٢}س.دص

=$\int$ص^{٤} (قا^{٢}س-١).دص=$\int$ص^{٦}-ص^{٤}.دص

$\frac{\text{ص}^{٧}}{٧}$ - $\frac{\text{ص}^{٥}}{٥}$+جـ = $\frac{\text{قا}^{٧}\text{س}}{٧}$ - $\frac{\text{قا}^{٥}\text{س}}{٥}$+جـ

---

٣٨)$\int$ قا^{٤}س . دس

الحل :

= $\int$ قا^{٢}س (١+ظا^{٢}س) . دس

ص = ظا س $\Leftarrow$ دس = $\frac{\text{دص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}$

= $\int$ قا^{٢} س (١ + ص^{٢}) . $\frac{\text{دص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}$ = $\int$ ١ + ص^{٢} . دص

= ص + $\frac{\text{ص}^{٣}}{٣}$ + جـ = ظاس + $\frac{\text{ظا}^{٣}\text{س}}{٣}$ + جـ

---

٣٩) $\int$ ظا^{٣} س . دس

الحل :

= $\int$ (قا^{٢}س – ١) ظا س . دس

= $\int$ قا^{٢}س ظاس . دس - $\int$ ظا س . دس

SALEM ALSATEB

ص = ظا س ⟸ دس = $\frac{\text{دص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}$

= ∫ قا^{٢}س × ص . $\frac{\text{دص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}$ - ∫ $\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$. دس

= ∫ ص . دص + لو$_{هـ}$ | جتاس|

= $\frac{\text{ص}^{٣}}{٣}$ + $_{هـ}$لو|جتاس| +جـ

= $\frac{\text{ظا}^{٢}\text{س}}{٢}$ + $_{هـ}$لو|جتاس| + جـ

---

٤٠) ∫ ظتا^{٤}س .دس

الحل:

∫ ظتا^{٢}س × ظتا^{٢}س .دس = ∫ ظتا^{٢}س × (قتا^{٢}س-١).دس

= ∫ ظتا^{٢}س × قتا^{٢} س .دس - ∫ ظتا^{٢}س . دس

نفرض ص = ظتا س

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = - قتا^{٢}س ⟸ دس = $\frac{\text{دص}}{-\text{قتا}^{٢}\text{س}}$

⟸= ∫ ص^{٢} × قتا^{٢} س . $\frac{\text{دص}}{-\text{قتا}^{٢}\text{س}}$ - ∫ قتا^{٢}س-١ . دس

= $\frac{-\text{ص}^{٣}}{٣}$ - (-ظتاس – س) + جـ

= $\frac{-\text{ظتا}^{٣}\text{س}}{٣}$ - (-ظتاس – س) + جـ

---

٤١) ∫ $\frac{(\text{جاس-جتاس})^{٥}}{\text{جا}^{٧}\text{س}}$. دس

= ∫ $\frac{(\text{جاس-جتاس})^{٥}}{\text{جا}^{٥}\text{س}}$ × $\frac{١}{\text{جا}^{٢}\text{س}}$. دس

= ∫ (١ + ظتاس)^{٥} × قتا^{٢}س . دس

ص = ١ + ظتاس

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = - قتا٢س ⟸ دس = $\frac{\text{دص}}{-\text{قتا}^{٢}\text{س}}$

⟸ ∫ ص^{٥} × قتا^{٢}س . $\frac{\text{دص}}{-\text{قتا}^{٢}\text{س}}$

= ∫ - ص^{٥} . دص = $\frac{-\text{ص}^{٦}}{٦}$ + جـ

= $\frac{-١}{٦}$ (١ + ظتاس)^{٦} + جـ

---

٤٢) ∫ $\frac{١}{\sqrt{\text{س}}(٢+\sqrt{\text{س}})}$. دس

الحل :

ص = $\sqrt{\text{س}}$ ⟸ دس = ٢ $\sqrt{\text{س}}$ دص

= ∫ $\frac{١}{\sqrt{\text{س}}(٢+\text{ص})}$. ٢ $\sqrt{\text{س}}$. دص

= ∫ $\frac{٢}{(٢+\text{ص})}$. دص = ٢ $_{هـ}$لو| ص + ٢ | + جـ

= ٢ $_{هـ}$لو| $\sqrt{\text{س}}$ + ٢| + جـ

---

٤٣) ∫ $\frac{\sqrt[٣]{\text{س}}}{٥+\text{س}\sqrt[٣]{\text{س}}}$. دس

الحل :

ص = $\sqrt[٣]{\text{س}}$

ص^{٣} = س ⟸ ٣ص^{٢} . دص = دس

⟸ ∫ $\frac{\text{ص}}{٥+\text{ص}^{٤}}$. ٣ص^{٢} . دص

= ∫ $\frac{٣\text{ص}^{٣}}{٥+\text{ص}^{٤}}$. دص

ع = ٥ + ص^{٤} ⟸ $\frac{\text{دع}}{\text{دص}}$ = ٤ص^{٣} ⟸ دص = $\frac{\text{دع}}{٤\text{ص}^{٣}}$

⟸ = ∫ $\frac{٣\text{ص}^{٣}}{٥+\text{ص}^{٤}}$. دص = ∫ $\frac{٣\text{ص}^{٣}}{\text{ع}}$. $\frac{\text{دع}}{٤\text{ص}^{٣}}$

= $\frac{٣}{٤}$ ∫ $\frac{١}{\text{ع}}$. دع = $\frac{٣}{٤_{هـ}}$ لو|ع| + جـ

= $\frac{٣}{٤}$ $_{هـ}$لو| ٥ + ص^{٤} | + جـ = $\frac{٣}{٤}$ $_{هـ}$لو| ٥ + $\sqrt[٣]{\text{س}^{٤}}$ | + جـ

SALEEM ALSATEB

٤٤) $\int \frac{س^{٩}}{\sqrt{س^{٥}-٢}}$. دس

الحل :

ص = $\sqrt{س^{٥}-٢}$

ص^{٢} = س^{٥} − ٢ ⟸ س^{٥} = ص^{٢} + ٢

٢ص . دص = ٥س^{٤} . دس ⟸ دس = $\frac{٢ص.دص}{٥س^{٤}}$

$\int \frac{س^{٩}}{ص} \cdot \frac{٢ص.دص}{٥س^{٤}}$

= $\frac{٢}{٥}\int س^{٥}$. دص = $\frac{٢}{٥}\int$ ص^{٢} + ٢

= $\frac{٢}{٥}\left(\frac{ص^{٣}}{٣}+٢ص\right)$ + جـ

= $\frac{٢}{٥}\left(\frac{\left(\sqrt{س^{٥}-٢}\right)^{٣}}{٣}+٢\sqrt{س^{٥}-٢}\right)$ + جـ

---

٤٥) $\int$ قاس . دس

الحل :

= $\int$ قاس × $\frac{قاس+ظاس}{قاس+ظاس}$. دس

= $\int \frac{قا^{٢}س+قاس ظاس}{قاس+ظاس}$. دس

ص = قاس + ظاس ⟸ دس = $\frac{دص}{قاس ظاس+قا^{٢}س}$

= $\int \frac{قا^{٢}س+قاس ظاس}{ص} \cdot \frac{دص}{قاس ظاس+قا^{٢}س}$

= $\int \frac{١}{ص}$. دص = هـلو|ص| + جـ

= هـلو| قاس + ظاس | + جـ

---

٤٦) $\int$ جاس ظاس . دس

الحل :

= $\int \frac{جا^{٢}س}{جتاس}$. دس = $\int \frac{١-جتا^{٢}س}{جتاس}$. دس

= $\int \frac{١}{جتاس}$ - جتاس . دس

= $\int$ قاس × $\frac{قاس+ظاس}{قاس+ظاس}$ - جتاس . دس

= $\int \frac{قا^{٢}س+ظاس قاس}{قاس+ظاس}$ - جتاس . دس

= هـلو| قاس + ظاس | - جاس + جـ

---

٤٧) $\int$ جتاس ظتاس . دس

الحل :

= $\int \frac{جتا^{٢}س}{جاس}$. دس = $\int \frac{١-جا^{٢}س}{جاس}$. دس

= $\int \frac{١}{جاس}$ - جاس . دس

= $\int$ قتاس × $\frac{قتاس+ظتاس}{قتاس+ظتاس}$ - جاس . دس

= - هـلو| قتاس ظتاس | + جتاس + جـ

---

٤٨) $\int \frac{هـ^{س}-هـ^{-س}}{هـ^{س}+هـ^{-س}}$. دس

الحل :

ص = هـ^{س} + هـ$^{-س}$ ⟸ دس = $\frac{دص}{هـ^{س}+هـ^{-س}}$

= $\int \frac{هـ^{س}-هـ^{-س}}{هـ} \cdot \frac{دص}{هـ^{س}+هـ^{-س}}$ = $\frac{١}{ص}$. دص

= هـلو|ص| + جـ = هـلو| هـ^{س} + هـ$^{-س}$| + جـ

---

٤٩) إذا كان $\int_{٣}^{١}$ ق(س).دس = ٧ جد $\int_{٠}^{٢}$ ق(س + ١) .دس

الحل :

ص = س + ١ ⟸ دس = دص ، ص$_{١}$ = ١ ، ص$_{٢}$ = ٣

= $\int_{١}^{٣}$ ق(ص) . دص = - $\int_{١}^{٣}$ ق(س).دس = -٧

---

٥٠) إذا كان $\int_{١٠}^{١}$ ق(س).دس = ٧ جد $\int_{٠}^{٣}$ س ق(س^{٢} + ١). دس

الحل :

ص = س^{٢} + ١ ⟸ دس = $\frac{دص}{٢س}$

ص$_{١}$ = ١ ، ص$_{٢}$ = ١٠

= $\frac{١}{٢}\int_{١}^{١٠}$ ق(ص) . دص = $\frac{-٧}{٢}$

SALEEM ALSATEB

٥١)جد $\int_{ب}^{٢}$ س قَ(س^{٢}) . دس،إذا كان ق(١) = ٢،ق(٤) = ٤ ؟

الحل :

ص = س٢ $\Leftarrow$ دس = $\frac{\text{دص}}{\text{٢س}}$

ص$_{١}$ = ١ ، ص$_{٢}$ = ٤

$\int_{ب}^{أ}$ س قَ(ص) . $\frac{\text{دص}}{\text{٢س}}$ = $\int_{ب}^{أ}$ $\frac{\text{ق(ص)}}{\text{٢}}$.دص

= $\frac{\text{ق(ص)}}{\text{٢}}$]$_{١}^{٤}$ = $\frac{\text{ق(ص)}}{\text{٢}}$ = $\frac{\text{ق(٤)}}{\text{٢}}$ - $\frac{\text{ق(١)}}{\text{٢}}$ = ١

٥٢) اذا كان ق(١) = ١ ، ق(٢) = ٤ جد : $\int_{١}^{٢}$ ٣ق$'$(س) $\sqrt{\text{ق(س)}}$ بس

الحل :

نفرض ان ص= ق(س) $\Leftarrow$ دس = $\frac{\text{دص}}{\text{ق}'\text{(س)}}$

ص$_{١}$= ق(١) = ١ ، ص$_{٢}$= ق(٢) = ٤

$\int_{١}^{أ}$ ٣ق$'$(س) $\sqrt{\text{ص}}$. $\frac{\text{دص}}{\text{ق}'\text{(س)}}$

= $\int_{١}^{أ}$ ٣ص$^{\frac{١}{٢}}$.دص

= ٢ص$^{\frac{٣}{٢}}$]$_{١}^{٤}$

= ٢ $\sqrt{\text{(ص)}^{٣}}$]$_{١}^{٤}$ = ٢ $\sqrt{٦٤}$ - ٢

التكامـــــل بـــالأجـزاء :

- يُستخدم التكامل بالأجزاء عند فشل التعويض ويكون ذلك بفرض ق (الأسهل في الذوبان) ونشتقه دهـ (الباقي) ونكامل

القاعدة : -

$\int$ ق . دهـ = ق . هـ - $\int$ هـ . دق

الإثبات :

(ق.هـ)$'$ = ق × $\frac{\text{دهـ}}{\text{دس}}$ + هـ × $\frac{\text{دق}}{\text{دس}}$

$\int$ (ق.هـ)$'$. دس = $\int$ ق × $\frac{\text{دهـ}}{\text{دس}}$.دس+$\int$ هـ × $\frac{\text{دق}}{\text{دس}}$.دس

$\Leftarrow$ ق . هـ = $\int$ ق . دهـ + $\int$ هـ . دق

$\Leftarrow$ $\int$ ق . دهـ = ق . هـ - $\int$ هـ . دق

يُستخدم التكامل بالأجزاء في الحالات التاليـة

١. كثير حدود × قوس مرفوع لقوة ما داخله خطي

ق = كثير حدود دهـ = الباقي

٢. كثير حدود × مثلثي زاويته خطية

ق = كثير حدود دهـ = الباقي

٣. كثير حدود × هـ قوته خطية

ق = كثير حدود دهـ = الباقي

٤. كثير حدود × ق$'$(س)

ق = كثير حدود دهـ = الباقي

٥. إذا كان لدينا (لو)في البسط و داخله كثير حدود نفرض دائماً ق هو (لو)والباقي دهـ

أسئلة :

١) $\int$ $\underbrace{\text{س}}_{\text{ق}}$ $\underbrace{\text{(س + ٣)}^{٣}\text{ . دس}}_{\text{دهـ}}$

الحل :

ق = س $\longrightarrow$ دق = ١ . دس

$\int$دهـ =$\int$(س + ٣)^{٣}.دس $\longrightarrow$ هـ = $\frac{\text{(س+٣)}^{٤}}{٤}$

= $\frac{\text{س}}{٤}$ (س + ٣)^{٤} - $\int$ $\frac{\text{(س+٣)}^{٤}}{٤}$. دس

= $\frac{\text{س}}{٤}$ (س + ٣)^{٤} - $\frac{\text{(س+٣)}^{٥}}{٢٠}$ + جـ

SALEM ALSATEB

٢) ∫ س $\sqrt{١-س}$. دس

الحل :

$= \int \underbrace{س}_{ق} \underbrace{(١-س)^{\frac{١}{٢}}}_{دهـ} . دس$

ق = س ⟵ دق = ١ . دس

∫.دهـ = $(١-س)^{\frac{١}{٢}}$ ∫.دس ⟵ هـ = $\frac{٢(١-س)^{\frac{٣}{٢}}}{٣}$

$= \frac{-٢}{٣} س (١-س)^{\frac{٣}{٢}} - \int \frac{-٢}{٣} (١-س)^{\frac{٣}{٢}} . دس$

$= \frac{-٢}{٣} س (١-س)^{\frac{٣}{٢}} - \frac{-٤}{١٥} (١-س)^{\frac{٥}{٢}} + جـ$

---

٣) ∫ س جاس . دس

الحل :

ق = س ⟵ دق = ١ . دس

∫.دهـ = ∫جاس . دس ⟵ هـ = - جتاس

= - س جتاس + ∫جتاس . دس

= - س جتاس + جاس + جـ

---

٤) ∫ ٤س جتا (٢س + ١) . دس

الحل :

ق = ٤س ⟸ دق = ٤ . دس

∫.دهـ = ∫جتا(٢س + ١) .دس ⟸ هـ = $\frac{جا(٢س-١)}{٢}$

= ٢س جا (٢س - ١) - ∫ ٢ جا (٢س- ١) . دس

= ٢س جا (٢س - ١) + جتا (٢س- ١) + جـ

---

٥) ∫ (س + ١) $هـ^{٢س}$. دس

الحل :

ق = (س + ١) ⟸ دق = ١ . دس

∫.دهـ = ∫$هـ^{٢س}$.دس ⟸ هـ = $\frac{هـ^{٢س}}{٢}$

= (س + ١) $\frac{هـ^{٢س}}{٢}$ - ∫ $\frac{هـ^{٢س}}{٢}$. دس

= (س + ١) $\frac{هـ^{٢س}}{٢}$ - $\frac{هـ^{٢س}}{٤}$ + جـ

٦) ∫ $(س - ٢)^{٢}$ جتا (س – ١) . دس

الحل :

ق = $(س - ٢)^{٢}$ ⟸ دق = ٢(س – ٢) . دس

∫.دهـ =∫جتا (س – ١) . دس ⟸ هـ = جا (س – ١)

=$(س - ٢)^{٢}$ جا (س – ١) - ∫ ٢جا (س – ١)(س – ٢) . دس

ق = ٢(س – ٢) ⟸ دق = ٢ . دس

∫.دهـ = ∫جا (س – ١) . دس ⟸ هـ = - جتا (س – ١)

= $(س - ٢)^{٢}$ جا (س – ١) – (-٢(س – ٢)جتا (س – ١)

+ ∫ ٢ جتا (س – ١) . دس)

= $(س - ٢)^{٢}$ جا (س – ١) + ٢ (س – ١) جتا (س – ١)

– ٢جا (س – ١) + جـ

---

٧) ∫ $\frac{(٢س-١٢)}{قا^{٢}س}$. دس

الحل :

= ∫ (٢س – ١٢) جتا ٢س . دس

ق = ٢س – ١٢ ⟸ دق = ٢ . دس

∫.دهـ = ∫ جتا ٢س.دس⟸ هـ = $\frac{جا٢س}{٢}$

= (٢س – ١٢) $\frac{جا٢س}{٢}$ - ∫ جا ٢س . دس

= (س – ٦) جا ٢س + $\frac{جتا٢س}{٢}$ + جـ

---

٨) ∫ $\frac{(٣س+١)}{هـ^{٣س}}$. دس

الحل :

= ∫ (٣س + ١) $هـ^{-٣س}$. دس

ق = ٣س + ١ ⟸ دق = ٣ . دس

∫.دهـ =∫ $هـ^{-٣س}$. دس ⟸ هـ = $\frac{هـ^{-٣س}}{-٣}$

= (٣س + ١) $\frac{هـ^{-٣س}}{-٣}$ + ∫ $هـ^{-٣س}$. دس

= (٣س + ١) $\frac{هـ^{-٣س}}{-٣}$ - $\frac{هـ^{-٣س}}{٣}$ + جـ

SALEM ALSATEB

٩) $\int \frac{س\ جا\ س}{قا\ س}$. دس

الحل :

$= \int$ س جاس جتاس . دس

$= \int \frac{س}{٢}$ جا ٢س . دس

ق $= \frac{س}{٢} \Leftarrow$ دق $= \frac{١}{٢}$. دس

$\int$.دهـ $= \int$ جا ٢س.دس$\Leftarrow$ هـ $= \frac{-\ جتا\ ٢س}{٢}$

$= \frac{-\ س}{٤}$ جتا ٢س + $\int \frac{جتا\ ٢س}{٤}$. دس

$= \frac{-\ س}{٤}$ جتا ٢س + $\frac{جا\ ٢س}{٨}$ + جـ

---

١٠) $\int_{٠}^{٢} س^{٢}\ هـ^{س}$. دس

الحل :

ق $= س^{٢} \Leftarrow$ دق $= ٢س$

$\int$.دهـ $= \int هـ^{س}$.دس $\Leftarrow$ هـ $= هـ^{س}$

$= س^{٢}\ هـ^{س}]_{٠}^{٢} - \int_{٠}^{٢} ٢س\ هـ^{س}$. دس

ق $= ٢س \Leftarrow$ دق $= ٢$

$\int$.دهـ $= \int هـ^{س}$.دس$\Leftarrow$ هـ $= هـ^{س}$

$= ٤هـ^{٢} - (\ ٢س\ هـ^{س}]_{٠}^{٢} - \int ٢هـ^{س}$. دس)

$= ٤هـ^{٢} - (٤هـ^{٢} - ٢\ هـ^{س}]_{٠}^{٢}\ )$

$= ٤هـ^{٢} - ٢هـ^{٢} - ٢ \quad = ٢هـ^{٢} - ٢$

---

١١) اذا كان ق(٢) =٤ ، ق(٥) = ٧ ، $\int_{٢}^{٥}$ ق(س) .دس = ٦

، جد $\int_{١}^{٢} ٢س^{٣}$ ق/(س^{٢}+١) . دس

الحل:

نفرض ص = س^{٢} + ١ $\Leftarrow$ دس = $\frac{دص}{٢س}$

ص$_{١}$ = ٢ ، ص$_{٢}$ = ٥

$\int_{٢}^{٥} ٢س^{٣}$ ق/ (ص) . $\frac{دص}{٢س} = \int_{٢}^{٥} س^{٢}$ ق/(ص) . دص

$= \int_{٢}^{٥}$ (ص-١) ق/(ص) . دص

ق = ص-١ $\Leftarrow$ دق = ١ . دص

$\int$.دهـ = $\int$ق/(ص) .دص$\Leftarrow$ هـ = ق(ص)

$\Leftarrow = (ص-١) \times ق(ص)\ ]_{٢}^{٥} - \int_{٢}^{٥} ق(ص)$.دص

= ٤ق(٥) – ١ ق(٢) – ٦ = ٢٨ – ٤ – ٦ = ١٨

---

١٢) $\int$ جا $\sqrt{س}$. دس

الحل :

ص = $\sqrt{س} \Leftarrow$ دس = ٢ $\sqrt{س}$. دص

= $\int$ جا ص . ٢ $\sqrt{س}$. دص = $\int$ ٢ص جاص . دص

ق = ٢ص $\Leftarrow$ دق = ٢ . دص

$\int$.دهـ = $\int$جاص.دص$\Leftarrow$ هـ = - جتاص

= -٢ص جتاص + $\int$ ٢جتاص . دص

= -٢ص جتاص + ٢جاص + جـ

= -٢ $\sqrt{س}$ **جتا** $\sqrt{س}$ **+ ٢جا** $\sqrt{س}$ **+ جـ**

---

١٣) $\int \frac{س\ جا\ س}{جتا^{٣}\ س}$. دس

الحل :

= $\int$ س ظاس قا^{٢}س . دس

ق = س $\Leftarrow$ دق = ١ . دس

$\int$.دهـ =$\int$ظاس قا٢س .دس$\Leftarrow$هـ = $\int$ ظاس قا^{٢}س . دس

$\Leftarrow$ $\int$ ظاس قا٢س . دس

ص = ظاس $\Leftarrow$ دس = $\frac{دص}{قا^{٢}س}$

= $\int$ ص . دص = $\frac{ص^{٢}}{٢} = \frac{ظا^{٢}س}{٢}$

$\Leftarrow$$\int$ س ظاس قا^{٢}س . دس

= $\frac{س}{٢}$ ظا٢س - $\frac{١}{٢}\int$ (ظاس – س) + جـ

---

١٤)$\int$ جا٢س قا^{٢}(جاس) . دس

الحل :

ص = جاس $\frac{دص}{دس} \Leftarrow$ = جتاس $\Leftarrow$ دس = $\frac{دص}{جتاس}$

= $\int$ ٢جاس جتاس قا^{٢}(ص) . $\frac{دص}{جتاس}$

= $\int$ ٢ص قا^{٢}ص . دص

ق = ٢ص $\Leftarrow$ دق = ٢ . دص

SALEM ALSATEB

$\int$ دهـ = $\int$ قا^{٢}ص . دص ⇐ هـ = ظاص

⇐ $\int$ ٢ص قا^{٢}ص . دص

= ٢ص ظاص - $\int$ ٢ظاص . دص

= ٢ص ظاص + ٢ لـو$_{هـ}$ | جتاص | + جـ

= ٢جاس ظا(جاس) + ٢ لـو | جتا(جاس) | + جـ

---

١٥) $\int$ جا $\sqrt{س}$ جتا^{٣} $\sqrt{س}$. دس

الحل :

ص = $\sqrt{س}$ ⇐ دس = ٢ $\sqrt{س}$. دص

= $\int$ جاص جتا^{٣}ص . ٢ $\sqrt{س}$. دص

= $\int$ ٢ص جاص جتا^{٣}ص . دص ..... (١)

ق = ٢ص ⇐ دق = ٢ . دص

دهـ = جاص جتا^{٣}ص ⇐ هـ = $\int$ جاص جتا^{٣}ص . دص

⇐ $\int$ جاص جتا^{٣}ص . دص

ع = جتاص ⇐ دص = $\frac{دع}{-جاص}$

= $\int$ جاص ع^{٣} . $\frac{دع}{-جاص}$

= $\frac{-ع^{٤}}{٤}$ = - $\frac{(جتا ص)^{٤}}{٤}$

⇐ ...(١) = $\frac{-ص}{٢}$ (جتا^{٤}ص) + $\int$ $\frac{(جتاص)^{٤}}{٢}$. دص

⇐ $\int$ $\frac{(جتا ص)^{٤}}{٤}$. دص = $\frac{١}{٨}$ $\int$ (١+جتا٢ص)^{٢} . دص

= $\frac{١}{٨}$ $\int$ ١ + ٢جتا٢ص + $\frac{١}{٢}$ (١ +جتا٤ص) . دص

= $\frac{١}{٨}$(ص + جا ٢ص + $\frac{١}{٢}$ (ص + $\frac{جا٤ص}{٤}$))

⇐...(١)= $\frac{-ص}{٢}$ (جتا^{٤}ص) + $\frac{١}{٨}$(ص + جا ٢ص + $\frac{١}{٢}$ (ص + $\frac{جا٤ص}{٤}$)

= $\frac{-\sqrt{س}}{٢}$ جتا^{٣} $\sqrt{س}$ + $\frac{١}{٨}$ ($\sqrt{س}$ +جا٢ $\sqrt{س}$ + $\frac{١}{٢}$ ($\sqrt{س}$ + $\frac{جا ٤ \sqrt{س}}{٤}$) + جـ

---

١٦) $\int$ س ظا^{٢}س . دس

الحل :

ق = س ⇐ دق = ١ . دس

$\int$ دهـ = $\int$ ظا^{٢}س . دس

= $\int$ قا^{٢}س - ١ . دس ⇐ هـ = ظاس – س

⇐ $\int$ س ظا^{٢}س . دس

= س (ظاس – س) - $\int$ ظاس – س . دس

= س (ظاس – س) + لو|جتاس | + $\frac{س^{٢}}{٢}$ + جـ

---

١٧) $\int$ هـ^{٢س} جا^{٢}(هـ^{س}) . دس

الحل :

ص = هـ^{س} ⇐ $\int$ ص^{٢} جا^{٢}ص . $\frac{دص}{ص}$

$\frac{دص}{دس}$ = هـ^{س} = $\int$ ص جا^{٢}ص . دص

دس = $\frac{دص}{هـ^{س}}$ ق = ص ⇐ دق = ١ . دص

دس = $\int$ $\frac{دص}{ص}$ دهـ = $\int$ جا^{٢}ص . دص

= $\frac{١}{٢}$ (١ – جتا٢ص) . دص

هـ = $\frac{١}{٢}$ (ص - $\frac{جا٢ص}{٢}$)

⇐ $\int$ ص جا^{٢}ص . دص

= $\frac{١}{٢}$ ص (ص - $\frac{جا٢ص}{٢}$) - $\frac{١}{٢}$ ($\frac{ص^{٢}}{٢}$ + $\frac{جتا٢ص}{٤}$) + جـ

= $\frac{١}{٢}$ هـ^{س} (هـ^{س} - $\frac{جا(٢هـ^{س})}{٢}$) - $\frac{١}{٢}$ ($\frac{هـ^{٢س}}{٢}$ + $\frac{جتا(٢هـ^{س})}{٢}$) + جـ

---

١٨) $\int$ (س + جاس)^{٢} . دس

الحل :

= $\int$ س^{٢} + ٢س جاس + جا^{٢}س . دس

= $\int$ س^{٢} + $\frac{١}{٢}$ (١ – جتا٢س).دس + $\int$ ٢س جاس.دس

* ⇐ $\int$ ٢س جاس.دس

ق = ٢س ⇐ دق = ٢ . دس

$\int$ دهـ = $\int$ جاس . دس ⇐ هـ = - جتاس

⇐ $\int$ س^{٢} + $\frac{١}{٢}$ (١ – جتا٢س).دس + $\int$ ٢س جاس.دس

= $\frac{س^{٣}}{٣}$ + $\frac{١}{٢}$ (س - $\frac{جا٢س}{٢}$) - ٢س جتاس + $\int$ ٢جتاس . دس

= $\frac{س^{٣}}{٣}$ + $\frac{١}{٢}$ (س - $\frac{جا٢س}{٢}$) - ٢س جتاس + ٢جاس + جـ

SALEM ALSATEB

١٩) $\int \frac{٢س}{١-جتا٢س}$. دس

الحل :

$= \int \frac{٢س}{١-(١-٢جا^{٢}س)}$. دس

$= \int \frac{٢س}{٢جا^{٢}س}$. دس $= \int$ س قتا^{٢}س . دس

ق = س $\Leftarrow$ دق = ١ . دس

$\int$ دهـ = $\int$ قتا^{٢}س . دس $\Leftarrow$ هـ = - ظتاس

$\Leftarrow \int$ س قتا^{٢}س . دس

= - س ظتاس + $\int$ ظتاس . دس

= - س ظتاس + لو| جاس| + جـ

---

٢٠) $\int_{٠}^{\pi}$ س $\sqrt{١-جتا٢س}$. دس

الحل :

$\int_{٠}^{\pi}$ س $\sqrt{١-(١-٢جا^{٢}س)}$. دس

$= \int_{٠}^{\pi}$ س $\sqrt{٢جا^{٢}س}$. دس $= \sqrt{٢} \int_{٠}^{\pi}$ س جاس . دس

ق = س $\Leftarrow$ دق = ١ . دس

$\int$ د هـ = $\int$ جاس . دس $\Leftarrow$ هـ = - جتاس

$\Leftarrow \sqrt{٢} \int_{٠}^{\pi}$ س جاس . دس

$= \sqrt{٢}$ (- س جتاس + $\int_{٠}^{\pi}$ جتاس . دس

$= \sqrt{٢}$ (- س جتاس + جاس) $]_{٠}^{\pi} = - \pi \sqrt{٢}$

---

٢١) $\int$ قا^{٢}س هـ $^{\sqrt{ظاس}}$. دس

الحل :

ص = $\sqrt{ظاس} \Leftarrow$ دس = $\frac{٢\sqrt{ظاس}}{قا^{٢}س}$. دص

$= \int$ قا^{٢}س هـ^{ص} . $\frac{٢\sqrt{ظاس}}{قا^{٢}س}$. دص $= \int$ ٢ص هـ^{ص} . دص

ق = ٢ص $\Leftarrow$ دق = ٢

دهـ = هـ^{ص} $\Leftarrow$ هـ = هـ^{ص}

= ٢ص هـ^{ص} - $\int$ ٢ هـ^{ص} . دص

= ٢ص هـ^{ص} - ٢ هـ^{ص} + جـ

= ٢ $\sqrt{ظاس}$ هـ $^{\sqrt{ظاس}}$ - ٢ هـ $^{\sqrt{ظاس}}$ + جـ

---

٢٢) $\int \frac{٢}{س}$ هـ $^{س+٢لوس}$. دس

الحل:

$= \int \frac{٢}{س}$ هـ^{س} × هـ^{٢لوس} . دس

$= \int \frac{٢}{س}$ هـ^{س} × هـ$^{لوس^{٢}}$. دس

$= \int \frac{٢}{س}$ هـ^{س} × س^{٢} . دس

$= \int$ ٢س هـ^{س} . دس

ق = ٢س $\Leftarrow$ دق = ٢ . دس

$\int$ دهـ = $\int$ هـ^{س} . دس $\Leftarrow$ هـ = هـ^{س}

= $\int$ ٢س هـ^{س} . دس = ٢س هـ^{س} - $\int$ ٢ هـ^{س} . دس

= ٢س هـ^{س} - ٢ هـ^{س} + جـ

---

٢٣) $\int \frac{س هـ^{س}}{(س+١)^{٢}}$. دس

الحل :

ق = س هـ^{س} $\Leftarrow$ دق = س هـ^{س} + هـ^{س}

$\int$ دهـ = $\int \frac{١}{(س+١)^{٢}}$. دس $\Leftarrow$ هـ = $\frac{-١}{(س+١)}$

$= \frac{-س هـ^{س}}{(س+١)} + \int \frac{س هـ^{س} + هـ^{س}}{(س+١)}$. دس

$= \frac{-س هـ^{س}}{(س+١)} + \int$ هـ^{س} . دس $= \frac{-س هـ^{س}}{(س+١)} +$ هـ^{س} + جـ

---

٢٤) $\int \frac{هـ^{\sqrt{س}}}{(\sqrt{س}+١)^{٢}}$. دس

الحل :

$= \int$ هـ $^{\sqrt{س}}(\sqrt{س}+١)^{-٢}$. دس

ص = $\sqrt{س} \Leftarrow$ دس = ٢ $\sqrt{س}$. دص

$= \int$ هـ^{ص} (ص + ١)$^{-٢}$. ٢ $\sqrt{س}$. دص

$= \int$ ٢ص هـ^{ص} (ص + ١)$^{-٢}$. دص

ق = ٢ص هـ^{ص} $\Leftarrow$ دق = ٢ص هـ^{ص} + ٢ هـ^{ص}

$\int$ دهـ = $\int$ (ص + ١)$^{-٢}$. دص $\Leftarrow$ هـ = - (ص + ١)$^{-١}$

= - ٢ص هـ^{ص} (ص + ١)$^{-١}$ + $\int$(ص + ١)$^{-١}$ (٢ص هـ^{ص} + هـ^{ص}) . دص

= - ٢ص هـ^{ص} (ص + ١)$^{-١}$ + $\int$(ص + ١)$^{-١}$ (ص + ١) (٢هـ^{ص}). دص

SALEM ALSATEB

$= \frac{-٢ص هـ^{ص}}{ص+١} + ٢هـ^{ص} + جـ$

$= \frac{-٢\sqrt{س}\, هـ^{\sqrt{س}}}{\sqrt{س}+١} + ٢هـ^{\sqrt{س}} + جـ$

---

٢٥) $\int \frac{١+ظا^{٢}س}{ظاس}$. دس

الحل :

$= \int \frac{١}{ظاس} + \frac{ظا^{٢}س}{ظاس}$. دس $= \int$ ظتاس + ظاس . دس

$= \int \frac{جتاس}{جاس} + \frac{جاس}{جتاس}$. دس

= لوهـ | جاس| - لوهـ | جتاس| + جـ

ملاحظة على تكامل اللوغريتمات :

اذا ظهر لدينا لوغريتم فإن الحل يكون باحد الطرق التالية :

أ) بالاجزاء : يجب ان يكون اللوغريتم في البسط و داخله كثير حدود نفرض ق = اللوغريتم و الباقي دهـ

ب) بالتعويض : داخل اللوغريتم ليس كثير حدود

١. ص = ما داخل اللوغريتم

٢. ص= كل اللوغريتم

حسب اللي برا مشتقة م

١) $\int$ لوهـ س . دس

الحل : ق = لوهـ س $\Leftarrow$ دق = $\frac{١}{س}$. دس

$\int$ دهـ = $\int$ ١.دس $\Leftarrow$ هـ = س

= س لوهـ س - س + جـ

---

٢) $\int$ س لوهـ س . دس

الحل :

ق = لوهـ س $\Leftarrow$ دق = $\frac{١}{س}$. دس

$\int$دهـ = $\int$س.دس $\Leftarrow$ هـ = $\frac{س^{٢}}{٢}$

= $\frac{س^{٢}}{٢}$ لوهـ س - $\int \frac{س}{٢}$. دس

= $\frac{س^{٢}}{٢}$ لوهـ س - $\frac{س^{٢}}{٤}$ + جـ

---

٣) $\int$ س^٥ لوهـ س^٣ . دس

الحل : ق = لوهـ س^٣ $\Leftarrow$ دق = $\frac{٣}{س}$. دس

$\int$دهـ = $\int$س^٥.دس $\Leftarrow$ هـ = $\frac{س^{٦}}{٦}$

= $\frac{س^{٦}}{٦}$ لوهـ س^٣ - $\int \frac{س^{٥}}{٢}$. دس

= $\frac{س^{٦}}{٦}$ لوهـ س^٣ - $\frac{س^{٦}}{١٢}$ + جـ

---

٤) $\int$ س^ن لوهـ س^٣ . دس

الحل :

ق = لوهـ س^٣ $\Leftarrow$ دق = $\frac{٣}{س}$

$\int$دهـ = س^ن.دس $\Leftarrow$ هـ = $\frac{س^{ن+١}}{ن+١}$

= $\frac{س^{ن+١}}{ن+١}$ لوهـ س^٣ - $\int \frac{٣}{س} \cdot \frac{س^{ن+١}}{ن+١}$. دس

= $\frac{س^{ن+١}}{ن+١}$ لوهـ س^٣ - $\int \frac{٣}{ن+١}$. س^ن . دس

= $\frac{س^{ن+١}}{ن+١}$ لوهـ س^٣ - $\frac{٣}{(ن+١)^{٢}}$. س^{ن+١} + جـ

---

٥) $\int$ قا^٢س هـ^لوظاس . دس

الحل :

ص = ظاس $\Leftarrow$ دس = $\frac{دص}{قا^{٢}س}$

= $\int$ قا^٢س هـ^لوص . $\frac{دص}{قا^{٢}س}$

= $\int$هـ^لوص . دص = ص هـ^لوص – ص + جـ "بالأجزاء"

= ظاس هـ^لوظاس – ظاس + جـ

---

٦) $\int$ قا^٤س هـ^لوظاس . دس

الحل :

ص = ظاس $\Leftarrow$ دس = $\frac{دص}{قا^{٢}س}$

= $\int$ قا^٢س هـ^لوص . دص

= $\int$(ظا^٢س + ١) هـ^لوص . دص

= $\int$ (ص^٢ + ١) هـ^لوص . دص

ق = هـ^لوص $\Leftarrow$ دق = $\frac{١}{ص}$

SALEM ALSATEB

$\int$ دهـ = $\int$ ص^{٢} + ١ .دص ⇐ هـ = $\frac{ص^{٣}}{٣}$ + ص

= ($\frac{ص^{٣}}{٣}$ + ص) هـ لو ص - $\int \frac{ص^{٣}}{٣}$ + ١ . دس

= ($\frac{ص^{٣}}{٣}$ + ص) هـ لو ص – ($\frac{ص^{٣}}{٩}$ + ص) + جـ

= ($\frac{ظا^{٣}س}{٣}$ + ظاس) هـ لو (ظاس) - ($\frac{ظا^{٣}س}{٩}$ + ظاس) +جـ

---

٧) $\int$ جتاس $\overset{لو}{هـ}$ جتاس . دس

الحل:

نفرض ان ص = جتاس ⇐ $\frac{دص}{دس}$ = جتاس

دس = $\frac{دص}{جتاس}$

$\int \overset{لو}{هـ}$ ص .دص = ص $\overset{لو}{هـ}$ ص – ص + جـ

= جاس $\overset{لو}{هـ}$ جاس – جاس + جـ

---

٨) $\int$ ظتاس $\overset{لو}{هـ}$ جاس . دس

الحل:

نفرض ان ص = $\overset{لو}{هـ}$ جاس ⇐ $\frac{دص}{دس}$ = $\frac{جتاس}{جاس}$

دس = $\frac{دص}{ظتاس}$

$\int$ ص .دص = $\frac{ص}{٢}$ + جـ

= ($\overset{لو}{هـ}$ جاس)^{٢} + جـ

---

٩) $\int_{١}^{هـ}$ ($\overset{لو}{هـ}$س)^{٢} . دس

الحل :

ق = ($\overset{لو}{هـ}$س)^{٢} ⇐ دق = ٢ $\overset{لو}{هـ}$س × $\frac{١}{س}$

$\int$دهـ = $\int$ ١ .دس ⇐ هـ = س

= س ($\overset{لو}{هـ}$س)^{٢}]$_{١}^{هـ}$ - ٢ $\int_{١}^{هـ}$ $\overset{لو}{هـ}$س . دس "بالأجزاء"

= هـ – ٢(س $\overset{لو}{هـ}$س – س]$_{١}^{هـ}$

= هـ – ٢(هـ – هـ + ١) = هـ – ٢

---

١٠) $\int \frac{\overset{لو}{هـ}ظاس}{جا^{٢}س}$. دس

ص = $\overset{لو}{هـ}$ ظاس س

$\frac{دص}{دس} = \frac{قا^{٢}س}{ظاس} = \frac{١}{جتا^{٢}س} \times \frac{جتاس}{جاس}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{١}{جاس جتاس}$

دس = جاس جتاص

$\int \frac{ص}{٢جاس جتاس}$ جاس جتاس .دص

= $\int \frac{ص}{٢}$.دص = $\frac{ص^{٢}}{٤}$ +جـ

= $\frac{(\overset{لو}{هـ}ظاس)^{٢}}{٤}$ +جـ

---

١١) $\int \frac{\overset{لو}{هـ}س}{س}$.دس

الحل:

نفرض ان ص = $\overset{لو}{هـ}$ س ⇐ $\frac{دص}{دس} = \frac{١}{س}$

دس = س . دص

$\int$ ص .دص = $\frac{ص^{٢}}{٢}$ + جـ

= $\frac{-(\overset{لو}{هـ}س)^{٢}}{٢}$ + جـ

حل اخر:

$\int \overset{لو}{هـ}$ س × $\frac{١}{س}$.دس

ق = $\overset{لو}{هـ}$ س ⇐ دق = $\frac{١}{س}$.دس

$\int$ دهـ = $\int \frac{١}{س}$.دس ⇐ هـ = $\overset{لو}{هـ}$ س

= ($\overset{لو}{هـ}$ س)^{٢} - $\int \overset{لو}{هـ}$ س × $\frac{١}{س}$.دس

$\int \overset{لو}{هـ}$ س × $\frac{١}{س}$.دس + $\int \overset{لو}{هـ}$ س × $\frac{١}{س}$.دس = $\int \overset{لو}{هـ}$ س × $\frac{١}{س}$.دهـ

رجع لاصله
يعني تكامل
دوري بنقله
للطرف الثاني

SALEM ALSATEB

$\int \frac{\frac{1}{س} \times لو_{هـ} س}{\frac{1}{س}} .دس = \frac{(لو_{هـ} س)^{٢}}{٢}$

$\int \frac{لو_{هـ} س}{س} .دس = \frac{(لو_{هـ} س)^{٢}}{٢} + جـ$

---

١٢) $\int \frac{لو_{هـ} س}{\sqrt{س}} .دس$

الحل:

$= \int س^{-\frac{١}{٢}} \times لو_{هـ} س .دس$

ق= $لو_{هـ} س$ ⇐ دق = $\frac{١}{س} .دس$

$\int دهـ = \int س^{-\frac{١}{٢}} .دس$ ⇐ هـ = $٢ س^{\frac{١}{٢}}$

$= ٢ س^{\frac{١}{٢}} لو_{هـ} س - \int ٢ س^{\frac{١}{٢}} .دس$

$= ٢ س^{\frac{١}{٢}} لو_{هـ} س - ٤ س^{\frac{١}{٢}} + جـ$

---

١٣) $\int \frac{لو_{هـ} \sqrt{س+٢}}{س+٢} .دس$

الحل :

$\int \frac{\frac{١}{٢} لو_{هـ}(س+٢)}{س+٢} .دس$

ص = $لو_{هـ}$ (س + ٢) ⇐ دس = (س + ٢) . دص

$= \int \frac{\frac{١}{٢} ص}{س+٢} .(س + ٢) .دص = \int \frac{١}{٢} ص .دص$

$= \frac{١}{٤} ص^{٢} + جـ = \frac{١}{٤} (لو_{هـ} (س + ٢))^{٢} + جـ$

---

١٤) $\int هـ^{س} (\frac{١}{س} + لو_{هـ} س) .دس$

الحل :

$\int \frac{هـ^{س}}{س} .دس + \int هـ^{س} لو_{هـ} س .دس$

ق = $لو_{هـ} س$ ⇐ دق = $\frac{١}{س}$

دهـ = $هـ^{س}$ ⇐ هـ = $هـ^{س}$

$= \int \frac{هـ^{س}}{س} .دس + هـ^{س} - \int \frac{هـ^{س}}{س} .دس$

$= هـ^{س} لو_{هـ} س + جـ$

---

١٥) $\int هـ^{س} .جتاس .دس$

الحل :

ق = $هـ^{س}$ ⇐ دق = $هـ^{س}$

$\int دهـ = \int جتاس .دس$ ⇐ هـ = جاس

$= هـ^{س} جاس - \int هـ^{س} جاس .دس$

ق = $هـ^{س}$ ⇐ دق = $هـ^{س}$

دهـ = جاس ⇐ هـ = - جتاس

$\int هـ^{س} .جتاس .دس = هـ^{س} جاس + هـ^{س} جتاس - \int هـ^{س} جتاس .دس$

$\int هـ^{س} .جتاس .دس = \frac{١}{٢} (هـ^{س} جاس + هـ^{س} جتاس) + جـ$ ⇐

---

١٦) $\int هـ^{س} .جاس .دس$ ((واجب))

---

١٧) $\int جتا (لو_{هـ} س) .دس$

الحل :

ص = $لو_{هـ} س$ ⇐ $\frac{دص}{دس} = \frac{١}{س}$

دس = س . دص ⇐ س = $هـ^{ص}$

$= \int جتاص .س .دص$

$= \int هـ^{ص} جتاص .دص$

$= \frac{١}{٢} (هـ^{ص} جاص + هـ^{ص} جتاص) + جـ$

$= \frac{١}{٢} (هـ^{لو_{هـ} س} جا لو_{هـ} س + لو_{هـ} س جتا لو_{هـ} س) + جـ$

$= \frac{١}{٢} (س جا(لو_{هـ} س) + س جتا(لو_{هـ} س)) + جـ$

---

١٨) $\int هـ^{س} (٢ جتاس \times جتا٣س - جتا٤س) .دس$

الحل:

$= \int هـ^{س} (٢ \times \frac{١}{٢} (جتا(س-٣س) + جتا(س+٣س)) - جتا٤س) .دس$

$= \int هـ^{س} (جتا(-٢س) + جتا(٤س) - جتا٤س) .دس$

$= \int هـ^{س} جتا٢س .دس$

ق = $هـ^{س}$ ⇐ دق = $هـ^{س}$

SALEM ALSATEB

$\int$ دهـ = $\int$ جتا٢س . دس ⟸ هـ = $\frac{1}{2}$ جا٢س

= $\frac{1}{2}$ هـ^{س} جاس - $\frac{1}{2}\int$ هـ^{س} جا٢س . دس

ق = هـ^{س} ⟸ دق = هـ^{س}

$\int$ دهـ = $\int \frac{1}{2}$ جا٢س . دس ⟸ هـ = - $\frac{1}{4}$ جتا٢س

⟸ $\int$ هـ^{س} . جتا٢س . دس

= $\frac{1}{2}$ هـ^{س} جا٢س + $\frac{1}{4}$ هـ^{س} جتا٢س - $\frac{1}{4}\int$ هـ^{س} جتا٢س . دس

$\frac{5}{4}\int$ هـ^{س} . جتا٢س . دس = $\frac{1}{2}$ هـ^{س} جا٢س + $\frac{1}{4}$ هـ^{س} جتا٢س

$\int$ هـ^{س} . جتا٢س . دس = $\frac{4}{5}$ ($\frac{1}{2}$ هـ^{س} جا٢س + $\frac{1}{4}$ هـ^{س} جتا٢س) + جـ

---

١٩) $\int$ قا^{٣} س . دس

الحل:

= $\int$ قا^{٢} س قاس . دس

= $\int$ (ظا^{٢}س + ١) قاس .دس

= $\int$ ظا^{٢} س قاس .دس + $\int$ قاس .دس

= $\int$ ظا^{٢} س قاس .دس + $\int$ قاس × $\frac{\text{قاس+ظاس}}{\text{قاس+ظاس}}$.دس

= $\int$ ظا^{٢} س قاس .دس + لـو|قاس+ظاس|

ق= ظاس ⟸ د هـ = قا^{٢} س . دس

$\int$ دهـ = $\int$ قاس ظاس .دس ⟸ هـ = قاس

$\int$ قا^{٣} س . دس = ظاس قاس - $\int$ قا^{٣}س + لـو|قاس+ظاس|

$\frac{\int \text{قا}^{3}\text{س . دس}}{2}$ = $\frac{\text{ظاس قاس +لـو|قاس+ظاس|}}{2}$

= $\frac{\text{ظاس قاس +لـو|قاس+ظاس|}}{2}$ +جـ

الكســـور الجزئيـــة :

إذا كان البسط كثير حدود والمقام كثير حدود فإننا :

١) نستخدم التعويض "بسط مشتقة مقام"

٢) القسمة الطويلة : درجة البسط أعلى من درجة المقام أو تساويه .

$\frac{\text{البسط}}{\text{المقام}}$ = الناتج + $\frac{\text{الباقي}}{\text{المقام}}$

٣) الكسور الجزئية : عند فشل القسمة

تربيعي يُحلل إلى عاملين مختلفين

- إذا كانت عوامل المقام هي :

(جـ$_{١}$س + د$_{١}$) ، (جـ$_{٢}$س + د$_{٢}$) فإنّ :

$\frac{\text{البسط}}{\text{مقام}}$ = $\frac{\text{أ}}{\text{جـ}_{1}\text{س + د}_{1}}$ + $\frac{\text{ب}}{\text{جـ}_{2}\text{س + د}_{2}}$

- لا يستخدم الكسور الجزئية إلا إذا كان البسط خطي أو ثابت وإذا كان غير ذلك فإننا نقسم قسمة طويلة :

أسئلة : -

١) $\int \frac{\text{٥س+١}}{\text{٥س−٣}}$. دس

٥س − ٣	١
٥س + ١	
-٥س + ٣	
٤	

الحل :

= $\int$ ١ + $\frac{٤}{\text{٥س−٣}}$. دس= س + $\frac{٤}{٥}$ لوهـ|٥س − ٣| + جـ

---

٢) $\int \frac{\text{٣س−٢}}{\text{س+٢}}$. دس

= $\int$ ٣ + $\frac{-٨}{\text{س+٢}}$. دس

٣س − ٢	٣
٣س + ٦	
-٣س - ٦	
- ٨	

= ٣س − ٨ لوهـ| س + ٢| + جـ

---

٣) $\int \frac{\text{٢س}^{2}\text{−٥}}{\text{س+٣}}$. دس

الحل :

= $\int$ ٢س − ٦ + $\frac{١٣}{\text{س+٣}}$. دس

= س^{٢} − ٦س + ١٣ لوهـ| س + ٣| + جـ

٣س^{٢} - ٥	٢س - س
-٣س^{٢} - ٦س	
-٦س + ٦	
١	

SALEM ALSATEB

٤) $\int \frac{س^{٥}}{س^{٢}+١}$. دس (بالقسمة الطويلة)

الحل: $\int س^{٣} - س + \frac{س}{س^{٢}+١}$. دس

$= \frac{س^{٤}}{٤} - \frac{س^{٢}}{٢} + \frac{١}{٢}$ لـو$_{هـ}$ | $س^{٢} + ١$ | + جـ

---

٥) $\int \frac{٣س^{٢}-٢س+١}{س^{٣}-س^{٢}+س-٣}$. دس

الحل :

ص = $س^{٣} - س^{٢} + س - ٣$

$\frac{دص}{دس} = ٣س^{٢} - ٢س + ١ \Leftarrow$ دس = $\frac{دص}{٣س^{٢}-٢س+١}$

$= \int \frac{٣س^{٢}-٢س+١}{ص} . \frac{دص}{٣س^{٢}-٢س+١}$

$= \int \frac{١}{ص}$. دص = لو$_{هـ}$ | ص | + جـ

= لو$_{هـ}$ | $س^{٣} - س^{٢} + س - ٣$ | + جـ

---

٦) $\int \frac{٢س^{٢}-٤}{س^{٢}}$. دس

الحل :

$= \int \frac{٢س^{٢}}{س^{٢}} - \frac{٤}{س^{٢}}$. دس

$= \int ٢ - ٤س^{-٢}$. دس = $٢س + ٤س^{-١}$ + جـ

---

٧) $\int \frac{١}{س^{١٠}+س}$. دس

الحل :

$= \int \frac{١}{س^{١٠}(١+س^{-٩})}$. دس

ص = $١ + س^{-٩} \Leftarrow \frac{دص}{دس} = -٩س^{-١٠}$

$\Leftarrow$ دس = $\frac{س^{١٠}}{-٩}$. دص

$= \int \frac{١}{س^{١٠}(ص)} - \frac{س^{١٠}}{-٩}$. دص

$= \int \frac{-١}{٩ص}$. دص = $\frac{-١}{٩}$ لو$_{هـ}$|ص| + جـ

= $\frac{-١}{٩}$ لو$_{هـ}$|$س^{-٩} + ١$ | + جـ

---

٨) $\int \frac{س}{س^{١١}+س^{٢}}$. دس

الحل :

$= \int \frac{س}{س(س^{١٠}+س)}$. دس = $\int \frac{١}{س^{١٠}+س}$. دس

= $\frac{-١}{٩}$ لو$_{هـ}$|$س^{-٩} + ١$ | + جـ

---

٩) $\int \frac{ن}{س^{ن+١}+س}$. دس

الحل :

$= \int \frac{ن}{س^{ن+١}\left(\frac{١}{س^{ن}}+١\right)}$. دس

ص = $١ + \frac{١}{س^{ن}} \Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{-ن}{س^{ن+١}}$

$\Leftarrow$ دس = $\frac{س^{ن+١}}{ن}$. دص

$= \int \frac{ن}{س^{ن+١}ص} . \frac{س^{ن+١}}{ن}$ دص = $\int \frac{١}{ص}$. دص

= لو$_{هـ}$|ص| + جـ = لو$_{هـ}$|$١ + \frac{١}{س^{ن}}$| + جـ

---

١٠) $\int \frac{\sqrt{س+١}-١}{\sqrt{س+١}+١}$. دس

الحل :

ص = $\sqrt{س+١} \Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{١}{٢\sqrt{س+١}}$

$\Leftarrow$ دس = $٢\sqrt{س+١}$. دص

$= \int \frac{ص-١}{ص+١} \times ٢ص$. دص

$= \int \frac{٢ص^{٢}-٢ص}{ص+١}$. دص

$= \int ٢ص - ٤ + \frac{٤}{ص+١}$. دص

= $ص^{٢} - ٤ص + ٤$ لو$_{هـ}$|ص + ١| + جـ

= $(\sqrt{س+١})^{٢} - ٤\sqrt{س+١} + ٤$ لو$_{هـ}$|$\sqrt{س+١} + ١$| + جـ

٢ص - ٤	ص + ١
$٢ص^{٢} - ٢ص$	
$-٢ص^{٢} - ٢ص$	
$-٤ص$	
$+٤ص + ٤$	
٤	

SALEM ALSATEB

١١) $\int \frac{\sqrt{1+س}-\sqrt{1-س}}{\sqrt{1+س}+\sqrt{1-س}}$.دس

الحل:

$= \int \frac{\sqrt{1+س}-\sqrt{1-س}}{\sqrt{1+س}+\sqrt{1-س}} \times \frac{\sqrt{1+س}+\sqrt{1-س}}{\sqrt{1+س}+\sqrt{1-س}}$.دس

$= \int \frac{(1+س)-(1-س)}{\left(\sqrt{1+س}+\sqrt{1-س}\right)^{٢}}$.دس

$= \int \frac{٢س}{١+س+٢\sqrt{(1+س)(1-س)}+1-س}$. دس

$= \int \frac{٢س}{٢+٢\sqrt{1-س^{٢}}}$. دس

ص$= \sqrt{1-س^{٢}} \Leftarrow$ ص$^{٢} = 1 - س^{٢}$

٢ص .دص = -٢س .دس

٢س $= \frac{-ص}{س}$.دص

$\int \frac{٢س}{٢+٢ص} \times \frac{-ص}{س} = \int \frac{-ص}{(1+ص)}$. دص

$= \int \frac{-ص}{1+ص}$.دص

$= \int -١ + \frac{١}{1+ص}$.دص

$= -ص + لو|1+ص| + جـ$

$= -\sqrt{1-س^{٢}} + لو|1+\sqrt{1-س^{٢}}| + جـ$

١٢) $\int \frac{٤}{س^{٢}-٤}$. دس

الحل :

$\frac{٤}{س^{٢}-٤} = \frac{أ}{س-٢} + \frac{ب}{س+٢}$

$\Leftarrow ٤ = أ (س + ٢) + ب (س - ٢)$

س = ٢ $\Leftarrow$ ٤أ = ٤ $\Leftarrow$ أ = ١

س = -٢ $\Leftarrow$ -٤ب = ٤ $\Leftarrow$ ب = -١

$= \int \frac{١}{س-٢} + \frac{-١}{س+٢}$. دس

$=$ لوهـ|س – ٢| - لوهـ|س + ٢| + جـ

١٣) $\int \frac{٥س+١}{س^{٢}-٥س-٦}$. دس

الحل :

$\frac{٥س+١}{س^{٢}-٥س+٦} = \frac{أ}{س-٢} + \frac{ب}{س-٣}$

٥س + ١ = أ(س – ٣) + ب(س – ٢)

س = ٢ $\Leftarrow$ ١١ = - أ $\Leftarrow$ أ = - ١١

س = ٣ $\Leftarrow$ ١٦ = ب

$= \int \frac{-١١}{س-٢} + \frac{١٦}{س-٣}$. دس

$=$ - ١١ لوهـ|س – ٢| + ١٦ لوهـ |س – ٣| + جـ

١٤) $\int \frac{س^{٢}+١}{س^{٢}-١}$. دس

الحل :

$= \int ١ + \frac{٢}{س^{٢}-١}$. دس

$= \frac{٢}{س^{٢}-١} = \frac{أ}{س+١} + \frac{ب}{س-١}$

٢ = أ (س – ١) + ب (س + ١)

س = -١ $\Leftarrow$ ٢ = -٢أ $\Leftarrow$ أ = -١

س = ١ $\Leftarrow$ ٢ = ٢ب $\Leftarrow$ ب = ١

$= \int ١ + \frac{-١}{س+١} + \frac{١}{س-١}$. دس

$=$ س - لوهـ|س + ١| + لوهـ|س - ١| + جـ

١٥) $\int \frac{س^{٣}+٣}{س^{٢}-١}$. دس

الحل :

$= \int س + \frac{س+٣}{س^{٢}-١}$. دس

$\frac{س+٣}{س^{٢}-١} = \frac{أ}{س+١} + \frac{ب}{س-١}$

س + ٣ = أ (س – ١) + ب (س + ١)

س = -١ $\Leftarrow$ ٢ = -٢أ $\Leftarrow$ أ = -١

س = ١ $\Leftarrow$ ٤ = ٢ب $\Leftarrow$ ب = ٢

SALEEM ALSATEB

$= \int س + \frac{-١}{س+١} + \frac{٢}{س-١}$

$= \frac{س^{٢}}{٢} - لو_{هـ}|س+١| + ٢ لو_{هـ}|س-١| + جـ$

---

١٦) $\int \frac{س^{٣}-٣}{س^{٢}-س}$.دس

الحل :

$= \int س + ١ + \frac{س-٣}{س^{٢}-س}$.دس

$\frac{س-٣}{س^{٢}-س} = \frac{أ}{س} + \frac{ب}{س-١}$

س− ٣ = أ (س − ١) + ب (س)

س = ٠ ⟸ -٣ = -أ ⟸ أ = ٣

س = ١ ⟸ -٢ = ب ⟸ ب = -٢

$= \int س + ١ + \frac{٣}{س} + \frac{-٢}{س-١}$.دس

$= \frac{س^{٢}}{٢} + س + ٣لو_{هـ}|س| - ٢ لو_{هـ}|س-١| + جـ$

---

١٧) $\int \frac{س+٧}{(س+٣)^{٢}+٤س}$.دس

الحل :

$= \int \frac{س+٧}{س^{٢}+٦س+٩+٤س}$.دس

$= \int \frac{س+٧}{س^{٢}+١٠س+٩}$.دس

$\frac{س+٧}{س^{٢}+١٠س+٩} = \frac{أ}{س+٩} + \frac{ب}{س+١}$

⟸ س +٧ = أ (س + ١) + ب (س + ٩)

س = -١ ⟸ ٦ = ٨ب ⟸ ب = $\frac{٦}{٨}$

س = -٩ ⟸ -٢ = -٨ أ ⟸ أ = $\frac{١}{٤}$

⟸ $\int \frac{\frac{١}{٤}}{س+٩} + \frac{\frac{٦}{٨}}{س+١}$.دس

$= \frac{١}{٤} لو_{هـ}|س+٩| + \frac{٦}{٨} لو_{هـ}|س+١| + جـ$

---

١٨) $\int \frac{١}{س^{٣}-٤س}$.دس

الحل:

$\frac{١}{س^{٣}-٤س} = \frac{أ}{س} + \frac{ب}{س+٢} + \frac{جـ}{س-٢}$

١ = أ(س+٢) (س-٢) + ب(س)(س-) + جـ(س+٢)

س=٠ ⟸ ١ = -٤ أ ⟸ أ = $\frac{-١}{٤}$

س=٠ ⟸ ١ = ٨ب ⟸ ب= $\frac{١}{٨}$

س=٠ ⟸ ١ = ٨جـ ⟸ جـ= $\frac{١}{٨}$

⟸ $\int \frac{\frac{-١}{٤}}{س} + \frac{\frac{١}{٨}}{س+٢} + \frac{\frac{١}{٨}}{س-٢}$.دس

$= \frac{-١}{٤} لو_{هـ}|س| + \frac{١}{٨} لو_{هـ}|س+٢| + \frac{١}{٨} لو_{هـ}|س+٢| + جـ$

---

١٩) $\int \frac{٣س^{٢}}{س^{٦}-٩}$.دس

الحل:

$= \int \frac{٣س^{٢}}{(س^{٣})^{٢}-٩}$.دس

ص= $س^{٣}$ ⟸ دس = $\frac{دص}{٣س^{٢}}$

$= \int \frac{٣س^{٢}}{ص^{٢}-٩} \times \frac{دص}{٣س^{٢}} = \int \frac{١}{ص^{٢}-٩}$.دص

$\frac{١}{ص^{٢}-٩} = \frac{أ}{ص-٣} + \frac{ب}{ص+٣}$

١ = أ (ص+٣) + ب(ص-٣)

ص = ٣ ⟸ ١ = ٦أ ⟸ أ = $\frac{١}{٦}$

ص = -٣ ⟸ ١ = -٦ب ⟸ ب= $\frac{-١}{٦}$

⟸ $= \int \frac{\frac{١}{٦}}{ص-٣}$.دص + $\int \frac{\frac{-١}{٦}}{ص+٣}$. دص

$= \frac{١}{٦} لو_{هـ}|ص-٣| - \frac{١}{٦} لو_{هـ}|ص+٣| + جـ$

$= \frac{١}{٦} لو_{هـ}|س^{٣}-٣| - \frac{١}{٦} لو_{هـ}|س^{٣}+٣| + جـ$

SALEEM ALSATEB

٢٠) $\int \frac{\sqrt{س}}{س-١}$. دس

الحل :

ص = $\sqrt{س} \Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{١}{٢\sqrt{س}}$

س = ص^{٢} $\Leftarrow$ دس = ٢ $\sqrt{س}$. دص

$= \int \frac{٢ص^{٢}}{ص^{٢}-١}$. دص

$= \int ٢ + \frac{٢}{ص^{٢}-١}$. دص

$\frac{٢}{ص^{٢}-١} = \frac{أ}{ص-١} + \frac{ب}{ص+١}$

٢ = أ (ص + ١) + ب (ص – ١)

ص = ١ $\Leftarrow$ ٢ = ٢أ $\Leftarrow$ أ = ١

ص = -١ $\Leftarrow$ ٢ = -٢ب $\Leftarrow$ ب = -١

$= \int ٢ + \frac{١}{ص-١} + \frac{-١}{ص+١}$. دص

= ٢ص + لوه |ص - ١| - لوه|ص + ١| + جـ

= ٢ $\sqrt{س}$ + لوه| $\sqrt{س}$ - ١| - لوه| $\sqrt{س}$ + ١| + جـ

---

٢١) $\int \frac{١}{س\sqrt{س+١}}$. دس

الحل :

ص = $\sqrt{س+١} \Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{١}{٢\sqrt{س+١}}$

دس = ٢ $\sqrt{س+١}$. دص $\Leftarrow$ س = ص^{٢} – ١

$= \int \frac{١}{(ص^{٢}-١)ص}$. ٢ص . دص

$= \int \frac{٢}{ص^{٢}-١}$. دص

$\frac{٢}{ص^{٢}-١} = \frac{أ}{ص-١} + \frac{ب}{ص+١}$

٢ = أ (ص + ١) + ب (ص – ١)

ص = ١ $\Leftarrow$ ٢ = ٢ أ $\Leftarrow$ أ = ١

ص = -١ $\Leftarrow$ ٢ = -٢ب $\Leftarrow$ ب = -١

$= \int \frac{١}{ص-١} + \frac{-١}{ص+١}$. دص

= لوه |ص - ١| - لوه|ص + ١| + جـ

= لوه| $\sqrt{س+١}$ - ١| - لوه| $\sqrt{س+١}$ + ١| + جـ

---

٢٢) $\int \frac{\sqrt[٣]{س-١}}{\sqrt[٣]{س^{٢}}-١}$. دس

الحل :

ص = $\sqrt[٣]{س} \Leftarrow$ ص^{٣} = س $\Leftarrow$ دس = ٣ص^{٢} . دص

$= \int \frac{ص-١}{ص^{٣}-١}$. ٣ص^{٢} . دص

$= \int \frac{٣ص^{٢}}{ص+١}$. دص

$= \int ٣ص - ٣ + \frac{٣}{ص+١}$. دص

$= \frac{٣}{٢}$ ص^{٢} – ٣ص + ٣ لوه |ص + ١| + جـ

$= \frac{٣}{٢}\left(\sqrt[٣]{س}\right)^{٢} - ٣\sqrt[٣]{س} + ٣$لوه| $\sqrt[٣]{س}$ +١|+ جـ

٣ص - ٣ | ص + ١

٣ص^{٢} | ٣ص - ٣

- ٣ص^{٢} – ٣ص

- ٣ص + ٣ص + ٣

٣

---

٢٣) $\int_{١}^{٨} \frac{٢}{\sqrt[٣]{س^{٤}}+٤\sqrt[٣]{س^{٢}}+٣}$.دس

الحل:

ص= $\sqrt[٣]{س} \Leftarrow$ ص^{٣} = س $\Leftarrow$ ٣ص^{٢} . دص = ١.دس

ص$_{١}$ = ١ ، ص$_{٢}$ = ٢

$\int_{١}^{٢} \frac{٢ \times ٣ص^{٢}}{ص^{٤}+٤ص^{٣}+٣ص^{٢}}$. دص

$\int_{١}^{٢} \frac{٦}{ص^{٢}+٤ص+٣}$. دص

$\frac{٦}{ص^{٢}+٤ص+٣} = \frac{أ}{ص+٣} + \frac{ب}{ص+١}$

٦ = أ (ص+١) + ب (ص+٣)

ص= -٣ $\Leftarrow$ ٦ = -٢ أ $\Leftarrow$ أ = -٣

ص = -١ $\Leftarrow$ ٦ = ٢ ب $\Leftarrow$ ب = ٣

$\int_{١}^{٢} \frac{-٣}{ص+٣} + \frac{٣}{ص+١}$. دص

= -٣ لو |ص+٣| + ٣ لو |ص+١| $]_{١}^{٢}$

= (-٣ لوه٥ + ٣ لوه٣) - (-٣ لوه٤ + ٣ لوه٢)

SALEM ALSATEB

٢٤) $\int \frac{١}{هـ^{س}+٥}$. دس

الحل :

$ص = هـ^{س} \Leftarrow \frac{دص}{دس} = هـ^{س} \Leftarrow دس = \frac{دص}{هـ^{س}}$

$= \int \frac{١}{ص+٥} . \frac{دص}{هـ^{س}} = \int \frac{١}{ص^{٢}+٥ص} . دص$

$\frac{١}{ص^{٢}+٥ص} = \frac{أ}{ص+٥} + \frac{ب}{ص}$

$\Leftarrow ١ = أ ص + ب (ص + ٥)$

$ص = -٥ \Leftarrow ١ = -٥ أ \Leftarrow أ = \frac{-١}{٥}$

$ص = ٠ \Leftarrow ١ = ٥ب \Leftarrow ب = \frac{١}{٥}$

$= \int \frac{\frac{-١}{٥}}{ص+٥} + \frac{\frac{١}{٥}}{ص} . دص$

$= \frac{-١}{٥} لو_{هـ} |ص| + \frac{١}{٥} لو_{هـ} |ص - ١| + جـ$

$= \frac{-١}{٥} لو_{هـ} |هـ^{س}| + \frac{١}{٥} لو_{هـ} |هـ^{س} - ١| + جـ$

---

٢٥) $\int \frac{١}{هـ^{س} - هـ^{-س}}$. دس

الحل :

$ص = هـ^{س} \Leftarrow \frac{دص}{دس} = هـ^{س} \Leftarrow دس = \frac{دص}{هـ^{س}}$

$= \int \frac{١}{ص - ص^{-١}} . \frac{دص}{ص} = \int \frac{١}{ص^{٢}-١} . دص$

$\frac{١}{ص^{٢}-١} = \frac{أ}{ص-١} + \frac{ب}{ص+١}$

$١ = أ (ص + ١) + ب (ص - ١)$

$ص = ١ \Leftarrow ١ = ٢ أ \Leftarrow أ = \frac{١}{٢}$

$ص = -١ \Leftarrow ١ = -٢ ب \Leftarrow ب = \frac{-١}{٢}$

$= \int \frac{\frac{١}{٢}}{ص-١} + \frac{\frac{-١}{٢}}{ص+١} . دص$

$= \frac{١}{٢} لو_{هـ} |ص - ١| - \frac{١}{٢} لو_{هـ} |ص + ١| + جـ$

---

٢٦) $\int \frac{هـ^{س}}{هـ^{٢س} - هـ^{س} - ٦}$. دس

الحل :

$ص = هـ^{س} \Leftarrow \frac{دص}{دس} = هـ^{س} \Leftarrow دس = \frac{دص}{هـ^{س}}$

$= \int \frac{هـ^{س}}{ص^{٢} - ص - ٦} . \frac{دص}{هـ^{س}}$

$= \int \frac{١}{ص^{٢} - ص - ٦} . دص$

$\frac{١}{ص^{٢} - ص - ٦} = \frac{أ}{ص-٣} + \frac{ب}{ص+٢}$

$١ = أ (ص + ٢) + ب (ص - ٣)$

$ص = ٣ \Leftarrow ١ = ٥ أ \Leftarrow أ = \frac{١}{٥}$

$ص = -٢ \Leftarrow ١ = -٥ب \Leftarrow ب = \frac{-١}{٥}$

$= \int \frac{\frac{١}{٥}}{ص-٣} + \frac{\frac{-١}{٥}}{ص+٢} . دص$

$= \frac{١}{٥} لو_{هـ} |ص - ٣| - \frac{١}{٥} لو_{هـ} |ص + ٢| + جـ$

$= \frac{١}{٥} لو_{هـ} |هـ^{س} - ٣| - \frac{١}{٥} لو_{هـ} |هـ^{س} + ٢| + جـ$

---

٢٧) $\int \frac{جتاس}{جا^{٢}س + ٤جاس - ٥}$. دس

الحل :

$ص = جاس \Leftarrow \frac{ع ص}{ع س} = جتاس \Leftarrow دس = \frac{دص}{جتاس}$

$= \int \frac{جتاس}{ص^{٢} + ٤ص - ٥} . \frac{دص}{جتاس}$

$= \int \frac{١}{ص^{٢} + ٤ص - ٥} . دص$

$\frac{١}{ص^{٢} + ٤ص - ٥} = \frac{أ}{ص-١} + \frac{ب}{ص+٥}$

$١ = أ (ص + ٥) + ب (ص - ١)$

$ص = ١ \Leftarrow ١ = ٦ أ \Leftarrow أ = \frac{١}{٦}$

$ص = -٥ \Leftarrow ١ = -٦ب \Leftarrow ب = \frac{-١}{٦}$

SALEM ALSATEB

$= \int \frac{\frac{1}{6}}{ص-1} + \frac{\frac{-1}{6}}{ص+5} \, .دص$

$= \frac{1}{6} لو_{هـ} |ص - 1| - \frac{1}{6} لو_{هـ} |ص + 5| + جـ$

$= \frac{1}{6} لو_{هـ} |جاس - 1| - \frac{1}{6} لو_{هـ} |جاس + 5| + جـ$

---

٢٨) $\int \frac{6 جتاس}{2جا^2س + جاس - 1} \, .دس$

الحل :

ص = جاس $\Leftarrow \frac{ع_ص}{ع_س}$ = جتاس $\Leftarrow$ دس = $\frac{دص}{جتاس}$

$= \int \frac{6 جتاس}{2ص^2 + ص - 1} \cdot \frac{دص}{جتاس}$

$= \int \frac{6}{2ص^2 + ص - 1} \, .دص$

$\frac{6}{2ص^2 + ص - 1} = \frac{أ}{2ص - 1} + \frac{ب}{ص + 1}$

$\Leftarrow 6 = أ (ص + 1) + ب (2ص - 1)$

ص = $\frac{1}{2} \Leftarrow 6 = \frac{3}{2}$ أ $\Leftarrow$ أ = ٤

ص = -١ $\Leftarrow$ ٦ = -٣ ب $\Leftarrow$ ب = -٢

$= \int \frac{٤}{2ص - 1} + \frac{-2}{ص + 1} \, .دص$

$= ٤ لو_{هـ} |2ص - 1| - ٢ لو_{هـ} |ص + 1| + جـ$

$= ٤ لو_{هـ} |2جاس - 1| - ٢ لو_{هـ} |جاس + 1| + جـ$

---

٢٩) $\int \frac{ق^4 س}{ظا^2 س - 5ظاس - 6} \, .دس$ .....واجب

---

٣٠) $\int \frac{جتا^3 س}{جتا^2 س + جاس + 5} \, .دس$ .....واجب

---

٣١) $\int \frac{٤ ق^2 س}{5 - ق^2 س} \, .دس$ ..... واجب

---

٣٢) $\int \frac{6 جتاس}{8 + جتا^2 س} \, .دس$

الحل :

$= \int \frac{6 جتاس}{8 + 1 - جا^2 س} \, .دس$

ص = جاس $\Leftarrow$ دس = $\frac{دص}{جتاس}$

$\Leftarrow \int \frac{6 جتاس}{9 - ص^2} \cdot \frac{دص}{جتاس}$

$= \int \frac{6}{9 - ص^2} \, .دص$

$\frac{6}{9 - ص^2} = \frac{أ}{3 - ص} + \frac{ب}{3 + ص}$

ص = ٣ $\Leftarrow$ أ = $\frac{6}{6} = 1$

ص = -٣ $\Leftarrow$ ب = $\frac{6}{6} = 1$

$= \int \frac{6}{9 - ص^2} \, .دص = \int \frac{1}{3 - ص} + \frac{1}{3 + ص} \, .دص$

$= - لو |3 - ص| + لو |3 + ص| + جـ$

$= - لو_{هـ} |3 - جاس| + لو_{هـ} |3 + جاس| + جـ$

---

٣٣) $\int \sqrt{1 + هـ^س} \, .دس$

الحل :

ص = $\sqrt{1 + هـ^س} \Leftarrow ص^2 - 1 = هـ^س$

$\frac{دص}{دس} = \frac{هـ^س}{2\sqrt{1 + هـ^س}} \Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{ص^2 - 1}{ص}$

دس = $\frac{ص}{ص^2 - 1} \, .دص$

$\Leftarrow \int ص \times \frac{ص}{ص^2 - 1} \, .دص$

$= \int \frac{ص^2}{ص^2 - 1} \, .دص$

$= \int 1 + \frac{1}{ص^2 - 1} \, .دص$

$= \int 1 + \frac{\frac{-1}{2}}{ص + 1} + \frac{\frac{1}{2}}{ص - 1} \, .دص$

$= ص - \frac{1}{2} لو |ص + 1| + \frac{1}{2} لو |ص - 1| + جـ$

$= \sqrt{1 + هـ^س} - \frac{1}{2} لو_{هـ} |\sqrt{1 + هـ^س} + 1| + \frac{1}{2} لو_{هـ} |\sqrt{1 + هـ^س} - 1| + جـ$

$\begin{array}{r|l} ص^2 & ص^2 - 1 \\ \hline -ص^2 + 1 & 1 \\ \hline 1 & \end{array}$

SALEEM ALSATEB

٣٤) $\int \frac{\text{لو}_{هـ} س}{(س-١)^{٢}}$. دس

الحل :

$\int (س-١)^{-٢} \times \text{لو}_{هـ} س$. دس

ق = $\text{لو}_{هـ} س$ ⟸ دق = $\frac{١}{س}$. دس

$\int$ دهـ = $\int (س-١)^{-٢}$ ⟸ هـ = $\frac{-١}{س-١}$

⟸ $\int (س-١)^{-٢} \times \text{لو}_{هـ} س$. دس

= $\frac{-١}{س-١} \times \text{لو}_{هـ} س + \int \frac{١}{س(س-١)}$. دس

$\frac{١}{س(س-١)} = \frac{أ}{س} + \frac{ب}{س-١}$

س = صفر ⟸ أ = $\frac{١}{-١-٠}$ = - ١

س = ١ ⟸ ب = $\frac{١}{١}$ = ١

⟸ = $\frac{-\text{لو}_{هـ} س}{س} + \int \frac{-١}{س} + \frac{١}{س-١}$. دس

= $\frac{-\text{لو}_{هـ} س}{س}$ - لو$_{هـ}$ | س | + لو$_{هـ}$ | س – ١ | + جـ

---

٣٥) $\int$ لو$_{هـ}$ (س^{٢} + س – ٢) . دس

الحل :

ق = لو$_{هـ}$ (س^{٢} + س – ٢) ⟸ دق = $\int \frac{٢س+١}{س^{٢}+س-٢}$

دهـ = $\int$ ١ . دس ⟸ هـ = س

= س لو$_{هـ}$ (س^{٢} + س – ٢) - $\int \frac{٢س^{٢}+س}{س^{٢}+س-٢}$. دس

٢

٢س^{٢} + س | س^{٢} + س -٢

-٢س^{٢} -٢س+٤

- س +٤

= س لو$_{هـ}$ (س^{٢} + س –٢) - $\int ٢ + \frac{٤-س}{س^{٢}+س-٢}$. دس

$\frac{٤-س}{س^{٢}+س-٢} = \frac{أ}{س+٢} + \frac{ب}{س-١}$

س = ١ ⟸ أ = $\frac{٤-١}{٢+١}$ = ١

س = -٢ ⟸ ب = $\frac{٤+٢}{-٢-١}$ = -٢

= س لو$_{هـ}$ (س^{٢} + س – ٣) - $\int ٢ + \frac{١}{س+٢} + \frac{-٢}{س-١}$. دس

= س لو$_{هـ}$ (س^{٢} + س- ٣) - (٢س+لو$_{هـ}$ |س + ٢| + ٢لو$_{هـ}$ |س - ١|)+ جـ

---

٣٦) $\int \frac{دس}{س(\text{لو}_{هـ} س)^{٢}-٤س}$

الحل :

= $\int \frac{دس}{س((\text{لو}_{هـ} س)^{٢}-٤)}$

ص = لو$_{هـ}$ س ⟸ دس = س دص

⟸ $\int \frac{١}{س(ص^{٢}-٤)} \times$ س . دص

= $\int \frac{١}{ص^{٢}-٤}$. دص

$\frac{١}{ص^{٢}-٤} = \frac{أ}{ص-٢} + \frac{ب}{ص+٢}$

س = ٢ ⟸ أ = $\frac{١}{٢+٢} = \frac{١}{٤}$

س = -٢ ⟸ ب = $\frac{١}{-٢-٢} = \frac{-١}{٤}$

= $\int \frac{\frac{١}{٤}}{ص-٢} + \frac{\frac{-١}{٤}}{ص+٢}$. دص

= $\frac{١}{٤}$ لو$_{هـ}$ | ص – ٢ | - $\frac{١}{٤}$ لو$_{هـ}$ |ص + ٢ | + جـ

= $\frac{١}{٤}$ لو$_{هـ}$ | لو$_{هـ}$ س – ٢ | - $\frac{١}{٤}$ لو$_{هـ}$ | لو$_{هـ}$ س + ٢ | + جـ

SALEEM ALSATEB

المعادلات التفاضلية :

هي المعادلة التي تحتوي على مشتقات ونتعرف عليها إذا

أعطانا د س ، د ص،صَ ، $\frac{د ص}{د س}$ ، قَ ، $\frac{د ع}{د ن}$ .....

* كلمه حل المعادلة تعني التخلص من المشتقات

خطوات الحل :

١) تجعل الحروف المتشابه معا (إلي زي بعض مع بعض) .

٢) ندخل التكامل غير المحدود على طرفين المعادلة ونحل التكامل .

٣) نضع"جـ" واحده في طرف الايسر .

٤) إذا أعطانا معطيات نتخلص من "جـ" خاوا .

أسئلة :حل المعادلات التفاضلية التالية :

١) $\frac{د ص}{د س} = \frac{٢ س+١}{٣ ص^{٢}}$

الحل :

٣ ص^{٢}.د ص = (٢س+١).د س

∫٣ص^{٢}.د ص=∫ ٢س+١.دس

∴ ص^{٣} = س^{٢} + س + جـ

---

٢) $\frac{د ص}{د س} = \frac{٣س^{٢}+٤ س}{٢ ص+٧}$

الحل: (٢ص+٧).د ص=(٣س^{٢}+٤س).دس

∫ ٢ص+٧.دص= ∫ ٣س^{٢}+٤س.دس

∴ص^{٢}+٧ص = س^{٣}+٢س^{٢}+ جـ

---

٣) $\frac{د ص}{د س} = \left[\frac{س}{ص}\right]$

الحل : $\frac{د ص}{د س} = \frac{[س]}{[ص]}$ ⇐ [ص] . د ص = [س] . دس

⇐ ∫ ص$^{\frac{١}{٢}}$. دص =∫ س$^{\frac{١}{٢}}$. دس

$\frac{٢}{٣}$ص$^{\frac{٣}{٢}}$ ⇐ = $\frac{٢}{٣}$س$^{\frac{٣}{٢}}$ +جـ

---

٤) $\frac{د ص}{س-١} = (٣س + ١) . د س$

الحل :

د ص = (س-١)(٣س+١).دس

∫.د ص=∫(س-١)(٣س+١).دس

∫.د ص=∫٣س^{٢} -٢س -١.دس

∴.ص = س^{٣}-س^{٢} -س+ جـ

---

٥) س^{٣}.دص-ص^{٢}.دس = صفر

الحل :

س^{٣}.دص=ص^{٢}.دس

$\frac{د ص}{ص^{٢}} \Leftarrow = \frac{د س}{س^{٢}}$

⇐ ∫ ص$^{-٢}$.دص = ∫س$^{-٣}$.دس

⇐ - ص$^{-١}$= - س$^{-٢}$ + جـ⇐ $\frac{-١}{ص} = \frac{-١}{س^{٢}}$ + جـ

---

٦) $\frac{د ص}{د س} = \frac{قتا^{٢}س}{٣ص^{٢}-١}$

الحل :

(٣ص^{٢}-١).د ص = قتا^{٢}س .د س

∫٣ص^{٣}-١.د ص = ∫قتا^{٢}س .د س

∴.ص^{٣}- ص= - ظتا س + جـ

---

٧) $\frac{د ص}{د س} = \frac{٢ س+١}{جتا ص}$

الحل :

جتا ص .د ص = (٢س+١).دس

∫جتا ص .د ص=∫٢س+١.دس

∴.جا ص= س^{٢}+ س + جـ

---

٨) جا^{٢}س .دص+ ص^{٢}.د س = د ص

الحل :

جا^{٢}س.د ص- ص= ص^{٢}.د س

(جا^{٢}س-١) . د ص= - ص^{٢}.د س

$\frac{د ص}{-ص^{٢}} = \frac{دس}{جا^{٢}س-١}$ ⇐∫ $= \frac{دس}{جا^{٢}س-١}$ ∫

SALEM ALSATEB

$\Leftarrow \int -ص^{-٢}.د ص = \int \frac{د س}{-جتا^{٢} س}$

$\Leftarrow \int ص^{-٢}.د ص = \int -قا^{٢} س.د س$

$\therefore -ص^{-١} = طا س + جـ \Leftarrow \frac{-١}{ص} = طا س + جـ$

---

٩) $د س + ٣.د ص = جتا س . د س$

الحل :

$٣ . د ص = جتا س . د س - د س$

$٣.د ص = (جتا س - ١) . د س$

$٣.د ص = \int جتا س - ١ . د س$

$\therefore ٣ص = جا س - س + جـ$

---

١٠) $قا^{٢}(\frac{س}{٤}) . د ص - ٤ جا^{٢}(\frac{س}{٤}) . د س = صفر$

الحل :

$قا^{٢}\frac{س}{٤}.دص = ٤ جا^{٢}\frac{س}{٤}.دس$

$د ص = \frac{٤ جا^{٢}(\frac{س}{٤})}{قا^{٢}(\frac{س}{٤})} . دس$

$\int د ص = \int ٤ جا^{٢}\frac{س}{٤} جتا^{٢}\frac{س}{٤} . د س$

$ص = \int (٢ جا (\frac{س}{٤}) جتا (\frac{س}{٤}))^{٢} .دس$

$ص = \int جا^{٢}(\frac{س}{٢}) . د س$

$ص = \frac{١}{٢}\int (١ - جتا س) . د س$

$\therefore ص = \frac{١}{٢}(س - جا س) + جـ$

---

١١) $س^{٢}.دس - ص^{٢}.د ص = جا ص . د ص + ٨ . د س$

الحل:

$جا ص .د ص + ص^{٢}.د ص = -س^{٢}.د س + ٨ .د س$

$(جا ص + ص^{٢}).د ص = (-س^{٢} + ٨) . د س$

$\int جا ص + ص^{٢}.د ص = \int -س^{٢} + ٨ .د س$

$\therefore -جتا ص + \frac{ص^{٣}}{٣} = -\frac{س^{٣}}{٣} + ٨ س + جـ$

---

١٢) $طا^{٢}س - جتا ص . \frac{د ص}{د س} = ٠$

الحل :

$طا^{٢}س = جتا ص . \frac{د ص}{د س}$

$طا^{٢}س . دس = جتا ص . د ص$

$\int طا^{٢}س.د س = \int جتا ص . د ص$

$\int قا^{٢}س - ١ . د س = \int جتا ص . د ص$

$\therefore طا س - س = جا ص + جـ$

---

١٣) $هـ^{-ص} جاس - \frac{د ص}{د س} جتا^{٢}س = ٠$

الحل :

$هـ^{-ص} جاس = \frac{د ص}{د س} جتا^{٢}س$

$هـ^{-ص} جاس.دس = جتا^{٢}س.دص$

$\frac{جاس}{جتا^{٢}س}.دس = \frac{دص}{هـ^{-ص}}$

$\int قاس طاس .دس = \int هـ^{-ص} .دص$

$قاس = -هـ^{-ص} + جـ$

---

١٤) $دص - س ص .دس = س.دس$

الحل :

$دص = س ص .دس + س.دس$

$دص = س(ص+١).دس \Leftarrow \int \frac{د ص}{ص+١} = \int س.دس$

$\ln|ص+١| = \frac{س^{٢}}{٢} + جـ$

---

١٥) $\frac{د ص}{د س} = ١ - ص + س^{٢} - ص س^{٢}$

الحل :

$\frac{د ص}{د س} = ١ - ص + س^{٢}(١ - ص) = (١ - ص)(١ + س^{٢})$

$\int \frac{دص}{ص+١} = \int (س^{٢}+١).دس$

$\ln|ص+١| = \frac{س^{٣}}{٣} + س + جـ$

SALEM ALSATEB

١٦) $\frac{د س}{د ص}$ =١- ص+س^{٢}- ص س^{٢} + ٢س- ٢س ص

الحل :

$\frac{د س}{د ص}$ = ١- ص + س^{٢} (١- ص)+٢س(١- ص)

$\frac{د س}{د ص}$= (١-ص)(س^{٢}+٢س + ١)

$\int \frac{د س}{س^{٢} + ٢س + ١}$ = $\int$ (١- ص) .د ص

$\int \frac{دس}{(س+١)^{٢}}$ =$\int$ (١- ص) . د ص

$\int$ (س+١)$^{-٢}$.دس=$\int$ (١-ص).د ص

∴- (س+١)$^{-١}$=ص- $\frac{ص^{٢}}{٢}$+جـ

التفسير الهندسي للتكامل

ملاحظات مهمة :

١) الميل = قَ(س) = $\frac{د ص}{د س}$

٢) النقطة (أ،ب) نقطة حرجة تعني أ) ق(أ)=ب

ب) قَ(أ)=صفر

٣)ق يتقاطع مع هـ عندما س= أ تعني ق(أ)=هـ(أ)

٤) إذا كان ق يمس هـ عند النقطة (أ،ب) تعني

أ) المعادلات تتساوى⇐ ق(أ)=هـ(أ) = ب

ب) المشتقات تتساوي ⇐قَ(أ)=هَ(أ)

أسئلة:

١) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق عند النقطة (س،ص) هو (٣س^{٢}– ٢س) ، فجد قاعدة الاقتران ق(س) علما بأن المنحنى يمر بالنقطة (٠، ٣)

الحل :

قَ(س)= ٣س^{٢} – ٢ س

⇐ $\int$قَ(س).د س = $\int$(٣س^{٢} – ٢ س) . د س

ق(س)=س^{٣} – س^{٢} + جـ

(٠ ، ٣) تحقق ⇐ ٣ = ٠ ^{٣} - ٠ ^{٢} + جـ ⇐جـ = ٣

∴ق(س) = س^{٣} – س^{٢} + ٣

٢) جد قاعدة الاقتران الكثير حدود من الدرجة الخامسة الذي قَ (س) = ٥ س^{٤} + ٢س والذي يمر بالنقط (١ ، ٤).

الحل :

$\int$قَ(س).دس =$\int$ ٥ س^{٤} + ٢س . دس

ق(س) = س^{٥} + س^{٢} + جـ

(١ ، ٤) تحقق ⇐ ٤= ١ ^{٥} + ١ ^{٢} + جـ ⇐ جـ = ٢

∴ق(س) = س^{٥}+ س^{٢} + ٢

٣) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق عند النقطة (س،ص) هو (٢س – $\frac{١}{\sqrt[٣]{س^{٢}}}$) ، فجد قاعدة الاقتران ق(س) علما بأن المنحنى يمر بالنقطة (-١، ٢).

الحل :

قَ(س)= ٢س - $\frac{١}{\sqrt[٣]{س^{٢}}}$

$\int$قَ(س).دس=$\int$ ٢س - س $^{\frac{-٢}{٣}}$.دس

ق(س) = س^{٢} - **٣س**$^{\frac{١}{٣}}$ + جـ

النقطة (-١ ،٢) تحقق ⇐ ٢= ١ +٣ + جـ ⇐جـ= **-٢**

∴ ق(س) = س^{٢} - **٣س**$^{\frac{١}{٣}}$ **-٢**

٤) إذا كان قَ (س) + جتا س = ٢س جد ق (س) علما بأن المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ٤).

الحل :

قَ (س) = ٢ س – جتا س

$\int$قَ (س) . د س = $\int$٢س – جتا س .د س

ق (س) = س^{٢} – جا س + جـ

النقطة (٠، ٤) تحقق ⇐ق(٠) = ٠ ^{٢} – جا . + جـ

∴⇐ جـ = ٤

∴ق (س) = س^{٢} – جا س + ٤

SALEEM ALSATEB

٥) إذا كان قَ (س) = ٤س^{٣} – ٣س^{٢} + ١

فجد ق(٣) – ق(١)

الحل :

$\int_{١}^{٣}$ قَ (س) . د س = $\int_{١}^{٣}$ ٤س^{٣} – ٣س^{٢} + ١.دس

ق(٣) – ق(١) = س^{٤} – س^{٣} + س]$_{١}^{٣}$

= (٨١ – ٢٧ – ٣) – (١ – ١ + ١) = ٥٦

---

٦) إذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة عند النقطة (س . ص) يساوي $\frac{\text{جاس–قا}^{٢}\text{س}}{\text{٣ص}^{٢}}$ فجد قاعدة العلاقة علما بأن النقطة ($\frac{\pi}{٤}$ ، ٤) تقع على منحناها

الحل :

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{جاس–قا}^{٢}\text{س}}{\text{٣ص}^{٢}}$

⟸ ∫٣ص^{٢} . دص =∫ حا س – قا^{٢} س . د س

∫٣ص^{٢} . دص = ∫حا س – قا^{٢}س . د س

ص^{٣} = - جتا س – طا س + جـ

نجد جـ و النقطة ($\frac{\pi}{٤}$ ، ٤)

(٤)^{٣} = -جتا$\frac{\pi}{٤}$ - طا$\frac{\pi}{٤}$ +جـ⟸ جـ = ٥٦ + $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

∴ص^{٣} = - جتا س – طا س + ٥٦ + $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

---

٧) إذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة عند النقطة (س . ص) يساوي(س هـ^{ص}) فجد قاعدة العلاقة علما بأن المنحنى يمر بالنقطة(٢، ٠) .

الحل :

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = س هـ^{ص}⟸ ∫ $\frac{\text{دص}}{\text{هـ}^{ص}}$ =∫ س .دس

∫هـ$^{-ص}$. دص =∫ س .دس

- هـ$^{-ص}$ = $\frac{\text{س}^{٢}}{٢}$ + جـ

نجد جـ

ق(٢)= ٠ ⟸ - هـ^{٠} = ٢ + جـ

-١ =٢+جـ⟸ جـ = -٣

∴ - هـ$^{-ص}$ = $\frac{\text{س}^{٢}}{٢}$ - ٣

---

٨) إذا كان ميل المماس لمنحنى ق هو (٢ س – ٢) جد ق (٢) علما بأن صورة النقطة الحرجة هي (٢)

الحل :

قَ(س) = ٢ س – ٢

∫قَ(س).دس = ∫٢ س – ٢.دس

ق(س) = س^{٢} – ٢س + جـ

نجد جـ

نجد قيمة س الحرجة

قَ(س) = ٢س- ٢ = ٠ ⟸ س = ١

صورة النقطة الحرجة ق(١)=٢ = ١-٢+جـ⟸ جـ =٣

∴ ق(س) = س^{٢} – ٢س + ٣

∴ ق(٢) = ٤ – ٤ + ٣ = ٣

---

٩)إذا كان قً (س) = ٦س حيث (١ ، ٣) هي نقطة حرجة جد ق (س).

الحل : ∫قً (س) . د س = ∫٦ س . د س

قَ (س) = ٣س^{٢} + جـ

نجد جـ⟸قَ (١) = ٠ = ٣ + جـ ⟸ جـ = -٣

∫قَ (س) . د س = ∫٣س^{٢} -٣ . د س

ق (س) = س^{٣} – ٣ س + جـ

ق(١) = ٣ = ١ – ٣ + جـ ⟸ جـ = ٥

∴ق(س) = س^{٣} – ٣س + ٥

SALEM ALSATEB

١٠) إذا كان قً(س)=جاس +هَ^{٢س} ، وكان ق(٠)=$\frac{١}{٤}$

قَ(٠)=$\frac{١}{٢}$ ، فجد قاعدة الاقتران ق(س) .

الحل:

∫قً(س).دس=∫جاس +هَ^{٢س} .دس

قَ(س) = -جتاس + $\frac{هَ^{٢س}}{٢}$ + جـ

نجد جـ ⟸ قَ(٠) = -١ + $\frac{١}{٢}$ +جـ = $\frac{١}{٢}$ ⟸ جـ = ١

∫قَ(س).دس = ∫-جتاس + $\frac{هَ^{٢س}}{٢}$ + ١ .دس

ق(س) = -حاس + $\frac{هَ^{٢س}}{٤}$ + س + جـ

نجد جـ ⟸ ق(٠) = ٠ + $\frac{١}{٤}$ + ٠ +جـ = $\frac{١}{٤}$ ⟸ جـ = صفر

ق(س) = - حاس + $\frac{هَ^{٢س}}{٢}$ + س

---

١١) ق(س) = س^{٢} + ٥ ، هَ(س) = -٢ س جد

هـ (٢) علما بأن ق(س) يمس هـ (س)

الحل :

∫هَ (س) . د س = ∫- ٢ س . د س

هـ (س) = - س^{٢} + جـ

نجد جـ ⟸ق(س) يمس هـ (س)

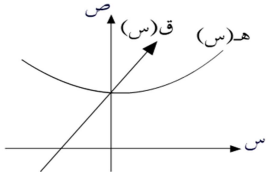
قَ(س) = هَ(س) ⟸ ٢س = -٢س ⟸ س=٠

ق(٠) = هـ (٠) ⟸ ٠ ^{٢} + ٥ = ٠ ^{٢} + جـ ⟸ جـ =٥

∴هـ (س) = - س^{٢} + ٥ ⟸ هـ (٢) = -٤ + ٥ ⟸ هـ (٢) = ١

---

١٢)الشكل أدناه يمثل بياني الاقترانين ق ، هـ . إذا علمت أن ق(س) = ٣س +٤ ،هـ(س) =٢س –٣ ، فما قيمة هـ (٥) ؟



الحل:

∫هَ(س).دس= ∫ ٢س -٣ .دس

هـ(س) = س^{٢} – ٣س +جـ

نجد جـ ⟸ ق يتقاطع مع هـ عندما س =٠

ق(٠) = هـ(٠) ⟸ ٠ = ٤+٠ -٠ +جـ ⟸ جـ = ٤

هـ(س) = س^{٢} – ٣س + ٤

هـ(٥) = ٢٥ -١٥ + ٤ = ١٤

---

١٣)إذا كان ق (س) = ٢س – ٥ هـ(س) = ٩س – ٢

بحيث أن ق(٢) = هـ(٢) ، أوجد ق(١)

الحل :

∫ ق (س) . دس = ∫ ٢س – ٥ . دس

ق(س) = س^{٢} – ٥س + جـ

نجد جـ :

ق(٢) = هـ(٢)

٤ – ١٠ + جـ = ١٨ – ٢

⟸ جـ = ٢٢

∴ ق(س) = س^{٢} – ٥س + ٢٢

ق(١) = ١ – ٥ + ٢٢ = ١٨

---

١٤) إذا كان ∫ قَ(س)+س^{٢}.دس= ٢س^{٣} + جـ س^{٢} +٢ وكان قَ(١)= ٤ ، ق(٢) = ٦ فجد ق(-١) ، قَ(٢) .

الحل :

$\frac{د}{دس}$(∫ قَ(س)+س^{٢}.دس)=$\frac{د}{دس}$(٢س^{٣} + جـ س^{٢} +٢)

⟸ قَ(س)+س^{٢} = ٦س^{٢} + ٢جـ س

⟸ قَ(١) + ١ = ٦+٢جـ ⟸ ٤+١=٦ + ٢جـ

⟸ جـ = - $\frac{١}{٢}$

قً(س)= ٥س^{٢} – س ⟸ قً(٢) = ٢٠ – ٢ = ١٨

⟸ ∫ قَ(س).دس=∫ ٥س^{٢}- س . دس

ق(س) = $\frac{٥ س^{٣}}{٣}$ _ $\frac{س^{٢}}{٢}$ +جـ

نجد جـ ⟸ ق(٢) = ٦ ⟸ ٦ = $\frac{٤٠}{٣}$ -٢ +جـ ⟸ جـ = $\frac{-١٦}{٣}$

ق(س) = $\frac{٥ س^{٣}}{٣}$ _ $\frac{س^{٢}}{٢}$ _ $\frac{١٦}{٣}$

ق(-١) = $\frac{-٥}{٣}$ _ $\frac{١}{٢}$ _ $\frac{١٦}{٣}$ = -١٥

SALEEM ALSATEB

التفسير الفيزيائي للتكامل :

ملاحظات :

ت ← نكامل ع ← نكامل ف

تذكر ان :

١) ت = $\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$ ، ع = $\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}}$

٢) تحرك الجسم من السكون ع(٠) = ٠

٣) السرعة الابتدائية تعني السرعة عند ن = ٠

٤) أقصى أرتفاع تعني ع (ن) = ٠

٥) إذا لم يذكر لنا زمن نفرضة صفر

* يحرم شرعا بقاء " جـ " ثابت للتكامل

* كلمه معدل التغير تعني $\frac{\text{د الحرف}}{\text{د ن}}$

أسئلة :

١) إذا كان جسم يتسارع وفق العلاقة ت = ٦ن + ٤ فجد المسافة المقطوع بعد مرور ٣ ثواني من بدأالحركة علما بان السرعة الابتدائية للجسم (٢م / ث) وأنه قطع مسافة (٢١م)في أول ثانيتين .

الحل :

ت = $\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$ = ٦ن + ٤ ⟸ دع = ٦ن + ٤ . دن

⌡.دع = ⌡ ٦ن + ٤ . دن

ع = ٣ن^{٢} +٤ن + جـ نجد جـ⟸ن=٠ ، ع = ٢

⟸٣× ٠ ^{٢} + ٤ × ٠ +جـ =٢⟸جـ = ٢

ع = ٣ن^{٢} +٤ن + ٢ ⟸ $\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}}$ = ٣ن^{٢} +٤ن + ٢

د ف = ٣ن^{٢} +٤ن + ١٢ . دن

⟸ ⌡.د ف = ⌡٣ن^{٢} +٤ن + ١٢ . دن

⟸ف(ن) = ن^{٣} +٢ن^{٢} + ٢ن + جـ

نجد جـ ⟸ن = ٢ ، ف = ٢١

⟸ (٢)^{٣} ٢+ (٢)^{٢}+٤+جـ=٢١ ⟸جـ = ١

ف(ن) = ن^{٣} +٢ن^{٢} + ٢ن + ١

ف(٣) = ٢٧ + ١٩ + ٦ + ١ = ٥٣

٢) إذا كان تسارع جسم ت بعد ن من الثواني يعطى بالقاعدة ت = π ^{٢} جتا π ن ، فجد المسافة التي يقطعها الجسم بعد ثانية واحدة من بدء الحركة علماً بأن سرعته الإبتدائية ٨م/ث وأنه قطع مسافة($\frac{١٩}{٦}$) في أول ($\frac{١}{٣}$) ثانية من بدء الحركة .

الحل :

$\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$ = π ^{٢} جتا π ن⟸ دع = π ^{٢} جتا π ن . دن

⟸ ⌡ . دع =⌡ π ^{٢} جتا π ن . دن

ع = π جا π ن +جـ

نجد جـ ⟸ ن=٠ ، ع= ٨⟸ ٨ = ٠+جـ ⟸ جـ = ٨

$\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}}$ = π جا π ن+٨⟸ ⌡.دف = ⌡ π جا π ن +٨.دن

ف = -جتا π ن + ٨ن +جـ

نجد جـ ⟸ن= $\frac{١}{٣}$ ، ف= $\frac{١٩}{٦}$

⟸ $\frac{١٩}{٦}$ = - $\frac{١}{٢}$ + $\frac{٨}{٣}$ + جـ ⟸ جـ = ١

ف(ن) = - جتا π ن + ٨ن +١

∴ ف(١) = -جتا π + ٨ +١=١٠ م

٣) تحرك جسم بتسارع مقدارة -١٢ م / ث^{٢}

جد معادلة الحركة ، علما بأن يقطع مسافة ٨ م بسرعة ٦ م/ث.

الحل :

ت = -١٢ ⟸ $\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$ = - ١٢ ⟸د ع = -١٢ . د ن

⟸ ⌡.د ع = ⌡-١٢ . د ن ⟸ع = -١٢ ن + جـ

نجد جـ ⟸ ن=٠، ع=٦ ⟸ -١٢×٠+جـ = ٦ ⟸جـ= ٦

⟸ع = -١٢ ن + ٦ ⟸ $\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}}$ = - ١٢ن + ٦

⟸ ⌡.د ف = ⌡- ١٢ن + ٦.دن⟸ف = -٦ ن^{٢} + ٦ن +جـ

نجد جـ ⟸ ن=٠ ، ف=٨

⟸-٦× ٠ ^{٢} +٦×٠+جـ =٨⟸جـ = ٨

ف = -٦ن^{٢} + ٦ن + ٨

SALEM ALSATEB

٤) قذف جسم رأسيا إلى أعلى بسرعة ابتدائية مقدارها ٤٠ م / ث وتسارع ثابت مقداره – ١٠ م / ث^{٢} إذا كان ارتفاعه عند السطح بعد مرور ثانية من حركة يساوي ٨٠م جد أقصى ارتفاع يصل له الجسم .

الحل :

ت = ١٠ $\Leftarrow \frac{د ع}{د ن}$ = - ١٠ $\Leftarrow$ ع = $\int$ - ١٠ . د ن

$\Leftarrow$ ع = - ١٠ن + جـ

نجد جـ $\Leftarrow$ ن = ٠ ، ع = ٤٠

$\Leftarrow$ ٤٠ = - ١٠ × ٠ + جـ $\Leftarrow$ جـ = ٤٠

$\Leftarrow$ ع = - ١٠ ن + ٤٠ $\Leftarrow \frac{د ف}{د ن}$ = - ١٠ن + ٤٠

$\int$ د ف = $\int$ - ١٠ + ٤٠ . دن $\Leftarrow$ ف = - ٥ ن^{٢} + ٤٠ ن + جـ

نجد جـ $\Leftarrow$ ن = ١ ، ف = ٨٠

$\Leftarrow$ ٨٠ = - ٥ × ١^{٢} + ٤٠ × ١ + جـ $\Leftarrow$ جـ = ٤٥

∴ ف = - ٥ ن^{٢} + ٤٠ ن + ٤٥

أقصى ارتفاع $\Leftarrow$ ع = ٠ = - ١٠ ن + ٤٠ $\Leftarrow$ ن = ٤

ف(٤) = - ٥ (٤)^{٢} + ٤٠ × ٤ + ٤٥ = ١٢٥

---

٥) قذف كرة من قمة برج ارتفاعه (٤٥) متراً عن سطح الارض بسرعة ابتدائية مقدارها (٤٠) م/ث وبتسارع مقداره (-١٠)م/ث^{٢} . جد الزمن الذي استغرقته الكرة لتعود الى سطح الارض .

الحل :

ت = ١٠ $\Leftarrow \frac{د ع}{د ن}$ = - ١٠ $\Leftarrow$ ع = $\int$ - ١٠ . د ن

$\Leftarrow$ ع = - ١٠ن + جـ

نجد جـ $\Leftarrow$ ن = ٠ ، ع = ٤٠

$\Leftarrow$ ٤٠ = - ١٠ × ٠ + جـ $\Leftarrow$ جـ = ٤٠

$\Leftarrow$ ع = - ١٠ن + ٤٠ $\Leftarrow \frac{د ف}{د ن}$ = - ١٠ن + ٤٠

$\int$ د ف = $\int$ - ١٠ن + ٤٠ . دن

$\Leftarrow$ ف = - ٥ ن^{٢} + ٤٠ ن + جـ

نجد جـ $\Leftarrow$ ن = ٠ ، ف = ٤٥

$\Leftarrow$ ٨٠ = - ٥ × (٠)^{٢} + ٤٠ × ٠ + جـ $\Leftarrow$ جـ = ٤٥

∴ ف = - ٥ ن^{٢} + ٤٠ ن + ٤٥

* تصل الكرة الى سطح الارض عندما ف = صفر

$\Leftarrow$ - ٥ ن^{٢} + ٤٠ ن + ٤٥ = ٠

$\Leftarrow$ ن^{٢} - ٨ن - ٩ = ٠ $\Leftarrow$ (ن - ٩)(ن + ١) = ٠

ن = ٩ ، ن = - ١ تهمل

---

٦) يسير جسم على خط مستقيم حسب العلاقة ت = $\frac{١}{ع^{٢}}$ ، ع > ٠ . إذا تحرك الجسم من السكون قطع مسافة $\frac{١٩}{٣}$ بعد مرور ٤ ثواني فجد المسافة المقطوعة بعد مرور ثانية واحدة

الحل:

$\frac{د ع}{د ن} = \frac{١}{ع^{٢}} \Leftarrow \int ٢ع . د ع = \int ١ . د ن$

ع^{٢} = ن + جـ

نجد جـ $\Leftarrow$ ن = ٠ ، ع = ٠ $\Leftarrow$ ٠^{٢} = ٠ + جـ $\Leftarrow$ جـ = ٠

ع^{٢} = ن $\Leftarrow$ ع = $\sqrt{ن}$

$\frac{د ف}{د ن} = \sqrt{ن} \Leftarrow \int$ د ف = $\int \sqrt{ن}$. د ن

ف = $\int$ ن$^{\frac{١}{٢}}$. د ن $\Leftarrow$ ف = $\frac{٢}{٣}$ ن$^{\frac{٣}{٢}}$ + جـ

نجد جـ $\Leftarrow$ ن = ٤ ، ف = $\frac{١٩}{٤}$ $\Leftarrow \frac{١٩}{٣} = \frac{٢}{٣}(٤)^{\frac{٣}{٢}} + جـ$

$\Leftarrow \frac{١٩}{٣} = \frac{١٦}{٣} + جـ \Leftarrow$ جـ = ١

ف = $\frac{٢}{٣}$ ن$^{\frac{٣}{٢}}$ + ١

∴ ف(١) = $\frac{٢}{٣}(١)^{\frac{٣}{٢}} + ١ = \frac{٢}{٣} + ١ = \frac{٥}{٣}$

---

٧) يتحرك جسم على خط مستقيم وفق العلاقة ت = $\sqrt{ع}$ ، ع > صفر ، ت: تسارع الجسم ، ع: سرعة الجسم فإذا علمت ان السرعة الابتدائية للجسم ٩ م/ث ، وقطع مسافة ٨٠ متراً في ٤ ثواني ، فجد المسافة التي قطعها بعد ثانيتين من بدأ حركته.

SALEM ALSATEB

الحل:

$\frac{د ع}{د ن} = \sqrt{ع} \Leftarrow د ع = \sqrt{ع} \, .د ن \Leftarrow \int \frac{د ع}{\sqrt{ع}} = \int .د ن$

$\int ع^{-\frac{١}{٢}} .د ع = ن + جـ \Leftarrow ٢ ع^{\frac{١}{٢}} = ن + جـ$

نجد جـ $\Leftarrow$ ن=٠ ، ع=٩ $\Leftarrow$ ٢×٣=٠+جـ $\Leftarrow$ جـ = ٦

$٢ ع^{\frac{١}{٢}} = ن + ٦ \Leftarrow ع = \left(\frac{ن}{٢}+٣\right)^{٢}$

$\Leftarrow \frac{د ف}{د ن} = \left(\frac{ن}{٢}+٣\right)^{٢}$

$\int .دف = \left(\frac{ن}{٢}+٣\right)^{٢} \int .دن \Leftarrow ف = \frac{٢}{٣}\left(\frac{ن}{٢}+٣\right)^{٣} + جـ$

نجد جـ $\Leftarrow$ ن=٤ ، ف=٨٠ $\Leftarrow$ ٨٠=$\frac{٢٥٠}{٣}$ +جـ $\Leftarrow$ جـ =- $\frac{١٠}{٣}$

$ف = \frac{٢}{٣}\left(\frac{ن}{٢}+٣\right)^{٣} - \frac{١٠}{٣}$

$\therefore ف(٢) = \frac{١٢٨}{٣} - \frac{١٠}{٣} = \frac{١١٨}{٣}$

---

٨) إذا كان معدل استخراج التراب من حفرة هو

(٤ن+ ٢ م^{٣} /ساعة)جد حجم التراب المستخرج بعد مرور ثلاث ساعات .

الحل :

$\frac{د ح}{د ن} = ٤ن + ٢ \Leftarrow \int .د ح = \int ٤ن + ٢ \, .د ن$

$\Leftarrow ح = ٢ن^{٢} + ٢ن + جـ$

فجد جـ $\Leftarrow$ ن = ٠ ، ح = ٠

$\Leftarrow ٠ = ٢ \div ٠^{٢} + ٢ \times ٠ + جـ \Leftarrow جـ = ٠$

$ح = ٢ن^{٢} + ٢ن$

$ح|_{ن=٣} = ٢ \times ٣^{٢} + ٢ \times ٣ = ٢٤ م^{٣}$

---

٩) تتكاثر بكتيريا حسب المعادلة $\frac{د ت}{د ن} = ٥ن^{٤} + ٢٠ ن$

حيث ت: عدد البكتيريا ، ن: الزمن بالثواني ، إذا كان عددها بعد ثانية واحدة يساوي (٣٠)

فجد عددها بعد مرور ثلاث ثواني.

الحل :

$د ت = ٥ ن^{٤} + ٢٠ن \, . د ن \Leftarrow ت = ن^{٥} + ١٠ن^{٢} + جـ$

نجد جـ $\Leftarrow$ ن = ١ ، ت = ٣٠

$٣٠ = ١^{٥} + ١٠ \times ١^{٢} + جـ \Leftarrow جـ = ١٩$

$ت = ن^{٥} + ١٠ن^{٢} + ١٩$

$ت|_{ن=٣} = ٣^{٥} + ١٠ (٣)^{٢} + ١٩ = ٣٥٢$

---

١٠) خزان ماء فارغ سعته $\frac{٢١}{٢}$ م^{٣} ، يصب فيه الماء بمعدل (ن + ٢)م^{٣} /د ، أوجد الزمن اللازم لامتلاء الخزان

الحل :

$\frac{د ح}{د ن} = ن + ٢ \Leftarrow \int .د ح = \int ن + ٢ \, .د ن$

$\Leftarrow ح = \frac{ن^{٢}}{٢} + ٢ن + جـ$

نجد جـ $\Leftarrow$ ن = ٠ ، ح = ٠

$\Leftarrow ٠ = \frac{٠^{٢}}{٢} + ٢ \times ٠ + جـ \Leftarrow جـ = ٠$

$\Leftarrow ح = \frac{ن^{٢}}{٢} + ٢ن = \frac{٢١}{٢} \Leftarrow ن^{٢} + ٤ن - ٢١ = صفر$

$(ن+٧)(ن-٣) = صفر \Leftarrow ن=٣ ، ن= -٧ تهمل$

---

١١) وضع ١٠٠ سمكة في بركة ماء حيث كان معدل الزياد في عدد السمك يعطي بالعلاقة

$\frac{د س}{د ن} = \frac{١}{\sqrt{٢ن+١}}$ سمكة / يوم

حيث س: عدد السمك ، ن : الزمن باليوم ، فما عد السمك بمرور ٢٤ يوم.

الحل :

$دس = \frac{دن}{\sqrt{٢ن+١}} \Leftarrow \int .دس = \int \frac{دن}{\sqrt{٢ن+١}}$

$س = \int (٢ن+١)^{-\frac{١}{٢}} .دن$

$س = (٢ن+١)^{\frac{١}{٢}} + جـ$

نجد جـ $\Leftarrow$ ن = ٠ ، س = ١٠٠

$\Leftarrow ١٠٠ = ١ + جـ \Leftarrow جـ = ٩٩ \Leftarrow س = (٢ن+١)^{\frac{١}{٢}} + ٩٩$

$س|_{ن=٢٤} = (٢ \times ٢٤+١)^{\frac{١}{٢}} + ٩٩ = ٧ + ٩٩ = ١٠٦$

SALEM ALSATEB

١٢) آله صناعية قيمتها عند الشراء ٢٥٠٠ دينار وكانت قيمتها تناقص بمرور الزمن وفق العلاقة

$\frac{دق}{دن} = -٥٠٠ (ن+٢)^{-٢}$ حيث

ق: قيمتها بعد مرورن سنه من شرائها

إحسب قيمة الآلة بعد مرور (٣) سنوات من شرائها.

الحل :

$دق = -٥٠٠ (ن+٢)^{-٢}.دن$

$\Leftarrow \int.دق = \int -٥٠٠ (ن+٢)^{-٢}.دن$

$ق = ٥٠٠ (ن+٢)^{-١} + جـ$

نجد جـ $\Leftarrow$ ن=٠ ، ق=٢٥٠٠

$٢٥٠٠ = ٢٥٠ + جـ \Leftarrow جـ = ٢٢٥٠$

$ق = ٥٠٠ (ن+٢)^{-١} + ٢٢٥٠$

$ق(٣) = ١٠٠+٢٢٥٠ = ٢٣٥٠$

---

١٣) يزداد عدد سكان مدينة حسب العلاقة $\frac{دع}{دن} = ٠.٠٢٥ ع$ ، حيث ع : عدد السكان ، ن : الزمن بالسنوات ، اذا علمت ان عدد السكان في عام (٢٠١٧) يساوي (٢٠٠٠٠٠) نسمة ، فجد عدد السكان بعد (٤٠) عام؟

الحل:

$\int \frac{١}{ع}.دع = \int ٠.٠٢٥.دن$

$لو_هـ|ع| = ٠.٠٢٥ ن + جـ$

نجد جـ $\Leftarrow$ ع(٠) = ٢٠٠٠٠٠ $\Leftarrow$ $لو_هـ|٢٠٠٠٠٠| = جـ$

$لو_هـ ع = ٠.٠٢٥ ن + لو_هـ (٢٠٠٠٠٠)$

المطلوب : ع ، عندما ن = ٤٠

$لو_هـ ع = ٠.٠٢٥ \times ٤٠ + لو_هـ (٢٠٠٠٠٠)$

$ع = هـ^{١+لو_هـ ٢٠٠٠٠٠} \Leftarrow |ع|_{ن=٤٠} = ٢٠٠٠٠٠ هـ$

١٤)إذا كان ميل المماس للمنحنى ص يعطى بالعلاقة :

س (ص – ص^{٢}) وكان المنحنى يمر بالنقطة (١ ، ٢)

بيّن أنّ $٢ لو_هـ |\frac{ص}{١ - ص}| = س^{٢} + ٢ لو_هـ ٢ - ١$

..... واجب

SALEEM ALSATEB